UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA MARIA
CENTRO DE CIÊNCIAS NATURAIS E EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

EXISTÊNCIA E COMPORTAMENTO ASSINTÓTICO DAS SOLUÇÕES DE UM SISTEMA EM ELETROMAGNETISMO

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Graciele de Borba Gomes Arend

Santa Maria, RS, Brasil

2012

EXISTÊNCIA E COMPORTAMENTO ASSINTÓTICO DAS SOLUÇÕES DE UM SISTEMA EM ELETROMAGNETISMO

Graciele de Borba Gomes Arend

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado do Programa de Pós-Graduação em Matemática, Área de Concentração em Análise, da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM, RS), como requisito parcial para obtenção do grau de
Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Marcio Violante Ferreira

Santa Maria, RS, Brasil

2012

Universidade Federal de Santa Maria
Centro de Ciências Naturais e Exatas
Programa de Pós-Graduação em Matemática

A Comissão Examinadora, abaixo assinada,
aprova a Dissertação de Mestrado

EXISTÊNCIA E COMPORTAMENTO ASSINTÓTICO DAS SOLUÇÕES DE UM SISTEMA EM ELETROMAGNETISMO

elaborada por
Graciele de Borba Gomes Arend

como requisito parcial para obtenção do grau de
Mestre em Matemática

COMISSÃO EXAMINADORA:

Marcio Violante Ferreira, Dr.
(Orientador)

Vanilde Bisognin, Dr[a]. (UNIFRA)

Celene Buriol, Dr[a]. (UFSM)

Santa Maria, 27 de fevereiro de 2012.

Agradecimentos

Primeiramente agradeço à Deus, que esteve sempre me guiando, protegendo e dando força nesta caminhada.

À minha vó Zenilda por tudo que consegui e me tornei até hoje.

À minha família e meus amigos, por terem me ajudado e sempre me incentivado nos momentos difíceis, em especial ao meu esposo Anderson que esteve sempre ao meu lado.

Aos meus amigos do mestrado, em especial: Cinara, Lórens e Marcos, pela seriedade nas horas de estudos, ajuda e pelas alegrias nos inúmeros momentos de descontração.

Ao professor Marcio Violante Ferreira pela grande contribuição na minha formação, pela paciência, amizade e pelo incentivo em fazer o mestrado.

À professora Celene Buriol por estar sempre prestativa, pela amizade e ajuda constante ao longo destes anos.

Aos professores do Centro Universitário Franciscano e da Universidade Federal de Santa Maria que de alguma forma auxiliaram na minha formação.

Finalmente, gostaria de agradecer à CAPES pelo apoio financeiro.

RESUMO

Dissertação de Mestrado
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Universidade Federal de Santa Maria

EXISTÊNCIA E COMPORTAMENTO ASSINTÓTICO DAS SOLUÇÕES DE UM SISTEMA EM ELETROMAGNETISMO

AUTORA: GRACIELE DE BORBA GOMES AREND
ORIENTADOR: MARCIO VIOLANTE FERREIRA
Data e Local da Defesa: Santa Maria, 27 de fevereiro de 2012.

Neste trabalho, consideramos um sistema de equações de Maxwell, que modelam a propagação de ondas eletromagnéticas. Primeiramente provaremos a existência e unicidade de solução do sistema

$$\begin{aligned} \varepsilon E_t - \nabla \times H + \sigma E = 0, &\quad \text{em} \quad \Omega \times (0,\infty) \\ \mu H_t + \nabla \times E = 0, &\quad \text{em} \quad \Omega \times (0,\infty) \\ \nabla \cdot H = 0, &\quad \text{em} \quad \Omega \times (0,\infty) \\ E(x,0) = E_0(x) \quad \text{e} \quad H(x,0) = H_0(x), &\quad \text{em} \quad \Omega \\ E \times \nu|_\Gamma = 0 \quad \text{e} \quad H.\nu|_\Gamma = 0, &\quad \text{em} \quad \Gamma \times (0,\infty), \end{aligned}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ é um conjunto aberto, Γ é a fronteira $\partial\Omega$ de Ω e $E(x,t) = \big(E_1(x,t), E_2(x,t), E_3(x,t)\big)$ e $H(x,t) = \big(H_1(x,t), H_2(x,t), H_3(x,t)\big)$ denotam o campo elétrico e o campo magnético, respectivamente. As constantes σ, ε e μ (todas positivas) representam a condutividade elétrica, a permitividade elétrica e a permeabilidade magnética do meio, respectivamente. Denotamos por $\nu(x) = \big(\nu_1(x), \nu_2(x), \nu_3(x)\big)$ a normal unitária em Γ exterior a Ω. Após, analisaremos o comportamento assintótico da solução do sistema acima através do método da perturbação da energia ou de Lyapunov.

Palavras-chave: Equações de Maxwell. Eletromagnetismo. Existência e Unicidade de Solução. Comportamento Assintótico.

ABSTRACT

Dissertation
Graduate Program in Mathematics
Federal University of Santa Maria

ASYMPTOTIC BEHAVIOR AND EXISTENCE OF SOLUTIONS OF A SYSTEM IN ELECTROMAGNETISM

AUTHOR: GRACIELE DE BORBA GOMES AREND
ADVISOR: MARCIO VIOLANTE FERREIRA
Date and Location of Defense: Santa Maria, February 27^{nd}, 2012.

In this work, we consider a system of Maxwell's equations, which model the propagation of electromagnetic waves. First we prove the existence and uniqueness of the solution of the system

$$\begin{aligned} \varepsilon E_t - \nabla \times H + \sigma E = 0, &\quad \text{em} \quad \Omega \times (0,\infty) \\ \mu H_t + \nabla \times E = 0, &\quad \text{em} \quad \Omega \times (0,\infty) \\ \nabla \cdot H = 0, &\quad \text{em} \quad \Omega \times (0,\infty) \\ E(x,0) = E_0(x) \quad \text{e} \quad H(x,0) = H_0(x), &\quad \text{em} \quad \Omega \\ E \times \nu|_\Gamma = 0 \quad \text{e} \quad H.\nu|_\Gamma = 0, &\quad \text{em} \quad \Gamma \times (0,\infty), \end{aligned}$$

where $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ is an open set, Γ is the boundary $\partial\Omega$ of Ω and $E(x,t) = \big(E_1(x,t), E_2(x,t), E_3(x,t)\big)$ and $H(x,t) = \big(H_1(x,t), H_2(x,t), H_3(x,t)\big)$ denote the electric field and magnetic field, respectively. The constants σ, ε and μ (all positive) represent the electrical conductivity, electrical permittivity and magnetic permeability of the medium, respectively. We denote by $\nu(x) = \big(\nu_1(x), \nu_2(x), \nu_3(x)\big)$ the unit normal to the boundary Γ, oriented towards the exterior of Ω. After, we analyze the asymptotic behavior of the solution of the above system by the method of perturbation of the energy or Lyapunov method.

Keywords: Maxwell's Equations. Electromagnetism. Existence and Uniqueness of Solution. Asymptotic Behavior.

LISTA DE SÍMBOLOS

$x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$	ponto do espaço $\mathbb{R}^n$;
$x \cdot y = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$	produto interno em $\mathbb{R}^n$;
$\|x\| = \sqrt{x \cdot x}$	norma euclidiana de $x \in \mathbb{R}^n$;
$a \times b$	produto vetorial dos vetores $a, b \in \mathbb{R}^3$;
$(\ , \ )_X$	produto interno em X;
$\|\| \cdot \|\|_X$	norma no espaço X;
$u_t = \dfrac{\partial u}{\partial t}$	derivada de u em relação a t;
$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$	multi-índice;
$\|\alpha\| = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$	ordem do multi-índice α ;
q.s.	quase sempre;
V'	espaço dual do espaço normado V;
$\langle \ , \ \rangle$	produto na dualidade $V' \times V$;
$M^\perp$	complemento ortogonal de M;
$V \oplus W$	soma direta dos espaços V e W;
$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \frac{\partial f}{\partial x_3} \right)$	gradiente da função escalar f;
$\nabla \cdot v = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v_i}{\partial x_i}$	divergente da função $v = (v_1, \cdots, v_n)$;
$\nabla \times v = \left(\frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3}, \frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1}, \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right)$	rotacional da função $v = (v_1, v_2, v_3)$;
$\triangle f = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2 f}{\partial^2_{x_i}}$	laplaciano da função escalar f;
$\mathscr{L}(X, Y)$	conjunto dos operadores lineares e limitados;
$\mathscr{L}(X)$	álgebra dos operadores lineares e limitados de X;
$\{T(t)\}_{t \geq 0}$	semigrupo de operadores lineares e limitados de X;
K	conjunto compacto do $\mathbb{R}^n$;
Ω	aberto do $\mathbb{R}^n$, sendo $n = 3$ quando justificável;
Γ	fronteira de Ω;
ν	vetor normal unitário a Γ exterior a Ω;
$\frac{\partial v}{\partial \eta} = \nabla v \cdot \eta$	derivada normal de v
$L^2(\Omega)^3$	$L^2(\Omega) \times L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$;

$(\ , \ )$	produto interno em $L^2(\Omega)$ ou $L^2(\Omega)^3$;
$\vert\vert \cdot \vert\vert$	norma em $L^2(\Omega)$ ou $L^2(\Omega)^3$;
$C_0^k(\Omega)$	espaço das funções diferenciáveis até ordem k e com suporte compacto em Ω;
$\mathscr{D}(\Omega)$	$C_0^\infty(\Omega) = C^\infty(\Omega) \cap C_0(\Omega)$ com a noção de convergência;
$\mathscr{D}(\overline{\Omega})$	$\{\varphi\vert_\Omega;\ \varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)\}$;
$\mathscr{D}'(\Omega)$	$\{T : \mathscr{D}(T) \to \mathbb{R};\ T$ linear e contínua$\}$;
$W^{m,p}(\Omega)$	$\{u \in L^p(\Omega); D^\alpha u \in L^p(\Omega),$ para todo $\vert\alpha\vert \leq m\}$;
$H^m(\Omega)$	$W^{m,2}(\Omega)$;
$H^{\frac{1}{2}}(\Omega)$	$W^{\frac{1}{2},2}(\Omega)$;
$\vert\vert u\vert\vert_{W^{m,p}(\Omega)}$	$\left(\sum_{\vert\alpha\vert\leq m} \int_\Omega \vert\vert D^\alpha u(x)\vert\vert^p_{L^p(\Omega)} dx\right)^{\frac{1}{p}}$;
$\vert\vert u\vert\vert_{W^{m,\infty}(\Omega)}$	$\max_{\vert\alpha\vert\leq m} \vert\vert D^\alpha u\vert\vert_{L^\infty(\Omega)}$;
$W_0^{m,p}(\Omega)$	fecho de $C_0^\infty(\Omega)$ em $W^{m,p}(\Omega)$;
E, H	campo elétrico e campo magnético, respectivamente;
D, B	indução elétrica e indução magnética, respectivamente;
$H^1(\Omega)$	$\{v \in L^2(\Omega); \frac{\partial v}{\partial x_i} \in L^2(\Omega), i = 1, \cdots, n\}$;
$H(div, \Omega)$	$\{v \in L^2(\Omega)^n;\ \nabla \cdot v \in L^2(\Omega)\}$;
$H(rot, \Omega)$	$\{v \in L^2(\Omega)^3;\ \nabla \times v \in L^2(\Omega)^3\}$;
$H_0(div, \Omega)$	$\overline{\mathscr{D}(\Omega)^n}^{H(div,\Omega)}$;
$H_0(rot, \Omega)$	$\overline{\mathscr{D}(\Omega)^3}^{H(rot,\Omega)}$;
$H(div\ 0, \Omega)$	$\{u \in L^2(\Omega)^n;\ \nabla \cdot u = 0\}$;
$\gamma_\nu(u)$	$\nu \cdot u\vert_\Gamma$;
$\gamma_\tau(u)$	$\nu \times u\vert_\Gamma$;
$H_0(div\ 0, \Omega)$	$\{u \in L^2(\Omega)^n;\ \nabla \cdot u = 0$ e $\nu \cdot u\vert_\Gamma = 0\}$;
$H(rot\ 0, \Omega)$	$\{v \in L^2(\Omega)^3;\ \nabla \times v = 0\}$;
$H_0(rot\ 0, \Omega)$	$\{v \in L^2(\Omega)^3;\ \nabla \times v = 0$ e $\nu \times v\vert_\Gamma = 0\}$;
$grad\ H^1(\Omega)$	$\{\nabla p; p \in H^1(\Omega)\}$;
$rot\ H^1_{\tau 0}(\Omega)^3$	$\{\nabla \times v; v \in H^1(\Omega)^3\ e\ \nu \times v\vert_\Gamma = 0\}$;
$\mathbb{H}_1(\Omega)$	$H(rot\ 0, \Omega) \cap H_0(div\ 0, \Omega)$;
$\mathbb{H}_2(\Omega)$	$H_0(rot\ 0, \Omega) \cap H(div\ 0, \Omega) = \{u = \nabla\varphi; \varphi \in H^1(\Omega); \triangle\varphi = 0; \varphi\vert_\Gamma = \text{constante}\}$;
$C([0, \infty), X)$	espaço das funções contínuas de $[0, \infty)$ em X;
$C^1([0, \infty), X)$	espaço das funções de classe C^1 de $[0, \infty)$ em X.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Em 1873, James Clerk Maxwell fundou a teoria moderna do eletromagnestismo com a publicação de sua obra *Treatise on Eletricity and Magnetism*, e assim surgiram as equações que hoje em dia levam seu nome.

As equações de Maxwell consistem em dois pares acoplados de equações diferenciais parciais e governam o comportamento de um campo eletromagnético. Foram dedicados muitos anos de estudos sobre o comportamento de campos elétricos e magnéticos para obter estas equações. Podemos citar, por exemplo, os trabalhos de Coulomb, Gauss, Ampère e Faraday. Estas equações descrevem como cargas elétricas e correntes elétricas agem como fontes dos campos elétricos e campos magnéticos. Além disso, as equações de Maxwell descrevem como um campo elétrico que varia no tempo gera um campo magnético que também varia no tempo assim como campo magnético variável induz corrente elétrica. Este fenômeno de indução eletromagnética está presente, por exemplo, nos rádios, computadores, televisores e fornos de microondas.

É grande o número de engenheiros e matemáticos que tem buscado a análise de problemas de contorno resultantes das equações de Maxwell. De início, estavam procurando a solução através de métodos analíticos e, com o passar dos anos, começaram a utilizar métodos computacionais para analisar e realizar simulações sobre o comportamento das soluções obtidas. No campo da matemática, recentemente tem crescido o interesse em entender as propriedades matemáticas das equações de Maxwell e as relações que envolvem fenômenos eletromagnéticos. Podemos citar, por exemplo, os trabalhos de Ferreira [7], Ladyshenskaya [13], Nicaise [19], Nicaise e Pignotti [20], Phung [22], Yin [23] e [24] e Zhou [25].

Em alguns casos o que se faz é uma transformação das equações de Maxwell num modelo simplificado de modo que sua resolução seja mais acessível. Por exemplo, o modelo de correntes induzidas é obtido através das equações de Maxwell desprezando as correntes da Lei de Ampère.

Segundo Martinez (2008), o problema das correntes induzidas geralmente está definido em todo o espaço com condições de decaimento no infinito, no qual a técnica mais usada para resolver numericamente estas equações consiste em restringir as equações a um domínio suficientemente grande que contenha a região de interesse e impondo condições de contorno adequadas sobre sua fronteira. Existem na literatura distintos métodos numéricos que usam esta técnica, o método de elementos finitos é o mais utilizado. Suas principais vantagens são a flexibilidade em relação a geometria do problema e as abundantes ferramentas teóricas existentes para a análise da convergência.

Os fenômenos eletromagnéticos se descrevem através de quatro campos vetoriais que dependem da posição espacial $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ e do tempo $t \geq 0$. São eles: intensidade do campo elétrico E, deslocamento elétrico D, intensidade do campo magnético H e indução magnética B.

Os campos descritos acima são gerados por dois tipos de fontes: cargas elétricas e fluxos de carga elétrica variáveis, chamadas correntes. A distribuição de cargas é dada por uma função escalar ρ que representa a densidade da carga elétrica, e as correntes são descritas por uma função vetorial de densidade de corrente J.

As equações de Maxwell relacionam os campos vetoriais E, D, B e H e as funções ρ e J. Tais equações, na sua forma diferencial, são:

$$\frac{\partial D}{\partial t} - rot\ H = -J \tag{1}$$

$$\frac{\partial B}{\partial t} + rot\ E = 0 \tag{2}$$

$$div\ D = \rho \tag{3}$$

$$div\ B = 0, \tag{4}$$

onde div e rot representam os operadores diferenciais divergente e rotacional, respectivamente.

Observemos que em coordenadas cartesianas esses operadores estão definidos por

$$div\ F = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial F_i}{\partial x_i} = \frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F_2}{\partial x_2} + \frac{\partial F_3}{\partial x_3}$$

e

$$rot\ F = \left(\frac{\partial F_3}{\partial x_2} - \frac{\partial F_2}{\partial x_3}, \frac{\partial F_1}{\partial x_3} - \frac{\partial F_3}{\partial x_1}, \frac{\partial F_2}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \right),$$

onde F representa a função vetorial $F(x_1, x_2, x_3) = \big(F_1(x_1, x_2, x_3), F_2(x_1, x_2, x_3), F_3(x_1, x_2, x_3)\big)$.

Também utilizamos a notação $\nabla \cdot F$ para denotar o *divergente* de F e $\nabla \times F$ para denotar o *rotacional* de F. Além destes operadores, também usaremos o operador *gradiente* de funções escalares $f(x)$, que denotaremos por $grad$ e definimos como

$$grad\ f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \frac{\partial f}{\partial x_3} \right).$$

Um estudo detalhado sobre estes operadores diferenciais será feito nas Preliminares, seção 1.7.

A equação (1) é chamada de Lei de Ampère-Maxwell e relaciona o deslocamento elétrico com a variação no tempo do campo magnético. Esta lei coincide com a Lei de Ampère com a adição do termo $\frac{\partial D}{\partial t}$ que foi introduzido por Maxwell e este termo é conhecido como correntes de deslocamento.

A equação (2) é a Lei de Faraday e relaciona a variação do campo elétrico com a indução magnética.

A equação (3) é a Lei de Gauss e significa que o fluxo da indução elétrica através de uma superfície fechada é igual a carga líquida dentro da superfície, o qual implica que as linhas de cargas elétricas começam e terminam com cargas elétricas.

Finalmente, a equação (4) é conhecida como Lei de Gauss do magnetismo e afirma que o fluxo da indução magnética através de qualquer superfície fechada é nulo.

A partir das equações (1) e (3) podemos relacionar as densidades ρ e J através da equação

$$\nabla \cdot J + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0,$$

conhecida como equação da conservação da eletricidade. Levando em consideração este fato, a partir de agora, as equações fundamentais do sistema de Maxwell serão as leis (1) e (2).

Para obter um sistema fechado a partir das equações de Maxwell (1) e (2), precisamos de uma informação adicional que relacione os campos entre si. Esta informação é dada através das leis constitutivas $B = \mu H$ e $D = \varepsilon E$ e pela Lei de Ohm $J = \sigma E$, onde μ é a permeabilidade magnética, ε representa a permitividade elétrica, J é a densidade da corrente e por σ está denotada a condutividade elétrica.

Os parâmetros ε, μ e σ são funções escalares, não negativas e limitadas, mas neste trabalho, adotaremos todas como constantes positivas.

Diante do exposto e considerando $\rho = 0$ temos o seguinte conjunto de equações:

$$\begin{aligned} \varepsilon E_t - \nabla \times H + \sigma E = 0, &\quad \text{em} \quad \Omega \times (0, \infty), \\ \mu H_t + \nabla \times E = 0, &\quad \text{em} \quad \Omega \times (0, \infty), \\ \nabla \cdot H = 0, &\quad \text{em} \quad \Omega \times (0, \infty). \end{aligned}$$

No instante $t = 0$, iremos supor que o campo elétrico $E(x, 0) = E_0(x)$ e o campo magnético $H(x, 0) = H_0(x)$ em Ω sejam conhecidos.

Além destas condições iniciais, precisamos de condições de fronteira e para isso consideramos Ω um condutor perfeito (onde no seu interior o campo é nulo). Fisicamente, portanto, faz sentido considerar as seguintes condições de fronteira:

$$E \times \nu|_\Gamma = 0 \quad \text{e} \quad H.\nu|_\Gamma = 0, \quad \text{em} \quad \Gamma \times (0, \infty),$$

em que $\nu(x) = \big(\nu_1(x), \nu_2(x), \nu_3(x)\big)$ denota o vetor normal exterior unitário a $x \in \Gamma$.

A partir do sistema, das condições iniciais e das condições de contorno dadas acima, nosso trabalho será provar a existência e unicidade de solução num espaço funcional adequado.

Também vamos estudar o comportamento assintótico da solução do sistema considerado.

Tal sistema apresenta uma dissipação de energia, dada pelo termo σE. A energia associada ao sistema é dada pela seguinte expressão:

$$\mathscr{E}(t) = \frac{1}{2} \int_\Omega \left[\varepsilon |E(x,t)|^2 + \mu |H(x,t)|^2 \right] \, dx$$

e, como veremos mais adiante, satisfaz

$$\frac{d}{dt} \mathscr{E}(t) = -\sigma \int_\Omega |E(x,t)|^2 \, dx \leq 0,$$

o que mostra o caráter dissipativo do sistema em questão.

O trabalho é dividido em três capítulos, do seguinte modo:

No Capítulo 1 é estudado todo o embasamento teórico para a resolução e entendimento das equações de Maxwell. Começamos trabalhando com os espaços de *Hilbert* e com os espaços L^p *e* L^∞. Após, é feita uma revisão da *Teoria das distribuições*. Depois estudamos os espaços de *Sobolev* para, assim, chegar aos espaços funcionais $H(rot, \Omega)$ e $H(div, \Omega)$, sendo esses últimos os espaços naturais da teoria matemática do eletromagnetismo. Finalizamos o capítulo estudando a *Teoria de semigrupos de operadores lineares*.

No Capítulo 2, consideramos as equações de Maxwell e dividimos este capítulo em duas seções. Na primeira seção é trabalhada a existência e unicidade de solução do sistema. Aqui, utilizamos Teoremas como o de Lax-Milgram e o de Lumer-Phillips, encontrados em [2] e [21], respectivamente. Algumas das idéias utilizadas nesta seção foram retiradas do trabalho de Nicaise e Pignotti [20]. Na segunda seção, com o intuito de obter solução mais regular, vamos restringir o domínio da solução do sistema. Para isso trabalhamos com uma decomposição ortogonal adequada e mostramos que há solução no domínio considerado.

Para finalizar, no Capítulo 3, é feito um estudo sobre o comportamento assintótico da solução através do método da perturbação da energia ou de Lyapunov. Aqui, é de fundamental importância a utilização da decomposição ortogonal obtida e provada no capítulo anterior. As hipóteses sobre o domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, neste capítulo, são aquelas fixadas na seção 2.2, ou seja, Ω é limitado, simplesmente conexo e com fronteira Γ de classe $C^r (r \geq 2)$. Damos aqui um enfoque diferente daquele que foi feito por Phung [22].

Capítulo 1

PRELIMINARES

Os resultados e definições que apresentaremos neste primeiro capítulo constituem as ferramentas básicas que utilizaremos nos capítulos seguintes deste trabalho.

As notações utilizadas são as clássicas. Para os resultados apresentados sem demonstração, indicaremos uma ou mais referências.

1.1 Espaços de Hilbert

Definição 1.1 *Seja H um espaço vetorial sobre o campo escalar $K (K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$. Um produto interno em H é uma aplicação $(\ ,\ )_H : H \times H \to K$ que satisfaz, $\forall\ x, y, z \in H$ e $\alpha \in K$:*

(a) $(x + y, z)_H = (x, z)_H + (y, z)_H$;

(b) $(\alpha x, y)_H = \alpha(x, y)_H$;

(c) $(x, y)_H = \overline{(y, x)}_H$;

(d) $(x, x)_H \geq 0$ *e* $(x, x)_H = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

A norma no espaço vetorial H, induzida pelo produto interno $(\ ,\ )_H$, será denotada por $||.||_H$. Um *espaço de Hilbert* é um espaço com produto interno que é completo com a norma $||.||_H$.

No que segue, se V é um espaço vetorial normado, então V' denotará o dual topológico de V.

Teorema 1.1 (Representação de Riez-Fréchet) *Seja H um espaço de Hilbert. Dado $f \in H'$ existe um único $z \in H$ tal que*

$$f(x) = (x, z)_H,\ \forall\ x \in H.$$

Além disso, $||f||_{H'} = ||z||_H$.

Demonstração: Ver referências [2] e [12]. ∎

Definição 1.2 *Seja H um espaço de Hilbert real. Uma aplicação $a : H \times H \to \mathbb{R}$ é chamada uma forma bilinear se $a(u, .)$ é linear para cada $u \in H$ e $a(., v)$ é linear para cada $v \in H$. Dizemos ainda que*

(a) $a(u, v)$ é contínua se existe constante K tal que

$$|a(u, v)| \leq K||u||_H||v||_H, \; \forall \; u, v \in H;$$

(b) $a(u, v)$ é coerciva se existe constante $\alpha > 0$ tal que

$$a(v, v) \geq \alpha||v||_H^2, \; \forall \; v \in H.$$

O teorema a seguir, cuja demonstração pode ser encontrada em [2], é de fundamental importância no estudo da existência de soluções de equações diferenciais parciais e será utilizado no Capítulo 2.

Teorema 1.2 (Lax-Milgram) *Seja H um espaço de Hilbert real e $a : H \times H \to \mathbb{R}$ uma forma bilinear, contínua e coerciva sobre H. Se $f \in H'$, então existe único $u \in H$ tal que*

$$a(u, v) = f(v), \; \textit{para todo } v \in H.$$

1.2 Os espaços L^p

Faremos agora uma breve revisão sobre os espaços L^p.

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto e $1 \leq p < \infty$. Denotamos por $L^p(\Omega)$ o espaço das funções reais u, mensuráveis, tais que $|u|^p$ é integrável a Lebesgue em Ω, ou seja

$$L^p(\Omega) = \{u : \Omega \to \mathbb{R}; \; u \text{ é mensurável e } \int_\Omega |u|^p dx < \infty\}.$$

Naturalmente, os espaços L^p são formados por classes de equivalência onde f e g estão na mesma classe se $f = g$ quase sempre em Ω.

Em $L^p(\Omega)$, a função

$$||u||_p = \Big(\int_\Omega |u|^p \; dx\Big)^{\frac{1}{p}}$$

define uma norma, com a qual $L^p(\Omega)$ é um espaço de Banach. Quando $p = 2$, temos que $L^2(\Omega)$ é um espaço de Hilbert munido do produto interno

$$(u, v)_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega u \; v \; dx, \; \forall \; u, v \in L^2(\Omega)$$

e da norma

$$||u||_{L^2(\Omega)} = \Big(\int_\Omega |u|^2 dx\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

Nos capítulos seguintes, usaremos a notação $||u||$ quando se tratar da norma $||u||_{L^2(\Omega)}$ de uma função de $L^2(\Omega)$. Da mesma forma, $(\ ,\ )$ denotará o produto interno em $L^2(\Omega)$.

1.3 O espaço L^∞

Definição 1.3 *Um número real λ é dito majorante essencial de uma função u quando $u(x) \leq \lambda$ quase sempre.*

Definição 1.4 *Seja A o conjunto de todos os majorantes essenciais de uma função u. Definimos o supremo essencial de u, que denotamos por $\sup ess\ u$, como sendo o ínfimo de A, ou seja, $\sup ess\ u = \inf A$.*

Diz-se que uma função u é essencialmente limitada quando $\sup ess|u|$ é finito.

Definição 1.5 *Quando $p = +\infty$, $L^\infty(\Omega)$ denotará o espaço das funções reais, mensuráveis e essencialmente limitadas em Ω.*

Munido da norma

$$||u||_{L^\infty(\Omega)} = \sup_{x\in\Omega} ess|u(x)| = \inf\{\lambda \in \mathbb{R}; u \leq \lambda\ q.s\}$$

o espaço $L^\infty(\Omega)$ é um espaço de Banach.

Proposição 1.1 (Desigualdade de Young) *Se a e b são números reais não negativos, $1 < p < \infty$ e $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, então*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Demonstração: Ver [2]. ∎

Observação 1.1 *Em algumas situações usaremos a desigualdade de Young na forma mais conveniente*

$$ab \leq c(\varepsilon)a^p + \varepsilon b^q, \tag{1.1}$$

onde $\varepsilon > 0$ e $c(\varepsilon) = \frac{q-1}{q^p}\varepsilon^{1-p}$.

Proposição 1.2 (Desigualdade de Hölder) *Se $u \in L^p$, com $1 < p < \infty$ e $v \in L^q$, com $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, então $uv \in L^1$ e tem-se a desigualdade*

$$\int_\Omega |uv|\ dx \leq ||u||_p ||v||_q.$$

Demonstração: Ver [2]. ∎

Proposição 1.3 (Desigualdade de Minkowski) *Se* $u, v \in L^p$ *então*

$$\| u + v \|_p \leq \| u \|_p + \| v \|_p,$$

onde $1 \leq p \leq \infty$.

Demonstração: Ver [2]. ∎

1.4 Espaço das funções teste

Denotaremos por $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ os pontos do $\mathbb{R}^n$, por $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$ um multi-índice e por $|\alpha|$ a ordem do multi-índice α, ou seja, $|\alpha| = \sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_j$.

Por $\mathbf{D}^\alpha$ denotaremos o operador derivação

$$\mathbf{D}^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

No caso em que $\alpha = (0, 0, \cdots 0)$, o operador derivação será igual ao operador identidade.

Definição 1.6 *Seja* $u : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *uma função contínua. O suporte de* u*, que denotamos* $supp(u)$*, é definido como o complemento do maior conjunto aberto no qual* u *se anula, isto é,*

$$supp(u) = \overline{\{x \in \Omega; u(x) \neq 0\}}.$$

Observação 1.2 *A noção acima não é adequada quando se trabalha com funções de* L^p*. No entanto, é possível definir o suporte para funções deste tipo trabalhando-se com suas classes de equivalência. Uma abordagem mais detalhada sobre isto pode ser encontrada em [2].*

O conjunto das funções $\phi : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ que são infinitamente diferenciáveis em Ω e que têm suporte compacto contido em Ω será denotado por $C_0^\infty(\Omega)$.

Definição 1.7 *Seja* Ω *um subconjunto aberto do* $\mathbb{R}^n$*. Diz-se que* $u : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *é localmente integrável em* Ω *quando* u *for integrável sobre cada compacto contido em* Ω*. O espaço vetorial das funções localmente integráveis será denotado por* $L^1_{loc}(\Omega)$*.*

Definição 1.8 *Uma função* $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ *é derivável no sentido fraco em* Ω*, quando existe uma função* $v \in L^1_{loc}(\Omega)$ *tal que*

$$\int_\Omega u(x) \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_k} dx = -\int_\Omega v(x) \varphi(x) dx, \ \forall \ \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

A função $v \in L^1_{loc}(\Omega)$ denomina-se a derivada fraca de u em relação a x_k e representa-se v por $\frac{\partial u}{\partial x_k}$.

De modo mais geral, uma função $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ possui derivada parcial fraca de ordem k em Ω quando existe $v \in L^1_{loc}(\Omega)$ tal que

$$\int_\Omega u(x)D^k\varphi(x) = (-1)^{|k|}\int_\Omega v(x)\varphi(x)dx, \forall\ \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Definição 1.9 *Diz-se que uma sucessão $\{\varphi_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ de funções de $C_0^\infty(\Omega)$ converge para zero quando as seguintes condições forem satisfeitas:*

(a) Todas as funções φ_ν da sequência possuem seus suportes contidos em um mesmo compacto de Ω;

(b) A sucessão $\{\varphi_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente para zero em Ω, juntamente com todas as suas derivadas.

Definição 1.10 *Diz-se que uma sucessão $\{\varphi_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ de $C_0^\infty(\Omega)$ converge para uma função $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ quando*

$$\phi_\nu = (\varphi_\nu - \varphi) \longrightarrow 0 \text{ em } \Omega \text{ quando } \nu \to \infty.$$

O espaço vetorial $C_0^\infty(\Omega)$ com a noção de convergência acima definida é denominado por espaço das funções teste e representado por $\mathscr{D}(\Omega)$.

1.5 Teoria das distribuições

Definição 1.11 *Denomina-se distribuição sobre $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ a toda forma linear*

$$\begin{array}{rcl} T\ :\ \mathscr{D}(\Omega) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \varphi & \longrightarrow & \langle T,\varphi\rangle \end{array}$$

que é contínua no sentido da convergência definida sobre $\mathscr{D}(\Omega)$ anteriormente.

Definição 1.12 *Seja $S = \{T : \mathscr{D}(\Omega) \to \mathbb{R};\ T$ é uma distribuição$\}$. Diz-se que uma sucessão $(T_\nu) \in S$ converge para uma distribuição T em S quando, $\forall\ \varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$,*

$$(\langle T_\nu,\varphi\rangle)_\nu \to \langle T,\varphi\rangle.$$

O conjunto de todas as distribuições sobre Ω constitui um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ que representa-se por $\mathscr{D}'(\Omega)$.

O seguinte lema traz um importante resultado sobre densidade e sua demonstração encontra-se em [1], [3] ou [17].

Lema 1.1 *O espaço $C_0^\infty(\Omega)$ é denso em $L^p(\Omega)$, para $1 \leq p < \infty$.*

Definição 1.13 *Seja $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_N), 1 \leq N \leq n,\ \alpha_i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ um multi-índice. Definimos a derivada de ordem α de uma distribuição T sobre $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, como sendo o funcional $D^\alpha T$ definido por*

$$\begin{array}{rcl} D^\alpha T \ : \ \mathscr{D}(\Omega) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \varphi & \longrightarrow & \langle D^\alpha T, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, D^\alpha \varphi \rangle. \end{array}$$

1.6 Espaços de Sobolev

Seja Ω um subconjunto aberto do $\mathbb{R}^n$ e $1 \leq p \leq \infty$. Se $u \in L^p$, então u possui derivadas de todas as ordens no sentido das distribuições, porém não é verdade, em geral, que $D^\alpha u$ seja distribuição definida por uma função L^p. Isto motiva a introdução dos Espaços de Sobolev.

Definição 1.14 *Define-se por $W^{m,p}(\Omega)$, com $m \in \mathbb{N}$, o espaço vetorial de todas as funções $u \in L^p(\Omega)$ tal que, $\forall\ |\alpha| \leq m$, $D^\alpha u \in L^p(\Omega)$, sendo $D^\alpha u$ a derivada de u no sentido das distribuições. Para cada $u \in W^{m,p}(\Omega)$ definimos a norma de u da seguinte maneira:*

$$||u||_{m,p} = \Big(\sum_{|\alpha| \leq m} \int_\Omega |D^\alpha u(x)|^p dx \Big)^{\frac{1}{p}}, \ \ se\ 1 \leq p < \infty,$$

$$||u||_{m,\infty} = \max_{|\alpha| \leq m} ||D^\alpha u||_{L^\infty(\Omega)}, \ \ se\ p = \infty.$$

O espaço normado $(W^{m,p}(\Omega), ||\cdot||_{m,p})$ é denominado espaço de Sobolev de ordem m. Assim,

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega); D^\alpha u \in L^p(\Omega)\ para\ |\alpha| \leq m\}.$$

Proposição 1.4 *O espaço de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$, munido da norma*

$$||u||_{m,p} = \Big(\sum_{|\alpha| \leq m} \int_\Omega |D^\alpha u(x)|^p dx \Big)^{\frac{1}{p}}, \ \ se\ 1 \leq p < \infty$$

e

$$||u||_{m,\infty} = \max_{|\alpha| \leq m} ||D^\alpha u||_{L^\infty(\Omega)},$$

é um espaço de Banach.

Demonstração: Ver [17]. ∎

Observação 1.3 *Quando $p = 2$, representa-se por $W^{m,2}(\Omega) = H^m(\Omega)$ e temos que $H^m(\Omega)$ é espaço de Hilbert .*

Neste caso, a norma e o produto interno são representados da seguinte maneira, respectivamente:

$$||u||_{H^m(\Omega)} = \Big(\sum_{|\alpha|\leq m} \int_\Omega |D^\alpha u(x)|^2 dx\Big)^{\frac{1}{2}}$$

e

$$(u,v)_{H^m(\Omega)} = \sum_{|\alpha|\leq m} \int_\Omega D^\alpha u(x) D^\alpha v(x) dx,\ \forall\ u,v \in H^m(\Omega).$$

Definição 1.15 *Denotamos por* $W_0^{m,p}(\Omega)$ *o fecho de* $C_0^\infty(\Omega)$ *em* $W^{m,p}(\Omega)$.

Teorema 1.3 (Rellich-Kondrachov) *Seja* Ω *um subconjunto aberto, limitado e de classe* C^1 *do* $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$. *Então as seguintes imersões são compactas:*

(a) $W^{1,p}(\Omega) \underset{c}{\hookrightarrow} L^q(\Omega), 1 \leq q < \frac{np}{n-p}$, *se* $p < n$;

(b) $W^{1,p}(\Omega) \underset{c}{\hookrightarrow} L^q(\Omega), 1 \leq q < \infty$, *se* $p = n$;

(c) $W^{1,p}(\Omega) \underset{c}{\hookrightarrow} C(\overline{\Omega})$, *se* $p > n$.

Demonstração: Ver [1] ou [3]. ■

1.7 Os espaços $H(rot,\Omega)$ e $H(div,\Omega)$

Os espaços de Sobolev vistos na seção anterior são os mais clássicos utilizados na teoria de equações diferenciais parciais.

No entanto, quando se estudam as equações que modelam fenômenos eletromagnéticos - objetivo deste trabalho - outros espaços funcionais devem ser considerados. É sobre este ferramental funcional básico em eletromagnetismo que trataremos agora.

Seja Ω um conjunto aberto de $\mathbb{R}^n$. Como antes, $\mathscr{D}'(\Omega)$ denotará o espaço das distribuições.

Usaremos seguidamente a notação V^n para denotar o produto cartesiano

$$V^n = V \times V \times \cdots \times V, \quad (\text{n} \ \ \text{vezes}),$$

do espaço vetorial V.

Em $\mathscr{D}'(\Omega)$ definimos o operador linear

$$\begin{array}{rccl} grad: & \mathscr{D}'(\Omega) & \longrightarrow & \mathscr{D}'(\Omega)^n \\ & v & \longrightarrow & grad\ v = \left(\frac{\partial v}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial v}{\partial x_n}\right), \end{array}$$

chamado *gradiente de* v que, em notação alternativa, escreve-se ∇v.

Definimos também o *operador divergente*, sobre $\mathscr{D}'(\Omega)^n$, do seguinte modo

$$\begin{array}{rcl} div: \ \mathscr{D}'(\Omega)^n & \longrightarrow & \mathscr{D}'(\Omega) \\ v & \longrightarrow & div\ v = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v_i}{\partial x_i}, \end{array}$$

onde $v = (v_1, \cdots, v_n)$. Usaremos também a notação $\nabla \cdot v$ para o divergente do campo v.

Quando $n = 3$, definimos o *rotacional* de $v \in \mathscr{D}'(\Omega)^3$ pondo

$$rot\ v = \left(\frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3}, \frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1}, \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right).$$

Uma notação também usada para o rotacional de v é $\nabla \times v$.

É de simples verificação as seguintes propriedades:

$$\nabla \times (\nabla v) = 0, \ \forall\ v \in \mathscr{D}'(\Omega) \tag{1.2}$$

e

$$\nabla \cdot (\nabla \times v) = 0, \ \forall\ v \in \mathscr{D}'(\Omega)^3, \tag{1.3}$$

o que significa que

$$Im\ (\nabla) \subset \mathscr{N}(\nabla \times)$$

e

$$Im\ (\nabla \times) \subset \mathscr{N}(\nabla \cdot).$$

Aqui Im e $\mathscr{N}$ representam, respectivamente, os conjuntos *Imagem* e *Núcleo* dos operadores indicados.

São de fácil demonstração, também, as relações

$$\langle \nabla \cdot v, \varphi \rangle = \langle v, -\nabla \varphi \rangle, \ \forall\ v \in \mathscr{D}'(\Omega)^n, \forall\ \varphi \in \mathscr{D}(\Omega), \tag{1.4}$$

indicando que div é o transposto formal de $-\nabla$, e

$$\langle \nabla \times v, \varphi \rangle = \langle v, \nabla \times \varphi \rangle, \ \forall\ v \in \mathscr{D}'(\Omega)^3, \forall\ \varphi \in \mathscr{D}(\Omega)^3, \tag{1.5}$$

ou seja, rot é o seu próprio transposto formal.

É importante salientar que se $v \in \mathscr{D}'(\Omega)^n$ então $v = (v_1, v_2, \cdots, v_n)$, com $v_i \in \mathscr{D}'(\Omega)$. Assim,

$$\langle v, \varphi \rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle v_i, \varphi_i \rangle, \ \forall\ \varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n) \in \mathscr{D}(\Omega)^n.$$

Nota-se que o *domínio máximo* do operador *gradiente* em $L^2(\Omega)$ é o espaço

$$H^1(\Omega) = \{v \in L^2(\Omega); \frac{\partial v}{\partial x_i} \in L^2(\Omega), i = 1, \cdots, n\}.$$

Neste trabalho, faremos uso de algumas identidades vetoriais, que são de fácil demonstração e estão condensadas na proposição a seguir.

Proposição 1.5 *Sejam A e B funções vetoriais definidas em $\mathbb{R}^3$ e $\varphi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função escalar. São válidas as seguintes identidades vetoriais:*

(a) $\nabla \cdot (A \times B) = B \cdot (\nabla \times A) - A \cdot (\nabla \times B)$;

(b) $\nabla \cdot (\varphi A) = \varphi \nabla \cdot A + A \cdot \nabla \varphi$;

(c) $A \cdot (B \times C) = (A \times B) \cdot C = (C \times A) \cdot B$.

Introduziremos agora os espaços funcionais básicos utilizados em eletromagnetismo. Como de hábito, $||v||$ denotará a norma em $L^2(\Omega)^n$, ou seja,

$$||v||^2 = \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega |v_i|^2 \, dx, \text{ onde } v = (v_1, \cdots, v_n) \in L^2(\Omega)^n$$

e $(\ ,\ )$ denotará o produto escalar em $L^2(\Omega)^n$, isto é,

$$(u, v) = \int_\Omega u \cdot v \, dx = \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega u_i v_i \, dx,$$

onde $u = (u_1, \cdots, u_n), v = (v_1, \cdots, v_n) \in L^2(\Omega)^n$.

Definimos agora

$$H(div, \Omega) = \{v \in L^2(\Omega)^n; \nabla \cdot v \in L^2(\Omega)\},$$

e o produto escalar, em $H(div, \Omega)$, por

$$(u, v)_{H(div,\Omega)} = (u, v) + (\nabla \cdot u, \nabla \cdot v), \forall\, u, v \in H(div, \Omega).$$

Proposição 1.6 *$H(div, \Omega)$ é um espaço de Hilbert com a norma*

$$||v||_{H(div,\Omega)} = \left(||v||^2 + ||\nabla \cdot v||^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Demonstração: Como o espaço $H(div, \Omega)$ é normado com a norma induzida pelo produto interno, basta mostrar que este espaço é completo.

Seja $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de Cauchy em $H(div, \Omega)$. Logo, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(\nabla \cdot v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ são sequências de Cauchy em $L^2(\Omega)^n$ e $L^2(\Omega)$, respectivamente. Uma vez que $L^2(\Omega)^n$ e $L^2(\Omega)$ são espaços de Banach, garantimos que

$$v_n \to v \in L^2(\Omega)^n \text{ e } \nabla \cdot v_n \to g \in L^2(\Omega),$$

quando $n \to \infty$. Vamos mostrar que $g = \nabla \cdot v$.

Como consequência da convergência $\nabla \cdot v_n \to g$ em $L^2(\Omega)$, quando $n \to \infty$, obtemos $\nabla \cdot v_n \to g$ em $\mathscr{D}'(\Omega)$, quando $n \to \infty$. Assim,

$$\langle \nabla \cdot v_n, \varphi \rangle \to \langle g, \varphi \rangle, \ \forall \ \varphi \in \mathscr{D}(\Omega). \tag{1.6}$$

Analogamente, visto que $v_n \to v$ em $L^2(\Omega)^n$, temos $v_n \to v$ em $\mathscr{D}'(\Omega)^n$ e, então,

$$\langle v_n, \varphi \rangle \to \langle v, \varphi \rangle, \ \forall \ \varphi \in \mathscr{D}(\Omega)^n. \tag{1.7}$$

Utilizando (1.4) vemos que, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\langle \nabla \cdot v_n, \varphi \rangle = \langle v_n, -\nabla\varphi \rangle, \ \forall \ \varphi \in \mathscr{D}(\Omega).$$

Como $(-\nabla\varphi) \in \mathscr{D}(\Omega)^3$, segue de (1.7) que

$$\langle \nabla \cdot v_n, \varphi \rangle = \langle v_n, -\nabla\varphi \rangle \to \langle v, -\nabla\varphi \rangle.$$

Com isso,

$$\langle \nabla \cdot v_n, \varphi \rangle \to \langle v, -\nabla\varphi \rangle = \langle \nabla \cdot v, \varphi \rangle, \ \forall \ \varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$$

e, por (1.6), concluímos que

$$\langle \nabla \cdot v, \varphi \rangle = \langle g, \varphi \rangle, \ \forall \ \varphi \in \mathscr{D}(\Omega).$$

Logo, no sentido das distribuições, $g = \nabla \cdot v$. Temos, portanto,

$$v \in H(div, \Omega) \text{ e } ||v_n - v||_{H(div,\Omega)} \to 0 \text{ quando } n \to \infty,$$

donde concluímos que $H(div, \Omega)$ é completo. ■

Denotaremos $H_0(div, \Omega) = \overline{\mathscr{D}(\Omega)^n}^{H(div,\Omega)}$.

Consideremos agora o espaço

$$H(rot, \Omega) = \{v \in L^2(\Omega)^3; \nabla \times v \in L^2(\Omega)^3\}.$$

Em $H(rot,\Omega)$ definimos o produto escalar

$$(u,v)_{H(rot,\Omega)} = (u,v) + (\nabla \times u, \nabla \times v), \forall\, u,v \in H(rot,\Omega).$$

Note-se que estamos usando a mesma notação (,) para o produto escalar em $L^2(\Omega)$ e em $L^2(\Omega)^3$.

Proposição 1.7 *$H(rot,\Omega)$ é um espaço de Hilbert com a norma*

$$||v||_{H(rot,\Omega)} = \left(||v||^2 + ||\nabla \times v||^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Demonstração: Como o espaço $H(rot,\Omega)$ é normado com a norma induzida pelo produto interno, basta mostrar que este espaço é completo.

Seja $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de Cauchy em $H(rot,\Omega)$. Logo, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(\nabla \times v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ são sequências de Cauchy em $L^2(\Omega)^3$.

Do fato de $L^2(\Omega)^3$ ser um espaço de Banach, garantimos que

$$v_n \to v \in L^2(\Omega)^3 \;\text{ e }\; \nabla \times v_n \to g \in L^2(\Omega)^3 \text{ quando } n \to \infty.$$

Vamos mostrar que $g = \nabla \times v$.

Da convergência $v_n \to v \in L^2(\Omega)^3$ resulta que $v_n \to v \in \mathscr{D}'(\Omega)^3$ e, assim,

$$\langle v_n, \varphi\rangle \to \langle v, \varphi\rangle, \quad \forall\, \varphi \in \mathscr{D}(\Omega)^3. \tag{1.8}$$

Do fato de $\nabla \times v_n \to g \in L^2(\Omega)^3$ obtemos $\nabla \times v_n \to g$ em $\mathscr{D}'(\Omega)^3$ e então

$$\langle \nabla \times v_n, \varphi\rangle \to \langle g, \varphi\rangle, \quad \forall\, \varphi \in \mathscr{D}(\Omega)^3. \tag{1.9}$$

Da identidade (1.5), obtemos

$$\langle \nabla \times v_n, \varphi\rangle = \langle v_n, \nabla \times \varphi\rangle, \;\forall\, \varphi \in \mathscr{D}(\Omega)^3.$$

Como $\nabla \times \varphi \in \mathscr{D}(\Omega)^3$, utilizando (1.8) vem que

$$\langle \nabla \times v_n, \varphi\rangle = \langle v_n, \nabla \times \varphi\rangle \to \langle v, \nabla \times \varphi\rangle,$$

ou seja,

$$\langle \nabla \times v_n, \varphi\rangle \to \langle \nabla \times v, \varphi\rangle, \;\forall\, \varphi \in \mathscr{D}(\Omega)^3.$$

E, por (1.9), concluímos que

$$\langle \nabla \times v, \varphi \rangle = \langle g, \varphi \rangle, \ \forall \ \varphi \in \mathscr{D}(\Omega)^3.$$

Logo, no sentido das distribuições, $g = \nabla \times v$. Temos, portanto,

$$v \in H(rot, \Omega) \text{ e } ||v_n - v||_{H(rot,\Omega)} \to 0 \text{ quando } n \to \infty,$$

donde concluímos que $H(rot, \Omega)$ é completo. ∎

Denotaremos $H_0(rot, \Omega) = \overline{\mathscr{D}(\Omega)^3}^{H(rot,\Omega)}$.

Observação 1.4 *É importante notar que*

$$H^1(\Omega)^n \subsetneq H(div, \Omega)$$

e que

$$H^1(\Omega)^3 \subsetneq H(rot, \Omega).$$

Como se sabe, da teoria clássica dos Espaços de Sobolev, estão bem definidas as aplicações traço nos espaços $H^m(\Omega)$. Nos espaços $H(div, \Omega)$ e $H(rot, \Omega)$, a situação é um pouco mais complicada.

Além disso, considera-se, em geral, restrições à fronteira $\partial\Omega$ de Ω do tipo

$$v \cdot \nu|_{\partial\Omega} \quad \text{e} \quad v \times \nu|_{\partial\Omega},$$

que são condições de fronteira clássicas em sistemas que modelam fenômenos eletromagnéticos.

É sobre esses teoremas de traço que falaremos agora.

Por $\mathscr{D}(\overline{\Omega})^n$ estaremos denotando o espaço

$$\mathscr{D}(\overline{\Omega})^n = \{\varphi|_\Omega, \ \varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)^n\}.$$

No restante deste trabalho, a normal exterior a Ω em $\partial\Omega$ será denotada por ν.

Teorema 1.4 (Teorema do traço para $H(div, \Omega)$) *Seja Ω um conjunto aberto do $\mathbb{R}^n$ com fronteira $\partial\Omega$ (que denotaremos por Γ) limitada e lipschitziana. Então:*

(a) O espaço $\mathscr{D}(\overline{\Omega})^n$ é denso em $H(div, \Omega)$;

(b) A aplicação traço

$$\gamma_\nu : v \longrightarrow v \cdot \nu|_\Gamma$$

definida em $\mathscr{D}(\overline{\Omega})^n$ pode ser estendida por continuidade a uma aplicação linear, contínua e sobrejetiva, ainda denotada por γ_ν, de $H(div, \Omega)$ sobre $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$;

(c) O núcleo $\ker(\gamma_\nu)$ *de* γ_ν *é o espaço* $H_0(div, \Omega)$*;*

(d) Vale a identidade de Green generalizada

$$(v, \nabla\varphi) + (\nabla \cdot v, \varphi) = \langle \gamma_\nu v, \varphi \rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma), H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)}, \forall\ v \in H(div, \Omega)\ e\ \forall\ \varphi \in H^1(\Omega). \tag{1.10}$$

Demonstração: Ver [5] ou [10]. ∎

Observação 1.5 *A definição de fronteira* Γ *lipschitziana e dos espaços* $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ *e* $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ *podem ser encontradas em [1], [3] ou [10].*

Do teorema anterior, ítens (c) e (d), conclui-se que

$$(v, \nabla\varphi) = -(\nabla \cdot v, \varphi), \quad \forall\ v \in H_0(div, \Omega), \forall\ \varphi \in H^1(\Omega), \tag{1.11}$$

que é uma identidade extremamente útil, a ser utilizada repetidas vezes no decorrer do trabalho.

Teorema 1.5 (Teorema do traço para $H(rot, \Omega)$**)** *Seja* Ω *um conjunto aberto do* $\mathbb{R}^3$*, com fronteira* $\partial\Omega$ *(que denotaremos por* Γ*) limitada e lipschitziana. Então:*

(a) O espaço $\mathscr{D}(\overline{\Omega})^3$ *é denso em* $H(rot, \Omega)$*;*

(b) A aplicação traço

$$\gamma_\tau : v \longrightarrow v \times \nu|_\Gamma$$

definida em $\mathscr{D}(\overline{\Omega})^3$ *pode ser estendida por continuidade a uma aplicação linear e contínua, ainda denotada por* γ_τ*, de* $H(rot, \Omega)$ *em* $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)^3$*;*

(c) O núcleo $\ker(\gamma_\tau)$ *de* γ_τ *é o espaço* $H_0(rot, \Omega)$*;*

(d) Vale a identidade de Green generalizada

$$(v, \nabla \times \varphi) - (\nabla \times v, \varphi) = \langle \gamma_\tau v, \varphi \rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)^3, H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)^3}, \forall\ v \in H(rot, \Omega), \forall\ \varphi \in H^1(\Omega)^3. \tag{1.12}$$

Demonstração: Ver [5] ou [10]. ∎

Usando a Proposição 1.5 (a), a fórmula (1.12) se escreve

$$\int_\Omega \nabla \cdot (\varphi \times v)\ dx = \langle \gamma_\tau v, \varphi \rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)^3, H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)^3}, \ \forall\ v \in H(rot, \Omega) \ \text{ e } \ \forall\ \varphi \in H^1(\Omega)^3. \tag{1.13}$$

Tem-se ainda, de (c) e (d) do teorema acima, que

$$\int_\Omega v \cdot \nabla \times \varphi\ dx = \int_\Omega \nabla \times v \cdot \varphi\ dx,\ \forall\ v \in H_0(rot, \Omega),\ \forall\ \varphi \in \mathscr{D}(\overline{\Omega})^3.$$

Assim, da densidade de $\mathscr{D}(\overline{\Omega})^3$ em $H(rot,\Omega)$ e da expressão anterior, obtemos a identidade

$$\int_\Omega v \cdot \nabla \times w \; dx = \int_\Omega \nabla \times v \cdot w \; dx, \tag{1.14}$$

válida para toda $v \in H_0(rot,\Omega)$ e toda $w \in H(rot,\Omega)$.

No Capítulo 2, trabalharemos com subespaços dos espaços $H(div,\Omega)$ e $H(rot,\Omega)$ apresentados anteriormente. Sobre tais subespaços é que falaremos a seguir.

Definimos

$$H(div\ 0,\Omega) = \{v \in L^2(\Omega)^n, \nabla \cdot v = 0\}$$

e

$$H_0(div\ 0,\Omega) = H(div\ 0,\Omega) \cap H_0(div,\Omega).$$

Proposição 1.8 *O espaço $H_0(div\ 0,\Omega)$ é um espaço de Hilbert com o produto interno de $L^2(\Omega)^n$.*

Demonstração: De fato, é suficiente mostrar que $H_0(div\ 0,\Omega)$ é subespaço fechado de $L^2(\Omega)^n$.

Seja então $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in H_0(div\ 0,\Omega)$ uma sequência convergente tal que

$$f_n \to f \in L^2(\Omega)^n$$

e mostremos que $f \in H_0(div\ 0,\Omega)$.

Como

$$f_n \to f \text{ em } \mathscr{D}'(\Omega)^n,$$

então, $\forall\ \varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$,

$$\langle \nabla \cdot f_n, \varphi\rangle = -\langle f_n, \nabla\varphi\rangle \to -\langle f, \nabla\varphi\rangle = \langle \nabla \cdot f, \varphi\rangle.$$

Mas $\nabla \cdot f_n = 0$, para todo n. Logo

$$\langle \nabla \cdot f, \varphi\rangle = 0,\ \forall\ \varphi \in \mathscr{D}(\Omega),$$

o que mostra que $f \in H(div\ 0,\Omega)$.

Por outro lado, o teorema do traço para $H(div,\Omega)$ garante que

$$f_n \cdot \nu|_\Gamma \to f \cdot \nu|_\Gamma,$$

donde $f \cdot \nu = 0$, já que $f_n \cdot \nu|_\Gamma = 0$, para todo n. ■

Proposição 1.9 *Se $E \in H_0(rot,\Omega)$ então $\nabla \times E \in H_0(div\ 0,\Omega)$.*

Demonstração: Já sabemos por (1.3) que $\nabla \cdot (\nabla \times E) = 0$. Para $\varphi \in \mathscr{D}(\overline{\Omega})$ qualquer vale, pelas fórmulas dadas em (1.10) e (1.12), que

$$\begin{aligned}
\langle \gamma_\nu(\nabla \times E), \varphi \rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma), H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} &= \int_\Omega (\nabla \times E) \cdot \nabla \varphi \; dx + \int_\Omega \nabla \cdot (\nabla \times E) \; \varphi \; dx \\
&= \int_\Omega (\nabla \times E) \cdot \nabla \varphi \; dx \\
&= \int_\Omega E \cdot \left[\nabla \times (\nabla \varphi) \right] \, dx - \langle \gamma_\tau(E), \nabla \varphi \rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)^3, H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)^3} \\
&= 0,
\end{aligned}$$

onde usamos (1.2) e o fato que $\gamma_\tau(E) = 0$.

Assim, $\langle \gamma_\nu(\nabla \times E), \varphi \rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma), H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} = 0, \; \forall \; \varphi \in \mathscr{D}(\overline{\Omega})$. Da densidade de $\mathscr{D}(\overline{\Omega})$ em $H^1(\Omega)$, segue que

$$\langle \gamma_\nu(\nabla \times E), \varphi \rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma), H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} = 0, \; \forall \; \varphi \in H^1(\Omega)$$

e, assim, $\gamma_\nu(\nabla \times E) = 0$. Portanto $\nabla \times E \in H_0(div \; 0, \Omega)$. ∎

Definimos agora

$$H(rot \; 0, \Omega) = \{ v \in L^2(\Omega)^3, \nabla \times v = 0 \}$$

e

$$H_0(rot \; 0, \Omega) = H(rot \; 0, \Omega) \cap H_0(rot, \Omega).$$

Proposição 1.10 *Se* $p \in H_0^1(\Omega)$ *então* $\nabla p \in H_0(rot \; 0, \Omega)$.

Demonstração: Que $\nabla \times (\nabla p) = 0$ é óbvio. Só precisamos mostrar que $\gamma_\tau(\nabla p) = 0$. Utilizando a fórmula (1.12) temos, para todo $\varphi \in \mathscr{D}(\overline{\Omega})^3$, que

$$\begin{aligned}
\langle \gamma_\tau(\nabla p), \varphi \rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)^3, H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)^3} &= \int_\Omega (\nabla p) \cdot \nabla \times \varphi \; dx - \int_\Omega \varphi \cdot \nabla \times (\nabla p) \; dx \\
&= \int_\Omega (\nabla p) \cdot \nabla \times \varphi \; dx.
\end{aligned}$$

Pela expressão (1.10) segue que

$$\begin{aligned}
\langle \gamma_\tau(\nabla p), \varphi \rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)^3, H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)^3} &= \int_\Omega \nabla p \cdot (\nabla \times \varphi) \; dx \\
&= \langle \gamma_\nu(\nabla \times \varphi), p|_\Gamma \rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma), H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} - \int_\Omega p \; \nabla \cdot (\nabla \times \varphi) \; dx \\
&= 0, \forall \; \varphi \in \mathscr{D}(\overline{\Omega})^3,
\end{aligned}$$

já que $p \in H_0^1(\Omega)$ e $\nabla \cdot (\nabla \times \varphi) = 0$. Assim, pela densidade de $\mathscr{D}(\overline{\Omega})$ em $H^1(\Omega)$, obtemos,

$$\langle \gamma_\tau(\nabla p), \varphi \rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)^3, H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)^3} = 0, \; \forall \; \varphi \in H^1(\Omega)^3,$$

o que mostra que $\gamma_\tau(\nabla p) = 0$. Portanto $\nabla p \in H_0(rot\ 0, \Omega)$. ■

Na demonstração da existência de solução do sistema de equações de Maxwell que estudaremos no Capítulo 2, é de fundamental importância a densidade de $H_0(div\ 0, \Omega) \cap H(rot, \Omega)$ em $H_0(div\ 0, \Omega)$.

Tratando-se de um resultado não tão comum, apresentaremos aqui a prova desta densidade. As idéias aqui apresentadas foram retiradas de [19]. Fixaremos, a partir daqui, $n = 3$, que é o caso em que estaremos interessados nos próximos capítulos.

Como $H_0(div\ 0, \Omega)$ é subespaço fechado de $L^2(\Omega)^3$, podemos escrever o espaço $L^2(\Omega)^3$ da seguinte maneira:

$$L^2(\Omega)^3 = H_0(div\ 0, \Omega) \oplus [H_0(div\ 0, \Omega)]^\perp.$$

Assim, se $u \in L^2(\Omega)^3$, então

$$u = u_1 + u_2, \quad \text{onde} \quad u_1 \in H_0(div\ 0, \Omega) \quad \text{e} \quad u_2 \in [H_0(div\ 0, \Omega)]^\perp.$$

Consideremos P a projeção ortogonal de $L^2(\Omega)^3$ em $H_0(div\ 0, \Omega)$ dada por

$$\begin{aligned} P : L^2(\Omega)^3 &\longrightarrow H_0(div\ 0, \Omega) \\ u &\longrightarrow u_1. \end{aligned}$$

Lema 1.2 *$P\big(\mathscr{D}(\Omega)^3\big)$ é denso em $H_0(div\ 0, \Omega)$.*

Demonstração: Seja $u \in H_0(div\ 0, \Omega)$ qualquer. Como $\mathscr{D}(\Omega)^3$ é denso em $L^2(\Omega)^3$, existe sequencia $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{D}(\Omega)^3$ tal que

$$u_n \to u \text{ em } L^2(\Omega)^3.$$

Pela continuidade do operador P, segue que

$$P(u_n) \to P(u) = u \text{ em } L^2(\Omega)^3.$$

Portanto $P(u_n)$ é uma sequência de $P\big(\mathscr{D}(\Omega)^3\big)$ que converge para u. Assim está provado o lema. ■

Lema 1.3 *$P(\mathscr{D}(\Omega)^3) \subset H_0(div\ 0, \Omega) \cap H(rot, \Omega)$, ou seja, $P\Psi \in H_0(div\ 0, \Omega) \cap H(rot, \Omega)$, $\forall\ \Psi \in \mathscr{D}(\Omega)^3$.*

Demonstração: Fixemos $\Psi \in \mathscr{D}(\Omega)^3$ e mostremos que $P\Psi \in H_0(div\ 0, \Omega) \cap H(rot, \Omega)$. Obviamente, $P\Psi \in H_0(div\ 0, \Omega)$. É suficiente, então, mostrar que $P\Psi \in H(rot, \Omega)$. Como

$P\Psi \in L^2(\Omega)^3$, $P\Psi \in \mathscr{D}'(\Omega)^3$ e assim, $\forall\ \varphi \in \mathscr{D}(\Omega)^3$, temos

$$\begin{aligned}\langle \nabla \times (P\Psi), \varphi \rangle &= \langle P\Psi, \nabla \times \varphi \rangle \\ &= \int_\Omega P\Psi \cdot \nabla \times \varphi \ dx.\end{aligned}$$

Notemos que, pela Proposição 1.9, $\nabla \times \varphi \in H_0(div\ 0, \Omega)$, logo

$$\begin{aligned}\langle \nabla \times (P\Psi), \varphi \rangle &= \int_\Omega P\Psi \cdot \nabla \times \varphi \ dx \\ &= \int_\Omega \Psi \cdot \nabla \times \varphi \ dx \\ &= \langle \Psi, \nabla \times \varphi \rangle. \end{aligned} \tag{1.15}$$

Isto mostra que $\nabla \times (P\Psi) = \nabla \times \Psi$ em $\mathscr{D}'(\Omega)^3$. Como $\Psi \in \mathscr{D}(\Omega)^3$, $\nabla \times \Psi \in L^2(\Omega)^3$.

Então $\nabla \times (P\Psi) \in\ L^2(\Omega)^3$ e, portanto, $P\Psi \in H_0(div\ 0, \Omega) \cap H(rot, \Omega)$. ∎

Proposição 1.11 *$H_0(div\ 0, \Omega) \cap H(rot, \Omega)$ é denso em $H_0(div\ 0, \Omega)$.*

Demonstração: Sabemos, do Lema 1.3, que $P\big(\mathscr{D}(\Omega)^3\big) \subset H_0(div\ 0, \Omega) \cap H(rot, \Omega) \subset H_0(div\ 0, \Omega)$. Como, pelo Lema 1.2, $P\big(\mathscr{D}(\Omega)^3\big)$ é denso em $H_0(div\ 0, \Omega)$, então $H_0(div\ 0, \Omega) \cap H(rot, \Omega)$ é denso em $H_0(div\ 0, \Omega)$. ∎

1.8 Teoria de semigrupos de operadores lineares

1.8.1 Operadores lineares limitados

Definição 1.16 *Sejam X e Y espaços de Banach. Um operador linear é uma aplicação linear $A : D(A) \subset X \to Y$, onde $D(A)$ é o domínio do operador A. Diz-se que o operador A é limitado se existe constante $c \geq 0$ tal que*

$$||Ax||_Y \leq c||x||_X,\ \forall\ x \in D(A).$$

Definição 1.17 *Sejam X e Y espaços de Banach. Denotamos por $\mathscr{L}(X, Y)$ a família dos operadores lineares limitados com domínio X e imagem em Y, isto é, a família dos operadores lineares $A : X \longrightarrow Y$ tais que*

$$||A||_{\mathscr{L}(X,Y)} = \sup_{||x||_X \leq 1} ||Ax||_Y < \infty.$$

Com a norma assim definida, $\mathscr{L}(X, Y)$ é um espaço de Banach. No caso em que $X = Y$ escreve-se, simplesmente, $\mathscr{L}(X)$ em vez de $\mathscr{L}(X, Y)$.

Definição 1.18 *Dada uma sucessão* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathscr{L}(X,Y)$, *diz-se que* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *é convergente se existir* $A \in \mathscr{L}(X,Y)$ *tal que* $\| A_n - A \|_{\mathscr{L}(X,Y)} \to 0$ *quando* $n \to \infty$ *e escreve-se* $A_n \to A$.

Recordemos que, para a sucessão $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ser convergente é necessário e suficiente que $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ seja de Cauchy, isto é, dado $\varepsilon > 0$ exista $N > 0$ tal que

$$||A_m - A_n||_{\mathscr{L}(X,Y)} < \varepsilon,$$

para todo $m, n > N$.

Definição 1.19 *Dizemos que a série*

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n, \quad A_n \in \mathscr{L}(X,Y), \tag{1.16}$$

converge para $A \in \mathscr{L}(X,Y)$ *se a sucessão* $(S_p)_{p\in\mathbb{N}}$, *das somas parciais*

$$S_p = \sum_{n=1}^{p} A_n$$

for convergente para A. *A série (1.16) é dita absolutamente convergente quando a série real*

$$\sum_{n=1}^{\infty} ||A_n||_{\mathscr{L}(X,Y)}$$

for convergente.

Se A é um número real e t uma variável real, a função exponencial e^{At} pode ser definida pela fórmula

$$e^{At} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tA)^n}{n!}. \tag{1.17}$$

A série (1.17) é convergente para todos os valores reais de t e define uma função real.

A função exponencial pode ser generalizada para operadores lineares limitados.

Definição 1.20 *Seja* X *espaço de Banach e* $A \in \mathscr{L}(X,Y)$. *A série*

$$I + tA + \frac{(tA)^2}{2!} + \cdots + \frac{(tA)^n}{n!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tA)^n}{n!}, \tag{1.18}$$

onde I *é o operador identidade de* X, *é absolutamente convergente e consequentemente convergente, para todo* t *real. Logo, considerando* A *operador linear limitado de* X, *pode-se definir a exponencial* e^{At} *pela série (1.18). Então* e^{At} *é um operador linear limitado de* X *e* $||e^{At}||_{\mathscr{L}(X,Y)} \leq e^{|t|\ ||A||_{\mathscr{L}(X,Y)}}$.

A função exponencial está diretamente relacionada com as equações diferenciais, pois ela á solução do seguinte problema de Cauchy: Dado um operador linear limitado A, de um espaço de Banach X, a função $U(t) = e^{At}U_0$, definida em $\mathbb{R}^+$, cujos valores pertencem a $D(A)$ satisfaz

$$\begin{cases} U_t - AU &= 0 \\ U(0) &= U_0, \end{cases} \tag{1.19}$$

onde U_0 é um elemento dado de X.

A ideia da teoria de semigrupos é resolver o problema de valor inicial dado por (1.19) sendo A um operador linear não-limitado. Para isso, deve-se impor condições adequadas sobre o operador A.

Quando $A \in \mathbb{R}$ e $t \geq 0$ a exponencial e^{At} é a única uma função $E : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ que tem as seguintes propriedades:

(a) $E(0) = 1$;

(b) $E(t + s) = E(t)E(s)$;

(c) $\lim_{t\to 0^+} E(t) = 1$.

Este fato também ocorre quando E toma seus valores na álgebra dos operadores lineares de qualquer espaço de dimensão finita. Neste caso, o número 1 que aparece nos ítens (a) e (c) deve ser interpretado como o operador identidade $I : X \to X$ e a multiplicação do ítem (b), como a composição de operadores lineares.

Observação 1.6 *O operador identidade I é o limite uniforme de $E(t)$ quando $t \to 0^+$ se $||E(t) - I||_{\mathscr{L}(X)} \to 0$ e é o limite forte de $E(t)$ se para cada $x \in X$ tem-se $||\big(E(t) - I\big)x||_X \to 0$, quando $t \to 0^+$. Quando em (c) o limite é tomado no sentido da topologia uniforme tem-se uma situação bastante simples como se mostra no teorema a seguir.*

Teorema 1.6 *Uma função $E : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathscr{L}(X)$ satisfaz as condições:*

(a) $E(0) = I$;

(b) $E(t + s) = E(t)E(s)$;

(c) $||E(t) - I||_{\mathscr{L}(X)} \to 0$ *quando* $t \to 0^+$

se, e só se, $E(t) = e^{At}$, onde $A \in \mathscr{L}(X)$ e e^{At} é definida por (1.17).

Demonstração: Ver [11]. ∎

Apresentaremos agora alguns resultados sobre Semigrupos de Classe C_0. Sugerimos ao leitor que consulte [11] e [21] para um melhor entendimento e para as demonstrações que seguem.

Como a convergência uniforme implica convergência forte, o Teorema 1.6 vem mostrar que a definição a seguir generaliza a de função exponencial.

1.8.2 Semigrupos de Classe C_0

Definição 1.21 *Seja X um espaço de Banach e $\mathscr{L}(X)$ a álgebra dos operadores lineares limitados de X. Diz-se que uma aplicação $T : \mathbb{R}^+ \to \mathscr{L}(X)$ é um semigrupo de operadores lineares limitados de X se:*

(a) $T(0) = I$, *onde* I *é o operador identidade de* X;

(b) $T(t+s) = T(t)T(s), \ \forall \ t, s \in \mathbb{R}^+$.
Diz-se que o semigrupo T *é de classe* C_0 *se*

(c) $\lim_{t\to 0^+} ||\big(T(t) - I\big)x||_X = 0 \ \forall \ x \in X$.

Observação 1.7 *As propriedades fundamentais da função exponencial são válidas para os semigrupos de classe C_0.*

Proposição 1.12 *Se T é um semigrupo de classe C_0, então $||T(t)||_{\mathscr{L}(X)}$ é uma função limitada em todo intervalo limitado $[0, L]$.*

Definição 1.22 *Se $||T(t)||_{\mathscr{L}(X)} \leqslant 1, \ \forall \ t \geqslant 0$, T é dito semigrupo de contrações.*

Corolário 1.1 *Todo semigrupo de classe C_0 é fortemente contínuo em $\mathbb{R}^+$, isto é, se $t \in \mathbb{R}^+$, então*

$$\lim_{s\to t} T(s)x = T(t)x \ \forall \ x \in X.$$

Observação 1.8 *Os semigrupos de classe C_0 são também conhecidos por semigrupos fortemente contínuos.*

Definição 1.23 *Seja X um espaço de Banach e seja*

$$D(A) = \{x \in X; \ \lim_{h\to 0^+} \frac{T(h) - I}{h} x \ \textit{existe}\}.$$

O operador $A : D(A) \subset X \longrightarrow X$ definido por

$$Ax = \lim_{h\to 0^+} \frac{T(h) - I}{h} x$$

é dito o gerador infinitesimal ou simplesmente gerador do semigrupo T.

É simples mostrar que o domínio do operador A é um subespaço vetorial de X e A é um operador linear.

Proposição 1.13 *Seja T um semigrupo de classe C_0 e A o gerador infinitesimal de T. São válidas as seguintes proposições:*

(a) Se $x \in D(A)$, *então* $T(t)x \in D(A)$, $\forall\ t \geq 0$ *e*

$$\frac{d}{dt}T(t)x = AT(t)x = T(t)Ax;$$

(b) Se $x \in D(A)$, *então*

$$T(t)x - T(s)x = \int_s^t AT(\tau)xd\tau = \int_s^t T(\tau)Axd\tau;$$

(c) Se $x \in X$, *então* $\int_0^t T(\tau)xd\tau \in D(A)$ *e*

$$T(t)x - x = A\int_0^t T(\tau)xd\tau.$$

Proposição 1.14 *Seja* X *espaço de Banach e* A *o gerador infinitesimal de um semigrupo* $T(t)$ *de classe* C_0*. As seguintes afirmações são verdadeiras:*

(a) A *é um operador linear fechado e seu domínio é denso em* X*;*

(b) Um operador linear, fechado e com domínio denso em X*, é o gerador infinitesimal de, no máximo, um semigrupo de classe* C_0*.*

Proposição 1.15 *Seja* A *o gerador infinitesimal de um semigrupo* $T(t)$ *de classe* C_0*. Se* $x \in D(A)$ *então:*

(a) $\frac{d}{dt}T(t)x = AT(t)x$*;*

(b) $T(t)x \in C\big([0,\infty) : D(A)\big) \cap C^1\big([0,\infty) : X\big)$*.*

Observação 1.9 *Se* $T_1(t)$ *e* $T_2(t)$ *possuem o mesmo gerador infinitesimal* A*, então* $T_1(t) = T_2(t)$*.*

Na tentativa de resolver o problema (1.19), a meta é obter condições necessárias e suficientes para que o operador linear A seja gerador infinitesimal de um semigrupo $T(t)$ de contrações de classe C_0. Nesse sentido, iremos enunciar dois importantes teoremas devidos a Hille-Yosida e Lumer-Phillips, que respondem esta questão.

Teorema 1.7 (Hille-Yosida) *Um operador linear* A *sobre* X *satisfaz:*

(a) A *é fechado e densamente definido e*

(b) $\exists(\lambda I - A)^{-1}$, $\forall\ \lambda > 0$ *e* $||(\lambda I - A)^{-1}||_{\mathscr{L}(X)} \leq \frac{1}{\lambda}$ *onde* I *é o operador identidade*

se, e somente se, A *é gerador infinitesimal de um semigrupo* $T(t)$ *de contrações de classe* C_0*.*

Demonstração: Ver [11] ou [21]. ∎

Antes de enunciar o teorema de Lumer-Phillips, precisamos de alguns conceitos importantes, tais como:

Definição 1.24 *Seja X um espaço de Banach, X' o dual de X . Para cada $x \in X$, definimos o conjunto dualidade $J(x) \subset X'$ por*

$$J(x) = \{x' \in X'; \langle x, x' \rangle = ||x||^2 = ||x'||^2\}.$$

Pelo Teorema de Hahn-Banach, o conjunto dualidade é não-vazio para todo $x \in X$.

Definição 1.25 *Uma aplicação dualidade é uma aplicação $j : X \longrightarrow X'$ tal que $j(x) \in J(x), \forall\, x \in X$.*

Definição 1.26 *Diz-se que um operador linear $A : D(A) \subset X \longrightarrow X$ é dissipativo se, para alguma aplicação dualidade j,*

$$Re\, \langle Ax, j(x) \rangle \leqslant 0, \quad \forall\, x \in D(A).$$

Definição 1.27 *Diz-se que A é m-dissipativo se A for dissipativo e $(\lambda I - A) = X$ para algum $\lambda > 0$.*

Teorema 1.8 (Lumer-Phillips) *Seja X um espaço de Banach e $A : D(A) \subset X \longrightarrow X$ um operador linear. A é um gerador infinitesimal de um semigrupo de contrações de classe C_0 se, e somente se, A é m-dissipativo e densamente definido.*

Demonstração: Ver [11] ou [21]. ∎

Capítulo 2

EQUAÇÕES DE MAXWELL

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ um domínio aberto, com fronteira Γ limitada e lipschitziana.

Consideramos o sistema de equações de Maxwell:

$$\varepsilon E_t - \nabla \times H + \sigma E = 0, \quad \text{em} \quad \Omega \times (0, \infty) \tag{2.1}$$

$$\mu H_t + \nabla \times E = 0, \quad \text{em} \quad \Omega \times (0, \infty) \tag{2.2}$$

$$\nabla \cdot H = 0, \quad \text{em} \quad \Omega \times (0, \infty) \tag{2.3}$$

$$E(x, 0) = E_0(x) \quad \text{e} \quad H(x, 0) = H_0(x), \quad \text{em} \quad \Omega \tag{2.4}$$

$$E \times \nu|_\Gamma = 0 \quad \text{e} \quad H.\nu|_\Gamma = 0, \quad \text{em} \quad \Gamma \times (0, \infty), \tag{2.5}$$

onde $E(x,t) = \big(E_1(x,t), E_2(x,t), E_3(x,t)\big)$ e $H(x,t) = \big(H_1(x,t), H_2(x,t), H_3(x,t)\big)$ denotam o campo elétrico e o campo magnético, respectivamente.

As constantes σ, ε e μ (todas positivas) representam a condutividade elétrica, a permitividade elétrica e a permeabilidade magnética do meio, respectivamente. Denotamos por $\nu(x) = \big(\nu_1(x), \nu_2(x), \nu_3(x)\big)$ a normal unitária externa à fronteira Γ de Ω.

Neste capítulo vamos provar que o sistema de equações de Maxwell (2.1)-(2.5) com condições iniciais e de contorno apropriadas está bem posto. Na primeira seção estudamos a existência e unicidade de solução. Como comentamos na introdução, algumas das idéias aqui utilizadas foram retiradas do trabalho de Nicaise e Pignotti [20]. No entanto, em alguns momentos utilizamos técnicas distintas das que os autores empregaram em seu artigo.

Na segunda seção consideramos uma decomposição ortogonal da solução obtida. Será com essa decomposição ortogonal que analisaremos o decaimento da energia do sistema, o que será feito no último capítulo.

2.1 Existência e Unicidade de solução

Estabelecemos a existência e unicidade de solução do sistema (2.1)-(2.5) utilizando a Teoria de Semigrupos. Para isso introduzimos o seguinte espaço funcional:

$$\mathscr{H} = L^2(\Omega)^3 \times H_0(div\ 0, \Omega).$$

Utilizando a Proposição 1.8 vemos que o espaço $\mathscr{H}$ é um espaço de Hilbert com o produto interno

$$\big((E,H),(E_1,H_1)\big)_{\mathscr{H}} = \int_\Omega (\varepsilon E \cdot E_1 + \mu H \cdot H_1)\ dx, \quad \forall\ (E,H),(E_1,H_1) \in \mathscr{H}.$$

Notemos que as equações (2.1)-(2.2) com condições iniciais (2.4) podem ser escritas como:

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} E \\ H \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\varepsilon^{-1}\sigma I & \varepsilon^{-1}\nabla\times \\ -\mu^{-1}\nabla\times & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E \\ H \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} E \\ H \end{pmatrix}(0) = \begin{pmatrix} E_0 \\ H_0 \end{pmatrix}.$$

Definimos o operador $\mathscr{A}$ como segue:

$$\begin{array}{llll} \mathscr{A}: & D(\mathscr{A}) \subset \mathscr{H} & \longrightarrow & \mathscr{H} \\ & (E,H) & \longrightarrow & \mathscr{A}(E,H) = (-\varepsilon^{-1}\sigma I E + \varepsilon^{-1}\nabla \times H, -\mu^{-1}\nabla \times E), \end{array}$$

ou seja

$$\mathscr{A} = \begin{pmatrix} -\varepsilon^{-1}\sigma I & \varepsilon^{-1}\nabla\times \\ -\mu^{-1}\nabla\times & 0 \end{pmatrix},$$

onde

$$D(\mathscr{A}) = H_0(rot, \Omega) \times \big(H_0(div\ 0, \Omega) \cap H(rot, \Omega)\big).$$

Podemos reescrever o sistema (2.1)-(2.5) como:

$$\begin{cases} \frac{\partial \phi}{\partial t} & = & \mathscr{A}\phi \\ \phi(0) & = & \phi_0, \end{cases}$$

onde

$$\phi = \begin{pmatrix} E \\ H \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \phi_0 = \begin{pmatrix} E_0 \\ H_0 \end{pmatrix}.$$

Provemos que este problema tem solução única utilizando o Teorema de Lumer-Phillips. Para isto, provemos a seguinte

Proposição 2.1 *São válidos os seguintes ítens:*

(a) $D(\mathscr{A})$ *é denso em* $\mathscr{H}$*;*

(b) $(A\phi, \phi)_{\mathscr{H}} \leq 0, \ \forall \ \phi \in D(\mathscr{A})$;

(c) $Im(I - A) = \mathscr{H}$.

Demonstração: (a) Imediato, já que $\mathscr{D}(\Omega)^3 \subset H_0(rot, \Omega) \subset L^2(\Omega)^3$, $\overline{\mathscr{D}(\Omega)^3} = L^2(\Omega)^3$ e a densidade de $\big(H_0(div\ 0, \Omega) \cap H(rot, \Omega)\big)$ em $H_0(div\ 0, \Omega)$ foi provada pela Proposição 1.11.

(b) Utilizando a definição do produto interno em $\mathscr{H}$ obtemos, para $\phi = (E, H) \in D(\mathscr{A})$,

$$\begin{aligned}
(\mathscr{A}\phi, \phi)_{\mathscr{H}} &= \left(\begin{pmatrix} -\varepsilon^{-1}\sigma E + \varepsilon^{-1}\nabla \times H \\ -\mu^{-1}\nabla \times E \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} E \\ H \end{pmatrix} \right)_{\mathscr{H}} \\
&= \int_\Omega [(-\sigma E + \nabla \times H) \cdot E - (\nabla \times E \cdot H)] \, dx \\
&= \int_\Omega [-\sigma E \cdot E + (\nabla \times H) \cdot E - (\nabla \times E) \cdot H] \, dx \\
&= \int_\Omega [-\sigma |E|^2 + (\nabla \times H) \cdot E - (\nabla \times E) \cdot H] \, dx.
\end{aligned}$$

Como $E \in H_0(rot, \Omega)$ e $H \in H(rot, \Omega)$ então, pela identidade (1.14) obtemos

$$\int_\Omega (\nabla \times H) \cdot E \, dx - \int_\Omega (\nabla \times E) \cdot H \, dx = 0.$$

Logo

$$(\mathscr{A}\phi, \phi)_{\mathscr{H}} = -\sigma ||E||^2 \leq 0, \ \forall \ \phi \in D(\mathscr{A}),$$

o que mostra que $\mathscr{A}$ é um operador dissipativo.

(c) Devemos mostrar que $\forall \ (f, g) \in \mathscr{H}$, existe $(E, H) \in D(\mathscr{A})$ tal que:

$$(I - \mathscr{A}) \begin{pmatrix} E \\ H \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix},$$

isto é, devemos resolver o seguinte problema:

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} E & + & \varepsilon^{-1}\sigma E & - & \varepsilon^{-1}\nabla \times H & = & f \\ \mu^{-1}\nabla \times E & + & H & = & g, & & \end{array} \right.$$

onde $f \in L^2(\Omega)^3$ e $g \in H_0(div\ 0, \Omega)$ são funções dadas.

Notando que

$$H = g - \mu^{-1}\nabla \times E, \tag{2.6}$$

vemos que

$$E + \varepsilon^{-1}\sigma E + \varepsilon^{-1}\mu^{-1}\nabla \times (\nabla \times E) = f + \varepsilon^{-1}\nabla \times g, \tag{2.7}$$

ou seja, resolvendo (2.7) obtemos a solução (E, H) do sistema.

Para encontrar a solução E de (2.7), vamos considerar a formulação fraca de tal equação.

De fato, tomando o produto interno em $L^2(\Omega)^3$ de ambos os membros de (2.7) com $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)^3$ obtemos

$$\begin{aligned}\int_\Omega [(1+\varepsilon^{-1}\sigma)E\cdot\varphi + \varepsilon^{-1}\mu^{-1}(\nabla\times(\nabla\times E))\cdot\varphi]\,dx \\ = \int_\Omega [f\cdot\varphi + \varepsilon^{-1}(\nabla\times g)\cdot\varphi]\,dx.\end{aligned}$$

Mas, pela identidade de Green (1.14),

$$\int_\Omega \nabla\times(\nabla\times E)\cdot\varphi\,dx = \int_\Omega (\nabla\times E)\cdot(\nabla\times\varphi)\,dx$$

e

$$\int_\Omega \nabla\times g\cdot\varphi\,dx = \int_\Omega g\cdot\nabla\times\varphi\,dx.$$

Assim,

$$\begin{aligned}\int_\Omega [(1+\varepsilon^{-1}\sigma)E\cdot\varphi + \varepsilon^{-1}\mu^{-1}(\nabla\times E)\cdot(\nabla\times\varphi)]\,dx \\ = \int_\Omega [f\cdot\varphi + \varepsilon^{-1}g\cdot\nabla\times\varphi]\,dx.\end{aligned}$$

Portanto, considera-se o problema de encontrar $E \in H_0(rot,\Omega)$ tal que

$$\begin{aligned}\int_\Omega [(1+\varepsilon^{-1}\sigma)E\cdot W + \varepsilon^{-1}\mu^{-1}(\nabla\times E)\cdot(\nabla\times W)]\,dx \\ = \int_\Omega [f\cdot W + \varepsilon^{-1}g\cdot\nabla\times W]\,dx,\ \forall\, W\in H_0(rot,\Omega).\end{aligned}$$

Afim de demonstrar a existência de solução do problema acima, consideremos a forma bilinear $a : H_0(rot,\Omega)\times H_0(rot,\Omega)\to\mathbb{R}$, definida por

$$a(E,W) = \int_\Omega [(1+\varepsilon^{-1}\sigma)E\cdot W + \varepsilon^{-1}\mu^{-1}(\nabla\times E)\cdot(\nabla\times W)]\,dx,\ \forall\, E, W\in H_0(rot,\Omega),$$

e a forma linear $F : H_0(rot,\Omega)\to\mathbb{R}$, dada por

$$F(W) = \int_\Omega [f\cdot W + \varepsilon^{-1}g\cdot(\nabla\times W)]\,dx,\ \forall\, W\in H_0(rot,\Omega).$$

O problema equivale, agora, a encontrar $E\in H_0(rot,\Omega)$ tal que

$$a(E,W) = F(W)\ \forall\, W\in H_0(rot,\Omega).$$

Mostremos que valem os seguintes ítens:

(a) $|a(E,W)| \leq c_1||E||_{H_0(rot,\Omega)}||W||_{H_0(rot,\Omega)}, \ \forall \ E, H \in H_0(rot,\Omega)$;

(b) $a(E,E) \geq c_2||E||^2_{H_0(rot,\Omega)}, \ \forall \ E \in H_0(rot,\Omega)$;

(c) $|F(W)| \leq c_3||W||_{H_0(rot,\Omega)}, \ \forall \ W \in H_0(rot,\Omega)$,

onde c_1, c_2, c_3 são constantes reais positivas a serem definidas.

(a)Temos, utilizando a Desigualdade de Hölder, que

$$\begin{aligned}
|a(E,W)| &= \left|\int_\Omega [(1+\varepsilon^{-1}\sigma)E\cdot W + \varepsilon^{-1}\mu^{-1}(\nabla\times E)\cdot(\nabla\times W)]\,dx\right| \\
&\leq (1+\varepsilon^{-1}\sigma)\int_\Omega |E.W|\,dx + \varepsilon^{-1}\mu^{-1}\int_\Omega |(\nabla\times E).(\nabla\times W)|\,dx \\
&\leq (1+\varepsilon^{-1}\sigma)||E||\,||W|| + \varepsilon^{-1}\mu^{-1}||\nabla\times E||\,||\nabla\times W|| \\
&\leq c_1\big(||E||\,||W|| + ||\nabla\times E||\,||\nabla\times W||\big),
\end{aligned}$$

onde $c_1 = \max\{(1+\varepsilon^{-1}\sigma), \varepsilon^{-1}\mu^{-1}\}$.

Mas, utilizando a desigualdade de Young, segue que

$$\begin{aligned}
||E||\,||W|| + ||\nabla\times E||\,||\nabla\times W|| &\leq \big(||\nabla\times E||^2 + ||E||^2\big)^{\frac{1}{2}}\big(||\nabla\times W||^2 + ||W||^2\big)^{\frac{1}{2}} \\
&= ||E||_{H_0(rot,\Omega)}||W||_{H_0(rot,\Omega)}.
\end{aligned}$$

Portanto

$$|a(E,W)| \leq c_1||E||_{H_0(rot,\Omega)}||W||_{H_0(rot,\Omega)}.$$

(b)Vemos que, $\forall \ E \in H_0(rot,\Omega)$,

$$\begin{aligned}
a(E,E) &= \int_\Omega \big[(1+\varepsilon^{-1}\sigma)E\cdot E + \varepsilon^{-1}\mu^{-1}(\nabla\times E)\cdot(\nabla\times E)\big]\,dx \\
&= \int_\Omega [(1+\varepsilon^{-1}\sigma)|E|^2 + \varepsilon^{-1}\mu^{-1}|\nabla\times E|^2]\,dx \\
&= (1+\varepsilon^{-1}\sigma)||E||^2 + \varepsilon^{-1}\mu^{-1}||\nabla\times E||^2 \\
&\geq c_2(||E||^2 + ||\nabla\times E||^2) \\
&= c_2||E||^2_{H_0(rot,\Omega)},
\end{aligned}$$

onde $c_2 = \min\{(1+\varepsilon^{-1}\sigma), \varepsilon^{-1}\mu^{-1}\}$.

(c) Basta notar que, pela Desigualdade Hölder,

$$\begin{aligned}
|F(W)| &= \left|\int_\Omega [f\cdot W + \varepsilon^{-1} g\cdot \nabla\times W]\ dx\right| \\
&\leq \int_\Omega |f\cdot W| dx + \varepsilon^{-1}\int_\Omega |g\cdot\nabla\times W|\ dx \\
&\leq ||f||\ ||W|| + \varepsilon^{-1}||g||\ ||\nabla\times W|| \\
&\leq ||f||\left(||W||^2 + ||\nabla\times W||^2\right)^{\frac{1}{2}} + \varepsilon^{-1}||g||\left(||\nabla\times W||^2 + ||W||^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq c_3\left(||W||^2 + ||\nabla\times W||^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= c_3||W||_{H_0(rot,\Omega)},
\end{aligned}$$

onde $c_3 = \max\{||f||, \varepsilon^{-1}||g||\}$.

Como a forma bilinear a é contínua e coerciva e a forma linear F é contínua, segue, pelo Teorema de Lax-Milgran, que existe um único $E \in H_0(rot,\Omega)$ tal que

$$a(E,W) = F(W), \forall\ W \in H_0(rot,\Omega),$$

ou seja

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega [(1+\varepsilon^{-1}\sigma)E\cdot W + \varepsilon^{-1}\mu^{-1}(\nabla\times E)\cdot(\nabla\times W)]\ dx \\
&= \int_\Omega [f\cdot W + \varepsilon^{-1} g\cdot(\nabla\times W)]\ dx,\ \forall\ W \in H_0(rot,\Omega). \qquad (2.8)
\end{aligned}$$

Seja

$$H = g - \mu^{-1}\nabla\times E.$$

Notemos, de imediato, que

$$\mu^{-1}\nabla\times E + H = g.$$

Além disso, $H \in H_0(div\ 0,\Omega)$. Com efeito, $g \in H_0(div\ 0,\Omega)$ e, como $E \in H_0(rot,\Omega)$ temos, pela Proposição 1.9, que $\nabla\times E \in H_0(div\ 0,\Omega)$.

Voltando a identidade (2.8), obtemos

$$\int_\Omega (1+\varepsilon^{-1}\sigma)E\cdot\varphi\ dx + \int_\Omega \varepsilon^{-1}(\mu^{-1}\nabla\times E - g)\cdot(\nabla\times\varphi)\ dx = \int_\Omega f\cdot\varphi\ dx,\ \forall\ \varphi\in\mathscr{D}(\Omega)^3,$$

ou seja,

$$\int_\Omega \left[(1+\varepsilon^{-1}\sigma)E\cdot\varphi - \varepsilon^{-1}H\cdot(\nabla\times\varphi)\right]\ dx = \int_\Omega f\cdot\varphi\ dx,\ \forall\ \varphi\in\mathscr{D}(\Omega)^3,$$

isto é,

$$\langle (1+\varepsilon^{-1}\sigma)E - \varepsilon^{-1}\nabla \times H, \varphi \rangle = \langle f, \varphi \rangle, \ \forall \ \varphi \in \mathscr{D}(\Omega)^3,$$

já que

$$\langle H, \nabla \times \varphi \rangle = \langle \nabla \times H, \varphi \rangle.$$

Portanto,

$$(1+\varepsilon^{-1}\sigma)E - \varepsilon^{-1}\nabla \times H = f, \text{ em } \mathscr{D}'(\Omega)^3.$$

Sendo $E, f \in L^2(\Omega)^3$, conclui-se que $\nabla \times H \in L^2(\Omega)^3$ e, portanto, $H \in H(rot, \Omega)$. Assim, $H \in H(rot, \Omega) \cap H_0(div\ 0, \Omega)$, $E \in H_0(rot, \Omega)$,

$$E + \varepsilon^{-1}\sigma E - \varepsilon^{-1}\nabla \times H = f$$

e

$$\mu^{-1}\nabla \times E + H = g.$$

Portanto, para todo para todo $(f, g) \in \mathscr{H}$, existe um único $(E, H) \in D(\mathscr{A})$ tal que:

$$(I - \mathscr{A})\begin{pmatrix} E \\ H \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}.$$

■

Em resumo, vimos que $\mathscr{A}$ é um operador linear m-dissipativo e com domínio $D(\mathscr{A})$ denso em $\mathscr{H}$. Portanto, pelo Teorema de Lumer-Phillips, o operador $\mathscr{A}$ gera um semigrupo de contrações $T(t)$ de classe C_0, ou seja,

$$\frac{d}{dt}T(t) = \mathscr{A}T(t).$$

Assim, de acordo com a Proposição 1.15, temos o seguinte resultado de existência:

Teorema 2.1 *Para todo $(E_0, H_0) \in \mathscr{H}$, o sistema (2.1)-(2.5) tem uma solução fraca $(E, H) \in C\big([0,\infty); \mathscr{H}\big)$ dada por*

$$(E, H) = T(t)(E_0, H_0).$$

Se, além disso, $(E_0, H_0) \in D(\mathscr{A})$, o sistema (2.1)-(2.5) tem uma solução forte $(E, H) \in C\big([0,\infty); D(\mathscr{A})\big) \cap C^1\big([0,\infty); \mathscr{H}\big)$.

Nos interessa agora obter solução de (2.1)-(2.5) ainda mais regular que a do teorema anterior. Como veremos, é suficiente restringir o espaço onde se toma os dados iniciais. Essa solução mais regular será utilizada na próxima seção, quando faremos uma análise sobre a decomposição ortogonal de E e H.

Introduziremos, então, o seguinte espaço:

$$\mathbb{H}_1(\Omega) = H(rot\ 0,\Omega) \cap H_0(div\ 0,\Omega),$$

isto é,

$$\mathbb{H}_1(\Omega) = \{y \in L^2(\Omega)^3; \nabla \times y = 0, \nabla \cdot y = 0 \text{ e } \ y \cdot \nu|_\Gamma = 0\}.$$

Consideremos também

$$M_H = \mathbb{H}_1^\perp(\Omega),$$

o complemento ortogonal de $\mathbb{H}_1(\Omega)$ em $L^2(\Omega)^3$.

Definimos

$$S_H = L^2(\Omega)^3 \times M_H$$

e provemos o seguinte

Teorema 2.2 *Se $(E_0, H_0) \in D(\mathscr{A}) \cap S_H$, então existe um único (E, H), solução de (2.1)-(2.5), tal que $\big(E(t), H(t)\big) \in D(\mathscr{A}) \cap S_H$, $\forall\ t > 0$.*

Demonstração: Já sabemos do teorema anterior que $(E, H) \in D(\mathscr{A})$, resta-nos provar que $H \in M_H$.

Considerando $h_1 \in \mathbb{H}_1$ qualquer, e utilizando (2.2) obtemos:

$$(\mu H_t, h_1) + (\nabla \times E, h_1) = 0, \forall\ t > 0.$$

Mas, usando a identidade de Green (1.14), vemos que

$$\begin{aligned} (\nabla \times E, h_1) &= \int_\Omega (\nabla \times E) \cdot h_1\ dx \\ &= \int_\Omega E \cdot (\nabla \times h_1)\ dx \\ &= 0, \end{aligned}$$

já que $h_1 \in \mathbb{H}_1$ e $E \in H_0(rot, \Omega)$.

Assim obtemos

$$\frac{d}{dt}(\mu H(t), h_1) = 0,\ \forall\ t > 0,$$

donde

$$\mu(H(t), h_1) = \mu(H_0, h_1) = 0,\ \forall\ t > 0,$$

ou seja

$$(H, h_1) = 0,\ \forall\ h_1 \in \mathbb{H}_1(\Omega),\ \forall\ t > 0.$$

Isto mostra que $H \in \mathbb{H}_1^{\perp}(\Omega) = M_H$. ∎

E assim concluímos a existência e unicidade de solução do sistema (2.1)-(2.5). O próximo passo deste trabalho é estudar o comportamento assintótico da solução. Mas para isso, devemos utilizar uma decomposição ortogonal adequada, que será obtida na próxima seção.

2.2 Decomposição ortogonal da solução

A partir de agora suporemos que o aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ é limitado, simplesmente conexo e com fronteira Γ de classe $C^r (r \geq 2)$.

Valem, obviamente, todos os resultados de existência obtidos anteriormente para o sistema (2.1)-(2.5), onde fixamos hipóteses menos restritivas sobre Ω.

Observação 2.1 *Se $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ é aberto e limitado com fronteira Γ regular (de classe C^2), então*

$$\mathbb{H}_1(\Omega) \subset H^1_{\nu 0}(\Omega)^3 := \{v \in H^1(\Omega)^3, \gamma_\nu(v) = 0\} \subset H^1(\Omega)^3,$$

conforme [5], página 209.

Observação 2.2 *Se $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ é simplesmente conexo com fronteira Γ de classe C^2, então*

$$\begin{aligned} L^2(\Omega)^3 &= grad\ H^1(\Omega) \oplus \mathbb{H}_1(\Omega) \oplus rot\ H^1_{\tau 0}(\Omega)^3 \\ &= grad\ H^1(\Omega) \oplus H_0(div\ 0, \Omega), \end{aligned}$$

onde

$$grad\ H^1(\Omega) = \{\nabla p; p \in H^1(\Omega)\}$$

e

$$rot\ H^1_{\tau 0}(\Omega)^3 = \{\nabla \times v; v \in H^1(\Omega)^3 \ \ e\ \gamma_\tau(v) = 0\}.$$

Assim,

$$\big(H_0(div\ 0, \Omega)\big)^{\perp} = grad\ H^1(\Omega) \subset H(rot\ 0, \Omega)$$

e

$$\big(rot\ H^1_{\tau 0}(\Omega)^3\big)^{\perp} = grad\ H^1(\Omega) \oplus \mathbb{H}_1(\Omega) = H(rot\ 0, \Omega).$$

Mais sobre isso pode ser encontrado em [5], página 226 ou tabela página 314.

No que segue, denotaremos (conforme [5]) o seguinte espaço

$$\mathbb{H}_2(\Omega) = H_0(rot\ 0, \Omega) \cap H(div\ 0, \Omega) = \{u = \nabla\varphi; \varphi \in H^1(\Omega); \triangle\varphi = 0; \varphi|_\Gamma = \text{constante}\}.$$

Os teoremas a seguir serão de fundamental importância no restante do nosso trabalho. Suas demonstrações podem ser encontradas em [5].

Teorema 2.3 *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ um aberto, simplesmente conexo e com fronteira Γ de classe C^2. Então, cada elemento $u \in L^2(\Omega)^3$ tem decomposição única*

$$u = \nabla p + h_1 + \nabla \times w,$$

com $p \in H^1(\Omega)$ (único a menos de uma constante aditiva), $h_1 \in \mathbb{H}_1(\Omega), w \in H^1(\Omega)^3$ e $\gamma_\tau(w) = w \times \nu|_\Gamma = 0$. Além disso,

$$\nabla \cdot w = 0 \quad e \quad \langle \gamma_\nu(w), 1 \rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma), H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} = \int_\Gamma w \cdot \nu \; d\Gamma = 0.$$

Teorema 2.4 *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto e conexo com fronteira Γ lipschitziana. Então*

$$L^2(\Omega)^n = grad\ H_0^1(\Omega) \oplus H(div\ 0, \Omega),$$

onde $grad\ H_0^1(\Omega) = \{\nabla p; p \in H_0^1(\Omega)\}$.

Usando os teoremas acima, obtemos o seguinte resultado de decomposição ortogonal da solução (E, H):

Teorema 2.5 *Se $(E_0, H_0) \in D(\mathscr{A}) \cap S_H$, então existem únicos p, h_2 e A, com $\big(p(t), h_2(t), A(t)\big) \in H_0^1(\Omega) \times \mathbb{H}_2(\Omega) \times H^1(\Omega)^3, \forall\ t > 0$, tal que a solução (E, H) do problema (2.1)-(2.5) satisfaz:*

(a) $E = -\nabla p - A_t + h_2, \forall\ t > 0;$

(b) $\mu H = \nabla \times A, \forall\ t > 0;$

(c) $\nabla \cdot A = 0,\ \gamma_\tau(A) = A \times \nu|_\Gamma = 0$ *e* $\langle \gamma_\nu(A), 1 \rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma), H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} = \int_\Gamma A \cdot \nu \; d\Gamma = 0.$

Além disso,

$$||E||^2 = ||\nabla p||^2 + ||A_t||^2 + ||h_2||^2 \tag{2.9}$$

e existe constante $c > 0$ tal que

$$||A||^2 \leq c||\nabla \times A||^2. \tag{2.10}$$

Demonstração:

Como $H \in L^2(\Omega)^3$ então, pelo Teorema 2.3, podemos escrever H como uma decomposição única da forma:

$$\mu H = \nabla q + h_1 + \nabla \times A, \tag{2.11}$$

em que $q \in H^1(\Omega), h_1 \in \mathbb{H}_1(\Omega), A \in H^1(\Omega)^3$ e $A \times \nu|_\Gamma = 0$ e tais que

$$\nabla \cdot A = 0 \text{ e } \int_\Gamma A \cdot \nu \; d\Gamma = 0.$$

Assim está provado o ítem (c).

Do fato de $H \in H_0(div\ 0, \Omega)$, temos

$$\begin{aligned} 0 &= \nabla \cdot (\mu H) \\ &= \nabla \cdot (\nabla q) + \nabla \cdot h_1 + \nabla \cdot (\nabla \times A) \\ &= \nabla \cdot (\nabla q), \end{aligned}$$

pois $h_1 \in \mathbb{H}_1(\Omega)$ e $\nabla \cdot (\nabla \times A) = 0$. Ou seja,

$$\triangle q = 0.$$

Por outro lado, observemos que, em Γ,

$$\begin{aligned} 0 &= \mu H \cdot \nu \\ &= \nabla q \cdot \nu + h_1 \cdot \nu + \nabla \times A \cdot \nu \\ &= \nabla q \cdot \nu, \end{aligned}$$

pois $H \in H_0(div\ 0, \Omega), h_1 \in \mathbb{H}_1(\Omega)$ e, pela Proposição 1.9, $\nabla \times A \in H_0(div\ 0, \Omega)$.

Portanto, temos

$$\begin{cases} \triangle q = 0 \text{ em } \Omega \\ \frac{\partial q}{\partial \nu} = 0 \text{ em } \Gamma \end{cases}$$

consequentemente, $\nabla q = 0$. De fato,

$$\begin{aligned} 0 &= \int_\Omega \triangle q\ q\ dx \\ &= \int_\Omega \nabla \cdot (\nabla q)\ q\ dx \\ &= \int_\Gamma \frac{\partial q}{\partial \nu}\ q\ d\Gamma - \int_\Omega |\nabla q|^2\ dx \\ &= -||\nabla q||^2_{L^2(\Omega)^3}. \end{aligned}$$

Logo,

$$\nabla q = 0.$$

Além disso, como $H \in M_H = \mathbb{H}_1^\perp(\Omega)$, tem-se para $w \in \mathbb{H}_1(\Omega)$ que

$$\begin{aligned} 0 &= (\mu H, w) = (\nabla q, w) + (h_1, w) + (\nabla \times A, w) \\ &= (h_1, w) + (A, \nabla \times w) \\ &= (h_1, w), \end{aligned}$$

pois $\nabla \times w = 0$ e $A \in H_0(rot, \Omega)$. Logo

$$(h_1, w) = 0, \ \forall \ w \in \mathbb{H}_1(\Omega),$$

com $h_1 \in \mathbb{H}_1(\Omega)$.

Portanto $h_1 = 0$ e a expressão (2.11) pode ser expressa como

$$\mu H = \nabla \times A, \tag{2.12}$$

desta forma está provado o ítem (b).

Por outro lado, como $E \in L^2(\Omega)^3$ então, pelo Teorema 2.4, podemos escrever E da seguinte maneira:

$$E = -\nabla p + w,$$

com $p \in H_0^1(\Omega)$ e $w \in H(div\ 0, \Omega)$.

Utilizando (2.12) na equação (2.2) obtemos

$$\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times A) + \nabla \times E = 0,$$

donde

$$\nabla \times (A_t + E) = 0.$$

Segue, lembrando que $\nabla \times (\nabla p) = 0$, que

$$\nabla \times (A_t + \nabla p + E) = 0.$$

Além disso,

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (A_t + \nabla p + E) &= \frac{\partial}{\partial t}\nabla \cdot A + \nabla \cdot (\nabla p + E) \\ &= \frac{\partial}{\partial t}\nabla \cdot A + \nabla \cdot w \\ &= 0, \end{aligned}$$

já que $\nabla \cdot A = 0$ e $w \in H(div\ 0, \Omega)$.

Temos também que,

$$\begin{aligned} \nu \times (A_t + \nabla p + E) &= \nu \times A_t + \nu \times \nabla p + \nu \times E \\ &= \frac{\partial}{\partial t}(\nu \times A) + \nu \times \nabla p + \nu \times E \\ &= \nu \times \nabla p, \end{aligned}$$

já que $\nu \times A|_\Gamma = 0$, $\nu \times E|_\Gamma = 0$ e, conforme Proposição 1.10, $\nu \times \nabla p|_\Gamma = 0$.

Assim,

$$\nu \times (A_t + \nabla p + E) = 0.$$

Como temos

$$\begin{cases} \nabla \times (A_t + \nabla p + E) &= 0 \\ \nabla \cdot (A_t + \nabla p + E) &= 0 \\ \nu \times (A_t + \nabla p + E) &= 0 \end{cases}$$

concluímos que $(A_t + \nabla p + E) \in \mathbb{H}_2(\Omega) = H_0(rot\ 0, \Omega) \cap H(div\ 0, \Omega)$.

Portanto

$$A_t + \nabla p + E = h_2, \text{ com } h_2 \in \mathbb{H}_2(\Omega).$$

E assim concluímos a demonstração dos ítens (a)-(c).

Vamos agora mostrar que é válida a identidade (2.9). Notemos que

$$||E||^2 = (E, E) = (-\nabla p - A_t + h_2, -\nabla p - A_t + h_2).$$

Ou seja,

$$||E||^2 = ||\nabla p||^2 + ||A_t||^2 + ||h_2||^2 + 2\underbrace{(\nabla p, A_t)} - 2\underbrace{(\nabla p, h_2)} - 2\underbrace{(A_t, h_2)}. \tag{2.13}$$

Mostremos que os ítens acima destacados são todos nulos. De fato, usando (1.10), vemos que

$$\begin{aligned} (\nabla p, A_t) &= \int_\Omega \nabla p \cdot A_t\ dx \\ &= -\int_\Omega p\ \nabla \cdot A_t\ dx + \langle \gamma_\nu(A_t), p \rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma), H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} \\ &= -\int_\Omega p\ \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot A\ dx \\ &= 0, \end{aligned} \tag{2.14}$$

pois $p \in H_0^1(\Omega)$ e $\nabla \cdot A = 0$.

Também, de (1.10),

$$\begin{aligned} (\nabla p, h_2) &= \langle \gamma_\nu(h_2), p \rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma), H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} - \int_\Omega p\ \nabla \cdot h_2\ dx \\ &= 0, \end{aligned} \tag{2.15}$$

já que $p \in H_0^1(\Omega)$ e $\nabla \cdot h_2 = 0$. Por último, temos que

$$\begin{aligned}(A_t, h_2) &= \int_\Omega A_t \cdot h_2 \; dx \\ &= \int_\Omega A_t \cdot \nabla\varphi \; dx,\end{aligned}$$

pois $h_2 \in \mathbb{H}_2(\Omega)$ e, então, $h_2 = \nabla\varphi$ com $\varphi \in H^1(\Omega), \triangle\varphi = 0$ e $\varphi|_\Gamma = k$, onde k é constante.

Utilizando a identidade de Green (1.10), vemos que

$$\begin{aligned}(A_t, h_2) &= \int_\Omega A_t \cdot \nabla\varphi \; dx \\ &= \langle \gamma_\nu(A_t), \varphi \rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma), H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} - \int_\Omega \varphi \; \nabla \cdot A_t \; dx \\ &= \langle \gamma_\nu(A_t), k \rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma), H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} - \int_\Omega \varphi \; \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \cdot A) \; dx \\ &= k\langle \gamma_\nu(A_t), 1 \rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma), H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} \\ &= 0,\end{aligned} \tag{2.16}$$

já que $\langle \gamma_\nu(A_t), 1 \rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma), H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} = \int_\Gamma A \cdot \nu \; d\Gamma = 0$ e $\nabla \cdot A = 0$.

Utilizando as igualdades dadas em (2.14), (2.15) e (2.16) na expressão (2.13), segue que

$$||E||^2_{L^2(\Omega)^3} = ||\nabla p||^2_{L^2(\Omega)^3} + ||A_t||^2_{L^2(\Omega)^3} + ||h_2||^2_{L^2(\Omega)^3}.$$

Para finalizar a demonstração do Teorema 2.5, provaremos por absurdo (2.10). Se a desigualdade não for válida, então para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $\widetilde{A_n} \in H^1(\Omega)^3$ com

$$\begin{cases} \nabla \cdot \widetilde{A_n} &= 0 \\ \widetilde{A_n} \times \nu|\Gamma &= 0 \\ \int_\Gamma \widetilde{A_n} \cdot \nu \; d\Gamma &= 0 \end{cases}$$

e tal que

$$||\widetilde{A_n}|| > n||\nabla \times \widetilde{A_n}||.$$

Ponhamos $A_n = \frac{\widetilde{A_n}}{||\widetilde{A_n}||}$. Então, $||A_n|| = 1$ e, além disso,

$$\begin{aligned}||\nabla \times A_n|| &= \left|\left|\nabla \times \left(\frac{\widetilde{A_n}}{||\widetilde{A_n}||}\right)\right|\right| \\ &= \frac{||\nabla \times \widetilde{A_n}||}{||\widetilde{A_n}||} \\ &< \frac{1}{n} \to 0 \;\; \text{quando} \;\; n \to \infty,\end{aligned}$$

daí $(||\nabla \times A_n||)$ é limitada. Ainda,

$$\nabla \cdot A_n = \frac{1}{||\widetilde{A_n}||} \nabla \cdot \widetilde{A_n} = 0$$

e

$$A_n \times \nu = \frac{1}{||\widetilde{A_n}||} \widetilde{A_n} \times \nu = 0 \text{ em } \Gamma.$$

Ou seja, existe sequência $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \in H^1(\Omega)^3$ tal que

$$\begin{cases} ||A_n|| & = & 1 \\ \lim\limits_{n\to\infty} ||\nabla \times A_n|| & = & 0 \\ \nabla \cdot A_n & = & 0 \\ A_n \nu|_\Gamma & = & 0. \end{cases}$$

Sabemos, conforme Teorema 1.3, que

$$H^1(\Omega)^3 \underset{c}{\hookrightarrow} L^2(\Omega)^3.$$

Assim, existe subsequência (A_{nj}) de (A_n) e $A \in L^2(\Omega)^3$ tal que

$$A_{nj} \to A \text{ em } \; L^2(\Omega)^3.$$

Então $||A_{nj}|| \to ||A||$ e, assim,

$$||A|| = \lim_{n\to\infty} ||A_{nj}|| = 1.$$

Sabemos também que

$$\nabla \times A_{nj} \to 0 \text{ em } \; L^2(\Omega)^3$$

e

$$\nabla \cdot A_{nj} \to 0 \text{ em } \; L^2(\Omega).$$

Mas, por outro lado,

$$\nabla \times A_{nj} \to \nabla \times A \text{ em } \; \mathscr{D}'(\Omega)^3$$

e

$$\nabla \cdot A_{nj} \to \nabla \cdot A \text{ em } \; \mathscr{D}'(\Omega),$$

já que

$$A_{nj} \to A \text{ em } \; \mathscr{D}'(\Omega)^3.$$

Daí, $\nabla \times A = 0$ e $\nabla \cdot A = 0$. Ainda obtemos

$$A \times \nu|\Gamma = \lim_{n\to\infty} A_{nj} \times \nu|_\Gamma = 0,$$

pela continuidade da aplicação traço.

Ou seja, como $A \in L^2(\Omega)^3$, $\nabla \times A = 0$, $\nabla \cdot A = 0$ e $A \times \nu|_\Gamma = 0$, então $A \in \mathbb{H}_2(\Omega)$.

Ainda, $\forall\ h_2 \in \mathbb{H}_2$, tem-se

$$\begin{aligned}(A, h_2) &= (\lim A_{nj}, h_2)\\ &= \lim_{n\to\infty} (A_{nj}, \nabla\varphi)\\ &= -\lim_{n\to\infty} (\nabla \cdot A_{nj}, \varphi) + \lim_{n\to\infty} \langle \gamma_\nu(A_{nj}), k\rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma), H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)}\\ &= 0 + \lim_{n\to\infty} k\langle \gamma_\nu(A_{nj}), 1\rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma), H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)}\\ &= 0. \end{aligned} \tag{2.17}$$

Em particular, se $h_2 = A, ||A|| = 0$, o que é um absurdo, já que $||A|| = 1$. ■

Capítulo 3

COMPORTAMENTO ASSINTÓTICO DA SOLUÇÃO

Neste capítulo, iremos estudar o decaimento da energia associada ao sistema (2.1)-(2.5) através do método da perturbação da energia ou de Lyapunov. Supomos, aqui, que o domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ é aberto, limitado, simplesmente conexo e com fronteira Γ de classe $C^r(r \geq 2)$. São, portanto, as hipóteses fixadas na seção 2.2.

Como vimos na introdução, a energia do sistema é dada pela expressão:

$$\mathscr{E}(t) = \frac{1}{2}\int_\Omega \left[\varepsilon|E(x,t)|^2 + \mu|H(x,t)|^2\right]\ dx. \tag{3.1}$$

Com efeito, formalmente, utilizando (2.1) e (2.2) obtemos

$$\varepsilon E_t \cdot E - (\nabla \times H) \cdot E + \sigma E \cdot E = 0$$

e

$$\mu H_t \cdot H + (\nabla \times E) \cdot H = 0,$$

onde tomamos o produto interno em $\mathbb{R}^3$ de ambos os membros de (2.1) com E e de (2.2) com H.

Integrando ambas as expressões em Ω segue que

$$\frac{\varepsilon}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega |E|^2 dx + \int_\Omega [-(\nabla \times H) \cdot E + \sigma|E|^2]\ dx = 0$$

e

$$\frac{\mu}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega |H|^2 dx + \int_\Omega (\nabla \times E) \cdot H\ dx = 0.$$

Somando e utilizando a Proposição 1.5 vem que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{\Omega}\left[\varepsilon|E|^2+\mu|H|^2\right]dx+\int_{\Omega}\left[\nabla\cdot(E\times H)+\sigma|E|^2\right]\,dx=0.$$

Pela identidade de Green (1.13) e por (2.5) obtemos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{\int_{\Omega}\left[\varepsilon|E|^2+\mu|H|^2\right]\,dx\right\}+\int_{\Omega}\sigma|E|^2\,dx=0,$$

ou seja

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{\int_{\Omega}\left[\varepsilon|E|^2+\mu|H|^2\right]\,dx\right\}=-\int_{\Omega}\sigma|E|^2\,dx.$$

Portanto a equação da energia do sistema é dada pela expressão:

$$\mathscr{E}(t)=\frac{1}{2}\int_{\Omega}\left[\varepsilon|E(x,t)|^2+\mu|H(x,t)|^2\right]\,dx.$$

Temos, dos cálculos anteriores, o seguinte

Lema 3.1 *Seja (E_0,H_0) um par inicial de $D(\mathscr{A})\cap S_H$ e $(E(t),H(t))$ solução do problema (2.1)-(2.5). Então a derivada da energia associada ao sistema, definida em (3.1), é dada por*

$$\frac{d}{dt}\mathscr{E}(t)=-\int_{\Omega}\sigma|E|^2\,dx. \tag{3.2}$$

Conclui-se aqui que a energia é decrescente e cabe-nos estudar de que forma ocorre seu decaimento. Isto será feito no próximo teorema.

Teorema 3.1 *Seja $(E_0,H_0)\in D(\mathscr{A})\cap S_H$ e (E,H) a solução de (2.1)-(2.5) correspondente. Então existem constantes $\alpha,\beta>0$ tais que*

$$\mathscr{E}(t)\leq\alpha\mathscr{E}(0)e^{-\beta t},\ \forall\ t>0.$$

Demonstração: Sabemos pelo Teorema 2.5 que a solução (E,H) se decompõe da forma

$$E=-\nabla p-A_t+h_2$$

e

$$\mu H=\nabla\times A,$$

com $p\in H_0^1(\Omega), h_2\in\mathbb{H}_2, A\in H^1(\Omega)^3, \nabla\cdot A=0$ e $A\times\nu|_{\Gamma}=0$.

Ponhamos

$$F(t)=\int_{\Omega}\varepsilon E\cdot A\,dx.$$

Temos, usando a equação (2.1), a identidade de Green (1.13) e o fato que $\gamma_\tau(A) = 0$ que

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}F(t) &= \varepsilon \int_\Omega [E_t \cdot A + E \cdot A_t]\ dx \\
&= \varepsilon \int_\Omega [(\varepsilon^{-1}\nabla \times H - \sigma\varepsilon^{-1}E) \cdot A + E \cdot A_t]\ dx \\
&= \int_\Omega (\nabla \times H) \cdot A\ dx - \int_\Omega \sigma E \cdot A\ dx + \varepsilon \int_\Omega E \cdot A_t\ dx \\
&= \int_\Omega H \cdot (\nabla \times A)\ dx - \int_\Omega \sigma E \cdot A\ dx + \varepsilon \int_\Omega E \cdot A_t\ dx.
\end{aligned}$$

Mas, como sabemos, $\nabla \times A = \mu H$, donde segue que

$$\frac{d}{dt}F(t) = \int_\Omega \mu |H|^2\ dx - \int_\Omega \sigma E \cdot A\ dx + \varepsilon \int_\Omega E \cdot A_t\ dx.$$

Definimos agora

$$G(t) = \mathscr{E}(t) - \delta F(t),$$

onde δ é um parâmetro positivo a ser fixado. Temos

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}G(t) &= \frac{d}{dt}\mathscr{E}(t) - \delta \frac{d}{dt}F(t) \\
&= -\int_\Omega \sigma |E|^2\ dx - \delta \left(\int_\Omega \mu |H|^2\ dx - \int_\Omega \sigma E \cdot A\ dx + \varepsilon \int_\Omega E \cdot A_t\ dx \right) \\
&= -\int_\Omega \sigma |E|^2\ dx - \delta \int_\Omega \mu |H|^2\ dx \\
&+ \delta \int_\Omega \sigma E \cdot A\ dx - \delta\varepsilon \int_\Omega E \cdot A_t\ dx. \qquad (3.3)
\end{aligned}$$

Da desigualdade de Hölder e de (2.10) obtemos

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \sigma E \cdot A\ dx &\leq \int_\Omega |\sigma E \cdot A|\ dx \\
&\leq \sigma ||E||\ ||A|| \\
&\leq \sigma c ||E||\ ||\nabla \times A|| \\
&= \sigma c ||E||\ ||\mu H||.
\end{aligned}$$

Utilizando a Observação 1.1, segue que

$$\begin{aligned}\int_\Omega \sigma E\cdot A\;dx &\le \sigma c||E||\;||\mu H||\\ &= (\sqrt{\mu}\sigma c||E||)\left(\frac{1}{\sqrt{\mu}}||\mu H||\right)\\ &\le c(\varepsilon_1)(\sqrt{\mu}\sigma c||E||)^2+\varepsilon_1\left(\frac{1}{\sqrt{\mu}}||\mu H||\right)^2\\ &= \frac{\mu\sigma^2c^2}{4\varepsilon_1}\int_\Omega |E|^2\;dx+\frac{\varepsilon_1}{\mu}\int_\Omega |\mu H|^2\;dx\\ &= \frac{\mu\sigma^2c^2}{4\varepsilon_1}\int_\Omega |E|^2\;dx+\varepsilon_1\int_\Omega \mu|H|^2\;dx, \qquad (3.4)\end{aligned}$$

onde ε_1 é constante positiva a ser escolhida posteriormente.

Ainda,

$$\begin{aligned}\int_\Omega E\cdot A_t\;dx &= \int_\Omega(-\nabla p-A_t+h_2)\cdot A_t\;dx\\ &= -\int_\Omega \nabla p\cdot A_t\;dx-\int_\Omega |A_t|^2\;dx+\int_\Omega h_2\cdot A_t\;dx. \qquad (3.5)\end{aligned}$$

Vimos em (2.14) e (2.16) que

$$-\int_\Omega \nabla p\cdot A_t\;dx=0 \quad\text{e}\quad \int_\Omega h_2\cdot A_t\;dx=0.$$

Segue, de (3.5), (2.9) e das duas identidades anteriores que

$$-\int_\Omega E\cdot A_t\;dx=||A_t||^2\le ||E||^2=\int_\Omega |E|^2\;dx. \qquad (3.6)$$

Substituindo (3.4) e (3.6) na expressão (3.3) obtemos:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}G(t) &\le -\int_\Omega \sigma|E|^2\;dx-\delta\int_\Omega \mu|H|^2\;dx+\frac{\delta\mu\sigma^2c^2}{4\varepsilon_1}\int_\Omega |E|^2\;dx\\ &+ \delta\varepsilon_1\int_\Omega \mu|H|^2\;dx+\delta\varepsilon\int_\Omega |E|^2\;dx\\ &= \left(-\sigma+\frac{\delta\mu\sigma^2c^2}{4\varepsilon_1}+\delta\varepsilon\right)\int_\Omega |E|^2\;dx+(\varepsilon_1-1)\delta\int_\Omega \mu|H|^2\;dx\\ &= -\left(\frac{\sigma}{\varepsilon}-\frac{\delta\mu\sigma^2c^2}{4\varepsilon_1\varepsilon}-\delta\right)\int_\Omega \varepsilon|E|^2\;dx-(1-\varepsilon_1)\delta\int_\Omega \mu|H|^2\;dx.\end{aligned}$$

Vamos, agora, escolher $\varepsilon_1>0$ tal que

$$\varepsilon_1<\min\left\{1,\frac{1}{2\mu}\right\}$$

e $\delta > 0$ tal que

$$\frac{\sigma}{\varepsilon} - \delta\left(\frac{\mu\sigma^2c^2}{4\varepsilon_1} - 1\right) > 0 \ \ e \ \ \frac{c^2\delta^2\varepsilon}{2\varepsilon_1} < 1.$$

Daí, com estas escolhas, vemos que

$$\frac{d}{dt}G(t) \leq -c_1\mathscr{E}(t), \tag{3.7}$$

onde

$$c_1 = \min\left\{\left(\frac{\sigma}{\varepsilon} - \frac{\delta\mu\sigma^2c^2}{4\varepsilon_1\varepsilon} - \delta\right), (1-\varepsilon_1)\delta\right\}.$$

Por outro lado, pela desigualdade (2.10),

$$\begin{aligned}
|G(t) - \mathscr{E}(t)| &= |-\delta F(t)| \\
&= \left|-\delta\varepsilon\int_\Omega E\cdot A\ dx\right| \\
&\leq \delta\varepsilon\int_\Omega |E\cdot A|\ dx \\
&\leq \delta\varepsilon||E||\ ||A|| \\
&\leq c\delta\varepsilon||E||\ ||\nabla\times A|| \\
&= c\delta\varepsilon||E||\ ||\mu H||.
\end{aligned}$$

Pela desigualdade de Young segue que

$$\begin{aligned}
|G(t) - \mathscr{E}(t)| &\leq \frac{c^2\delta^2\varepsilon^2}{4\varepsilon_1}||E||^2 + \varepsilon_1||\mu H||^2 \\
&= \frac{c^2\delta^2\varepsilon}{4\varepsilon_1}\int_\Omega \varepsilon|E|^2\ dx + \varepsilon_1\mu\int_\Omega \mu|H|^2\ dx,
\end{aligned}$$

donde

$$-\left(\frac{c^2\delta^2\varepsilon}{4\varepsilon_1}\int_\Omega \varepsilon|E|^2\ dx + \varepsilon_1\mu\int_\Omega \mu|H|^2\ dx\right) + \mathscr{E}(t) \leq G(t)$$

e

$$G(t) \ \leq \ +\left(\frac{c^2\delta^2\varepsilon}{4\varepsilon_1}\int_\Omega \varepsilon|E|^2\ dx + \varepsilon_1\mu\int_\Omega \mu|H|^2\ dx\right) + \mathscr{E}(t).$$

Segue que

$$-\frac{c^2\delta^2\varepsilon}{4\varepsilon_1}\int_\Omega \varepsilon|E|^2\ dx - \varepsilon_1\mu\int_\Omega \mu|H|^2\ dx + \frac{1}{2}\int_\Omega \varepsilon|E|^2\ dx + \frac{1}{2}\int_\Omega \mu|H|^2\ dx \leq G(t)$$

e

$$G(t) \leq +\frac{c^2\delta^2\varepsilon}{4\varepsilon_1}\int_\Omega \varepsilon|E|^2\ dx + \varepsilon_1\mu\int_\Omega \mu|H|^2\ dx + \frac{1}{2}\int_\Omega \varepsilon|E|^2\ dx + \frac{1}{2}\int_\Omega \mu|H|^2\ dx.$$

Ou seja

$$\frac{1}{2}\left(1-\frac{c^2\delta^2\varepsilon}{2\varepsilon_1}\right)\int_\Omega \varepsilon|E|^2\,dx+\frac{1}{2}(1-2\varepsilon_1\mu)\int_\Omega \mu|H|^2\,dx\le G(t) \tag{3.8}$$

e

$$G(t)\le\frac{1}{2}\left(1+\frac{c^2\delta^2\varepsilon}{2\varepsilon_1}\right)\int_\Omega \varepsilon|E|^2\,dx+\frac{1}{2}(1+2\varepsilon_1\mu)\int_\Omega \mu|H|^2\,dx. \tag{3.9}$$

Das escolhas de ε_1 e δ feitas anteriormente, vemos que

$$0<1-2\varepsilon_1\mu \;\; e \;\; 0<1-\frac{c^2\delta^2\varepsilon}{2\varepsilon_1}.$$

Segue, pois, de (3.8) e (3.9) que

$$c_2\mathscr{E}(t)\le G(t)\le c_3\mathscr{E}(t), \tag{3.10}$$

onde

$$c_2=\min\left\{\left(1-\frac{c^2\delta^2\varepsilon}{2\varepsilon_1}\right),(1-2\varepsilon_1\mu)\right\}>0$$

e

$$c_3=\max\left\{\left(1+\frac{c^2\delta^2\varepsilon}{2\varepsilon_1}\right),(1+2\varepsilon_1\mu)\right\}>0.$$

Portanto, de (3.7) e (3.10) obtemos

$$\frac{d}{dt}G(t)\le -c_1\mathscr{E}(t)\le-\frac{c_1}{c_3}G(t),$$

ou seja,

$$G(t)\le G(0)\;e^{-\frac{c_1}{c_3}t}. \tag{3.11}$$

Finalmente, de (3.10) e (3.11), vem

$$\mathscr{E}(t)\le\frac{1}{c_2}G(t)\le\frac{1}{c_2}G(0)\;e^{-\frac{c_1}{c_3}t}\le\frac{c_3}{c_2}\mathscr{E}(0)\;e^{-\frac{c_1}{c_3}t}.$$

Logo

$$\mathscr{E}(t)\le\alpha\mathscr{E}(0)\;e^{-\beta t},\;\text{onde } \alpha=\frac{c_3}{c_2}\text{ e }\beta=\frac{c_1}{c_3}.$$

∎

Portanto a energia associada ao sistema (2.1)-(2.5) decai exponencialmente na medida em que vai passando o tempo.

CONCLUSÃO

Após o desenvolvimento deste trabalho, podemos enumerar diversos pontos positivos.

Inicialmente, para a busca da solução do sistema num espaço funcional adequado, o Capítulo 1 das Preliminares foi de grande importância. Nele estava todo o embasamento teórico para o prosseguimento dos estudos. Podemos destacar os teoremas de Lax-Milgran e de Lumer-Phillips, sendo estes fundamentais para chegarmos na existência e unicidade do sistema considerado. Destaca-se também os espaços clássicos na teoria do eletromagnetismo, sendo eles, $H(rot, \Omega)$ e $H(div, \Omega)$. Naquela oportunidade, utilizamos o operador projeção na busca de resultados de densidade no espaço $H_0(div\ 0, \Omega) \cap H(rot, \Omega)$.

No que concerne o Capítulo 2, após encontrarmos a existência e unicidade de solução do sistema em eletromagnetismo, é feito um estudo para obtenção de solução ainda mais regular. Para isso vimos que é suficiente restringir o espaço onde se toma os dados iniciais e então a decomposição ortogonal da solução foi de extrema relevância. Tal decomposição ortogonal é utilizada também para analisar o comportamento assintótico da solução, o que foi feito no último capítulo.

Para trabalhos futuros, destaca-se a utilização de diferentes condições iniciais e de fronteira bem como trabalhar os parâmetros ε, μ e σ como funções escalares não constantes na região Ω.

REFERÊNCIAS

[1] ADAMS, R.A. **Sobolev Spaces**. New York: Academic Press, 1975.

[2] BREZIS, H. **Análisis funcional- Teoria y Aplicaciones**. Madrid: Alianza Editorial S. A., 1984.

[3] CAVALCANTI, M. M.; CAVALCANTI, V. N. D. **Introdução à teria das distribuições e aos espaços de Sobolev**. Maringá: Eduem, 2009.

[4] DAUTRAY, R.; LIONS, J.L. **Mathematical Analysis and Numerical Methods for Science and Technology**. Physical Origins and Classical Methods. Berlin: Springer-Verlag, 1990. v.1.

[5] DAUTRAY, R.; LIONS, J.L. **Mathematical Analysis and Numerical Methods for Science and Technology**. Spectral Theory and Applications. Berlin: Springer-Verlag, 1990, v.3.

[6] DUVAUT, G.; LIONS, J.L. **Inequalities in Mechanics and Physics**. Berlin: Springer-Verlag, 1976.

[7] FERREIRA, M. V. **Ondas elásticas e eletromagnéticas em domínios exteriores: propriedades assintóticas**. Tese de Doutorado, Instituto de Matematica, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Brasil, 2005.

[8] FERREIRA, M. V.; MENZALA, G. P. Energy decay for solutions to semilinear systems of elastic waves in exterior domains. **Eletronic Journal of Differential Equations**, **2006**, p.1-13, 2006.

[9] FERREIRA, M. V., MENZALA, G. P. Uniform Stabilization of an electromagnetic-elasticity problem in exterior domain. **Discrete and Continuous Dynamical Systems**, v.18, n. 4, 2007.

[10] GIRAULT, V.; RAVIART, P. A. **Finit Element Methods for Navier-Stokes Equations**. Theory and Algoritms. Berlin: Springer-Verlag, 1986.

[11] GOMES, A. M. **Semigrupos de operadores lineares e aplicações às equações diferenciais parciais**. Rio de Janeiro: IM-UFRJ, 2000.

[12] KREYSZIG, E. **Introductory functional analysis with applications**. United States of America: John Wiley e Sons. Inc., 1978.

[13] LADYZHENSKAYA, O. A.; SOLONNIKOV, V. A. The linearization principle and invariant manifolds for problems of magnetohydrodynamics. **J. Soviet Math.**, v. 8, p. 384-422, 1977.

[14] MARTINEZ, R. M. A. **Métodos de elementos finitos para problemas de correntes induzidas**, Tese de Doutorado, Faculdade de Ciências Físicas e Matemáticas da Universidade da Conceição, Universidade da Conceição, Chile, 2008.

[15] MEDEIROS, L. A.; MELLO, E. A. **A integral de lebesgue**. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática- UFRJ, 2008.

[16] MEDEIROS, L. A.; RIVERA, P.H. **Espaços de Sobolev e aplicações às equações diferenciais parciais**. Textos de Métodos Matemáticos n. 9. Rio de Janeiro: IM-UFRJ, 1975.

[17] MEDEIROS, L. A.; RIVERA, P. H. **Introdução aos espaços de Sobolev**. Rio de Janeiro, 1977.

[18] MONK, P. **Finite Element Methods for Maxwell's Equations**. New York: Oxford, 2003.

[19] NICAISE, S. Exact Boundary controllability of maxwell's equations in heterogeneous media and an application to an inverse source problem. **SIAM J. Control Optim.**, v. 38, n. 4, p. 1145-1170, 2000.

[20] NICAISE, S.; PIGNOTTI, C. Internal Stabilization of Maxwell's equations in heterogeneous media, **Abstract and applied analysis**, v.7, p. 791-811, 2005.

[21] PAZY, A. **Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations**. Applied Mathematical Sciences. New York: Springer-Verlag, 1983.

[22] PHUNG, K. D. .Contrôle et Stabilisation D'Ondes Électromagnétiques. **ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations**, v.5, p. 87-137, 2000.

[23] YIN, H. On Maxwell's equations in an electromagnetic field with the temperature effect. **Siam J. Math. Anal.**,v.29, n.3, p. 637-651, 1998.

[24] YIN, H. On a singular limit problem for nonlinear Maxwell's equations. **J. Differential Equations**, v. 156, p. 355-375, 1999.

[25] ZHOU, Q. Exact internal controllability of Maxwell's equations. **Japan J. Indust. Appl. Math.** v.14, p. 245-256, 1997.