UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA MARIA
CENTRO DE CIÊNCIAS NATURAIS E EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

EQUAÇÕES DE NAVIER-STOKES EM DOMÍNIOS TRIDIMENSIONAIS FINOS

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Felipe Crivellaro Minuzzi

Santa Maria, RS, Brasil

2014

EQUAÇÕES DE NAVIER-STOKES EM DOMÍNIOS TRIDIMENSIONAIS FINOS

Felipe Crivellaro Minuzzi

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado do Programa de Pós-Graduação em Matemática, da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM, RS), como requisito parcial para obtenção do grau de **Mestre em Matemática**.

Orientador: Prof. Dr. João Paulo Lukaszczyk

Santa Maria, RS, Brasil

2014

Universidade Federal de Santa Maria
Centro de Ciências Naturais e Exatas
Programa de Pós-Graduação em Matemática

A Comissão Examinadora, abaixo assinada,
aprova a Dissertação de Mestrado

EQUAÇÕES DE NAVIER-STOKES EM DOMÍNIOS TRIDIMENSIONAIS FINOS

elaborada por
Felipe Crivellaro Minuzzi

como requisito parcial para obtenção do grau de
Mestre em Matemática

COMISSÃO EXAMINADORA:

João Paulo Lukaszczyk, Dr. (UFSM)
(Presidente/Orientador)

Leonardo Prange Bonorino, Dr. (UFRGS)

Marcio Violante Ferreira, Dr. (UFSM)

Santa Maria, 16 de julho de 2014.

AGRADECIMENTOS

Ao concluir esta etapa, gostaria de agradecer a algumas pessoas que foram importantes ao longo da formulação deste trabalho. Em primeiro lugar, aos meus pais, Valdir e Diva, pela educação que me proporcionaram e pelo apoio que sempre me deram. Ao meu irmão Rafael, por ter feito a minha infância uma das mais divertidas de ser lembrada. Aos meus, tios, tias, dinda, primos e prima; fazer parte desta família é maravilhoso! Agradeço a minhas avós Célia e Maria, exemplos de vida, às quais dedico esta obra.

Não sei se terminaria este projeto se não tivesse ao meu lado a mais especial (e linda) de todas as mulheres! À Bruna, meu agradecimento não se limita apenas a compreensão, apoio e paciência nas longas horas de estudo e ausência, mas ao incentivo para que eu nunca deixasse de ir atrás de meus objetivos e sonhos. Agradeço pelo amor, carinho e respeito que construímos um pelo outro, obrigado por estar ao meu lado! Espero poder retribuir tudo isso a altura da mulher que és. Agradeço também ao Adilção, Angela e Mariane, que me acolhido nesta família como um filho, pelo apoio e carinho.

Aos grandes amigos, pois sem eles nada somos. Agradeço ao Guilherme, Elisa, Verônica e Marília, que desde muito pequeno estiveram comigo. Aos amigos do peito de pomba, pela parceria que sempre nos une! Aos amigos que a matemática me deu, Vinícius, Chico, Lucélia, Alex Jenaro, Jéssica, Tiago, Arlindo, Otônio, Aline, que tornaram as tardes de estudos mais divertidas e prazeroras.

Por fim, aos mestres que me guiaram por este projeto. Agradeço ao meu orientador João Paulo Lukaszczyk, pelos ensinamentos, paciência e parceria. Agradeço também aos membros da banca, Leonardo Bonorino e Márcio Ferreira, por suas sugestões e comentários. Este último também pelo grande exemplo como docente. Ao professor, e amigo, Maurício Fronza, pela ajuda e apoio durante o mestrado. Meu agradecimento à Capes, pelo apoio financeiro, e à UFSM, pela oportunidade bem aproveitada.

"All that is gold does not glitter,

Not all those who wonder are lost;

The old that is strong does not whither,

Deep roots are not reached by the frost"

J.R.R. Tolkien

RESUMO

Dissertação de Mestrado
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Universidade Federal de Santa Maria

EQUAÇÕES DE NAVIER-STOKES EM DOMÍNIOS TRIDIMENSIONAIS FINOS

AUTOR: FELIPE CRIVELLARO MINUZZI
ORIENTADOR: JOÃO PAULO LUKASZCZYK
Data e Local da Defesa: Santa Maria, 16 de julho de 2014.

A forma clássica do sistema de equações de Navier-Stokes, o qual deriva do princípio de conservação de massa e momento linear, descreve o movimento de um fluido homogêneo sujeito a um campo de forças externas. Neste trabalho, desenvolve-se um estudo para encontrar o intervalo maximal de existência de soluções no tempo para as equações de Navier-Stokes em um domínio tridimensional fino, isto é, $\Omega_\epsilon = \omega \times (0, \epsilon)$, onde $\omega \subset \mathbb{R}^2$ e $\epsilon \in (0, 1)$, considerando combinações de diferentes condições de fronteira.

Palavras-chave: equações de Navier-Stokes; domínios finos; existência de solução

ABSTRACT

Dissertation
Graduate Program in Mathematics
Universidade Federal de Santa Maria

NAVIER-STOKES EQUATIONS IN TRIDIMENSIONAL THIN DOMAINS

AUTHOR: FELIPE CRIVELLARO MINUZZI
ADVISOR: JOÃO PAULO LUKASZCZYK
Date and Location of Defense: Santa Maria, July 16th, 2014.

The classical form of the Navier-Stokes equations system, which is derived from the principle of conservation of mass and momentum, describes the motion of a homogeneous flow fluid subject to a field of external forces. In this work, we develop a study to find the maximal interval of existence of solutions in time to the Navier-Stokes equations in a three dimensional thin domain, i.e., $\Omega_\epsilon = \omega \times (0, \epsilon)$, where $\omega \subset \mathbb{R}^2$ e $\epsilon \in (0, 1)$, considering different combinations of boundary conditions.

Keywords: Navier-Stokes equations; Thin domains; Existence of solutions.

LISTA DE SÍMBOLOS

No desenvolver deste trabalho, usamos notações usuais no estudo de equações diferenciais parciais e em análise, algumas enumeradas abaixo.

1. $\mathbb{R}^n$ é o Espaço Euclidiano n-dimensional, munido da norma $|x| = \left(\sum_{j=1}^{n} x_j^2\right)^{1/2}$, onde $x = (x_1, \ldots, x_n)$;

2. Ω é um aberto limitado do $\mathbb{R}^n$;

3. $L^p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$, é o espaço das funções mensuráveis $g : \Omega \to \mathbb{R}$ tais que

$$|g|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega \mid g(x) \mid^p \ dx\right)^{1/p} \ < \ \infty;$$

4. $L^\infty(\Omega)$ é o espaço das funções mensuráveis $g : \Omega \to \mathbb{R}$ tais que existe uma constante C onde $\mid g(x) \mid \leq$ C q.s em Ω, munido da norma

$$|g|_{L^\infty(\Omega)} = \inf \{\mathrm{C};\ \mid g(x) \mid \leq \ C \text{ q.s. em } \Omega\};$$

5. $\mathbb{L}^p(\Omega) = L^p(\Omega) \times L^p(\Omega) \times L^p(\Omega)$;

6. $H^k(\Omega)$ é o espaço de Sobolev $W^{k,2}(\Omega)$;

7. $\mathbb{H}^1(\Omega) = H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$;

8. $C(\Omega)$, $C^k(\Omega)$, $C_0^k(\Omega)$ e $C_0^\infty(\Omega)$ são espaços usuais definidos em análise;

9. Para uma função $u(x) = (u_1(x), u_2(x), u_3(x))$, $x = (x_1, x_2, x_3)$, tem-se as notações:

   (i) $\mathrm{div} u = \dfrac{\partial u_1}{\partial x_1} + \dfrac{\partial u_1}{\partial x_2} + \dfrac{\partial u_3}{\partial x_3}$;

   (ii) $\nabla u = \left(\dfrac{\partial u_1}{\partial x_1}, \dfrac{\partial u_1}{\partial x_3}, \dfrac{\partial u_1}{\partial x_3}\right)$;

   (iii) $\nabla' u = \left(\dfrac{\partial u_1}{\partial x_1}, \dfrac{\partial u_1}{\partial x_3}, 0\right)$;

   (iv) $\mathrm{rot} u = \left(\dfrac{\partial u_3}{\partial x_2} - \dfrac{\partial u_2}{\partial x_3}, \dfrac{\partial u_1}{\partial x_3} - \dfrac{\partial u_3}{\partial x_1}, \dfrac{\partial u_2}{\partial x_1} - \dfrac{\partial u_1}{\partial x_2}\right)$;

(v) O operador de Laplace Δ é tal que $\Delta u = (\Delta u_1, \Delta u_2, \Delta u_3)$ e $\Delta' u = (\Delta u_1, \Delta u_2, 0)$, onde

$$\Delta u_i = \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2}.$$

10. $\Lambda = \left\{ u \in (C_0^\infty(\Omega))^3 \, ; \; \text{div} u = 0 \right\}$;

11. H é o fecho de Λ em $L^2(\Omega)$. Neste espaço, denotamos a norma por $|\cdot|_\epsilon$ e o produto interno por $(\cdot,\cdot)_\epsilon$;

12. V é o fecho de Λ em $H^1(\Omega)$. Neste espaço, denotamos a norma por $||\cdot||_\epsilon$ e o produto interno por $((\cdot,\cdot))_\epsilon$;

13. $L^p(0,T,X)$, $0 \leq p \leq \infty$ é o espaço das funções L^p no tempo com valores em X;

14. A_ϵ é o Operador de Stokes;

15. $D(A_\epsilon)$ é o domínio do Operador de Stokes.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Por volta dos séculos XVIII e XIX, os matemáticos Leonhard Paul Euler (1707 - 1783), Claude Louis Marie Henri Navier (1785 - 1836) e George Gabriel Stokes (1819 - 1903) fizeram grandes avanços no campo da mecânica dos fluidos. O primeiro foi responsável pela dedução do sistema de equações que modelam o movimento de fluidos quando estes não são viscosos, enquanto os outros dois consideraram o efeito da viscosidade. O resultado de seus trabalhos são o que hoje chamamos de *Equações de Euler* e *Equações de Navier-Stokes*, esta, objeto de estudo deste trabalho.

As equações de Navier-Stokes descrevem o movimento de um fluido homogêneo, sujeito a um campo de forças externos, e são deduzidas a partir da 2ª Lei de Newton, do Princípio de Conservação da Massa e de Momento Linear, como pode ser visto em S. Melo e F. Neto [9], A. Chorin e J. Marsden [3], R. Fox e A. McDonald [6] e H. Kreiss e J. Lorenz [7]. Sua importância não atinge apenas a Matemática, mas campos como Física, Dinâmica dos Fluidos, Meteorologia, e, mais específicos, Dinâmica dos Oceanos, Geofísica, Mecânica dos Sólidos e Fisiologia, entre outros.

Apesar de muito usada, quando falamos em existência de soluções clássicas em $\mathbb{R}^3 \times [0, \infty)$, este ainda é um problema em aberto da Matemática, conhecido por ser um dos *Millenium Problems* do *Clay Mathematical Institute*, que premia 1 milhão de dólares a quem resolvê-lo. O trabalho da matemática russa Olga Ladyzhenskaya foi o primeiro que provou de maneira rigorosa a convergência de um método de diferenças finitas para as equações de Navier-Sokes. Hoje em dia, são conhecidos resultados de existência e unicidade para solução fraca em espaços de Sobolev, como pode ser encontrado em J. Lions [8] e R. Temam [12], os quais usam o método de Galerkin. Recentemente, em janeiro de 2014, o matemático cazáque Muchtarbai Otelbajew publicou um artigo afirmando ter encontrado solução clássica para as equações de Navier-Stokes. Tal trabalho ainda está em análise pela comissão examinadora do *Clay Mathematical Institute*.

A forma vetorial do sistema de equações de Navier-Stokes é dado por

$$\begin{cases} u_t + u \cdot \nabla u - \mu \Delta u + \nabla p = f, & \text{em} \quad \Omega \times (0, \infty) \\ \textbf{div } u = 0, & \text{em} \quad \Omega \times (0, \infty) \end{cases}$$

onde Ω é um domínio suave em $\mathbb{R}^3$. O objetivo deste trabalho é estudar o intervalo maximal de existência no tempo de solução para o sistema acima em domínios tridimensionais finos, isto é, quando uma dimensão é pequena quando comparada as demais. Em outras palavras, consideraremos um domínio do tipo $\Omega_\epsilon = \omega \times (0, \epsilon) \subset \mathbb{R}^3$, sendo $\omega \subset \mathbb{R}^2$ um domíno regular e $0 < \epsilon < 1$.

O estudo de solução global no tempo para domínios finos foi iniciado por G. Raugel e G. Sell [10], os quais consideraram uma dilatação no domínio para encontrar as equações de Navier-Stokes definidas em $\omega \times (0, 1)$ fixo. Diferentemente, o artigo de R. Temam e M. Ziane [14], utilizado como base para esta dissertação, não usa a dilatação e sim, trabalha diretamente em Ω_ϵ. Além disso, consideramos combinações entre condições de fronteira, as quais influenciam fortemente no comportamento das soluções.

O primeiro capítulo é dedicado às definições, teoremas e resultados clássicos da teoria de equações diferenciais parciais, os quais serão utilizados no decorrer do texto. A partir do segundo capítulo, deduzimos uma formulação matemática específica para domínios finos, como as combinações entre as condições de fronteira de *Dirichlet*, periódica e livre, e a interferência dessas na definição dos espaços funcionais H e V. Outra importante ferramenta usada neste capítulo é o operador média integral na direção fina, definido de acordo com a condição de fronteira a ser utilizado. Por fim, apresentamos algumas desigualdades clássicas, como a de Poicaré, além de outras essencialmente importantes.

No capítulo 3, é feita uma formulação fraca para as equações de Navier-Stokes, baseando-se no operador média integral, além de estimativas *a priori* para o mesmo. Tais estimativas tornam-se uma importante ferramenta para os resultados acerca do intervalo maximal de existência de solução no tempo, estes dependendo da condição de fronteira considerada. Também, como aplicação do resultado obtido, resolvemos um exemplo com as condições de *Dirichlet* e periódica, utilizando uma força externa dada. Finalmente, foi reservado o apêndice para apresentar as principais caracteristicas do Operador de Stokes, usado constantemente durante o texto.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo serão enunciados os resultados e definições que utilizam-se no decorrer do trabalho.

1.1 Definições

Definição 1.1.1 (Forma b_ϵ e B_ϵ) *A forma trilinear b_ϵ em $V \times V \times V$ é definida por:*

$$b_\epsilon(u, v, w) = (u \cdot \nabla v, w)_{L^2(\Omega)} = \sum_{i,j=1}^{3} \int_\Omega u_i \frac{\partial v_j}{\partial x_i} w_j \; dx,$$

onde $u, v, w \in \mathbb{H}^1(\Omega)$. A forma bilinear B_ϵ em $V \times V$ é definida por

$$((B_\epsilon(u, v), w))_\epsilon = b_\epsilon(u, v, w),$$

onde $(u, v) \in V \times V$, $\forall\, w \in V$.

Definição 1.1.2 (Espaço de Sobolev) *Seja $1 \leq p \leq \infty$ fixado e k um inteiro não negativo. O espaço $W^{k,p}(\Omega)$ é formado por todas funções $u : \Omega \to \mathbb{R}$ localmente integráveis tal que, para cada multiíndice α, com $|\alpha| \leq k$, $D^\alpha u$ existe no sentido fraco e pertence à $L^p(\Omega)$. Se $p = 2$, escreve-se usualmente*

$$H^k(\Omega) \equiv W^{k,2}(\Omega),$$

o qual é um espaço de Hilbert. O fecho de $C_c^\infty(\Omega)$ em $W^{k,p}(\Omega)$ é denotado por $W_0^{k,p}(\Omega)$.

Se $p = 2$,

$$H_0^k(\Omega) \equiv W_0^{k,2}(\Omega).$$

Neste trabalho, além de $p = 2$*, usa-se* $k = 1$*, isto é,* $H^1(\Omega)$ *e* $H_0^1(\Omega)$*, onde tal índice implica que todas as derivadas parciais de primeira ordem, com relação a todas variáveis, pertencem à* $L^2(\Omega)$.

1.2 Teoremas

Teorema 1.2.1 *Seja* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$*, limitado ou não. A forma* b_ϵ *é definida e trilinear contínua em* $H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \times (H_0^1(\Omega) \cap L^n(\Omega))$*. Em particular, se* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *é um aberto limitado e* $n \leq 4$ *então a forma* b_ϵ *é trilinear continua em* $V \times V \times V$*. Além disso, valem as seguintes propriedades:*

(i) $b_\epsilon(u, v, v) = 0,\ \forall\ u \in V,\ v \in H_0^1(\Omega) \cap L^n(\Omega)$.

(ii) $b_\epsilon(u, v, w) = -b_\epsilon(u, w, v),\ \forall\ u \in V,\ v, w \in H_0^1(\Omega) \cap L^n(\Omega)$.

Demonstração: Veja [12], páginas 161, 162 e 163.

Teorema 1.2.2 *Sejam* $\boldsymbol{A}$*,* $\boldsymbol{B}$ *e* $\boldsymbol{C}$ *campos vetorias diferenciáveis em* $\mathbb{R}^3$ *e* Ψ *uma função escalar diferenciável de* $\mathbb{R}^3$*. Então:*

(i) $(\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}) \times \boldsymbol{C} = (\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{C})\boldsymbol{B} - (\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{C})\boldsymbol{A}$,

(ii) $(\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}) \cdot \boldsymbol{C} = (\boldsymbol{C} \times \boldsymbol{A}) \cdot \boldsymbol{B} = (\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C}) \cdot \boldsymbol{A}$,

(iii) $\boldsymbol{div}(\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}) = \boldsymbol{B} \cdot rot\boldsymbol{A} - \boldsymbol{A} \cdot rot\boldsymbol{B}$,

(iv) $rot(\Psi \boldsymbol{A}) = \nabla\Psi \times \boldsymbol{A} + \Psi rot\boldsymbol{A}$,

(v) $\boldsymbol{div}(\Psi \boldsymbol{A}) = \nabla\Psi \cdot \boldsymbol{A} + \Psi \boldsymbol{divA}$.

Teorema 1.2.3 (Teorema da Divergência) *Seja* $\tau : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$*, onde* Ω *é um aberto limitado, um campo vetorial de classe* C^1 *através da superficie orientada* $\partial\Omega$*. Então,*

$$\int_\Omega \boldsymbol{div}(\tau)\ dx = \int_{\partial\Omega} \tau \boldsymbol{n}\ dS, \tag{1.1}$$

onde $\boldsymbol{n}$ *é o vetor normal apontando para fora de* $\partial\Omega$.

Teorema 1.2.4 (Fórmulas de Green) *Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto e limitado onde $\partial U \in C^1$, $u, v \in C^1(\overline{U})$. Então*

(i) $\displaystyle\int_U \Delta u \; dx = \int_{\partial u} \frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{n}} \; dS;$

(ii) $\displaystyle\int_U \nabla v \cdot \nabla u \; dx = -\int_U u\Delta v \; dx + \int_{\partial U} \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}} u \; dS;$

(iii) $\displaystyle\int_U (u\Delta v - v\Delta u) \; dx = \int_{\partial U} \left(u\frac{\partial v}{\partial \boldsymbol{n}} - v\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}} \right) \; dS,$

onde $\boldsymbol{n}$ é o vetor normal apontando para fora de ∂U.

Demonstração: Veja [4], página 628.

Teorema 1.2.5 (Imersões de Sobolev) *Seja Ω um aberto limitado de $\mathbb{R}^n$ com fronteira regular. Então, para todo $u \in H_0^1(\Omega)$, e $1 \leq q < \infty$, tem-se*

$$|u|_{L^q(\Omega)} \leq c(\Omega) \, |u|_{H_0^1(\Omega)}, \quad se \quad n = 2; \tag{1.2}$$

$$|u|_{L^{\frac{2n}{n-2}}(\Omega)} \leq c(\Omega) \, |u|_{H_0^1(\Omega)}, \quad se \quad n \geq 3. \tag{1.3}$$

Demonstração: Veja [12], página 159.

Teorema 1.2.6 (Teorema da Convergência Dominada) *Seja $\{f_n(x)\}$ uma sequência de funções mensuráveis em $X \subset \mathbb{R}^n$ tal que*

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

exista para todo $x \in X$. Se existe $g : X \to [0, \infty]$ uma função mensurável tal que $|f_n(x)| \leq g(x)$, então

$$\lim_{n\to\infty} \int_X |f_n - f| \; dx = 0 \quad e \quad \lim_{n\to\infty} \int_X f_n \; dx = \int_X f \; dx. \tag{1.4}$$

Demonstração: Veja [11], página 26.

1.3 Desigualdades

Teorema 1.3.1 (Desigualdade de Cauchy com δ) *Sejam $a, b > 0$ e $\delta > 0$. Então,*

$$ab \leq \delta a^2 + \frac{b^2}{4\delta} \tag{1.5}$$

Demonstração: Veja [4], página 622.

Teorema 1.3.2 *Sejam a, b números reais positivos. Então,*

$$a+b \leq \sqrt{2}\sqrt{(a^2+b^2)} \tag{1.6}$$

Demonstração: Observe que

$$\begin{aligned} (a+b)^2 &= a^2+2ab+b^2 \\ &\leq a^2+a^2+b^2+b^2 \\ &= 2a^2+2b^2 = 2\left(a^2+b^2\right), \end{aligned}$$

isto é,

$$a+b \leq \sqrt{2}\sqrt{(a^2+b^2)}$$

$\blacksquare$

Teorema 1.3.3 (Desigualdade de Gronwall (1ª versão)) *Seja $\eta\ (.)$ uma função não negativa, absolutamente contínua em $[0,T]$ e que satisfaz a relação diferencial*

$$\frac{d}{dt}\eta(t) \leq \phi(t)\eta(t)+\psi(t), \tag{1.7}$$

onde $\phi(t)$ e $\psi(t)$ são funções não negativas e integráveis em $[0,T]$. Então

$$\eta(t) \leq e^{\int_0^t \phi(s)ds}\left[\eta(0)+\int_0^t \psi(s)\ ds\right], \tag{1.8}$$

para todo $0 \leq t \leq T$. Em particular, se $\eta^{'} \leq \phi\eta$ em $[0,T]$ e $\eta(0)=0$, então

$$\eta \equiv 0 \quad em \quad [0,T] \tag{1.9}$$

Demonstração: Veja [4], página 625.

Teorema 1.3.4 (Desigualdade de Gronwall (2ª versão)) *Seja $\eta : [0,T] \to \mathbb{R}$ uma função difereciável e suponha que*

$$\frac{d}{dt}\eta(t) \leq \phi(t)\eta(t)+\psi(t), \tag{1.10}$$

onde ϕ é contínua e ψ é localmente integrável em $[0,T]$. Então,

$$\eta(t) \leq \eta(0)e^{\Phi(t)} + \int_0^t \left(e^{\Phi(t)-\Phi(s)}\right)\psi(t)\ ds, \tag{1.11}$$

com

$$\Phi(t) = \int_0^t \phi(r)\ dr.$$

Demonstração: Multiplicando a função $\eta(t)$ por $e^{-\Phi(t)}$ e derivando, tem-se

$$\frac{d}{dt}\left(e^{-\Phi(t)}\eta(t)\right) = e^{-\Phi(t)}\frac{d}{dt}\eta(t) + \eta(t)\frac{d}{dt}e^{-\Phi(t)}. \tag{1.12}$$

Usando a regra da Cadeia,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(e^{-\Phi(t)}\eta(t)\right) &= e^{-\Phi(t)}\frac{d}{dt}\eta(t) - e^{-\Phi(t)}\frac{d}{dt}\Phi(t)\eta(t)\\ &= e^{-\Phi(t)}\frac{d}{dt}\eta(t) - e^{-\Phi(t)}\phi(t)\eta(t)\end{aligned}$$

pois, pelo Teorema Fundamental do Cálculo, $\dfrac{d}{dt}\Phi(t) = \dfrac{d}{dt}\displaystyle\int_0^t \phi(r)\ dr = \phi(t)$. Agora, pela hipótese (1.10),

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(e^{-\Phi(t)}\eta(t)\right) &\leq e^{-\Phi(t)}\left[\phi(t)\eta(t) + \psi(t)\right] - e^{-\Phi(t)}\phi(t)\eta(t)\\ &= e^{-\Phi(t)}\phi(t)\eta(t) + e^{-\Phi(t)}\psi(t) - e^{-\Phi(t)}\phi(t)\eta(t)\\ &= e^{-\Phi(t)}\psi(t). \qquad (1.13)\end{aligned}$$

Assim, integrando em $[0,T]$ a desigualdade acima, obtem-se

$$\begin{aligned}\int_0^t \frac{d}{ds}\left(e^{-\Phi(s)}\eta(s)\right)ds &\leq \int_0^t e^{-\Phi(s)}\psi(s)\ ds\\ e^{-\Phi(t)}\eta(t) - e^{-\Phi(0)}\eta(0) &\leq \int_0^t e^{-\Phi(s)}\psi(s)\ ds\\ e^{-\Phi(t)}\eta(t) - \eta(0) &\leq \int_0^t e^{-\Phi(s)}\psi(s)\ ds,\end{aligned}$$

já que $\Phi(0) = \displaystyle\int_0^0 \phi(r)\ dr = 0$. Para concluir, multiplicando a última expressao por $e^{\Phi(t)}$ e isolando $\eta(t)$,

$$\eta(t) \ \leq \ \eta(0)e^{\Phi(t)} + \int_0^t \left(e^{\Phi(t)-\Phi(s)}\right)\psi(t)\ ds. \tag{1.14}$$

Observação:

O resultado acima também vale para o intervalo $[t_0, T]$, com $t_0 > 0$ e, neste caso, tem-se $\Phi(t) = \displaystyle\int_{t_0}^t \phi(r)\ dr$. Com efeito, integrando em $[t_0, T]$ a expressão (1.13),

$$\begin{aligned}
\int_{t_0}^t \frac{d}{ds}e^{-\Phi(s)}\eta(s)\ ds \ &\leq \ \int_{t_0}^t e^{-\Phi(s)}\psi(s)\ ds \\
e^{-\Phi(t)}\eta(t) - e^{-\Phi(t_0)}\eta(t_0) \ &\leq \ \int_{t_0}^t e^{-\Phi(s)}\psi(s)\ ds \\
e^{-\Phi(t)}\eta(t) - \eta(t_0) \ &\leq \ \int_{t_0}^t e^{-\Phi(s)}\psi(s)\ ds,
\end{aligned} \tag{1.15}$$

já que $\Phi(t_0) = \displaystyle\int_{t_0}^{t_0} \phi(r)\ dr = 0$. Portanto,

$$\eta(t) \ \leq \ \eta(t_0)e^{\Phi(t)} + \int_{t_0}^t \left(e^{\Phi(t)-\Phi(s)}\right)\psi(t)\ ds. \tag{1.16}$$

■

Teorema 1.3.5 (Desigualdade de Jensen) *Suponha que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ seja uma função convexa e $U \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto e limitado. Seja $u : U \to \mathbb{R}$ integrável. Então,*

$$f\left(\frac{1}{|U|}\int_U u\ dx\right) \leq \frac{1}{|U|}\int_U f(u)\ dx. \tag{1.17}$$

Aqui, $\frac{1}{|U|}\int_U u\ dx$ é a média de u sobre U.

Demonstração: Veja [4], página 621.

Teorema 1.3.6 (Desigualdade de Young) *Sejam p, q tais que $1 < p, q < \infty$ e $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Então, para $a, b > 0$,*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}. \tag{1.18}$$

Demonstração: Veja [4], página 622.

Teorema 1.3.7 (Desigualdade de Hölder) *Sejam* $1 \leq p, q \leq \infty$ *tais que* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. *Se* $u \in L^p(U)$ *e* $v \in L^q(U)$, *então*

$$\int_U |\, uv \,| \;\; dx \;\; \leq \;\; |u|_{L^p(U)} \, |v|_{L^q(U)} \, . \tag{1.19}$$

Demonstração: Veja [4], página 623.

Teorema 1.3.8 (Desigualdade de Hölder Generalizada) *Sejam* $1 \leq p_1, \ldots, p_m \leq \infty$ *com* $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \cdots + \frac{1}{p_m} = 1$, $m \in \mathbb{N}$, *e suponha que* $u_k \in L^{p_k}(U)$, *para* $k = 1, \ldots, m$. *Então*

$$\int_U |\, u_1 \ldots u_m \,| \;\; dx \;\; \leq \;\; |u_1|_{L^{p_1}(U)} \, |u_2|_{L^{p_2}(U)} \ldots |u_m|_{L^{p_m}(U)} \, . \tag{1.20}$$

Demonstração: Veja [4], página 623.

Capítulo 2

Introdução ao Estudo em Domínios Finos

2.1 Resultado Clássico em Domínios Gerais

Com relação a existência de solução das equações de Navier-Stokes em domínios gerais, o seguinte resultado é conhecido em diversas bibliografias, tais como Temam [12], [13] e Lions [8]. Ambos usam o método de Galerkin para encontrar solução fraca em espaços de Sobolev. Mais precisamente, tem-se

Teorema 2.1.1 *Sejam $u_0 \in H$ e $f \in L^2(0, T, V)$. Então existe*

$$u \in L^2(0, T, V) \cap L^\infty(0, T, H)$$

para todo $T > 0$, solução das equações de Navier-Stokes. Se $u_0 \in V$ então existe $T = T(\Omega, \mu, u_0, f) > 0$ tal que

$$u \in L^2(0, T, D(A_\epsilon)) \cap L^\infty(0, T, V)$$

é a única solução das equações de Navier-Stokes.

No que segue, a solução única dada pelo teorema acima é chamada de solução forte.

2.2 Formulação Matemática em Domínios Finos

Seja Ω_ϵ um domínio fino, isto é, $\Omega_\epsilon = \omega \times (0, \epsilon)$, onde $0 < \epsilon < 1$ e $\omega \subset \mathbb{R}^2$ é suave. O objetivo deste trabalho é estudar o intervalo maximal de existência de soluções $u(x,t)$ no tempo do sistema

$$\begin{cases} u_t + u \cdot \nabla u - \mu \Delta u + \nabla p = f, & \text{em} \quad \Omega_\epsilon \times (0, \infty) \\ \mathbf{div}\ u = 0, & \text{em} \quad \Omega_\epsilon \times (0, \infty) \\ u(x,0) = u_0(x), & \text{em} \quad \Omega_\epsilon, \end{cases} \tag{2.1}$$

onde

(i) $u(x,t) = (u_1(x,t), u_2(x,t), u_3(x,t))$ é o campo de velocidades no ponto $x = (x_1, x_2, x_3)$ e no instante t;

(ii) $p : \Omega_\epsilon \times (0, T) \to \mathbb{R}$, $T > 0$, é a pressão;

(iii) $\mu > 0$ é a viscosidade do sistema e;

(iv) $u_0(x) = (u_0^1(x), u_0^2(x), u_0^3(x))$ é a velocidade inicial dada.

Neste trabalho, supõe-se que

$$u_0 \in H \text{ ou } V \quad \text{e} \quad f \in L^\infty(0, +\infty, H)$$

Além disso, serão necessárias algumas definições iniciais com relação a fronteira de Ω_ϵ e aos espaços V e H, os quais serão definidos de acordo com a condição de fronteira em questão.

2.2.1 Condições de Fronteira

No que segue, a fronteira $\partial\Omega_\epsilon$ de Ω_ϵ será denotada por $\partial\Omega_\epsilon = \Gamma_t \cup \Gamma_b \cup \Gamma_l$, onde

$$\Gamma_t = \omega \times \{\epsilon\}, \quad \Gamma_b = \omega \times \{0\}, \quad \text{e} \quad \Gamma_l = \partial\omega \times (0, \epsilon).$$

Para a formulação do problema, faz-se algumas combinações entre certas condições para $\partial\Omega_\epsilon$, a saber, as condições de *Dirichlet*, periódica e de fronteira livre.

Mais precisamente, as combinações usadas são:

1. A condição de fronteira livre em $\Gamma_t \cup \Gamma_b$ e periódica em Γ_l, denotada por **(FP)**. Considera-se, neste caso, $\omega = (0, l_1) \times (0, l_2)$, $l_1, l_2 > 0$,

$$u_3 = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial u_1}{\partial x_3} = \frac{\partial u_2}{\partial x_3} = 0 \quad \text{em} \quad \Gamma_t \cup \Gamma_b,$$

e

$$u_i(x_1 + l_1, x_2, x_3, t) = u_i(x_1, x_2, x_3, t),$$
$$u_i(x_1, x_2 + l_2, x_3, t) = u_i(x_1, x_2, x_3, t),$$

ou seja, u_i é periódica nas direções x_1 e x_2 com período l_1 e l_2, respectivamente, para $i = 1, 2, 3$. Além disso,

$$\int_{\Omega_\epsilon} u_0^j(x)\, dx = \int_{\Omega_\epsilon} f_j(x, t)\, dx = 0, \quad j = 1, 2.$$

2. A condição de fronteira livre em $\Gamma_t \cup \Gamma_b$ e de Dirichlet em Γ_l, denotada por **(FD)**. Neste caso, $\omega \subset \mathbb{R}^2$ é um domínio limitado de classe C^2,

$$u_3 = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial u_1}{\partial x_3} = \frac{\partial u_2}{\partial x_3} = 0 \quad \text{em} \quad \Gamma_t \cup \Gamma_b,$$

e

$$u(x, t) = 0 \ \text{ em } \ \Gamma_l.$$

3. A condição de fronteira livre em $\partial\Omega_\epsilon$, denotada por **(FF)**. Neste caso, se $\mathbf{n}$ é o vetor normal apontado para fora de $\partial\Omega_\epsilon$, então

$$u \cdot \mathbf{n} = 0, \quad \text{rot} u \times \mathbf{n} = 0 \ \text{ em } \ \partial\Omega_\epsilon.$$

A primeira relação acima indica que a velocidade é sempre perpendicular ao vetor normal, isto é, acompanha a superfície da fronteira.

4. A condição periódica em $\partial\Omega_\epsilon$, denotada por **(PP)**. Neste caso, $\omega = (0, l_1) \times (0, l_2)$, $l_1, l_2 > 0$ e $u(x, t)$ é periódica em todo Ω_ϵ. Além disso,

$$\int_{\Omega_\epsilon} u_0(x)\, dx = \int_{\Omega_\epsilon} f(x, t)\, dx = 0.$$

5. A condição de Dirichlet em $\partial\Omega_\epsilon$, denotada por **(DD)**, ou seja,

$$u(x,t) = 0 \ \text{ em } \ \partial\Omega_\epsilon.$$

6. A condição de Dirichlet em $\Gamma_t \cup \Gamma_b$ e periódica em Γ_l, denotada por **(DP)**. Neste caso,

$$u(x,t) = 0 \ \text{ em } \ \Gamma_t \cup \Gamma_b$$

   e u é periódica em Γ_l. Além disso,

$$\int_{\Omega_\epsilon} u_0^3 \, dx = \int_{\Omega_\epsilon} f_3(x,t) \, dx = 0.$$

2.2.2 Espaços Funcionais

Os espaços H e V, de acordo com a condição de fronteira utilizada, sofrem algumas adaptações em como são definidos.

O espaço H_{FP}, o qual refere-se à condição (FP), é definido por:

$$H_{FP} = \Big\{ u \in \mathbb{L}^2(\Omega_\epsilon); \ \mathbf{div} u = 0; \ u_3(x,t) = 0 \ \text{ em } \ \Gamma_t \cup \Gamma_b, \\ \int_{\Omega_\epsilon} u_\alpha(x,t) \, dx = 0 \ \text{ e } \ u\big|\Gamma_\alpha = u\big|\Gamma_{\alpha+3}; \ \alpha = 1,2 \Big\},$$

onde Γ_α e $\Gamma_{\alpha+3}$ são as faces $x_\alpha = 0$ e $x_\alpha = l_\alpha$ de $\partial\Omega_\epsilon$, respectivamente. Esta condição indica a periodicidade da função v na direção x_α.

Para a condição (FD), tem-se:

$$H_{FD} = \Big\{ u \in \mathbb{L}^2(\Omega_\epsilon); \ \mathbf{div} u = 0; \ u \cdot \mathbf{n} = 0 \ \text{ em } \ \partial\Omega_\epsilon \Big\},$$

e para (PP),

$$H_{PP} = \Big\{ u \in \mathbb{L}^2(\Omega_\epsilon); \ \mathbf{div} u = 0; \ \int_{\Omega_\epsilon} u(x,t) \, dx = 0 \ \text{ e } \ u_j\big|\Gamma_j = u_j\big|\Gamma_{j+3}; \ j = 1,2,3 \Big\}.$$

Para as condições (DD), (FF) e (DP), as seguintes equivalências são válidas:

$$H_{DD} = H_{FF} = H_{FD} \ \text{ e } \ H_{DP} = H_{FP}.$$

Com relação ao espaço V_ϵ, define-se como segue:

$$\begin{aligned}
V_{FP} &= \{u \in \mathbb{H}^1(\Omega_\epsilon) \cap H_{FP};\ u\big|\Gamma_\alpha = u\big|\Gamma_{\alpha+3}\}; \\
V_{FD} &= \{u \in \mathbb{H}^1(\Omega_\epsilon) \cap H_{FD};\ u = 0 \ \text{ em } \ \Gamma_l\}; \\
V_{PP} &= \{u \in \mathbb{H}^1_{per}(\Omega_\epsilon);\ \mathbf{div} u = 0\}; \\
V_{DD} &= \{u \in \mathbb{H}^1_0(\Omega_\epsilon);\ \mathbf{div} u = 0\} \ \text{ e} \\
V_{FF} &= \{u \in \mathbb{H}^1(\Omega_\epsilon) \cap H_{FF};\ u \cdot \mathbf{n} = 0 \ \text{ em } \ \partial\Omega_\epsilon\}
\end{aligned}$$

Neste trabalho, denota-se estes espaços por H_ϵ e V_ϵ, a menos que haja diferença nas demonstrações.

2.3 Os operadores $\tilde{M}_\epsilon$ e $\tilde{N}_\epsilon$

Seja $\phi \in L^2(\Omega_\epsilon)$ uma função escalar. O operador média integral na direção fina é definido por:

$$\begin{aligned}
M_\epsilon : L^2(\Omega_\epsilon) &\longrightarrow L^2(\Omega_\epsilon) \\
\phi &\longmapsto M_\epsilon\phi = \frac{1}{\epsilon}\int_0^\epsilon \phi(x_1, x_2, s)\, ds.
\end{aligned} \tag{2.2}$$

Note que apesar de ϕ ser uma função de três variáveis, M_ϵ possui apenas duas, a saber, x_1 e x_2, visto que a integral em (2.2) depende apenas da terceira componente de ϕ. Define-se, também, o operador N_ϵ por

$$N_\epsilon\phi(x_1, x_2, x_3) = \phi(x_1, x_2, x_3) - M_\epsilon\phi(x_1, x_2).$$

Portanto,

$$N_\epsilon + M_\epsilon = I_{L^2(\Omega_\epsilon)}.$$

O operador $\tilde{M}_\epsilon$ é definido para funções $u = (u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{L}^2(\Omega_\epsilon)$, isto é,

$$\begin{aligned}
\tilde{M}_\epsilon : \mathbb{L}^2(\Omega_\epsilon) &\longrightarrow \mathbb{L}^2(\Omega_\epsilon) \\
u &\longmapsto \tilde{M}_\epsilon u = (M_\epsilon u_1, M_\epsilon u_2, M_\epsilon u_3)
\end{aligned} \tag{2.3}$$

Dependendo da condição de fronteira, define-se:

(i) Para (FF), (FP) e (FD), $\tilde{M}_\epsilon u = (M_\epsilon u_1, M_\epsilon u_2, 0)$.

(ii) Para (PP), $\tilde{M}_\epsilon u = (M_\epsilon u_1, M_\epsilon u_2, M_\epsilon u_3)$.

(iii) Para (DD) e (DP), $\tilde{M}_\epsilon u = 0$.

Analogamente, define-se o operador $\tilde{N}_\epsilon$ por $\tilde{N}_\epsilon u = u - \tilde{M}_\epsilon u$, ou seja, $\tilde{N}_\epsilon + \tilde{M}_\epsilon = I_{\mathbb{L}^2(\Omega_\epsilon)}$.

Um fato interessante sobre os operadores definidos acima é que todos são projeções, isto é,

$$M_\epsilon^2 = M_\epsilon,\ N_\epsilon^2 = N_\epsilon,\ \tilde{M}_\epsilon^2 = \tilde{M}_\epsilon,\ \tilde{N}_\epsilon^2 = \tilde{N}_\epsilon.$$

De fato, seja $\phi \in L^2(\Omega_\epsilon)$. Então,

$$M_\epsilon^2(\phi) = (M_\epsilon \circ M_\epsilon)(\phi) = M_\epsilon(M_\epsilon \phi).$$

Assim,

$$\begin{aligned} M_\epsilon(M_\epsilon \phi) = M_\epsilon\left(\frac{1}{\epsilon}\int_0^\epsilon \phi(x_1, x_2, s)\ ds\right) &= \int_0^\epsilon \frac{1}{\epsilon} M_\epsilon \phi(x_1, x_2)\ dx_3 \\ &= \frac{M_\epsilon \phi(x_1, x_2)}{\epsilon}\int_0^\epsilon\ dx_3 = M_\epsilon \phi(x_1, x_2). \end{aligned}$$

Para N_ϵ, tem-se

$$\begin{aligned} N_\epsilon^2(\phi) = N_\epsilon(N_\epsilon \phi) &= N_\epsilon(\phi - M_\epsilon \phi) = N_\epsilon \phi - N_\epsilon(M_\epsilon \phi) \\ &= \phi - M_\epsilon \phi - (M_\epsilon \phi - M_\epsilon(M_\epsilon \phi)) \\ &= \phi - M_\epsilon \phi - (M_\epsilon \phi - M_\epsilon \phi) = \phi - M_\epsilon \phi = N_\epsilon \phi, \end{aligned}$$

com $\phi \in L^2(\Omega_\epsilon)$. Analogamente mostra-se para $\tilde{M}_\epsilon$ e $\tilde{N}_\epsilon$. Além disso, é pertinente observar que, independente da condição de fronteira, cada componente de $\tilde{N}_\epsilon u$ satisfaz uma das seguintes situações:

$$N_\epsilon u_j \equiv 0 \ \text{ em } \ \Gamma_t \cup \Gamma_b \quad \text{ou} \quad \int_0^\epsilon N_\epsilon u_j\ dx_3 = 0, \quad \text{para} \ \ j = 1, 2, 3. \tag{2.4}$$

O seguinte resultado reúne algumas propriedades para os operadores $M_\epsilon, N_\epsilon, \tilde{M}_\epsilon, \tilde{N}_\epsilon$, as quais serão úteis na demonstração do lema 2.3.1.

Proposição 2.3.1 *Vale que:*

(i) M_ϵ *é a projeção ortogonal de* $L^2(\Omega_\epsilon)$ *em* $L^2(\omega)$.

(ii) $M_\epsilon N_\epsilon = 0$ *e* $\tilde{M}_\epsilon \tilde{N}_\epsilon = 0$.

(iii) $\tilde{M}_\epsilon \nabla' = \nabla' M_\epsilon$, $\tilde{N}_\epsilon \nabla' = \nabla' N_\epsilon$.

(iv) Se $\phi \in H^k(\Omega_\epsilon)$ *então* $M_\epsilon \phi \in H^k(\omega)$ *e* $N_\epsilon \phi \in H^k(\Omega_\epsilon)$, $\forall\ k \geq 0$.

(v) A condição de fronteira para $\tilde{M}_\epsilon$ *em* $\partial\omega$ *é a mesma de* $u \in \mathbb{L}^2(\Omega_\epsilon)$ *em* $\partial\omega \times (0, \epsilon)$, *isto é, se* u *satisfaz (FD) ou (DD) então* $\tilde{M}_\epsilon u$ *é nula em* $\partial\omega$, *se* u *satisfaz (FP) ou (PP), então* $\tilde{M}_\epsilon u$ *é periódica e se* u *satisfaz (FF), então* $\tilde{M}_\epsilon u$ *satisfaz (FF).*

(vi) Os operadores $\tilde{M}_\epsilon$ *e* $\tilde{N}_\epsilon$ *são auto-adjuntos.*

Demonstração:

(i) Dado $\phi \in L^2(\Omega_\epsilon)$ tem-se, para todo $\theta \in L^2(\omega)$,

$$\begin{aligned}(\phi - M_\epsilon\phi, \theta)_{L^2(\Omega_\epsilon)} &= \int_{\Omega_\epsilon} [\phi - M_\epsilon\phi]\theta\ dx_3dx_2dx_1 = \int_{\Omega_\epsilon} \phi\theta - M_\epsilon\phi\theta\ dx_3dx_2dx_1 \\ &= \int_{\Omega_\epsilon} \phi\theta\ dx_3dx_2dx_1 - \int_{\Omega_\epsilon} M_\epsilon\phi\theta\ dx_3dx_2dx_1. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Resolvendo a primeira integral de (2.5), obtêm-se

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_\epsilon} \phi\theta\ dx_3dx_2dx_1 &= \int_{\omega\times(0,\epsilon)} \phi\theta\ dx_3dx_2dx_1 = \int_\omega \int_0^\epsilon \phi\theta\ dx_3dx_2dx_1 \\ &= \int_\omega \theta \left(\int_0^\epsilon \phi\ dx_3 \right)\ dx_2dx_1 = \int_\omega \theta(\epsilon M_\epsilon\phi)\ dx_2dx_1 \\ &= \epsilon \int_\omega \theta(M_\epsilon\phi)\ dx_2dx_1. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Da segunda integral de (2.5),

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_\epsilon} M_\epsilon\phi\theta\ dx_3dx_2dx_1 &= \int_{\Omega_\epsilon} \left(\frac{1}{\epsilon} \int_0^\epsilon \phi\ dx_3 \right) \theta dx_3dx_2dx_1 \\ &= \int_\omega \int_0^\epsilon \left(\frac{1}{\epsilon} \int_0^\epsilon \phi\ dx_3 \right) \theta\ dx_3dx_2dx_1 \\ &= \int_\omega \left(\frac{1}{\epsilon} \int_0^\epsilon \phi\ dx_3 \right) \theta \left(\int_0^\epsilon\ dx_3 \right)\ dx_2dx_1 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_\omega \left(\frac{1}{\epsilon}\int_0^\epsilon \phi\ dx_3\right)\theta\epsilon dx_2 dx_1 \\
&= \int_\omega \left(\int_0^\epsilon \phi\ dx_3\right)\theta\ dx_2 dx_1 = \int_\omega \theta\epsilon(M_\epsilon\phi)\ dx_2 dx_1 \\
&= \epsilon\int_\omega \theta(M_\epsilon\phi)\ dx_2 dx_1. \qquad (2.7)
\end{aligned}
$$

Comparando (2.6) e (2.7), segue que

$$(\phi - M_\epsilon\phi, \theta)_{L^2(\Omega_\epsilon)} = 0,$$

ou seja, M_ϵ é a projeção ortogonal de $L^2(\Omega_\epsilon)$ em $L^2(\omega)$.

(ii) Tem-se, para $\phi \in L^2(\Omega_\epsilon)$,

$$
\begin{aligned}
(M_\epsilon N_\epsilon)(\phi) &= M_\epsilon(N_\epsilon\phi) = M_\epsilon(\phi - M_\epsilon\phi) \\
&= M_\epsilon\phi - M_\epsilon(M_\epsilon\phi) = M_\epsilon\phi - M_\epsilon\phi = 0.
\end{aligned}
$$

Para $\tilde{M}_\epsilon\tilde{N}_\epsilon$ a demonstração é análoga.

(iii) Seja $\phi \in L^2(\Omega_\epsilon)$. Então,

$$(\tilde{M}_\epsilon\nabla')(\phi) = \tilde{M}_\epsilon(\nabla'\phi) = \tilde{M}\left(\frac{\partial\phi}{\partial x_1}, \frac{\partial\phi}{\partial x_2}, 0\right) = \left(M_\epsilon\left(\frac{\partial\phi}{\partial x_1}\right), M_\epsilon\left(\frac{\partial\phi}{\partial x_2}\right), 0\right).$$

Pelo Teorema da Convergência Dominada, pode-se inverter a integração pela derivação em cada coordenada do último vetor da expressão acima. Assim,

$$
\begin{aligned}
\left(M_\epsilon\left(\frac{\partial\phi}{\partial x_1}\right), M_\epsilon\left(\frac{\partial\phi}{\partial x_2}\right), 0\right) &= \left(\frac{\partial}{\partial x_1}M_\epsilon\phi, \frac{\partial}{\partial x_2}M_\epsilon\phi, 0\right) \\
&= \nabla' M_\epsilon\phi \qquad (2.8)
\end{aligned}
$$

Logo, $\tilde{M}_\epsilon(\nabla'\phi) = \nabla' M_\epsilon\phi$. Para $\tilde{N}_\epsilon\nabla'$, tem-se

$$
\begin{aligned}
(\tilde{N}_\epsilon\nabla')(\phi) &= \tilde{N}_\epsilon(\nabla'\phi) = \tilde{N}\left(\frac{\partial\phi}{\partial x_1}, \frac{\partial\phi}{\partial x_2}, 0\right) \\
&= \left(N_\epsilon\left(\frac{\partial\phi}{\partial x_1}\right), N_\epsilon\left(\frac{\partial\phi}{\partial x_2}\right), 0\right)
\end{aligned}
$$

$$= \left(\frac{\partial \phi}{\partial x_1} - M_\epsilon \left(\frac{\partial \phi}{\partial x_1} \right), \frac{\partial \phi}{\partial x_2} - M_\epsilon \left(\frac{\partial \phi}{\partial x_2} \right), 0 \right).$$

Novamente, pelo Teorema da Convergência dominada,

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x_1} - M_\epsilon \left(\frac{\partial \phi}{\partial x_1} \right), \frac{\partial \phi}{\partial x_2} - M_\epsilon \left(\frac{\partial \phi}{\partial x_2} \right), 0 \right) &= \left(\frac{\partial}{\partial x_1} N_\epsilon \phi, \frac{\partial}{\partial x_2} N_\epsilon \phi, 0 \right) \\ &= \nabla' N_\epsilon \phi. \end{aligned}$$

Logo, $\tilde{N}_\epsilon(\nabla' \phi) = \nabla' N_\epsilon \phi$.

(iv) Seja $\phi \in H^k(\Omega_\epsilon)$. Para $k = 0$, tem-se

$$\int_\omega |M_\epsilon \phi(x_1, x_2)|^2 \ dx_1 dx_2 = \int_\omega \left| \frac{1}{\epsilon} \int_0^\epsilon \phi(x_1, x_2, s) \ ds \right|^2 \ dx_1 dx_2. \tag{2.9}$$

Mas, pela Desigualdade de Hölder, para $p = q = 2$,

$$\int_0^\epsilon |\phi(x_1, x_2, s)| \ ds \leq \left(\int_0^\epsilon 1 \ ds \right)^{1/2} \left(\int_0^\epsilon |\phi(x_1, x_2, s)|^2 \ ds \right)^{1/2}$$

Logo,

$$\left(\int_0^\epsilon |\phi(x_1, x_2, s)| \ ds \right)^2 \leq \epsilon \int_0^\epsilon |\phi(x_1, x_2, s)|^2 \ ds. \tag{2.10}$$

De (2.9) e (2.10), obtem-se

$$\begin{aligned} \int_\omega \left| \frac{1}{\epsilon} \int_0^\epsilon \phi(x_1, x_2, s) \ ds \right|^2 \ dx_1 dx_2 &\leq \int_\omega \left(\frac{1}{\epsilon} \int_0^\epsilon |\phi(x_1, x_2, s)| \ ds \right)^2 \ dx_1 dx_2 \\ &\leq \int_\omega \frac{1}{\epsilon} \left(\epsilon \int_0^\epsilon |\phi(x_1, x_2, s)|^2 \ ds \right) \ dx_1 dx_2 \\ &= ||\phi||^2_{L^2(\Omega_\epsilon)}. \end{aligned}$$

Assim, $||M_\epsilon \phi||^2_{L^2(\omega)} \leq ||\phi||^2_{L^2(\Omega_\epsilon)}$. Como $\phi \in H^k(\Omega_\epsilon)$, segue que $||M_\epsilon \phi||^2_{L^2(\omega)}$ é finito e portanto $M_\epsilon \phi \in H^k(\omega)$. Além disso, já que $M_\epsilon \phi \in H^k(\omega)$ e $\phi \in H^k(\Omega_\epsilon)$, segue que $N_\epsilon \phi = \phi - M_\epsilon \phi \in H^k(\Omega_\epsilon)$.

(v) Suponha que u satisfaz (FD) ou (DD). Então, $u \equiv 0$ em Γ_l, isto é, $u_i \equiv 0$ para $i = 1, 2, 3$ em $\partial\omega \times (0, \epsilon)$. Assim, como $\tilde{M}_\epsilon u = (M_\epsilon u_1, M_\epsilon u_2, M_\epsilon u_3)$, tem-se que $M_\epsilon u_i \equiv 0$ para $i = 1, 2, 3$, ou seja, $\tilde{M}_\epsilon u \equiv 0$ em $\partial\omega$.

Se u satisfaz (FP), u é periódica nas direções x_1 e x_2 com período $l_1, l_2 > 0$, ou seja, para todo $i = 1,2,3$, tem-se $u_i(x_1 + l_1, x_2 + l_2, x_3) = u_i(x_1, x_2, x_3)$. Assim, para todo $i = 1,2,3$,

$$M_\epsilon u_i(x_1 + l_1, x_2 + l_2) = \frac{1}{\epsilon}\int_0^\epsilon u_i(x_1 + l_1, x_2 + l_2, s)\ ds = \frac{1}{\epsilon}\int_0^\epsilon u_i(x_1, x_2, s)\ ds = M_\epsilon u_i(x_1, x_2),$$

isto é, $\tilde{M}_\epsilon u$ é periódica nas direções x_1 e x_2. Se u satisfaz (PP), u é periódica em todo $\partial\Omega_\epsilon$ e portanto existe $c > 0$ tal que $u_i(x_1 + c, x_2 + c, x_3 + c) = u_i(x_1, x_2, x_3)$, $\forall\ i = 1,2,3$. Assim, o resultando segue análogo ao anterior.

A condição (FF) implica que $u \cdot \mathbf{n} = 0$ e $\operatorname{rot}(u \times \mathbf{n}) = 0$ em $\partial\Omega_\epsilon$. Logo,

$$\begin{aligned}
\tilde{M}_\epsilon u(x_1, x_2) &= (M_\epsilon u_1, M_\epsilon u_2, M_\epsilon u_3) \\
&= \left(\frac{1}{\epsilon}\int_0^\epsilon u_1(x_1, x_2, s)\ ds, \frac{1}{\epsilon}\int_0^\epsilon u_2(x_1, x_2, s)\ ds, \frac{1}{\epsilon}\int_0^\epsilon u_3(x_1, x_2, s)\ ds\right) \\
&= \frac{1}{\epsilon}\int_0^\epsilon (u_1, u_2, u_3)\ ds.
\end{aligned}$$

Assim,

$$\tilde{M}_\epsilon u \cdot \mathbf{n} = \frac{1}{\epsilon}\int_0^\epsilon (u_1, u_2, 0) \cdot \mathbf{n}\ ds = 0.$$

Além disso, $(\tilde{M}_\epsilon u) \times \mathbf{n} = \tilde{M}_\epsilon(u \times \mathbf{n})$ e

$$\operatorname{rot}\left((\tilde{M}_\epsilon u) \times \mathbf{n}\right) = \operatorname{rot}\left(\tilde{M}_\epsilon(u \times \mathbf{n})\right) = \tilde{M}_\epsilon\left(\operatorname{rot}(u \times \mathbf{n})\right) = 0,$$

quando $(x_1, x_2) \in \partial\omega$ e $x_3 \in (0, \epsilon)$.

Portanto, $\tilde{M}_\epsilon u$ satisfaz (FF).

(vi) Sejam $u, v \in \mathbb{L}^2(\Omega_\epsilon)$. Então,

$$\begin{aligned}
\left(\tilde{M}_\epsilon u, v\right)_\epsilon &= \int_{\Omega_\epsilon} \left(\tilde{M}_\epsilon u\right) \cdot v\ dx \\
&= \int_0^\epsilon \int_\omega \left(\tilde{M}_\epsilon u\right) \cdot v\ dx_1 dx_2 dx_3 \\
&= \int_\omega \tilde{M}_\epsilon u \cdot \left[\int_0^\epsilon v\ dx_3\right] dx_1 dx_2 \\
&= \int_\omega \left[\frac{1}{\epsilon}\int_0^\epsilon u\ ds \int_0^\epsilon v\ dx_3\right] dx_1 dx_2
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_\omega \left[\int_0^\epsilon u\ ds\right]\cdot \tilde{M}_\epsilon v\ dx_1dx_2 \\
&= \int_{\Omega_\epsilon} u\cdot\left(\tilde{M}_\epsilon v\right)\ dx \\
&= \left(u,\tilde{M}_\epsilon v\right)_\epsilon .
\end{aligned}
$$

Ainda,

$$
\begin{aligned}
\left(\tilde{N}_\epsilon u, v\right)_\epsilon &= \left(u-\tilde{M}_\epsilon u, v\right)_\epsilon = (u,v)_\epsilon - \left(\tilde{M}_\epsilon u, v\right)_\epsilon \\
&= (u,v)_\epsilon - \left(u,\tilde{M}_\epsilon v\right)_\epsilon = \left(u, v-\tilde{M}_\epsilon v\right)_\epsilon = \left(u,\tilde{N}_\epsilon v\right)_\epsilon
\end{aligned}
$$

■

Os resultados do lema a seguir independem da condição de fronteira escolhida e por isso estas serão omitidas.

Lema 2.3.1 *Sejam $u, v \in \mathbb{H}^1(\Omega_\epsilon)$. Então:*

(i) $\displaystyle\int_{\Omega_\epsilon} \nabla\tilde{N}_\epsilon u\cdot\nabla\tilde{M}_\epsilon v\ dx = 0$

(ii) $|u|_\epsilon^2 = \left|\tilde{M}_\epsilon u\right|_\epsilon^2 + \left|\tilde{N}_\epsilon u\right|_\epsilon^2$ *e* $||u||_\epsilon^2 = \left|\left|\tilde{M}_\epsilon u\right|\right|_\epsilon^2 + \left|\left|\tilde{N}_\epsilon u\right|\right|_\epsilon^2$

(iii) Se $v \in V_\epsilon$ então $\tilde{M}_\epsilon v \in V_\epsilon$ e $\tilde{N}_\epsilon v \in V_\epsilon$

(iv) $b_\epsilon(u,u,\tilde{M}_\epsilon v) = b_\epsilon(\tilde{M}_\epsilon u,\tilde{M}_\epsilon u,\tilde{M}_\epsilon v) + b_\epsilon(\tilde{N}_\epsilon u,\tilde{N}_\epsilon u,\tilde{M}_\epsilon v)$ *e*
$b_\epsilon(u,u,\tilde{N}_\epsilon v) = b_\epsilon(\tilde{N}_\epsilon u,\tilde{M}_\epsilon u,\tilde{N}_\epsilon v) + b_\epsilon(\tilde{M}_\epsilon u,\tilde{N}_\epsilon u,\tilde{N}_\epsilon v) + b_\epsilon(\tilde{N}_\epsilon u,\tilde{N}_\epsilon u,\tilde{N}_\epsilon v)$,
onde $u, v \in V_\epsilon$.

(v) Para todo $u \in D(A_\epsilon)$, tem-se

$$
\Delta\tilde{N}_\epsilon u = \tilde{N}_\epsilon\Delta u \quad e \quad \Delta\tilde{M}_\epsilon u = \tilde{M}_\epsilon\Delta u
$$

Demonstração:

(i) Sejam $u, v \in \mathbb{H}^1(\Omega_\epsilon)$. Tem-se

$$
\begin{aligned}
\int_{\Omega_\epsilon} \nabla\tilde{N}_\epsilon u\cdot\nabla\tilde{M}_\epsilon v\ dx &= \int_{\Omega_\epsilon} \nabla\left(N_\epsilon u_1, N_\epsilon u_2, N_\epsilon u_3\right)\cdot\nabla\left(M_\epsilon v_1, M_\epsilon v_2, M_\epsilon v_3\right)\ dx \\
&= \int_{\Omega_\epsilon} \left(\nabla N_\epsilon u_1\cdot\nabla M_\epsilon v_1 + \nabla N_\epsilon u_2\cdot\nabla M_\epsilon v_2 + \nabla N_\epsilon u_3\cdot\nabla M_\epsilon v_3\right)\ dx
\end{aligned}
$$

Note que a expressão acima é igual a

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_\epsilon} \Big(\nabla' N_\epsilon u_1 \cdot \nabla' M_\epsilon v_1 \quad &+ \quad \frac{\partial N_\epsilon u_1}{\partial x_3}\frac{\partial M_\epsilon v_1}{\partial x_3} + \nabla' N_\epsilon u_2 \cdot \nabla' M_\epsilon v_2 + \frac{\partial N_\epsilon u_2}{\partial x_3}\frac{\partial M_\epsilon v_2}{\partial x_3} \\ &+ \quad \nabla' N_\epsilon u_3 \cdot \nabla' M_\epsilon v_3 + \frac{\partial N_\epsilon u_3}{\partial x_3}\frac{\partial M_\epsilon v_3}{\partial x_3}\Big)\ dx. \end{aligned} \tag{2.11}$$

Como $N_\epsilon u_i$ e $M_\epsilon v_i$ não dependem de x_3, segue que $\dfrac{\partial N_\epsilon u_i}{\partial x_3} \equiv 0$ e $\dfrac{\partial M_\epsilon v_i}{\partial x_3} \equiv 0$, para $i = 1,2,3$ e, além disso, pela propriedade (iii) da proposição anterior, $\nabla' N_\epsilon u_i \cdot \nabla' M_\epsilon v_i = \tilde{N}_\epsilon \nabla' u_i \cdot \tilde{M}_\epsilon \nabla' v_i$, $i = 1,2,3$. Logo, (2.11) é igual à

$$\int_{\Omega_\epsilon} \Big(\tilde{N}_\epsilon \nabla' u_1 \cdot \tilde{M}_\epsilon \nabla' v_1 + \tilde{N}_\epsilon \nabla' u_2 \cdot \tilde{M}_\epsilon \nabla' v_2 + \tilde{N}_\epsilon \nabla' u_3 \cdot \tilde{M}_\epsilon \nabla' v_3\Big)\ dx. \tag{2.12}$$

Observe que o conjunto $A = \left\{\dfrac{1}{\epsilon}\displaystyle\int_0^\epsilon \phi(x_1,x_2,s)\ ds, \phi \in L^2(\Omega_\epsilon)\right\} \subset L^2(\omega)$ é fechado. De fato, tomando uma sequência de funções $(\phi_n) \subset A$ tal que $\phi_n \to \phi$, onde $\phi \in L^2(\omega)$, basta escolher $\theta(x_1,x_2,x_3) \in L^2(\Omega_\epsilon)$ de modo que $\phi = \dfrac{1}{\epsilon}\displaystyle\int_0^\epsilon \theta\ ds$ e assim $\phi \in A$. Portanto, pela propriedade (i) da proposição anterior, pode-se decompor $L^2(\Omega_\epsilon)$ como a soma direta de $M_\epsilon\left(L^2(\Omega_\epsilon)\right)$ e $N_\epsilon\left(L^2(\Omega_\epsilon)\right)$ da mesma maneira que $\mathbb{L}^2(\Omega_\epsilon)$ é soma direta de $\tilde{M}_\epsilon\left(L^2(\Omega_\epsilon)\right)$ e $\tilde{N}_\epsilon\left(L^2(\Omega_\epsilon)\right)$. Logo,

$$\int_{\Omega_\epsilon} \tilde{N}_\epsilon \nabla' u_i \cdot \tilde{M}_\epsilon \nabla' v_i\ dx = 0, \tag{2.13}$$

para todo $i = 1,2,3$ e a integral em (2.12) é nula, ou seja,

$$\int_{\Omega_\epsilon} \nabla \tilde{N}_\epsilon u \cdot \nabla \tilde{M}_\epsilon v\ dx = 0. \tag{2.14}$$

(ii) No item anterior, foi provado que o conjunto A é fechado e portanto, pode-se escrever

$u \in \mathbb{L}^2(\Omega_\epsilon)$ como a soma dos vetores ortogonais $\tilde{M}_\epsilon u$ e $\tilde{N}_\epsilon u$. Assim,

$$\begin{aligned} |u|_\epsilon^2 &= \int_{\Omega_\epsilon} |u|^2 \; dx = \int_{\Omega_\epsilon} \left|\left(\tilde{M}_\epsilon u + \tilde{N}_\epsilon u\right)\right|^2 \; dx \\ &= \int_{\Omega_\epsilon} \left|\left(\tilde{M}_\epsilon u + \tilde{N}_\epsilon u\right) \cdot \left(\tilde{M}_\epsilon u + \tilde{N}_\epsilon u\right)\right| \; dx \\ &= \left|\tilde{M}_\epsilon u\right|_\epsilon^2 + \left|\tilde{N}_\epsilon u\right|_\epsilon^2 + \underbrace{2\int_{\Omega_\epsilon} \tilde{M}_\epsilon u \cdot \tilde{N}_\epsilon u \; dx.}_{= \text{ 0 pois } \tilde{M}_\epsilon u \perp \tilde{N}_\epsilon u} \end{aligned}$$

Logo,

$$|u|_\epsilon^2 = \left|\tilde{M}_\epsilon u\right|_\epsilon^2 + \left|\tilde{N}_\epsilon u\right|_\epsilon^2. \tag{2.15}$$

Além disso, vale que

$$\begin{aligned} ||u||_\epsilon^2 &= \int_{\Omega_\epsilon} |\nabla u|^2 \; dx = \int_{\Omega_\epsilon} \left|\nabla(\tilde{M}_\epsilon u + \tilde{N}_\epsilon u)\right|^2 \; dx \\ &= \int_{\Omega_\epsilon} \left|\nabla(\tilde{M}_\epsilon u + \tilde{N}_\epsilon u) \cdot \nabla(\tilde{M}_\epsilon u + \tilde{N}_\epsilon u)\right| \; dx \\ &= \left|\left|\tilde{M}_\epsilon u\right|\right|_\epsilon^2 + \left|\left|\tilde{N}_\epsilon u\right|\right|_\epsilon^2 + \underbrace{2\int_{\Omega_\epsilon} \left(\nabla \tilde{M}_\epsilon u \cdot \nabla \tilde{N}_\epsilon u\right) \; dx.}_{= \text{ 0 por (2.14)}} \end{aligned}$$

Logo,

$$||u||_\epsilon^2 = \left|\left|\tilde{M}_\epsilon u\right|\right|_\epsilon^2 + \left|\left|\tilde{N}_\epsilon u\right|\right|_\epsilon^2 \tag{2.16}$$

(iii) Seja $v \in V_\epsilon$. Então, para qualquer condição de fronteira considerada, $v \in \mathbb{H}^1(\Omega_\epsilon)$. Pelo item (iv) da proposição anterior, conclui-se que $\tilde{M}_\epsilon v \in \mathbb{H}^1(\omega)$. Mas,

$$\begin{aligned} \left|\left|\tilde{M}_\epsilon v\right|\right|_{\mathbb{L}^2(\Omega_\epsilon)}^2 &= \int_{\Omega_\epsilon} \left|\tilde{M}_\epsilon v(x_1, x_2, x_3)\right|^2 \; dx = \int_0^\epsilon \int_\omega \left|\tilde{M}_\epsilon v(x_1, x_2, x_3)\right|^2 \; dx_1 dx_2 dx_3. \\ &= \int_0^\epsilon \left|\left|\tilde{M}_\epsilon v\right|\right|_{\mathbb{L}^2(\omega)}^2 \; dx_3 = \left|\left|\tilde{M}_\epsilon v\right|\right|_{\mathbb{L}^2(\omega)}^2 \int_0^\epsilon \; dx_3 = \epsilon \left|\left|\tilde{M}_\epsilon v\right|\right|_{\mathbb{L}^2(\omega)}^2. \end{aligned}$$

Logo, como $\tilde{M}_\epsilon v \in \mathbb{H}^1(\omega)$, tem-se que $\| \tilde{M}_\epsilon v \|_{\mathbb{L}^2(\omega)}^2$ é finita e portanto $\tilde{M}_\epsilon v \in \mathbb{H}^1(\Omega_\epsilon)$. Analogamente, para $\dfrac{\partial}{\partial x_i}\tilde{M}_\epsilon v$, $i = 1, 2, 3$, sendo que $\dfrac{\partial}{\partial x_3}\tilde{M}_\epsilon v \equiv 0$. Além disso, pelo item (v) da proposição anterior, $\tilde{M}_\epsilon v$ satisfaz a mesma condição de fronteira de v.

Para concluir que $\tilde{M}_\epsilon v \in V_\epsilon$, resta verificar se $\mathbf{div}\tilde{M}_\epsilon v = 0$. De fato, para as condições (DD) e (DP), como $\tilde{M}_\epsilon v = 0$, segue que $\mathbf{div}\tilde{M}_\epsilon v = 0$. Para as demais condições, tem-se que $\mathbf{div}v = 0$, isto é,

$$\mathbf{div}v = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} = 0.$$

Assim,

$$\begin{aligned} 0 = \frac{1}{\epsilon}\int_0^\epsilon \mathbf{div}v\ dx_3 &= \frac{1}{\epsilon}\left(\int_0^\epsilon \frac{\partial v_1}{\partial x_1}\ dx_3 + \int_0^\epsilon \frac{\partial v_2}{\partial x_2}\ dx_3 + \int_0^\epsilon \frac{\partial v_3}{\partial x_3}\ dx_3\right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x_1}\frac{1}{\epsilon}\int_0^\epsilon v_1\ dx_3 + \frac{\partial}{\partial x_2}\frac{1}{\epsilon}\int_0^\epsilon v_2\ dx_3 + \int_0^\epsilon \frac{\partial v_3}{\partial x_3}\ dx_3, \end{aligned}$$

isto é,

$$\mathbf{div}'\tilde{M}_\epsilon v = \frac{\partial}{\partial x_1}M_\epsilon v_1 + \frac{\partial}{\partial x_2}M_\epsilon v_2 = -\int_0^\epsilon \frac{\partial v_3}{\partial x_3}\ dx_3. \tag{2.17}$$

Mas, pelo Teorema Fundamental do Cálculo,

$$\int_0^\epsilon \frac{\partial v_3}{\partial x_3}\ dx_3 = \frac{1}{\epsilon}v_3(x_1, x_2, \epsilon) - \frac{1}{\epsilon}v_3(x_1, x_2, 0) = 0,$$

pois, para (FP) e (FD), $v_3(x_1, x_2, \epsilon) = v_3(x_1, x_2, 0) = 0$, para (PP), tomando ϵ como período, $v_3(x_1, x_2, \epsilon) = v_3(x_1, x_2, 0)$ e, para (FF), como $\tilde{M}_\epsilon v = (M_\epsilon v_1, M_\epsilon v_2, 0)$, tem-se que $M_\epsilon v_3 = 0$, ou seja,

$$\frac{1}{\epsilon}\int_0^\epsilon v_3\ dx_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 = \frac{\partial}{\partial x_3}\frac{1}{\epsilon}\int_0^\epsilon v_3\ dx_3 = \frac{1}{\epsilon}\int_0^\epsilon \frac{\partial v_3}{\partial x_3}\ dx_3.$$

Portanto, de (2.17),

$$\mathbf{div}'\tilde{M}_\epsilon v = 0,$$

e, já que $\frac{\partial}{\partial x_3}M_\epsilon v_3 = 0$ pois $M_\epsilon v_3$ não depende de x_3,

$$\mathbf{div}\tilde{M}_\epsilon v = 0,$$

isto é, $\tilde{M}_\epsilon v \in V_\epsilon$. Além disso, $\tilde{N}_\epsilon v \in V_\epsilon$ pois $\tilde{N}_\epsilon v = v - \tilde{M}_\epsilon v$ e $v, \tilde{M}_\epsilon v \in V_\epsilon$.

(iv) Sejam $u, v \in V_\epsilon$. Tem-se que

$$\begin{aligned} b_\epsilon(u,u,\tilde{M}_\epsilon v) &= b_\epsilon\left(\tilde{M}_\epsilon u + \tilde{N}_\epsilon u, \tilde{M}_\epsilon u + \tilde{N}_\epsilon u, \tilde{M}_\epsilon v\right) \\ &= b_\epsilon\left(\tilde{M}_\epsilon u, \tilde{M}_\epsilon u, \tilde{M}_\epsilon v\right) + b_\epsilon\left(\tilde{M}_\epsilon u, \tilde{N}_\epsilon u, \tilde{M}_\epsilon v\right) + b_\epsilon\left(\tilde{N}_\epsilon u, \tilde{M}_\epsilon u, \tilde{M}_\epsilon v\right) \\ &+ b_\epsilon\left(\tilde{N}_\epsilon u, \tilde{N}_\epsilon u, \tilde{M}_\epsilon v\right). \end{aligned}$$

Note que $b_\epsilon\left(\tilde{N}_\epsilon u, \tilde{M}_\epsilon u, \tilde{M}_\epsilon v\right) = 0$, pois

$$\begin{aligned} b_\epsilon\left(\tilde{N}_\epsilon u, \tilde{M}_\epsilon u, \tilde{M}_\epsilon v\right) &= \sum_{i,j=1}^{3} \int_{\Omega_\epsilon} N_\epsilon u_i \frac{\partial M_\epsilon u_j}{\partial x_i} M_\epsilon v_j \; dx = \sum_{i,j=1}^{3} \int_\omega \int_0^\epsilon N_\epsilon u_i \frac{\partial M_\epsilon u_j}{\partial x_i} M_\epsilon v_j \; dx \\ &= \sum_{i,j=1}^{3} \int_\omega \left(\int_0^\epsilon N_\epsilon u_i \; dx_3\right) \frac{\partial M_\epsilon u_j}{\partial x_i} M_\epsilon v_j dx_1 dx_2. \end{aligned} \tag{2.18}$$

Mas, pela propriedade (ii) da proposição anterior,

$$\int_0^\epsilon N_\epsilon u_i \; dx_3 = \epsilon \frac{1}{\epsilon} \int_0^\epsilon N_\epsilon u_i \; dx_3 = \epsilon M_\epsilon \left(N_\epsilon u_i\right) = \epsilon \left(M_\epsilon \circ N_\epsilon\right)(u_i) = 0,$$

ou seja, a integral em (2.18) é nula. Além disso, $b_\epsilon\left(\tilde{M}_\epsilon u, \tilde{N}_\epsilon u, \tilde{M}_\epsilon v\right) = 0$ e, portanto,

$$b_\epsilon(u,u,\tilde{M}_\epsilon v) = b_\epsilon\left(\tilde{M}_\epsilon u, \tilde{M}_\epsilon u, \tilde{M}_\epsilon v\right) + b_\epsilon\left(\tilde{N}_\epsilon u, \tilde{N}_\epsilon u, \tilde{M}_\epsilon v\right).$$

Analogamente, vale que

$$\begin{aligned} b_\epsilon(u,u,\tilde{N}_\epsilon v) &= b_\epsilon\left(\tilde{M}_\epsilon u, \tilde{M}_\epsilon u, \tilde{N}_\epsilon v\right) + b_\epsilon\left(\tilde{N}_\epsilon u, \tilde{M}_\epsilon u, \tilde{N}_\epsilon v\right) \\ &+ b_\epsilon\left(\tilde{M}_\epsilon u, \tilde{N}_\epsilon u, \tilde{N}_\epsilon v\right) + b_\epsilon\left(\tilde{N}_\epsilon u, \tilde{N}_\epsilon u, \tilde{N}_\epsilon v\right). \end{aligned}$$

Mas $b_\epsilon\left(\tilde{M}_\epsilon u, \tilde{M}_\epsilon u, \tilde{N}_\epsilon v\right) = 0$, já que

$$\begin{aligned} b_\epsilon\left(\tilde{M}_\epsilon u, \tilde{M}_\epsilon u, \tilde{N}_\epsilon v\right) &= \sum_{i,j=1}^{3} \int_{\Omega_\epsilon} M_\epsilon u_i \frac{\partial M_\epsilon u_j}{\partial x_i} N_\epsilon v_j \; dx \\ &= \sum_{i,j=1}^{3} \int_\omega \underbrace{\left(\int_0^\epsilon N_\epsilon v_j \; dx_3\right)}_{=\,0} M_\epsilon u_i \frac{\partial M_\epsilon u_j}{\partial x_i} dx_1 dx_2 = 0. \end{aligned}$$

Logo,

$$b_\epsilon(u,u,\tilde{N}_\epsilon v) = b_\epsilon\left(\tilde{N}_\epsilon u, \tilde{M}_\epsilon u, \tilde{N}_\epsilon v\right) + b_\epsilon\left(\tilde{M}_\epsilon u, \tilde{N}_\epsilon u, \tilde{N}_\epsilon v\right) + b_\epsilon\left(\tilde{N}_\epsilon u, \tilde{N}_\epsilon u, \tilde{N}_\epsilon v\right).$$

(v) Para as condições de fronteira (DP) ou (DD), tem-se $\tilde{M}_\epsilon u = 0$, para $u \in D(A_\epsilon)$. Neste caso,

$$\Delta \tilde{M}_\epsilon u = 0,$$

e

$$\tilde{M}_\epsilon \Delta u = \tilde{M}_\epsilon\left(\Delta u_1, \Delta u_2, \Delta u_3\right) = 0,$$

visto que, como $u \in D(A_\epsilon)$, então $u \in \mathbb{H}^2(\Omega_\epsilon)$ e assim $\Delta u \in \mathbb{L}^2(\Omega_\epsilon)$. Portanto, $\Delta\tilde{M}_\epsilon u = \tilde{M}_\epsilon \Delta u$. Ainda, tem-se que $\tilde{N}_\epsilon u = u - \tilde{M}_\epsilon u = u - 0 = u$, isto é, $\Delta\tilde{N}_\epsilon u = \Delta u$. Por outro lado,

$$\tilde{N}_\epsilon \Delta u = \Delta u - \tilde{M}_\epsilon \Delta u = \Delta u - 0 = \Delta u.$$

Logo, $\Delta\tilde{N}_\epsilon u = \tilde{N}_\epsilon \Delta u$.

Considerando a condição (PP), basta notar que, para $i = 1, 2$ e $j = 1, 2, 3$,

$$\frac{\partial}{\partial x_i} M_\epsilon u_j = M_\epsilon\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right).$$

Além disso, $\dfrac{\partial}{\partial x_3} M_\epsilon u_j = 0$ e

$$M_\epsilon\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_3}\right) = \frac{1}{\epsilon}\int_0^\epsilon \frac{\partial}{\partial x_3} u_j(x_1,x_2,s)\, ds = \frac{1}{\epsilon}\left(u_j(x_1,x_2,\epsilon) - u_j(x_1,x_2,0)\right) = 0,$$

pois u é periódica em todo Ω_ϵ. Logo, para $1 \le i, j \le 3$, tem-se

$$\frac{\partial}{\partial x_i} M_\epsilon u_j = M_\epsilon\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right).$$

Assim, $\dfrac{\partial}{\partial x_i}(\tilde{M}_\epsilon u) = \tilde{M}_\epsilon\left(\dfrac{\partial u}{\partial x_i}\right)$ e $\dfrac{\partial^2}{\partial x_i^2}\tilde{M}_\epsilon u = \tilde{M}_\epsilon\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}\right)$. Portanto,

$$\sum_{i=1}^{3}\left(\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}\tilde{M}_\epsilon u\right) = \sum_{i=1}^{3}\tilde{M}_\epsilon\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}\right) = \tilde{M}_\epsilon\left(\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}\right),$$

ou seja, $\Delta\tilde{M}_\epsilon u = \tilde{M}_\epsilon \Delta u$. Também,

$$\Delta\tilde{N}_\epsilon u = \Delta(u - \tilde{M}_\epsilon u) = \Delta u - \Delta\tilde{M}_\epsilon u = \Delta u - \tilde{M}_\epsilon \Delta u = \tilde{N}_\epsilon \Delta u.$$

Para as condições de fronteira (FD), (FP), (FF), sejam $v \in C_0^\infty(\omega) \times C_0^\infty(\omega)$ e $u \in D(A_\epsilon)$. Como $\tilde{M}_\epsilon u = (M_\epsilon u_1, M_\epsilon u_2, 0)$, tem-se

$$\begin{aligned}
\int_\omega \Delta(\tilde{M}_\epsilon u) \cdot v \; dx_1 dx_2 &= \int_\omega \Delta\left(M_\epsilon u_1, M_\epsilon u_2, 0\right) \cdot (v_1, v_2, 0) \; dx_1 dx_2 \\
&= \int_\omega \Big(\Delta' M_\epsilon u_1, \Delta' M_\epsilon u_2, 0\Big) \cdot (v_1, v_2, 0) \; dx_1 dx_2 \\
&= \int_\omega \Big(\Delta' M_\epsilon u_1 v_1 + \Delta' M_\epsilon u_2 v_2\Big) \; dx_1 dx_2 \\
&= \sum_{i=1}^{2} \int_\omega \Delta' M_\epsilon u_i v_i \; dx_1 dx_2.
\end{aligned}$$

Usando a fórmula de Green, então

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{2} \int_\omega \Delta' M_\epsilon u_i v_i \; dx_1 dx_2 &= -\sum_{i=1}^{2} \int_\omega \nabla'(M_\epsilon u_i) \cdot \nabla' v_i \; dx_1 dx_2 + \sum_{i=1}^{2} \int_{\partial\omega} v_i \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} M_\epsilon u_i \; dS \\
&= -\sum_{i=1}^{2} \int_\omega \nabla'(M_\epsilon u_i) \cdot \nabla' v_i \; dx_1 dx_2,
\end{aligned}$$

pois $v \equiv 0$ em $\partial\omega$ e $\mathbf{n}$ é a normal de $\partial\omega$. Assim, pela propriedade (iii) da proposição anterior,

$$\begin{aligned}
-\sum_{i=1}^{2} \int_\omega \nabla'(M_\epsilon u_i) \cdot \nabla' v_i \; dx_1 dx_2 &= -\sum_{i=1}^{2} \int_\omega \tilde{M}_\epsilon(\nabla' u_i) \cdot \nabla' v_i \; dx_1 dx_2 \\
&= -\sum_{i=1}^{2} \int_\omega \left(\frac{1}{\epsilon} \int_0^\epsilon (\nabla' u_i)(x_1, x_2, x_3) \; dx_3\right) \cdot \nabla' v_i \; dx_1 dx_2 \\
&= -\frac{1}{\epsilon} \sum_{i=1}^{2} \int_{\Omega_\epsilon} \nabla u_i \cdot \nabla v_i \; dx_1 dx_2 dx_3. \qquad (2.19)
\end{aligned}$$

Novamente, pela fórmula de Green (aqui, $dx_1 dx_2 dx_3 = dx$)

$$-\frac{1}{\epsilon} \sum_{i=1}^{2} \int_{\Omega_\epsilon} \nabla u_i \cdot \nabla v_i \; dx = \frac{1}{\epsilon} \sum_{i=1}^{2} \int_{\Omega_\epsilon} v_i \Delta u_i \; dx - \frac{1}{\epsilon} \sum_{i=1}^{2} \int_{\partial\Omega_\epsilon} v_i \frac{\partial u_i}{\partial \mathbf{n}} \; dS. \qquad (2.20)$$

Note que

$$\int_{\partial\Omega_\epsilon} v_i \frac{\partial u_i}{\partial \mathbf{n}}\, dS = \int_{\Gamma_t} v_i \frac{\partial u_i}{\partial \mathbf{n}}\, dS + \int_{\Gamma_l} v_i \frac{\partial u_i}{\partial \mathbf{n}}\, dS + \int_{\Gamma_b} v_i \frac{\partial u_i}{\partial \mathbf{n}}\, dS. \tag{2.21}$$

A segunda integral depois da igualdade de (2.21) é nula, pois se $x \in \Gamma_l$, então $(x_1, x_2) \in \partial\omega$ e $v_i(x_1, x_2) = 0$, já que $v_i \in C_0^\infty(\omega)$. Agora, quando $x \in \Gamma_t$ ou $x \in \Gamma_b$, tem-se que $\mathbf{n} = \pm e_3 = (0, 0, 1)$ e assim

$$\frac{\partial u_i}{\partial \mathbf{n}} = \frac{\partial u_i}{\partial x_3} \quad \text{ou} \quad \frac{\partial u_i}{\partial \mathbf{n}} = -\frac{\partial u_i}{\partial x_3}$$

e, de acordo com as condições (FD) e (FP), deve-se ter $\dfrac{\partial u_i}{\partial x_3} = 0$ para $i = 1, 2$.

Já para a condição de fronteira (FF), observa-se que

$$\text{rot}u = \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_3}, \frac{\partial u_1}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_2}, \frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right)$$

e $\mathbf{n} = (0, 0, 1)$ em Γ_t e Γ_b, logo,

$$\text{rot}u \times \mathbf{n} = 0 \Rightarrow \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_2}, \frac{\partial u_2}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_2}, 0\right) = 0,$$

ou seja,

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_2} = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial u_2}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_2} = 0.$$

Mas $u \cdot \mathbf{n} = 0$ em Γ_t e Γ_b, isto é, $u_3 = 0$ e $\dfrac{\partial u_3}{\partial x_2} = 0$. Assim,

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_3} = \frac{\partial u_2}{\partial x_3} = 0.$$

Como o somatório em (2.19) só compreende $i = 1, 2$, segue que a primeira e a terceira integral depois da igualdade de (2.21) são nulas e portanto

$$\int_{\partial\Omega_\epsilon} v_i \frac{\partial u_i}{\partial \mathbf{n}}\, dS = 0. \tag{2.22}$$

Substituindo em (2.20), tem-se

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{\epsilon}\sum_{i=1}^{2}\int_{\Omega_\epsilon}\nabla u_i\cdot\nabla v_i\;dx &= \frac{1}{\epsilon}\sum_{i=1}^{2}\int_{\Omega_\epsilon} v_i\Delta u_i\;dx = \frac{1}{\epsilon}\sum_{i=1}^{2}\int_{\omega}\int_0^{\epsilon} v_i\Delta u_i\;dx\\
&= \frac{1}{\epsilon}\sum_{i=1}^{2}\int_{\omega} v_i\left(\int_0^{\epsilon}\Delta u_i\right)\;dx = \sum_{i=1}^{2}\int_{\omega} v_i M_\epsilon\Delta u_i\;dx_1dx_2\\
&= \int_{\omega}(v_1,v_2)\cdot\underbrace{(M_\epsilon\Delta u_1, M_\epsilon\Delta u_2)}_{\tilde{M}_\epsilon(\Delta' u)}\;dx_1dx_2\\
&= \int_{\omega}\tilde{M}_\epsilon(\Delta' u)\cdot v\;dx_1dx_2 = \int_{\omega}\tilde{M}_\epsilon(\Delta u)\cdot v\;dx_1dx_2. \qquad (2.23)
\end{aligned}$$

Conclui-se que

$$\int_{\omega}\Delta(\tilde{M}_\epsilon u)\cdot v\;dx_1dx_2 = \int_{\omega}\tilde{M}_\epsilon(\Delta u)\cdot v\;dx_1dx_2, \qquad (2.24)$$

ou seja,

$$\int_{\omega}\left(\tilde{M}_\epsilon(\Delta u) - \Delta(\tilde{M}_\epsilon u)\right)\cdot v\;dx_1dx_2 = 0. \qquad (2.25)$$

Assim, $\tilde{M}_\epsilon(\Delta u) = \Delta(\tilde{M}_\epsilon u)$ q.s. em ω. Além disso,

$$\Delta u = \Delta\tilde{M}_\epsilon u + \Delta\tilde{N}_\epsilon u = \tilde{M}_\epsilon(\Delta u) + \Delta\tilde{N}_\epsilon u.$$

Mas por outro lado,

$$\tilde{N}_\epsilon(\Delta u) = \Delta u - \tilde{M}_\epsilon(\Delta u) \Rightarrow \Delta u = \tilde{M}_\epsilon(\Delta u) + \tilde{N}_\epsilon(\Delta u).$$

Portanto, $\tilde{N}_\epsilon(\Delta u) = \Delta\tilde{N}_\epsilon u$.

■

Além destes resultados, os operadores $\tilde{M}_\epsilon$ e $\tilde{N}_\epsilon$ também comutam-se com o operador de Stokes A_ϵ (para mais detalhes sobre este operador, veja o Apêndice A), isto é,

$$A_\epsilon\tilde{M}_\epsilon u = \tilde{M}_\epsilon A_\epsilon u \quad \text{e} \quad A_\epsilon\tilde{N}_\epsilon u = \tilde{N}_\epsilon A_\epsilon u,$$

onde $u \in D(A_\epsilon)$. De fato, para as condições de fronteira (DD) ou (DP), tem-se que $\tilde{M}_\epsilon u = 0$ e assim $A_\epsilon\tilde{M}_\epsilon u = A_\epsilon(0) = 0$ e como $A_\epsilon u \in L^2(\Omega_\epsilon)$, $\tilde{M}_\epsilon\,(A_\epsilon u) = 0$. Para $\tilde{N}_\epsilon$, basta notar que, neste caso, $\tilde{N}_\epsilon u = u$, logo $A_\epsilon \tilde{N}_\epsilon u = A_\epsilon u$ e $\tilde{N}_\epsilon (A_\epsilon u) = A_\epsilon u$.

Se u satisfaz as condições (FF), (FP) e (PP), então $A_\epsilon u = \Delta u$ (veja [15]) e por consequência de (v) do lema 2.3.1,

$$A_\epsilon \left(\tilde{M}_\epsilon u\right) = \Delta \left(\tilde{M}_\epsilon u\right) = \tilde{M}_\epsilon(\Delta u) = \tilde{M}_\epsilon (A_\epsilon u).$$

Análogo para $\tilde{N}_\epsilon$. Caso $u \in D(A_\epsilon)$ satisfaça (FD), então $\mathbf{div} u = 0$ e daí

$$\frac{\partial u_3}{\partial x_3} = -\frac{\partial u_1}{\partial x_1} - \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \quad \Longrightarrow \quad \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3^2} = -\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_3 \partial x_1} - \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_3 \partial x_2},$$

em Ω_ϵ. Como $\dfrac{\partial u_1}{\partial x_3} = \dfrac{\partial u_2}{\partial x_3} = 0$ em $\Gamma_t \cup \Gamma_b$, então

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3}\right) = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3}\right) = 0,$$

para todo $i = 1, 2$, segue que $\dfrac{\partial^2 u_3}{\partial x_3^2} = 0$ em $\Gamma_t \cup \Gamma_b$. Além disso, em $\Gamma_t \cup \Gamma_b$, $u_3 = 0$, logo $\dfrac{\partial u_3}{\partial x_i} = 0$ para $i = 1, 2$ e, deste modo,

$$\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2} = \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2^2} = 0.$$

Sendo assim, $\Delta u_3 = 0$ em $\Gamma_t \cup \Gamma_b$.

De acordo com [12], da caracterização do operador P, tem-se

$$A_\epsilon u = -\Delta u + \nabla p,$$

onde p satisfaz

$$\begin{cases} \Delta p = 0 & \text{em} \quad \Omega_\epsilon \\ \dfrac{\partial p}{\partial n_\omega} = \Delta' u \cdot n_\omega & \text{em} \quad \partial\omega \times (0, \epsilon) \\ \dfrac{\partial p}{\partial x_3} = 0 & \text{em} \quad \omega \times \{0, \epsilon\} \end{cases} \tag{2.26}$$

e n_ω é o vetor normal á superfície $\partial\omega$. A partir dai,

$$\begin{aligned} \tilde{M}_\epsilon(A_\epsilon u) &= \tilde{M}_\epsilon (-\Delta u + \nabla p) = \tilde{M}_\epsilon (-\Delta u) + \tilde{M}_\epsilon (\nabla p) \\ &= -\Delta \left(\tilde{M}_\epsilon u\right) + \tilde{M}_\epsilon (\nabla p). \end{aligned} \tag{2.27}$$

Como

$$\begin{aligned}
\tilde{M}_\epsilon(\nabla p) &= \tilde{M}_\epsilon\left(\frac{\partial p}{\partial x_1},\frac{\partial p}{\partial x_2},\frac{\partial p}{\partial x_3}\right)=\tilde{M}_\epsilon\left(\left(\frac{\partial p}{\partial x_1},\frac{\partial p}{\partial x_2},0\right)+\left(0,0,\frac{\partial p}{\partial x_3}\right)\right)\\
&= \tilde{M}_\epsilon\left(\nabla' p\right)+\left(0,0,\frac{\partial p}{\partial x_3}\right)=\tilde{M}_\epsilon\left(\nabla' p\right)+\tilde{M}_\epsilon\left(0,0,\frac{\partial p}{\partial x_3}\right)\\
&= \nabla'\left(M_\epsilon p\right),
\end{aligned}$$

pois $\tilde{M}_\epsilon\left(0,0,\dfrac{\partial p}{\partial x_3}\right)=\left(M_\epsilon(0),M_\epsilon(0),M_\epsilon\left(\dfrac{\partial p}{\partial x_3}\right)\right)=0$. Substituindo em (2.27),

$$\tilde{M}_\epsilon(A_\epsilon u)=-\Delta\left(\tilde{M}_\epsilon u\right)+\nabla'\left(M_\epsilon p\right). \tag{2.28}$$

Da condição $\Delta p=0$ em Ω_ϵ, segue que $M_\epsilon(\Delta p)=0$ em ω. Mas $M_\epsilon(\Delta p)=\Delta(M_\epsilon p)$ e assim $\Delta(M_\epsilon p)=0$ em ω. Além disso, de $\dfrac{\partial p}{\partial n_\omega}=\Delta' u\cdot n_\omega$ em $\partial\omega\times(0,\epsilon)$, tem-se $M_\epsilon\left(\dfrac{\partial p}{\partial n_\omega}\right)=M_\epsilon\left(\Delta' u\cdot n_\omega\right)$ e

$$\frac{\partial}{\partial n_\omega}(M_\epsilon p)=M_\epsilon\left(\frac{\partial p}{\partial n_\omega}\right)=\left(\Delta' M_\epsilon u\right)\cdot n_\omega,$$

dado que

$$M_\epsilon\left(\Delta' u\cdot n_\omega\right)=\frac{1}{\epsilon}\int_0^\epsilon \Delta' u\cdot n_\omega\, dx_3=\Delta'\underbrace{\left(\frac{1}{\epsilon}\int_0^\epsilon u\, dx_3\right)}_{=\,M_\epsilon u}\cdot n_\epsilon.$$

Nota-se também que $\dfrac{\partial M_\epsilon p}{\partial x_3}=0$, já que $M_\epsilon p$ não depende de x_3. Em suma, $M_\epsilon p$ satisfaz (2.26).

Por outro lado, a caracterização do operador P para $\tilde{M}_\epsilon u$ é

$$A_\epsilon\left(\tilde{M}_\epsilon u\right)=-\Delta\left(\tilde{M}_\epsilon u\right)+\nabla q, \tag{2.29}$$

onde q satisfaz

$$\begin{cases}\Delta q=0 & \text{em}\quad \omega\\ \dfrac{\partial q}{\partial n_\omega}=\Delta'\left(\tilde{M}_\epsilon u\right)\cdot n_\omega & \text{em}\quad \partial\omega\times\{0\}\end{cases} \tag{2.30}$$

Como tal caracterização é única, comparando (2.29) e (2.28)

$$A_\epsilon\left(\tilde{M}_\epsilon u\right) = \tilde{M}_\epsilon(A_\epsilon u).$$

Com isso, indepentende da condição de fronteira a ser considerada, vale a comutatividade dos operadores $\tilde{M}_\epsilon$ e $\tilde{N}_\epsilon$ com o operador de Stokes.

A forma trilinear b_ϵ bidimensional possui uma característica interessante quando trata-se da combinação das condições de fronteira livre e periódica, isto é, (FF), (FP) e (PP) (para mais detalhes, veja [13] e [15]). Tal característica, demonstrada na proposição a seguir, tem relação com a ortogonalidade e será utilizada para obter melhores estimativas da solução forte no caso tridimensional.

Proposição 2.3.2 *Se $\tilde{A}$ é o operador de Stokes bidimensional, então*

$$b_\epsilon(u,u,\tilde{A}u) = 0 \quad \forall\ u \in D(\tilde{A}).$$

Demonstração: Denotando $u = (u_1(x_1,x_2), u_2(x_1,x_2)) \in D(\tilde{A})$ para o vetor bidimensional e $\tilde{u} = (u_1(x_1,x_2), u_2(x_1,x_2), 0)$ o tridimensional, observa-se que

$$\begin{aligned}
\mathrm{rot}\tilde{u} &= \partial_{x_3}u_1\mathbf{j} + \partial_{x_1}u_2\mathbf{k} - \partial_{x_2}u_1\mathbf{k} - \partial_{x_3}u_2\mathbf{i} \\
&= (-\partial_{x_3}u_2, \partial_{x_3}u_1, \partial_{x_1}u_2 - \partial_{x_2}u_1) \\
&= (0,0,\mathrm{rot}u) = (\mathrm{rot}u)e_3,
\end{aligned}$$

e $\mathbf{div}u = \mathbf{div}\tilde{u}$. De $\mathbf{div}u = 0$, segue que

$$\begin{aligned}
\mathrm{rot}\,(\mathrm{rot}\tilde{u}) &= ((\partial_{x_1x_2}u_2 - \partial_{x_2x_2}u_1)\mathbf{i} - (\partial_{x_1x_1}u_2 - \partial_{x_1x_2}u_1)\mathbf{j}) \\
&= -(\Delta u_1, \Delta u_2, 0),
\end{aligned}$$

isto é, $\mathrm{rot}\,(\mathrm{rot}\tilde{u}) = -\Delta\tilde{u}$, pois $\partial_{x_1}u_1 + \partial_{x_2}u_2 = 0$, o que implica $\partial_{x_1x_2}u_2 = -\partial_{x_1x_1}u_1$ e $\partial_{x_1x_2}u_1 = -\partial_{x_2x_2}u_2$. Além disso,

$$\tilde{u} \times \mathrm{rot}\tilde{u} = \left(u_2\mathrm{rot}u, -u_1\mathrm{rot}u, 0\right),$$

e

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\nabla|u|^2=\frac{1}{2}\nabla\left(u_1^2+u_2^2\right) &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_2}(u_1^2+u_2^2),\frac{\partial}{\partial x_2}(u_1^2+u_2^2),\underbrace{\frac{\partial}{\partial x_3}(u_1^2+u_2^2)}_{=\,0}\right)\\ &= \left(u_1\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+u_2\frac{\partial u_2}{\partial x_1},u_1\frac{\partial u_1}{\partial x_2}+u_2\frac{\partial u_2}{\partial x_2},0\right).\end{aligned}$$

Dai,

$$\begin{aligned}\tilde{u}\times\mathrm{rot}\tilde{u}-\frac{1}{2}\nabla|u|^2 &= \left(-u_2\frac{\partial u_1}{\partial x_2}-u_1\frac{\partial u_1}{\partial x_1},-u_1\frac{\partial u_2}{\partial x_1}-u_1\frac{\partial u_2}{\partial x_2},0\right)\\ &= (-\tilde{u}\cdot\nabla u_1,-\tilde{u}\cdot\nabla u_2,0)=-(\tilde{u}\cdot\nabla)\tilde{u},\end{aligned}$$

isto é, $(\tilde{u}\cdot\nabla)\tilde{u}=\dfrac{1}{2}\nabla|\tilde{u}|^2-\tilde{u}\times\mathrm{rot}\tilde{u}$.

Sendo assim, como $b_\epsilon(u,u,\Delta u)=b_\epsilon(\tilde{u},\tilde{u},\Delta\tilde{u})$,

$$\begin{aligned}b_\epsilon(\tilde{u},\tilde{u},\Delta\tilde{u}) &= \int_{\Omega_\epsilon}(\tilde{u}\cdot\nabla\tilde{u})\cdot\Delta\tilde{u}\,dx=\int_{\Omega_\epsilon}\left(-\tilde{u}\times\mathrm{rot}\tilde{u}+\frac{1}{2}\nabla|\tilde{u}|^2\right)\cdot\Delta\tilde{u}\,dx\\ &= \int_{\Omega_\epsilon}(\tilde{u}\times\mathrm{rot}\tilde{u})\cdot\mathrm{rot}\,(\mathrm{rot}\tilde{u})\,\,dx\\ &- \frac{1}{2}\int_{\Omega_\epsilon}\left(\nabla|\tilde{u}|^2\right)\cdot\mathrm{rot}\,(\mathrm{rot}\tilde{u})\,\,dx.\end{aligned}\tag{2.31}$$

Pelo item (v) do teorema (1.2.2),

$$\mathbf{div}\left(|\tilde{u}|^2\,\mathrm{rot}(\mathrm{rot}\tilde{u})\right)=\nabla(|\,\tilde{u}\,|^2)\cdot(\mathrm{rot}(\mathrm{rot}\tilde{u}))+|\,\tilde{u}\,|^2\,\mathbf{div}\,(\mathrm{rot}(\mathrm{rot}\tilde{u}))\,,$$

e, a partir daí, pelo Teorema da Divergência

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int_{\partial\Omega_\epsilon}\left(|\,\tilde{u}\,|^2\,\mathrm{rot}(\mathrm{rot}\tilde{u})\right)\cdot\mathbf{n}\,dS &= \frac{1}{2}\int_{\Omega_\epsilon}\mathbf{div}\left(|\,\tilde{u}\,|^2\,\mathrm{rot}(\mathrm{rot}\tilde{u})\right)\,dx\\ &= \frac{1}{2}\int_{\Omega_\epsilon}\nabla(|\,\tilde{u}\,|^2)\cdot(\mathrm{rot}(\mathrm{rot}\tilde{u}))\,\,dx\\ &+ \frac{1}{2}\int_{\Omega_\epsilon}|\,\tilde{u}\,|^2\,\mathbf{div}\,(\mathrm{rot}(\mathrm{rot}\tilde{u}))\,\,dx,\end{aligned}$$

isto é,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\int_{\Omega_\epsilon} \nabla(\mid \tilde{u} \mid^2)\cdot(\mathrm{rot}(\mathrm{rot}\tilde{u}))\ dx &= \frac{1}{2}\int_{\partial\Omega_\epsilon} \big(\mid \tilde{u} \mid^2 \mathrm{rot}(\mathrm{rot}\tilde{u})\big)\cdot \mathbf{n}\ dS \\
&- \frac{1}{2}\int_{\Omega_\epsilon} \mid \tilde{u} \mid^2 \mathbf{div}\,(\mathrm{rot}(\mathrm{rot}\tilde{u}))\ dx. \qquad (2.32)
\end{aligned}$$

Agora, pelo item (iii) do teorema (1.2.2),

$$\mathbf{div}\,((\tilde{u}\times\mathrm{rot}\tilde{u})\times\mathrm{rot}\tilde{u}) = \mathrm{rot}\tilde{u}\cdot\mathrm{rot}(\tilde{u}\times\mathrm{rot}\tilde{u}) - (\tilde{u}\times\mathrm{rot}\tilde{u})\cdot\mathrm{rot}(\mathrm{rot}\tilde{u}).$$

Novamente, pelo Teorema da Divergência,

$$\begin{aligned}
\int_{\partial\Omega_\epsilon} ((\tilde{u}\times\mathrm{rot}\tilde{u})\times\mathrm{rot}\tilde{u})\cdot\mathbf{n}\ dS &= \int_{\Omega_\epsilon} \mathbf{div}\,((\tilde{u}\times\mathrm{rot}\tilde{u})\times\mathrm{rot}\tilde{u})\ dx \\
&= \int_{\Omega_\epsilon} \mathrm{rot}\tilde{u}\cdot\mathrm{rot}(\tilde{u}\times\mathrm{rot}\tilde{u})\ dx \\
&- \int_{\Omega_\epsilon} (\tilde{u}\times\mathrm{rot}\tilde{u})\cdot\mathrm{rot}(\mathrm{rot}\tilde{u})\ dx, \qquad (2.33)
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega_\epsilon} (\tilde{u}\times\mathrm{rot}\tilde{u})\cdot\mathrm{rot}(\mathrm{rot}\tilde{u})\ dx &= \int_{\Omega_\epsilon} \mathrm{rot}\tilde{u}\cdot\mathrm{rot}(\tilde{u}\times\mathrm{rot}\tilde{u})\ dx \\
&- \int_{\partial\Omega_\epsilon} ((\tilde{u}\times\mathrm{rot}\tilde{u})\times\mathrm{rot}\tilde{u})\cdot\mathbf{n}\ dS. \qquad (2.34)
\end{aligned}$$

Substituindo (2.32) e (2.34) em (2.31),

$$\begin{aligned}
b_\epsilon(u,u,\Delta u) &= \frac{1}{2}\int_{\Omega_\epsilon} \mid \tilde{u} \mid^2 \mathbf{div}\,(\mathrm{rot}(\mathrm{rot}\tilde{u}))\ dx - \frac{1}{2}\int_{\partial\Omega_\epsilon} \big(\mid \tilde{u} \mid^2 \mathrm{rot}(\mathrm{rot}\tilde{u})\big)\cdot\mathbf{n}\ dS \\
&- \int_{\partial\Omega_\epsilon} ((\tilde{u}\times\mathrm{rot}\tilde{u})\times\mathrm{rot}\tilde{u})\cdot\mathbf{n}\ dS + \int_{\Omega_\epsilon} \mathrm{rot}\tilde{u}\cdot\mathrm{rot}(\tilde{u}\times\mathrm{rot}\tilde{u})\ dx.
\end{aligned}$$

Note que, como $\mathbf{div}\tilde{u} = \mathbf{div}u = 0$ e $\mathrm{rot}\,(\mathrm{rot}\tilde{u}) = -\Delta\tilde{u}$ então

$$\mathbf{div}\,(\mathrm{rot}\,(\mathrm{rot}\tilde{u})) = \mathbf{div}\,(-\Delta\tilde{u}) = -\Delta(\mathbf{div}\tilde{u}) = -\Delta(\mathbf{div}u) = 0.$$

Logo,

$$\frac{1}{2}\int_{\Omega_\epsilon} \mid \tilde{u} \mid^2 \mathbf{div}\,(\mathrm{rot}(\mathrm{rot}\tilde{u}))\ dx = 0.$$

Como $u \in D(\tilde{A})$, segue que $\mathrm{rot}u \equiv 0$ em $\partial\Omega_\epsilon$, ou seja, $\mathrm{rot}\tilde{u} = (\mathrm{rot}u)e_3 = 0$ e $((\tilde{u}\times \mathrm{rot}\tilde{u})\times \mathrm{rot}\tilde{u}) = ((\tilde{u}\times \mathrm{rot}\tilde{u})\times (\mathrm{rot}u)e_3) = 0$ em $\partial\Omega_\epsilon$. Assim,

$$\int_{\partial\Omega_\epsilon} ((\tilde{u}\times \mathrm{rot}\tilde{u})\times \mathrm{rot}\tilde{u})\cdot \mathbf{n}\, dS = \frac{1}{2}\int_{\partial\Omega_\epsilon} \big(|\ \tilde{u}\ |^2\, \mathrm{rot}(\mathrm{rot}\tilde{u})\big)\cdot \mathbf{n}\, dS = 0.$$

Portanto,

$$b_\epsilon\left(u,u,\Delta u\right) = b_\epsilon\left(\tilde{u},\tilde{u},\Delta\tilde{u}\right) = \int_{\Omega_\epsilon} \mathrm{rot}\tilde{u}\cdot \mathrm{rot}(\tilde{u}\times \mathrm{rot}\tilde{u})\, dx. \tag{2.35}$$

Porém, $\tilde{u}\times \mathrm{rot}\tilde{u} = (u_2\mathrm{rot}u, -u_1\mathrm{rot}u, 0) = \mathrm{rot}u\,(u_2,-u_1,0)$ e $\tilde{u}\times e_3 = (u_2,-u_1,0)$, isto é,

$$\tilde{u}\times \mathrm{rot}\tilde{u} = \mathrm{rot}u\left(\tilde{u}\times e_3\right).$$

Com esta relação, e do item (iv) do teorema 1.2.2,

$$\mathrm{rot}\left(\tilde{u}\times \mathrm{rot}\tilde{u}\right) = \mathrm{rot}\left(\mathrm{rot}u\left(\tilde{u}\times e_3\right)\right) = \nabla\left(\mathrm{rot}u\right)\times\left(\tilde{u}\times e_3\right) + \mathrm{rot}\left(\tilde{u}\times e_3\right)\mathrm{rot}u. \tag{2.36}$$

Mas

$$\begin{aligned}
\mathrm{rot}\left(\tilde{u}\times e_3\right) &= \left(\partial_{x_3}u_1, \partial_{x_3}u_2, -\partial_{x_1}u_1 - \partial_{x_2}u_2\right) = -\left(0,0,\partial_{x_1}u_1 + \partial_{x_2}u_2\right)\\
&= -\left(0,0,\mathbf{div}u\right) = -\underbrace{\mathbf{div}u}_{=\,0}\, e_3 = 0,
\end{aligned} \tag{2.37}$$

e assim,

$$\mathrm{rot}\left(\tilde{u}\times \mathrm{rot}\tilde{u}\right) = \nabla\left(\mathrm{rot}u\right)\times\left(\tilde{u}\times e_3\right). \tag{2.38}$$

Substituindo em (2.35) e usando o item (i) do teorema (1.2.2),

$$\begin{aligned}
b_\epsilon\left(u,u,\Delta u\right) &= \int_{\Omega_\epsilon} \left[\nabla\left(\mathrm{rot}u\right)\times\left(\tilde{u}\times e_3\right)\right]\cdot \mathrm{rot}\tilde{u}\, dx\\
&= -\int_{\Omega_\epsilon} \left[\left(\tilde{u}\times e_3\right)\times \nabla\left(\mathrm{rot}u\right)\right]\cdot \mathrm{rot}u e_3\, dx\\
&= -\int_{\Omega_\epsilon} \left[\left(\tilde{u}\cdot \nabla\mathrm{rot}u\right)e_3 - \left(e_3\cdot \nabla\mathrm{rot}u\right)\tilde{u}\right]\cdot \mathrm{rot}u e_3\, dx\\
&= -\int_{\Omega_\epsilon} \left[\tilde{u}\cdot \nabla\mathrm{rot}u\right]\mathrm{rot}u\underbrace{\left(e_3\cdot e_3\right)}_{=\,1}\, dx + \int_{\Omega_\epsilon} \left[e_3\cdot \nabla\mathrm{rot}u\right]\tilde{u}\cdot \mathrm{rot}u e_3\, dx\\
&= -\int_{\Omega_\epsilon} \left[\tilde{u}\cdot \nabla\mathrm{rot}u\right]\mathrm{rot}u\, dx,
\end{aligned} \tag{2.39}$$

já que $\tilde{u}\cdot e_3=(u_1,u_2,0)\cdot(0,0,1)=0$. Note que

$$\begin{aligned}\nabla\left(\mid \mathrm{rot}u\mid^2\right)\cdot\tilde{u} &= \left(2\mid \mathrm{rot}u\mid\frac{\partial}{\partial x_1}(\mid \mathrm{rot}u\mid),2\mid \mathrm{rot}u\mid\frac{\partial}{\partial x_2}(\mid \mathrm{rot}u\mid),2\mid \mathrm{rot}u\mid\frac{\partial}{\partial x_3}(\mid \mathrm{rot}u\mid)\right)\cdot\tilde{u}\\ &= 2\mid \mathrm{rot}u\mid\left(u_1\frac{\partial}{\partial x_1}(\mid \mathrm{rot}u\mid),u_2\frac{\partial}{\partial x_1}(\mid \mathrm{rot}u\mid),0\right)\\ &= 2\mid \mathrm{rot}u\mid\left(\nabla\mid \mathrm{rot}u\mid\cdot\tilde{u}\right),\end{aligned}$$

e, a partir daí

$$-\int_{\Omega_\epsilon}[\tilde{u}\cdot\nabla\mathrm{rot}u]\,\mathrm{rot}u\,dx = -\frac{1}{2}\int_{\Omega_\epsilon}\nabla\left(\mid \mathrm{rot}u\mid^2\right)\cdot\tilde{u}\,dx.$$

Do item (v) do teorema (1.2.2) tem-se que

$$\mathbf{div}\left(\mid \mathrm{rot}u\mid^2\tilde{u}\right)=\nabla\left(\mid \mathrm{rot}u\mid^2\right)\cdot\tilde{u}+\left(\mid \mathrm{rot}u\mid^2\right)\mathbf{div}\tilde{u}.$$

Integrando em Ω_ϵ e aplicando o Teorema da Divergência,

$$\begin{aligned}\int_{\partial\Omega_\epsilon}\mid \mathrm{rot}u\mid^2\tilde{u}\cdot\mathbf{n}\,dS &= \int_{\Omega_\epsilon}\mathbf{div}\left(\mid \mathrm{rot}u\mid^2\tilde{u}\right)\,dx\\ &= \int_{\Omega_\epsilon}\nabla\left(\mid \mathrm{rot}u\mid^2\right)\cdot\tilde{u}\,dx+\int_{\Omega_\epsilon}\left(\mid \mathrm{rot}u\mid^2\right)\mathbf{div}\tilde{u}\,dx,\end{aligned}$$

isto é,

$$-\frac{1}{2}\int_{\Omega_\epsilon}\nabla\left(\mid \mathrm{rot}u\mid^2\right)\cdot\tilde{u}\,dx=\frac{1}{2}\int_{\Omega_\epsilon}\left(\mid \mathrm{rot}u\mid^2\right)\mathbf{div}\tilde{u}\,dx-\frac{1}{2}\int_{\partial\Omega_\epsilon}\mid \mathrm{rot}u\mid^2\tilde{u}\cdot\mathbf{n}\,dS. \tag{2.40}$$

Substituindo em (2.39),

$$\begin{aligned}b_\epsilon(u,u,\Delta u) &= -\int_{\Omega_\epsilon}[\tilde{u}\cdot\nabla\mathrm{rot}u]\,\mathrm{rot}u\,dx\\ &= \frac{1}{2}\int_{\Omega_\epsilon}\left(\mid \mathrm{rot}u\mid^2\right)\mathbf{div}\tilde{u}\,dx-\frac{1}{2}\int_{\partial\Omega_\epsilon}\mid \mathrm{rot}u\mid^2\tilde{u}\cdot\mathbf{n}\,dS. \qquad (2.41)\end{aligned}$$

O próximo passo é mostrar que as integrais em (2.41) são nulas. Primeiramente, já que $\mathbf{div}u=\mathbf{div}\tilde{u}=0$, a primeira integral de (2.41) vale zero. Quanto a integral de superfície, como $u\in D(\tilde{A})$, segue que $\tilde{u}\cdot\mathbf{n}=0$ e $\mathrm{rot}u=0$ em $\partial\Omega_\epsilon$. Portanto,

$$b_\epsilon(u,u,\Delta u)=0, \tag{2.42}$$

para todo $u \in D(\tilde{A})$.

■

Lema 2.3.2 *Se $u \in D(A_\epsilon)$ satisfaz (FF), (FP) ou (PP), então*

$$b_\epsilon\left(\tilde{M}_\epsilon u, \tilde{M}_\epsilon u, A_\epsilon(\tilde{M}_\epsilon u,)\right) = b_\epsilon\left(\tilde{M}_\epsilon u, \tilde{M}_\epsilon u, \tilde{A}(\tilde{M}_\epsilon u,)\right) = 0 \tag{2.43}$$

2.4 Desigualdades Fundamentais em Domínios Finos

Nesta seção, serão enunciados resultados para desigualdades clássicas em domínios finos. Tal ferramenta torna-se importante para conhecer a exata dependência das constantes que aparecem em desigualdades do tipo Sobolev com relação à espessura do domínio.

No que segue, usa-se versões apropriadas das desigualdades de *Poincaré*, de *Agmon* e *Ladyzhenskaya*. Algumas serão apenas enunciadas, pelo fato de suas demonstrações serem extensas e fugirem do escopo principal deste trabalho. Entretanto, os resultados mais diretos serão, na medida do possível, demonstrados.

A primeira desigualdade aqui enunciada é a de *Poincaré*, cuja demonstração pode ser encontrada em [14].

Proposição 2.4.1 (Desigualdade de Poincaré) *Seja $u \in H^1(\Omega_\epsilon)$ satisfazendo:*

$$\begin{cases} u \equiv 0 \quad em \quad \Gamma_t \cup \Gamma_b \\ \int_0^\epsilon u(x_1, x_2, x_3)\, dx_3 = 0 \;\; q.s. \quad em \quad \omega. \end{cases} \tag{2.44}$$

Então,

$$|u|_\epsilon \leq \epsilon \left|\frac{\partial u}{\partial x_3}\right|_\epsilon \tag{2.45}$$

Vale notar que a desigualdade acima vale para qualquer condição de fronteira a ser considerada. Como visto no lema (2.3.1), se $u \in V_\epsilon$ então $\tilde{N}_\epsilon u \in V_\epsilon$ e portanto, tem-se o seguinte resultado.

Corolário 2.4.1 *Para qualquer $u \in V_\epsilon$, vale que*

$$\left|\tilde{N}_\epsilon u\right|_\epsilon \leq \epsilon \left|\frac{\partial \tilde{N}_\epsilon u}{\partial x_3}\right|_\epsilon \tag{2.46}$$

Corolário 2.4.2 *Sob as mesmas hipóteses da proposição 2.4.1, tem-se*

$$|u|_\epsilon \quad \leq \quad \epsilon\, |\nabla u|_\epsilon\,. \tag{2.47}$$

Demonstração: De fato, basta notar que

$$\begin{aligned} |u|_\epsilon &\leq \epsilon \left|\frac{\partial u}{\partial x_3}\right|_\epsilon = \epsilon \sqrt{\epsilon \left|\frac{\partial u}{\partial x_3}\right|_\epsilon^2} \\ &\leq \epsilon \sqrt{\epsilon \left|\frac{\partial u}{\partial x_1}\right|_\epsilon + \epsilon \left|\frac{\partial u}{\partial x_2}\right|_\epsilon + \epsilon \left|\frac{\partial u}{\partial x_3}\right|_\epsilon} \\ &= \epsilon\, |\nabla u|_\epsilon\,. \end{aligned} \tag{2.48}$$

■

Corolário 2.4.3 *Sob as mesmas hipóteses da proposição 2.4.1, tem-se*

$$||u||_\epsilon \quad \leq \quad \epsilon\, |A_\epsilon u|_\epsilon \tag{2.49}$$

Demonstração: Da definição do operador de Stokes, A_ϵ é definido positivo, isto é, vale

$$(A_\epsilon u, u)_\epsilon = ||u||_\epsilon^2 \quad > \quad 0.$$

Mas, pela desigualdade de Holder (teorema 1.3.7), tomando $p = q = 2$, tem-se

$$(A_\epsilon u, u)_\epsilon \quad \leq \quad |A_\epsilon u|_\epsilon\, |u|_\epsilon\,.$$

Logo,

$$||u||_\epsilon^2 \quad \leq \quad |A_\epsilon u|_\epsilon\, |u|_\epsilon\,. \tag{2.50}$$

Usando o corolário anterior,

$$||u||_\epsilon^2 \quad \leq \quad |A_\epsilon u|_\epsilon\, \epsilon\, |\nabla u|_\epsilon \quad = \quad \epsilon\, |A_\epsilon u|_\epsilon\, ||u||_\epsilon\,.$$

Portanto,

$$||u||_\epsilon \;\; \leq \;\; \epsilon\, |A_\epsilon u|_\epsilon\,. \tag{2.51}$$

■

Uma outra desigualdade importante é a de Agmon, a qual será apresentada aqui na sua forma específica para domínios finos. A demonstração pode ser encontrada em [14].

Corolário 2.4.4 (Desigualdade Anisotrópica de Agmon para Domínios Finos) *Existe uma constante positiva $c_0(\omega)$, que não depende de ϵ, tal que, para toda $u \in H^2(\Omega_\epsilon)$,*

$$\begin{aligned}|u|_{L^\infty(\Omega_\epsilon)} \;\; &\leq \;\; c_0(\omega)\,|u|^{1/4}_{L^2(\Omega_\epsilon)} \left(\left|\frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2}\right|_{L^2(\Omega_\epsilon)} + \frac{1}{\epsilon}\left|\frac{\partial u}{\partial x_3}\right|_{L^2(\Omega_\epsilon)} + \frac{1}{\epsilon^2}\,|u|_{L^2(\Omega_\epsilon)} \right)^{1/4} \\ &\times \;\; \prod_{i=1}^{2}\left(\sum_{j=1}^{2} \left|\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}\right|_{L^2(\Omega_\epsilon)} + \left|\frac{\partial u}{\partial x_j}\right|_{L^2(\Omega_\epsilon)} + |u|_{L^2(\Omega_\epsilon)} \right)^{1/4}.\end{aligned}$$

Corolário 2.4.5 *Suponha que $u \in D(A_\epsilon)$. Então, para qualquer condição de fronteira, vale*

$$\left|\frac{\partial N_\epsilon u_j}{\partial x_i}\right|_\epsilon \;\; \leq \;\; \epsilon \left|\frac{\partial^2 N_\epsilon u_j}{\partial x_i \partial x_3}\right|_\epsilon, \quad \textit{para} \;\; i,j = 1,2,3. \tag{2.52}$$

Demonstração: Observe que, para $i = 1,2$, devido à (2.4), tem-se

$$\frac{\partial N_\epsilon u_j}{\partial x_i} = 0 \;\;\text{ e }\;\; \int_0^\epsilon \frac{\partial N_\epsilon u_j}{\partial x_i}\, dx_3 = 0, \tag{2.53}$$

com $j = 1,2,3$. Sendo assim, $\frac{\partial N_\epsilon u_j}{\partial x_i}$ satisfaz (2.44). Logo, pela Desigualdade de Poincaré,

$$\left|\frac{\partial N_\epsilon u_j}{\partial x_i}\right|_\epsilon \;\; \leq \;\; \epsilon \left|\frac{\partial^2 N_\epsilon u_j}{\partial x_i \partial x_3}\right|_\epsilon. \tag{2.54}$$

Agora, para a dimensão espacial x_3, deve-se ter um pouco mais de cuidado, visto que não é possível passar a derivada com relação à x_3 para dentro da integral em (2.4).

Portanto, usando integração por partes em x_3, note que

$$
\begin{aligned}
\int_{\Omega_\epsilon} N_\epsilon u_j \frac{\partial^2 N_\epsilon u_j}{\partial x_3^2}\, dx &= \int_\omega \int_0^\epsilon N_\epsilon u_j \frac{\partial^2 N_\epsilon u_j}{\partial x_3^2}\, dx_3 dx_2 dx_1 \\
&= \int_\omega \left(\int_0^\epsilon N_\epsilon u_j \frac{\partial^2 N_\epsilon u_j}{\partial x_3^2}\, dx_3 \right) dx_2 dx_1 \\
&= \int_\omega \left[\underbrace{N_\epsilon u_j \frac{\partial N_\epsilon u_j}{\partial x_3}\bigg|_0^\epsilon}_{=\,0 \text{ por } (2.4)} - \int_0^\epsilon \frac{\partial N_\epsilon u_j}{\partial x_3} \frac{\partial N_\epsilon u_j}{\partial x_3}\, dx_3 \right] dx_1 dx_2 \\
&= -\int_\omega \int_0^\epsilon \left(\frac{\partial N_\epsilon u_j}{\partial x_3} \right)^2 dx_3 dx_1 dx_2 \\
&= -\int_{\Omega_\epsilon} \left(\frac{\partial N_\epsilon u_j}{\partial x_3} \right)^2 dx.
\end{aligned}
$$

Assim,

$$
\begin{aligned}
\int_{\Omega_\epsilon} \left(\frac{\partial N_\epsilon u_j}{\partial x_3} \right)^2 dx &= -\int_{\Omega_\epsilon} N_\epsilon u_j \frac{\partial^2 N_\epsilon u_j}{\partial x_3^2}\, dx \\
&\leq \int_{\Omega_\epsilon} |N_\epsilon u_j| \left| \frac{\partial^2 N_\epsilon u_j}{\partial x_3^2} \right| dx \\
\text{pela Des. de Hölder (teo. 1.3.7)} \quad &\leq |N_\epsilon u_j|_{L^2(\Omega_\epsilon)} \left| \frac{\partial^2 N_\epsilon u_j}{\partial x_3^2} \right|_{L^2(\Omega_\epsilon)} \\
\left| \frac{\partial N_\epsilon u_j}{\partial x_3} \right|_\epsilon^2 &\leq |N_\epsilon u_j|_\epsilon \left| \frac{\partial^2 N_\epsilon u_j}{\partial x_3^2} \right|_\epsilon \\
\text{por (2.4.1)} \quad &\leq \epsilon \left| \frac{\partial N_\epsilon u_j}{\partial x_3} \right|_\epsilon \left| \frac{\partial^2 N_\epsilon u_j}{\partial x_3^2} \right|_\epsilon ,
\end{aligned}
$$

ou seja,

$$
\left| \frac{\partial N_\epsilon u_j}{\partial x_3} \right|_\epsilon \leq \left| \frac{\partial^2 N_\epsilon u_j}{\partial x_3^2} \right|_\epsilon . \tag{2.55}
$$

■

Combinando os corolários 2.4.1 e 2.4.4, resulta o que segue.

Corolário 2.4.6 *Existe uma constante positiva $c_0(\omega)$, que não depende de ϵ, tal que, para toda $u \in D(A_\epsilon)$,*

$$
\left| \tilde{N}_\epsilon u \right|_{L^\infty(\Omega_\epsilon)} \leq c_0(\omega) \left| \tilde{N}_\epsilon u \right|_{L^2(\Omega_\epsilon)}^{1/4} \left(\sum_{i,j=1}^{3} \left| \frac{\partial \tilde{N}_\epsilon u}{\partial x_i \partial x_j} \right|_{L^2(\Omega_\epsilon)} \right)^{3/4} . \tag{2.56}
$$

Corolário 2.4.7 *Existe uma constante positiva* c_0*, independente de* ϵ*, tal que*

$$\left|\tilde{N}_\epsilon u\right|^2_{L^6(\Omega_\epsilon)} \leq c_0 \left|\left|\tilde{N}_\epsilon u\right|\right|^2_\epsilon . \tag{2.57}$$

A partir do corolário acima e da proposição 2.4.1, obtem-se o seguinte lema.

Lema 2.4.1 *Para* $2 \leq q \leq 6$*, existe uma constante positiva* $c(q)$*, independente de* ϵ *tal que, para todo* $u \in V_\epsilon$*,*

$$\left|\tilde{N}_\epsilon u\right|^2_{L^q(\Omega_\epsilon)} \;\leq\; c(q)\epsilon^{\frac{6-q}{q}} \left|\left|\tilde{N}_\epsilon u\right|\right|^2_\epsilon \tag{2.58}$$

Teorema 2.4.1 *Sob qualquer uma das condições de fronteira consideradas, existe uma constante* c*, independente de* ϵ*, tal que, para todo* $u \in D(A_\epsilon)$*,*

$$\sum_{i,j=1}^{3} \left|\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}\right|^2_\epsilon \;\leq\; c\left|A_\epsilon u\right|^2_\epsilon . \tag{2.59}$$

Por fim, o próximo resultado está relacionado com desigualdades para a forma trilinear b_ϵ.

Lema 2.4.2 *Seja* $0 < q < \dfrac{1}{2}$*. Existe uma constante positiva* $c_4(q)$*, que não depende de* ϵ*, tal que, para qualquer condição de fronteira considerada, tem-se*

(i) $\left|b_\epsilon\left(\tilde{M}_\epsilon u, \tilde{N}_\epsilon u, w\right)\right| \leq c_4\epsilon^q \left|\left|\tilde{M}_\epsilon u\right|\right|_\epsilon \left|A_\epsilon \tilde{N}_\epsilon u\right|_\epsilon |w|_\epsilon,\ \forall\ u \in D(A_\epsilon)$ *e* $w \in \mathbb{L}^2(\Omega_\epsilon)$.

(ii) $\left|b_\epsilon\left(\tilde{N}_\epsilon u, \tilde{M}_\epsilon u, w\right)\right| \leq c_4\epsilon^{1/2} \left|\left|\tilde{M}_\epsilon u\right|\right|_\epsilon \left|A_\epsilon \tilde{N}_\epsilon u\right|_\epsilon |w|_\epsilon,\ \forall\ u \in D(A_\epsilon)$ *e* $w \in \mathbb{L}^2(\Omega_\epsilon)$.

(iii) $\left|b_\epsilon\left(\tilde{N}_\epsilon u, \tilde{N}_\epsilon u, w\right)\right| \;\leq\; c_4 \left|\left|\tilde{N}_\epsilon u\right|\right|^{3/2}_\epsilon \left|A_\epsilon \tilde{N}_\epsilon u\right|^{1/2}_\epsilon |w|_\epsilon \;\leq\; c_4\epsilon^{1/2} \left|\left|\tilde{N}_\epsilon u\right|\right|_\epsilon \left|A_\epsilon \tilde{N}_\epsilon u\right|_\epsilon |w|_\epsilon,$ $\forall\ u \in D(A_\epsilon)$ *e* $w \in \mathbb{L}^2(\Omega_\epsilon)$.

Demonstração: O resultado é imediato para as condições de fronteira (DD) e (DP), visto que, nestes casos, $\tilde{M}_\epsilon u = 0$. Nesta demonstração, considera-se as condições (FF), (FD) e (FP) sendo que, para (PP), a única diferença é no índice dos somatórios em (2.60) e (2.76).

A partir da definição de b_ϵ, tem-se

$$b_\epsilon\left(\tilde{M}_\epsilon u, \tilde{N}_\epsilon u, w\right) \;=\; \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{3} \int_{\Omega_\epsilon} M_\epsilon u_i \frac{\partial N_\epsilon u_j}{\partial x_i} w_j \, dx, \tag{2.60}$$

onde $u \in D(A_\epsilon)$ e $w \in \mathbb{L}^2(\Omega_\epsilon)$. Tomando, na expressão acima, o módulo de b_ϵ, a seguinte desigualdade é satisfeita

$$\left|b_\epsilon\left(\tilde{M}_\epsilon u, \tilde{N}_\epsilon u, w\right)\right| \;\leq\; \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{3}\int_{\Omega_\epsilon} |M_\epsilon u_i| \left|\frac{\partial N_\epsilon u_j}{\partial x_i}\right| |w_j| \; dx. \tag{2.61}$$

Escolhendo os expoentes p, p^* e 2 na desigualdade de Hölder generalizada (teorema 1.3.8), com $\frac{1}{p} + \frac{1}{p^*} = \frac{1}{2}$ e $2 < p^* \leq 6$, obtem-se

$$\int_{\Omega_\epsilon} |M_\epsilon u_i| \left|\frac{\partial N_\epsilon u_j}{\partial x_i}\right| |w_j| \; dx \;\leq\; |M_\epsilon u_i|_{L^p(\Omega_\epsilon)} \left|\frac{\partial N_\epsilon u_j}{\partial x_i}\right|_{L^{p^*}(\Omega_\epsilon)} |w_j|_\epsilon\,, \tag{2.62}$$

a partir do qual

$$\left|b_\epsilon\left(\tilde{M}_\epsilon u, \tilde{N}_\epsilon u, w\right)\right| \;\leq\; \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{3} |M_\epsilon u_i|_{L^p(\Omega_\epsilon)} \left|\frac{\partial N_\epsilon u_j}{\partial x_i}\right|_{L^{p^*}(\Omega_\epsilon)} |w_j|_\epsilon\,. \tag{2.63}$$

Observe que $\dfrac{\partial N_\epsilon u_j}{\partial x_i} = N_\epsilon\left(\dfrac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$ para $i = 1, 2$. Com efeito, lembrando que $N_\epsilon u_j = u_j - M_\epsilon u_j$, tem-se

$$\begin{aligned}\frac{\partial N_\epsilon u_j}{\partial x_i} &= \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{\partial M_\epsilon u_j}{\partial x_i} = \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - M_\epsilon\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)\\ &= N_\epsilon\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right),\end{aligned}$$

isto é,

$$\left|b_\epsilon\left(\tilde{M}_\epsilon u, \tilde{N}_\epsilon u, w\right)\right| \;\leq\; \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{3} |M_\epsilon u_i|_{L^p(\Omega_\epsilon)} \left|N_\epsilon\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)\right|_{L^{p^*}(\Omega_\epsilon)} |w_j|_\epsilon\,, \tag{2.64}$$

e, como $2 < p^* \leq 6$, pode-se aplicar o lema 2.4.1 para a função $\dfrac{\partial u_j}{\partial x_i}$, obtendo

$$\left|N_\epsilon\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)\right|^2_{L^{p^*}(\Omega_\epsilon)} \;\leq\; c(p^*)\epsilon^{\frac{6-p^*}{p^*}} \left\|N_\epsilon\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)\right\|^2_\epsilon \tag{2.65}$$

ou seja,

$$\left|N_\epsilon\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)\right|_{L^{p^*}(\Omega_\epsilon)} \;\leq\; \left(c(p^*)\right)^{1/2} \epsilon^{\frac{6-p^*}{2p^*}} \left\|N_\epsilon\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)\right\|_\epsilon. \tag{2.66}$$

Agora, note que

$$
\begin{aligned}
\left\|N_\epsilon\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)\right\|_\epsilon^2 &= \left|\nabla\left(N_\epsilon\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)\right)\right|_\epsilon^2 \\
&= \left|\frac{\partial}{\partial x_1}N_\epsilon\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right),\frac{\partial}{\partial x_2}N_\epsilon\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right),\frac{\partial}{\partial x_3}N_\epsilon\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)\right|_\epsilon^2 \\
(\text{equivalência de normas}) &= \sqrt{\sum_{k=1}^{3}\left|\frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_j}N_\epsilon u_j\right|_\epsilon^2} \\
(\text{pelo Teo. 2.4.1}) &\leq \sqrt{c\left|A_\epsilon N_\epsilon u_j\right|_\epsilon^2} \\
&= \sqrt{c}\left|A_\epsilon N_\epsilon u_j\right|_\epsilon . \qquad (2.67)
\end{aligned}
$$

Logo, de (2.66) e (2.67),

$$
\left|N_\epsilon\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)\right|_{L^{p^*}(\Omega_\epsilon)} \leq (c(p^*))^{1/2}\sqrt{c}\epsilon^{\frac{6-p^*}{2p^*}}\left|A_\epsilon N_\epsilon u_j\right|_\epsilon \qquad (2.68)
$$

O teorema de Imersões de Sobolev (teorema 1.2.5) garante, já que $\omega \subset \mathbb{R}^2$, a inclusão $H^1(\omega) \subset L^p(\omega)$, para $2 \leq p < \infty$ e, como $u \in D(A_\epsilon)$ conclui-se que $u \in H^2(\omega)$ (veja a definição A.0.1, do apêndice A). Assim, $M_\epsilon u_i \in H^1(\omega)$ e portanto,

$$
\left|M_\epsilon u_i\right|_{L^p(\omega)} \leq \mathrm{k}\left|M_\epsilon u_i\right|_{H^1(\omega)}, \qquad (2.69)
$$

onde k é uma constante. Observe que

$$
\begin{aligned}
\left|M_\epsilon u_i\right|_{L^p(\Omega_\epsilon)} &= \left(\int_0^\epsilon\int_\omega \left|M_\epsilon u_i\right|^p \, dx\right)^{1/p} \\
&= \epsilon^{1/p}\left(\int_\omega \left|M_\epsilon u_i\right|^p \, dx_1 dx_2\right)^{1/p} \\
&= \epsilon^{1/p}\left|M_\epsilon u_i\right|_{L^p(\omega)} \qquad (2.70)
\end{aligned}
$$

Analogamente,

$$
\begin{aligned}
\left|M_\epsilon u_i\right|_{H^1(\Omega_\epsilon)} &= \left(\int_0^\epsilon\int_\omega \left|\nabla M_\epsilon u_i\right|^2 \, dx\right)^{1/2} \\
&= \epsilon^{1/2}\left(\int_\omega \left|\nabla M_\epsilon u_i\right|^2 \, dx_1 dx_2\right)^{1/2} \\
&= \epsilon^{1/2}\left|M_\epsilon u_i\right|_{H^1(\omega)} . \qquad (2.71)
\end{aligned}
$$

Usando (2.69),

$$\begin{aligned}|M_\epsilon u_i|_{L^p(\Omega_\epsilon)} = \epsilon^{1/p}\,|M_\epsilon u_i|_{L^p(\omega)} &\leq \epsilon^{1/p}\mathrm{k}\,|M_\epsilon u_i|_{H^1(\omega)} = \epsilon^{1/p}\mathrm{k}\epsilon^{-1/2}\,|M_\epsilon u_i|_{H^1(\Omega_\epsilon)} \\ &= \mathrm{k}\epsilon^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}\,|M_\epsilon u_i|_{H^1(\Omega_\epsilon)}\,. \end{aligned} \tag{2.72}$$

Substituindo (2.68) e (2.72) em (2.64),

$$\begin{aligned}\left|b_\epsilon\left(\tilde{M}_\epsilon u, \tilde{N}_\epsilon u, w\right)\right| &\leq \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{3}\mathrm{k}\,(c(p^*))^{1/2}\,\sqrt{c}\epsilon^{\frac{6-p^*}{2p^*}}\,\epsilon^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}\,||M_\epsilon u_i||_\epsilon\,|A_\epsilon N_\epsilon u_j|_\epsilon\,|w_j|_\epsilon \\ &= \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{3} c_4\epsilon^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}+\frac{6-p^*}{2p^*}}\,||M_\epsilon u_i||_\epsilon\,|A_\epsilon N_\epsilon u_j|_\epsilon\,|w_j|_\epsilon\,.\end{aligned}$$

Como $\frac{1}{p}+\frac{1}{p^*}=\frac{1}{2}$, segue que

$$\frac{1}{p}-\frac{1}{2}+\frac{6-p^*}{2p^*} = -\frac{1}{p^*}+\frac{6-p^*}{2p^*} = \frac{2}{p^*}-\frac{1}{2}. \tag{2.73}$$

Fazendo $q=\frac{2}{p^*}-\frac{1}{2}$, para $2<p^*\leq 4$ tem-se $0\leq q<\frac{1}{2}$. Portanto,

$$\left|b_\epsilon\left(\tilde{M}_\epsilon u, \tilde{N}_\epsilon u, w\right)\right| \leq \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{3} c_4\epsilon^{q}\,||M_\epsilon u_i||_\epsilon\,|A_\epsilon N_\epsilon u|_\epsilon\,|w_j|_\epsilon\,, \tag{2.74}$$

onde $0\leq q<\frac{1}{2}$. Finalmente, como a norma de cada componente é menor que a norma do vetor, obtem-se

$$\left|b_\epsilon\left(\tilde{M}_\epsilon u, \tilde{N}_\epsilon u, w\right)\right| \leq c_4\epsilon^{q}\left|\left|\tilde{M}_\epsilon u\right|\right|_\epsilon\left|A_\epsilon\tilde{N}_\epsilon u\right|_\epsilon|w|_\epsilon\,, \tag{2.75}$$

provando o item (i) do lema.

Agora, usando a definição de b_ϵ e já tomando o módulo, tem-se

$$\left|b_\epsilon\left(\tilde{N}_\epsilon u, \tilde{M}_\epsilon u, w\right)\right| \leq \sum_{i,j=1}^{2}\int_{\Omega_\epsilon}|N_\epsilon u_i|\left|\frac{\partial M_\epsilon u_j}{\partial x_i}\right||w_j|\;dx. \tag{2.76}$$

Usando a desigualdade de Hölder generalizada (teorema 1.3.8) com $p=q=2$ e $r=\infty$,

$$\left|b_\epsilon\left(\tilde{N}_\epsilon u, \tilde{M}_\epsilon u, w\right)\right| \leq \sum_{i,j=1}^{2}|N_\epsilon u_i|_{L^\infty(\Omega_\epsilon)}\left|\frac{\partial M_\epsilon u_j}{\partial x_i}\right|_{L^2(\Omega_\epsilon)}|w_j|_{L^2(\Omega_\epsilon)}$$

$$= \quad |N_\epsilon u_i|_{L^\infty(\Omega_\epsilon)} \sum_{i,j=1}^{2} \left| \frac{\partial M_\epsilon u_j}{\partial x_i} \right|_{L^2(\Omega_\epsilon)} |w_j|_{L^2(\Omega_\epsilon)} .$$

Do corolário 2.4.6,

$$\begin{aligned} \left| b_\epsilon \left(\tilde{N}_\epsilon u, \tilde{M}_\epsilon u, w \right) \right| &\leq c_0(\omega) \left| \tilde{N}_\epsilon u_i \right|_\epsilon^{1/4} \left(\sum_{i,j=1}^{3} \left| \frac{\partial \tilde{N}_\epsilon u_i}{\partial x_i \partial x_j} \right|_\epsilon \right)^{3/4} \sum_{i,j=1}^{2} \left| \frac{\partial M_\epsilon u_j}{\partial x_i} \right|_\epsilon |w_j|_\epsilon \\ (\text{pelo Teo. 2.4.1 }) &\leq c_0(\omega) \left| \tilde{N}_\epsilon u_i \right|_\epsilon^{1/4} |A_\epsilon N_\epsilon u_i|_\epsilon^{3/4} \sum_{i,j=1}^{2} \left| \frac{\partial M_\epsilon u_j}{\partial x_i} \right|_\epsilon |w_j|_\epsilon \end{aligned} \tag{2.77}$$

Observe que, usando o lema 2.4.1 com $q = 2$,

$$\left| \tilde{N}_\epsilon u \right|_\epsilon^2 \leq c(2) \epsilon^{\frac{6-2}{2}} \left|\left| \tilde{N}_\epsilon u \right|\right|_\epsilon^2 = c(2)\epsilon^2 \left|\left| \tilde{N}_\epsilon u \right|\right|_\epsilon^2 .$$

Elevando ambos os lados à potência $\frac{1}{8}$,

$$\left| \tilde{N}_\epsilon u \right|_\epsilon^{1/4} \leq \sqrt[8]{c(2)} \epsilon^{1/4} \left|\left| \tilde{N}_\epsilon u \right|\right|_\epsilon^{1/4} . \tag{2.78}$$

Pelo corolário 2.4.3, aplicado à função $\tilde{N}_\epsilon u$,

$$\left|\left| \tilde{N}_\epsilon u \right|\right|_\epsilon \leq \epsilon \left| A_\epsilon \tilde{N}_\epsilon u \right|_\epsilon . \tag{2.79}$$

Voltando a (2.78),

$$\left| \tilde{N}_\epsilon u \right|_\epsilon^{1/4} \leq \sqrt[8]{c(2)} \epsilon^{1/4} \epsilon^{1/4} \left| A_\epsilon \tilde{N}_\epsilon u \right|_\epsilon^{1/4} = \sqrt[8]{c(2)} \epsilon^{1/2} \left| A_\epsilon \tilde{N}_\epsilon u \right|_\epsilon^{1/4} ,$$

e substituindo em (2.77),

$$\begin{aligned} \left| b_\epsilon \left(\tilde{N}_\epsilon u, \tilde{M}_\epsilon u, w \right) \right| &\leq c_0(\omega) \sqrt[8]{c(2)} \epsilon^{1/2} \left| A_\epsilon \tilde{N}_\epsilon u \right|_\epsilon^{1/4} |A_\epsilon N_\epsilon u_i|_\epsilon^{3/4} \sum_{i,j=1}^{2} \left| \frac{\partial M_\epsilon u_j}{\partial x_i} \right|_\epsilon |w_j|_\epsilon \\ &\leq c_4 \epsilon^{1/2} \left| A_\epsilon \tilde{N}_\epsilon u \right|_\epsilon^{1/4} \left| A_\epsilon \tilde{N}_\epsilon u \right|_\epsilon^{3/4} \left|\left| \tilde{M}_\epsilon u \right|\right|_\epsilon |w|_\epsilon \\ &= c_4 \epsilon^{1/2} \left| A_\epsilon \tilde{N}_\epsilon u \right|_\epsilon \left|\left| \tilde{M}_\epsilon u \right|\right|_\epsilon |w|_\epsilon , \end{aligned}$$

O item (ii) do lema está demonstrado.

Prova-se agora o item (iii). Da definição e tomando o módulo de b_ϵ,

$$\begin{aligned} \left|b_\epsilon\left(\tilde{N}_\epsilon u, \tilde{N}_\epsilon u, w\right)\right| &\leq \sum_{i,j=1}^{3} \int_{\Omega_\epsilon} |N_\epsilon u_i| \left|\frac{\partial N_\epsilon u_j}{\partial x_i}\right| |w_j| \ dx \\ &= \sum_{i,j=1}^{3} \int_{\Omega_\epsilon} |N_\epsilon u_i| \left(\left|\frac{\partial N_\epsilon u_j}{\partial x_i}\right|\right)^{1/2} \left(\left|\frac{\partial N_\epsilon u_j}{\partial x_i}\right|\right)^{1/2} |w_j| \ dx. \end{aligned}$$

Pela desigualdade de Hölder generalizada (teorema 1.3.8), com os expoentes 6, 4, 12 e 2, tem-se

$$\begin{aligned} \left|b_\epsilon\left(\tilde{N}_\epsilon u, \tilde{N}_\epsilon u, w\right)\right| &\leq \sum_{i,j=1}^{3} |N_\epsilon u_i|_{L^6(\Omega_\epsilon)} \left(\left|\frac{\partial N_\epsilon u_j}{\partial x_i}\right|_{L^4(\Omega_\epsilon)}\right)^{1/2} \left(\left|\frac{\partial N_\epsilon u_j}{\partial x_i}\right|_{L^{12}(\Omega_\epsilon)}\right)^{1/2} |w_j|_{L^2(\Omega_\epsilon)} \\ &= \sum_{i,j=1}^{3} |N_\epsilon u_i|_{L^6(\Omega_\epsilon)} \left|\frac{\partial N_\epsilon u_j}{\partial x_i}\right|^{1/2}_{L^2(\Omega_\epsilon)} \left|\frac{\partial N_\epsilon u_j}{\partial x_i}\right|^{1/2}_{L^6(\Omega_\epsilon)} |w_j|_{L^2(\Omega_\epsilon)} \end{aligned} \tag{2.80}$$

Observe que, pelo lema 2.4.7,

$$|N_\epsilon u_i|_{L^6(\Omega_\epsilon)} \leq c_0 \, ||N_\epsilon u_i||_\epsilon \,. \tag{2.81}$$

Usando o teorema 2.4.1,

$$\sqrt{\sum_{i,j=1}^{3} \left|N_\epsilon\left(\frac{\partial^2 u_j}{\partial x_k \partial x_m}\right)\right|^2_\epsilon} \leq \sqrt{c}\,|A_\epsilon N_\epsilon u_j|_\epsilon$$

$$\underbrace{\sqrt{\left|N_\epsilon\left(\frac{\partial^2 u_j}{\partial x_k \partial x_m}\right)\right|^2_\epsilon}}_{=\left|N_\epsilon\left(\frac{\partial^2 u_j}{\partial x_k \partial x_m}\right)\right|_\epsilon} \leq \sqrt{\sum_{i,j=1}^{3} \left|N_\epsilon\left(\frac{\partial^2 u_j}{\partial x_k \partial x_m}\right)\right|^2_\epsilon} \leq \sqrt{c}\,|A_\epsilon N_\epsilon u_j|_\epsilon \,. \tag{2.82}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \left|\frac{\partial N_\epsilon u_j}{\partial x_i}\right|_{L^6(\Omega_\epsilon)} &= \left|N_\epsilon\left(\frac{\partial N_\epsilon u_j}{\partial x_i}\right)\right|_{L^6(\Omega_\epsilon)} \\ \text{pelo Lema 2.4.7} \quad &\leq c_0 \left|\left|N_\epsilon\left(\frac{\partial N_\epsilon u_j}{\partial x_i}\right)\right|\right|_\epsilon \leq c_0 \sum_{i,j=1}^{3} \left|N_\epsilon\left(\frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_j}\right)\right|_\epsilon \\ \text{por (2.82)} \quad &\leq c_0\sqrt{c}\,|A_\epsilon N_\epsilon u_j|^2_\epsilon \,. \end{aligned}$$

Assim,

$$\left|\frac{\partial N_\epsilon u_j}{\partial x_i}\right|^{1/2}_{L^6(\Omega_\epsilon)} \leq c\,|A_\epsilon N_\epsilon u_j|^{1/2}_\epsilon \,, \tag{2.83}$$

Além disso,

$$\left|\frac{\partial N_\epsilon u_j}{\partial x_i}\right|_{L^2(\Omega_\epsilon)}^{1/2} \leq ||N_\epsilon u_j||_\epsilon^{1/2}. \tag{2.84}$$

Substituindo (2.85), (2.83) e (2.84) em (2.80),

$$\begin{aligned}\left|b_\epsilon\left(\tilde{N}_\epsilon u, \tilde{N}_\epsilon u, w\right)\right| &\leq \sum_{i,j=1}^{3} c_0\, ||N_\epsilon u_i||_\epsilon\, ||N_\epsilon u_j||_\epsilon^{1/2}\, c\, |A_\epsilon N_\epsilon u_j|_\epsilon^{1/2}\, |w_j|_\epsilon \\ &\leq c_4 \left|\left|\tilde{N}_\epsilon u\right|\right|_\epsilon \left|\left|\tilde{N}_\epsilon u\right|\right|_\epsilon^{1/2} \left|A_\epsilon \tilde{N}_\epsilon u\right|_\epsilon^{1/2} |w|_\epsilon \\ &= c_4 \left|\left|\tilde{N}_\epsilon u\right|\right|_\epsilon^{3/2} \left|A_\epsilon \tilde{N}_\epsilon u\right|_\epsilon^{1/2} |w|_\epsilon. \end{aligned} \tag{2.85}$$

Agora, observe que a partir do corolário 2.4.5, o qual afirma que

$$\left|\frac{\partial N_\epsilon u_j}{\partial x_i}\right|_\epsilon \leq \epsilon \left|\frac{\partial^2 N_\epsilon u_j}{\partial x_i \partial x_3}\right|_\epsilon, \quad \text{para} \;\; i, j = 1, 2, 3. \tag{2.86}$$

pode-se obter uma nova estimativa. Então, para $i, j = 1, 2, 3$,

$$\begin{aligned} ||N_\epsilon u||_\epsilon^{1/2} &= \left(\sqrt{\sum_{i,j=1}^{3} \left|\frac{\partial N_\epsilon u_j}{\partial x_i}\right|_\epsilon^2}\right)^{1/2} \leq \left(\sqrt{\sum_{i,j=1}^{3} \epsilon^2 \left|\frac{\partial^2 N_\epsilon u_j}{\partial x_i \partial x_3}\right|_\epsilon^2}\right)^{1/2} \\ \text{pelo Teo. 2.4.1} &\leq c\epsilon^{1/2}\, |A_\epsilon N_\epsilon u_j|_\epsilon^{1/2} \leq c\epsilon^{1/2} \left|A_\epsilon \tilde{N}_\epsilon u\right|_\epsilon^{1/2}. \end{aligned}$$

Como

$$\left|\left|\tilde{N}_\epsilon u\right|\right|_\epsilon^{3/2} = \left|\left|\tilde{N}_\epsilon u\right|\right|_\epsilon^{1/2} \left|\left|\tilde{N}_\epsilon u\right|\right|_\epsilon \leq c\epsilon^{1/2} \left|A_\epsilon \tilde{N}_\epsilon u\right|_\epsilon^{1/2} \left|\left|\tilde{N}_\epsilon u\right|\right|_\epsilon,$$

segue de (2.85) que

$$\begin{aligned}\left|b_\epsilon\left(\tilde{N}_\epsilon u, \tilde{N}_\epsilon u, w\right)\right| &\leq c_4 \epsilon^{1/2} \left|A_\epsilon \tilde{N}_\epsilon u\right|_\epsilon^{1/2} \left|\left|\tilde{N}_\epsilon u\right|\right|_\epsilon \left|A_\epsilon \tilde{N}_\epsilon u\right|_\epsilon^{1/2} |w|_\epsilon \\ &= c_4 \epsilon^{1/2} \left|\left|\tilde{N}_\epsilon u\right|\right|_\epsilon \left|A_\epsilon \tilde{N}_\epsilon u\right|_\epsilon |w|_\epsilon, \end{aligned} \tag{2.87}$$

concluindo, assim, a demonstração do lema.

■

Capítulo 3

Solução Fraca em Domínios Finos

3.1 Estimativas para $\tilde{M}_\epsilon$ e $\tilde{N}_\epsilon$

As desigualdades apresentadas na última seção do capítulo anterior motivam algumas estimativas *a priori* para os operadores $\tilde{M}_\epsilon$ e $\tilde{N}_\epsilon$, as quais formam o principal mecanismo para o estudo do tempo máximo de existência das soluções. Primeiramente, é preciso algumas noções mais expecíficas sobre as potências do operador de Stokes (veja Apêndice A) e, a partir das equações de Navier-Stokes, faz-se a formulação fraca para $\tilde{M}_\epsilon$ e $\tilde{N}_\epsilon$. No que segue, omite-se as condições de fronteira, a menos que seja necessário.

Antes de demonstrar a formulação fraca, observe que como $(u,v)_{D(A^{1/2})} = ((A_\epsilon^{1/2}u, A_\epsilon^{1/2}v))_\epsilon$, segue que

$$\left(\left(A_\epsilon^{1/2}\tilde{M}_\epsilon u, A_\epsilon^{1/2}\tilde{M}_\epsilon v\right)\right)_\epsilon = \left(\tilde{M}_\epsilon u, \tilde{M}_\epsilon v\right)_{D(A_\epsilon^{1/2})} = \left(\nabla\tilde{M}_\epsilon u, \nabla\tilde{M}_\epsilon v\right)_\epsilon . \tag{3.1}$$

Note que faz sentido tomar o produto interno com relação a $\tilde{M}_\epsilon u$ e $\tilde{M}_\epsilon v$, pois, como $u, v \in D(A_\epsilon^{1/2}) = V_\epsilon$, tem-se pelo lema 2.3.1 que $\tilde{M}_\epsilon u, \tilde{M}_\epsilon v \in V_\epsilon$.

Proposição 3.1.1 (Formulação fraca para $\tilde{M}_\epsilon$ e $\tilde{N}_\epsilon$) *Sejam $v \in V_\epsilon$ e $u \in H_\epsilon$. Então,*

(i) $$\frac{d}{dt}\left(\tilde{M}_\epsilon u, \tilde{M}_\epsilon v\right)_\epsilon + \mu\left(A_\epsilon^{1/2}\tilde{M}_\epsilon u, A_\epsilon^{1/2}\tilde{M}_\epsilon v\right)_\epsilon + b_\epsilon\left(\tilde{M}_\epsilon u, \tilde{M}_\epsilon u, \tilde{M}_\epsilon v\right)$$
$$+ b_\epsilon\left(\tilde{N}_\epsilon u, \tilde{N}_\epsilon u, \tilde{M}_\epsilon v\right) = \left(\tilde{M}_\epsilon f, \tilde{M}_\epsilon v\right)_\epsilon ,$$

(ii) $$\frac{d}{dt}\left(\tilde{N}_\epsilon u, \tilde{N}_\epsilon v\right)_\epsilon + \mu\left(A_\epsilon^{1/2}\tilde{N}_\epsilon u, A_\epsilon^{1/2}\tilde{N}_\epsilon v\right)_\epsilon + b_\epsilon\left(\tilde{M}_\epsilon u, \tilde{N}_\epsilon u, \tilde{N}_\epsilon v\right) + b_\epsilon\left(\tilde{N}_\epsilon u, \tilde{M}_\epsilon u, \tilde{N}_\epsilon v\right)$$

$$+\, b_\epsilon\left(\tilde{N}_\epsilon u, \tilde{N}_\epsilon u, \tilde{N}_\epsilon v\right) = \left(\tilde{N}_\epsilon f, \tilde{N}_\epsilon v\right)_\epsilon .$$

Demonstração: Considere a forma vetorial das equações de Navier-Stokes,

$$u_t + u \cdot \nabla u - \mu \Delta u + \nabla p = f. \tag{3.2}$$

Aplicando o operador $\tilde{M}_\epsilon$ em cada componente da equação acima, tem-se

$$\tilde{M}_\epsilon u_t + \tilde{M}_\epsilon (u \cdot \nabla u) - \mu \tilde{M}_\epsilon \Delta u + \tilde{M}_\epsilon \nabla p = \tilde{M}_\epsilon f. \tag{3.3}$$

Observe que $\tilde{M}_\epsilon u_t = \left(\tilde{M}_\epsilon u\right)_t$ e $\mu \tilde{M}_\epsilon \Delta u = \mu \Delta \left(\tilde{M}_\epsilon u\right)$. Ainda,

$$\begin{aligned} \tilde{M}_\epsilon \nabla p &= \tilde{M}_\epsilon \left(\frac{\partial p}{\partial x_1}, \frac{\partial p}{\partial x_2}, \frac{\partial p}{\partial x_3}\right) = \left(\tilde{M}_\epsilon \left(\frac{\partial p}{\partial x_1}\right), \tilde{M}_\epsilon \left(\frac{\partial p}{\partial x_2}\right), \tilde{M}_\epsilon \left(\frac{\partial p}{\partial x_3}\right)\right) \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\tilde{M}_\epsilon p\right), \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\tilde{M}_\epsilon p\right), \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\tilde{M}_\epsilon p\right)}_{=0}\right) = \nabla' \tilde{M}_\epsilon p. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Multiplicando (3.3) por $\tilde{M}_\epsilon v$ e integrando em Ω_ϵ tem-se

$$\begin{aligned} \left(\left(\tilde{M}_\epsilon u\right)_t, \tilde{M}_\epsilon v\right)_\epsilon &+ \left(\tilde{M}_\epsilon (u \cdot \nabla u), \tilde{M}_\epsilon v\right)_\epsilon - \mu \left(\Delta \tilde{M}_\epsilon u, \tilde{M}_\epsilon v\right)_\epsilon \\ &+ \left(\nabla' \tilde{M}_\epsilon p, \tilde{M}_\epsilon v\right)_\epsilon = \left(\tilde{M}_\epsilon f, \tilde{M}_\epsilon v\right)_\epsilon . \end{aligned} \tag{3.5}$$

Agora, note que

$$\frac{d}{dt}\left(\tilde{M}_\epsilon u, \tilde{M}_\epsilon v\right)_\epsilon = \left(\left(\tilde{M}_\epsilon u\right)_t, \tilde{M}_\epsilon v\right)_\epsilon + \left(\tilde{M}_\epsilon u, \left(\tilde{M}_\epsilon v\right)_t\right)_\epsilon , \tag{3.6}$$

e, como $v \in V_\epsilon$ não depende de t, $\left(\tilde{M}_\epsilon u, \left(\tilde{M}_\epsilon v\right)_t\right) = 0$. Logo,

$$\frac{d}{dt}\left(\tilde{M}_\epsilon u, \tilde{M}_\epsilon v\right)_\epsilon = \left(\left(\tilde{M}_\epsilon u\right)_t, \tilde{M}_\epsilon v\right)_\epsilon . \tag{3.7}$$

Como $\tilde{M}_\epsilon$ é auto-adjunto e $\tilde{M}_\epsilon^2 = \tilde{M}_\epsilon$, segue que

$$\begin{aligned} \left(\tilde{M}_\epsilon (u \cdot \nabla u), \tilde{M}_\epsilon v\right)_\epsilon &= \left(u \cdot \nabla u, \tilde{M}_\epsilon \left(\tilde{M}_\epsilon v\right)\right)_\epsilon = \left(u \cdot \nabla u, \tilde{M}_\epsilon v\right)_\epsilon \\ &= b_\epsilon \left(u, u, \tilde{M}_\epsilon v\right) \end{aligned}$$

Usando o item (iv) do lema 2.3.1,

$$\left(\tilde{M}_\epsilon(u\cdot\nabla u),\tilde{M}_\epsilon v\right)_\epsilon = b_\epsilon(\tilde{M}_\epsilon u,\tilde{M}_\epsilon u,\tilde{M}_\epsilon v)+b_\epsilon(\tilde{N}_\epsilon u,\tilde{N}_\epsilon u,\tilde{M}_\epsilon v). \tag{3.8}$$

Ainda,

$$-\mu\left(\Delta\tilde{M}_\epsilon u,\tilde{M}_\epsilon v\right)_\epsilon = \mu\left(\nabla\tilde{M}_\epsilon u,\nabla\tilde{M}_\epsilon v\right)_\epsilon = \mu\left(A_\epsilon^{1/2}\tilde{M}_\epsilon u, A_\epsilon^{1/2}\tilde{M}_\epsilon v\right)_\epsilon. \tag{3.9}$$

Além disso,

$$\left(\nabla'\tilde{M}_\epsilon p,\tilde{M}_\epsilon v\right)_\epsilon = 0 \tag{3.10}$$

Substituindo (3.7), (3.8), (3.9) e (3.10) em (3.5), obtem-se a seguinte formulação fraca para $\tilde{M}_\epsilon$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(\tilde{M}_\epsilon u,\tilde{M}_\epsilon v\right)_\epsilon &+ \mu\left(A_\epsilon^{1/2}\tilde{M}_\epsilon u, A_\epsilon^{1/2}\tilde{M}_\epsilon v\right)_\epsilon + b_\epsilon\left(\tilde{M}_\epsilon u,\tilde{M}_\epsilon u,\tilde{M}_\epsilon v\right)\\ &+ b_\epsilon\left(\tilde{N}_\epsilon u,\tilde{N}_\epsilon u,\tilde{M}_\epsilon v\right) = \left(\tilde{M}_\epsilon f,\tilde{M}_\epsilon v\right)_\epsilon.\end{aligned} \tag{3.11}$$

Para o operador $\tilde{N}_\epsilon$, procede-se analogamente, aplicando $\tilde{N}_\epsilon$ à forma vetorial das equações de Navier-Stokes, multiplicando por $\tilde{N}_\epsilon v$ e integrando em Ω_ϵ. Deste modo, ao aplicar o item (iv) do lema 2.3.1, tem-se que

$$\begin{aligned}\left(\tilde{N}_\epsilon\left(u\cdot\nabla u\right),\tilde{N}_\epsilon v\right)_\epsilon &= \left(u\cdot\nabla u,\tilde{N}_\epsilon v\right)_\epsilon = b_\epsilon(u,u,\tilde{N}_\epsilon v)\\ &= b_\epsilon(\tilde{N}_\epsilon u,\tilde{M}_\epsilon u,\tilde{N}_\epsilon v)+b_\epsilon(\tilde{M}_\epsilon u,\tilde{N}_\epsilon u,\tilde{N}_\epsilon v)\\ &+ b_\epsilon(\tilde{N}_\epsilon u,\tilde{N}_\epsilon u,\tilde{N}_\epsilon v).\end{aligned} \tag{3.12}$$

Assim, conclui-se a formulação fraca para o operador $\tilde{N}_\epsilon$ dada por

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(\tilde{N}_\epsilon u,\tilde{N}_\epsilon v\right)_\epsilon &+ \mu\left(A_\epsilon^{1/2}\tilde{N}_\epsilon u, A_\epsilon^{1/2}\tilde{N}_\epsilon v\right)_\epsilon + b_\epsilon\left(\tilde{M}_\epsilon u,\tilde{N}_\epsilon u,\tilde{N}_\epsilon v\right)\\ &+ b_\epsilon\left(\tilde{N}_\epsilon u,\tilde{M}_\epsilon u,\tilde{N}_\epsilon v\right)+b_\epsilon\left(\tilde{N}_\epsilon u,\tilde{N}_\epsilon u,\tilde{N}_\epsilon v\right) = \left(\tilde{N}_\epsilon f,\tilde{N}_\epsilon v\right)_\epsilon.\end{aligned}$$

■

Para facilitar as expressões calculadas nas estimativas, utiliza-se, no que segue, as seguintes notações:

1) $a_0(\epsilon) = \left|A_\epsilon^{1/2}\tilde{M}_\epsilon u_0\right|_\epsilon$, $b_0(\epsilon) = \left|A_\epsilon^{1/2}\tilde{N}_\epsilon u_0\right|_\epsilon$, $\alpha(\epsilon) = \left|\tilde{M}_\epsilon f\right|_\epsilon$ e $\beta(\epsilon) = \left|\tilde{N}_\epsilon f\right|_\epsilon$;

2) $R_0^2(\epsilon) = a_0^2(\epsilon) + b_0^2(\epsilon) + \alpha^2(\epsilon) + \beta^2(\epsilon)$.

Observe que, de acordo com (ii) do lema 2.3.1,

$$\begin{aligned} |u_0|^2_{D(A_\epsilon^{1/2})} = \left|A_\epsilon^{1/2}u_0\right|^2_\epsilon &= \left|\tilde{M}_\epsilon A_\epsilon^{1/2}u_0\right|^2_\epsilon + \left|\tilde{N}_\epsilon A_\epsilon^{1/2}u_0\right|^2_\epsilon = \left|A_\epsilon^{1/2}\tilde{M}_\epsilon u_0\right|^2_\epsilon + \left|A_\epsilon^{1/2}\tilde{N}_\epsilon u_0\right|^2_\epsilon \\ &= a_0^2(\epsilon) + b_0^2(\epsilon), \end{aligned}$$

e

$$|f|^2_\epsilon = \left|\tilde{M}_\epsilon f\right|^2_\epsilon + \left|\tilde{N}_\epsilon f\right|^2_\epsilon = \alpha^2(\epsilon) + \beta^2(\epsilon),$$

ou seja,

$$R_0^2(\epsilon) = \left|A_\epsilon^{1/2}u_0\right|^2_\epsilon + |f|^2_\epsilon. \tag{3.13}$$

Agora, dado $\sigma > 1$, como consequência do teorema 2.1.1, tem-se que existe $T^\sigma(\epsilon) > 0$ tal que, para todo $t \in [0, T^\sigma(\epsilon))$,

$$\left|A_\epsilon^{1/2}u(t)\right|^2_\epsilon \leq \sigma R_0^2(\epsilon). \tag{3.14}$$

Aqui, $[0, T^\sigma(\epsilon))$ é o intervalo máximo onde a desigualdade acima corresponde. Vale notar que se $T^\sigma(\epsilon) < \infty$, então

$$\left|A_\epsilon^{1/2}u(T^\sigma(\epsilon))\right|^2_\epsilon = \sigma R_0^2(\epsilon). \tag{3.15}$$

Com efeito, caso não valesse a igualdade, teria uma contradição com o fato de $T^\sigma(\epsilon)$ ser o tempo máximo.

Lema 3.1.1 (Estimativas para $\tilde{N}_\epsilon u$) *Suponha que* $0 < q < \frac{1}{2}$ *e*

$$\lim_{\epsilon \to 0} \epsilon^{2q}\left(\left|A_\epsilon^{1/2}u_0\right|^2_\epsilon + |f|^2_\epsilon\right) = 0. \tag{3.16}$$

Então, existe $\epsilon_1 = \epsilon_1(\mu) > 0$ *tal que para todo* ϵ, $0 < \epsilon \leq \epsilon_1$, *existem* $T^\sigma(\epsilon) > 0$ *e uma constante positiva* $c_5(\mu)$, *independente de* ϵ, *de modo que para* ϵ, $0 < \epsilon \leq \epsilon_1$ *e*

$0 < t < T^{\sigma}(\epsilon)$, *tem-se:*

(i) $\left|A_\epsilon^{1/2}\tilde{N}_\epsilon u(t)\right|_\epsilon^2 \leq b_0^2(\epsilon)e^{-\frac{\mu t}{2\epsilon^2}} + \dfrac{2\epsilon^2}{\mu^2}\beta^2(\epsilon);$

(ii) $\displaystyle\int_0^t \left|A_\epsilon\tilde{N}_\epsilon u(s)\right|_\epsilon^2 \, ds \leq \frac{2}{\mu}b_0^2(\epsilon) + \frac{2}{\mu^2}t\beta^2(\epsilon);$

(iii) $\displaystyle\int_0^t \left|A_\epsilon^{1/2}\tilde{N}_\epsilon u(s)\right|_\epsilon^3 \left|A_\epsilon\tilde{N}_\epsilon u(s)\right|_\epsilon \, ds \leq c_5(\mu)\epsilon\left(b_0^2(\epsilon) + \epsilon^2\beta^2(\epsilon)\right)\left(b_0^2(\epsilon) + t\beta^2(\epsilon)\right).$

Demonstração: Da formulação fraca para $\tilde{N}_\epsilon$, substituindo v por $A_\epsilon u$, tem-se

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(\tilde{N}_\epsilon u, \tilde{N}_\epsilon A_\epsilon u\right)_\epsilon &+ \mu\left(A_\epsilon^{1/2}\tilde{N}_\epsilon u, A_\epsilon^{1/2}\tilde{N}_\epsilon A_\epsilon u\right)_\epsilon + b_\epsilon\left(\tilde{M}_\epsilon u, \tilde{N}_\epsilon u, \tilde{N}_\epsilon A_\epsilon u\right)\\ &+ b_\epsilon\left(\tilde{N}_\epsilon u, \tilde{M}_\epsilon u, \tilde{N}_\epsilon A_\epsilon u\right) + b_\epsilon\left(\tilde{N}_\epsilon u, \tilde{N}_\epsilon u, \tilde{N}_\epsilon A_\epsilon u\right)\\ &= \left(\tilde{N}_\epsilon f, \tilde{N}_\epsilon A_\epsilon u\right)_\epsilon.\end{aligned} \tag{3.17}$$

Antes de substituir, v pertence a V_ϵ, isto é, v não depende de t e portanto pode-se passar a derivada para dentro do produto interno, ou seja,

$$\frac{d}{dt}\left(\tilde{N}_\epsilon u, \tilde{N}_\epsilon v\right)_\epsilon = \left(\frac{d}{dt}\tilde{N}_\epsilon u, \tilde{N}_\epsilon v\right)_\epsilon.$$

Substituindo, agora, v por $A_\epsilon u$,

$$\frac{d}{dt}\left(\tilde{N}_\epsilon u, \tilde{N}_\epsilon A_\epsilon u\right)_\epsilon = \left(\frac{d}{dt}\tilde{N}_\epsilon u, \tilde{N}_\epsilon A_\epsilon u\right)_\epsilon. \tag{3.18}$$

Observe que, pela comutatividade do operador de Stokes com $\tilde{N}_\epsilon$,

$$\begin{aligned}\left(\tilde{N}_\epsilon u, \tilde{N}_\epsilon A_\epsilon u\right)_\epsilon &= \left(\tilde{N}_\epsilon u, A_\epsilon \tilde{N}_\epsilon u\right)_\epsilon = \left(\left(\tilde{N}_\epsilon u, \tilde{N}_\epsilon u\right)\right)_\epsilon\\ &= \left(A_\epsilon^{1/2}\tilde{N}_\epsilon u, A_\epsilon^{1/2}\tilde{N}_\epsilon u\right)_\epsilon = \left|A_\epsilon^{1/2}\tilde{N}_\epsilon u\right|_\epsilon^2,\end{aligned} \tag{3.19}$$

Logo,

$$\frac{d}{dt}\left(\tilde{N}_\epsilon u, \tilde{N}_\epsilon A_\epsilon u\right)_\epsilon = \frac{d}{dt}\left|A_\epsilon^{1/2}\tilde{N}_\epsilon u\right|_\epsilon^2. \tag{3.20}$$

Mas

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(\tilde{N}_\epsilon u, \tilde{N}_\epsilon A_\epsilon u\right)_\epsilon &= \left(\frac{d}{dt}\tilde{N}_\epsilon u, \tilde{N}_\epsilon A_\epsilon u\right)_\epsilon + \left(\tilde{N}_\epsilon u, \frac{d}{dt}\tilde{N}_\epsilon A_\epsilon u\right)_\epsilon\\ &= \left(\frac{d}{dt}\tilde{N}_\epsilon u, \tilde{N}_\epsilon A_\epsilon u\right)_\epsilon + \left(\tilde{N}_\epsilon u, \frac{d}{dt}A_\epsilon \tilde{N}_\epsilon u\right)_\epsilon\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \left(\frac{d}{dt}\tilde{N}_\epsilon u, \tilde{N}_\epsilon A_\epsilon u\right)_\epsilon + \left(\tilde{N}_\epsilon u, A_\epsilon\left(\frac{d}{dt}\tilde{N}_\epsilon u\right)\right)_\epsilon \\
&= \left(\frac{d}{dt}\tilde{N}_\epsilon u, \tilde{N}_\epsilon A_\epsilon u\right)_\epsilon + \left(A_\epsilon \tilde{N}_\epsilon u, \frac{d}{dt}\tilde{N}_\epsilon u\right)_\epsilon \\
&= 2\left(\frac{d}{dt}\tilde{N}_\epsilon u, \tilde{N}_\epsilon A_\epsilon u\right)_\epsilon .
\end{aligned}
$$

Assim, de (3.20),

$$
\left(\frac{d}{dt}\tilde{N}_\epsilon u, \tilde{N}_\epsilon A_\epsilon u\right)_\epsilon = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\tilde{N}_\epsilon u, \tilde{N}_\epsilon A_\epsilon u\right)_\epsilon = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left|A_\epsilon^{1/2}\tilde{N}_\epsilon u\right|_\epsilon^2, \tag{3.21}
$$

e, por (3.18),

$$
\frac{d}{dt}\left(\tilde{N}_\epsilon u, \tilde{N}_\epsilon A_\epsilon u\right)_\epsilon = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left|A_\epsilon^{1/2}\tilde{N}_\epsilon u\right|_\epsilon^2. \tag{3.22}
$$

Também,

$$
\begin{aligned}
\mu\left(A_\epsilon^{1/2}\tilde{N}_\epsilon u, A_\epsilon^{1/2}\tilde{N}_\epsilon A_\epsilon u\right)_\epsilon &= \mu\left(A_\epsilon^{1/2}\tilde{N}_\epsilon u, A_\epsilon^{1/2}A_\epsilon \tilde{N}_\epsilon u\right)_\epsilon \\
&= \mu\left(A_\epsilon \tilde{N}_\epsilon u, A_\epsilon \tilde{N}_\epsilon u\right)_\epsilon = \mu\left|A_\epsilon \tilde{N}_\epsilon u\right|_\epsilon^2. \qquad (3.23)
\end{aligned}
$$

Além disso, pela desigualdade de Cauchy-Schwarz,

$$
\left(\tilde{N}_\epsilon f, \tilde{N}_\epsilon A_\epsilon u\right)_\epsilon = \left(\tilde{N}_\epsilon f, A_\epsilon \tilde{N}_\epsilon u\right)_\epsilon \leq \left|\tilde{N}_\epsilon f\right|_\epsilon \left|A_\epsilon \tilde{N}_\epsilon u\right|_\epsilon \leq \frac{\delta^2}{2}\left|\tilde{N}_\epsilon f\right|_\epsilon^2 + \frac{1}{2\delta^2}\left|A_\epsilon \tilde{N}_\epsilon u\right|_\epsilon^2.
$$

A última desigualdade acima vem de $2ab \leq a^2 + b^2$, tomando $a = \delta\left|\tilde{N}_\epsilon f\right|_\epsilon$ e $b = \delta^{-1}\left|A_\epsilon \tilde{N}_\epsilon u\right|_\epsilon$, onde $\delta > 0$ é um número real. Escolhendo $\dfrac{1}{2\delta^2} = \dfrac{\mu}{2}$, tem-se $\delta^2 = \mu^{-1}$. Daí,

$$
\left(\tilde{N}_\epsilon f, \tilde{N}_\epsilon A_\epsilon u\right)_\epsilon \leq \frac{1}{2\mu}\left|\tilde{N}_\epsilon f\right|_\epsilon^2 + \frac{\mu}{2}\left|A_\epsilon \tilde{N}_\epsilon u\right|_\epsilon^2 \tag{3.24}
$$

Pelas estimativas do Lema 2.4.2,

$$
\begin{aligned}
b_\epsilon\left(\tilde{M}_\epsilon u, \tilde{N}_\epsilon u, \tilde{N}_\epsilon A_\epsilon u\right) &+ b_\epsilon\left(\tilde{N}_\epsilon u, \tilde{M}_\epsilon u, \tilde{N}_\epsilon A_\epsilon u\right) + b_\epsilon\left(\tilde{N}_\epsilon u, \tilde{N}_\epsilon u, \tilde{N}_\epsilon A_\epsilon u\right) \\
&\leq c_4\epsilon^q \left\|\tilde{M}_\epsilon u\right\|_\epsilon \left|A_\epsilon \tilde{N}_\epsilon u\right|_\epsilon \left|A_\epsilon \tilde{N}_\epsilon u\right|_\epsilon \\
&+ c_4\epsilon^{1/2} \left\|\tilde{M}_\epsilon u\right\|_\epsilon \left|A_\epsilon \tilde{N}_\epsilon u\right|_\epsilon \left|A_\epsilon \tilde{N}_\epsilon u\right|_\epsilon
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+ \quad c_4\epsilon^{1/2}\left|\left|\tilde{N}_\epsilon u\right|\right|_\epsilon \left|A_\epsilon\tilde{N}_\epsilon u\right|_\epsilon \left|A_\epsilon\tilde{N}_\epsilon u\right|_\epsilon \\
&= \quad c_4\epsilon^{q}\left|\left|\tilde{M}_\epsilon u\right|\right|_\epsilon \left|A_\epsilon\tilde{N}_\epsilon u\right|_\epsilon^2 + c_4\epsilon^{1/2}\left|\left|\tilde{M}_\epsilon u\right|\right|_\epsilon \left|A_\epsilon\tilde{N}_\epsilon u\right|_\epsilon^2 \\
&+ \quad c_4\epsilon^{1/2}\left|\left|\tilde{N}_\epsilon u\right|\right|_\epsilon \left|A_\epsilon\tilde{N}_\epsilon u\right|_\epsilon^2.
\end{aligned}
$$

Note que

$$
\begin{aligned}
\left|\left|\tilde{M}_\epsilon u\right|\right|_\epsilon^2 &= \left(\left(\tilde{M}_\epsilon u, \tilde{M}_\epsilon u\right)\right)_\epsilon = \left(A_\epsilon\tilde{M}_\epsilon u, \tilde{M}_\epsilon u\right)_\epsilon = \left(A_\epsilon^{1/2}\tilde{M}_\epsilon u, A_\epsilon^{1/2}\tilde{M}_\epsilon u\right)_\epsilon \\
&= \left|A_\epsilon^{1/2}\tilde{M}_\epsilon u\right|_\epsilon^2, \qquad (3.25)
\end{aligned}
$$

ou seja,

$$
\left|\left|\tilde{M}_\epsilon u\right|\right|_\epsilon = \left|A_\epsilon^{1/2}\tilde{M}_\epsilon u\right|_\epsilon. \qquad (3.26)
$$

Analogamente,

$$
\left|\left|\tilde{N}_\epsilon u\right|\right|_\epsilon = \left|A_\epsilon^{1/2}\tilde{N}_\epsilon u\right|_\epsilon, \qquad (3.27)
$$

e, com isso,

$$
\begin{aligned}
b_\epsilon\left(\tilde{M}_\epsilon u, \tilde{N}_\epsilon u, \tilde{N}_\epsilon A_\epsilon u\right) &+ b_\epsilon\left(\tilde{N}_\epsilon u, \tilde{M}_\epsilon u, \tilde{N}_\epsilon A_\epsilon u\right) + b_\epsilon\left(\tilde{N}_\epsilon u, \tilde{N}_\epsilon u, \tilde{N}_\epsilon A_\epsilon u\right) \\
&\leq c_4\epsilon^q \left|A_\epsilon^{1/2}\tilde{M}_\epsilon u\right|_\epsilon \left|A_\epsilon\tilde{N}_\epsilon u\right|_\epsilon^2 \\
&+ c_4\epsilon^{1/2}\left(\left|A_\epsilon^{1/2}\tilde{M}_\epsilon u\right|_\epsilon + \left|A_\epsilon^{1/2}\tilde{N}_\epsilon u\right|_\epsilon\right)\left|A_\epsilon\tilde{N}_\epsilon u\right|_\epsilon^2. \qquad (3.28)
\end{aligned}
$$

Tem-se, portanto, a seguinte estimativa

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left|A_\epsilon^{1/2}\tilde{N}_\epsilon u\right|_\epsilon^2 + \mu\left|A_\epsilon\tilde{N}_\epsilon u\right|_\epsilon^2 &\leq \frac{1}{2\mu}\left|\tilde{N}_\epsilon f\right|_\epsilon^2 + \frac{\mu}{2}\left|A_\epsilon\tilde{N}_\epsilon u\right|_\epsilon^2 + \left[c_4\epsilon^q\left|A_\epsilon^{1/2}\tilde{M}_\epsilon u\right|_\epsilon \left|A_\epsilon\tilde{N}_\epsilon u\right|_\epsilon^2\right. \\
&+ \left. c_4\epsilon^{1/2}\left(\left|A_\epsilon^{1/2}\tilde{M}_\epsilon u\right|_\epsilon + \left|A_\epsilon^{1/2}\tilde{N}_\epsilon u\right|_\epsilon\right)\left|A_\epsilon\tilde{N}_\epsilon u\right|_\epsilon^2\right].
\end{aligned}
$$

Como $0 < \epsilon < 1$ e $0 < q < \frac{1}{2}$, pode-se afirmar que $\epsilon^{1/2} < \epsilon^q$, já que

$$
0 < q < \frac{1}{2} \Rightarrow q\ln\epsilon > \frac{1}{2}\ln\epsilon \Rightarrow \ln\epsilon^q > \ln\epsilon^{1/2} \Rightarrow \epsilon^q > \epsilon^{1/2},
$$

pois $\ln \epsilon < 0$. Assim,

$$\begin{aligned} c_4\epsilon^q \left|A_\epsilon^{1/2}\tilde{M}_\epsilon u\right|_\epsilon \left|A_\epsilon\tilde{N}_\epsilon u\right|_\epsilon^2 &+ c_4\epsilon^{1/2}\left(\left|A_\epsilon^{1/2}\tilde{M}_\epsilon u\right|_\epsilon + \left|A_\epsilon^{1/2}\tilde{N}_\epsilon u\right|_\epsilon\right)\left|A_\epsilon\tilde{N}_\epsilon u\right|_\epsilon^2 \\ &< c_4\epsilon^q \left|A_\epsilon^{1/2}\tilde{M}_\epsilon u\right|_\epsilon \left|A_\epsilon\tilde{N}_\epsilon u\right|_\epsilon^2 \\ &+ c_4\epsilon^q\left(\left|A_\epsilon^{1/2}\tilde{M}_\epsilon u\right|_\epsilon + \left|A_\epsilon^{1/2}\tilde{N}_\epsilon u\right|_\epsilon\right)\left|A_\epsilon\tilde{N}_\epsilon u\right|_\epsilon^2. \end{aligned} \tag{3.29}$$

Somando $c_4\epsilon^q \left|A_\epsilon^{1/2}\tilde{N}_\epsilon u\right|_\epsilon \left|A_\epsilon\tilde{N}_\epsilon u\right|_\epsilon^2$, o qual é um valor positivo, na última expressão acima, obtem-se

$$\frac{d}{dt}\left|A_\epsilon^{1/2}\tilde{N}_\epsilon u\right|_\epsilon^2 + \left[\mu - 4c_4\epsilon^q\left(\left|A_\epsilon^{1/2}\tilde{M}_\epsilon u\right|_\epsilon + \left|A_\epsilon^{1/2}\tilde{N}_\epsilon u\right|_\epsilon\right)\right]\left|A_\epsilon\tilde{N}_\epsilon u\right|_\epsilon^2 \leq \frac{1}{\mu}\left|\tilde{N}_\epsilon f\right|_\epsilon^2. \tag{3.30}$$

Observe que, do item (ii) do Lema 2.3.1,

$$\begin{aligned} \left|A_\epsilon^{1/2}u(t)\right|_\epsilon^2 &= \left|\tilde{M}_\epsilon A_\epsilon^{1/2}u(t)\right|_\epsilon^2 + \left|\tilde{N}_\epsilon A_\epsilon^{1/2}u(t)\right|_\epsilon^2 \\ &= \left|A_\epsilon^{1/2}\tilde{M}_\epsilon u(t)\right|_\epsilon^2 + \left|A_\epsilon^{1/2}\tilde{N}_\epsilon u(t)\right|_\epsilon^2, \end{aligned}$$

para $t \in [0, T^\sigma(\epsilon))$ e, pela desigualdade do teorema 1.3.2,

$$\begin{aligned} \left|A_\epsilon^{1/2}\tilde{M}_\epsilon u(t)\right|_\epsilon + \left|A_\epsilon^{1/2}\tilde{N}_\epsilon u(t)\right|_\epsilon &\leq \sqrt{2}\,\sqrt{\left(\left|A_\epsilon^{1/2}\tilde{M}_\epsilon u(t)\right|_\epsilon^2 + \left|A_\epsilon^{1/2}\tilde{N}_\epsilon u(t)\right|_\epsilon^2\right)} \\ &= \sqrt{2}\,\sqrt{\left|A_\epsilon^{1/2}u(t)\right|_\epsilon^2} \\ &= \sqrt{2}\,\left|A_\epsilon^{1/2}u(t)\right|_\epsilon. \end{aligned} \tag{3.31}$$

Mas, de (3.14),

$$\left|A_\epsilon^{1/2}u(t)\right|_\epsilon \leq \sqrt{\sigma}R_0(\epsilon),$$

ou seja,

$$\left|A_\epsilon^{1/2}\tilde{M}_\epsilon u(t)\right|_\epsilon + \left|A_\epsilon^{1/2}\tilde{N}_\epsilon u(t)\right|_\epsilon \leq \sqrt{2}\,\sqrt{\sigma}R_0(\epsilon). \tag{3.32}$$

Assim,

$$\mu - 4c_4\epsilon^q\left(\left|A_\epsilon^{1/2}\tilde{M}_\epsilon u\right|_\epsilon + \left|A_\epsilon^{1/2}\tilde{N}_\epsilon u\right|_\epsilon\right) \geq \mu - 4c_4\epsilon^q\sqrt{2}\,\sqrt{\sigma}R_0(\epsilon), \tag{3.33}$$

isto é,

$$\frac{d}{dt}\left|A_\epsilon^{1/2}\tilde{N}_\epsilon u\right|_\epsilon^2 + \left[\mu - 4c_4\epsilon^q\sqrt{2\sigma}R_0(\epsilon)\right]\left|A_\epsilon\tilde{N}_\epsilon u\right|_\epsilon^2 \leq \frac{1}{\mu}\left|\tilde{N}_\epsilon f\right|_\epsilon^2. \tag{3.34}$$

A partir deste momento, usando a hipótese

$$\lim_{\epsilon\to 0}\epsilon^{2q}\left(\left|A_\epsilon^{1/2}u_0\right|_\epsilon^2 + |f|_\epsilon^2\right) = \lim_{\epsilon\to 0}\epsilon^{2q}R_0^2(\epsilon) = 0, \tag{3.35}$$

pode-se afirmar que

$$\lim_{\epsilon\to 0}\left(\mu - 4c_4\epsilon^q\sqrt{2\sigma}R_0(\epsilon)\right) = \mu > 0, \tag{3.36}$$

ou seja, existe um $\epsilon_1 > 0$ tal que para todo $0 < \epsilon < \epsilon_1$,

$$\mu - 4c_4\epsilon^q\sqrt{2\sigma}R_0(\epsilon) \leq \frac{\mu}{2}. \tag{3.37}$$

Substituindo em (3.34),

$$\frac{d}{dt}\left|A_\epsilon^{1/2}\tilde{N}_\epsilon u\right|_\epsilon^2 + \frac{\mu}{2}\left|A_\epsilon\tilde{N}_\epsilon u\right|_\epsilon^2 \leq \frac{1}{\mu}\left|\tilde{N}_\epsilon f\right|_\epsilon^2, \tag{3.38}$$

para todo $0 < \epsilon < \epsilon_1$ e $0 \leq t < T^\sigma(\epsilon)$.

Pelo corolário 2.4.3, tem-se

$$\left|A_\epsilon^{1/2}\tilde{N}_\epsilon u\right|_\epsilon^2 \leq \epsilon^2\left|A_\epsilon\tilde{N}_\epsilon u\right|_\epsilon^2, \tag{3.39}$$

e portanto,

$$\frac{d}{dt}\left|A_\epsilon^{1/2}\tilde{N}_\epsilon u\right|_\epsilon^2 + \frac{\mu}{2\epsilon^2}\left|A_\epsilon^{1/2}\tilde{N}_\epsilon u\right|_\epsilon^2 \leq \frac{1}{\mu}\left|\tilde{N}_\epsilon f\right|_\epsilon^2. \tag{3.40}$$

Agora, aplicando a 1ª versão da desigualdade de Gronwall (teorema 1.3.3) para as funções

$$\eta(t) = \left|A_\epsilon^{1/2}\tilde{N}_\epsilon u\right|_\epsilon^2, \quad \phi(t) = -\frac{\mu}{2\epsilon^2} \quad \text{e} \quad \psi(t) = \frac{1}{\mu}\left|\tilde{N}_\epsilon f\right|_\epsilon^2, \tag{3.41}$$

obtem-se

$$
\begin{aligned}
\left|A_\epsilon^{1/2}\tilde{N}_\epsilon u\right|_\epsilon^2 &\le e^{\int_0^t -\frac{\mu}{2\epsilon^2}\ ds}\left[\left|A_\epsilon^{1/2}\tilde{N}_\epsilon u(0)\right|_\epsilon^2 + \int_0^t \frac{1}{\mu}\left|\tilde{N}_\epsilon f\right|_\epsilon^2\ ds\right] \\
&= e^{-\frac{\mu t}{2\epsilon^2}}\left[\underbrace{\left|A_\epsilon^{1/2}\tilde{N}_\epsilon u_0\right|_\epsilon^2}_{=\ b_0^2(\epsilon)} + \frac{1}{\mu}\int_0^t \underbrace{\left|\tilde{N}_\epsilon f\right|_\epsilon^2}_{=\ \beta^2(\epsilon)}\ ds\right] \\
&= e^{-\frac{\mu t}{2\epsilon^2}} b_0^2(\epsilon) + \frac{e^{-\frac{\mu t}{2\epsilon^2}}}{\mu}\int_0^t \beta^2(\epsilon)\ ds \qquad (3.42)
\end{aligned}
$$

A integral envolvendo $\beta^2(\epsilon)$ acima deve ser calculada com cuidado. Apesar da intuição indicar que tal integral é igual a $t\beta^2(\epsilon)$, a rigor, é preciso garantir uma limitação para $\left|\tilde{N}_\epsilon f\right|_\epsilon^2$ de modo que esta função não dependa do tempo t. Por definição, $\tilde{N}_\epsilon f = f - \tilde{M}_\epsilon f$, logo

$$\left|\tilde{N}_\epsilon f\right|_{L^\infty(0,T,H_\epsilon)} \le |f|_{L^\infty(0,T,H_\epsilon)} + \left|\tilde{M}_\epsilon f\right|_{L^\infty(0,T,H_\epsilon)}. \qquad (3.43)$$

Como $f \in L^\infty(0,+\infty,H_\epsilon)$, seque que $|f|_{L^\infty(0,T,H_\epsilon)}$ é finito. Ainda,

$$
\begin{aligned}
\left|\tilde{M}_\epsilon f\right|_\epsilon^2 &= \int_{\Omega_\epsilon} \mid \tilde{M}_\epsilon f(x_1,x_2,x_3,t)\mid^2\ dx_1dx_2dx_3 \\
&= \int_0^\epsilon \left(\int_\omega \mid \tilde{M}_\epsilon f(x_1,x_2,x_3,t)\mid^2\ dx_1dx_2\right) dx_3 \\
&= \epsilon\int_\omega \mid \tilde{M}_\epsilon f(x_1,x_2,x_3,t)\mid^2\ dx_1dx_2 \\
&= \epsilon\int_\omega \left|\frac{1}{\epsilon}\int_0^\epsilon f(x_1,x_2,s,t)\ ds\right|^2\ dx_1dx_2. \qquad (3.44)
\end{aligned}
$$

Pela desigualdade de Jensen (teorema 1.3.5), escolhendo $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R};\ g(u)=u^2$, a qual é uma função convexa, e $U=(0,\epsilon)$, tem-se

$$
\begin{aligned}
g\left(\frac{1}{\epsilon}\int_0^\epsilon f(x_1,x_2,s,t)\ ds\right) &\le \frac{1}{\epsilon}\int_0^\epsilon g\left(f(x_1,x_2,s,t)\right)\ ds \\
\left(\frac{1}{\epsilon}\int_0^\epsilon f(x_1,x_2,s,t)\ ds\right)^2 &\le \frac{1}{\epsilon}\int_0^\epsilon f^2(x_1,x_2,s,t)\ ds.
\end{aligned}
$$

Voltando em (3.44),

$$\epsilon\int_\omega \left|\frac{1}{\epsilon}\int_0^\epsilon f(x_1,x_2,s,t)\ ds\right|^2\ dx_1dx_2 \le \epsilon\int_\omega \frac{1}{\epsilon}\left(\int_0^\epsilon f^2(x_1,x_2,s,t)\ ds\right) dx_1dx_2$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_{\Omega_\epsilon} f^2 \; dx_1 dx_2 dx_3 \\
&= |f|_\epsilon^2 \,,
\end{aligned}
$$

ou seja,

$$\left|\tilde{M}_\epsilon f\right|_\epsilon^2 \;\leq\; |f|_\epsilon^2 \;\leq\; |f|_{L^\infty(0,T,H_\epsilon)} \,. \tag{3.45}$$

Por (3.43),

$$\left|\tilde{N}_\epsilon f\right|_{L^\infty(0,T,H_\epsilon)} \leq 2\,|f|_{L^\infty(0,T,H_\epsilon)} \,,$$

isto é,

$$\left|\tilde{N}_\epsilon f\right|_\epsilon \leq \left|\tilde{N}_\epsilon f\right|_{L^\infty(0,T,H_\epsilon)} \leq 2\,|f|_{L^\infty(0,T,H_\epsilon)} \,,$$

e portanto $\left|\tilde{N}_\epsilon f\right|_\epsilon$ é finito com uma limitação que independe de t, já que $f \in L^\infty(0,+\infty,H_\epsilon)$.

Assim, de (3.42),

$$\left|A_\epsilon^{1/2}\tilde{N}_\epsilon u\right|_\epsilon^2 \leq e^{-\frac{\mu t}{2\epsilon^2}} b_0^2(\epsilon) + \frac{e^{-\frac{\mu t}{2\epsilon^2}}}{\mu} t\beta^2(\epsilon) \tag{3.46}$$

Note que

$$\frac{e^{-\frac{\mu t}{2\epsilon^2}}}{\mu} t\beta^2(\epsilon) \;\leq\; \frac{2\epsilon^2}{\mu^2}\beta^2(\epsilon) \;\Leftrightarrow\; \frac{e^{-\frac{\mu t}{2\epsilon^2}}}{\mu} t \;\leq\; \frac{2\epsilon^2}{\mu^2} \;\Leftrightarrow\; t \;\leq\; \frac{2\epsilon^2}{\mu} e^{\frac{\mu t}{2\epsilon^2}}. \tag{3.47}$$

Isto siginifica que, para algum t, com $t \;\leq\; \dfrac{2\epsilon^2}{\mu} e^{\frac{\mu t}{2\epsilon^2}}$, vale que

$$\frac{e^{-\frac{\mu t}{2\epsilon^2}}}{\mu} t\beta^2(\epsilon) \;\leq\; \frac{2\epsilon^2}{\mu^2}\beta^2(\epsilon),$$

e, substituindo em (3.46),

$$\left|A_\epsilon^{1/2}\tilde{N}_\epsilon u\right|_\epsilon^2 \leq b_0^2(\epsilon) e^{-\frac{\mu t}{2\epsilon^2}} + \frac{2\epsilon^2}{\mu^2}\beta^2(\epsilon), \tag{3.48}$$

o que prova o item (i) do lema.

Integrando de 0 à t a expressão em (3.40), tem-se

$$
\begin{aligned}
\left|A_\epsilon^{1/2}\tilde{N}_\epsilon u\right|_\epsilon^2\Big|_0^t + \frac{\mu}{2\epsilon^2}\int_0^t \left|A_\epsilon^{1/2}\tilde{N}_\epsilon u(s)\right|_\epsilon^2 \, ds \;&\le\; \frac{1}{2\mu}\int_0^t \left|\tilde{N}_\epsilon f\right|_\epsilon^2 \, ds \\
\left|A_\epsilon^{1/2}\tilde{N}_\epsilon u(t)\right|_\epsilon^2 - \underbrace{\left|A_\epsilon^{1/2}\tilde{N}_\epsilon u(0)\right|_\epsilon^2}_{=\ b_0^2(\epsilon)} + \frac{\mu}{2\epsilon^2}\int_0^t \left|A_\epsilon^{1/2}\tilde{N}_\epsilon u(s)\right|_\epsilon^2 \, ds \;&\le\; \frac{1}{\mu}t\underbrace{\left|\tilde{N}_\epsilon f\right|_\epsilon^2}_{=\ \beta^2(\epsilon)} \\
\left|A_\epsilon^{1/2}\tilde{N}_\epsilon u(t)\right|_\epsilon^2 + \frac{\mu}{2\epsilon^2}\int_0^t \left|A_\epsilon^{1/2}\tilde{N}_\epsilon u(s)\right|_\epsilon^2 \, ds \;&\le\; b_0^2(\epsilon) + \frac{1}{\mu}t\beta^2(\epsilon).
\end{aligned}
$$

Como

$$
\frac{\mu}{2\epsilon^2}\int_0^t \left|A_\epsilon^{1/2}\tilde{N}_\epsilon u(s)\right|_\epsilon^2 \, ds \;\le\; \left|A_\epsilon^{1/2}\tilde{N}_\epsilon u(t)\right|_\epsilon^2 + \frac{\mu}{2\epsilon^2}\int_0^t \left|A_\epsilon^{1/2}\tilde{N}_\epsilon u(s)\right|_\epsilon^2 \, ds,
$$

obtem-se

$$
\frac{\mu}{2\epsilon^2}\int_0^t \left|A_\epsilon^{1/2}\tilde{N}_\epsilon u(s)\right|_\epsilon^2 \, ds \;\le\; b_0^2(\epsilon) + \frac{1}{\mu}t\beta^2(\epsilon), \tag{3.49}
$$

ou seja,

$$
\int_0^t \left|A_\epsilon^{1/2}\tilde{N}_\epsilon u(s)\right|_\epsilon^2 \, ds \;\le\; \frac{2\epsilon^2}{\mu}b_0^2(\epsilon) + \frac{2\epsilon^2}{\mu^2}t\beta^2(\epsilon), \tag{3.50}
$$

para todo $0 < \epsilon \le \epsilon_1$ e $0 < t < T^\sigma(\epsilon)$.

Agora, integrando (3.38) de 0 à t,

$$
\begin{aligned}
\left|A_\epsilon^{1/2}\tilde{N}_\epsilon u\right|_\epsilon^2\Big|_0^t + \frac{\mu}{2}\int_0^t \left|A_\epsilon\tilde{N}_\epsilon u(s)\right|_\epsilon^2 \, ds \;&\le\; \frac{1}{\mu}\int_0^t \left|\tilde{N}_\epsilon f\right|_\epsilon^2 \, ds \\
\left|A_\epsilon^{1/2}\tilde{N}_\epsilon u(t)\right|_\epsilon^2 - \underbrace{\left|A_\epsilon^{1/2}\tilde{N}_\epsilon u(0)\right|_\epsilon^2}_{=\ b_0^2(\epsilon)} + \frac{\mu}{2}\int_0^t \left|A_\epsilon\tilde{N}_\epsilon u(s)\right|_\epsilon^2 \, ds \;&\le\; \frac{1}{\mu}t\underbrace{\left|\tilde{N}_\epsilon f\right|_\epsilon^2}_{=\ \beta^2(\epsilon)} \\
\left|A_\epsilon^{1/2}\tilde{N}_\epsilon u(t)\right|_\epsilon^2 + \frac{\mu}{2}\int_0^t \left|A_\epsilon\tilde{N}_\epsilon u(s)\right|_\epsilon^2 \, ds \;&\le\; b_0^2(\epsilon) + \frac{1}{\mu}t\beta^2(\epsilon).
\end{aligned}
$$

Daí,

$$
\frac{\mu}{2}\int_0^t \left|A_\epsilon\tilde{N}_\epsilon u(s)\right|_\epsilon^2 \, ds \le b_0^2(\epsilon) + \frac{1}{\mu}t\beta^2(\epsilon), \tag{3.51}
$$

ou seja,

$$
\int_0^t \left|A_\epsilon\tilde{N}_\epsilon u(s)\right|_\epsilon^2 \, ds \le \frac{2}{\mu}b_0^2(\epsilon) + \frac{2}{\mu^2}t\beta^2(\epsilon), \tag{3.52}
$$

para todo $0 < \epsilon \le \epsilon_1$ e $0 < t < T^\sigma(\epsilon)$, provando assim o item (ii) do lema.

Aplicando a desigualdade de Hölder (teorema 1.3.7) com $p = q = 2$ para as funções

$u = \left|A_\epsilon^{1/2}\tilde{N}_\epsilon u\right|_\epsilon^3$ e $v = \left|A_\epsilon \tilde{N}_\epsilon u\right|_\epsilon$, tem-se

$$\underbrace{\int_0^t \left|A_\epsilon^{1/2}\tilde{N}_\epsilon u(s)\right|_\epsilon^3 \left|A_\epsilon \tilde{N}_\epsilon u(s)\right|_\epsilon \, ds}_{=\,\Psi} \leq \left(\int_0^t \left|A_\epsilon^{1/2}\tilde{N}_\epsilon u(s)\right|_\epsilon^6 \, ds\right)^{1/2} \left(\int_0^t \left|A_\epsilon \tilde{N}_\epsilon u(s)\right|_\epsilon \, ds\right)^{1/2}.$$

Observe que

$$\begin{aligned}
\left(\int_0^t \left|A_\epsilon^{1/2}\tilde{N}_\epsilon u(s)\right|_\epsilon^6 \, ds\right)^{1/2} &= \left(\int_0^t \left|A_\epsilon^{1/2}\tilde{N}_\epsilon u(s)\right|_\epsilon^4 \left|A_\epsilon^{1/2}\tilde{N}_\epsilon u(s)\right|_\epsilon^2 \, ds\right)^{1/2} \\
&\leq \left(\int_0^t \sup_{0\leq s\leq t}\left(\left|A_\epsilon^{1/2}\tilde{N}_\epsilon u(s)\right|_\epsilon^4\right) \left|A_\epsilon^{1/2}\tilde{N}_\epsilon u(s)\right|_\epsilon^2 \, ds\right)^{1/2} \\
&= \left(\sup_{0\leq s\leq t}\left|A_\epsilon^{1/2}\tilde{N}_\epsilon u(s)\right|_\epsilon^4\right)^{1/2} \left(\int_0^t \left|A_\epsilon^{1/2}\tilde{N}_\epsilon u(s)\right|_\epsilon^2 \, ds\right)^{1/2} \\
&= \sup_{0\leq s\leq t}\left|A_\epsilon^{1/2}\tilde{N}_\epsilon u(s)\right|_\epsilon^2 \left(\int_0^t \left|A_\epsilon^{1/2}\tilde{N}_\epsilon u(s)\right|_\epsilon^2 \, ds\right)^{1/2}.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\Psi \leq \sup_{0\leq s\leq t}\left|A_\epsilon^{1/2}\tilde{N}_\epsilon u(s)\right|_\epsilon^2 \left(\int_0^t \left|A_\epsilon^{1/2}\tilde{N}_\epsilon u(s)\right|_\epsilon^2 \, ds\right)^{1/2} \left(\int_0^t \left|A_\epsilon \tilde{N}_\epsilon u(s)\right|_\epsilon \, ds\right)^{1/2}.$$

Note que é possível tomar o supremo da função $\left|A_\epsilon^{1/2}\tilde{N}_\epsilon u\right|_\epsilon^4$, pois vale (3.48).

Substituindo as estimativas encontradas em (3.48), (3.50) e (3.52) na expressão acima, obtem-se

$$\begin{aligned}
\Psi &\leq \sup_{0\leq s\leq t}\left(b_0^2(\epsilon)e^{-\frac{\mu s}{2\epsilon^2}} + \frac{2\epsilon^2}{\mu^2}\beta^2(\epsilon)\right)\left(\frac{2\epsilon^2}{\mu}b_0^2(\epsilon) + \frac{2\epsilon^2}{\mu^2}t\beta^2(\epsilon)\right)^{1/2}\left(\frac{2}{\mu}b_0^2(\epsilon) + \frac{2}{\mu^2}t\beta^2(\epsilon)\right)^{1/2}, \\
&= \left(b_0^2(\epsilon)\sup_{0\leq s\leq t} e^{-\frac{\mu s}{2\epsilon^2}} + \sup_{0\leq s\leq t}\frac{2\epsilon^2}{\mu^2}\beta^2(\epsilon)\right)\left(\frac{2\epsilon^2}{\mu}b_0^2(\epsilon) + \frac{2\epsilon^2}{\mu^2}t\beta^2(\epsilon)\right)^{1/2}\left(\frac{2}{\mu}b_0^2(\epsilon) + \frac{2}{\mu^2}t\beta^2(\epsilon)\right)^{1/2}
\end{aligned}$$

e como $\sup\limits_{0\leq s\leq t} e^{-\frac{\mu s}{2\epsilon^2}} = 1$,

$$\begin{aligned}
\Psi &\leq \left(b_0^2(\epsilon) + \frac{2\epsilon^2}{\mu^2}\beta^2(\epsilon)\right)\left(\frac{2\epsilon^2}{\mu}b_0^2(\epsilon) + \frac{2\epsilon^2}{\mu^2}t\beta^2(\epsilon)\right)^{1/2}\left(\frac{2}{\mu}b_0^2(\epsilon) + \frac{2}{\mu^2}t\beta^2(\epsilon)\right)^{1/2} \\
&= \left(b_0^2(\epsilon) + \frac{2\epsilon^2}{\mu^2}\beta^2(\epsilon)\right)\left[\epsilon^2\left(\frac{2}{\mu}b_0^2(\epsilon) + \frac{2}{\mu^2}t\beta^2(\epsilon)\right)\right]^{1/2}\left(\frac{2}{\mu}b_0^2(\epsilon) + \frac{2}{\mu^2}t\beta^2(\epsilon)\right)^{1/2}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \left(b_0^2(\epsilon)+\frac{2\epsilon^2}{\mu^2}\beta^2(\epsilon)\right)\epsilon\left(\frac{2}{\mu}b_0^2(\epsilon)+\frac{2}{\mu^2}t\beta^2(\epsilon)\right)\\
&\leq 4\epsilon\left(b_0^2(\epsilon)+\frac{2\epsilon^2}{\mu^2}\beta^2(\epsilon)\right)\left(\frac{1}{\mu}b_0^2(\epsilon)+\frac{1}{\mu^2}t\beta^2(\epsilon)\right). \qquad (3.53)
\end{aligned}
$$

Fazendo

$$
c_5(\mu)=\left[2\max(1,\frac{1}{\mu^2},\frac{1}{\mu})\right]^2,
$$

conclui-se que

$$
\Psi \leq c_5(\mu)\epsilon\left(b_0^2(\epsilon)+\epsilon^2\beta^2(\epsilon)\right)\left(b_0^2(\epsilon)+t\beta^2(\epsilon)\right), \qquad (3.54)
$$

o que prova o item (iii) e, portanto, o lema está demonstrado.

$\blacksquare$

Lema 3.1.2 (Estimativas para $\tilde{M}_\epsilon u$) *Considerando as condições (FF) e (FP), suponha que $0 < q < \frac{1}{2}$ e*

$$
\lim_{\epsilon\to 0}\epsilon^{2q}\left(\left|A_\epsilon^{1/2}u_0\right|_\epsilon^2+|f|_\epsilon^2\right)=0. \qquad (3.55)
$$

Então, existe $\epsilon_1=\epsilon_1(\mu)>0$, tal que para todo ϵ, com $0<\epsilon\leq\epsilon_1$, existem $T^\sigma(\epsilon)>0$ e uma constante positiva $c_{10}(\mu)$, independente de ϵ, a partir dos quais vale:

(i) $\left|\tilde{M}_\epsilon u(t)\right|_\epsilon^2 \leq a_0^2(\epsilon)e^{-\mu\lambda_1 t}+\dfrac{\alpha^2(\epsilon)}{\mu^2\lambda_1^3}+c_6(\mu)\epsilon R_n^4(\epsilon)(1+t);$

(ii) $\displaystyle\int_0^t\left|A_\epsilon^{1/2}\tilde{M}_\epsilon u(s)\right|_\epsilon^2\,ds \leq \frac{a_0^2(\epsilon)}{\mu\lambda_1}+\frac{2\alpha^2(\epsilon)t}{\mu^2\lambda_1^2}+c_6(\mu)\epsilon R_n^4(\epsilon)(1+t);$

(iii) $\left|A_\epsilon^{1/2}\tilde{M}_\epsilon u(t)\right|_\epsilon^2 \leq a_0^2(\epsilon)e^{-\mu\lambda_1^2 t}+\dfrac{2\alpha^2(\epsilon)}{\mu^2\lambda_1}+c_8(\mu)\epsilon R_n^4(\epsilon)(1+t);$

(iv) $\displaystyle\int_0^t\left|A_\epsilon\tilde{M}_\epsilon u(s)\right|_\epsilon^2\,ds \leq \frac{2a_0^2(\epsilon)t}{\mu}+c_8(\mu)\epsilon R_n^4(\epsilon)(1+t).$

Demonstração: Da formulação fraca para $\tilde{M}_\epsilon$, substituindo v por u, tem-se

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left(\tilde{M}_\epsilon u,\tilde{M}_\epsilon u\right)_\epsilon &+ \mu\left(A_\epsilon^{1/2}\tilde{M}_\epsilon u,A_\epsilon^{1/2}\tilde{M}_\epsilon u\right)_\epsilon+b_\epsilon\left(\tilde{M}_\epsilon u,\tilde{M}_\epsilon u,\tilde{M}_\epsilon u\right)\\
&+ b_\epsilon\left(\tilde{N}_\epsilon u,\tilde{N}_\epsilon u,\tilde{M}_\epsilon u\right)=\left(\tilde{M}_\epsilon f,\tilde{M}_\epsilon u\right)_\epsilon.
\end{aligned}
$$

Do teorema (1.2.1), é possível afirmar que

$$
b_\epsilon\left(\tilde{M}_\epsilon u,\tilde{M}_\epsilon u,\tilde{M}_\epsilon u\right)=0, \qquad (3.56)
$$

e, pela desigualdade de Cauchy-Schwarz,

$$\left(\tilde{M}_\epsilon f, \tilde{M}_\epsilon u\right)_\epsilon \leq \left|\tilde{M}_\epsilon f\right|_\epsilon \left|\tilde{M}_\epsilon u\right|_\epsilon . \tag{3.57}$$

Assim como foi feito no lema anterior para $\tilde{N}_\epsilon$, o termo com a derivada em relação ao tempo é tal que, antes de substituir,

$$\frac{d}{dt}\left(\tilde{M}_\epsilon u, \tilde{M}_\epsilon v\right)_\epsilon = \left(\frac{d}{dt}\tilde{M}_\epsilon u, \tilde{M}_\epsilon v\right)_\epsilon ,$$

pois $v \in V_\epsilon$ e não depende de t. Mas,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(\tilde{M}_\epsilon u, \tilde{M}_\epsilon u\right)_\epsilon &= \left(\frac{d}{dt}\tilde{M}_\epsilon u, \tilde{M}_\epsilon u\right)_\epsilon + \left(\tilde{M}_\epsilon u, \frac{d}{dt}\tilde{M}_\epsilon u\right)_\epsilon \\ &= 2\left(\frac{d}{dt}\tilde{M}_\epsilon u, \tilde{M}_\epsilon u\right)_\epsilon , \end{aligned} \tag{3.58}$$

ou seja,

$$\frac{d}{dt}\left(\tilde{M}_\epsilon u, \tilde{M}_\epsilon u\right)_\epsilon = \left(\frac{d}{dt}\tilde{M}_\epsilon u, \tilde{M}_\epsilon u\right)_\epsilon = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\tilde{M}_\epsilon u, \tilde{M}_\epsilon u\right)_\epsilon = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left|\tilde{M}_\epsilon u\right|_\epsilon^2 . \tag{3.59}$$

Ainda,

$$\mu\left(A_\epsilon^{1/2}\tilde{M}_\epsilon u, A_\epsilon^{1/2}\tilde{M}_\epsilon u\right)_\epsilon = \mu\left|A_\epsilon^{1/2}\tilde{M}_\epsilon u\right|_\epsilon^2 . \tag{3.60}$$

Logo,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left|\tilde{M}_\epsilon u\right|_\epsilon^2 + \mu\left|A_\epsilon^{1/2}\tilde{M}_\epsilon u\right|_\epsilon^2 + b_\epsilon\left(\tilde{N}_\epsilon u, \tilde{N}_\epsilon u, \tilde{M}_\epsilon u\right) \leq \left|\tilde{M}_\epsilon f\right|_\epsilon \left|\tilde{M}_\epsilon u\right|_\epsilon . \tag{3.61}$$

Do lema 2.4.2, obtem-se

$$\begin{aligned} b_\epsilon\left(\tilde{N}_\epsilon u, \tilde{N}_\epsilon u, \tilde{M}_\epsilon u\right) &\leq c_4 \left\|\tilde{N}_\epsilon u\right\|_\epsilon^{3/2} \left|A_\epsilon \tilde{N}_\epsilon u\right|_\epsilon^{1/2} \left|\tilde{M}_\epsilon u\right|_\epsilon \\ &= c_4 \left|A_\epsilon^{1/2}\tilde{N}_\epsilon u\right|_\epsilon^{3/2} \left|A_\epsilon \tilde{N}_\epsilon u\right|_\epsilon^{1/2} \left|\tilde{M}_\epsilon u\right|_\epsilon \end{aligned} \tag{3.62}$$

onde a última igualdade acima vem de (3.27). Substituindo em (3.61),

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left|\tilde{M}_\epsilon u\right|_\epsilon^2 + \mu\left|A_\epsilon^{1/2}\tilde{M}_\epsilon u\right|_\epsilon^2 \leq \left|\tilde{M}_\epsilon f\right|_\epsilon \left|\tilde{M}_\epsilon u\right|_\epsilon + c_4 \left|A_\epsilon^{1/2}\tilde{N}_\epsilon u\right|_\epsilon^{3/2} \left|A_\epsilon \tilde{N}_\epsilon u\right|_\epsilon^{1/2} \left|\tilde{M}_\epsilon u\right|_\epsilon . \tag{3.63}$$

A desigualdade de Poincarè, neste contexto, afirma que

$$\left|\tilde{M}_\epsilon u\right|_\epsilon \leq \frac{1}{\lambda_1}\left|A_\epsilon^{1/2}\tilde{M}_\epsilon u\right|_\epsilon, \tag{3.64}$$

onde λ_1 é o primeiro autovalor (o menor) do operador de Stokes. Assim,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left|\tilde{M}_\epsilon u\right|_\epsilon^2 + 2\mu\left|A_\epsilon^{1/2}\tilde{M}_\epsilon u\right|_\epsilon^2 &\leq \frac{2}{\lambda_1}\left|\tilde{M}_\epsilon f\right|_\epsilon\left|A_\epsilon^{1/2}\tilde{M}_\epsilon u\right|_\epsilon \\ &+ \frac{2c_4}{\lambda_1}\left|A_\epsilon^{1/2}\tilde{N}_\epsilon u\right|_\epsilon^{3/2}\left|A_\epsilon\tilde{N}_\epsilon u\right|_\epsilon^{1/2}\left|A_\epsilon^{1/2}\tilde{M}_\epsilon u\right|_\epsilon.\end{aligned}$$

A partir da desigualdade do teorema 1.3.1, pode-se estimar que, para $\delta > 0$,

$$\frac{2}{\lambda_1}\left|\tilde{M}_\epsilon f\right|_\epsilon\left|A_\epsilon^{1/2}\tilde{M}_\epsilon u\right|_\epsilon \leq 2\delta\left|A_\epsilon^{1/2}\tilde{M}_\epsilon u\right|_\epsilon^2 + \frac{1}{2\delta\lambda_1^2}\left|\tilde{M}_\epsilon f\right|_\epsilon^2,$$

e,

$$\begin{aligned}\frac{2c_4}{\lambda_1}\left|A_\epsilon^{1/2}\tilde{N}_\epsilon u\right|_\epsilon^{3/2}\left|A_\epsilon\tilde{N}_\epsilon u\right|_\epsilon^{1/2}\left|A_\epsilon^{1/2}\tilde{M}_\epsilon u\right|_\epsilon &\leq \frac{2}{4\delta}\left(\frac{c_4}{\lambda_1}\left|A_\epsilon^{1/2}\tilde{N}_\epsilon u\right|_\epsilon^{3/2}\left|A_\epsilon\tilde{N}_\epsilon u\right|_\epsilon^{1/2}\right)^2 \\ &+ 2\delta\left|A_\epsilon^{1/2}\tilde{M}_\epsilon u\right|_\epsilon.\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left|\tilde{M}_\epsilon u\right|_\epsilon^2 + 2\mu\left|A_\epsilon^{1/2}\tilde{M}_\epsilon u\right|_\epsilon^2 &\leq 2\delta\left|A_\epsilon^{1/2}\tilde{M}_\epsilon u\right|_\epsilon^2 + \frac{1}{2\delta\lambda_1^2}\left|\tilde{M}_\epsilon f\right|_\epsilon^2 \\ &+ \frac{2}{4\delta}\left(\frac{c_4}{\lambda_1}\left|A_\epsilon^{1/2}\tilde{N}_\epsilon u\right|_\epsilon^{3/2}\left|A_\epsilon\tilde{N}_\epsilon u\right|_\epsilon^{1/2}\right)^2 \\ &+ 2\delta\left|A_\epsilon^{1/2}\tilde{M}_\epsilon u\right|_\epsilon,\end{aligned}$$

isto é,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left|\tilde{M}_\epsilon u\right|_\epsilon^2 + (2\mu - 2\delta - 2\delta)\left|A_\epsilon^{1/2}\tilde{M}_\epsilon u\right|_\epsilon^2 &\leq \frac{1}{2\delta\lambda_1^2}\left|\tilde{M}_\epsilon f\right|_\epsilon^2 \\ &+ \frac{c_4^2}{2\delta\lambda_1^2}\left|A_\epsilon^{1/2}\tilde{N}_\epsilon u\right|_\epsilon^3\left|A_\epsilon\tilde{N}_\epsilon u\right|_\epsilon\end{aligned}$$

Seja δ de forma que $2\mu - 4\delta = \mu$, ou seja, $\delta = \frac{\mu}{4}$. Daí,

$$\frac{d}{dt}\left|\tilde{M}_\epsilon u\right|_\epsilon^2 + \mu\left|A_\epsilon^{1/2}\tilde{M}_\epsilon u\right|_\epsilon^2 \leq \frac{2}{\mu\lambda_1^2}\left|\tilde{M}_\epsilon f\right|_\epsilon^2 + \frac{2c_4^2}{\mu\lambda_1^2}\left|A_\epsilon^{1/2}\tilde{N}_\epsilon u\right|_\epsilon^3\left|A_\epsilon\tilde{N}_\epsilon u\right|_\epsilon. \tag{3.65}$$

De (3.64),

$$\frac{d}{dt}\left|\tilde{M}_\epsilon u\right|_\epsilon^2+\mu\lambda_1\left|\tilde{M}_\epsilon u\right|_\epsilon \quad \leq \quad \frac{2}{\mu\lambda_1^2}\left|\tilde{M}_\epsilon f\right|_\epsilon^2+\frac{2c_4^2}{\mu\lambda_1^2}\left|A_\epsilon^{1/2}\tilde{N}_\epsilon u\right|_\epsilon^3\left|A_\epsilon\tilde{N}_\epsilon u\right|_\epsilon. \tag{3.66}$$

Aplicando a 2ª versão da desigualdade de Gronwall (teorema 1.3.4) para as funções

$$\eta(t)=\left|\tilde{M}_\epsilon u\right|_\epsilon^2,\quad \phi(t)=-\mu\lambda_1 \;\text{ e }\; \psi(t)=\frac{2}{\mu\lambda_1^2}\left|\tilde{M}_\epsilon f\right|_\epsilon^2+\frac{2c_4^2}{\mu\lambda_1^2}\left|A_\epsilon^{1/2}\tilde{N}_\epsilon u\right|_\epsilon^3\left|A_\epsilon\tilde{N}_\epsilon u\right|_\epsilon, \tag{3.67}$$

obtem-se

$$\left|\tilde{M}_\epsilon u(t)\right|_\epsilon^2 \quad \leq \quad \left|\tilde{M}_\epsilon u(0)\right|_\epsilon^2 e^{\int_0^t -\mu\lambda_1\; ds}+H(t), \tag{3.68}$$

onde

$$H(t)=\int_0^t\left(e^{\int_0^t -\mu\lambda_1\; dr+\int_0^s -\mu\lambda_1\; dr}\right)\left(\frac{2}{\mu\lambda_1^2}\left|\tilde{M}_\epsilon f\right|_\epsilon^2+\frac{2c_4^2}{\mu\lambda_1^2}\left|A_\epsilon^{1/2}\tilde{N}_\epsilon u\right|_\epsilon^3\left|A_\epsilon\tilde{N}_\epsilon u\right|_\epsilon\right)\; ds. \tag{3.69}$$

para $0<s<t$. Note que

$$\begin{aligned}
H(t) &= \int_0^t e^{\mu\lambda_1(s-t)}\left(\frac{2}{\mu\lambda_1^2}\left|\tilde{M}_\epsilon f\right|_\epsilon^2+\frac{2c_4^2}{\mu\lambda_1^2}\left|A_\epsilon^{1/2}\tilde{N}_\epsilon u\right|_\epsilon^3\left|A_\epsilon\tilde{N}_\epsilon u\right|_\epsilon\right)\; ds.\\
&= \int_0^t e^{\mu\lambda_1(s-t)}\frac{2}{\mu\lambda_1^2}\left|\tilde{M}_\epsilon f\right|_\epsilon^2\; ds+\int_0^t e^{\mu\lambda_1(s-t)}\frac{2c_4^2}{\mu\lambda_1^2}\left|A_\epsilon^{1/2}\tilde{N}_\epsilon u\right|_\epsilon^3\left|A_\epsilon\tilde{N}_\epsilon u\right|_\epsilon\; ds\\
&= \frac{2}{\mu\lambda_1^2}\left|\tilde{M}_\epsilon f\right|_\epsilon^2\int_0^t e^{\mu\lambda_1(s-t)}\; ds+\frac{2c_4^2}{\mu\lambda_1^2}\int_0^t e^{\mu\lambda_1(s-t)}\left|A_\epsilon^{1/2}\tilde{N}_\epsilon u\right|_\epsilon^3\left|A_\epsilon\tilde{N}_\epsilon u\right|_\epsilon\; ds.
\end{aligned}$$

Como $0<s<t$, $s-t<0$ e assim $e^{\mu\lambda_1(s-t)}\leq 1$. Logo,

$$\frac{2c_4^2}{\mu\lambda_1^2}\int_0^t e^{\mu\lambda_1(s-t)}\left|A_\epsilon^{1/2}\tilde{N}_\epsilon u\right|_\epsilon^3\left|A_\epsilon\tilde{N}_\epsilon u\right|_\epsilon\; ds\leq\frac{2c_4^2}{\mu\lambda_1^2}\int_0^t\left|A_\epsilon^{1/2}\tilde{N}_\epsilon u\right|_\epsilon^3\left|A_\epsilon\tilde{N}_\epsilon u\right|_\epsilon\; ds. \tag{3.70}$$

Agora,

$$\int_0^t e^{\mu\lambda_1(s-t)}\; ds=\left.\frac{e^{\mu\lambda_1(s-t)}}{\mu\lambda_1}\right|_0^t=\frac{1}{\mu\lambda_1}-\frac{e^{-\mu\lambda_1 t}}{\mu\lambda_1}=\frac{1}{\mu\lambda_1}\left(1-e^{-\mu\lambda_1 t}\right). \tag{3.71}$$

Então, como $1-e^{-\mu\lambda_1 t}\leq 1$

$$\frac{1}{\mu\lambda_1}\left(1-e^{-\mu\lambda_1 t}\right)\leq\frac{1}{\mu\lambda_1}. \tag{3.72}$$

Portanto,

$$H(t) \le \frac{1}{\mu^2\lambda_1^3}\left|\tilde{M}_\epsilon f\right|_\epsilon^2 + \frac{2c_4^2}{\mu\lambda_1^2}\int_0^t \left|A_\epsilon^{1/2}\tilde{N}_\epsilon u\right|_\epsilon^3 \left|A_\epsilon\tilde{N}_\epsilon u\right|_\epsilon \, ds. \tag{3.73}$$

Voltando em (3.68),

$$\begin{aligned}\left|\tilde{M}_\epsilon u(t)\right|_\epsilon^2 &\le \left|\tilde{M}_\epsilon u_0\right|_\epsilon^2 e^{-\mu\lambda_1 t} + \frac{1}{\mu^2\lambda_1^3}\left|\tilde{M}_\epsilon f\right|_\epsilon^2 + \frac{2c_4^2}{\mu\lambda_1^2}\int_0^t \left|A_\epsilon^{1/2}\tilde{N}_\epsilon u\right|_\epsilon^3 \left|A_\epsilon\tilde{N}_\epsilon u\right|_\epsilon \, ds \\ &= a_0^2(\epsilon)e^{-\mu\lambda_1 t} + \frac{\alpha^2(\epsilon)}{\mu^2\lambda_1^3} + \frac{2c_4^2}{\mu\lambda_1^2}\int_0^t \left|A_\epsilon^{1/2}\tilde{N}_\epsilon u\right|_\epsilon^3 \left|A_\epsilon\tilde{N}_\epsilon u\right|_\epsilon \, ds. \qquad (3.74)\end{aligned}$$

Do item (iii) do lema 3.1.1,

$$\left|\tilde{M}_\epsilon u(t)\right|_\epsilon^2 \le a_0^2(\epsilon)e^{-\mu\lambda_1 t} + \frac{\alpha^2(\epsilon)}{\mu^2\lambda_1^3} + \frac{2c_4^2}{\mu\lambda_1^2}c_5(\mu)\epsilon\left(b_0^2(\epsilon) + \epsilon^2\beta^2(\epsilon)\right)\left(b_0^2(\epsilon) + t\beta^2(\epsilon)\right). \tag{3.75}$$

Seja

$$R_n^2(\epsilon) = \max(b_0^2(\epsilon), \beta^2(\epsilon)).$$

Tem-se

$$\begin{aligned}\epsilon\left(b_0^2(\epsilon) + \epsilon^2\beta^2(\epsilon)\right)\left(b_0^2(\epsilon) + t\beta^2(\epsilon)\right) &\le \epsilon\Big(2\max(b_0^2(\epsilon), \beta^2(\epsilon)\Big)\left(t\beta^2(\epsilon)) + b_0^2(\epsilon)\right) \\ &\le \epsilon 2R_n^2(\epsilon)\left(tR_n^2(\epsilon) + R_n^2(\epsilon)\right) \\ &= \epsilon 2R_n^4(\epsilon)(1+t). \qquad (3.76)\end{aligned}$$

Pondo $c_6(\mu) = \dfrac{4c_4^2}{\mu\lambda_1^2}c_5(\mu)$ e substituindo em (3.75),

$$\left|\tilde{M}_\epsilon u(t)\right|_\epsilon^2 \le a_0^2(\epsilon)e^{-\mu\lambda_1 t} + \frac{\alpha^2(\epsilon)}{\mu^2\lambda_1^3} + c_6(\mu)\epsilon R_n^4(\epsilon)(1+t), \tag{3.77}$$

o que prova o item (i) do lema.

Integrando de 0 à t a expressão em (3.65),

$$\begin{aligned}\left|\tilde{M}_\epsilon u(t)\right|_\epsilon^2\Big|_0^t + \mu\int_0^t \left|A_\epsilon^{1/2}\tilde{M}_\epsilon u(s)\right|_\epsilon^2 ds &\le \int_0^t \frac{2}{\mu\lambda_1^2}\left|\tilde{M}_\epsilon f\right|_\epsilon^2 ds \\ &+ \int_0^t \frac{2c_4^2}{\mu\lambda_1^2}\left|A_\epsilon^{1/2}\tilde{N}_\epsilon u\right|_\epsilon^3 \left|A_\epsilon\tilde{N}_\epsilon u\right|_\epsilon \, ds\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left|\tilde{M}_\epsilon u(t)\right|_\epsilon^2 + \mu\int_0^t \left|A_\epsilon^{1/2}\tilde{M}_\epsilon u(s)\right|_\epsilon^2\, ds &\leq \left|\tilde{M}_\epsilon u(0)\right|_\epsilon^2 + \frac{2\left|\tilde{M}_\epsilon f\right|_\epsilon^2 t}{\mu\lambda_1^2}\\ &+ \frac{2c_4^2}{\mu\lambda_1^2}\int_0^t \left|A_\epsilon^{1/2}\tilde{N}_\epsilon u\right|_\epsilon^3 \left|A_\epsilon\tilde{N}_\epsilon u\right|_\epsilon\, ds.\end{aligned}$$

Como

$$\mu\int_0^t \left|A_\epsilon^{1/2}\tilde{M}_\epsilon u(s)\right|_\epsilon^2\, ds \leq \left|\tilde{M}_\epsilon u(t)\right|_\epsilon^2 + \mu\int_0^t \left|A_\epsilon^{1/2}\tilde{M}_\epsilon u(s)\right|_\epsilon^2\, ds, \tag{3.78}$$

segue que

$$\mu\int_0^t \left|A_\epsilon^{1/2}\tilde{M}_\epsilon u(s)\right|_\epsilon^2\, ds \leq \left|\tilde{M}_\epsilon u(0)\right|_\epsilon^2 + \frac{2\alpha^2(\epsilon)t}{\mu\lambda_1^2} + c_6(\mu)\epsilon R_n^4(\epsilon)(1+t). \tag{3.79}$$

A partir de (3.64),

$$\begin{aligned}\mu\int_0^t \left|A_\epsilon^{1/2}\tilde{M}_\epsilon u(s)\right|_\epsilon^2\, ds &\leq \frac{1}{\lambda_1}\left|A_\epsilon^{1/2}\tilde{M}_\epsilon u(0)\right|_\epsilon^2 + \frac{2\alpha^2(\epsilon)t}{\mu\lambda_1^2} + c_6(\mu)\epsilon R_n^4(\epsilon)(1+t)\\ &= \frac{a_0^2(\epsilon)}{\lambda_1} + \frac{2\alpha^2(\epsilon)t}{\mu\lambda_1^2} + c_6(\mu)\epsilon R_n^4(\epsilon)(1+t)\\ \int_0^t \left|A_\epsilon^{1/2}\tilde{M}_\epsilon u(s)\right|_\epsilon^2\, ds &\leq \frac{a_0^2(\epsilon)}{\mu\lambda_1} + \frac{2\alpha^2(\epsilon)t}{\mu^2\lambda_1^2} + c_6(\mu)\epsilon R_n^4(\epsilon)(1+t), \qquad (3.80)\end{aligned}$$

provando, assim, o item (ii) do lema.

Agora, para encontrar estimativas em H^1 para $\tilde{M}_\epsilon$, substituindo v por $A_\epsilon u$ na formulação fraca de $\tilde{M}_\epsilon$, obtem-se

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(\tilde{M}_\epsilon u, \tilde{M}_\epsilon A_\epsilon u\right)_\epsilon &+ \mu\left(A_\epsilon^{1/2}\tilde{M}_\epsilon u, A_\epsilon^{1/2}\tilde{M}_\epsilon A_\epsilon u\right)_\epsilon + b_\epsilon\left(\tilde{M}_\epsilon u, \tilde{M}_\epsilon u, \tilde{M}_\epsilon A_\epsilon u\right)\\ &+ b_\epsilon\left(\tilde{N}_\epsilon u, \tilde{N}_\epsilon u, \tilde{M}_\epsilon A_\epsilon u\right) = \left(\tilde{M}_\epsilon f, \tilde{M}_\epsilon A_\epsilon u\right)_\epsilon. \qquad (3.81)\end{aligned}$$

Procedendo analogamente aos cálculos iniciais feitos no lema 3.1.1, mas dessa vez para $\tilde{M}_\epsilon$, encontra-se as seguintes relações:

(i) $\dfrac{d}{dt}\left(\tilde{M}_\epsilon u, \tilde{M}_\epsilon A_\epsilon u\right)_\epsilon = \dfrac{1}{2}\dfrac{d}{dt}\left|A_\epsilon^{1/2}\tilde{M}_\epsilon u\right|_\epsilon^2$;

(ii) $\mu\left(A_\epsilon^{1/2}\tilde{M}_\epsilon u, A_\epsilon^{1/2}\tilde{M}_\epsilon A_\epsilon u\right)_\epsilon = \mu\left|A_\epsilon\tilde{M}_\epsilon u\right|_\epsilon^2$.

Logo,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left|A_\epsilon^{1/2}\tilde{M}_\epsilon u\right|_\epsilon^2 &+ \mu\left|A_\epsilon\tilde{M}_\epsilon u\right|_\epsilon^2 = \left(\tilde{M}_\epsilon f, \tilde{M}_\epsilon A_\epsilon u\right)_\epsilon \\ &- b_\epsilon\left(\tilde{M}_\epsilon u, \tilde{M}_\epsilon u, \tilde{M}_\epsilon A_\epsilon u\right) - b_\epsilon\left(\tilde{N}_\epsilon u, \tilde{N}_\epsilon u, \tilde{M}_\epsilon A_\epsilon u\right). \qquad (3.82)\end{aligned}$$

Usando o lema 2.3.2, tem-se que $b_\epsilon\left(\tilde{M}_\epsilon u, \tilde{M}_\epsilon u, \tilde{M}_\epsilon A_\epsilon u\right) = 0$ e, portanto,

$$\frac{d}{dt}\left|A_\epsilon^{1/2}\tilde{M}_\epsilon u\right|_\epsilon^2 + 2\mu\left|A_\epsilon\tilde{M}_\epsilon u\right|_\epsilon^2 = 2\left(\tilde{M}_\epsilon f, \tilde{M}_\epsilon A_\epsilon u\right)_\epsilon - 2b_\epsilon\left(\tilde{N}_\epsilon u, \tilde{N}_\epsilon u, \tilde{M}_\epsilon A_\epsilon u\right). \qquad (3.83)$$

Aplicando o item (iii) do lema 2.4.2 à forma trilinear acima, tem-se

$$\begin{aligned}2b_\epsilon\left(\tilde{N}_\epsilon u, \tilde{N}_\epsilon u, \tilde{M}_\epsilon A_\epsilon u\right) &\leq 2c_4\left\|\tilde{N}_\epsilon u\right\|_\epsilon^{3/2}\left|A_\epsilon\tilde{N}_\epsilon u\right|_\epsilon^{1/2}\left|A_\epsilon\tilde{M}_\epsilon u\right|_\epsilon \\ &= 2c_4\left|A_\epsilon^{1/2}\tilde{N}_\epsilon u\right|_\epsilon^{3/2}\left|A_\epsilon\tilde{N}_\epsilon u\right|_\epsilon^{1/2}\left|A_\epsilon\tilde{M}_\epsilon u\right|_\epsilon \\ &= 2c_4\frac{1}{\mathrm{k}}\left|A_\epsilon^{1/2}\tilde{N}_\epsilon u\right|_\epsilon^{3/2}\left|A_\epsilon\tilde{N}_\epsilon u\right|_\epsilon^{1/2}\mathrm{k}\left|A_\epsilon\tilde{M}_\epsilon u\right|_\epsilon \\ &\leq \left(\frac{1}{\mathrm{k}}c_4\left|A_\epsilon^{1/2}\tilde{N}_\epsilon u\right|_\epsilon^{3/2}\left|A_\epsilon\tilde{N}_\epsilon u\right|_\epsilon^{1/2}\right)^2 + \left(\mathrm{k}\left|A_\epsilon\tilde{M}_\epsilon u\right|_\epsilon\right)^2, \qquad (3.84)\end{aligned}$$

onde a última desigualdade acima foi obtida pelo teorema 1.3.6 (Desigualdade de Young). A partir daí, seja $\mathrm{k}^2 = \frac{\mu}{2}$, isto é, $\frac{1}{\mathrm{k}^2} = \frac{2}{\mu}$. Então,

$$2b_\epsilon\left(\tilde{N}_\epsilon u, \tilde{N}_\epsilon u, \tilde{M}_\epsilon A_\epsilon u\right) \leq \frac{2c_4^2}{\mu}\left|A_\epsilon^{1/2}\tilde{N}_\epsilon u\right|_\epsilon^3\left|A_\epsilon\tilde{N}_\epsilon u\right|_\epsilon + \frac{\mu}{2}\left|A_\epsilon\tilde{M}_\epsilon u\right|_\epsilon^2. \qquad (3.85)$$

Ainda,

$$\begin{aligned}2\left(\tilde{M}_\epsilon f, \tilde{M}_\epsilon A_\epsilon u\right)_\epsilon &\leq 2\left|\tilde{M}_\epsilon f\right|_\epsilon\left|\tilde{M}_\epsilon A_\epsilon u\right|_\epsilon \\ &= 2\mathrm{k}\left|\tilde{M}_\epsilon f\right|_\epsilon\frac{1}{\mathrm{k}}\left|\tilde{M}_\epsilon A_\epsilon u\right|_\epsilon \\ &\leq \mathrm{k}^2\left|\tilde{M}_\epsilon f\right|_\epsilon^2 + \frac{1}{\mathrm{k}^2}\left|\tilde{M}_\epsilon A_\epsilon u\right|_\epsilon^2 \\ &= \frac{2}{\mu}\left|\tilde{M}_\epsilon f\right|_\epsilon^2 + \frac{\mu}{2}\left|\tilde{M}_\epsilon A_\epsilon u\right|_\epsilon^2. \qquad (3.86)\end{aligned}$$

Novamente, usa-se aqui o teorema 1.3.6 e $\mathrm{k}^2 = \frac{\mu}{2}$, isto é, $\frac{1}{\mathrm{k}^2} = \frac{2}{\mu}$. Substituindo (3.85) e

(3.86) em (3.83),

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left|A_\epsilon^{1/2}\tilde{M}_\epsilon u\right|_\epsilon^2 &+ 2\mu\left|A_\epsilon\tilde{M}_\epsilon u\right|_\epsilon^2 \leq \frac{2}{\mu}\left|\tilde{M}_\epsilon f\right|_\epsilon^2 + \frac{\mu}{2}\left|\tilde{M}_\epsilon A_\epsilon u\right|_\epsilon^2 \\
&+ \frac{2c_4^2}{\mu}\left|A_\epsilon^{1/2}\tilde{N}_\epsilon u\right|_\epsilon^3\left|A_\epsilon\tilde{N}_\epsilon u\right|_\epsilon + \frac{\mu}{2}\left|A_\epsilon\tilde{M}_\epsilon u\right|_\epsilon^2 \\
\frac{d}{dt}\left|A_\epsilon^{1/2}\tilde{M}_\epsilon u\right|_\epsilon^2 &+ \mu\left|A_\epsilon\tilde{M}_\epsilon u\right|_\epsilon^2 \leq \frac{2}{\mu}\left|\tilde{M}_\epsilon f\right|_\epsilon^2 + c_7\left|A_\epsilon^{1/2}\tilde{N}_\epsilon u\right|_\epsilon^3\left|A_\epsilon\tilde{N}_\epsilon u\right|_\epsilon, \qquad (3.87)
\end{aligned}
$$

onde $c_7(\mu) = \frac{2c_4^2}{\mu}$.

Usando $A_\epsilon^{1/2}\tilde{M}_\epsilon u$ no lugar de $\tilde{M}_\epsilon u$ em (3.64), obtem-se

$$
\left|A_\epsilon^{1/2}\tilde{M}_\epsilon u\right|_\epsilon \leq \frac{1}{\lambda_1}\left|A_\epsilon^{1/2}\left(A_\epsilon^{1/2}\tilde{M}_\epsilon u\right)\right|_\epsilon,
$$

ou seja,

$$
\left|A_\epsilon^{1/2}\tilde{M}_\epsilon u\right|_\epsilon^2 \leq \frac{1}{\lambda_1^2}\left|A_\epsilon\tilde{M}_\epsilon u\right|_\epsilon^2.
$$

Logo, de (3.87),

$$
\frac{d}{dt}\left|A_\epsilon^{1/2}\tilde{M}_\epsilon u\right|_\epsilon^2 + \mu\lambda_1^2\left|A_\epsilon^{1/2}\tilde{M}_\epsilon u\right|_\epsilon^2 \leq \frac{2}{\mu}\left|\tilde{M}_\epsilon f\right|_\epsilon^2 + c_7(\mu)\left|A_\epsilon^{1/2}\tilde{N}_\epsilon u\right|_\epsilon^3\left|A_\epsilon\tilde{N}_\epsilon u\right|_\epsilon. \qquad (3.88)
$$

Com base na 2ª versão da desigualdade de Gronwall, escolhendo as funções

$$
\eta(t) = \left|A_\epsilon^{1/2}\tilde{M}_\epsilon u\right|_\epsilon^2,\ \phi(t) = -\mu\lambda_1^2 \text{ e } \psi(t) = \frac{2}{\mu}\left|\tilde{M}_\epsilon f\right|_\epsilon^2 + c_7(\mu)\left|A_\epsilon^{1/2}\tilde{N}_\epsilon u\right|_\epsilon^3\left|A_\epsilon\tilde{N}_\epsilon u\right|_\epsilon, \qquad (3.89)
$$

tem-se

$$
\begin{aligned}
\left|A_\epsilon^{1/2}\tilde{M}_\epsilon u\right|_\epsilon^2 &\leq \left|A_\epsilon^{1/2}\tilde{M}_\epsilon u_0\right|_\epsilon^2 e^{-\mu\lambda_1^2 t} + \int_0^t\left(e^{-\mu\lambda_1^2 t + -\mu\lambda_1^2 s}\right)\psi(t)\ ds \\
&= a_0^2(\epsilon)e^{-\mu\lambda_1^2 t} + \int_0^t\left(e^{-\mu\lambda_1^2 t + -\mu\lambda_1^2 s}\right)\psi(t)\ ds, \qquad (3.90)
\end{aligned}
$$

Note que a integral acima é a mesma de (3.69), a menos das constantes. Procedendo analogamente aos cálculos que levam a desigualdade (3.73), aplicando o item (iii) do lema 3.1.1 para obter (3.76), tem-se

$$
\left|A_\epsilon^{1/2}\tilde{M}_\epsilon u\right|_\epsilon^2 \leq a_0^2(\epsilon)e^{-\mu\lambda_1^2 t} + \frac{2\alpha^2(\epsilon)}{\mu^2\lambda_1} + c_8(\mu)\epsilon R_n^4(\epsilon)(1+t), \qquad (3.91)
$$

provando, assim, o item (iii) do lema. Integrando de 0 à t a expressão em (3.87), prova-se o item (iv).

■

3.2 Comportamento de $T^\sigma(\epsilon)$

A partir de agora, demonstra-se o resultado principal deste trabalho, isto é, o intervalo maximal de existência da solução forte das equações tridimensionais de Navier-Stokes, quando o domínio é considerado fino. Na seção anterior, foram demonstrados dois lemas com relação as estimativas para $\tilde{M}_\epsilon$ e $\tilde{N}_\epsilon$. O lema 3.1.1 vale para qualquer condição de fronteira a ser considerada. Entretanto, o lema 3.1.2 faz referência apenas para as condições (FF) e (FP). Esta distinção nas estimativas para $\tilde{M}_\epsilon$ decorre da definição da mesma; por exemplo, sabe-se que $\tilde{M}_\epsilon u = 0$ para (DD) e (DP), isto é, não faz sentido calcular estimativas neste caso.

O resultado principal aqui apresentado está relacionado com as condições (DD), (DP), (FF) e (FP), porém, suas demonstrações são diferentes. O primeiro resultado diz respeito as condições de fronteira (DD) e (DP).

Teorema 3.2.1 *Suponha que*

$$\lim_{\epsilon\to 0} \epsilon \left(\left| A_\epsilon^{1/2} u_0 \right|_\epsilon^2 + |f|_\epsilon^2 \right) = 0. \tag{3.92}$$

Então, existe $\epsilon_1 = \epsilon_1(\mu)$ tal que para $0 < \epsilon < \epsilon_1$, a solução forte u_ϵ de

$$\begin{cases} u_t + u \cdot \nabla u - \mu \Delta u + \nabla p = f, & em \quad (x,t) \in \Omega_\epsilon \times (0,\infty) \\ \textbf{\textit{div}}\ u = 0, & em \quad (x,t) \in \Omega_\epsilon \times (0,\infty) \\ u(x,0) = u_0(x), & em \quad x \in \Omega_\epsilon, \end{cases} \tag{3.93}$$

com as condições de fronteira (DD) e (DP) existe para todo tempo, isto é, $T_\epsilon = \infty$ e

$$u_\epsilon \in C^0\left([0,\infty); V_\epsilon\right) \cap L^2\left(0, T, D(A_\epsilon)\right), \tag{3.94}$$

para todo $T > 0$.

Demonstração: Como definido no início da seção 2.3, para as condições de fronteira (DD) e (DP), tem-se que $\tilde{M}_\epsilon u \equiv 0$. Deste modo, $\tilde{N}_\epsilon u = u$, onde $u \in \mathbb{L}^2(\Omega_\epsilon)$ e, portanto, as estimativas encontradas no lema 3.1.1 valem também para u. Aplicando o item (i) do referido lema para a função u, obtem-se que

$$\left|A_\epsilon^{1/2} u(t)\right|_\epsilon^2 \leq \left|A_\epsilon^{1/2} u_0\right|_\epsilon^2 e^{-\frac{\mu t}{2\epsilon^2}} + \frac{2\epsilon^2}{\mu^2} \left|f\right|_\epsilon^2 \tag{3.95}$$

Suponha que $T^\sigma(\epsilon) < \infty$. Para $\epsilon < \frac{\mu}{\sqrt{2}}$, vale que

$$\left|A_\epsilon^{1/2} u_0\right|_\epsilon^2 e^{-\frac{\mu t}{2\epsilon^2}} + \frac{2\epsilon^2}{\mu^2} \left|f\right|_\epsilon^2 \leq \left|A_\epsilon^{1/2} u_0\right|_\epsilon^2 + \left|f\right|_\epsilon^2, \tag{3.96}$$

pois $e^{-\frac{\mu t}{2\epsilon^2}} \leq 1$. Daí,

$$\left|A_\epsilon^{1/2} u(t)\right|_\epsilon^2 \leq \left|A_\epsilon^{1/2} u_0\right|_\epsilon^2 + \left|f\right|_\epsilon^2. \tag{3.97}$$

Observe que, de (3.14) e (3.15),

$$\sup_{0 \leq t \leq T^\sigma(\epsilon)} \left|A_\epsilon^{1/2} u(t)\right|_\epsilon^2 = \sigma R_0^2(\epsilon). \tag{3.98}$$

Mas, por (3.97), $\left|A_\epsilon^{1/2} u_0\right|_\epsilon^2 + \left|f\right|_\epsilon^2$ é uma cota superior para a função $\left|A_\epsilon^{1/2} u(t)\right|_\epsilon^2$. Logo,

$$\sigma R_0^2(\epsilon) \leq \left|A_\epsilon^{1/2} u_0\right|_\epsilon^2 + \left|f\right|_\epsilon^2, \tag{3.99}$$

para $\epsilon < \frac{\mu}{\sqrt{2}}$. Como, de (3.27)

$$R_0^2(\epsilon) = \left|A_\epsilon^{1/2} u_0\right|_\epsilon^2 + \left|f\right|_\epsilon^2,$$

a desigualdade acima implica que $\sigma \leq 1$, o que contradiz a suposição inicial de que $\sigma > 1$. Portanto,

$$T^\sigma(\epsilon) = +\infty, \tag{3.100}$$

quando $\epsilon < \min\left(\frac{\mu}{\sqrt{2}}, \epsilon_1\right)$, onde ϵ_1 satisfaz

$$4c_4 \epsilon^{1/2} \sqrt{2\sigma} R_0(\epsilon) \leq \frac{\mu}{2},$$

para $0 < \epsilon < \epsilon_1$.

■

Vale salientar que, para $t > 0$ em (3.95), fazendo ϵ tender a zero, tem-se que

$$\lim_{\epsilon\to 0}\left|A_\epsilon^{1/2}u_t\right|_\epsilon^2 \leq \lim_{\epsilon\to 0}\left(\left|A_\epsilon^{1/2}u_0\right|_\epsilon^2 e^{-\frac{\mu t}{2\epsilon^2}} + \frac{2\epsilon^2}{\mu^2}\left|f\right|_\epsilon^2\right) = 0,$$

ou seja, $\forall\ t > 0$,

$$\lim_{\epsilon\to 0}\left|A_\epsilon^{1/2}u_t\right|_\epsilon^2 \leq 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{\epsilon\to 0}\left|A_\epsilon^{1/2}u_t\right|_\epsilon^2 = 0,$$

a partir do qual se conclui que

$$\lim_{\epsilon\to 0}\left|\left|u_\epsilon\right|\right|_\epsilon = 0,$$

isto é, a norma em H^1 da solução u_ϵ convergem para zero quando ϵ tende a zero, desde que $t > 0$.

Com relação as condições (FF) e (FP), demonstra-se que $T^\sigma(\epsilon) = \infty$ em dois passos. Primeiro, tem-se o seguinte resultado:

Proposição 3.2.1 *Considere as condições de fronteira (FF) e (FP) e suponha que*

$$\lim_{\epsilon\to 0}\epsilon^q\left(\left|A_\epsilon^{1/2}u_0\right|_\epsilon^2 + \left|f\right|_\epsilon^2\right) = 0, \tag{3.101}$$

para algum $0 < q < 1$. *Então,*

$$\lim_{\epsilon\to 0}\epsilon^{2-2q}T^\sigma(\epsilon) = \infty. \tag{3.102}$$

Demonstração: Dos lemas 3.1.1 e 3.1.2, tem-se

(i) $\left|A_\epsilon^{1/2}\tilde{N}_\epsilon u(t)\right|_\epsilon^2 \leq b_0^2(\epsilon)e^{-\frac{\mu t}{2\epsilon^2}} + \dfrac{2\epsilon^2}{\mu^2}\beta^2(\epsilon)$ para $0 \leq t < T^\sigma(\epsilon)$ e

(ii) $\left|A_\epsilon^{1/2}\tilde{M}_\epsilon u(t)\right|_\epsilon^2 \leq a_0^2(\epsilon)e^{-\mu\lambda_1^2 t} + \dfrac{2\alpha^2(\epsilon)}{\mu^2\lambda_1} + c_8(\mu)\epsilon R_n^4(\epsilon)(1+t)$.

Somando as duas expressões acima,

$$\begin{aligned}\left|A_\epsilon^{1/2}\tilde{N}_\epsilon u(t)\right|_\epsilon^2 + \left|A_\epsilon^{1/2}\tilde{M}_\epsilon u(t)\right|_\epsilon^2 &\leq b_0^2(\epsilon)e^{-\frac{\mu t}{2\epsilon^2}} + \frac{2\epsilon^2}{\mu^2}\beta^2(\epsilon)\\ &+ a_0^2(\epsilon)e^{-\mu\lambda_1 t} + \frac{\alpha^2(\epsilon)}{\mu^2\lambda_1^3} + c_6(\mu)\epsilon R_n^4(\epsilon)(1+t).\end{aligned}$$

Mas, pelo item (ii) do lema 2.3.1,

$$\left|A_\epsilon^{1/2}\tilde{N}_\epsilon u(t)\right|_\epsilon^2 + \left|A_\epsilon^{1/2}\tilde{M}_\epsilon u(t)\right|_\epsilon^2 = \left|\tilde{N}_\epsilon A_\epsilon^{1/2}u(t)\right|_\epsilon^2 + \left|\tilde{M}_\epsilon A_\epsilon^{1/2}u(t)\right|_\epsilon^2 = \left|A_\epsilon^{1/2}u(t)\right|_\epsilon^2,$$

ou seja,

$$\begin{aligned} \left|A_\epsilon^{1/2}u(t)\right|_\epsilon^2 &\leq b_0^2(\epsilon)e^{-\frac{\mu t}{2\epsilon^2}} + \frac{2\epsilon^2}{\mu^2}\beta^2(\epsilon) + a_0^2(\epsilon)e^{-\mu\lambda_1 t} \\ &+ \frac{\alpha^2(\epsilon)}{\mu^2\lambda_1^3} + c_6(\mu)\epsilon R_n^4(\epsilon)(1+t). \end{aligned} \tag{3.103}$$

Fixando σ de modo que

$$\sigma = 4\max\left(1, \frac{2}{\mu^2}, \frac{1}{\mu^2\lambda_1^3}\right), \tag{3.104}$$

e, com isso, observe que

$$\begin{aligned} b_0^2(\epsilon)\underbrace{e^{-\frac{\mu t}{2\epsilon^2}}}_{<\,1}+\frac{2\epsilon^2}{\mu^2}\beta^2(\epsilon) &+ a_0^2(\epsilon)\underbrace{e^{-\mu\lambda_1 t}}_{<\,1}+\frac{\alpha^2(\epsilon)}{\mu^2\lambda_1^3} \\ &\leq b_0^2\frac{\sigma}{4} + \beta^2(\epsilon)\frac{\sigma}{4} + a_0^2(\epsilon)\frac{\sigma}{4} + \alpha^2(\epsilon)\frac{\sigma}{4} \\ &= R_0^2(\epsilon)\frac{\sigma}{4}. \end{aligned}$$

Substituindo em (3.103),

$$\left|A_\epsilon^{1/2}u(t)\right|_\epsilon^2 \leq R_0^2(\epsilon)\frac{\sigma}{4} + c_6(\mu)\epsilon R_n^4(\epsilon)(1+t). \tag{3.105}$$

Note ainda que, como $R_n^2(\epsilon) = \max(b_0^2(\epsilon), \beta^2(\epsilon))$, tem-se

$$R_n^2(\epsilon) \leq R_0^2(\epsilon) \quad \Longrightarrow \quad R_n^4(\epsilon) \leq R_0^4(\epsilon),$$

a partir do qual

$$\begin{aligned} \left|A_\epsilon^{1/2}u(t)\right|_\epsilon^2 &\leq R_0^2(\epsilon)\frac{\sigma}{4} + c_6(\mu)\epsilon R_n^4(\epsilon)(1+t) \\ &\leq R_0^2(\epsilon)\frac{\sigma}{4} + c_6(\mu)\epsilon R_0^4(\epsilon)(1+t) \\ &= R_0^2(\epsilon)\frac{\sigma}{4} + c_6(\mu)\left(\epsilon^q R_0^2(\epsilon)\right)\epsilon^{1-q}R_0^2(\epsilon)(1+t), \end{aligned} \tag{3.106}$$

para $0 \leq t < T^\sigma(\epsilon)$.

Agora, suponha que $T^\sigma(\epsilon) < \infty$. Logo, de (3.15)

$$\left|A_\epsilon^{1/2}u(T^\sigma(\epsilon))\right|_\epsilon^2 = \sigma R_0^2(\epsilon), \tag{3.107}$$

e, substituindo em (3.106),

$$\begin{aligned}
\left|A_\epsilon^{1/2}u(T^\sigma(\epsilon))\right|_\epsilon^2 &\leq R_0^2(\epsilon)\frac{\sigma}{4} + c_6(\mu)\left(\epsilon^q R_0^2(\epsilon)\right)\epsilon^{1-q}R_0^2(\epsilon)(1+T^\sigma(\epsilon))\\
\sigma R_0^2(\epsilon) &\leq R_0^2(\epsilon)\frac{\sigma}{4} + c_6(\mu)\left(\epsilon^q R_0^2(\epsilon)\right)\epsilon^{1-q}R_0^2(\epsilon)(1+T^\sigma(\epsilon))\\
\frac{3\sigma}{4}R_0^2(\epsilon) &\leq c_6(\mu)\left(\epsilon^q R_0^2(\epsilon)\right)\epsilon^{1-q}R_0^2(\epsilon)(1+T^\sigma(\epsilon)). \qquad (3.108)
\end{aligned}$$

Não é difícil ver que $R_0^2(\epsilon) \neq 0$. De fato, se esta não fosse válida, isto é, se $R_0^2(\epsilon) = 0$, de (3.27)

$$\left|A_\epsilon^{1/2}u_0\right|_\epsilon^2 = 0 \quad \text{e} \quad |f|_\epsilon^2 = 0.$$

Assim, $f = 0$ e $A_\epsilon^{1/2}u_0 = 0$ q.s. em Ω_ϵ. Daí $u_0 = 0$ q.s. o que implicaria $u(t) = 0$, uma solução trivial a qual não interessa. Logo, $R_0^2(\epsilon) \neq 0$ e, portanto, de (3.108),

$$\frac{3\sigma}{4} \leq c_6(\mu)\left(\epsilon^q R_0^2(\epsilon)\right)\epsilon^{1-q}(1+T^\sigma(\epsilon)). \qquad (3.109)$$

Afirma-se que

$$\lim_{\epsilon\to 0}\epsilon^{1-q}T^\sigma(\epsilon) = \infty. \qquad (3.110)$$

Suponha que a expressão acima não seja verdade, ou seja, existe uma constante $L_1 > 0$ tal que para todo $\delta > 0$, tem-se $\epsilon > 0$ com $0 < \epsilon < \delta$ e $\epsilon^{1-q}T^\sigma(\epsilon) \leq L_1$.

Sendo assim, tome $\delta = \dfrac{1}{n}$, $n \geq 1$. Então, existe uma sequência $(\epsilon_n)_{n\geq 1}$ com

$$\lim_{n\to\infty}\epsilon_n = 0, \qquad \left(\text{pois } \; 0 < \epsilon < \frac{1}{n}\right)$$

e $\epsilon_n^{1-q}T^\sigma(\epsilon_n) \leq L_1$, isto é,

$$T^\sigma(\epsilon_n) \leq \frac{L_1}{\epsilon_n^{1-q}}, \quad \forall\, n \geq 1. \qquad (3.111)$$

Voltando na expressão (3.109),

$$\frac{3\sigma}{4} \leq c_6(\mu)\left(\epsilon_n^q R_0^2(\epsilon_n)\right)\epsilon_n^{1-q}\left(1 + \frac{L_1}{\epsilon_n^{1-q}}\right). \qquad (3.112)$$

Mas $0 < q < 1$ e $\epsilon_n < 1$, daí, $1-q > 0$ e $\epsilon_n^{1-q} < 1$. Logo,

$$\frac{3\sigma}{4} \leq c_6(\mu)\left(\epsilon_n^q R_0^2(\epsilon_n)\right)(1 + L_1)$$

$$\frac{3\sigma}{4} \leq L_2 \epsilon_n^q R_0^2(\epsilon_n), \tag{3.113}$$

onde $L_2 = L_2(\mu) = c_6(\mu)(1+L_1)$. Fazendo n tender ao infinito e usando a hipótese (3.101), o lado direito da expressão (3.113) tende a zero e, portanto, $\sigma = 0$, uma contradição com a escolha de σ em (3.104). Logo, vale (3.110) e a proposição está demonstrada.

■

Agora, mostra-se que o intervalo maximal de existência da solução forte das equações de Navier-Stokes é infinito, quando o domínio é fino. Mais precisamente,

Teorema 3.2.2 *Suponha que*

$$\lim_{\epsilon \to 0} \epsilon^{2q} \left(\left| A_\epsilon^{1/2} u_0 \right|_\epsilon^2 + |f|_\epsilon^2 \right) = 0, \tag{3.114}$$

para algum $0 < 2q < 1$*. Então, existe* $\epsilon_2 = \epsilon_2(\mu, q, \omega)$ *tal que para* $0 < \epsilon < \epsilon_2$*, a solução forte* u_ϵ *de*

$$\begin{cases} u_t + u \cdot \nabla u - \mu \Delta u + \nabla p = f, & \textit{em} \quad (x,t) \in \Omega_\epsilon \times (0,\infty) \\ \boldsymbol{div}\ u = 0, & \textit{em} \quad (x,t) \in \Omega_\epsilon \times (0,\infty) \\ u(x,0) = u_0(x), & \textit{em} \quad x \in \Omega_\epsilon, \end{cases} \tag{3.115}$$

com as condições de fronteira (FF) e (FP) existe para todo tempo, isto é, $T_\epsilon = \infty$ *e*

$$u_\epsilon \in C^0\left([0,\infty); V_\epsilon\right) \cap L^2\left(0, T, D(A_\epsilon)\right), \tag{3.116}$$

para todo $T > 0$*.*

Demonstração: Seja

$$K_\epsilon^2 \;\; = \;\; \left| A_\epsilon^{1/2} \tilde{M}_\epsilon u_0 \right|_\epsilon^2 + \frac{8}{\mu^2 \lambda_1} \left| \tilde{M}_\epsilon f \right|_\epsilon^2 + B_\epsilon^2, \tag{3.117}$$

onde

$$B_\epsilon^2 = \left| A_\epsilon^{1/2} \tilde{N}_\epsilon u_0 \right|_\epsilon^2 + \left| \tilde{N}_\epsilon f \right|_\epsilon^2.$$

Observe que, substituindo a expressão acima em K_ϵ^2 e aplicando o item (ii) do lema 2.3.1, tem-se

$$\begin{aligned}
\lim_{\epsilon\to 0}\epsilon^q K_\epsilon^2 &= \lim_{\epsilon\to 0}\epsilon^q\left(\left|A_\epsilon^{1/2}\tilde{M}_\epsilon u_0\right|_\epsilon^2+\left|A_\epsilon^{1/2}\tilde{N}_\epsilon u_0\right|_\epsilon^2+\frac{8}{\mu^2\lambda_1}\left|\tilde{M}_\epsilon f\right|_\epsilon^2+\left|\tilde{N}_\epsilon f\right|_\epsilon^2\right)\\
&= \lim_{\epsilon\to 0}\epsilon^q\left(\left|A_\epsilon^{1/2}u_0\right|_\epsilon^2+|f|_\epsilon^2\right)\\
\text{pela hipótese } (3.114) &= 0. \qquad (3.118)
\end{aligned}$$

Agora, escolhe-se $\epsilon_2=\epsilon_2(\mu,\lambda_1,q)$ satisfazendo

(i) $0<\epsilon_2<\dfrac{1}{4}$;

(ii) Para $0<\epsilon\le\epsilon_2$, $\epsilon^q K_\epsilon^2\le 1$;

(iii) $\dfrac{2\epsilon^2}{\mu^2}\le\dfrac{1}{8}$, $e^{-\frac{\mu\lambda_1}{\epsilon^{2(1-q)}}}\le\dfrac{1}{4}$ e $\dfrac{16c_4(\mu)}{\mu}\max\left(1,\dfrac{1}{\mu^3}\right)\epsilon^q\le\dfrac{1}{4}$;

(iv) Para $0<\epsilon\le\epsilon_2$, $\epsilon^{2-2q}T^\sigma(\epsilon)>4$.

Note que o item (ii) decorre de (3.118) e, no item (iii), o lado esquerdo das desigualdades tendem a zero a medida que ϵ se aproxima de zero. Pela proposição 3.2.1, o lado esquerdo da expressão em (iv) tende ao infinito, tornando válido tal item. Sendo assim, está bem definido este ϵ_2.

Lembrando o item (iii) do lema 3.1.1, o qual diz que

$$\int_0^t\left|A_\epsilon^{1/2}\tilde{N}_\epsilon u(s)\right|_\epsilon^3\left|A_\epsilon\tilde{N}_\epsilon u(s)\right|_\epsilon ds\le c_5(\mu)\epsilon\left(b_0^2(\epsilon)+\epsilon^2\beta^2(\epsilon)\right)\left(b_0^2(\epsilon)+t\beta^2(\epsilon)\right),$$

pode-se reescrever tal estimativa com os dados acima, isto é,

$$\begin{aligned}
\int_0^t\left|A_\epsilon^{1/2}\tilde{N}_\epsilon u(s)\right|_\epsilon^3\left|A_\epsilon\tilde{N}_\epsilon u(s)\right|_\epsilon ds &\le c_5(\mu)\epsilon\left(b_0^2(\epsilon)+\epsilon^2\beta^2(\epsilon)\right)\left(b_0^2(\epsilon)+t\beta^2(\epsilon)\right)\\
&\le c_5(\mu)\epsilon\left(\epsilon^2B_\epsilon^2+B_\epsilon^2\right)\left(tB_\epsilon^2+B_\epsilon^2\right)\\
&= c_5(\mu)\epsilon B_\epsilon^4\left(\epsilon^2+1\right)(1+t)\\
&\le \frac{4}{\mu}\max\left(1,\frac{1}{\mu^3}\right)B_\epsilon^4\,(1+t)\,.
\end{aligned}$$

Defina, para $0<\epsilon\le\epsilon_2$,

$$t_\epsilon=\epsilon^{2(q-1)}.$$

Do lema 3.1.1, item (i),

$$\left|A_\epsilon^{1/2}\tilde{N}_\epsilon u(t)\right|_\epsilon^2 \;\leq\; b_0^2(\epsilon)e^{-\frac{\mu t}{2\epsilon^2}} + \frac{2\epsilon^2}{\mu^2}\beta^2(\epsilon), \tag{3.119}$$

e como $e^{-\frac{\mu t}{2\epsilon^2}} \leq e^{-\frac{\mu t_\epsilon}{2\epsilon^2}}$, onde $t_\epsilon \leq t < 2t_\epsilon$, vale que

$$\left|A_\epsilon^{1/2}\tilde{N}_\epsilon u(t)\right|_\epsilon^2 \leq b_0^2(\epsilon)e^{-\frac{\mu t_\epsilon}{2\epsilon^2}} + \frac{2\epsilon^2}{\mu^2}\beta^2(\epsilon), \quad t_\epsilon \leq t < 2t_\epsilon. \tag{3.120}$$

Assim, usando as condições satisfeitas por ϵ_2,

$$\begin{aligned}
\left|A_\epsilon^{1/2}\tilde{N}_\epsilon u(t)\right|_\epsilon^2 &\leq b_0^2\frac{1}{4} + \beta^2(\epsilon)\frac{1}{8} \\
&= b_0^2\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right) + \beta^2(\epsilon)\frac{1}{8} \\
&\leq B_\epsilon^2\frac{1}{8} + B_\epsilon^2\frac{1}{8} \\
&= \frac{1}{4}B_\epsilon^2,
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\left|A_\epsilon^{1/2}\tilde{N}_\epsilon u(t)\right|_\epsilon^2 \;\leq\; \frac{1}{4}B_\epsilon^2, \tag{3.121}$$

para $t_\epsilon \leq t < 2t_\epsilon$.

Agora, usando o item (iii) do lema 3.1.2, isto é,

$$\left|A_\epsilon^{1/2}\tilde{M}_\epsilon u(t)\right|_\epsilon^2 \;\leq\; a_0^2(\epsilon)e^{-\mu\lambda_1^2 t} + \frac{2\alpha^2(\epsilon)}{\mu^2\lambda_1} + c_8(\mu)\epsilon R_n^4(\epsilon)(1+t), \tag{3.122}$$

Recordando que $R_n^2(\epsilon) = \max(b_0^2(\epsilon), \beta^2(\epsilon))$, obtem-se

$$\begin{aligned}
\left|A_\epsilon^{1/2}\tilde{M}_\epsilon u(t)\right|_\epsilon^2 &\leq a_0^2(\epsilon)e^{-\mu\lambda_1^2 t} + \frac{2\alpha^2(\epsilon)}{\mu^2\lambda_1} + \frac{16\epsilon c_4(\mu)}{\mu}\max\left(1, \frac{1}{\mu^3}\right)B_\epsilon^4(1+t) \\
&\leq a_0^2(\epsilon)e^{-\mu\lambda_1^2 t_\epsilon} + \frac{2\alpha^2(\epsilon)}{\mu^2\lambda_1} + \mathrm{c}(\mu)\epsilon\left(\epsilon^q B_\epsilon^2\right)B_\epsilon^2\epsilon^{1-q}(1+2t_\epsilon),
\end{aligned} \tag{3.123}$$

para $t_\epsilon \leq t < 2t_\epsilon$, onde $\mathrm{c} = \dfrac{16c_4(\mu)}{\mu}\max\left(1, \dfrac{1}{\mu^3}\right)$. Usando as condições satisfeitas por ϵ_2, tem-se

$$a_0^2(\epsilon)e^{-\mu\lambda_1^2 t_\epsilon} \;\leq\; \frac{1}{4}K_\epsilon^2 \quad \text{e} \quad \frac{2\alpha^2(\epsilon)}{\mu^2\lambda_1} \;\leq\; \frac{1}{8}K_\epsilon^2 \;\leq\; \frac{1}{4}K_\epsilon^2. \tag{3.124}$$

Além disso, observe que $\epsilon^q B_\epsilon^2 \;\leq\; \epsilon^q K_\epsilon^2 \;\leq\; 1$ e portanto,

$$\begin{aligned}
\mathrm{c}(\mu)\epsilon\left(\epsilon^q B_\epsilon^2\right) B_\epsilon^2 \epsilon^{1-q}(1+2t_\epsilon) &\leq \mathrm{c}(\mu)\epsilon B_\epsilon^2 \epsilon^{1-q}(1+2t_\epsilon) \\
&= \frac{16c_4(\mu)}{\mu}\max\left(1,\frac{1}{\mu^3}\right)\epsilon B_\epsilon^2\epsilon^{1-q}(1+2t_\epsilon) \\
&= \frac{16c_4(\mu)}{\mu}\max\left(1,\frac{1}{\mu^3}\right)\frac{\epsilon^q}{\epsilon^q}\epsilon B_\epsilon^2\epsilon^{1-q}(1+2\epsilon^{2(q-1)}) \\
&\leq \frac{1}{4}B_\epsilon^2\epsilon^{1-q}\epsilon^{1-q}(1+2\epsilon^{2(q-1)}) \\
&\leq \frac{1}{4}B_\epsilon^2\epsilon^{2-2q}(1+2\epsilon^{2(q-1)}) \\
&= \frac{1}{4}B_\epsilon^2\left(\epsilon^{2-2q}+2\right) \\
&\leq \frac{1}{4}B_\epsilon^2\left(\epsilon+2\right) \;\leq\; \frac{1}{4}B_\epsilon^2\left(1+2\right) \\
&= \frac{3}{4}B_\epsilon^2.
\end{aligned}$$

Na última desigualdade acima utiliza-se que $\epsilon^{2-2q} < \epsilon$. De fato, como $0 < q < \frac{1}{2}$,

$$0 < 2q < 1 \;\Rightarrow\; -1 < -2q < 0 \;\Rightarrow\; 1 < 2-2q < 2 \;\Rightarrow\; \epsilon^2 < \epsilon^{2-2q} < \epsilon,$$

pois $0 < \epsilon < 1$. Logo,

$$\mathrm{c}(\mu)\epsilon\left(\epsilon^q B_\epsilon^2\right) B_\epsilon^2\epsilon^{1-q}(1+2t_\epsilon) \;\leq\; \frac{3}{4}B_\epsilon^2. \tag{3.125}$$

Substituindo (3.125) e (3.124) em (3.123),

$$\begin{aligned}
\left|A_\epsilon^{1/2}\tilde{M}_\epsilon u(t)\right|_\epsilon^2 &\leq \frac{1}{4}K_\epsilon^2 + \frac{1}{4}K_\epsilon^2 + \frac{3}{4}B_\epsilon^2 \\
&\leq \frac{1}{4}K_\epsilon^2 + \frac{1}{4}K_\epsilon^2 + \frac{3}{4}K_\epsilon^2 \\
&= \frac{5}{4}K_\epsilon^2, \qquad (3.126)
\end{aligned}$$

para $t_\epsilon \leq t < 2t_\epsilon$. Somando as expressões (3.126) e (3.121), novamente aplicando o item (ii) do lema 2.3.1,

$$\left|A_\epsilon^{1/2}u(t)\right|_\epsilon^2 \;\leq\; \frac{1}{4}B_\epsilon^2 + \frac{5}{4}K_\epsilon^2$$

$$\begin{aligned} &\leq \frac{1}{4}K_\epsilon^2 + \frac{5}{4}K_\epsilon^2 \\ &= \frac{3}{2}K_\epsilon^2 \end{aligned} \tag{3.127}$$

Sabe-se que a norma de uma aplicação é uma função contínua. Isto vale também para a norma $||\cdot||_\epsilon$. Posto isso, calculando o limite quando t tende à t_ϵ, para a função $\left|A_\epsilon^{1/2}u(t)\right|_\epsilon^2$, tem-se

$$\lim_{t\to t_\epsilon}\left|A_\epsilon^{1/2}u(t)\right|_\epsilon^2 \;=\; \lim_{t\to t_\epsilon}||u(t)||_\epsilon^2 \;=\; ||u(t_\epsilon)||_\epsilon^2 \;=\; \left|A_\epsilon^{1/2}u(2t_\epsilon)\right|_\epsilon^2,$$

e como

$$\lim_{t\to t_\epsilon}\left|A_\epsilon^{1/2}u(t)\right|_\epsilon^2 \;\leq\; \frac{3}{2}K_\epsilon^2,$$

segue que

$$\left|A_\epsilon^{1/2}u(2t_\epsilon)\right|_\epsilon^2 \;\leq\; \frac{3}{2}K_\epsilon^2. \tag{3.128}$$

O objetivo agora é usar indução. Suponha que existe um tempo t_0 satisfazendo

$$\left|A_\epsilon^{1/2}\tilde{N}_\epsilon u(t_0)\right|_\epsilon^2 \;\leq\; \frac{1}{2}B_\epsilon^2 \quad \text{e} \quad \left|A_\epsilon^{1/2}\tilde{M}_\epsilon u(t_0)\right|_\epsilon^2 \;\leq\; \frac{1}{2}K_\epsilon^2. \tag{3.129}$$

Como visto no teorema 1.3.4, é possivel utilizar a desigualdade de Gronwall, 2ª versão, para o intervalo $t_0 \leq t < T^\sigma(\epsilon)$. Isto faz com que as expressões (3.119) e (3.122) sofram alguma mudança. Na demonstração da primeira, ao aplicar a desigualdade de Gronwall em (3.40), no intervalo $t_0 \leq t < T^\sigma(\epsilon)$, tem-se

$$\left|A_\epsilon^{1/2}\tilde{N}_\epsilon u(t)\right|_\epsilon^2 \;\leq\; \exp\left(\int_{t_0}^t -\frac{\mu}{2\epsilon^2}\,dr\right)\left|A_\epsilon^{1/2}\tilde{N}_\epsilon u(t_0)\right|_\epsilon^2 + H(t),$$

onde

$$\begin{aligned} H(t) &= \int_{t_0}^t \exp\left(-\frac{\mu}{2\epsilon^2}(t-t_0) + \frac{\mu}{2\epsilon^2}(s-t_0)\right)\frac{1}{\mu}\beta^2(\epsilon)\,ds \\ &= \int_{t_0}^t \exp\left(\frac{\mu}{2\epsilon^2}(s-t)\right)\frac{1}{\mu}\beta^2(\epsilon) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= e^{-\frac{\mu t}{2\epsilon^2}} \frac{1}{\mu} \beta^2(\epsilon) e^{\frac{\mu}{2\epsilon^2}(t-t_0)} \left(\frac{2\epsilon^2}{\mu} \right) \\
&= \underbrace{e^{-\frac{\mu t_0}{2\epsilon^2}}}_{<\,1} \frac{2\epsilon^2}{\mu^2} \beta^2(\epsilon) \\
&\leq \frac{2\epsilon^2}{\mu^2} \beta^2(\epsilon).
\end{aligned}
$$

Logo,

$$
\left| A_\epsilon^{1/2} \tilde{N}_\epsilon u(t) \right|_\epsilon^2 \;\leq\; e^{-\dfrac{\mu(t-t_0)}{2\epsilon^2}} \left| A_\epsilon^{1/2} \tilde{N}_\epsilon u(t_0) \right|_\epsilon^2 + \frac{2\epsilon^2}{\mu^2} \beta^2(\epsilon),
$$

e, por (3.129),

$$
\left| A_\epsilon^{1/2} \tilde{N}_\epsilon u(t) \right|_\epsilon^2 \;\leq\; \frac{1}{2} B_\epsilon^2 e^{-\dfrac{\mu(t-t_0)}{2\epsilon^2}} + \frac{2\epsilon^2}{\mu^2} \beta^2(\epsilon),
$$

com $t_0 \leq t < T^\sigma(\epsilon)$.

Analogamente, de (3.66),

$$
\begin{aligned}
\left| A_\epsilon^{1/2} \tilde{M}_\epsilon u(t) \right|_\epsilon^2 &\leq e^{-\mu\lambda_1^2(t-t_0)} \left| A_\epsilon^{1/2} \tilde{M}_\epsilon u(t_0) \right|_\epsilon^2 + \frac{2\alpha^2(\epsilon)}{\mu^2 \lambda_1} \\
&+ c_8(\mu) \epsilon R_n^4(\epsilon)(1 + t - t_0).
\end{aligned} \tag{3.130}
$$

De (3.129),

$$
\begin{aligned}
\left| A_\epsilon^{1/2} \tilde{M}_\epsilon u(t) \right|_\epsilon^2 &\leq \frac{1}{2} K_\epsilon^2 e^{-\mu\lambda_1^2(t-t_0)} + \frac{2\alpha^2(\epsilon)}{\mu^2 \lambda_1} \\
&+ c_8(\mu) \left(\epsilon^q B_\epsilon^2 \right) B_\epsilon^2 \epsilon^{1-q} (1 + t - t_0),
\end{aligned}
$$

com $t_0 \leq t < T^\sigma(\epsilon)$.

Tome, portanto, $t_0 = 2\epsilon^{2(q-1)}$. Assim como feito em (3.126) e (3.121), obtêm-se

$$
\begin{aligned}
\left| A_\epsilon^{1/2} \tilde{N}_\epsilon u(t) \right|_\epsilon^2 &\leq \frac{1}{8} B_\epsilon^2 + \frac{1}{8} B_\epsilon^2 \\
&= \frac{1}{4} B_\epsilon^2,
\end{aligned}
$$

e

$$\begin{aligned} \left|A_\epsilon^{1/2}\tilde{M}_\epsilon u(t)\right|_\epsilon^2 &\leq \frac{1}{8}K_\epsilon^2 + \frac{1}{8}K_\epsilon^2 + \frac{1}{4}K_\epsilon^2 \\ &= \frac{1}{2}K_\epsilon^2, \end{aligned}$$

para $2\epsilon^{2(q-1)} \leq t < 3\epsilon^{2(q-1)}$. Logo,

$$\begin{aligned} \left|A_\epsilon^2 u(t)\right|_\epsilon^2 &= \left|A_\epsilon^{1/2}\tilde{N}_\epsilon u(t)\right|_\epsilon^2 + \left|A_\epsilon^{1/2}\tilde{M}_\epsilon u(t)\right|_\epsilon^2 \\ &\leq \frac{1}{4}B_\epsilon^2 + \frac{1}{2}K_\epsilon^2 \\ &\leq \frac{1}{4}K_\epsilon^2 + \frac{1}{2}K_\epsilon^2 \\ &= \frac{3}{4}K_\epsilon^2, \end{aligned}$$

para $2\epsilon^{2(q-1)} \leq t < 3\epsilon^{2(q-1)}$, o que implica $T^\sigma(\epsilon) > 3\epsilon^{2(q-1)}$.

Analogamente, para $t_0 = 3\epsilon^{2(q-1)}$, tem-se

$$\left|A_\epsilon^2 u(t)\right|_\epsilon^2 \leq \frac{3}{4}K_\epsilon^2, \tag{3.131}$$

para $3\epsilon^{2(q-1)} \leq t < 4\epsilon^{2(q-1)}$, a partir do qual $T^\sigma(\epsilon) > 4\epsilon^{2(q-1)}$. Repetindo este argumento n vezes, concluí-se que

$$T^\sigma(\epsilon) > n\epsilon^{2(q-1)}, \quad \forall \;\; n \geq 1. \tag{3.132}$$

Portanto, $T^\sigma(\epsilon) = +\infty$ para $0 < \epsilon \leq \epsilon_2$, ou seja, o intervalo maximal de existência da solução forte para o sistema de equações de Navier-Stokes em domínios tridimenisonais fino e infinito.

■

3.3 Fluxo de Canal

Nesta seção, apresenta-se um exemplo para aplicação dos resultados obtidos até agora. Considera-se as Equações de Navier - Stokes (2.1) com a condição de fronteira (DP) e força externa dada por $f = P_1 e_1 + P_2 e_2$, onde e_1, e_2 são os vetores da base canônica do

$\mathbb{R}^3$ e P_1, P_2 são constantes. A norma Euclidiana de f será denotada por $P^2 = P_1^2 + P_2^2$. Num primeiro momento, consideramos o sistema de Navier - Stokes estacionário, isto é, sem a dependência do tempo. Para isso, é possivel mostrar que as funções

$$q_\epsilon = 0 \ \text{ e } \ w_\epsilon = -\frac{x_3(x_3-\epsilon)}{2\mu}(P_1e_1 + P_2e_2), \tag{3.133}$$

são soluções de

$$\begin{cases} -\mu\Delta w + (w\cdot\nabla)w + \nabla q = P_1e_1 + P_2e_2 & em \quad \Omega_\epsilon; \\ \mathbf{div}\ w = 0 & em \quad \Omega_\epsilon; \\ w = 0 \ \text{ em } \omega\times\{0,\epsilon\} \text{ e } \omega \text{ é periódica nas direções } x_1 \text{ e } x_2. \end{cases} \tag{3.134}$$

Com efeito, note que $\nabla q_\epsilon = 0$ e

$$\Delta w_\epsilon = \Delta\left(\frac{-x_3(x_3-\epsilon)}{2\mu}P_1, \frac{-x_3(x_3-\epsilon)}{2\mu}P_2, 0\right) = \left(-\frac{1}{\mu}P_1, -\frac{1}{\mu}P_2, 0\right), \tag{3.135}$$

ou seja, $-\mu\Delta w_\epsilon = (P_1, P_2, 0) = f$. Além disso,

$$\begin{aligned} (w_\epsilon\cdot\nabla)w_\epsilon &= \left(\left(\frac{-x_3(x_3-\epsilon)}{2\mu}P_1, \frac{-x_3(x_3-\epsilon)}{2\mu}P_2, 0\right)\cdot\left(0,0,\frac{\partial w_\epsilon^1}{\partial x_3}\right)\right. \\ &\quad \left(\frac{-x_3(x_3-\epsilon)}{2\mu}P_1, \frac{-x_3(x_3-\epsilon)}{2\mu}P_2, 0\right)\cdot\left(0,0,\frac{\partial w_\epsilon^2}{\partial x_3}\right) \\ &\quad \left.\left(\frac{-x_3(x_3-\epsilon)}{2\mu}P_1, \frac{-x_3(x_3-\epsilon)}{2\mu}P_2, 0\right)\cdot\left(0,0,\frac{\partial w_\epsilon^3}{\partial x_3}\right)\right) \\ &= (0,0,0). \end{aligned}$$

Aqui, w_ϵ^i é a i-ésima coordenada do vetor w_ϵ. Observe que

$$\mathbf{div}\ w_\epsilon = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{-x_3(x_3-\epsilon)}{2\mu}P_1\right) + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{-x_3(x_3-\epsilon)}{2\mu}P_2\right) + \frac{\partial 0}{\partial x_3} = 0.$$

Portanto, w_ϵ satisfaz (3.134).

Além disso, tem-se que

$$\begin{aligned} |w_\epsilon|_\epsilon^2 &= \int_{\Omega_\epsilon} |\ w_\epsilon\ |^2 \ dx = \int_0^\epsilon\int_\omega |\ w_\epsilon\ |^2 \ dx \\ &= \int_0^\epsilon\int_\omega\left[\left(\frac{-x_3(x_3-\epsilon)P_1}{2\mu}\right)^2 + \left(\frac{-x_3(x_3-\epsilon)P_2}{2\mu}\right)^2 + 0^2\right] \ dx_1dx_2dx_3 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_\omega dx_1 dx_2 \int_0^\epsilon \left[\left(\frac{-x_3(x_3-\epsilon)P_1}{2\mu} \right)^2 + \left(\frac{-x_3(x_3-\epsilon)P_2}{2\mu} \right)^2 \right] dx_3 \\
&= \int_\omega dx_1 dx_2 \int_0^\epsilon \frac{x_3^2(x_3-\epsilon)^2}{4\mu^2} \left(P_1^2 + P_2^2\right) \, dx_3 \\
&= \mathrm{A}(\omega) \frac{P^2}{4\mu^2} \int_0^\epsilon x_3^2 (x_3-\epsilon)^2 \, dx_3 \\
&= \frac{\mathrm{A}(\omega)\epsilon^5}{120\mu^2} P^2, \qquad (3.136)
\end{aligned}
$$

onde $\mathrm{A}(\omega)$ é a área da região ω. Como a função

$$
h(x_3) = \frac{x_3(x_3-\epsilon)}{2\mu} P
$$

é contínua no compacto $[0, \epsilon]$, assume máximo e, neste caso, $\max\limits_{x_3 \in [0,\epsilon]} h(x_3) = \dfrac{\epsilon}{2}$. Daí,

$$
| \, w_\epsilon \, | = \sqrt{\left[\left(\frac{-x_3(x_3-\epsilon)P_1}{2\mu} \right)^2 + \left(\frac{-x_3(x_3-\epsilon)P_2}{2\mu} \right)^2 + 0^2 \right]} = h(x_3), \qquad (3.137)
$$

e assim,

$$
|w_\epsilon|_{L^\infty(\Omega_\epsilon)} = \frac{\frac{\epsilon}{2}\left(\epsilon - \frac{\epsilon}{2}\right)}{2\mu} = \frac{\epsilon^2}{8\mu} P. \qquad (3.138)
$$

Para calcular as estimativas para ∇w_ϵ, primeiramente, note que

$$
\begin{aligned}
| \, \nabla w_\epsilon \, | &= \sqrt{(\nabla w_\epsilon^1)^2 + (\nabla w_\epsilon^2)^2 + (\nabla w_\epsilon^3)^2} \\
&= \sqrt{\left(\frac{-2x_3+\epsilon}{\mu} P_1 \right)^2 + \left(\frac{-2x_3+\epsilon}{\mu} P_2 \right)^2 + 0^2} \\
&= \sqrt{\frac{(\epsilon - 2x_3)^2}{4\mu^2}} P = \frac{P}{2\mu} \sqrt{(\epsilon - 2x_3)^2}.
\end{aligned}
$$

Logo,

$$
|\nabla w_\epsilon|_{L^\infty(\Omega_\epsilon)} = \frac{P}{2\mu}(\epsilon - 2x_3)\bigg|_{x_3=0} = \frac{\epsilon}{2\mu} P. \qquad (3.139)
$$

Ainda,

$$\begin{aligned}
|\nabla w_\epsilon|_\epsilon^2 &= \int_{\Omega_\epsilon} |\nabla w_\epsilon|^2 = \int_0^\epsilon \int_\omega \frac{P^2}{4\mu^2}(\epsilon - 2x_3)^2 \; dx_1 dx_2 dx_3 \\
&= \int_\omega dx_1 dx_2 \int_0^\epsilon \frac{P^2}{4\mu^2}(\epsilon - 2x_3)^2 \; dx_3 \\
&= \mathrm{A}(\omega)\frac{P^2}{4\mu^2}\int_0^\epsilon (\epsilon - 2x_3)^2 \; dx_3 \;=\; \frac{\mathrm{A}(\omega)\epsilon^3}{12\mu^2}P^2. \qquad (3.140)
\end{aligned}$$

Suponha que v_ϵ é solução de (3.134) e seja $V_\epsilon = v_\epsilon - w_\epsilon$. Logo, V_ϵ satisfaz

$$\begin{cases}
-\mu\Delta V_\epsilon + (V_\epsilon\cdot\nabla)V_\epsilon + (V_\epsilon\cdot\nabla)w_\epsilon + (w_\epsilon\cdot\nabla)V_\epsilon + \nabla q_\epsilon = 0 & em \quad \Omega_\epsilon; \\
\mathbf{div}\; V_\epsilon = 0 & em \quad \Omega_\epsilon; \\
V_\epsilon = 0 \;\; \text{em } \omega\times\{0,\epsilon\} \text{ e } \omega \text{ é periódica nas direções } x_1 \text{ e } x_2. &
\end{cases} \qquad (3.141)$$

Multiplicando a equação em (3.141) por V_ϵ, obtem-se

$$-V_\epsilon\mu\Delta V_\epsilon + V_\epsilon(V_\epsilon\cdot\nabla)V_\epsilon + V_\epsilon(V_\epsilon\cdot\nabla)w_\epsilon + V_\epsilon(w_\epsilon\cdot\nabla)V_\epsilon + V_\epsilon\nabla q_\epsilon = 0. \qquad (3.142)$$

Integrando em Ω_ϵ,

$$\begin{aligned}
-\mu\int_{\Omega_\epsilon} V_\epsilon\Delta V_\epsilon \; dx \quad &+ \underbrace{\int_{\Omega_\epsilon} V_\epsilon(V_\epsilon\cdot\nabla)V_\epsilon \; dx}_{=\,0} + \int_{\Omega_\epsilon} V_\epsilon(V_\epsilon\cdot\nabla)w_\epsilon \; dx + \\
&+ \underbrace{\int_{\Omega_\epsilon} V_\epsilon(w_\epsilon\cdot\nabla)V_\epsilon \; dx}_{=\,0} + \int_{\Omega_\epsilon} V_\epsilon\nabla q_\epsilon \; dx = 0. \qquad (3.143)
\end{aligned}$$

O item (ii) do teorema 1.2.4 (Fórmulas de Green) garante que

$$\int_{\Omega_\epsilon} \nabla V_\epsilon\cdot\nabla V_\epsilon \; dx = -\int_{\Omega_\epsilon} V_\epsilon\Delta V_\epsilon \; dx + \int_{\partial\Omega_\epsilon} \frac{\partial V_\epsilon}{\partial \mathbf{n}} V_\epsilon \; dS.$$

A integral na fronteira da expressão acima é nula e assim,

$$\int_{\Omega_\epsilon} \nabla V_\epsilon\cdot\nabla V_\epsilon \; dx = -\int_{\Omega_\epsilon} V_\epsilon\Delta V_\epsilon \; dx. \qquad (3.144)$$

Já o item (iii) do mesmo teorema afirma que

$$\int_{\Omega_\epsilon} (V_\epsilon\Delta V_\epsilon - V_\epsilon\Delta V_\epsilon) \; dx = \int_{\partial\Omega_\epsilon}\left(V_\epsilon\frac{\partial V_\epsilon}{\partial\mathbf{n}} - V_\epsilon\frac{\partial V_\epsilon}{\partial\mathbf{n}}\right) \; dS.$$

Novamente, a integral na fronteira é nula e, utilizando a expressão em (3.144), tem-se que

$$\int_{\Omega_\epsilon} V_\epsilon \Delta V_\epsilon \; dx + \int_{\Omega_\epsilon} \nabla V_\epsilon \cdot \nabla V_\epsilon \; dx = 0,$$

ou seja

$$\int_{\Omega_\epsilon} V_\epsilon \Delta V_\epsilon \; dx = - \int_{\Omega_\epsilon} \nabla V_\epsilon \cdot \nabla V_\epsilon \; dx,$$

isto é,

$$-\mu \int_{\Omega_\epsilon} V_\epsilon \Delta V_\epsilon \; dx = -\mu \left|\left|V_\epsilon\right|\right|_\epsilon^2 = -\mu \left|A_\epsilon^{1/2} V_\epsilon\right|_\epsilon^2 . \tag{3.145}$$

Note que, pelo item (v) do teorema 1.2.2,

$$\mathbf{div}(q_\epsilon V_\epsilon) = \nabla q_\epsilon V_\epsilon + q_\epsilon \underbrace{\mathbf{div} V_\epsilon}_{=\,0}$$

isto é,

$$\int_{\Omega_\epsilon} \mathbf{div}(q_\epsilon V_\epsilon) \; dx = \int_{\Omega_\epsilon} \nabla q_\epsilon V_\epsilon \; dx.$$

A partir dai, pelo teorema 1.2.3, tem-se

$$\int_{\Omega_\epsilon} \mathbf{div}(q_\epsilon V_\epsilon) \; dx = \int_{\partial\Omega_\epsilon} (q_\epsilon V_\epsilon) \cdot \mathbf{n} \; dS = 0$$

pois V_ϵ restrita a fronteira de Ω_ϵ é nula. Logo,

$$\int_{\Omega_\epsilon} \nabla q_\epsilon V_\epsilon \; dx = 0. \tag{3.146}$$

Substituindo (3.146) e (3.145) em (3.143), obtem-se

$$-\mu \left|A_\epsilon^{1/2} V_\epsilon\right|_\epsilon^2 + \int_{\Omega_\epsilon} V_\epsilon (V_\epsilon \cdot \nabla) w_\epsilon \; dx = 0 \tag{3.147}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \mu \left|A_\epsilon^{1/2} V_\epsilon\right|_\epsilon^2 &= -\int_{\Omega_\epsilon} V_\epsilon (V_\epsilon \cdot \nabla) w_\epsilon \; dx \;\leq\; \int_{\Omega_\epsilon} \left|V_\epsilon\right|_\epsilon \left|\nabla w_\epsilon\right|_\epsilon \left|V_\epsilon\right|_\epsilon \; dx \\ &\leq \left|\nabla w_\epsilon\right|_{L^\infty(\Omega_\epsilon)} \int_{\Omega_\epsilon} \left|V_\epsilon\right|_\epsilon^2 \; dx \;=\; \left|\nabla w_\epsilon\right|_{L^\infty(\Omega_\epsilon)} \left|V_\epsilon\right|_\epsilon^2 . \end{aligned}$$

Utilizando a desigualdade de Poncarè e (3.136),

$$\begin{aligned} \mu \left| A_\epsilon^{1/2} V_\epsilon \right|_\epsilon^2 &\leq \left| \nabla w_\epsilon \right|_{L^\infty(\Omega_\epsilon)} \left| V_\epsilon \right|_\epsilon^2 \leq \left| \nabla w_\epsilon \right|_{L^\infty(\Omega_\epsilon)} \mathrm{c}^2 \left| \nabla V_\epsilon \right|_\epsilon^2 \\ &= \frac{\epsilon}{2\mu} P \mathrm{c}^2 \left| A_\epsilon^{1/2} V_\epsilon \right|_\epsilon^2, \end{aligned} \tag{3.148}$$

onde c é uma constante. Daí, $\left[\mu - \dfrac{\epsilon P \mathrm{c}}{2\mu}\right] \left| A_\epsilon^{1/2} V_\epsilon \right|_\epsilon^2 \leq 0.$. Portanto, supondo que $\epsilon < \frac{2\mu^2}{P\mathrm{c}^2}$, tem-se que

$$\left| A_\epsilon^{1/2} V_\epsilon \right|_\epsilon^2 = \left| \nabla V_\epsilon \right|_\epsilon^2 = 0, \tag{3.149}$$

a partir do qual $\nabla V_\epsilon \equiv 0$ q.s. em Ω_ϵ, ou seja, $V_\epsilon = \mathrm{k}$, k constante, q.s. em Ω_ϵ e, como V_ϵ é nula em $\partial \Omega_\epsilon$, segue que $V_\epsilon = 0$.

Assim, foi provado que, para ϵ suficientemente pequeno com relação a P e μ, a solução do problema estacionário (3.134) é única, dada por w_ϵ.

Com essas informações, considera-se agora o caso não estacionário. Seja $U_\epsilon = u_\epsilon - w_\epsilon$, isto é, U_ϵ é a diferença entre a solução forte u_ϵ dada pelo teorema 3.2.1 e a solução única do caso estacionário w_ϵ vista acima. A equação diferencial parcial satisfeita por U_ϵ é dada por

$$\frac{\partial U_\epsilon}{\partial t} - \mu \Delta U_\epsilon + (U_\epsilon \cdot \nabla) U_\epsilon + (U_\epsilon \cdot \nabla) w_\epsilon + (w_\epsilon \cdot \nabla) U_\epsilon + \nabla q_\epsilon = 0, \tag{3.150}$$

em Ω_ϵ. De fato, resolvendo (3.150), tem-se

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_\epsilon}{\partial t} - \underbrace{\frac{\partial w_\epsilon}{\partial t}}_{=0} &- \mu \Delta u_\epsilon + \mu \Delta w_\epsilon + (u_\epsilon - w_\epsilon) \cdot \nabla (u_\epsilon - w_\epsilon) + (u_\epsilon - w_\epsilon) \cdot \nabla w_\epsilon \\ &+ (w_\epsilon \cdot \nabla)(u_\epsilon - w_\epsilon) + \nabla q_\epsilon \\ &= \frac{\partial u_\epsilon}{\partial t} - \mu \Delta u_\epsilon + \mu \Delta w_\epsilon + u_\epsilon \cdot \nabla u_\epsilon - u_\epsilon \cdot \nabla w_\epsilon - w_\epsilon \cdot \nabla u_\epsilon + w_\epsilon \cdot \nabla w_\epsilon \\ &+ u_\epsilon \cdot \nabla w_\epsilon - w_\epsilon \cdot \nabla w_\epsilon + w_\epsilon \cdot \nabla u_\epsilon - w_\epsilon \cdot \nabla w_\epsilon + \nabla q_\epsilon \\ &= \frac{\partial u_\epsilon}{\partial t} - \mu \Delta u_\epsilon + \mu \Delta w_\epsilon + u_\epsilon \cdot \nabla u_\epsilon - w_\epsilon \cdot \nabla w_\epsilon + \nabla q_\epsilon \\ &= -(P_1 e_1 + P_2 e_2) + (P_1 e_1 + P_2 e_2) = 0. \end{aligned}$$

Além disso, $\textbf{div}\ U_\epsilon = \textbf{div}\ u_\epsilon - \textbf{div}\ w_\epsilon = 0$.

Logo, o sistema satisfeito por U_ϵ é

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U_\epsilon}{\partial t} - \mu \Delta U_\epsilon + (U_\epsilon \cdot \nabla) U_\epsilon + (U_\epsilon \cdot \nabla) w_\epsilon + (w_\epsilon \cdot \nabla) U_\epsilon + \nabla q_\epsilon = 0 \quad em \quad \Omega_\epsilon; \\ \textbf{div } U_\epsilon = 0 \quad em \quad \Omega_\epsilon; \\ U_\epsilon = 0 \ \text{ em } \omega \times \{0, \epsilon\} \text{ e } \omega \text{ é periódica nas direções } x_1 \text{ e } x_2; \\ U_\epsilon(t=0) = u_{0\epsilon} - w_\epsilon. \end{cases} \tag{3.151}$$

Muliplicando (3.150) por $A_\epsilon U_\epsilon$ e integrando em Ω_ϵ,

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial U_\epsilon}{\partial t}, A_\epsilon U_\epsilon \right)_\epsilon &- \mu \left(\Delta U_\epsilon, A_\epsilon U_\epsilon \right)_\epsilon + \left(U_\epsilon \cdot \nabla U_\epsilon, A_\epsilon U_\epsilon \right)_\epsilon + \left(U_\epsilon \cdot \nabla w_\epsilon, A_\epsilon U_\epsilon \right)_\epsilon \\ &+ \left(w_\epsilon \cdot \nabla U_\epsilon, A_\epsilon U_\epsilon \right)_\epsilon + \left(\nabla q_\epsilon, A_\epsilon U_\epsilon \right)_\epsilon = 0, \end{aligned} \tag{3.152}$$

a partir do qual tem-se

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial U_\epsilon}{\partial t}, A_\epsilon U_\epsilon \right)_\epsilon &= \left(A_\epsilon^{1/2} \left(\frac{\partial U_\epsilon}{\partial t} \right), A_\epsilon^{1/2} U_\epsilon \right)_\epsilon = \left(\frac{\partial}{\partial t} A_\epsilon^{1/2} U_\epsilon, A_\epsilon^{1/2} U_\epsilon \right)_\epsilon \\ &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left(A_\epsilon^{1/2} U_\epsilon, A_\epsilon^{1/2} U_\epsilon \right)_\epsilon = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left| A_\epsilon^{1/2} U_\epsilon \right|_\epsilon^2. \end{aligned}$$

Como $A_\epsilon U_\epsilon = -\Delta U_\epsilon$ para todo $U_\epsilon \in D(A_\epsilon)$, então

$$-\mu \left(\Delta U_\epsilon, A_\epsilon U_\epsilon \right)_\epsilon = \mu \left(A_\epsilon U_\epsilon, A_\epsilon U_\epsilon \right)_\epsilon = \mu \left| A_\epsilon U_\epsilon \right|_\epsilon^2.$$

Além disso, $\left(\nabla q_\epsilon, A_\epsilon U_\epsilon \right)_\epsilon = 0$ e, utilizando a desigualdade de Hölder generalizada (teorema 1.3.8), obtem-se as seguintes estimativas:

(I) Com $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{2}$,

$$\left(U_\epsilon \cdot \nabla U_\epsilon, A_\epsilon U_\epsilon \right)_\epsilon \ \le \ \left| U_\epsilon \right|_p \left| \nabla U_\epsilon \right|_q \left| A_\epsilon U_\epsilon \right|_2.$$

Escolhendo $p = 6$ e $q = 3$ e utilizando as Imersões de Sobolev (teorema 1.2.5),

$$\begin{aligned} \left(U_\epsilon \cdot \nabla U_\epsilon, A_\epsilon U_\epsilon \right)_\epsilon &\le \left| U_\epsilon \right|_6 \left| \nabla U_\epsilon \right|_3 \left| A_\epsilon U_\epsilon \right|_2 \ \le \ \left| U_\epsilon \right|_2 \left| \nabla U_\epsilon \right|_2 \left| A_\epsilon U_\epsilon \right|_2 \\ \text{(pela Corol. 2.4.2)} \quad &\le \epsilon \left| \nabla U_\epsilon \right|_\epsilon \epsilon \left| \nabla (\nabla U_\epsilon) \right|_\epsilon \left| A_\epsilon U_\epsilon \right|_\epsilon \\ \text{(pelo Teo. 2.4.1)} \quad &\le \epsilon^2 \left| A_\epsilon^{1/2} U_\epsilon \right|_\epsilon c_0 \left| A_\epsilon U_\epsilon \right|_\epsilon \left| A_\epsilon U_\epsilon \right|_\epsilon \\ &\le c_0 \epsilon^{1/2} \left| A_\epsilon^{1/2} U_\epsilon \right|_\epsilon \left| A_\epsilon U_\epsilon \right|_\epsilon^2, \end{aligned} \tag{3.153}$$

já que $\epsilon^2 \le \epsilon^{1/2}$ pois $0 < \epsilon < 1$ e c_0 é a constante do teorema 2.4.1.

(II) Tomando $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}=1$ com $q=r=2$ e $p=\infty$,

$$
\begin{aligned}
(U_\epsilon\cdot\nabla w_\epsilon, A_\epsilon U_\epsilon)_\epsilon &\le |U_\epsilon|_\infty\,|\nabla w_\epsilon|_2\,|A_\epsilon U_\epsilon|_2 \;\le\; |U_\epsilon|_2\,|\nabla w_\epsilon|_2\,|A_\epsilon U_\epsilon|_2\\
\text{(pela Corol. 2.4.2)} &\le \epsilon\,|\nabla U_\epsilon|_\epsilon\,|\nabla w_\epsilon|_\epsilon\,|A_\epsilon U_\epsilon|_\epsilon\\
\text{(pelo Teo. 2.4.1)} &\le c_0\epsilon\,|A_\epsilon U_\epsilon|_\epsilon\,|\nabla w_\epsilon|_\epsilon\,|A_\epsilon U_\epsilon|_\epsilon\\
\text{(por 3.140)} &= c_0\epsilon\frac{\sqrt{\mathrm{A}(\omega)}\epsilon\sqrt{\epsilon}}{\sqrt{12}\mu}P\,|A_\epsilon U_\epsilon|_\epsilon^2 \;=\; c_0\frac{\epsilon^{5/2}\sqrt{\mathrm{A}(\omega)}}{\sqrt{12}\mu}P\,|A_\epsilon U_\epsilon|_\epsilon^2\\
&\le c_0\frac{\epsilon^2\sqrt{\mathrm{A}(\omega)}}{\mu}P\,|A_\epsilon U_\epsilon|_\epsilon^2, \qquad (3.154)
\end{aligned}
$$

já que $\epsilon^{5/2}\le\epsilon^2$ pois $0<\epsilon<1$.

(III) Novamente, tomando $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}=1$ com $q=r=2$ e $p=\infty$,

$$
\begin{aligned}
(w_\epsilon\cdot\nabla U_\epsilon, A_\epsilon U_\epsilon)_\epsilon &\le |w_\epsilon|_\infty\,|\nabla U_\epsilon|_2\,|A_\epsilon U_\epsilon|_2\\
\text{(pela Corol. 2.4.2)} &\le |w_\epsilon|_\infty\,\epsilon\,|\nabla(\nabla U_\epsilon)|_\epsilon\,|A_\epsilon U_\epsilon|_\epsilon\\
\text{(pelo Teo. 2.4.1)} &\le c_0\epsilon\,|w_\epsilon|_\infty\,|A_\epsilon U_\epsilon|_\epsilon\,|A_\epsilon U_\epsilon|_\epsilon\\
\text{(por 3.138)} &= c_0\epsilon\frac{\epsilon^2}{8\mu}P\,|A_\epsilon U_\epsilon|_\epsilon^2 \;=\; c_0\frac{\epsilon^3}{8\mu}P\,|A_\epsilon U_\epsilon|_\epsilon^2. \qquad (3.155)
\end{aligned}
$$

Substituindo em (3.152) as estimativas encontradas acima, tem-se

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left|A_\epsilon^{1/2}U_\epsilon\right|_\epsilon^2+\mu\,|A_\epsilon U_\epsilon|_\epsilon^2 &\le \left(c_0\frac{\epsilon^2\sqrt{\mathrm{A}(\omega)}P}{\mu}+c_0\frac{\epsilon^3 P}{8\mu}\right)|A_\epsilon U_\epsilon|_\epsilon^2\\
&+ c_0\epsilon^{1/2}\left|A_\epsilon^{1/2}U_\epsilon\right|_\epsilon|A_\epsilon U_\epsilon|_\epsilon^2, \qquad (3.156)
\end{aligned}
$$

onde c_0 é uma constante. Tomando ϵ suficientemente pequeno, de forma que

$$
c_0\epsilon^2\sqrt{\mathrm{A}(\omega)}+\frac{\epsilon^3}{8} \le \frac{\mu^2}{2c_0P}, \qquad (3.157)
$$

obtem-se

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left|A_\epsilon^{1/2}U_\epsilon\right|_\epsilon^2+\mu\,|A_\epsilon U_\epsilon|_\epsilon^2 &\le \frac{\mu}{2}|A_\epsilon U_\epsilon|_\epsilon^2+c_0\epsilon^{1/2}\left|A_\epsilon^{1/2}U_\epsilon\right|_\epsilon|A_\epsilon U_\epsilon|_\epsilon^2\\
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left|A_\epsilon^{1/2}U_\epsilon\right|_\epsilon^2+\frac{\mu}{2}|A_\epsilon U_\epsilon|_\epsilon^2 &\le c_0\epsilon^{1/2}\left|A_\epsilon^{1/2}U_\epsilon\right|_\epsilon|A_\epsilon U_\epsilon|_\epsilon^2. \qquad (3.158)
\end{aligned}
$$

Agora, suponha que $\left|A_\epsilon^{1/2}U_\epsilon(0)\right|_\epsilon^2 < \dfrac{\mu^2}{16c_0^2\epsilon}$ e seja T_ϵ o tempo máximo onde

$$\left|A_\epsilon^{1/2}U_\epsilon(t)\right|_\epsilon^2 \;\leq\; \frac{\mu^2}{16c_0^2\epsilon}, \qquad \forall\;\; t \in [0, T_\epsilon). \tag{3.159}$$

Substituindo em (3.158), tem-se

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left|A_\epsilon^{1/2}U_\epsilon\right|_\epsilon^2 + \frac{\mu}{2}\left|A_\epsilon U_\epsilon\right|_\epsilon^2 \;\leq\; c_0\epsilon^{1/2}\frac{\mu}{4c_0\epsilon^{1/2}}\left|A_\epsilon U_\epsilon\right|_\epsilon^2 \;\leq\; 0, \tag{3.160}$$

para todo $t \in [0, T_\epsilon)$. A partir daí, concluí-se que $\left|A_\epsilon^{1/2}U_\epsilon(t)\right|_\epsilon^2$ é decrescente e $T_\epsilon = \infty$.

Ainda, utilizando o corolário 2.4.2 aplicado à ∇U_ϵ,

$$\left|\nabla U_\epsilon\right|_\epsilon \leq \epsilon\left|\nabla\left(\nabla U_\epsilon\right)\right|_\epsilon, \tag{3.161}$$

e pelo teorema 2.4.1,

$$\left|\nabla U_\epsilon\right|_\epsilon^2 \;\leq\; \epsilon\left|\nabla\left(\nabla U_\epsilon\right)\right|_\epsilon^2 \;\leq\; \epsilon c\left|A_\epsilon U_\epsilon\right|^2 \;\leq\; \epsilon c\left|A_\epsilon U_\epsilon\right|^2,$$

ou seja, $\dfrac{1}{\epsilon c}\left|A_\epsilon^{1/2}U_\epsilon\right|_\epsilon^2 \;\leq\; \left|A_\epsilon U_\epsilon\right|^2$, e, de (3.160), obtem-se

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left|A_\epsilon^{1/2}U_\epsilon(t)\right|_\epsilon^2 + \frac{\mu}{4\epsilon c}\left|A_\epsilon^{1/2}U_\epsilon(t)\right|_\epsilon^2 \;\leq\; 0, \tag{3.162}$$

para todo $t > 0$. Aplicando a 2ª versão da desigualdade de Gronwall, tomando as funções

$$\eta(t) = \left|A_\epsilon^{1/2}U_\epsilon(t)\right|_\epsilon^2, \quad \phi(t) = -\frac{\mu}{2\epsilon c} \;\text{ e }\; \psi(t) = 0, \tag{3.163}$$

tem-se

$$\left|A_\epsilon^{1/2}U_\epsilon(t)\right|_\epsilon^2 \;\leq\; \left|A_\epsilon^{1/2}U_\epsilon(0)\right|_\epsilon^2 e^{-\frac{\mu}{2\epsilon c}}, \qquad \forall\;\; t > 0. \tag{3.164}$$

Assim, para ϵ satisfazendo (3.157), infere-se a seguinte expansão assintótica para a solução forte u_ϵ para o caso não estacionário do sistema de equações de Navier-Stokes, dada por

$$u_\epsilon(t) = -\frac{x_3(x_3-\epsilon)}{2\mu}(P_1e_1 + P_2e_2) + U_\epsilon(t), \tag{3.165}$$

com $0 \leq t < \infty$ e $||U_\epsilon(t)||_\epsilon^2 \;\leq\; ||u_{0\epsilon} - w_\epsilon||_\epsilon^2\, e^{-\frac{\mu}{2\epsilon c}}$.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] Adams, R. A., and Fournier, J. J. *Sobolev spaces*, vol. 140. Academic press, 2003.

[2] Brezis, H. *Analyse fonctionelle*, vol. 5. Masson, 1983.

[3] Chorin, A. J., and Marsden, J. E. *A mathematical introduction to fluid mechanics*, vol. 2. Springer New York, 1990.

[4] Evans, L. *Partial Differential Equations.* Graduate studies in mathematics. American Mathematical Society.

[5] Foias, C., Manley, I., Rosa, R., Temam, R., and Mayer, M. E. *Navier-Stokes equations and turbulence*, vol. 55. Taylor & Francis, 2002.

[6] Fox, R., and McDonald, A. *Introdução a Mecânica dos Fluidos, 3ª edição.* Ed. Guanabara, 1988.

[7] Kreiss, H.-O., and Lorenz, J. *Initial-boundary value problems and the Navier-Stokes equations*, vol. 136. Academic Press, 1989.

[8] Lions, J.-L. *Quelques méthodes de résolution des problemes aux limites non linéaires*, vol. 31. Dunod Paris, 1969.

[9] Melo, S. T., and Neto, F. M. *Mecânica dos fluidos e equações diferenciais.* IMPA, 1991.

[10] Raugel, G., and Sell, G. R. Equations de navier-stokes dans des domaines minces en dimension trois: régularité globale. *Comptes rendus de l'Académie des sciences. Série 1, Mathématique 309*, 6 (1989), 299–303.

[11] Rudin, W. *Real and complex analysis (3rd).* McGraw-Hill Inc, 1986.

[12] Temam, R. *Navier–Stokes Equations.* American Mathematical Soc., 1984.

[13] Temam, R. *Navier-Stokes equations and nonlinear functional analysis*, vol. 66. SIAM, 1995.

[14] Temam, R., and Ziane, M. Navier-stokes equations in three-dimensional thin domains with various boundary conditions. *Advances in Differential Equations 1*, 4 (1996), 499–546.

[15] Ziane, M. On the two-dimensional navier—stokes equations with the free boundary condition. *Applied Mathematics and Optimization 38*, 1 (1998), 1–19.

Apêndice A

O Operador de Stokes

Neste apêndice, serão apresentados definições e propriedades utilizadas ao decorrer do texto, em especial no capítulo 4, do operador de Stokes (para mais detalhes, veja [5]). Formalmente, tem-se a seguinte definição:

Definição A.0.1 (Operador de Stokes) *Seja $P : \mathbb{L}^2(\Omega_\epsilon) \to H_\epsilon$ o operador projeção. Define-se o operador de Stokes, denotado por A_ϵ, por*

$$\begin{aligned} A_\epsilon : V_\epsilon \cap \mathbb{H}^2(\Omega_\epsilon) \subset H_\epsilon &\longrightarrow H_\epsilon \\ u &\longmapsto A_\epsilon u = -P(\Delta u) \end{aligned} \tag{A.1}$$

Note que, como $u \in H^2(\Omega_\epsilon)$, o Laplaciano Δu é quadrado integrável, de modo que o operador projeção pode ser aplicado e assim $A_\epsilon u$ esta bem definido em H_ϵ.

Para facilitar, denota-se $D(A_\epsilon) = V_\epsilon \cap H^2(\Omega_\epsilon)$. Através de integração por partes, é possível mostrar que tal operador é auto-adjunto, isto é, para todo $u, v \in D(A_\epsilon)$,

$$(A_\epsilon u, v)_\epsilon = (u, A_\epsilon v)_\epsilon\,, \tag{A.2}$$

e também que A_ϵ é um operador definido positivo, ou seja,

$$(A_\epsilon u, u)_\epsilon = ||u||_\epsilon^2 \ > \ 0, \quad \forall \ \ u \in D(A_\epsilon). \tag{A.3}$$

Além disso, A_ϵ^{-1} também é auto-adjunto

A partir da teoria de operadores auto-adjuntos compactos, é possivel escolher uma base ortonormal $\{w_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ em H_ϵ e uma sequência de autovalores reais $\{\sigma_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ de A_ϵ tendendo à zero de tal modo que

$$A_\epsilon^{-1} w_m \ = \ \sigma_m w_m, \qquad m \in \mathbb{N}. \tag{A.4}$$

Pondo $\lambda_m = \dfrac{1}{\sigma_m}$,

$$A_\epsilon w_m \ = \ \lambda_m w_m, \qquad m \in \mathbb{N}. \tag{A.5}$$

Observe que, desta forma, podemos ordenar os valores λ_m como

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \ldots \leq \lambda_m \leq \ldots, \tag{A.6}$$

onde $\lambda_m \to +\infty$ quando $m \to +\infty$. Como já mencionado no texto, o primeiro autovalor λ_1 é a melhor (e a menor) constante para a desigualdade de Poincarè.

Já que $\{w_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ é uma base ortonormal em H_ϵ, é possivel expandir cada $u \in H_\epsilon$ em termos da sua projeção ortogonal em cada auto-espaço associado, ou seja,

$$u = \sum_{m=1}^{\infty} \widehat{u}_m w_m, \tag{A.7}$$

onde $\widehat{u}_m = (u, w_m)_\epsilon$.

Um conceito interessante e bastante utilizado são as potências do operador de Stokes. Define-se A_ϵ^s, $(s \geq 0)$ por

$$A_\epsilon^s = \sum_{m=0}^{\infty} \lambda_m^s \widehat{u}_m w_m. \tag{A.8}$$

O espaço V_{2s}, para todo $s \geq 0$, é formado pelas funções u tais que

$$\sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m^{2s} \left|\widehat{u}_m\right|_\epsilon^2 < \infty, \tag{A.9}$$

e o domínio de A_ϵ^s coincide com este espaço, isto é, $D(A_\epsilon^s) = V_{2s}$, cujo produto interno é dado por $(u, v)_{D(A_\epsilon^s)} = (A_\epsilon^s u, A_\epsilon^s v)_\epsilon$, e a norma

$$|u|_{D(A_\epsilon^s)} = |A_\epsilon u|_\epsilon = \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m^{2s} \left|\widehat{u}_m\right|_\epsilon^2, \tag{A.10}$$

com $u, v \in D(A_\epsilon^s)$. Quando $s = \frac{1}{2}$, observe que

$$\begin{aligned}
|u|_{D(A_\epsilon^{1/2})}^2 &= \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m \left|\widehat{u}_m\right|_\epsilon^2 = \sum_{m=1}^{\infty} (u, \lambda_m w_m)_\epsilon \, \widehat{u}_m = \sum_{m=1}^{\infty} (u, A_\epsilon w_m)_\epsilon \, \widehat{u}_m \\
&= \sum_{m=1}^{\infty} (A_\epsilon u, w_m)_\epsilon \, \widehat{u}_m = \sum_{m=1}^{\infty} (A_\epsilon u, w_m \widehat{u}_m)_\epsilon = (A_\epsilon u, u)_\epsilon \\
&= ((u, u))_\epsilon = ||u||_\epsilon^2 .
\end{aligned} \tag{A.11}$$

Tem-se, portanto, $D(A_\epsilon^{1/2}) = V_\epsilon$. Tal fato implica na seguinte relação, bastante utilizada no decorrer do texto:

$$(u, v)_{D(A^{1/2})} = ((u, v))_\epsilon = (\nabla u, \nabla v)_\epsilon \quad \forall\ u, v \in D(A_\epsilon^{1/2}), \tag{A.12}$$

ou seja,

$$||u||_\epsilon = \left|A_\epsilon^{1/2} u\right|_\epsilon . \tag{A.13}$$