UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA MARIA
CENTRO DE CIÊNCIAS NATURAIS E EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

ESPAÇOS FUNCIONAIS E OPERADORES LINEARES EM ELETROMAGNETISMO

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Marcos Teixeira Alves

Santa Maria, RS, Brasil

2012

ESPAÇOS FUNCIONAIS E OPERADORES LINEARES EM ELETROMAGNETISMO

Marcos Teixeira Alves

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado do Programa de Pós-Graduação em Matemática, Área de Concentração em Análise, da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM, RS), como requisito parcial para obtenção do grau de
Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Marcio Violante Ferreira

Santa Maria, RS, Brasil

2012

Universidade Federal de Santa Maria
Centro de Ciências Naturais e Exatas
Programa de Pós-Graduação em Matemática

A Comissão Examinadora, abaixo assinada,
aprova a Dissertação de Mestrado

ESPAÇOS FUNCIONAIS E OPERADORES LINEARES EM ELETROMAGNETISMO

elaborada por
Marcos Teixeira Alves

como requisito parcial para obtenção do grau de
Mestre em Matemática

COMISSÃO EXAMINADORA:

Marcio Violante Ferreira, Dr.
(Orientador)

Octavio Paulo Vera Villagran, Dr. (Universidad del Bío-Bío - Chile)

Celene Buriol, Drª. (UFSM)

Santa Maria, 29 de fevereiro de 2012.

AGRADECIMENTOS

Esta dissertação só pôde ser concluída graças à amizade e ao companheirismo de algumas pessoas. Meus agradecimentos especiais a minha família de Treze de Maio - SC por todo apoio recebido nesses últimos dois anos. A meus pais, Joraci e Shirlei e a meus irmãos, Éderson e Mariane, sou infinitamente grato por todo carinho e amor que depositam. A minha sobrinha favorita Ana Beatriz pelas brincadeiras e pelas conversas descontraídas por telefone. A minha querida vó Benta que mesmo ausente continua sendo meu exemplo de vida. Acreditem, tudo o que sou devo a vocês!

Registro também meus agradecimentos especiais ao professor Marcio. Não apenas pela orientação que recebi, mas sobretudo pelos incontáveis conselhos e pelo exemplo de vida profissional. Obrigado pela paciência na elaboração desse trabalho e pelas exímias aulas de EDP e Análise Funcional. Agradeço aos professores Octavio Paulo, Celene e João Paulo pela leitura deste texto e pelas palavras de incentivo.

A meus colegas de mestrado, agradeço pela companhia nesse período 2010-2011. Aos amigos que aqui tive o privilégio de conviver: Adilson, Cinara, Graciele, Lorens e Marcia, agradeço pelos momentos marcantes dessa caminhada. Será impossível esquecer dos momentos de diversão no UNO, das horas incansáveis de estudo em grupo na sala 1213, das partidas de vôlei e dos churrascos de confraternização! Meu carinho especial a grande amiga paraibana Juliana pelas inúmeras conversas na pensão da Dona Sônia e por tornar esse período em Santa Maria tão alegre.

Por toda minha formação adquirida durante o mestrado foi decisiva a participação de professores dedicados e empolgados pela mãe das ciências: a matemática. Sou extremamente grato a vocês! Não deixaria de citar o nome do professor Maurício pela confiança e pelo incentivo constante para que eu continuasse seguindo a carreira acadêmica. Sentirei saudade daquela aula de topologia à la papel, cola e tesoura!

Agradeço a secretaria Andréia pela eficácia nos pedidos que realizei e por sua maneira serena de resolver as adversidades. A todos funcionários da Universidade Federal de Santa Maria que de forma direta ou indireta contribuíram pelos bons momentos acadêmicos. À CAPES, sou grato pelo apoio financeiro concedido.

Por fim e o mais importante, agradeço a Deus por sua infinita bondade. Graças às suas bençãos, pude concluir mais essa etapa de minha vida. A Ele, minha eterna gratidão!

RESUMO

Dissertação de Mestrado
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Universidade Federal de Santa Maria

ESPAÇOS FUNCIONAIS E OPERADORES LINEARES EM ELETROMAGNETISMO

AUTOR: MARCOS TEIXEIRA ALVES
ORIENTADOR: DR. MARCIO VIOLANTE FERREIRA
Local e Data da Defesa: Santa Maria, 29 de fevereiro de 2012.

Neste trabalho, caracterizamos os espaços funcionais $H(div, \Omega)$ e $H(rot, \Omega)$ que surgem na teoria matemática do eletromagnetismo e obtemos resultados de traços para as funções destes espaços. Além disso, usamos as técnicas descritas em [14] para mostrar resultados de densidade nos subespaços $H(div\ 0, \Omega)$ e $H_0(div\ 0, \Omega)$ de $[L^2(\Omega)]^3$. O desfecho desse estudo encontra-se nas aplicações a problemas de origem eletromagnética que envolvem as equações de Maxwell. Para obtermos existência e unicidade de solução para estes modelos, recorremos a teoria de semigrupos de operadores lineares.

Palavras-chave: Espaços funcionais em eletromagnetismo. Operador de Maxwell. Equações de Maxwell. Semigrupos de operadores lineares.

ABSTRACT

Master Course Dissertation
Graduate Program in Mathematics
Universidade Federal de Santa Maria

FUNCTIONAL SPACES AND LINEAR OPERATORS IN ELECTROMAGNETISM

AUTHOR: MARCOS TEIXEIRA ALVES
ADVISOR: DR. MARCIO VIOLANTE FERREIRA
Defense Place and Date: Santa Maria, February 29^{nd}, 2012.

In this work, we caracterize the functional spaces $H(div, \Omega)$ and $H(rot, \Omega)$ that arise in the mathematical theory of electromagnetism and we obtain results of traces in this spaces. Furthermore we use the technics described in [14] to prove densities results in the subspaces $H(div\ 0, \Omega)$ and $H_0(div\ 0, \Omega)$ of $[L^2(\Omega)]^3$. The outcome of this study lies in applications to problems of electromagnetic origin involving Maxwell's equations. We use the theory of semigroups of linear operators to get existence and uniqueness of solution for these models.

Keywords: Functional spaces in electromagnetism. Maxwell operator. Maxwell's equations. Semigroups of linear operators.

LISTA DE SÍMBOLOS

$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$	ponto do espaço $\mathbb{R}^n$;
$x \cdot y = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$	produto interno em $\mathbb{R}^n$;
$\lvert x\rvert = \sqrt{x \cdot x}$	norma euclidiana de $x \in \mathbb{R}^n$;
$a \times b$	produto vetorial dos vetores $a, b \in \mathbb{R}^3$;
$(\ ,\ )_X$	produto interno em X;
$\lVert \cdot \rVert_X$	norma no espaço X;
$u_t = \dfrac{\partial u}{\partial t}$	derivada de u em relação a t;
$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$	multi-índice;
$\lvert\alpha\rvert = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$	ordem do multi-índice α ;
q.s., q.t.p.	quase sempre, quase todo ponto;
$f * g$	produto de convolução;
$(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}}$	sequência regularizante;
$B(x_0; \varepsilon)$	bola aberta centrada em x_0 e raio $\varepsilon > 0$;
V'	espaço dual do espaço de Banach V;
$<\ ,\ >$	produto na dualidade $V' \times V$;
$M^\perp$	complemento ortogonal de M;
$X \oplus Y$	soma direta dos espaços X e Y;
$\mathcal{A}$	operador de Maxwell;
$D(\mathcal{A})$	domínio do operador $\mathcal{A}$;
$ker(\mathcal{A})$	núcleo do operador $\mathcal{A}$;
$\mathcal{A}^*$	operador adjunto de $\mathcal{A}$;
$\nabla f = \left(\dfrac{\partial f}{\partial x_1}, \dfrac{\partial f}{\partial x_2}, \dfrac{\partial f}{\partial x_3}\right)$	gradiente da função escalar f;
$\nabla \cdot v = \sum_{i=1}^{3} \dfrac{\partial v_i}{\partial x_i}$	divergente da função $v = (v_1, v_2, v_3)$;
$\nabla \times v = \left(\dfrac{\partial v_3}{\partial x_2} - \dfrac{\partial v_2}{\partial x_3}, \dfrac{\partial v_1}{\partial x_3} - \dfrac{\partial v_3}{\partial x_1}, \dfrac{\partial v_2}{\partial x_1} - \dfrac{\partial v_1}{\partial x_2}\right)$	rotacional da função $v = (v_1, v_2, v_3)$;
$\Delta f = \sum_{i=1}^{3} \dfrac{\partial^2 f}{\partial {x_i}^2}$	laplaciano da função escalar f;
$\Delta v = (\Delta v_1, \Delta v_2, \Delta v_3)$	laplaciano da função $v = (v_1, v_2, v_3)$;

$\mathcal{L}(X,Y)$	conjunto dos operadores $T: X \to Y$ lineares e limitados;
$\mathcal{L}(X)$	álgebra dos operadores lineares e limitados de X;
$\{S(t)\}_{t\geq 0}$	semigrupo de operadores lineares e limitados de X;
K	conjunto compacto do $\mathbb{R}^n$;
Ω	aberto do $\mathbb{R}^n$, sendo $n=3$ quando justificável;
Γ	fronteira de Ω;
η	vetor normal unitário a Γ exterior a Ω;
$\dfrac{\partial v}{\partial \eta} = \nabla v \cdot \eta$	derivada normal de v
$[L^2(\Omega)]^3$	$L^2(\Omega) \times L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$;
$(\ ,\ )$	produto interno em $L^2(\Omega)$ ou $[L^2(\Omega)]^3$;
$\|\| \cdot \|\|$	norma em $L^2(\Omega)$ ou $[L^2(\Omega)]^3$;
$\text{supp}(u)$	suporte da função u;
$\mathcal{C}_0^k(\Omega)$	espaço das funções diferenciáveis até ordem k e com suporte compacto em Ω;
$\mathcal{D}(\Omega)$	$\mathcal{C}_0^\infty(\Omega) = \mathcal{C}^\infty(\Omega) \cap \mathcal{C}_0(\Omega)$ com a noção de convergência;
$\mathcal{D}(\overline{\Omega})$	$\{\varphi\|_\Omega;\ \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)\}$;
$\mathcal{D}'(\Omega)$	$\{T: \mathcal{D}(T) \to \mathbb{R};\ T$ linear e contínua$\}$;
$W^{m,p}(\Omega)$	$\{u \in L^p(\Omega); D^\alpha u \in L^p(\Omega),$ para todo $\|\alpha\| \leq m\}$;
$H^m(\Omega)$	$W^{m,2}(\Omega)$;
$H^{1/2}(\Omega)$	$W^{1/2,2}(\Omega)$;
$W_0^{m,p}(\Omega)$	fecho de $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ em $W^{m,p}(\Omega)$;
E, H	campo elétrico e campo magnético, respectivamente;
D, B	indução elétrica e indução magnética, respectivamente;
$\gamma_\eta(v)$	$v \cdot \eta\|_\Gamma$;
$\gamma_\tau(v)$	$v \times \eta\|_\Gamma$;
$H(div,\Omega)$	$\{v \in [L^2(\Omega)]^3;\ \nabla \cdot v \in L^2(\Omega)\}$;
$H(rot,\Omega)$	$\{v \in [L^2(\Omega)]^3;\ \nabla \times v \in [L^2(\Omega)]^3\}$;
$H_0(div,\Omega)$	$\overline{[\mathcal{D}(\Omega)]^3}^{H(div,\Omega)}$;
$H_0(rot,\Omega)$	$\overline{[\mathcal{D}(\Omega)]^3}^{H(rot,\Omega)}$;
$H(div\ 0,\Omega)$	$\{u \in [L^2(\Omega)]^3;\ \nabla \cdot u = 0\}$;
$H_0(div\ 0,\Omega)$	$\{u \in [L^2(\Omega)]^3;\ \nabla \cdot u = 0$ e $\eta \cdot u\|_\Gamma = 0\}$;
$H(rot\ 0,\Omega)$	$\{v \in [L^2(\Omega)]^3;\ \nabla \times v = 0\}$;
$H_0(rot\ 0,\Omega)$	$\{v \in [L^2(\Omega)]^3;\ \nabla \times v = 0$ e $\eta \times v\|_\Gamma = 0\}$;
$\mathcal{C}([0,\infty),X)$	espaço das funções contínuas de $[0,\infty)$ em X;
$\mathcal{C}^1([0,\infty),X)$	espaço das funções de classe C^1 de $[0,\infty)$ em X;
C	constante positiva que pode assumir valores diferentes em lugares diferentes.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Em 1873, James Clerk Maxwell (físico e matemático britânico) fundou a teoria moderna do eletromagnetismo com a publicação de sua obra *Treatise on Eletricity and Magnetism*, reunindo um conjunto de equações que atualmente levam seu nome.

Estas equações são o suporte matemático para os fenômenos eletromagnéticos, estabelecendo equações diferenciais que relacionam os campos elétrico e magnético e suas respectivas induções. Representaremos por E, H, D e B, os campos elétrico, magnético e as induções elétrica e magnética, respectivamente. Nas aplicações tratadas neste trabalho, consideramos os campos que variam no tempo. Desse modo,

$$E = E(x,t),\ H = H(x,t),\ D = D(x,t) \text{ e } B = B(x,t)$$

são funções vetoriais que dependem da posição espacial $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ e do tempo $t \in \mathbb{R}$, $t \geq 0$.

Os campos apresentados anteriormente são gerados por dois tipos de fontes: *cargas elétricas estáticas* e fluxos de cargas elétricas variáveis chamadas *correntes*. A distribuição de cargas é dada por uma função escalar ρ que representa a densidade de carga elétrica, enquanto que as correntes são descritas por uma função vetorial de densidade de corrente J.

A relação existente entre os campos E, H, D e B e as fontes ρ e J é sintetizada por um conjunto de equações que, em geral, são aplicadas a uma região do espaço $\mathbb{R}^3$ ocupada por um campo eletromagnético. Estas equações, denominadas *equações de Maxwell*, em sua forma diferencial são as seguintes:

$$\frac{\partial D}{\partial t} - \nabla \times H = -J, \tag{1}$$

$$\frac{\partial B}{\partial t} + \nabla \times E = 0, \tag{2}$$

$$\nabla \cdot D = \rho, \tag{3}$$

$$\nabla \cdot B = 0. \tag{4}$$

Descrevemos agora cada uma das equações listadas acima.

A equação (1) é a *Lei de Ampère-Maxwell*. Esta lei coincide com a Lei de Ampère salvo pela adição do termo $\frac{\partial D}{\partial t}$ introduzido por Maxwell.

A equação (2) é chamada *Lei de Faraday.* Ela fornece o efeito da variação da indução magnética no campo elétrico.

A equação (3), conhecida como *Lei de Gauss*, estabelece que o fluxo de indução elétrica através de uma superfície fechada é dado pela carga líquida dentro da superfície, o que significa que as linhas de cargas elétricas começam e terminam com cargas elétricas.

A *Lei de Gauss para o magnetismo* aparece na equação (4) e afirma que o fluxo da indução magnética ao longo de qualquer superfície fechada é nulo.

A partir das equações (1) e (3), relacionamos as densidades ρ e J através da equação

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot J = 0$$

conhecida como *equação da conservação da eletricidade.*

Dada a complexidade do sistema (1)-(4), juntaremos a estas leis universais certas leis constitutivas que incorporam, de forma suficientemente simples, interações eventualmente complexas e que traduzam características particulares dos materiais sem comprometer, dentro de determinados limites, a adequação entre o modelo e a realidade física.

Uma das leis constitutivas aqui consideradas é a *Lei de Ohm*, que destaca uma relação de proporcionalidade entre o campo elétrico E e a densidade de corrente J, ou seja,

$$J = \sigma E, \tag{5}$$

onde σ representa a condutividade do material. Além dessa, dado nosso interesse por modelos de Maxwell aplicados em condutores perfeitos [1], tomamos as *leis de magnetização e polarização* do meio da forma

$$D = \varepsilon E \text{ e } B = \mu H, \tag{6}$$

em que ε representa a constante dielétrica ou capacidade indutiva e μ representa a permeabilidade magnética do meio.

De posse das equações (5) e (6) e considerando $J = 0$, $\rho = 0$ (campo eletromagnético no vácuo com ausência de cargas), reescrevemos o sistema (1)-(4) como segue

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\varepsilon E)}{\partial t} - \nabla \times H &= 0, \\ \frac{\partial(\mu H)}{\partial t} + \nabla \times E &= 0, \\ \nabla \cdot (\varepsilon E) &= 0, \\ \nabla \cdot (\mu H) &= 0. \end{aligned}$$

[1]Um condutor perfeito é um meio fictício tal que $\sigma \to +\infty$. No interior de um condutor perfeito o campo é nulo. Metais são materiais que aproximam-se deste conceito.

Neste trabalho, adotaremos $\varepsilon = \mu = 1$. Desse modo, abordaremos o seguinte *sistema de equações de Maxwell*

$$\frac{\partial E}{\partial t} - \nabla \times H = 0, \tag{7}$$
$$\frac{\partial H}{\partial t} + \nabla \times E = 0, \tag{8}$$
$$\nabla \cdot E = 0, \tag{9}$$
$$\nabla \cdot H = 0. \tag{10}$$

No instante $t = 0$, iremos supor que o campo elétrico $E(x,0) = E_0(x)$ e o campo magnético $H(x,0) = H_0(x)$ sejam conhecidos e satisfaçam as relações:

$$\nabla \cdot E_0 = 0 \text{ e } \nabla \cdot H_0 = 0. \tag{11}$$

Acrescentamos às condições iniciais, as condições de fronteira do meio em estudo. Para esse propósito, seja Ω uma região do espaço $\mathbb{R}^3$ representando um condutor perfeito e Γ sua fronteira. Fisicamente, diante dessas condições, faz sentido considerarmos as seguintes condições de fronteira

$$E \times \eta|_\Gamma = 0 \text{ e } H \cdot \eta|_\Gamma = 0, \tag{12}$$

em que $\eta(x) = (\eta_1(x), \eta_2(x), \eta_3(x))$ denota o vetor normal unitário a $x \in \Gamma$ exterior a Ω.

Sob essas hipóteses, um de nossos objetivos nesse texto será discutir questões relacionadas a existência e unicidade de solução para o sistema de equações de Maxwell (7)-(10) sujeito às condições iniciais em (11) e às condições de fronteira em (12).

Os trabalhos assentes neste modelo linear usam um conjunto de técnicas que passam pela formulação fraca das equações a resolver, permitindo encontrar soluções com menor regularidade do que aquela que é exigível a soluções das equações dos modelos encontrados, referido vulgarmente por formulação forte do problema.

Observamos que nos problemas de eletromagnetismo intervêm essencialmente os operadores diferenciais vetoriais de primeira ordem: divergente e rotacional. Assim, torna-se natural adotarmos os espaços das funções de $[L^2(\Omega)]^3$ cujo divergente ou rotacional são funções de $L^2(\Omega)$ e $[L^2(\Omega)]^3$, respectivamente, como quadro funcional para o estudo desses fenômenos. Estes espaços são designados por $H(div, \Omega)$ e $H(rot, \Omega)$.

Com este espírito, o foco deste trabalho consiste na caracterização destes espaços e em suas aplicações em modelos eletromagnéticos específicos. Organizamos, então, este estudo como segue.

No **Capítulo 1**, enumeramos alguns resultados básicos para a compreensão do restante do texto. Daremos destaque para a teoria dos espaços L^p, das distribuições, dos espaços de Sobolev, dos semigrupos lineares e de resultados da análise funcional de nosso interesse.

No **Capítulo 2**, trataremos dos espaços $H(div,\Omega)$ e $H(rot,\Omega)$ do ponto de vista de suas propriedades topológicas e demonstraremos resultados de densidade. Enaltecemos neste capítulo a caracterização dos traços das funções de $H(div,\Omega)$ e $H(rot,\Omega)$; passo fundamental para dispormos de uma fórmula de integração por partes. Em sua última seção, definiremos os subespaços $H(div\ 0,\Omega)$ e $H_0(div\ 0,\Omega)$ de $[L^2(\Omega)]^3$. Estudaremos propriedades de densidade nestes espaços essenciais para o desenrolar do texto.

O desfecho deste trabalho ocorre no **Capítulo 3** com algumas aplicações dos espaços funcionais estudados anteriormente. Como primeira aplicação, estudamos o sistema de equações de Maxwell com uma condição de fronteira dada por $\eta \times E = 0$. Na segunda aplicação, preocupamo-nos com o sistema de Maxwell no vácuo e condição de fronteira $\eta \times E = 0$. Finalizamos este capítulo obtendo um resultado de existência e unicidade de solução para um sistema de equações de Maxwell num meio condutor perfeito.

A conclusão e as referências utilizadas encerram a dissertação.

Capítulo 1

PRELIMINARES

As ferramentas primordiais de que necessitamos para o desenvolvimento dos capítulos 2 e 3 são apresentadas neste capítulo. Basicamente exibimos resultados de interesse da teoria dos espaços L^p, das distribuições, dos espaços de Sobolev, dos semigrupos lineares e da Análise Funcional. Salientamos que estes fatos são tomados como conhecidos e, por sua vez, não os demonstraremos neste trabalho. Entretanto, as referências para um estudo completo destes fatos são indicadas no decorrer do texto.

1.1 Os espaços L^p

Nesta seção, e ao longo de todo trabalho, utilizaremos a integral de Lebesgue.

Definição 1.1 *Sejam $1 \leq p < \infty$ e $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. O espaço $L^p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$, é o conjunto das funções mensuráveis f em Ω tal que*

$$\int_\Omega |f(x)|^p \, dx < \infty.$$

Para $p = \infty$, denotamos por $L^\infty(\Omega)$ o espaço vetorial de todas funções mensuráveis essencialmente limitadas[2] em Ω.

Um norma em $L^p(\Omega)$ é dada por

$$||f||_{L^p(\Omega)} = ||f||_p = \left(\int_\Omega |f(x)|^p \, dx \right)^{1/p}, \; 1 \leq p < \infty$$

e, para $p = \infty$,

$$||f||_\infty = ess \sup_{x \in \Omega} |f(x)|.$$

[2]Uma função u, mensurável em Ω, é dita *essencialmente limitada* em Ω se existe uma constante K tal que $|u(x)| \leq K$ quase sempre em Ω. A maior das cotas inferiores de tais constantes K é chamada de *supremo essencial* de $|u|$ e é denotado por $ess \sup\limits_{x \in \Omega} |u(x)|$.

A função $||.||_p$ define uma norma que faz de $L^p(\Omega)$ um espaço de Banach. No caso em que $p = 2$, munindo este espaço com o produto interno

$$(u,v)_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega u(x)v(x)\ dx,$$

temos um espaço de Hilbert.

Observação 1.1 *Nos capítulos 2 e 3, utilizaremos com frequência os espaços $L^2(\Omega)$ e $[L^2(\Omega)]^3$. Assim, preocupados em tornar a escrita menos carregada, denotaremos simplesmente por $||\cdot||$ a norma tanto em $L^2(\Omega)$ como em $[L^2(\Omega)]^3$ e por $(\ ,\ )$ o produto interno nestes espaços.*

Enumeramos agora alguns fatos conhecidos que serão usados posteriormente. Sugerimos que o leitor consulte [3], [8] e [11] para melhor se familiarizar com os espaços $L^p(\Omega)$, bem como para uma demonstração dos resultados que seguem.

Proposição 1.1 *Sejam $1 \leq p \leq \infty$ e q seu expoente conjugado, isto é,*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

*Então vale a **desigualdade de Hölder:** se $f \in L^p(\Omega)$ e $g \in L^q(\Omega)$, então $fg \in L^1(\Omega)$ satisfazendo*

$$\int_\Omega |fg|\ dx \leq \left(\int_\Omega |f|^p\right)^{1/p} \left(\int_\Omega |g|^q\ dx\right)^{1/q}.$$

Observação 1.2 *Os elementos de L^p são, na verdade, classes de equivalência, pois a integral não se altera se mudarmos a função num conjunto de medida nula. Assim, quaisquer dois representantes de uma mesma classe coincidem em quase todo ponto (q.t.p.).*

Definição 1.2 *Sejam $1 \leq p \leq \infty$ e Ω um subconjunto aberto do $\mathbb{R}^n$. Diremos que $f : \Omega \to \mathbb{R}$ é localmente integrável em Ω, e denotaremos $f \in L^p_{loc}(\Omega)$, se f for uma função mensurável e para qualquer compacto $K \subset \Omega$, tivermos*

$$\int_K |f(x)|^p\ dx < \infty.$$

Como consequência da desigualdade de Hölder, obtemos o seguinte resultado:

Proposição 1.2 *Seja $1 \leq p \leq \infty$. Então $L^p_{loc}(\Omega) \subset L^1_{loc}(\Omega)$.*

O resultado seguinte é conhecido como *Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue.*

Teorema 1.1 *Suponha que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ seja uma sequência de funções de $L^1(\Omega)$ tal que*

$$f(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n(x)$$

existe para quase todo $x \in \Omega$. Se existe $g \in L^1(\Omega)$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$|f_n(x)| \leq |g(x)|, \text{ quase sempre em } \Omega,$$

então $f \in L^1(\Omega)$ e $||f_n - f||_{L^1(\Omega)} \longrightarrow 0,\ n \to +\infty$.

1.2 Distribuições

As principais referências que utilizamos nesta seção são [1], [4] e [12].

Um multi-índice é uma n-upla de inteiros não-negativos

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n).$$

Denotamos o conjunto de todos os multi-índices por $\mathbb{N}_0^n$. Associamos a um multi-índice os símbolos

$$|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n \text{ e } D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}},$$

sendo que para $\alpha = (0, 0, \ldots, 0)$, definimos $D^0 u = u$ para toda função u. Por D_i, para $i = 1, 2, \ldots, n$, representamos a derivada parcial $\partial/\partial x_i$.

Definição 1.3 *Seja u uma função contínua*[3] *definida em $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. O suporte de u, o qual será denotado por $supp(u)$, é definido como o fecho em Ω do conjunto $\{x \in \Omega;\ u(x) \neq 0\}$. Se este conjunto for um conjunto compacto, diremos que u possui suporte compacto em Ω.*

Definição 1.4 *Seja Ω um aberto do $\mathbb{R}^n$. Denotamos por $\mathcal{C}_0^k(\Omega)$ o conjunto das funções diferenciáveis até ordem k e com suporte compacto em Ω. O conjunto $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ denota o conjunto das funções infinitamente diferenciáveis e com suporte compacto em Ω, isto é,*

$$\mathcal{C}_0^\infty(\Omega) = \mathcal{C}^\infty(\Omega) \cap \mathcal{C}_0(\Omega).$$

Observação 1.3 *O conjunto $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ e chamamos seus elementos de funções testes. Ademais, dizemos que uma sequência de funções $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ é convergente para zero quando cumprem as seguintes condições:*

(i) existe $K \subset \Omega$ compacto tal que $supp(u_n) \subset K$, para todo $n \in \mathbb{N}$;

(ii) para todo $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$, $D^\alpha u_n \longrightarrow D^\alpha u$ uniformemente sobre K.

Definição 1.5 *O espaço vetorial $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ com a noção de convergência acima é denominado o espaço das funções testes e é representado por $\mathcal{D}(\Omega)$.*

[3] A **Definição 1.3** não é adequada quando se trabalha com funções de L^p. No entanto, é possível definir o suporte para funções deste espaço trabalhando-se com suas classes de equivalência. Uma abordagem detalhada sobre este tema pode ser encontrada em [3].

Oportunamente, iremos aplicar os processos de truncamento e regularização em espaços de funções definidos no **Capítulo 2**. Com este objetivo, definimos o produto de convolução e a sequência que estabelece a regularização em $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$.

Definição 1.6 *Sejam $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e $v \in L^p(\mathbb{R}^n)$ com $1 \leq p \leq \infty$. O produto de convolução de u por v, denotado por $u * v$, é dado por*

$$(u * v)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} u(x-y)v(y)\ dy.$$

Pode-se provar que $(u * v) \in L^p(\mathbb{R}^n)$ e vale a desigualdade:

$$||u * v||_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq ||u||_{L^1(\mathbb{R}^n)}||v||_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

Além disso, é de nosso interesse as duas proposições seguintes:

Proposição 1.3 *Se u e v são funções para os quais o produto de convolução está bem definido, então*

$$supp(u * v) \subset supp(u) + supp(v).$$

Proposição 1.4 *Sejam $u \in \mathcal{C}_0^k(\mathbb{R}^n)$ e $v \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ com $k \in \mathbb{N}$. Então $u * v \in C^k(\mathbb{R}^n)$ e vale a fórmula de derivação*

$$D^\alpha(u * v) = (D^\alpha u) * v,\ \forall\ \alpha\ com\ |\alpha| \leq k.$$

Em $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, utilizaremos uma sequência $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de funções com as seguintes propriedades:

$$\text{supp}(\rho_n) \subset \overline{B(0;1/n)},\ \int_{\mathbb{R}^n} \rho_n(x)\ dx = 1 \text{ e } \rho_n \geq 0,$$

em que, fixado $n \in \mathbb{N}$, $B(0;1/n)$ denota o conjunto $\{x \in \mathbb{R}^n;\ |x| < 1/n\}$.

À toda sequência satisfazendo as propriedades acima, denominamos *sequência regularizante.*

Exemplo 1.1 *Consideremos a aplicação $\rho : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definida por*

$$\rho(x) = \begin{cases} \exp\left(1/(|x|^2 - 1)\right) & se\ \ |x| < 1 \\ 0 & se\ \ |x| \geq 1 \end{cases}.$$

Definimos

$$C = \left(\int_{\mathbb{R}^n} \rho(x)\ dx\right)^{-1}$$

e consideremos, para todo $\nu \in \mathbb{N}$, a sequência de funções

$$\rho_\nu(x) = C\nu^n \rho(\nu x),$$

ou seja,

$$\rho_\nu(x) = \begin{cases} C\nu^n \exp\left(1/(|\nu x|^2 - 1)\right) & se \quad |x| < 1/\nu \\ 0 & se \quad |x| \geq 1/\nu \end{cases}.$$

Prova-se que, para todo $\nu \in \mathbb{N}$,

$$\rho_\nu \geq 0,\ \ \rho_\nu \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n),\ \ supp(\rho_\nu) = \overline{B(0; 1/n)}\ \ e\ \ \int_{\mathbb{R}^n} \rho_\nu(x)\ dx = 1.$$

Assim, (ρ_ν) *é uma sequência regularizante definida em* $\mathbb{R}^n$*.*

A relação entre o produto de convolução e a sequência regularizante é estabelecida na próxima proposição.

Proposição 1.5 *Seja* $u \in L^p(\mathbb{R}^n)$ *com* $1 \leq p < \infty$*. Então*

$$\rho_n * u \longrightarrow u \ \ em\ \ L^p(\mathbb{R}^n).$$

Como consequência desta proposição, temos o seguinte resultado de densidade:

Corolário 1.1 *Seja* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *um aberto qualquer. O conjunto* $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ *é denso em* $L^p(\Omega)$ *para* $1 \leq p < \infty$*.*

Chamamos de *distribuição* sobre Ω, em que Ω é um subconjunto aberto do $\mathbb{R}^n$, à todo funcional linear T sobre $\mathcal{D}(\Omega)$ que é contínuo no sentido da convergência sobre $\mathcal{D}(\Omega)$ dada na **Observação 1.3**. Isso significa que para toda sequência $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathcal{D}(\Omega)$ convergente para zero, no sentido dado pela **Observação 1.3**, temos que a sequência $(< T, \varphi_n >)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para zero em $\mathbb{R}$ ($< T, \varphi_n >$ denota o valor de T aplicado em φ_n).

O conjunto de todas as distribuições sobre Ω é um espaço vetorial o qual representamos por $\mathcal{D}'(\Omega)$. Seja $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência em $\mathcal{D}'(\Omega)$ e $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Diremos que $T_n \longrightarrow T$ em $\mathcal{D}'(\Omega)$ se

$$< T_n, \varphi > \longrightarrow < T, \varphi >,\ \forall\ \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Dada $u \in L^1_{loc}(\Omega)$, a aplicação T_u definida por

$$< T_u, \varphi > = \int_\Omega u(x)\varphi(x)\ dx,\ \forall\ \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

é uma distribuição sobre Ω. Verifica-se que T_u é univocamente determinada por u sobre Ω, quase sempre, no seguinte sentido: se $u, v \in L^1_{loc}(\Omega)$, então $T_u = T_v$ se e somente se $u = v$ quase sempre em Ω. Por esta razão, identificamos u com a distribuição T_u por ela definida e dizemos a "distribuição u" ao invés de dizer a distribuição T_u.

Proposição 1.6 *Seja* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *uma sequência de funções em* $L^p(\Omega)$ *tal que*

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = u \ em \ L^p(\Omega).$$

Então resulta que

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = u \ em \ \mathcal{D}'(\Omega).$$

Em nossa próxima definição, apresentamos a derivada de ordem $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ de uma distribuição.

Definição 1.7 *Consideremos uma distribuição* T *e* $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$. *A derivada de ordem* α *de* T *é dada por*

$$< D^\alpha T, \varphi >= (-1)^{|\alpha|} < T, \mathcal{D}^\alpha \varphi >, \ \forall \ \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Mostra-se que $D^\alpha T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ e, então, uma distribuição $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ possui derivada de todas as ordens em $\mathcal{D}'(\Omega)$. Como conseqüência, as funções em $L^1_{loc}(\Omega)$ possuem derivadas de todas as ordens no sentido das distribuições.

Suponhamos agora que Ω e $\mathcal{U}$ são subconjuntos abertos do $\mathbb{R}^n$ tais que $\Omega \subset \mathcal{U}$. Para cada $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, consideremos $\tilde{\varphi}$ a extensão de φ a $\mathcal{U}$ por zero fora de Ω, isto é,

$$\tilde{\varphi}(x) = \begin{cases} \varphi(x) & \text{se} \quad x \in \Omega \\ 0 & \text{se} \quad x \in \mathcal{U}\backslash\Omega \end{cases}.$$

Temos $\tilde{\varphi} \in \mathcal{D}(\mathcal{U})$ e mais

a) $D^\alpha\tilde{\varphi} = \widetilde{D^\alpha\varphi}$ para todo $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$;

b) se $\lim_{n\to+\infty} \varphi_n = 0$ em $\mathcal{D}(\Omega)$, segue-se que $\lim_{n\to+\infty} \tilde{\varphi_n} = 0$ em $\mathcal{D}(\mathcal{U})$.

Observamos também que se $T \in \mathcal{D}'(\mathcal{U})$, o funcional linear $T|_\Omega$ definido em $\mathcal{D}(\Omega)$ por $< T|_\Omega, \varphi >=< T, \tilde{\varphi} >$ para todo $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ é uma distribuição sobre Ω denominada a *restrição de* T *a* Ω. Decorre do item a) acima que $(\mathcal{D}^\alpha T|_\Omega) = (\mathcal{D}^\alpha T)|_\Omega$ para todo $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ e $T \in \mathcal{D}'(\mathcal{U})$.

Outro resultado importante a ser mencionado é que a derivada de uma função de $L^1_{loc}(\Omega)$ não é, em geral, uma função de $L^1_{loc}(\Omega)$ (vide [12], Exemplo 4 da página 15). Tal fato motivará a definição de uma classe significativa de espaços de funções, conhecidos sob a denominação de *Espaços de Sobolev*. Os resultados nestes espaços de que necessitamos serão apresentados na seção seguinte.

1.3 Espaços de Sobolev

Para um estudo completo dos resultados expostos nesta seção, aconselhamos a leitura de [1], [4] e [12]. O subconjunto Ω de $\mathbb{R}^n$ é tomado como um aberto qualquer e denotaremos por Γ sua fronteira.

Definição 1.8 *Seja $m \geq 0$ um número inteiro e $1 \leq p \leq \infty$. O espaço de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ é definido por*

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega); D^\alpha u \in L^p(\Omega), \text{ para todo } |\alpha| \leq m\}.$$

Segue da definição anterior que $W^{0,p}(\Omega) = L^p(\Omega)$ e $W^{m_2,p}(\Omega) \subset W^{m_1,p}(\Omega)$, se $m_1 \leq m_2$. Além disso, para $1 \leq p < \infty$, $W^{m,p}(\Omega)$ torna-se um espaço de Banach com a norma dada por

$$||u||_{W^{m,p}(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} ||D^\alpha u||^p_{L^p(\Omega)} \right)^{1/p}$$

e $W^{m,\infty}(\Omega)$ é um espaço de Banach com a norma

$$||u||_{W^{m,\infty}(\Omega)} = \max_{|\alpha| \leq m} ||D^\alpha u||_{L^\infty(\Omega)}.$$

Quando $p = 2$, denotamos $W^{m,p}(\Omega)$ por $H^m(\Omega)$. Ressaltamos que $H^m(\Omega)$ é um espaço de Hilbert com o seguinte produto interno

$$(u, v)_{H^m(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_\Omega D^\alpha u D^\alpha v \; dx.$$

Sabemos que $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ é denso em $L^p(\Omega)$, mas não é verdade que $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ é denso em $W^{m,p}(\Omega)$ para $m \geq 1$. Motivados por esta razão, definimos o espaço $W_0^{m,p}(\Omega)$ como sendo o fecho de $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ em $W^{m,p}(\Omega)$, isto é,

$$\overline{\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)}^{W^{m,p}(\Omega)} = W_0^{m,p}(\Omega).$$

Usaremos seguidamente a notação $W_0^{1,2}(\Omega) = H_0^1(\Omega)$.

Proposição 1.7 *Seja $u \in W_0^{m,p}(\Omega)$ e $\tilde{u}$ a extensão a $\mathbb{R}^n$ de u por zero fora de Ω. Então*

(i) $\tilde{u} \in W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$.

(ii) $D^\alpha \tilde{u} = \widetilde{D^\alpha u}$ *para todo* $|\alpha| \leq m$.

(iii) $||u||_{W^{m,p}(\Omega)} = ||\tilde{u}||_{W^{m,p}(\mathbb{R}^n)}$.

No próximo teorema, descrevemos as funções de $W_0^{1,p}(\Omega)$ em termos da fronteira Γ de Ω. Antes de enunciá-lo, necessitamos caracterizar Γ. A definição que segue suprirá essa necessidade e está intimamente relacionada com a geometria dos problemas eletromagnéticos de nosso interesse. Para maiores esclarecimentos nesse aspecto, o leitor deve consultar as referências [5] e [9].

Definição 1.9 *Dizemos que Γ é contínua (respectivamente Lipschitz; de classe $\mathcal{C}^m$ para algum inteiro $m > 0$) se para todo $x \in \Gamma$ existir uma vizinhança $\mathcal{O}$ de x em $\mathbb{R}^n$ e um sistema de coordenadas ortogonais $y = (y', y_n)$, onde $y' = (y_1, y_2, \ldots, y_{n-1})$, tais que*

(i) $\mathcal{O}$ é um hipercubo nestas coordenadas, isto é,

$$\mathcal{O} = \{y;\ -a_j < y_j, < a_j,\ 1 \leq j \leq n\}.$$

(ii) Existe uma aplicação φ contínua (respectivamente Lipschitz; de classe $\mathcal{C}^m$) definida em

$$\mathcal{O}' = \{y';\ -a_j < y_j < a_j,\ 1 \leq j \leq n-1\}$$

que satisfaz

$$|\varphi(y')| \leq \frac{a_n}{2},\ \forall\ y' \in \mathcal{O}',\ \Omega \cap \mathcal{O} = \{y;\ y_n < \varphi(y')\}\ e\ \Gamma \cap \mathcal{O} = \{y;\ y_n = \varphi(y')\}.$$

Em alguns momentos, a fim de simplificar a escrita, diremos que Ω é um conjunto de classe $\mathcal{C}^m$ (Ω é Lipschitz) quando sua fronteira Γ é de classe $\mathcal{C}^m$ para algum inteiro $m > 0$ (respectivamente, Γ é Lipschitz).

A definição acima sugere que localmente Ω está abaixo do gráfico de alguma função φ; também que a fronteira Γ é representada pelo gráfico de φ e a regularidade de Γ é determinada pela aplicação φ.

Eis, então, um resultado de caracterização para funções de $W_0^{1,p}(\Omega)$:

Teorema 1.2 *Suponhamos que Ω é de classe $\mathcal{C}^1$. Seja $u \in W^{1,p}(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ com $1 \leq p < \infty$. Então as afirmações abaixo são equivalentes:*

(i) $u = 0$ em Γ;

(ii) $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

O próximo fato mostra que o espaço das funções suficientemente regulares é denso em $W^{m,p}(\Omega)$. O conjunto $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ que aparece em seu enunciado é definido por

$$\mathcal{D}(\overline{\Omega}) = \{\varphi|_\Omega;\ \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)\}.$$

Teorema 1.3 *Seja Ω um subconjunto aberto Lipschitz de $\mathbb{R}^n$.*

(i) O espaço $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ é denso em $W^{m,p}(\Omega)$ para todo inteiro $m \geq 0$ e para todo $p \in \mathbb{R}$ com $1 \leq p < \infty$.

(ii) Sejam $u \in W^{m,p}(\Omega)$ e $\tilde{u}$ sua extensão a $\mathbb{R}^n$ por zero fora de Ω, ou seja,

$$\tilde{u} = \begin{cases} u(x) & se \quad x \in \Omega \\ 0 & se \quad x \in \mathbb{R}^n \backslash \Omega \end{cases}.$$

Se $\tilde{u} \in W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$, então $u \in W_0^{m,p}(\Omega)$.

O teorema seguinte mostra que, conquanto uma função u seja suficientemente regular, é possível definir o valor de u na fronteira Γ de Ω, sendo chamado *traço* de u em Γ. É claro que se $u \in \mathcal{D}(\overline{\Omega})$, então o valor que u assume em Γ está bem definido e, neste caso, definimos o operador traço γ_0 para tal função como

$$\gamma_0(u) = u|_\Gamma.$$

Teorema 1.4 *Seja Ω um aberto do $\mathbb{R}^n$ tal que sua fronteira Γ é limitada e Lipschitz. Então, se $1/p < m \leq 1$, a aplicação γ_0 definida anteriormente em $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ possui uma única extensão como uma aplicação linear de $W^{m,p}(\Omega)$ em $W^{m-1/p,p}(\Gamma)$. Além disso,*

$$W_0^{1,p}(\Omega) = \{u \in W^{1,p}(\Omega);\ \gamma_0(u) = 0\} = ker(\gamma_0).$$

Os espaços de traço de maior interesse em nosso trabalho serão $H^{1/2}(\Gamma) = W^{1/2,2}(\Gamma)$ e seu espaço dual $H^{-1/2}(\Gamma)$. A norma neste último espaço é a norma dual usual, ou seja,

$$||f^*||_{H^{-1/2}(\Gamma)} = \sup_{\substack{f \in H^{1/2}(\Gamma) \\ f \neq 0}} \frac{< f^*, f >}{||f||_{H^{1/2}(\Gamma)}},$$

onde $<,>$ denota o par dualidade entre $H^{-1/2}(\Gamma)$ e $H^{1/2}(\Gamma)$. Também observamos que $<,>$ é uma extensão do produto interno de $L^2(\Gamma)$ no sentido de que quando $f^* \in L^2(\Gamma)$, podemos identificar $< f^*, f >$ com

$$\int_\Gamma f^*(x) f(x)\ d\Gamma.$$

Encerramos esta seção apresentando um resultado básico de existência de solução para um problema de Neumann. Um estudo mais detalhado desse problema pode ser encontrado em [12].

Teorema 1.5 *Sejam Ω um domínio com fonteira Γ Lipschitz e η a normal unitária a Γ exterior a Ω. Sejam $\mu \in H^{1/2}(\Gamma)$ e $f \in H^{-1}(\Omega) = ([H_0^1(\Omega)]')$. Então existe uma única solução fraca $\varphi \in H^1(\Omega)$ do problema*

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f & em \quad \Omega, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \eta}\Big|_\Gamma = \mu & em \quad \Gamma. \end{cases}$$

Além disso, existe uma constante C tal que

$$||\varphi||_{H^1(\Omega)} \leq C(||\mu||_{H^{-1/2}(\Gamma)} + ||f||_{H^{-1}(\Omega)}).$$

1.4 Resultados de Análise Funcional

Nesta seção, assumiremos que o leitor tenha familiaridade com as noções de espaços normados de dimensão infinita. Todos os fatos aqui apresentados podem ser encontrados em [3] e [10].

Teorema 1.6 *Se H é espaço de Hilbert e Y é subespaço fechado de H, então*

$$H = Y \oplus Y^{\perp},$$

em que $Y^{\perp} = \{z \in H;\ < z, y >= 0,\ \forall\ y \in Y\}$ é o complemento ortogonal de Y.

Como consequência desse teorema, obtemos o seguinte resultado:

Corolário 1.2 *Seja H um espaço de Hilbert e $M \neq \emptyset$ um subconjunto de H. Então span(M) é denso em H se e somente se $M^{\perp} = \{0\}$.*

Este fato é de extrema importância no momento que queremos garantir que um subespaço $Y \subset H$ é denso em H. Para isso, consideramos $z \in H$ tal que $< z, y >= 0$ para todo $y \in Y$ e tratamos de mostrar que $z = 0$. Como $span(Y) = Y$, obteremos deste corolário que $\overline{Y} = \overline{span(M)} = H$.

Sejam agora E e F espaços de Banach e $A : D(A) \subset E \to F$ um operador linear com domínio $D(A)$ denso em E. Definiremos um operador $A^* : D(A^*) \subset F' \to E'$ como segue (E' e F' denotam os espaços duais de E e F, respectivamente). Ponhamos

$$D(A^*) = \{v \in F';\ \exists\ C \geq 0 \text{ tal que } | < v, Au > | \leq C||u||,\ \forall\ u \in D(A)\}.$$

Observamos que $D(A^*)$ é um subespaço vetorial de F'. Para todo $v \in D(A^*)$, consideremos a aplicação $g : D(A) \to \mathbb{R}$ definida por

$$g(u) =< v, Au >,\ u \in D(A).$$

Claramente, temos $|g(u)| \leq C||u||$ para todo $u \in D(A)$. Logo, g é uma aplicação linear limitada e portanto contínua. Graças ao Teorema de Hahn-Banach, g pode ser estendida a uma aplicação linear $f : E \to \mathbb{R}$ com

$$|f(u)| \leq C||u||,\ \forall\ u \in E.$$

Assim, $f \in E'$. Além disso, a extensão de g a todo espaço E é única, uma vez que f é contínua sobre E e $\mathcal{D}(A)$ é denso. De posse dessa breve discussão, estabelecemos a definição do operador adjunto de A.

Definição 1.10 *O operador linear* $A^* : D(A^*) \subset F' \to E'$ *definido por* $A^*v = f$, *em que* $f : E \to \mathbb{R}$ *é a aplicação linear descrita anteriormente, é denominado operador adjunto de* A.

Desse modo, obtemos a seguinte relação fundamental entre A e A^*:

$$< v, Au >_{F',F} = < A^*v, u >_{E',E}, \ \forall \ u \in D(A), \ \forall \ v \in D(A^*).$$

Observação 1.4 *No caso em que* $A : D(A) \subset H \to H$ *é um operador linear com* $D(A)$ *denso em* H, *onde* H *é espaço de Hilbert com produto interno* $(\ ,\ )_H$, *caracterizamos, via teorema de representação de Riez, o adjunto* A^* *de* A *por*

$$(Au, v)_H = (u, A^*v)_H, \ \forall \ u \in D(A), \ \forall \ v \in D(A^*) \tag{1.1}$$

onde $D(A^*) = \{v \in H; \ \exists \ y_v \in H \text{ com } (Au, v)_H = (u, y_v)_H, \ \forall \ u \in D(A)\}$.

Em resumo, o operador $A^* : D(A^*) \subset H \to H$ *é definido por*

$$A^*v = y_v, \ \forall \ v \in D(A^*).$$

Finalizamos esta seção com a noção de operadores simétrico, auto-adjunto e unitário.

Definição 1.11 *Seja* $A : D(A) \subset H \to H$ *um operador linear com* $\overline{D(A)} = H$. *Dizemos que* A *é simétrico se*

$$(Au, v)_H = (u, Av)_H, \ \forall \ u, v \in D(A).$$

O operador A *é dito auto-adjunto se* $A^* = A$ *e é denominado unitário quando* $A^* = A^{-1}$.

1.5 Teoria de Semigrupos

Nesta seção, trataremos de introduzir a teoria de semigrupos lineares. Para maiores esclarecimentos dos resultados aqui apresentados, sugerimos ao leitor consultar a referência [15].

Sejam X e Y espaços de Banach. Denotamos por $\mathcal{L}(X, Y)$ o conjunto dos operadores $T : X \to Y$ lineares e limitados.

Definição 1.12 *Seja* X *um espaço de Banach e* $\mathcal{L}(X)$ *a álgebra dos operadores lineares e limitados de* X. *Uma família* $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ *é um semigrupo de operadores lineares e limitados de* X *se satisfaz as seguintes condições:*

(i) $S(0) = I$, *em que* I *é o operador identidade de* X;

(ii) $S(t + s) = S(t)S(s), \ \forall \ t, s \in \mathbb{R}^+$.

Além destas, se $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ *cumpre*

(iii) $\lim_{t\to 0^+} ||\big(S(t)-I\big)x|| = 0, \ \forall \ x \in X,$

dizemos que o semigrupo $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ *é de classe* $\mathcal{C}_0$.

Abaixo listamos as principais propriedades de semigrupos que serão utilizadas no decorrer deste trabalho, mais precisamente no **Capítulo 3**.

Proposição 1.8 *Se* $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ *é um semigrupo de classe* C_0*, então* $||S(t)||$ *é uma função limitada em todo intervalo limitado* $[0,T]$.

Corolário 1.3 *Todo semigrupo de classe* C_0 *é fortemente contínuo em* $\mathbb{R}^+$*, isto é, se* $t \in \mathbb{R}^+$*, temos*

$$\lim_{s\to t} S(s)x = S(t)x, \ \forall \ x \in X.$$

É a partir do corolário anterior que os semigrupos de classe $\mathcal{C}_0$ são também conhecidos por *semigrupos fortemente contínuos.*

Dizemos ainda que $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ é um *semigrupo de contrações de classe* $\mathcal{C}_0$ se $||S(t)|| \leq 1$ para todo $t \geq 0$.

Definição 1.13 *Seja* X *espaço de Banach e seja* $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ *semigrupo de classe* $\mathcal{C}_0$*. O operador linear* $A : D(A) \subset X \to X$*, definido por*

$$D(A) = \{x \in X; \ \lim_{h\to 0^+} \frac{S(h)-I}{h} x \ \textit{existe}\} \ \textit{e} \ Ax = \lim_{h\to 0^+} \frac{S(h)-I}{h} x, \ \forall \ x \in D(A),$$

é chamado gerador infinitesimal ou simplesmente gerador do semigrupo $\{S(t)\}_{t\geq 0}$.

A próxima proposição trata da diferenciabilidade de um semigrupo associado a seu gerador infinitesimal.

Proposição 1.9 *Seja* A *o gerador do semigrupo de classe* C_0*,* $\{S(t)\}_{t\geq 0}$*. Temos que*

(i) se $x \in D(A)$ *e* $t \geq 0$*, então* $S(t)x \in D(A)$ *e a função* $\mathbb{R}^+ \to X$ *com* $t \longmapsto S(t)x$ *é diferenciável e*

$$\frac{dS(t)}{dt} x = AS(t)x = S(t)Ax, \ \forall \ x \in D(A);$$

(ii) se $x \in D(A)$*, então*

$$S(t)x - S(s)x = \int_s^t AS(\tau)x \ d\tau = \int_s^t S(\tau)Ax \ d\tau;$$

(iii) se $x \in X$ *e* $t \in \mathbb{R}$ *com* $t \geq 0$*, então*

$$\lim_{h \to 0} \int_t^{t+h} S(\tau)x \, d\tau = S(t)x;$$

(iv) para $x \in X$*, temos* $\int_0^t S(\tau)x \, d\tau \in D(A)$ *e, além disso,*

$$S(t)x - x = A \int_0^t S(\tau)x \, d\tau.$$

Suponhamos $U_0 \in D(A)$ e $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ o semigrupo de contrações de classe $\mathcal{C}_0$ gerado por $A : D(A) \subset X \to X$, com X espaço de Hilbert. Graças à **Proposição 1.9**, mostra-se que existe uma única função

$$U \in \mathcal{C}([0, +\infty), D(A)) \cap \mathcal{C}^1([0, +\infty), X)$$

que satisfaz o problema de valor inicial

$$\begin{aligned} \frac{dU}{dt}(t) &= AU(t), \\ U(0) &= U_0. \end{aligned}$$

O teorema seguinte é de grande utilidade para as aplicações do **Capítulo 3**. É conhecido como *Teorema de Stone*. O mesmo oferece condições necessárias e suficientes para que um operador A seja gerador de um grupo unitário de classe $\mathcal{C}_0$ - garante, em particular, quando um operador A é gerador de um semigrupo de contrações de classe $\mathcal{C}_0$.

Teorema 1.7 *A é o gerador de um grupo de operadores unitários de classe* $\mathcal{C}_0$ *se e somente se* $A^* = -A$.

Capítulo 2

ESPAÇOS FUNCIONAIS EM ELETROMAGNETISMO

Neste capítulo, introduziremos os espaços de funções que surgem no momento que estudamos problemas de origem eletromagnética. Iniciaremos apresentando os operadores diferenciais lineares: gradiente, divergente e rotacional e suas propriedades de nosso interesse. Em seguida, definiremos os espaços de Hilbert $H(div, \Omega)$ e $H(rot, \Omega)$ consistindo de funções $u \in [L^2(\Omega)]^3$ tais que $\nabla \cdot u \in L^2(\Omega)$ e $\nabla \times u \in [L^2(\Omega)]^3$, respectivamente, e demonstraremos resultados de traço para estes espaços.

A última seção é dedicada aos subespaços $H(div\ 0, \Omega)$ e $H_0(div\ 0, \Omega)$ de $[L^2(\Omega)]^3$. Utilizaremos o operador projeção definido de $[L^2(\Omega)]^3$ sobre estes espaços a fim de obter resultados de densidade essenciais para o desenvolvimento do **Capítulo 3**.

2.1 Operadores gradiente, divergente e rotacional

Seja Ω um aberto do $\mathbb{R}^3$. Para todo $v \in \mathcal{D}'(\Omega)$, definimos o operador diferencial linear

$$\nabla v = \left(\frac{\partial v}{\partial x_1}, \frac{\partial v}{\partial x_2}, \frac{\partial v}{\partial x_3} \right)$$

chamado **gradiente** de v.

Dado $v = (v_1, v_2, v_3) \in [\mathcal{D}'(\Omega)]^3$, definimos o operador diferencial linear

$$\nabla \cdot v = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial v_i}{\partial x_i}$$

chamado **divergente** de v.

Além destes, o operador diferencial linear **rotacional** é dado por

$$\nabla \times v = \left(\frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3}, \frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1}, \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right)$$

para todo $v = (v_1, v_2, v_3) \in [\mathcal{D}'(\Omega)]^3$.

Proposição 2.1 *Os operadores gradiente, divergente e rotacional satisfazem as seguintes propriedades:*

a) $\nabla \times (\nabla v) = 0$, $\forall\ v \in \mathcal{D}'(\Omega)$;

b) $\nabla \cdot (\nabla \times v) = 0$, $\forall\ v \in [\mathcal{D}'(\Omega)]^3$;

c) $< \nabla \cdot v, \varphi > = < v, -\nabla\varphi >$, $\forall\ v \in [\mathcal{D}'(\Omega)]^3$ *e* $\forall\ \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$;

d) $\langle \nabla \times v, \varphi \rangle = < v, \nabla \times \varphi >$, $\forall\ v \in [\mathcal{D}'(\Omega)]^3$ *e* $\forall\ \varphi \in [\mathcal{D}(\Omega)]^3$;

e) $\nabla \cdot (\varphi u) = (\nabla\varphi) \cdot u + \varphi(\nabla \cdot u)$, $\forall\ \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ *e* $\forall\ u \in [\mathcal{D}'(\Omega)]^3$;

f) $\nabla \times (\varphi u) = \varphi \cdot (\nabla \times u) + (\nabla\varphi) \times u$, $\forall\ \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ *e* $\forall\ u \in [\mathcal{D}'(\Omega)]^3$;

g) $\nabla \cdot (u \times v) = v \cdot (\nabla \times u) - u \cdot (\nabla \times v)$, $\forall\ u, v \in [\mathcal{D}'(\Omega)]^3$.

Demonstração:

a) Para todo $v \in \mathcal{D}'(\Omega)$, temos

$$\nabla v = \left(\frac{\partial v}{\partial x_1}, \frac{\partial v}{\partial x_2}, \frac{\partial v}{\partial x_3} \right) \in [\mathcal{D}'(\Omega)]^3.$$

Por definição,

$$\begin{aligned} \nabla \times (\nabla v) &= \left(\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial v}{\partial x_3}\right) - \frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{\partial v}{\partial x_2}\right), \frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{\partial v}{\partial x_1}\right) - \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial v}{\partial x_3}\right), \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial v}{\partial x_2}\right) - \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial v}{\partial x_1}\right) \right) \\ &= \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x_2 \partial x_3} - \frac{\partial^2 v}{\partial x_3 \partial x_2}, \frac{\partial^2 v}{\partial x_3 \partial x_1} - \frac{\partial^2 v}{\partial x_1 \partial x_3}, \frac{\partial^2 v}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{\partial^2 v}{\partial x_2 \partial x_1} \right) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Com isso, observamos que $Im(\nabla) \subset Ker(\nabla\times)$.

b) Seja $v = (v_1, v_2, v_3) \in [\mathcal{D}'(\Omega)]^3$. Então

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\nabla \times v) &= \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right) \\ &= \frac{\partial^2 v_3}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_1 \partial x_3} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_2 \partial x_3} - \frac{\partial^2 v_3}{\partial x_2 \partial x_1} + \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_3 \partial x_1} - \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_3 \partial x_2} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Isto é, $Im(\nabla\times) \subset Ker(\nabla\cdot)$.

c) Sejam $v = (v_1, v_2, v_3) \in [\mathcal{D}'(\Omega)]^3$ e $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. No sentido das distribuições, temos

$$
\begin{aligned}
< \nabla \cdot v, \varphi > &= \left\langle \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3}, \varphi \right\rangle \\
&= \left\langle \frac{\partial v_1}{\partial x_1}, \varphi \right\rangle + \left\langle \frac{\partial v_2}{\partial x_2}, \varphi \right\rangle + \left\langle \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \right\rangle \\
&= -\left\langle v_1, \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \right\rangle - \left\langle v_2, \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \right\rangle - \left\langle v_3, \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} \right\rangle \\
&= -\left\langle (v_1, v_2, v_3), \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} \right) \right\rangle \\
&= < v, -\nabla \varphi > .
\end{aligned}
$$

d) Dados $v = (v_1, v_2, v_3) \in [\mathcal{D}'(\Omega)]^3$ e $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) \in [\mathcal{D}(\Omega)]^3$, obtemos

$$
\begin{aligned}
< \nabla \times v, \varphi > &= \left\langle \left(\frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3}, \frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1}, \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right), (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) \right\rangle \\
&= \left\langle \frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3}, \varphi_1 \right\rangle + \left\langle \frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1}, \varphi_2 \right\rangle + \left\langle \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2}, \varphi_3 \right\rangle \\
&= \left\langle \frac{\partial v_3}{\partial x_2}, \varphi_1 \right\rangle - \left\langle \frac{\partial v_2}{\partial x_3}, \varphi_1 \right\rangle + \left\langle \frac{\partial v_1}{\partial x_3}, \varphi_2 \right\rangle - \left\langle \frac{\partial v_3}{\partial x_1}, \varphi_2 \right\rangle + \left\langle \frac{\partial v_2}{\partial x_1}, \varphi_3 \right\rangle - \left\langle \frac{\partial v_1}{\partial x_2}, \varphi_3 \right\rangle \\
&= -\left\langle v_3, \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} \right\rangle + \left\langle v_2, \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_3} \right\rangle - \left\langle v_1, \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_3} \right\rangle + \left\langle v_3, \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} \right\rangle - \left\langle v_2, \frac{\partial \varphi_3}{\partial x_1} \right\rangle + \left\langle v_1, \frac{\partial \varphi_3}{\partial x_2} \right\rangle \\
&= \left\langle v_1, \frac{\partial \varphi_3}{\partial x_2} - \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_3} \right\rangle + \left\langle v_2, \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_3} - \frac{\partial \varphi_3}{\partial x_1} \right\rangle + \left\langle v_3, \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} \right\rangle \\
&= \left\langle (v_1, v_2, v_3), \left(\frac{\partial \varphi_3}{\partial x_2} - \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_3}, \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_3} - \frac{\partial \varphi_3}{\partial x_1}, \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} \right) \right\rangle \\
&= < v, \nabla \times \varphi > .
\end{aligned}
$$

e) Fixemos $u = (u_1, u_2, u_3) \in [\mathcal{D}'(\Omega)]^3$. Então, $\varphi u = (\varphi u_1, \varphi u_2, \varphi u_3)$ e vale

$$
\frac{\partial (\varphi u_i)}{\partial x_i} = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} u_i + \varphi \frac{\partial u_i}{\partial x_i}, \ \forall \ i = 1, 2, 3.
$$

Desse modo, obtemos

$$
\begin{aligned}
\nabla \cdot (\varphi u) &= \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial (\varphi u_i)}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^{3} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} u_i + \varphi \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right) \\
&= \sum_{i=1}^{3} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} u_i \right) + \varphi \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = (\nabla \varphi) \cdot u + \varphi (\nabla \cdot u).
\end{aligned}
$$

f) Segue do item anterior que

$$
\frac{\partial (\varphi u_i)}{\partial x_i} = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} u_i + \varphi \frac{\partial u_i}{\partial x_i}, \ \forall \ i = 1, 2, 3.
$$

Com isso,

$$\begin{aligned}\nabla \times (\varphi u) &= \left(\frac{\partial(\varphi u_3)}{\partial x_2} - \frac{\partial(\varphi u_2)}{\partial x_3}, \frac{\partial(\varphi u_1)}{\partial x_3} - \frac{\partial(\varphi u_3)}{\partial x_1}, \frac{\partial(\varphi u_2)}{\partial x_1} - \frac{\partial(\varphi u_1)}{\partial x_2}\right) \\ &= \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}u_3 - \frac{\partial\varphi}{\partial x_3}u_2, \frac{\partial\varphi}{\partial x_3}u_1 - \frac{\partial\varphi}{\partial x_1}u_3, \frac{\partial\varphi}{\partial x_1}u_2 - \frac{\partial\varphi}{\partial x_2}u_1\right) + \varphi(\nabla \times u) \\ &= (\nabla\varphi) \times u + \varphi(\nabla \times u).\end{aligned}$$

g) Consideremos $u = (u_1, u_2, u_3), v = (v_1, v_2, v_3) \in [\mathcal{D}'(\Omega)]^3$. Por definição,

$$u \times v = (u_2v_3 - u_3v_2, u_3v_1 - u_1v_3, u_1v_2 - u_2v_1).$$

O resultado é obtido via derivação parcial da função vetorial $u \times v$ e das definições dos operadores divergente e rotacional.

■

Observação 2.1 *O item c) da proposição anterior garante que o transposto de $\nabla\cdot$ é o operador $-\nabla$. O item d), por sua vez, afirma que o operador $\nabla\times$ é seu próprio transposto.*

2.2 Os espaços funcionais $H(div, \Omega)$ e $H(rot, \Omega)$

Visando obter resultados de existência e unicidade de solução para certos sistemas de equações que envolvem os operadores divergente ou rotacional, faz-se necessário introduzir um conjunto de funções de $[L^2(\Omega)]^3$ cujo divergente ou rotacional, no sentido das distribuições, são funções de $L^2(\Omega)$ ou $[L^2(\Omega)]^3$, respectivamente. Nosso intuito agora será então apresentar estes espaços e dotá-los de produtos internos adequados de modo a torná-los espaços de Hilbert.

Definição 2.1 *O espaço vetorial real das funções $v \in [L^2(\Omega)]^3$ tais que $\nabla\cdot v \in L^2(\Omega)$ é denotado por $H(div, \Omega)$, isto é,*

$$H(div, \Omega) := \{v \in [L^2(\Omega)]^3;\ \nabla \cdot v \in L^2(\Omega)\}.$$

Proposição 2.2 *O espaço $H(div, \Omega)$ é de Hilbert com o produto interno*

$$(u, v)_{H(div,\Omega)} = (u, v) + (\nabla \cdot u, \nabla \cdot v),\ \forall\ u, v \in H(div, \Omega).$$

Demonstração: O espaço $H(div, \Omega)$ é normado com a norma induzida pelo produto interno

$$||v||_{H(div,\Omega)} = (||v||^2 + ||\nabla \cdot v||^2)^{1/2}.$$

Mostremos, pois, que este espaço é completo.

Seja $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de Cauchy em $H(div,\Omega)$. Logo, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(\nabla\cdot v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ são sequências de Cauchy em $[L^2(\Omega)]^3$ e $L^2(\Omega)$, respectivamente. Uma vez que $[L^2(\Omega)]^3$ e $L^2(\Omega)$ são espaços de Banach, garantimos que

$$v_n \longrightarrow v \in [L^2(\Omega)]^3 \ \text{ e } \ \nabla\cdot v_n \longrightarrow g \in L^2(\Omega),$$

quando $n\to+\infty$. Iremos mostrar que $g=\nabla\cdot v$.

Como consequência da convergência $\nabla\cdot v_n \longrightarrow g$ em $L^2(\Omega)$ quando $n\to+\infty$, obtemos $\nabla\cdot v_n \longrightarrow g$ em $\mathcal{D}'(\Omega)$, $n\to+\infty$. Assim,

$$<\nabla\cdot v_n,\varphi>\longrightarrow<g,\varphi>,\ \forall\ \varphi\in\mathcal{D}(\Omega). \tag{2.1}$$

Analogamente, visto que $v_n\longrightarrow v$ em $[L^2(\Omega)]^3$, temos $v_n\longrightarrow v$ em $[\mathcal{D}'(\Omega)]^3$ e então

$$<v_n,\varphi>\longrightarrow<v,\varphi>,\ \forall\ \varphi\in[\mathcal{D}(\Omega)]^3. \tag{2.2}$$

Para todo $n\in\mathbb{N}$,

$$<\nabla\cdot v_n,\varphi>=<v_n,-\nabla\varphi>,\ \forall\ \varphi\in\mathcal{D}(\Omega)$$

(**Proposição 2.1**, item c)). Como $(-\nabla\varphi)\in[\mathcal{D}(\Omega)]^3$, segue de (2.2) que

$$<\nabla\cdot v_n,\varphi>=<v_n,-\nabla\varphi>\longrightarrow<v,-\nabla\varphi>.$$

Com isso,

$$<\nabla\cdot v_n,\varphi>\longrightarrow<v,-\nabla\varphi>=<\nabla\cdot v,\varphi>,\ \forall\ \varphi\in\mathcal{D}(\Omega)$$

e, por (2.1), concluímos que

$$<\nabla\cdot v,\varphi>=<g,\varphi>,\ \forall\ \varphi\in\mathcal{D}(\Omega).$$

Logo, no sentido das distribuições, $g=\nabla\cdot v$. Temos, portanto,

$$v\in H(div,\Omega) \text{ e } ||v_n-v||_{H(div,\Omega)}\longrightarrow 0 \text{ quando } n\to+\infty,$$

donde concluímos que $H(div,\Omega)$ é completo. ∎

Definição 2.2 *O espaço vetorial real das funções $v\in[L^2(\Omega)]^3$ tais que $\nabla\times v\in[L^2(\Omega)]^3$ é denotado por $H(rot,\Omega)$, isto é,*

$$H(rot,\Omega):=\{v\in[L^2(\Omega)]^3;\ \nabla\times v\in[L^2(\Omega)]^3\}.$$

Proposição 2.3 *O espaço $H(rot,\Omega)$ é de Hilbert com o produto interno*

$$(u,v)_{H(rot,\Omega)}=(u,v)+(\nabla\times u,\nabla\times v),\ \forall\ u,v\in H(rot,\Omega).$$

Demonstração: A demonstração é análoga à **Proposição 2.2**, usando naturalmente o item d) da **Proposição 2.1**. ∎

Denotamos por $H_0(div,\Omega)$ o fecho de $[\mathcal{D}(\Omega)]^3$ em $H(div,\Omega)$ e por $H_0(rot,\Omega)$ o fecho de $[\mathcal{D}(\Omega)]^3$ em $H(rot,\Omega)$. Simbolicamente, escrevemos

$$H_0(div,\Omega) = \overline{[\mathcal{D}(\Omega)]^3}^{H(div,\Omega)} \text{ e } H_0(rot,\Omega) = \overline{[\mathcal{D}(\Omega)]^3}^{H(rot,\Omega)}.$$

Usamos também a seguinte notação

$$[\mathcal{D}(\overline{\Omega})]^3 := \{\varphi|_\Omega;\ \varphi \in [\mathcal{D}(\mathbb{R}^3)]^3\}.$$

Definidos estes espaços, iremos provar na próxima seção que $[D(\overline{\Omega})]^3$ é denso tanto em $H(div,\Omega)$ quanto em $H(rot,\Omega)$ (com suas respectivas normas) e apresentaremos uma caracterização alternativa para as funções de $H_0(div,\Omega)$ e $H_0(rot,\Omega)$.

2.3 Teoremas de Traço em $H(div,\Omega)$ e $H(rot,\Omega)$

Resultados clássicos de traço são conhecidos em espaços de Sobolev, como por exemplo, em $H^1(\Omega)$ (vide **Teorema 1.4**). Entretanto, estes resultados não podem ser aplicados nos espaços $H(div,\Omega)$ e $H(rot,\Omega)$, uma vez que $[H^1(\Omega)]^3 \subsetneq H(div,\Omega)$ tal qual $[H^1(\Omega)]^3 \subsetneq H(rot,\Omega)$. Assim, tendo em vista a necessidade de definir a aplicação traço em $H(div,\Omega)$ e $H(rot,\Omega)$ (por exemplo, devido as condições de fronteiras em eletromagnetismo discutidas na **Introdução**) e buscando generalizar a fórmula de Green nestes espaços, destacamos esta seção como fundamental na obtenção de resultados de traços nos espaços funcionais de origem eletromagnética.

Iremos então caracterizar os traços de funções de $H(div,\Omega)$ e $H(rot,\Omega)$, apresentar resultados de densidade nestes espaços e generalizar a fórmula de Green (passo crucial para dispormos de uma fórmula de integração por partes).

Teorema 2.1 *(do Traço para $H(div,\Omega)$) Seja Ω um conjunto aberto do $\mathbb{R}^3$ com fronteira Γ limitada e Lipschitz. Então*

(i) $[\mathcal{D}(\overline{\Omega})]^3$ *é denso em* $H(div,\Omega)$*;*

(ii) A aplicação traço, $\gamma_\eta : v \mapsto v\cdot\eta|_\Gamma$ *definida em* $[D(\overline{\Omega})]^3$*, estende-se por continuidade a uma aplicação linear, contínua e sobrejetiva, ainda denotada por* γ_η*, de* $H(div,\Omega)$ *sobre* $H^{-1/2}(\Gamma)$ *(aqui* $\eta(x)$ *denota a normal exterior unitária em* $x\in\Gamma$*);*

(iii) É válida a seguinte igualdade:

$$\int_\Omega (\nabla\cdot v)\varphi\, dx + \int_\Omega v\cdot(\nabla\varphi)\, dx = <\gamma_\eta(v),\varphi>_{H^{-1/2}(\Gamma),H^{1/2}(\Gamma)},\ \forall\, v\in H(div,\Omega),\ \varphi\in H^1(\Omega),$$

conhecida como "fórmula generalizada de Green" para o espaço $H(div,\Omega)$*;*

(iv) O núcleo $ker(\gamma_\eta)$ da aplicação γ_η é o espaço $H_0(div, \Omega)$.

Demonstração:

(i) Seja $w \in H(div, \Omega)$ tal que $w \in \{[\mathcal{D}(\overline{\Omega})]^3\}^\perp$, isto é,

$$(w, v)_{H(div,\Omega)} = (w, v) + (\nabla \cdot w, \nabla \cdot v) = 0, \ \forall \ v \in [\mathcal{D}(\overline{\Omega})]^3. \tag{2.3}$$

Tratemos de provar que $w = 0$. Ponhamos $w_0 = \nabla \cdot w$ e denotemos por $\tilde{w}$ a extensão de w (a $\mathbb{R}^3$) por zero fora de Ω e $\tilde{w_0}$ a extensão de w_0 (a $\mathbb{R}^3$) por zero fora de Ω. Daí $\tilde{w} \in [L^2(\mathbb{R}^3)]^3$, $\tilde{w_0} \in L^2(\mathbb{R}^3)$ e por (2.3) obtemos

$$\begin{aligned}
(\tilde{w}, \varphi)_{[L^2(\mathbb{R}^3)]^3} + (\tilde{w_0}, \nabla \cdot \varphi)_{L^2(\mathbb{R}^3)} &= \int_{\mathbb{R}^3} \tilde{w} \cdot \varphi \ dx + \int_{\mathbb{R}^3} \tilde{w_0}(\nabla \cdot \varphi) \ dx \\
&= \int_\Omega w \cdot \varphi \ dx + \int_\Omega w_0 \nabla \cdot \varphi \ dx \\
&= (w, \varphi) + (\nabla \cdot w, \nabla \cdot \varphi) = 0, \ \forall \ \varphi \in [\mathcal{D}(\mathbb{R}^3)]^3.
\end{aligned}$$

Assim,

$$< \tilde{w}, \varphi >= - < \tilde{w_0}, \nabla \cdot \varphi >, \ \forall \ \varphi \ \in [\mathcal{D}(\mathbb{R}^3)]^3.$$

Com isso, $\tilde{w} = \nabla \tilde{w_0}$, já que $< \tilde{w_0}, \nabla \cdot \varphi >= - < \nabla \tilde{w_0}, \varphi >$, $\forall \varphi \in [\mathcal{D}(\mathbb{R}^3)]^3$. Como $\tilde{w} \in [L^2(\mathbb{R}^3)]^3$, garantimos que $\tilde{w_0} \in H^1(\mathbb{R}^3)$.

Notemos que $w_0 \in L^2(\Omega)$ e, por (2.3), para todo $\varphi \in [\mathcal{D}(\Omega)]^3 \subset [\mathcal{D}(\overline{\Omega})]^3$, temos

$$(w, \varphi) = -(\nabla \cdot w, \nabla \cdot \varphi) = -(w_0, \nabla \cdot \varphi) = - < w_0, \nabla \cdot \varphi >=< \nabla w_0, \varphi >,$$

o que mostra que

$$\nabla w_0 = w \text{ em } [\mathcal{D}'(\Omega)]^3,$$

ou seja,

$$\nabla w_0 \in [L^2(\Omega)]^3.$$

Em resumo, ficamos com

$$w_0 \in H^1(\Omega) \text{ e } \tilde{w_0} \in H^1(\mathbb{R}^3),$$

donde, pelo **Teorema 1.3**, concluímos que $w_0 \in H^1_0(\Omega)$.

Visto que $\mathcal{D}(\Omega)$ é denso em $H^1_0(\Omega)$ (com respeito à norma de $H^1(\Omega)$), existe uma sequência $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em $\mathcal{D}(\Omega)$ tal que $\varphi_n \longrightarrow w_0$ em $H^1(\Omega)$ quando $n \to +\infty$. Como consequência, $\varphi_n \longrightarrow w_0 = \nabla \cdot w$ em $L^2(\Omega)$ e $\nabla \varphi_n \longrightarrow \nabla w_0 = w$ em $[L^2(\Omega)]^3$. Logo, para todo

$v \in H(div, \Omega)$, obtemos

$$\begin{aligned} (w, v)_{H(div,\Omega)} &= (w, v) + (\nabla \cdot w, \nabla \cdot v) \\ &= (\nabla w_0, v) + (w_0, \nabla \cdot v) \\ &= (\lim \nabla \varphi_n, v) + (\lim \varphi_n, \nabla \cdot v) \\ &= \lim[(\nabla \varphi_n, v) + (\varphi_n, \nabla \cdot v)] \\ &= \lim[- < \nabla \cdot v, \varphi_n > + < \nabla \cdot v, \varphi_n >] \\ &= 0, \end{aligned}$$

devido ao item c) da **Proposição 2.1**.

Portanto, $w = 0$ em $H(div, \Omega)$ e pelo **Corolário 1.2**, concluímos que $[\mathcal{D}(\overline{\Omega})]^3$ é denso em $H(div, \Omega)$.

(ii) Claramente, γ_η é uma aplicação linear. Mostremos que γ_η é limitada.

Dados $v \in [\mathcal{D}(\overline{\Omega})]^3$ e $\varphi \in \mathcal{D}(\overline{\Omega})$, segue da Fórmula de Green que

$$\int_\Omega v \cdot (\nabla \varphi)\, dx + \int_\Omega (\nabla \cdot v)\varphi\, dx = \int_\Gamma (v \cdot \eta)\varphi\, d\Gamma.$$

Devido a densidade de $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ em $H^1(\Omega)$ (item (i) do **Teorema 1.3**), a fórmula acima continua válida quaisquer que sejam $v \in [\mathcal{D}(\overline{\Omega})]^3$ e $\varphi \in H^1(\Omega)$. Desse modo, dados $v \in [D(\overline{\Omega})]^3$ e $\varphi \in H^1(\Omega)$, via desigualdade de Hölder (**Proposição 1.1**), obtemos

$$\begin{aligned} \left| \int_\Gamma (v \cdot \eta)\varphi\, d\Gamma \right| &= \left| \int_\Omega v \cdot \nabla\varphi\, dx + \int_\Omega (\nabla \cdot v)\varphi\, dx \right| \\ &\leq \left| \int_\Omega v \cdot \nabla\varphi\, dx \right| + \left| \int_\Omega (\nabla \cdot v)\varphi\, dx \right| \\ &\leq ||v||||\nabla\varphi|| + ||\nabla \cdot v||||\varphi|| \\ &\leq (||v||^2 + ||\nabla \cdot v||^2)^{1/2}(||\varphi||^2 + ||\nabla\varphi||^2)^{1/2}. \end{aligned}$$

Logo,

$$\left| \int_\Gamma (v \cdot \eta)\varphi\, d\Gamma \right| \leq ||v||_{H(div,\Omega)}||\varphi||_{H^1(\Omega)}, \ \forall\, v \in [\mathcal{D}(\overline{\Omega})]^3 \text{ e } \forall\, \varphi \in H^1(\Omega). \tag{2.4}$$

Dada uma função $\varphi \in H^1(\Omega)$, o seu traço, $\mu := \varphi|_\Gamma$, é uma função de $H^{1/2}(\Gamma)$. Além disso, o operador traço de $H^1(\Omega) \to H^{1/2}(\Gamma)$ é linear, contínuo e sobrejetivo, possuindo inverso direito contínuo. Com isso, dado $\mu \in H^{1/2}(\Gamma)$, existe $\varphi_\mu \in H^1(\Omega)$ tal que

$$\mu = \varphi_\mu|_\Gamma \text{ e } ||\varphi_\mu||_{H^1(\Omega)} \leq C||\mu||_{H^{1/2}(\Gamma)},$$

com $C > 0$ independente de μ.

Assim, de posse dessa última desigualdade e observando que o primeiro membro de (2.4) depende apenas do traço de φ em Γ, garantimos que

$$\left|\int_\Gamma (v\cdot\eta)\mu\, d\Gamma\right| \leq C||v||_{H(div,\Omega)}||\mu||_{H^{1/2}(\Gamma)},\ \forall\ v\in[\mathcal{D}(\overline{\Omega})]^3 \text{ e } \forall\ \mu\in H^{1/2}(\Gamma). \tag{2.5}$$

Sendo $H^{-1/2}(\Gamma)$ o dual de $H^{1/2}(\Gamma)$, munido da norma dual, resulta de (2.5) que

$$\begin{aligned}
||\gamma_\eta(v)||_{H^{-1/2}(\Gamma)} &= \sup_{\substack{\mu\in H^{1/2}(\Gamma)\\ \mu\neq 0}} \frac{\left|\int_\Gamma \gamma_\eta(v)\mu\, d\Gamma\right|}{||\mu||_{H^{1/2}(\Gamma)}}\\
&= \sup_{\substack{\mu\in H^{1/2}(\Gamma)\\ \mu\neq 0}} \frac{\left|\int_\Gamma (v\cdot\eta)\mu\, d\Gamma\right|}{||\mu||_{H^{1/2}(\Gamma)}}\\
&\leq C||v||_{H(div,\Omega)},\ \forall\ v\in[\mathcal{D}(\overline{\Omega})]^3.
\end{aligned}$$

Como consequência, a aplicação linear $\gamma_\eta : v\mapsto v\cdot\eta|_\Gamma$ definida em $[\mathcal{D}(\overline{\Omega})]^3$ é limitada e, portanto, contínua. Como $[\mathcal{D}(\overline{\Omega})]^3$ é denso em $H(div,\Omega)$ (item (i) anterior), podemos estender por continuidade a uma aplicação linear, ainda denotada por γ_η, de $H(div,\Omega)$ em $H^{-1/2}(\Gamma)$.

Mostremos agora que aplicação traço definida em $H(div,\Omega)$, tomando valores em $H^{-1/2}(\Gamma)$, é sobrejetiva.

Seja $\mu\in H^{-1/2}(\Gamma)$. Então, pelo **Teorema 1.5**, existe uma única função $u\in H^1(\Omega)$ que é solução fraca do problema de Newmann

$$\begin{cases} -\Delta u + u = 0 & \text{em}\quad \Omega,\\ \dfrac{\partial u}{\partial\eta}|_\Gamma = \mu & \text{em}\quad \Gamma. \end{cases}$$

A função $v=\nabla u$ é tal que

$$\nabla\cdot v = \nabla\cdot(\nabla u) = \Delta u = u\in L^2(\Omega),$$

ou seja, $v\in H(div,\Omega)$. E, além disso, o traço $\gamma_\eta(v)$ de v é μ. Com efeito,

$$\gamma_\eta(v) = v\cdot\eta|_\Gamma = \nabla u\cdot\eta|_\Gamma = \frac{\partial u}{\partial\eta}|_\Gamma = \mu.$$

Logo, γ_η é uma aplicação sobrejetiva.

(iii) A fórmula de Green

$$\int_\Omega v\cdot(\nabla\varphi)\, dx + \int_\Omega (\nabla\cdot v)\varphi\, dx = \int_\Gamma (v\cdot\eta)\varphi\, d\Gamma = <\gamma_\eta(v),\varphi>_{H^{-1/2}(\Gamma),H^{1/2}(\Gamma)}$$

é válida quaisquer que sejam $v\in[\mathcal{D}(\overline{\Omega})]^3$ e $\varphi\in H^1(\Omega)$. Devido a densidade de $[\mathcal{D}(\overline{\Omega})]^3$

no espaço $H(div,\Omega)$ e a continuidade de γ_η, garantimos a fórmula generalizada de Green

$$\int_\Omega v\cdot(\nabla\varphi)\;dx+\int_\Omega(\nabla\cdot v)\varphi\;dx =<\gamma_\eta(v),\varphi>_{H^{-1/2}(\Gamma),H^{1/2}(\Gamma)},\ \forall\, v\in H(div,\Omega),\ \varphi\in H^1(\Omega).$$

(iv) Mostremos que $ker(\gamma_\eta)=H_0(div,\Omega)$.

Como $\overline{[\mathcal{D}(\Omega)]^3}$ é um subespaço fechado do espaço de Hilbert $H(div,\Omega)$, escrevemos

$$H(div,\Omega)=\overline{[\mathcal{D}(\Omega)]^3}\oplus\{\overline{[\mathcal{D}(\Omega)]^3}\}^\perp$$

(em que o fecho acima é com respeito à norma de $H(div,\Omega)$). Seja $v\in ker(\gamma_\eta)$, $v\neq 0$. Suponhamos $v\in\{[\mathcal{D}(\Omega)]^3\}^\perp$. Então

$$(v,u)_{H(div,\Omega)}=0,\ \forall\, u\in[\mathcal{D}(\Omega)]^3,$$

isto é,

$$(v,u)+(\nabla\cdot v,\nabla\cdot u)=0,\ \forall\, u\in[\mathcal{D}(\Omega)]^3.$$

Fazendo $w=\nabla\cdot v$, a igualdade acima implica $v=\nabla w$ em $[\mathcal{D}'(\Omega)]^3$, uma vez que

$$(v,u)=-(\nabla\cdot v,\nabla\cdot u)=-(w,\nabla\cdot u)=-<w,\nabla\cdot u>=<\nabla w,u>,\ \forall\, u\in[\mathcal{D}(\Omega)]^3.$$

Com isso, $w\in H^1(\Omega)$. Segue da Fórmula generalizada de Green para $H(div,\Omega)$ (item (iii) anterior), com $\varphi=w$, que

$$\int_\Omega v\cdot(\nabla w)\;dx+\int_\Omega(\nabla\cdot v)w\;dx =<\gamma_\eta(v,)w>_{H^{-1/2}(\Gamma),H^{1/2}(\Gamma)}=0\Rightarrow(v,v)+(\nabla\cdot v,\nabla\cdot v)=0,$$

ou seja,

$$||v||^2_{H(div,\Omega)}=0,$$

donde obtemos $v=0$.

Vimos assim que

$$v\in ker(\gamma_\eta),\ v\perp[\mathcal{D}(\Omega)]^3\Longrightarrow v=0.$$

Portanto,

$$v\in ker(\gamma_\eta),\ v\perp\overline{[\mathcal{D}(\Omega)]^3}\Longrightarrow v=0.$$

Como consequência, dado $v\in ker(\gamma_\eta)$, temos $v\in\overline{[\mathcal{D}(\Omega)]^3}=H_0(div,\Omega)$. Assim, $ker(\gamma_\eta)\subset H_0(div,\Omega)$.

Suponhamos agora $v\in H_0(div,\Omega)=\overline{[\mathcal{D}(\Omega)]^3}$. Logo, existe uma sequência de funções $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em $[\mathcal{D}(\Omega)]^3$ tal que $\varphi_n\longrightarrow v$ quando $n\to+\infty$.

Para todo $\xi \in H^1(\Omega)$, via fórmula de Green, ficamos com

$$\begin{aligned}
< \gamma_\eta(v), \xi >_{H^{-1/2}(\Gamma),H^{1/2}(\Gamma)} &= \int_\Omega v \cdot (\nabla\xi)\ dx + \int_\Omega (\nabla \cdot v)\xi\ dx \\
&= \lim_{n\to+\infty} \left[\int_\Omega \varphi_n \cdot (\nabla\xi)\ dx + \int_\Omega (\nabla \cdot \varphi_n)\xi\ dx \right] \\
&= \lim_{n\to+\infty} [< \xi, \nabla \cdot \varphi_n > + < \nabla\xi, \varphi_n >] = 0,
\end{aligned}$$

em que na última igualdade acima utilizamos o item c) da **Proposição 2.1**.

Desse modo, $< \gamma_\eta(v), \xi >_{H^{-1/2}(\Gamma),H^{1/2}(\Gamma)} = 0$ para todo $\xi \in H^1(\Omega)$ e então $||\gamma_\eta(v)||_{H^{-1/2}(\Gamma)} = 0$.

Portanto, $\gamma_\eta(v) = 0$, donde concluímos que $v \in ker(\gamma_\eta)$.

■

Observação 2.2 *Segue, diretamente do teorema anterior, a "fórmula de integração por partes":*

$$\int_\Omega v \cdot (\nabla\varphi)\ dx = -\int_\Omega (\nabla \cdot v)\varphi\ dx, \tag{2.6}$$

para todos $v \in H_0(div, \Omega)$ e $\varphi \in H^1(\Omega)$.

Perguntamo-nos agora se existe um resultado de traço para funções em $H(rot, \Omega)$. Como veremos, a resposta a esta questão é positiva. Para isso, necessitaremos caracterizar as funções de $H(rot, \Omega)$ que pertencem ao espaço $H_0(rot, \Omega)$. Este é o objetivo do próximo teorema.

Teorema 2.2 *Seja Ω um conjunto aberto do $\mathbb{R}^3$ com fronteira Γ limitada e Lipschitz. Se $u \in H(rot, \Omega)$ é tal que*

$$(u, \nabla \times \varphi) - (\nabla \times u, \varphi) = 0,\ \forall\ \varphi \in [\mathcal{D}(\overline{\Omega})]^3, \tag{2.7}$$

então $u \in H_0(rot, \Omega)$.

Lembremos que para mostrar que $u \in H_0(rot, \Omega)$, devemos garantir a existência de uma sequência de funções $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de $[\mathcal{D}(\Omega)]^3$ tal que $\varphi_k \longrightarrow u$ em $H(rot, \Omega)$. Equivalentemente, mostraremos que dado $\zeta > 0$ qualquer, existe $\varphi \in [\mathcal{D}(\Omega)]^3$ tal que $||u - \varphi||_{H(rot,\Omega)} < \zeta$.

Para a prova deste teorema, faremos uso de alguns lemas.

Lema 2.1 *Seja $u \in H(rot, \Omega)$ satisfazendo (2.7). Sejam $u_0 = \nabla \times u$ e*

$$\tilde{u} = \begin{cases} u, & em \quad \Omega \\ 0, & em \quad \mathbb{R}^3\backslash\Omega \end{cases} \quad e \quad \tilde{u_0} = \begin{cases} u_0, & em \quad \Omega \\ 0, & em \quad \mathbb{R}^3\backslash\Omega \end{cases}.$$

Então $\tilde{u} \in H(rot, \mathbb{R}^3)$ e $supp(\tilde{u}) \subset \overline{\Omega}$.

Demonstração: Da definição de $\tilde{u}$, temos supp$(\tilde{u}) \subset \overline{\Omega}$. Além disso, $\tilde{u}, \tilde{u_0} \in [L^2(\mathbb{R}^3)]^3$, já que $u, u_0 \in [L^2(\Omega)]^3$. Resta-nos mostrar que $\nabla \times \tilde{u} \in [L^2(\mathbb{R}^3)]^3$.

Com efeito, uma vez que u satisfaz (2.7), temos, para todo $\varphi \in [\mathcal{D}(\mathbb{R}^3)]^3$, que

$$\begin{aligned} < \nabla \times \tilde{u}, \varphi > &= < \tilde{u}, \nabla \times \varphi >= \int_{\mathbb{R}^3} \tilde{u} \cdot (\nabla \times \varphi)\ dx = \int_{\Omega} u \cdot (\nabla \times \varphi)\ dx \\ &= (u, \nabla \times \varphi) \overset{(2.7)}{=} (\nabla \times u, \varphi) = (u_0, \varphi) = \int_{\Omega} u_0 \cdot \varphi\ dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} \tilde{u_0} \cdot \varphi\ dx =< \tilde{u_0}, \varphi > . \end{aligned}$$

Vimos assim que

$$< \nabla \times \tilde{u}, \varphi >=< \tilde{u_0}, \varphi >,\ \forall\ \varphi \in [\mathcal{D}(\mathbb{R}^3)]^3,$$

donde $\tilde{u_0} = \nabla \times \tilde{u}$ em $[\mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)]^3$. Daí, $\nabla \times \tilde{u} \in [L^2(\mathbb{R}^3)]^3$ e, portanto, $\tilde{u} \in H(rot, \mathbb{R}^3)$. ∎

Na prova do **Teorema 2.2**, utilizaremos o processo de *truncamento* (caso Ω não seja limitado) e *regularização*. O truncamento será realizado como no **Lema 2.2**.

Lema 2.2 *Seja $\tilde{u} \in H(rot, \mathbb{R}^3)$ com supp$(\tilde{u}) \subset \overline{\Omega}$ (conforme **Lema 2.1**). Considere uma função $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$ tal que $0 \leq \varphi \leq 1$ e*

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1, & se \quad |x| \leq 1, \\ 0, & se \quad |x| \geq 2. \end{cases}$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos

$$\varphi_n(x) = \varphi\left(\frac{x}{n}\right) = \begin{cases} 1, & se \quad |x| \leq n, \\ 0, & se \quad |x| \geq 2n. \end{cases}$$

Então $\varphi_n \tilde{u}$ tem suporte compacto em $\overline{\Omega}$, $\varphi_n \tilde{u} \in H(rot, \mathbb{R}^3)$ e $\varphi_n \tilde{u} \longrightarrow \tilde{u}$ em $H(rot, \mathbb{R}^3)$.

Demonstração: Para todo $n \in \mathbb{N}$, vemos que supp$(\varphi_n \tilde{u}) \subset B(0; 2n) \cap \overline{\Omega}$ e, então, $\varphi_n \tilde{u}$ possui suporte compacto em $\overline{\Omega}$. Notemos também que $\varphi_n \tilde{u} \in [L^2(\mathbb{R}^3)]^3$ e

$$||\varphi_n \tilde{u}||^2 = \int_{\mathbb{R}^3} |\varphi_n \tilde{u}|^2\ dx \leq \int_{\mathbb{R}^3} |\tilde{u}|^2\ dx = ||\tilde{u}||^2,$$

já que $0 \leq \varphi_n \leq 1$.

Mostremos agora que $\nabla \times (\varphi_n \tilde{u}) \in [L^2(\mathbb{R}^3)]^3$. Para todo $\psi \in [\mathcal{D}(\mathbb{R}^3)]^3$, obtemos:

$$\begin{aligned}
< \nabla \times (\varphi_n \tilde{u}), \psi > &= < \varphi_n \tilde{u}, \nabla \times \psi >= \int_{\mathbb{R}^3} \varphi_n \tilde{u} \cdot (\nabla \times \psi)\ dx = \int_{\mathbb{R}^3} \tilde{u} \cdot (\varphi_n \nabla \times \psi)\ dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^3} \tilde{u} \cdot [\nabla \times (\varphi_n \psi) - (\nabla \varphi_n) \times \psi]\ dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^3} \tilde{u} \cdot [\nabla \times (\varphi_n \psi)]\ dx - \int_{\mathbb{R}^3} \tilde{u} \cdot [(\nabla \varphi_n \times \psi)]\ dx \\
&= < \tilde{u}, \nabla \times \underbrace{(\varphi_n \psi)}_{\in [\mathcal{D}(\mathbb{R}^3)]^3} > + \int_{\mathbb{R}^3} (\nabla \varphi_n \times \tilde{u}) \cdot \psi\ dx \\
&= < \nabla \times \tilde{u}, \varphi_n \psi > + < \nabla \varphi_n \times \tilde{u}, \psi >,
\end{aligned}$$

onde usamos as identidades vetoriais: $a \times b = -b \times a$, $a \cdot (b \times c) = (a \times b) \cdot c$, para quaisquer $a, b, c \in \mathbb{R}^3$, e o item f) da **Proposição 2.1**.

Sabemos do **Lema 2.1** que $\nabla \times \tilde{u} \in [L^2(\mathbb{R}^3)]^3$. Com isso, para todo $\psi \in [\mathcal{D}(\mathbb{R}^3)]^3$, podemos escrever

$$\begin{aligned}
< \nabla \times (\varphi_n \tilde{u}), \psi > &= \int_{\mathbb{R}^3} (\nabla \times \tilde{u}) \cdot (\varphi_n \psi)\ dx + < \nabla \varphi_n \times \tilde{u}, \psi > \\
&= \int_{\mathbb{R}^3} (\varphi_n \nabla \times \tilde{u}) \cdot \psi\ dx + < \nabla \varphi_n \times \tilde{u}, \psi > \\
&= < \varphi_n \nabla \times \tilde{u}, \psi > + < \nabla \varphi_n \times \tilde{u}, \psi > \\
&= < \varphi_n \nabla \times \tilde{u} + \nabla \varphi_n \times \tilde{u}, \psi >,
\end{aligned}$$

donde resulta que $\nabla \times (\varphi_n \tilde{u}) = \varphi_n \nabla \times \tilde{u} + \nabla \varphi_n \times \tilde{u}$ em $[\mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)]^3$. Como $\varphi_n \nabla \times \tilde{u}$ e $\nabla \varphi_n \times \tilde{u}$ são funções em $[L^2(\mathbb{R}^3)]^3$, garantimos que $\nabla \times (\varphi_n \tilde{u}) \in [L^2(\mathbb{R}^3)]^3$. Assim, para todo $n \in \mathbb{N}$, concluímos que $\varphi_n \tilde{u} \in H(rot, \mathbb{R}^3)$.

Provemos agora que $\varphi_n \tilde{u} \longrightarrow \tilde{u}$ em $H(rot, \mathbb{R}^3)$.

Inicialmente, observamos que

$$||\varphi_n \tilde{u} - \tilde{u}||^2 = \int_{\mathbb{R}^3} |\varphi_n \tilde{u} - \tilde{u}|^2\ dx = \int_{\mathbb{R}^3} |\tilde{u}|^2 |\varphi_n - 1|^2\ dx.$$

Mas $|\tilde{u}(x)|^2 |\varphi_n(x) - 1|^2 \longrightarrow 0$ quase sempre em $\mathbb{R}^3$ (pois $(\varphi_n(x))$ converge pontualmente para $\varphi \equiv 1$) e $|\tilde{u}(x)|^2 |\varphi_n(x) - 1|^2 \leq |\tilde{u}(x)|^2$ quase sempre em $\mathbb{R}^3$ com $|\tilde{u}(x)|^2 \in L^1(\mathbb{R}^3)$. Decorre do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue (**Teorema 1.1**) que

$$\int_{\mathbb{R}^3} |\tilde{u}|^2 |\varphi_n - 1|^2\ dx \longrightarrow 0, \text{ isto é, } ||\varphi_n \tilde{u} - \tilde{u}||^2 \longrightarrow 0.$$

Logo, obtemos que

$$\varphi_n \tilde{u} \longrightarrow \tilde{u} \text{ em } [L^2(\mathbb{R}^3)]^3. \tag{2.8}$$

Estudemos agora a convergência do termo $||\nabla \times (\varphi_n \tilde{u} - \tilde{u})||$. Para isso, usando o item f) da

Proposição 2.1, vemos que

$$\begin{aligned}\nabla \times (\varphi_n \tilde{u} - \tilde{u}) &= \varphi_n(\nabla \times \tilde{u}) + \nabla\varphi_n \times \tilde{u} - \nabla \times \tilde{u} \\ &= (\varphi_n - 1)\nabla \times \tilde{u} + \nabla\varphi_n \times \tilde{u}.\end{aligned}$$

Utilizando-se dos mesmos argumentos apresentados acima, mostra-se que

$$(\varphi_n - 1)\nabla \times \tilde{u} \longrightarrow 0 \text{ em } [L^2(\mathbb{R}^3)]^3. \tag{2.9}$$

Iremos, pois, empregar esforços para mostrar que $\nabla\varphi_n \times \tilde{u} \longrightarrow 0$ em $[L^2(\mathbb{R}^3)]^3$. De posse da definição das funções φ_n, obtemos

$$\nabla\varphi_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{se, } \quad |x| < n \\ 0, & \text{se, } \quad |x| > 2n. \end{cases}$$

Com isso, $\nabla\varphi_n \longrightarrow 0$ pontualmente. Desse modo, $|\nabla\varphi_n(x) \times \tilde{u}(x)| \longrightarrow 0$ quase sempre em $\mathbb{R}^3$ e

$$|\nabla\varphi_n(x) \times \tilde{u}(x)|^2 \leq |\nabla\varphi_n(x)|^2|\tilde{u}(x)|^2 \leq C|\tilde{u}(x)|^2$$

quase sempre em $\mathbb{R}^3$, com $C|\tilde{u}(x)|^2 \in L^1(\mathbb{R}^3)$. Segue do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue que

$$\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla\varphi_n \times \tilde{u}|^2 \, dx \longrightarrow 0, \text{ isto é}, \nabla\varphi_n \times \tilde{u} \longrightarrow 0 \text{ em } [L^2(\mathbb{R}^3)]^3. \tag{2.10}$$

Resulta de (2.9) e (2.10) que

$$\nabla \times (\varphi_n \tilde{u}) \longrightarrow \nabla \times \tilde{u} \text{ em } [L^2(\mathbb{R}^3)]^3 \tag{2.11}$$

e, portanto, (2.8) e (2.11) nos fornecem $\varphi_n \tilde{u} \longrightarrow \tilde{u}$ em $H(rot, \mathbb{R}^3)$. ■

Observação 2.3 *Do lema anterior, obtemos que $\varphi_n \tilde{u} \longrightarrow \tilde{u}$ em $H(rot, \Omega)$, já que $supp(\tilde{u}) \subset \overline{\Omega}$ e $supp(\varphi_n \tilde{u}) \subset \overline{\Omega}$. Assim, se $\tilde{u}$ é como no **Lema 2.1** (extensão de $u \in H(rot, \Omega)$ a $\mathbb{R}^3$ por zero fora de Ω), então*

$$\varphi_n u \longrightarrow u \text{ em } H(rot, \Omega).$$

Observação 2.4 *No **Lema 2.2**, provamos que o conjunto das funções de $H(rot, \Omega)$ com suporte compacto é denso em $H(rot, \Omega)$.*

De fato, dado $u \in H(rot, \Omega)$, tomemos $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definida no **Lema 2.2**. Logo, vemos que $\varphi_n u \in [L^2(\Omega)]^3$ e, quaisquer que sejam $\psi \in [\mathcal{D}(\Omega)]^3$, temos

$$< \nabla \times (\varphi_n u), \psi > = < \varphi_n(\nabla \times u) + \nabla\varphi_n \times u, \psi >,$$

ou seja,

$$\nabla \times (\varphi_n u) = \varphi_n(\nabla \times u) + \nabla\varphi_n \times u \in [L^2(\Omega)]^3.$$

Consequentemente, $\varphi_n u \in H(rot, \Omega)$, $\text{supp}(\varphi_n u) \subset \Omega \cap B(0; 2n)$ e $\varphi_n u \longrightarrow u$ em $H(rot, \Omega)$.

A seguir, estabelecemos mais alguns resultados preliminares que serão utilizados na demonstração do **Teorema 2.2**.

Lema 2.3 *Se $v \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p < \infty$ e $(a_m)_{m\in\mathbb{N}}$, $a_m > 0$, é uma sequência numérica que converge para 1, então a sequência $v_m(x) := v(a_m x)$ quase sempre em $\mathbb{R}^n$, $\forall\ m \in \mathbb{N}$, converge para v em $L^p(\mathbb{R}^n)$.*

Demonstração: Seja $\varepsilon > 0$ qualquer. Como $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ é denso em $L^p(\mathbb{R}^n)$, existe $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ tal que $||v - \varphi||_p^p < \dfrac{\varepsilon}{3.2^n}$.

Fazendo $\varphi_m(x) = \varphi(a_m x)$, obtemos

(i) $||v_m - \varphi_m||_p^p = \displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} |v(a_m x) - \varphi(a_m x)|^p\ dx = \frac{1}{a_m^n}\int_{\mathbb{R}^n} |v(y) - \varphi(y)|^p\ dy = \frac{1}{a_m^n}||v - \varphi||_p^p < \frac{1}{a_m^n}\frac{\varepsilon}{3.2^n}$;

(ii) Como $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ e $a_m \longrightarrow 1$, temos $\varphi_m(x) = \varphi(a_m x) \longrightarrow \varphi(x),\ \forall\ x \in \mathbb{R}^n$.

Queremos mostrar, usando o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, que $\varphi_m \longrightarrow \varphi$ em $L^p(\mathbb{R}^n)$. Para isso, necessitamos de uma função $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ que seja uma limitante para $(\varphi_m)_{m\in\mathbb{N}}$.

Uma vez que $a_m \longrightarrow 1$, existe $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$m \geq m_0 \Longrightarrow \frac{1}{2} < a_m$$

e sendo $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, existe $R > 0$ tal que $\varphi(x) = 0$ se $|x| > R$. Desse modo,

$$\varphi_m(x) = \varphi(a_m x) = 0 \text{ quando } |x| > \frac{R}{a_m}.$$

Em particular, para todo $m \geq m_0$, resulta que $\varphi_m(x) = 0$ se $|x| > 2R$, pois

$$m \geq m_0 \Longrightarrow \frac{1}{a_m} < 2 \Longrightarrow \frac{R}{a_m} < 2R.$$

Escolhemos $M = \max\limits_{x\in\mathbb{R}^n} |\varphi(x)| < +\infty$ e definimos a função

$$g(x) = \begin{cases} M, & \text{se } \ |x| < 2R \\ 0, & \text{se } \ |x| > 2R \end{cases}.$$

Assim, para todo $m \geq m_0$, $|\varphi_m(x)| \leq g(x)$ qualquer que seja $x \in \mathbb{R}^n$.

Em resumo, para todo $m \geq m_0$, temos

$$|\varphi_m(x)|^p \longrightarrow |\varphi(x)|^p, \ \forall \ x \in \mathbb{R}^n \text{ (item (ii) anterior)}$$

e

$$|\varphi_m(x)|^p \leq |g(x)|^p, \ \forall \ x \in \mathbb{R}^n, \text{ com } g \in L^p(\mathbb{R}^n).$$

O Teorema da Convergência Dominada implica que $\varphi_m \longrightarrow \varphi$ em $L^p(\mathbb{R}^n)$. Com isso, existe $m_1 \in \mathbb{N}$, $m_1 > m_0$, tal que

$$||\varphi_m - \varphi||_p < \frac{\varepsilon}{3}, \text{ se } m > m_1. \tag{2.12}$$

Portanto, para todo $m \in \mathbb{N}$, $m \geq m_1$, segue de (i), (ii) e (2.12) que

$$\begin{aligned} ||v_m - v||_p &\leq ||v_m - \varphi_m||_p + ||\varphi_m - \varphi||_p + ||\varphi - v||_p \\ &< \frac{1}{a_m^n}\frac{\varepsilon}{3.2^n} + ||\varphi_m - \varphi||_p + \frac{\varepsilon}{3.2^n} \\ &< 2^n\frac{\varepsilon}{3.2^n} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3.2^n} \\ &< \varepsilon, \end{aligned}$$

donde garantimos que $v_m \longrightarrow v$ em $L^p(\mathbb{R}^n)$. ∎

Observação 2.5 *Sob as mesmas condições do lema anterior, prova-se de modo análogo que, para $x_0 \in \mathbb{R}^n$ fixado e $v_m := v(x_0 + a_m(x - x_0))$ quase sempre em $\mathbb{R}^n$, tem-se $v_m \longrightarrow v$ em $L^p(\mathbb{R}^n)$.*

Lema 2.4 *Seja (ρ_ε), $\varepsilon > 0$, uma sequência regularizante, isto é,*

$$\rho_\varepsilon \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3), \ \rho_\varepsilon \geq 0, \ \rho_\varepsilon = 0 \textit{ para } |x| \geq \varepsilon \textit{ e } \int_{\mathbb{R}^3} \rho_\varepsilon(x)\ dx = 1.$$

Se $v \in H(rot, \mathbb{R}^3)$, então $\rho_\varepsilon * v \overset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} v$ em $H(rot, \mathbb{R}^3)$.

Demonstração: Seja $v \in H(rot, \mathbb{R}^3)$. Logo, $v \in [L^2(\mathbb{R}^3)]^3$ e da **Proposição 1.5** segue que $\rho_\varepsilon * v \overset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} v$ em $[L^2(\mathbb{R}^3)]^3$.

Mostremos, pois, que $\nabla \times (\rho_\varepsilon * v) \longrightarrow \nabla \times v$ em $[L^2(\mathbb{R}^3)]^3$.

Para esta finalidade, afirmamos que $\nabla \times (\rho_\varepsilon * v) = \rho_\varepsilon * (\nabla \times v)$ em $[\mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)]^3$.

De fato, para todo $\varphi \in [\mathcal{D}(\mathbb{R}^3)]^3$,

$$\begin{aligned}
< \nabla \times (\rho_\varepsilon * v), \varphi > &= < \rho_\varepsilon * v, \nabla \times \varphi > \text{ (lembrando que } \rho_\varepsilon * v \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^3)) \\
&= \int_{\mathbb{R}^3} (\rho_\varepsilon * v) \cdot (\nabla \times \varphi)\, dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^3} \left(\int_{\mathbb{R}^3} \rho_\varepsilon(x-y) v(y)\, dy \right) \cdot \nabla \times \varphi(x)\, dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \rho_\varepsilon(x-y) v(y) \cdot \nabla \times \varphi(x)\, dydx \\
&= \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \rho_\varepsilon(y) v(x-y) \cdot \nabla \times \varphi(x)\, dydx \\
&= \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \rho_\varepsilon(y) v(x-y) \cdot \nabla \times \varphi(x)\, dxdy \\
&= \int_{\mathbb{R}^3} \rho_\varepsilon(y) \left(\int_{\mathbb{R}^3} v(x-y) \cdot \nabla \times \varphi(x)\, dx \right) dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^3} \rho_\varepsilon(y) \left(\int_{\mathbb{R}^3} \nabla \times v(x-y) \cdot \varphi(x)\, dx \right) dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \rho_\varepsilon(y) \nabla \times v(x-y) \cdot \varphi(x)\, dydx \\
&= \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \rho_\varepsilon(x-y) \nabla \times v(y) \cdot \varphi(x)\, dydx \\
&= \int_{\mathbb{R}^3} (\rho_\varepsilon * \nabla \times v)(x) \cdot \varphi(x)\, dx \\
&= < \rho_\varepsilon * (\nabla \times v), \varphi > .
\end{aligned}$$

Como conseqüência, vale que $\nabla \times (\rho_\varepsilon * v) = \rho_\varepsilon * (\nabla \times v) \longrightarrow \nabla \times v$ em $[L^2(\mathbb{R}^3)]^3$, já que $\nabla \times v \in [L^2(\mathbb{R}^3)]^3$, donde concluímos que $\rho_\varepsilon * v \longrightarrow v$ em $H(rot, \Omega)$.

■

Lema 2.5 *Seja $v \in H(rot, \mathbb{R}^3)$ e, para cada $\theta \in (0,1)$, definimos*

$$v_\theta(x) := v\left(\frac{x}{\theta}\right) \text{ quase sempre em } \mathbb{R}^3.$$

Então $v_\theta \in H(rot, \mathbb{R}^3)$ e $v_\theta \overset{\theta \to 1^-}{\longrightarrow} v$ em $H(rot, \mathbb{R}^3)$.

Demonstração: Provaremos inicialmente que $v_\theta \in H(rot, \mathbb{R}^3)$ para todo $\theta \in (0,1)$.

Qualquer que seja $\varphi \in [\mathcal{D}(\mathbb{R}^3)]^3$, verificamos que

$$
\begin{aligned}
< \nabla \times v_\theta, \varphi > &= < v_\theta, \nabla \times \varphi > \\
&= \int_{\mathbb{R}^3} v_\theta(x) \cdot \nabla \times \varphi(x)\ dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^3} v\left(\frac{x}{\theta}\right) \cdot \nabla \times \varphi(x)\ dx \\
&= \theta^3 \int_{\mathbb{R}^3} v(x) \cdot (\nabla \times \varphi)(\theta x)\ dx \\
&= \theta^2 \int_{\mathbb{R}^3} v(x) \cdot \nabla \times (\ \underbrace{\varphi(\theta x)}_{\in[\mathcal{D}(\mathbb{R}^3)]^3}\ )\ dx \\
&= \theta^2 \int_{\mathbb{R}^3} \nabla \times v(x) \cdot \varphi(\theta x)\ dx \\
&= \frac{1}{\theta} \int_{\mathbb{R}^3} (\nabla \times v)(\theta x) \cdot \varphi(x)\ dx \\
&= \frac{1}{\theta} < (\nabla \times v)_\theta, \varphi >,
\end{aligned}
$$

ou seja, $\nabla \times v_\theta = \frac{1}{\theta}(\nabla \times v)_\theta \in [L^2(\mathbb{R}^3)]^3$. Com isso, $v_\theta \in H(rot, \mathbb{R}^3)$ e via **Lema 2.3** obtemos

$$
v_\theta \longrightarrow v \in [L^2(\mathbb{R}^3)]^3 \text{ quando } \theta \to 1^-.
$$

Agora observemos que

$$
\begin{aligned}
||\nabla \times v_\theta - \nabla \times v|| &= \left|\left|\frac{1}{\theta}(\nabla \times v)_\theta - \nabla \times v\right|\right| \\
&= \left|\left|\left(\frac{1}{\theta} - 1\right)(\nabla \times v)_\theta + (\nabla \times v)_\theta - \nabla \times v\right|\right| \\
&\leq \left|\frac{1-\theta}{\theta}\right| ||(\nabla \times v)_\theta|| + ||(\nabla \times v)_\theta - \nabla \times v||.
\end{aligned}
$$

Novamente pelo **Lema 2.3** sabemos que

$$
||(\nabla \times v)_\theta - \nabla \times v|| \longrightarrow 0, \text{ se } \theta \to 1^-.
$$

Por outro lado, como $||(\nabla \times v)_\theta|| = \theta^{3/2}||\nabla \times v||$, ficamos com

$$
\frac{|1-\theta|}{\theta}||(\nabla \times v)_\theta|| = \theta^{1/2}(1-\theta)||\nabla \times v|| \longrightarrow 0,\ \theta \to 1^-.
$$

Assim, $\nabla \times v_\theta \longrightarrow \nabla \times v$ em $[L^2(\mathbb{R}^3)]^3$ e provamos então que $v_\theta \longrightarrow v$ em $H(rot, \mathbb{R}^3)$. ∎

Vamos agora à demonstração do **Teorema 2.2**. Recordemos aqui seu enunciado: "Seja Ω um conjunto aberto do $\mathbb{R}^3$ com fronteira Γ limitada e Lipschitz. Se $u \in H(rot, \Omega)$ é tal que

$$
(u, \nabla \times \varphi) - (\nabla \times u, \varphi) = 0,\ \forall\ \varphi \in [\mathcal{D}(\overline{\Omega})]^3, \tag{2.13}
$$

então $u \in H_0(rot, \Omega)$."

Demonstração: Fixemos $u \in H(rot, \Omega)$. Suponhamos inicialmente que $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ é um conjunto aberto limitado e estrelado em relação à origem, ou seja,

$$\theta\overline{\Omega} \subset \Omega, \ \forall \ \theta \in [0,1) \text{ e } \overline{\Omega} \subset w\Omega, \ \forall \ w > 1, \text{ em que } \theta\overline{\Omega} = \{\theta x; \ x \in \overline{\Omega}\} \subset \mathbb{R}^3.$$

Seja $\tilde{u}$ a extensão a $\mathbb{R}^3$ de u por zero fora de Ω, isto é,

$$\tilde{u} = \begin{cases} u & \text{em} \quad \Omega, \\ 0 & \text{em} \quad \mathbb{R}^3\backslash\Omega. \end{cases}.$$

Do **Lema 2.1**, $\tilde{u} \in H(rot, \mathbb{R}^3)$ e $\text{supp}(\tilde{u}) \subset \overline{\Omega}$. Para cada $\theta \in (0,1)$, ponhamos

$$\tilde{u}_\theta(x) = \tilde{u}\left(\frac{x}{\theta}\right).$$

Como consequência do **Lema 2.5**, obtemos

$$\tilde{u}_\theta \in H(rot, \mathbb{R}^3) \text{ para todo } \theta \in (0,1) \text{ e } \tilde{u}_\theta \longrightarrow \tilde{u} \text{ em } H(rot, \mathbb{R}^3), \text{ se } \theta \to 1^-.$$

Afirmamos que $\text{supp}(\tilde{u}_\theta) \subset \overline{\Omega}$ qualquer que seja $\theta \in (0,1)$.

Com efeito, notemos que se $\theta \in (0,1)$, então $\frac{1}{\theta} > 1$. Daí,

$$x \notin \Omega \Longrightarrow \frac{1}{\theta}x \notin \Omega \Longrightarrow \tilde{u}_\theta(x) = \tilde{u}\left(\frac{x}{\theta}\right) = 0,$$

já que $\tilde{u} = 0$ em $\mathbb{R}^3\backslash\Omega$. Logo, $\tilde{u}_\theta = 0$ em $\mathbb{R}^3\backslash\Omega$.

Na verdade, vale a seguinte cadeia de inclusões: $\text{supp}(\tilde{u}_\theta) \subset \overline{\Omega}_\theta = \overline{\theta\Omega} \subset \Omega$, para todo $\theta \in [0,1)$.

De fato, se $x \notin \Omega_\theta = \theta\Omega$, então $\frac{1}{\theta}x \notin \Omega$ e assim $\tilde{u}_\theta(x) = \tilde{u}\left(\frac{x}{\theta}\right) = 0$.

Vimos até aqui que $\text{supp}(\tilde{u}_\theta) \subset \overline{\Omega}$, $\text{supp}(\tilde{u}) \subset \overline{\Omega}$ e $\tilde{u}_\theta \longrightarrow \tilde{u}$ em $H(rot, \mathbb{R}^3)$. Então

$$\tilde{u}_\theta|_\Omega \longrightarrow u \text{ em } H(rot, \Omega),$$

ou seja, obtemos uma sequência $(\tilde{u}_\theta)$ de $H(rot, \Omega)$, com suporte compacto em Ω, que converge para u em $H(rot, \Omega)$. Resta-nos agora regularizar esta sequência.

Seja (ρ_ε) uma sequência regularizante como no **Lema 2.4**. Para cada $\theta \in [0,1)$ temos, por este mesmo lema, que

$$\rho_\varepsilon * \tilde{u}_\theta \overset{\varepsilon \to 0}{\longrightarrow} \tilde{u}_\theta \text{ em } H(rot, \mathbb{R}^3).$$

A **Proposição 1.3** garante que $\text{supp}(\rho_\varepsilon * \tilde{u}_\theta) \subset \overline{B(0;\varepsilon)} + \overline{\theta\Omega}$. Desse modo, para ε suficientemente pequeno, $\text{supp}(\rho_\varepsilon * \tilde{u}_\theta) \subset \Omega$. Como $\rho_\varepsilon * \tilde{u}_\theta \in [\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^3)]^3$, concluímos que $\rho_\varepsilon * \tilde{u}_\theta|_\Omega \in [\mathcal{D}(\Omega)]^3$, para ε suficientemente pequeno.

Podemos agora finalizar a demonstração deste teorema no caso em que Ω é estrelado com relação à origem.

De fato, seja $\zeta > 0$ qualquer. Então existe $\theta \in (0,1)$ tal que

$$||\tilde{u}_\theta - u||_{H(rot,\Omega)} < \frac{\zeta}{2}.$$

Também existe $\varepsilon > 0$ satisfazendo

$$||\rho_\varepsilon * \tilde{u}_\theta - \tilde{u}_\theta||_{H(rot,\Omega)} < \frac{\zeta}{2}, \text{ com } \rho_\varepsilon * \tilde{u}_\theta \in [\mathcal{D}(\Omega)]^3.$$

Portanto,

$$||\rho_\varepsilon * \tilde{u}_\theta - u||_{H(rot,\Omega)} \leq ||\rho_\varepsilon * \tilde{u}_\theta - \tilde{u}_\theta||_{H(rot,\Omega)} + ||\tilde{u}_\theta - u||_{H(rot,\Omega)} < \zeta,$$

isto é, obtemos uma sequência $(\rho_\varepsilon * \tilde{u}_\theta)$ em $[\mathcal{D}(\Omega)]^3$ que converge para $u \in H(rot,\Omega)$. Logo, $u \in H_0(rot,\Omega)$.

No caso em que Ω é estrelado em relação a $x_0 \in \Omega$ (que não a origem), consideramos a sequência $\tilde{u}_\theta = \tilde{u}(x_0 + \theta(x - x_0))$ e então, por translação, reduzimos ao caso discutido anteriormente (vide observação após **Lema 2.3**).

Suponhamos agora o caso em que $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ é uma conjunto limitado qualquer. Logo, existe uma cobertura de $\overline{\Omega}$ por uma família finita de conjunto abertos: $\overline{\Omega} \subset \bigcup_{1\leq i\leq N} \mathcal{O}_i$ tais que $\Omega_i = \Omega \cap \mathcal{O}_i$, para $i = 1, \ldots, N$, é um conjunto estrelado com fronteira Lipschitz (resultado retirado da referência [2]).

Seja $(\alpha_i)_{1\leq i\leq N}$ uma partição da unidade de Ω subordinada à esta cobertura, ou seja,

$$\alpha_i \in \mathcal{D}(\mathcal{O}_i),\ 0 \leq \alpha_i(x) \leq 1 \text{ e } \sum_{i=1}^{N} \alpha_i(x) = 1,\ x \in \Omega.$$

Para cada $i = 1, \ldots, N$, definimos $u^i = u|_{\Omega_i}$. Daí, $u^i \in H(rot,\Omega_i)$ com Ω_i estrelado. Em decorrência do primeiro caso estudado nesta prova, garantimos, para todo $i = 1, \ldots, N$, a existência de subsequência (u^i_m) de $[\mathcal{D}(\Omega_i)]^3$ tal que

$$u^i_m \longrightarrow u^i \text{ em } H(rot,\Omega_i), \text{ quando } m \to +\infty.$$

Representemos por v^i_m o prolongamento de u^i_m a Ω por zero fora de Ω_i. Desse modo, $v^i_m \in [\mathcal{D}(\Omega)]^3$. Definimos $v_m := \sum_{i=1}^{N} \alpha_i v^i_m \in [\mathcal{D}(\Omega)]^3$. Mostraremos que (v_m) converge para u em $H(rot,\Omega)$.

Inicialmente, observamos que

$$\begin{aligned} ||v_m - u|| &= \left|\left|\sum_{i=1}^{N} \alpha_i v_m^i - \sum_{i=1}^{N} \alpha_i u\right|\right| \\ &\leq \sum_{i=1}^{N} \left|\left|\alpha_i (v_m^i - u)\right|\right| \\ &= \sum_{i=1}^{N} \left|\left|\alpha_i (u_m^i - u^i)\right|\right|_{[L^2(\Omega_i)]^3}, \end{aligned}$$

já que $\operatorname{supp}(\alpha_i|_\Omega) \subset \Omega_i$. Assim, $||v_m - u|| \leq \sum_{i=1}^{N} \left|\left|u_m^i - u^i\right|\right|_{[L^2(\Omega_i)]^3}$, pois $0 \leq \alpha_i \leq 1$.

Por outro lado, temos

$$\begin{aligned} ||\nabla \times v_m - \nabla \times u|| &= ||\nabla \times (v_m - u)|| = \left|\left|\nabla \times \left[\sum_{i=1}^{N} \alpha_i (v_m^i - u)\right]\right|\right| = \left|\left|\sum_{i=1}^{N} \nabla \times [\alpha_i (v_m^i - u)]\right|\right| \\ &\leq \sum_{i=1}^{N} \left|\left|\nabla \times [\alpha_i (v_m^i - u)]\right|\right| = \sum_{i=1}^{N} \left|\left|\alpha_i \nabla \times (v_m^i - u) + \nabla \alpha_i \cdot (v_m^i - u)\right|\right| \\ &\leq \sum_{i=1}^{N} \left|\left|\alpha_i \nabla \times (u_m^i - u^i)\right|\right|_{[L^2(\Omega_i)]^3} + \sum_{i=1}^{N} \left|\left|\nabla \alpha_i \cdot (u_m^i - u^i)\right|\right|_{[L^2(\Omega_i)]^3} \\ &\leq \sum_{i=1}^{N} \left|\left|\nabla \times (u_m^i - u^i)\right|\right|_{[L^2(\Omega_i)]^3} + C \sum_{i=1}^{N} \left|\left|u_m^i - u^i\right|\right|_{[L^2(\Omega_i)]^3}, \end{aligned}$$

em que $C = \max\{|\nabla \alpha_i(x)|,\ x \in \Omega,\ i = 1, \ldots, N\}$.

Conseqüentemente,

$$\begin{aligned} ||v_m - u||_{H(rot,\Omega)} &\leq ||v_m - u|| + ||\nabla \times v_m - \nabla \times u|| \\ &\leq (C+1) \sum_{i=1}^{N} \left|\left|u_m^i - u^i\right|\right|_{[L^2(\Omega_i)]^3} + \sum_{i=1}^{N} \left|\left|\nabla \times (u_m^i - u^i)\right|\right|_{[L^2(\Omega_i)]^3} \to 0,\ m \to \infty, \end{aligned}$$

visto que $u_m^i \longrightarrow u^i$ em $H(rot, \Omega_i)$, $i = 1, \ldots, N$.

Portanto, $v_m \longrightarrow u$ em $H(rot, \Omega)$ com $v_m \in [\mathcal{D}(\Omega)]^3$.

Encerremos a prova desse teorema considerando o caso em que Ω é não limitado.

Como nos casos anteriores, seja $\tilde{u}$ a extensão da função $u \in H(rot, \Omega)$ a $\mathbb{R}^3$ por zero fora de Ω. Sabemos do **Lema 2.1** que $\tilde{u} \in H(rot, \mathbb{R}^3)$ e $\operatorname{supp}(\tilde{u}) \subset \overline{\Omega}$. Tomemos $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$ com $0 \leq \varphi \leq 1$ satisfazendo $\varphi(x) = \begin{cases} 1, & \text{se} \quad |x| \leq 1 \\ 0, & \text{se} \quad |x| \geq 2 \end{cases}$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos

$$\varphi_n(x) = \varphi\left(\frac{x}{n}\right) \text{ e } \tilde{u}_n = \varphi_n \tilde{u}.$$

Então, pelo **Lema 2.2**, para todo $n \in \mathbb{N}$, $\tilde{u}_n$ tem suporte compacto em $\overline{\Omega}$ e $\tilde{u}_n \longrightarrow \tilde{u}$ em $H(rot, \mathbb{R}^3)$.

Seja $\zeta > 0$ qualquer. Da convergência obtida anteriormente, garantimos a existência de $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $||\tilde{u} - \tilde{u}_{n_0}||_{H(rot,\mathbb{R}^3)} < \frac{\zeta}{2}$. Denotemos por Ω_0 um subconjunto limitado do $\mathbb{R}^3$ tal que $\text{supp}(\tilde{u}_{n_0}) \subset \Omega_0$ (este subconjunto existe, haja visto que $\tilde{u}_n$ tem suporte compacto em $\overline{\Omega}$). Do que vimos anteriormente, existe $w \in [\mathcal{D}(\Omega_0)]^3$ com a propriedade $||w - \tilde{u}_{n_0}||_{H(rot,\Omega_0)} < \frac{\zeta}{2}$.

Designemos por v a extensão de w a Ω por zero fora de Ω_0. Teremos

$$v \in [\mathcal{D}(\Omega)]^3 \text{ e } ||v - \tilde{u}_{n_0}||_{H(rot,\Omega)} < \frac{\zeta}{2},$$

já que $\text{supp}(v) \subset \Omega_0$ e $\text{supp}(\tilde{u}_{n_0}) \subset \Omega_0$.

Portanto,

$$\begin{aligned} ||v - u||_{H(rot,\Omega)} &\leq ||v - \tilde{u}_{n_0}||_{H(rot,\Omega)} + ||\tilde{u}_{n_0} - u||_{H(rot,\Omega)} \\ &\leq \frac{\zeta}{2} + ||\tilde{u}_{n_0} - \tilde{u}||_{H(rot,\mathbb{R}^3)} \\ &< \zeta, \end{aligned}$$

com $v \in [\mathcal{D}(\Omega)]^3$, donde concluímos a prova deste teorema. ∎

Com auxílio deste último teorema, iremos agora obter resultados de traço para funções de $H(rot, \Omega)$.

Teorema 2.3 *(do Traço para $H(rot, \Omega)$) Seja Ω um conjunto aberto do $\mathbb{R}^3$ com fronteira Γ limitada e Lipschitz. Então*

(i) $[\mathcal{D}(\overline{\Omega})]^3$ *é denso em* $H(rot, \Omega)$;

(ii) A aplicação traço, $\gamma_\tau : v \mapsto v \times \eta|_\Gamma$ *definida em* $[D(\overline{\Omega})]^3$, *estende-se por continuidade a uma aplicação linear e contínua, ainda denotada por* γ_τ, *de* $H(rot, \Omega)$ *em* $[H^{-1/2}(\Gamma)]^3$ *(aqui* $\eta(x)$ *denota a normal exterior unitária em* $x \in \Gamma$*);*

(iii) Para todo $v \in H(rot, \Omega)$ *e para todo* $\varphi \in [H^1(\Omega)]^3$, *vale a seguinte igualdade:*

$$\int_\Omega v \cdot (\nabla \times \varphi)\, dx - \int_\Omega (\nabla \times v) \cdot \varphi\, dx = < \gamma_\tau(v), \varphi >_{[H^{-1/2}(\Gamma)]^3, [H^{1/2}(\Gamma)]^3},$$

conhecida como "fórmula generalizada de Green" para o espaço $H(rot, \Omega)$;

(iv) O núcleo $ker(\gamma_\tau)$ *da aplicação* γ_τ *é o espaço* $H_0(rot, \Omega)$.

Demonstração:

(i) Fixemos $w \in H(rot, \Omega)$ tal que $w \in \{[\mathcal{D}(\overline{\Omega})]^3\}^\perp$. Mostraremos que $w = 0$.

Para todo $v \in [\mathcal{D}(\overline{\Omega})]^3$, temos

$$(w, v)_{H(rot,\Omega)} = (w, v) + (\nabla \times w, \nabla \times v) = 0. \tag{2.14}$$

Ponhamos $w_0 = \nabla \times w$. Para todo $\varphi \in [\mathcal{D}(\Omega)]^3 \subset [\mathcal{D}(\overline{\Omega})]^3$, segue de (2.14) e do item (d) da **Proposição 2.1** que

$$< \nabla \times w_0, \varphi >=< w_0, \nabla \times \varphi >= (w_0, \nabla \times \varphi) = (\nabla \times w, \nabla \times \varphi) = -(w, \varphi),$$

ou seja, $\nabla \times w_0 = -w \in [L^2(\Omega)]^3$. Com isso, $w_0 \in H(rot, \Omega)$ e satisfaz

$$(w_0, \nabla \times v) - (\nabla \times w_0, v) = 0, \ \forall \ v \in [\mathcal{D}(\overline{\Omega})]^3.$$

Como consequência do **Teorema 2.2**, garantimos que $w_0 \in H_0(rot, \Omega)$. Agora, como $H_0(rot, \Omega) = \overline{[\mathcal{D}(\Omega)]^3}^{H(rot,\Omega)}$, existe uma sequência $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em $[\mathcal{D}(\Omega)]^3$ tal que $\varphi_n \longrightarrow w_0$ em $H(rot, \Omega)$. Desse modo, para todo $v \in H(rot, \Omega)$, temos

$$\begin{aligned} (w, v)_{H(rot,\Omega)} &= (w, v) + (\nabla \times w, \nabla \times v) \\ &= (-\nabla \times w_0, v) + (w_0, \nabla \times v) \\ &= (-\lim \nabla \times \varphi_n, v) + (\lim \varphi_n, \nabla \times v) \\ &= \lim[- < v, \nabla \times \varphi_n > + < \nabla \times v, \varphi_n >] \\ &= 0, \end{aligned}$$

graças ao item (d) da **Proposição 2.1**. Assim, $w \in H(rot, \Omega)$ e $w \perp H(rot, \Omega)$, donde concluímos que $w = 0$ em $H(rot, \Omega)$. Como consequência do **Corolário 1.2**, garantimos que $[\mathcal{D}(\overline{\Omega})]^3$ é denso em $H(rot, \Omega)$.

(ii) Mostremos que γ_τ é uma aplicação limitada.

Dados $v \in [\mathcal{D}(\overline{\Omega})]^3$ e $\varphi \in [\mathcal{D}(\overline{\Omega})]^3$, segue da fórmula de Green e do item (g) da **Proposição 2.1** que

$$\int_\Omega (\nabla \times v) \cdot \varphi \, dx - \int_\Omega v \cdot (\nabla \times \varphi) \, dx = \int_\Omega \nabla \cdot (\varphi \times v) \, dx = \int_\Gamma (\varphi \times v) \cdot \eta \, d\Gamma = \int_\Gamma (v \times \eta) \cdot \varphi \, d\Gamma,$$

isto é,

$$\int_\Omega (\nabla \times v) \cdot \varphi \, dx - \int_\Omega v \cdot (\nabla \times \varphi) \, dx \ = \ \int_\Gamma (v \times \eta) \cdot \varphi \, d\Gamma. \tag{2.15}$$

Usando a densidade de $[\mathcal{D}(\overline{\Omega})]^3$ em $[H^1(\Omega)]^3$ e a continuidade da aplicação traço de $[H^1(\Omega)]^3$ em $[H^{1/2}(\Gamma)]^3$, concluímos que a equação (2.15) é também válida para todo

$\varphi \in [H^1(\Omega)]^3$. Assim, devido a desigualdade Hölder (**Proposição 1.1**), ficamos com

$$\begin{aligned}\left|\int_\Gamma (v\times\eta)\cdot\varphi\; d\Gamma\right| &\leq ||v||\;||\nabla\times\varphi|| + ||\nabla\times v||\;||\varphi|| \\ &\leq (||v||^2 + ||\nabla\times v||^2)^{1/2}(||\varphi||^2 + ||\nabla\times\varphi||^2)^{1/2} \\ &\leq ||v||_{H(rot,\Omega)}||\varphi||_{[H^1(\Omega)]^3},\ \forall\, v\in[\mathcal{D}(\overline{\Omega})]^3\ e\ \forall\,\varphi\in[H^1(\Omega)]^3,\end{aligned}$$

isto é,

$$\left|\int_\Gamma (v\times\eta)\cdot\varphi\; d\Gamma\right| \leq ||v||_{H(rot,\Omega)}||\varphi||_{[H^1(\Omega)]^3},\ \forall\, v\in[\mathcal{D}(\overline{\Omega})]^3\ e\ \forall\,\varphi\in[H^1(\Omega)]^3. \tag{2.16}$$

Dada uma função $\varphi \in [H^1(\Omega)]^3$, o seu traço, $\mu := \varphi|_\Gamma$, é uma função de $[H^{1/2}(\Gamma)]^3$. Além disso, o operador traço de $[H^1(\Omega)]^3 \to [H^{1/2}(\Gamma)]^3$ é linear, contínuo e sobrejetivo, possuindo inverso direito contínuo. Com isso, dada $\mu \in [H^{1/2}(\Gamma)]^3$, existe $\varphi_\mu \in [H^1(\Omega)]^3$ tal que

$$\mu = \varphi_\mu|_\Gamma \text{ e } ||\varphi_\mu||_{[H^1(\Omega)]^3} \leq C||\mu||_{[H^{1/2}(\Gamma)]^3},$$

com $C > 0$ independente de μ.

Assim, de posse dessa última desigualdade e observando que o primeiro membro de (2.16) depende apenas do traço de φ em Γ, garantimos que

$$\left|\int_\Gamma (v\times\eta)\cdot\mu\; d\Gamma\right| \leq C||v||_{H(rot,\Omega)}||\mu||_{[H^{1/2}(\Gamma)]^3},\ \forall\, v\in[\mathcal{D}(\overline{\Omega})]^3 \text{ e } \forall\,\mu\in[H^{1/2}(\Gamma)]^3. \tag{2.17}$$

Sendo $[H^{-1/2}(\Gamma)]^3$ o dual de $[H^{1/2}(\Gamma)]^3$, munido da norma dual, resulta de (2.17) que

$$\begin{aligned}||\gamma_\tau(v)||_{[H^{-1/2}(\Gamma)]^3} &= \sup_{\substack{\mu\in[H^{1/2}(\Gamma)]^3\\ \mu\neq 0}} \frac{\left|\int_\Gamma \gamma_\tau(v)\cdot\mu\; d\Gamma\right|}{||\mu||_{[H^{1/2}(\Gamma)]^3}} \\ &= \sup_{\substack{\mu\in[H^{1/2}(\Gamma)]^3\\ \mu\neq 0}} \frac{\left|\int_\Gamma (v\times\eta)\cdot\mu\right|}{||\mu||_{[H^{1/2}(\Gamma)]^3}} \\ &\leq C||v||_{H(rot,\Omega)},\ \forall\, v\in[\mathcal{D}(\overline{\Omega})]^3.\end{aligned}$$

Em resumo, concluímos que existe $C > 0$, independente de $v \in [\mathcal{D}(\overline{\Omega})]^3$, tal que

$$||\gamma_\tau(v)||_{[H^{-1/2}(\Gamma)]^3} \leq C||v||_{H(rot,\Omega)},\ \forall\, v\in[\mathcal{D}(\overline{\Omega})]^3.$$

Vemos então que γ_τ é uma aplicação linear limitada e, portanto, contínua. Uma vez que $[\mathcal{D}(\overline{\Omega})]^3$ é denso em $H(rot,\Omega)$, podemos estender continuamente γ_τ a uma aplicação linear, que ainda denotaremos por γ_τ, de $H(rot,\Omega)$ no espaço $[H^{-1/2}(\Gamma)]^3$.

(iii) A fórmula de Green apresentada em (2.15), válida para quaisquer funções $v \in [\mathcal{D}(\overline{\Omega})]^3$

e $\varphi \in [H^1(\Omega)]^3$, pode ser generalizada, por densidade e continuidade de γ_τ, a funções $v \in H(rot, \Omega)$ da seguinte forma:

$$\int_\Omega v \cdot (\nabla \times \varphi)\ dx - \int_\Omega (\nabla \times v) \cdot \varphi\ dx = < \gamma_\tau(v), \varphi >_{[H^{-1/2}(\Gamma)]^3, [H^{1/2}(\Gamma)]^3}, \tag{2.18}$$

para todo $\varphi \in [H^1(\Omega)]^3$.

(iv) Provemos que $ker(\gamma_\tau) = H_0(rot, \Omega)$.

Seja $v \in ker(\gamma_\tau)$. Segue de (2.18) que $(v, \nabla \times \varphi) - (\nabla \times v, \varphi) = 0$ para todo $\varphi \in [\mathcal{D}(\overline{\Omega})]^3$. Logo, pelo **Teorema 2.2**, $v \in H_0(rot, \Omega)$ e então $ker(\gamma_\tau) \subset H_0(rot, \Omega)$.

Mostremos agora a inclusão contrária. Dado $v \in H_0(rot, \Omega)$, existe uma sequência $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de funções de $[\mathcal{D}(\Omega)]^3$ tal que $\varphi_n \longrightarrow v$ em $H(rot, \Omega)$. Utilizando a continuidade da aplicação γ_τ em $H(rot, \Omega)$ estabelecida no item (ii) anterior, segue que

$$\gamma_\tau(v) = \lim_{n \to +\infty} \gamma_\tau(\varphi_n) = \lim_{n \to +\infty} (\eta \times \varphi_n)|_\Gamma = 0,$$

ou seja, $v \in ker(\gamma_\tau)$.

■

Observação 2.6 *Decorre do item g) da* ***Proposição 2.1*** *e da fórmula de Green (2.18) que*

$$\int_\Omega \nabla \cdot (\varphi \times v)\ dx = < \gamma_\tau(v), \varphi >_{[H^{-1/2}(\Gamma)]^3, [H^{1/2}(\Gamma)]^3} \tag{2.19}$$

para todos $v \in H(rot, \Omega)$ e $\varphi \in [H^1(\Omega)]^3$.

Observação 2.7 *Vimos que se $w \in H_0(rot, \Omega)$, então*

$$(w, \nabla \times \varphi) - (\nabla \times w, \varphi) = 0,\ \forall\ \varphi \in [\mathcal{D}(\overline{\Omega})]^3.$$

Da densidade de $[\mathcal{D}(\overline{\Omega})]^3$ em $H(rot, \Omega)$, concluímos que

$$(w, \nabla \times v) - (\nabla \times w, v) = 0,\ \forall\ v \in H(rot, \Omega), \tag{2.20}$$

ou seja,

$$\int_\Omega \nabla \cdot (w \times v)\ dx = 0,\ \textit{se } w \in H_0(rot, \Omega) \textit{ e } v \in H(rot, \Omega), \tag{2.21}$$

ou ainda, vale a "fórmula de integração por partes"

$$\int_\Omega w \cdot (\nabla \times v)\ dx = \int_\Omega (\nabla \times w) \cdot v\ dx,\ \textit{se } w \in H_0(rot, \Omega) \textit{ e } v \in H(rot, \Omega). \tag{2.22}$$

2.4 Os subespaços funcionais $H(div\ 0,\Omega)$ e $H_0(div\ 0,\Omega)$ de $[L^2(\Omega)]^3$

Tratemos agora de estudar os subespaços funcionais $H(div\ 0,\Omega)$ e $H_0(div\ 0,\Omega)$ de $[L^2(\Omega)]^3$ de utilidade na terceira aplicação do **Capítulo 3**. Essencialmente, iremos utilizar o operador projeção sobre estes espaços a fim de obter resultados de densidade.

Estes subespaços são definidos como segue

$$\begin{aligned} H(div\ 0,\Omega) &= \{u\in[L^2(\Omega)]^3;\ \nabla\cdot u=0\},\\ H_0(div\ 0,\Omega) &= \{u\in[L^2(\Omega)]^3;\ \nabla\cdot u=0 \text{ e } \eta\cdot u|_\Gamma=0\}.\end{aligned}$$

Mostraremos que $H(div\ 0,\Omega)$ e $H_0(div\ 0,\Omega)$ são espaços de Hilbert quando os munimos com o produto interno oriundo de $[L^2(\Omega)]^3$. Para isso, mostraremos que estes são subespaços fechados de $[L^2(\Omega)]^3$.

Proposição 2.4 *$H(div\ 0,\Omega)$ é subespaço fechado de $[L^2(\Omega)]^3$.*

Demonstração: Seja $u\in\overline{H(div\ 0,\Omega)}^{[L^2(\Omega)]^3}$. Logo existe uma seqüência de funções $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $H(div\ 0,\Omega)$ tal que

$$u_n\longrightarrow u \text{ em } [L^2(\Omega)]^3 \text{ quando } n\to+\infty.$$

Nosso objetivo é então mostrar que $u\in H(div\ 0,\Omega)$.

Observamos que para todo $\varphi\in\mathcal{D}(\Omega)$,

$$\begin{aligned} <\nabla\cdot u,\varphi> &= <u,-\nabla\varphi>=-\int_\Omega u\cdot\nabla\varphi\,dx\\ &= -\lim_{n\to+\infty}\int_\Omega u_n\cdot\nabla\varphi\,dx=-\lim_{n\to+\infty}<u_n,\nabla\varphi>\\ &= \lim_{n\to+\infty}<\nabla\cdot u_n,\varphi>=\lim 0=0,\end{aligned}$$

onde usamos o item (c) da **Proposição 2.1** e o fato de que $\nabla\cdot u_n=0$, para todo $n\in\mathbb{N}$. Como consequência, obtemos que $\nabla\cdot u=0$ e portanto $u\in H(div\ 0,\Omega)$. ∎

Proposição 2.5 *$H_0(div\ 0,\Omega)$ é subespaço fechado de $[L^2(\Omega)]^3$.*

Demonstração: Fixemos uma seqüência $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em $H_0(div\ 0,\Omega)$ tal que

$$u_n\longrightarrow u \text{ em } [L^2(\Omega)]^3.$$

Visto que $u_n\in H_0(div\ 0,\Omega)$, temos $\nabla\cdot u_n=0$ e $\eta\cdot u_n|_\Gamma=0$ para todo $n\in\mathbb{N}$. Como na demonstração da **Proposição 2.4**, $\nabla\cdot u=0$.

Por outro lado, o item (iii) da **Teorema 2.1** garante que a aplicação traço

$$\gamma_\eta : H(div, \Omega) \to H^{-1/2}(\Gamma)$$

é contínua. De posse desse resultado e sabendo que $u_n \longrightarrow u$ em $H(div, \Omega)$ (uma vez que $u_n \longrightarrow u$ em $[L^2(\Omega)]^3$ e $\nabla \cdot u_n = \nabla \cdot u = 0$), concluímos que

$$\gamma_\eta(u) = \lim \gamma_\eta(u_n) = \lim u_n \cdot \eta|_\Gamma = 0, \tag{2.23}$$

donde $u \in H_0(div, \Omega)$ (item (iv) do **Teorema 2.1**). Daí, $u \cdot \eta|_\Gamma = 0$ e $u \in H_0(div\ 0, \Omega)$. ■

Vimos na **Proposição 2.4** que $H(div\ 0, \Omega)$ é subespaço fechado de $[L^2(\Omega)]^3$. Com isso, podemos escrever

$$[L^2(\Omega)]^3 = H(div\ 0, \Omega) \oplus [H(div\ 0, \Omega)]^\perp.$$

Assim, se $u \in [L^2(\Omega)]^3$, temos

$$u = u_1 + u_2 \text{ com } u_1 \in H(div\ 0, \Omega) \text{ e } u_2 \in [H(div\ 0, \Omega)]^\perp.$$

Consideremos o operador projeção P_d de $[L^2(\Omega)]^3$ sobre $H(div\ 0, \Omega)$, isto é,

$$\begin{array}{rccc} P_d : & [L^2(\Omega)]^3 & \longrightarrow & H(div\ 0, \Omega) \\ & u & \longmapsto & P_d u = u_1. \end{array}$$

Com auxílio deste operador projeção provemos o seguinte resultado:

Proposição 2.6 *Se $u \in H_0(rot, \Omega)$, então $P_d u \in H_0(rot, \Omega)$. Em outras palavras,*

$$P_d(H_0(rot, \Omega)) \subset H_0(rot, \Omega) \cap H(div\ 0, \Omega).$$

Demonstração: Seja $u \in H_0(rot, \Omega)$. Por definição, $P_d u \in H(div\ 0, \Omega) \subset [L^2(\Omega)]^3$ e vale

$$< \nabla \times (P_d u), \varphi > = < P_d u, \nabla \times \varphi > = \int_\Omega P_d u \cdot (\nabla \times \varphi)\ dx,\ \forall\ \varphi \in [\mathcal{D}(\Omega)]^3. \tag{2.24}$$

Segue do item b) da **Proposição 2.1** que $\nabla \cdot (\nabla \times \varphi) = 0$ para todo $\varphi \in [\mathcal{D}(\Omega)]^3$. Logo, $\nabla \times \varphi \in H(div\ 0, \Omega)$ e

$$\begin{aligned} \int_\Omega u \cdot (\nabla \times \varphi)\ dx &= (u, \nabla \times \varphi) = (P_d u + u_2, \nabla \times \varphi) \\ &= (P_d u, \nabla \times \varphi) + (u_2, \nabla \times \varphi) \\ &= (P_d u, \nabla \times \varphi) = \int_\Omega P_d u \cdot (\nabla \times \varphi)\ dx, \end{aligned} \tag{2.25}$$

em que $(u_2, \nabla \times \varphi) = 0$, uma vez que $u_2 \in [H(div\ 0, \Omega)]^\perp$ e $\nabla \times \varphi \in H(div\ 0, \Omega)$.

Usando (2.24) e (2.25), ficamos com

$$< \nabla \times (P_d u), \varphi >= \int_\Omega u \cdot (\nabla \times \varphi)\ dx,\ \forall\ \varphi \in [\mathcal{D}(\Omega)]^3.$$

Segue do item (d) da **Proposição 2.1** que

$$< \nabla \times (P_d u), \varphi >= \int_\Omega (\nabla \times u) \cdot \varphi\ dx,\ \forall\ \varphi \in [\mathcal{D}(\Omega)]^3,$$

o que mostra que

$$\nabla \times (P_d u) = \nabla \times u \text{ em } [\mathcal{D}'(\Omega)]^3 \tag{2.26}$$

e, portanto, $\nabla \times (P_d u) \in [L^2(\Omega)]^3$ e $P_d u \in H(rot, \Omega)$.

Nosso objetivo agora é garantir que $(P_d u) \times \eta = 0$ em Γ. Para isso, recorreremos a fórmula generalizada de Green dada no item (iii) do **Teorema 2.3**:

$$\int_\Omega \nabla \times (P_d u) \cdot \varphi\ dx = \int_\Omega P_d u \cdot (\nabla \times \varphi)\ dx - < \gamma_\tau(P_d u), \varphi >_{[H^{-1/2}(\Gamma)]^3, [H^{1/2}(\Gamma)]^3}, \tag{2.27}$$

para todo $\varphi \in [H^1(\Omega)]^3$.

Agora, como $\nabla \times \varphi \in H(div\ 0, \Omega)$ para todo $\varphi \in [H^1(\Omega)]^3$, obtemos

$$\begin{aligned} \int_\Omega P_d u \cdot (\nabla \times \varphi)\ dx &= (P_d u, \nabla \times \varphi) = (u, \nabla \times \varphi) \\ &= \int_\Omega u \cdot (\nabla \times \varphi)\ dx = \int_\Omega (\nabla \times u) \cdot \varphi\ dx, \end{aligned}$$

onde na última igualdade acima usamos a "fórmula de integração por partes" dada em (2.22). Como consequência, reescrevemos (2.27) como segue

$$\int_\Omega \nabla \times (P_d u) \cdot \varphi\ dx = \int_\Omega (\nabla \times u) \cdot \varphi\ dx - < \gamma_\tau(P_d u), \varphi >_{[H^{-1/2}(\Gamma)]^3, [H^{1/2}(\Gamma)]^3},$$

para todo $\varphi \in [H^1(\Omega)]^3$. Decorre de (2.26) que

$$< \gamma_\tau(P_d u), \varphi >= 0,\ \forall\ \varphi \in [H^1(\Omega)]^3,$$

donde $\gamma_\tau(P_d u) = (P_d u) \times \eta = 0$ em Γ, isto é, $P_d u \in H_0(rot, \Omega)$, como queríamos. ∎

Observação 2.8 *Se $u \in H_0(rot, \Omega)$, então $u = P_d u + u_2$ com $u_2 \in [H(div\ 0, \Omega)]^\perp$. A proposição anterior garante que $\nabla \times u = \nabla \times (P_d u)$. Logo, $\nabla \times u_2 = 0$. Fazendo uso da notação*

$$H(rot\ 0, \Omega) = \{v \in [L^2(\Omega)]^3;\ \nabla \times v = 0\},$$

temos $u_2 \in H(rot\ 0, \Omega)$ *o que mostra que*

$$[H(div\ 0, \Omega)]^{\perp} \subset H(rot\ 0, \Omega).$$

Mais que isso, podemos mostrar

$$[H(div\ 0, \Omega)]^{\perp} \subset H_0(rot\ 0, \Omega),$$

em que $H_0(rot\ 0, \Omega) = \{v \in [L^2(\Omega)]^3;\ \nabla \times v = 0 \ e\ \eta \times v|_{\Gamma} = 0\}$.

De fato, suponhamos $u_2 \in [H(div\ 0, \Omega)]^{\perp}$. *Temos, para todo* $\varphi \in [\mathcal{D}(\Omega)]^3$, *que*

$$< \nabla \times u_2, \varphi > = < u_2, \nabla \times \varphi > = \int_{\Omega} u_2 \cdot (\nabla \times \varphi)\ dx = (u_2, \nabla \times \varphi) = 0,$$

já que $\nabla \times \varphi \in H(div\ 0, \Omega)$. *Logo,* $\nabla \times u_2 = 0$ *e assim* $u_2 \in H(rot\ 0, \Omega)$. *Segue da fórmula de Green do* ***Teorema 2.3*** *que*

$$\int_{\Omega} (\nabla \times u_2) \cdot \varphi\ dx = \int_{\Omega} u_2 \cdot (\nabla \times \varphi)\ dx - < \gamma_\tau(u_2), \varphi >_{[H^{-1/2}(\Gamma)],[H^{1/2}(\Gamma)]},\ \forall\ \varphi \in H^1(\Omega).$$

Daí,

$$< \gamma_\tau(u_2), \varphi >_{[H^{-1/2}(\Gamma)],[H^{1/2}(\Gamma)]} = 0,\ \forall\ \varphi \in H^1(\Omega),$$

donde obtemos que $\gamma_\tau(u_2) = 0$, *ou seja,* $u_2 \in H_0(rot\ 0, \Omega)$.

Em nossa próxima proposição, usaremos o operador projeção de $[L^2(\Omega)]^3$ sobre $H_0(div\ 0, \Omega)$. Este operador será denotado por P_0, isto é,

$$\begin{array}{rccc} P_0 : & [L^2(\Omega)]^3 & \longrightarrow & H_0(div\ 0, \Omega) \\ & u & \longmapsto & P_0 u = u_1, \end{array}$$

onde $u = u_1 + u_2$ com $u_1 \in H_0(div\ 0, \Omega)$ e $u_2 \in [H_0(div\ 0, \Omega)]^{\perp}$ (lembremos que $H_0(div\ 0, \Omega)$ é subespaço fechado de $[L^2(\Omega)]^3$ conforme **Proposição 2.5**).

Proposição 2.7 *Se* $u \in H(rot, \Omega)$, *então* $P_0 u \in H(rot, \Omega)$, *ou seja,*

$$P_0(H(rot, \Omega)) \subset H(rot, \Omega) \cap H_0(div\ 0, \Omega).$$

Demonstração: Seja $u \in H(rot, \Omega)$. Vemos que $P_0 u \in H_0(div\ 0, \Omega) \subset [L^2(\Omega)]^3$. Assim, para todo $\varphi \in [\mathcal{D}(\Omega)]^3$, obtemos

$$\begin{aligned} < \nabla \times (P_0 u), \varphi > &= < P_0 u, \nabla \times \varphi > = \int_{\Omega} P_0 u \cdot (\nabla \times \varphi)\ dx = (P_0 u, \nabla \times \varphi) \\ &= (u, \nabla \times \varphi) = \int_{\Omega} u \cdot (\nabla \times \varphi)\ dx = < u, \nabla \times \varphi > \\ &= < \nabla \times u, \varphi >, \end{aligned}$$

visto que $\nabla \times \varphi \in H_0(div\ 0, \Omega)$ para todo $\varphi \in [\mathcal{D}(\Omega)]^3$.

Desse modo, $\nabla \times (P_0 u) = \nabla \times u$ em $[\mathcal{D}'(\Omega)]^3$, donde $\nabla \times (P_0 u) \in [L^2(\Omega)]^3$ e, portanto, $P_0 u \in H(rot, \Omega)$. ■

Observação 2.9 *Se $u_2 \in [H_0(div\ 0, \Omega)]^\perp$, então*

$$< \nabla \times u_2, \varphi > = < u_2, \nabla \times \varphi > = \int_\Omega u_2 \cdot (\nabla \times \varphi)\ dx = (u_2, \nabla \times \varphi) = 0,$$

para todo $\varphi \in [\mathcal{D}(\Omega)]^3$. Isso acontece pois $\nabla \times \varphi \in H_0(div\ 0, \Omega)$. Dessa discussão, concluímos que $\nabla \times u_2 = 0$, isto é, $u_2 \in H(rot\ 0, \Omega)$. Portanto,

$$[H_0(div\ 0, \Omega)]^\perp \subset H(rot\ 0, \Omega).$$

Observação 2.10 *Vimos na observação anterior que $[H_0(div\ 0, \Omega)]^\perp \subset H(rot\ 0, \Omega)$. Segue daí a seguinte indagação: É válida esta inclusão em $H_0(rot, \Omega)$? Não conseguimos obter esse fato imediatamente, pois quando aplicamos a fórmula de Green, temos $\nabla \times \varphi \in H(div\ 0, \Omega)$, para todo $\varphi \in [H^1(\Omega)]^3$, no entanto não podemos afirmar que $\nabla \times \varphi \in H_0(div\ 0, \Omega)$.*

Nas proposições seguintes, apresentamos dois resultados de densidade que serão utilizados no **Capítulo 3**.

Proposição 2.8 *$H_0(rot, \Omega) \cap H(div\ 0, \Omega)$ é denso em $H(div\ 0, \Omega)$ (com a norma de $[L^2(\Omega)]^3$).*

Demonstração: Via **Proposição 2.6**, obtemos as inclusões abaixo:

$$P_d([\mathcal{D}(\Omega)]^3) \subset H_0(rot, \Omega) \cap H(div\ 0, \Omega) \subset H(div\ 0, \Omega).$$

Com isso, observamos que é suficiente provar que $P_d([\mathcal{D}(\Omega)]^3)$ é denso em $H(div\ 0, \Omega)$.

Seja $v \in H(div\ 0, \Omega)$ qualquer. Exibiremos uma sequência $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ em $P_d([\mathcal{D}(\Omega)]^3)$ tal que

$$v_n \longrightarrow v \text{ em } H(div\ 0, \Omega) \text{ (na norma de } [L^2(\Omega)]^3).$$

Como $v \in H(div\ 0, \Omega) \subset [L^2(\Omega)]^3$, existe uma sequência (φ_n) de $[\mathcal{D}(\Omega)]^3$ tal que

$$\varphi_n \longrightarrow v \text{ em } [L^2(\Omega)]^3.$$

Usando a continuidade do operador projeção, obtemos

$$P_d(\varphi_n) \longrightarrow P_d v = v \text{ em } H(div\ 0, \Omega).$$

Logo, a sequência $(P_d(\varphi_n))_{n \in \mathbb{N}}$ é a sequência em $P_d([\mathcal{D}(\Omega)]^3)$ procurada. ■

Proposição 2.9 *$H(rot, \Omega) \cap H_0(div\ 0, \Omega)$ é denso em $H_0(div\ 0, \Omega)$.*

Demonstração: Decorre da **Proposição 2.7** que

$$P_0([\mathcal{D}(\Omega)]^3) \subset H(rot, \Omega) \cap H_0(div\ 0, \Omega) \subset H_0(div\ 0, \Omega).$$

Assim, é suficiente mostrar que $P_0([\mathcal{D}(\Omega)]^3)$ é denso em $H_0(div\ 0, \Omega)$.

Dado $v \in H_0(div\ 0, \Omega)$, temos $v \in [L^2(\Omega)]^3$ e então existe uma sequência de funções $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em $[\mathcal{D}(\Omega)]^3$ tal que $\varphi_n \longrightarrow v$. A continuidade do operador projeção P_0 implica

$$v = P_0(v) = P_0(\lim \varphi_n) = \lim P_0(\varphi_n)$$

donde obtemos o resultado desejado considerando a sequência $(P_0(\varphi_n))_{n\in\mathbb{N}}$ de $P_0([\mathcal{D}(\Omega)]^3)$. ∎

Capítulo 3

APLICAÇÕES

Como aplicação dos espaços funcionais estudados no capítulo anterior, buscaremos garantir existência e unicidade de solução para certos sistemas de equações de Maxwell.

3.1 Equações de Maxwell com condição de fronteira dada por $\eta \times E = 0$

Nesta seção, estabelecemos um resultado de existência e unicidade de solução para o sistema de equações de Maxwell com condição de fronteira dada por $\eta \times E = 0$.

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ um subconjunto aberto com fronteira Γ limitada e Lipschitz. Consideremos o sistema de equações de Maxwell:

$$E_t - \nabla \times H = 0 \text{ em } \Omega \times (0, +\infty) \tag{3.1}$$

$$H_t + \nabla \times E = 0 \text{ em } \Omega \times (0, +\infty) \tag{3.2}$$

$$E(x, 0) = E_0(x) \text{ e } H(x, 0) = H_0(x) \text{ em } \Omega \tag{3.3}$$

$$\eta \times E = 0 \text{ em } \Gamma \times (0, +\infty) \tag{3.4}$$

em que $E(x,t) = (E_1(x,t), E_2(x,t), E_3(x,t))$ e $H(x,t) = (H_1(x,t), H_2(x,t), H_3(x,t))$ denotam, respectivamente, o campo elétrico e o campo magnético e

$$\eta(x) = (\eta_1(x), \eta_2(x), \eta_3(x))$$

a normal unitária exterior a Ω em $x \in \Gamma$.

Consideremos o espaço $X = [L^2(\Omega)]^3 \times [L^2(\Omega)]^3$ munido do produto interno

$$(u, v)_X = \int_\Omega (u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2)\, dx,$$

em que $u = (u_1, u_2), v = (v_1, v_2) \in X$. Segue então que X é um espaço de Hilbert.

Para o problema (3.1)-(3.2), definimos o operador linear não-limitado

$$\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \subset X \to X$$

com domínio

$$D(\mathcal{A}) = \{w = (w_1, w_2) \in X;\ (\nabla \times w_2, -\nabla \times w_1) \in X \text{ e } w_1 \times \eta|_\Gamma = 0\}$$

definido por

$$\mathcal{A}w = (\nabla \times w_2, -\nabla \times w_1),\ \forall\, w \in D(\mathcal{A}). \tag{3.5}$$

O item (iv) do **Teorema 2.3** garante que

$$\begin{aligned} H_0(rot, \Omega) &= ker(\gamma_\tau) \\ &= \{v \in H(rot, \Omega);\ v \times \eta|_\Gamma = 0\}. \end{aligned}$$

Em decorrência dessa igualdade, reescrevemos $D(\mathcal{A})$ como segue

$$D(\mathcal{A}) = H_0(rot, \Omega) \times H(rot, \Omega). \tag{3.6}$$

Observação 3.1 *O operador $\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \to X$ definido em (3.5) e com domínio dado por (3.6) é chamado* ***operador de Maxwell****.*

De posse do operador de Maxwell, o problema (3.1)-(3.2) sujeito às condições iniciais em (3.3) pode ser escrito na forma

$$\frac{dU}{dt}(t) = \mathcal{A}U(t) \tag{3.7}$$
$$U(0) = U_0 \tag{3.8}$$

em que $U(t) = (E(t), H(t))$ e $U_0 = (E_0, H_0)$.

Com isso, a partir de agora, estaremos interessados em garantir existência e unicidade de solução do problema de valor inicial (3.7)-(3.8). Para este fim, estudaremos as propriedades do operador $\mathcal{A}$ de nosso interesse.

Lema 3.1 *$D(\mathcal{A})$ é denso em X (com a norma de X).*

Demonstração: Da cadeia de inclusões

$$[\mathcal{D}(\Omega)]^3 \times [\mathcal{D}(\Omega)]^3 \subset D(\mathcal{A}) \subset X,$$

obtemos $\overline{D(\mathcal{A})} = X$, já que $\mathcal{D}(\Omega)$ é denso em $L^2(\Omega)$. ∎

Segue do lema anterior que o operador $\mathcal{A}^*$ está bem definido.

Lema 3.2 $D(\mathcal{A}) = H_0(rot,\Omega) \times H(rot,\Omega) \subset D(\mathcal{A}^*)$.

Demonstração: Seja $v = (v_1, v_2) \in D(\mathcal{A})$. Conforme **Observação 1.4**, a fim de mostrar que $v \in D(\mathcal{A}^*)$, devemos garantir a existência de $g = (g_1, g_2) \in X$ tal que

$$(\mathcal{A}w, v)_X = (w, g)_X, \ \forall \ w \in D(\mathcal{A})$$

e, neste caso, $g = \mathcal{A}^*v$.

Com efeito, para todo $w = (w_1, w_2) \in D(\mathcal{A}) = H_0(rot,\Omega) \times H(rot,\Omega)$, temos

$$(\mathcal{A}w, v)_X = \int_\Omega (\nabla \times w_2) \cdot v_1 \ dx - \int_\Omega (\nabla \times w_1) \cdot v_2 \ dx. \tag{3.9}$$

Segue da fórmula de integração por partes dada em (2.22) que

$$\int_\Omega (\nabla \times w_2) \cdot v_1 \ dx = \int_\Omega w_2 \cdot (\nabla \times v_1) \ dx, \tag{3.10}$$

uma vez que $v_1 \in H_0(rot,\Omega)$ e $w_2 \in H(rot,\Omega)$. Analogamente, visto que $w_1 \in H_0(rot,\Omega)$ e $v_2 \in H(rot,\Omega)$, ficamos com

$$\int_\Omega (\nabla \times w_1) \cdot v_2 \ dx = \int_\Omega w_1 \cdot (\nabla \times v_2) \ dx. \tag{3.11}$$

Assim, usando (3.9), (3.10) e (3.11), obtemos

$$\begin{aligned}
(\mathcal{A}w, v)_X &= \int_\Omega w_2 \cdot (\nabla \times v_1) \ dx - \int_\Omega w_1 \cdot (\nabla \times v_2) \ dx \\
&= ((w_1, w_2), (-\nabla \times v_2, \nabla \times v_1))_X \\
&= (w, -\mathcal{A}v)_X, \ \forall \ v \in D(\mathcal{A}).
\end{aligned}$$

Vimos assim que se $v \in D(\mathcal{A})$, então existe $g = (-\nabla \times v_2, \nabla \times v_1) = -\mathcal{A}v$ tal que

$$(\mathcal{A}w, v)_X = (w, g)_X, \ \forall \ w \in D(\mathcal{A}),$$

donde garantimos que $v \in D(\mathcal{A}^*)$, ou seja, $D(\mathcal{A}) \subset D(\mathcal{A}^*)$. Além disso,

$$\mathcal{A}^*v = -\mathcal{A}v, \ \forall \ v \in D(\mathcal{A}).$$

■

Em nosso próximo lema, mostraremos que é válida a inclusão contrária.

Lema 3.3 $D(\mathcal{A}^*) \subset H_0(rot,\Omega) \times H(rot,\Omega) = D(\mathcal{A})$.

Demonstração: Fixemos $v = (v_1, v_2) \in D(\mathcal{A}^*)$. Logo, existe $g = (g_1, g_2) \in X$ tal que

$$(\mathcal{A}w, v)_X = (w, g)_X, \ \forall\ w = (w_1, w_2) \in D(\mathcal{A}), \tag{3.12}$$

ou seja,

$$\int_\Omega (\nabla \times w_2) \cdot v_1 \, dx - \int_\Omega (\nabla \times w_1) \cdot v_2 \, dx = \int_\Omega w_1 \cdot g_1 \, dx + \int_\Omega w_2 \cdot g_2 \, dx, \ \forall\ w = (w_1, w_2) \in D(\mathcal{A}). \tag{3.13}$$

Escolhendo $w = (0, w_2)$ com $w_2 \in [\mathcal{D}(\Omega)]^3$, obtemos de (3.13) que

$$\int_\Omega \nabla \times w_2 \cdot v_1 \, dx = \int_\Omega w_2 \cdot g_2 \, dx, \ \forall\ w_2 \in [\mathcal{D}(\Omega)]^3$$

e via **Proposição 2.1** item (d),

$$g_2 = \nabla \times v_1 \text{ em } [\mathcal{D}'(\Omega)]^3.$$

Como $g_2 \in [L^2(\Omega)]^3$, $\nabla \times v_1 \in [L^2(\Omega)]^3$ e assim $v_1 \in H(rot, \Omega)$.

Tomemos agora $w_1 \in [\mathcal{D}(\Omega)]^3$ e ponhamos $w = (w_1, 0) \in D(\mathcal{A})$. Segue de (3.13) que

$$-\int_\Omega (\nabla \times w_1) \cdot v_2 \, dx = \int_\Omega w_1 \cdot g_1 \, dx, \ \forall\ w_1 \in [\mathcal{D}(\Omega)]^3.$$

Novamente pelo item $d)$ da **Proposição 2.1**, temos $g_1 = -\nabla \times v_2 \in [L^2(\Omega)]^3$. Desse modo, $v_2 \in H(rot, \Omega)$.

Até este momento, vimos que se $v \in D(\mathcal{A}^*)$, então $v \in H(rot, \Omega) \times H(rot, \Omega)$ e o elemento $g \in X$ que satisfaz (3.12) é dado por $g = (-\nabla \times v_2, \nabla \times v_1)$, isto é,

$$\int_\Omega (\nabla \times w_2) \cdot v_1 \, dx - \int_\Omega (\nabla \times w_1) \cdot v_2 \, dx = -\int_\Omega w_1 \cdot (\nabla \times v_2) \, dx + \int_\Omega w_2 \cdot (\nabla \times v_1) \, dx, \ \forall\ w = (w_1, w_2) \in D(\mathcal{A}).$$

Observamos que a igualdade acima é válida para todo $w = (0, \varphi)$ com $\varphi \in [\mathcal{D}(\overline{\Omega})]^3$, ou seja,

$$\int_\Omega (\nabla \times \varphi) \cdot v_1 \, dx = \int_\Omega \varphi \cdot (\nabla \times v_1) \, dx, \ \forall\ \varphi \in [\mathcal{D}(\overline{\Omega})]^3, \tag{3.14}$$

em que $v_1 \in H(rot, \Omega)$. O **Teorema 2.2** implica que $v_1 \in H_0(rot, \Omega)$. Logo, concluímos que $v = (v_1, v_2) \in H_0(rot, \Omega) \times H(rot, \Omega) = D(\mathcal{A})$, como queríamos demonstrar. ∎

Em resumo, os lemas 3.2 e 3.3 garantem que $D(\mathcal{A}^*) = D(\mathcal{A})$ e $\mathcal{A}^* = -\mathcal{A}$. Assim, o *Teorema de Stone* (**Teorema 1.7**) estabelece que $\mathcal{A}$ é gerador de um grupo $\mathcal{C}_0$ de operadores unitários $\{T(t)\}$. Com ajuda dele, obtemos o seguinte resultado de existência e unicidade de solução:

Teorema 3.1 *Dado* $(E_0, H_0) \in D(\mathcal{A})$, *o problema* $(3.1) - (3.4)$ *admite única solução global* *forte*

$$(E,H) \in \mathcal{C}([0,+\infty), D(\mathcal{A})) \cap \mathcal{C}^1([0,+\infty), X).$$

Demonstração: Como $(E_0, H_0) \in D(\mathcal{A})$, temos que $T(t)(E_0, H_0) \in D(\mathcal{A})$. Definimos

$$U(t) = T(t)(E_0, H_0).$$

Daí,

$$\frac{d}{dt}U(t) = \frac{d}{dt}T(t)(E_0, H_0) = \mathcal{A}T(t)(E_0, H_0) = \mathcal{A}U(t)$$

e

$$U(0) = T(0)(E_0, H_0) = I(E_0, H_0) = (E_0, H_0).$$

Além disso, $\eta \times E = 0$, pois $(E, H) \in D(\mathcal{A})$. ∎

3.2 Equações de Maxwell no vácuo com condição de fronteira $\eta \times E = 0$

Nesta seção, estabelecemos um resultado de existência e unicidade de solução para o sistema de equações de Maxwell com condição de fronteira dada por $\eta \times E = 0$ e condições do tipo: $\nabla \cdot E = \nabla \cdot H = 0$ em $\Omega \times (0, +\infty)$.

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ um subconjunto aberto com fronteira Γ limitada e Lipschitz. Consideremos o sistema de equações de Maxwell:

$$E_t - \nabla \times H = 0 \text{ em } \Omega \times (0, +\infty) \tag{3.15}$$

$$H_t + \nabla \times E = 0 \text{ em } \Omega \times (0, +\infty) \tag{3.16}$$

$$E(x, 0) = E_0(x) \text{ e } H(x, 0) = H_0(x) \text{ em } \Omega \tag{3.17}$$

$$\eta \times E = 0 \text{ em } \Gamma \times (0, +\infty) \tag{3.18}$$

$$\nabla \cdot E = \nabla \cdot H = 0 \text{ em } \Omega \times (0, +\infty), \tag{3.19}$$

em que $\eta(x) = (\eta_1(x), \eta_2(x), \eta_3(x))$ denota a normal unitária exterior a Ω em $x \in \Gamma$.

Vimos na seção anterior que se $(E_0, H_0) \in H_0(rot, \Omega) \times H(rot, \Omega)$, então o problema (3.1)-(3.4) admite única solução

$$(E, H) \in \mathcal{C}([0, +\infty); D(\mathcal{A})) \cap \mathcal{C}^1([0, +\infty); X),$$

em que $X = [L^2(\Omega)]^3 \times [L^2(\Omega)]^3$. Falta-nos apenas analisar a condição (3.19).

Para isso, consideremos as notações utilizadas na **Seção 3.1**, onde sabemos que o operador $\mathcal{A}$ é gerador infinitesimal de um grupo unitário de classe $\mathcal{C}_0$, $\{T(t)\}$, em X.

Designemos por $M = ker(\mathcal{A}^*) = \{v \in D(\mathcal{A}^*);\ \mathcal{A}^* v = 0\}$.

Observação 3.2 *O núcleo $ker(\mathcal{A}^*)$ do operador $\mathcal{A}^*$ é o espaço*

$$\begin{aligned} ker(\mathcal{A}^*) &= ker(\mathcal{A}) = \{(E,H) \in X; \nabla \times E = 0,\ \nabla \times H = 0 \ e\ \eta \times E = 0 \ em\ \Gamma\} \\ &= H_0(rot\ 0,\Omega) \times H(rot\ 0,\Omega). \end{aligned}$$

Notemos que $M \neq \{(0,0)\}$, pois todo elemento da forma $(\nabla\varphi_1, \nabla\varphi_2)$ com $\varphi_1, \varphi_2 \in H_0^2(\Omega)$ é tal que $(\nabla\varphi_1, \nabla\varphi_2) \in D(\mathcal{A}^*)$ e satisfaz

$$\begin{aligned} \mathcal{A}^*(\nabla\varphi_1, \nabla\varphi_2) &= -\mathcal{A}(\nabla\varphi_1, \nabla\varphi_2) \\ &= -(\nabla \times (\nabla\varphi_1), -\nabla \times (\nabla\varphi_1)) \\ &= (0,0), \end{aligned}$$

devido ao item a) da **Proposição 2.1**. Logo, $(\nabla\varphi_1, \nabla\varphi_2) \in H_0(rot\ 0,\Omega) \times H(rot\ 0,\Omega)$ e então $(\nabla\varphi_1, \nabla\varphi_2) \in M$ pela **Observação 3.2**.

Seja $M^\perp$ o complemento ortogonal de M em X. Na próxima proposição, mostraremos que $D(\mathcal{A}) \cap M^\perp$ é estável pelo grupo $\{T(t)\}$.

Proposição 3.1 *$\{T(t)\}$ aplica $D(\mathcal{A}) \cap M^\perp$ em $D(\mathcal{A}) \cap M^\perp$.*

Demonstração: A **Proposição 1.9** garante que $T(t)$ aplica $D(\mathcal{A})$ em $D(\mathcal{A})$. Resta-nos provar então que se $v \in D(\mathcal{A}) \cap M^\perp$, então $T(t)v \in M^\perp$.

Com efeito, sejam $(u,v) \in M$ e $(\tilde{u},\tilde{v}) \in M^\perp \cap D(\mathcal{A})$. Observamos que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(T(t)(\tilde{u},\tilde{v}),(u,v))_X &= \left(\frac{d}{dt}T(t)(\tilde{u},\tilde{v}),(u,v)\right)_X \\ &= (\mathcal{A}T(t)(\tilde{u},\tilde{v}),(u,v))_X \\ &= (T(t)(\tilde{u},\tilde{v}),\mathcal{A}^*(u,v))_X \\ &= 0, \end{aligned}$$

já que $(u,v) \in M = ker(\mathcal{A}^*) \subset D(\mathcal{A}^*)$. Como consequência,

$$\int_0^t \frac{d}{d\xi}(T(\xi)(\tilde{u},\tilde{v}),(u,v))_X \, d\xi = 0,$$

donde obtemos

$$\begin{aligned} ((T(t)(\tilde{u},\tilde{v}),(u,v))_X &= (T(0)(\tilde{u},\tilde{v}),(u,v))_X \\ &= ((\tilde{u},\tilde{v}),(u,v))_X \\ &= 0, \end{aligned}$$

uma vez que $(u,v) \in M$ e $(\tilde{u},\tilde{v}) \in M^{\perp}$. Logo, garantimos que

$$T(t)(\tilde{u},\tilde{v}) \in M^{\perp},$$

como queríamos demonstrar. ∎

Veremos agora que tomando $(u,v) \in D(\mathcal{A}) \cap M^{\perp}$, teremos (u,v) satisfazendo (3.19).

Proposição 3.2 *Se $v = (v_1, v_2) \in D(\mathcal{A}) \cap M^{\perp}$, então $\nabla \cdot v_1 = \nabla \cdot v_2 = 0$.*

Demonstração: Se $v = (v_1, v_2) \in D(\mathcal{A}) \cap M^{\perp}$, então

$$((v_1, v_2), (\tilde{v_1}, \tilde{v_2}))_X = 0 \text{ para todo } (\tilde{v_1}, \tilde{v_2}) \in M. \tag{3.20}$$

Qualquer que seja $\varphi_1 \in \mathcal{D}(\Omega)$, temos $w = (\nabla\varphi_1, 0) \in ker(\mathcal{A}^*) = M$. Usando (3.20), obtemos

$$0 = (v,w)_X = \int_\Omega v_1 \cdot (\nabla\varphi_1)\ dx,\ \forall\ \varphi_1 \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Segue do item $c)$ da **Proposição 2.1** que

$$< \nabla \cdot v_1, \varphi_1 >= - < v_1, \nabla\varphi_1 >= 0,\ \forall\ \varphi_1 \in \mathcal{D}(\Omega),$$

o que mostra que $\nabla \cdot v_1 = 0$.

Analogamente, para todo $\varphi_2 \in \mathcal{D}(\Omega)$ vale

$$< \nabla \cdot v_2, \varphi_2 >= - < v_2, \nabla\varphi_2 >= - \int_\Omega v_2 \cdot (\nabla\varphi_2)\ dx = -((v_1,v_2),(0,\nabla\varphi_2))_X = 0,$$

já que $(0, \nabla\varphi_2) \in M$. Assim, $\nabla \cdot v_2 = 0$. ∎

Finalizamos esta seção com o seguinte teorema de existência e unicidade do problema (3.15)-(3.19):

Teorema 3.2 *Dado $(E_0, H_0) \in D(\mathcal{A}) \cap M^{\perp}$, o problema (3.15)-(3.19) possui única solução global forte (E,H) tal que*

$$(E,H) \in \mathcal{C}([0,+\infty), D(\mathcal{A})) \cap \mathcal{C}^1([0,+\infty), X).$$

Demonstração: Como $(E_0, H_0) \in D(\mathcal{A}) \cap M^{\perp}$, decorre, via **Proposição 3.1**, que $T(t)(E_0,H_0) \in D(\mathcal{A}) \cap M^{\perp}$. Definimos $(E(t), H(t)) = T(t)(E_0, H_0)$. Temos então que

(i) $\dfrac{d}{dt}(E(t), H(t)) = \mathcal{A}T(t)(E_0, H_0) = \mathcal{A}(E(t), H(t))$;

(ii) $(E(0), H(0)) = T(0)(E_0, H_0) = (E_0, H_0)$;

(iii) $\nabla \cdot E = \nabla \cdot H = 0$, pois $(E, H) \in D(\mathcal{A}) \cap M^{\perp}$ (**Proposição 3.2**);

(iv) $\eta \times E = 0$, já que $(E, H) \in D(\mathcal{A}) \cap M^{\perp}$,

como desejávamos. ∎

3.3 Equações de Maxwell num meio condutor perfeito

Como última aplicação, estaremos interessados em obter um resultado de existência e unicidade de solução para o sistema de equações de Maxwell com condições de fronteira dadas por $\eta \times E = \eta \cdot H = 0$ e condições do tipo: $\nabla \cdot E = \nabla \cdot H = 0$ em $\Omega \times (0, +\infty)$.

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ um subconjunto aberto com fronteira Γ limitada e Lipschitz. Consideremos o sistema de equações de Maxwell:

$$E_t - \nabla \times H = 0 \text{ em } \Omega \times (0, +\infty) \tag{3.21}$$

$$H_t + \nabla \times E = 0 \text{ em } \Omega \times (0, +\infty) \tag{3.22}$$

$$E(x, 0) = E_0(x) \text{ e } H(x, 0) = H_0(x) \text{ em } \Omega \tag{3.23}$$

$$\eta \cdot H = 0, \ \eta \times E = 0 \text{ em } \Gamma \times (0, +\infty) \tag{3.24}$$

$$\nabla \cdot E = \nabla \cdot H = 0 \text{ em } \Omega \times (0, +\infty), \tag{3.25}$$

em que $\eta(x) = (\eta_1(x), \eta_2(x), \eta_3(x))$ denota a normal unitária exterior a Ω em $x \in \Gamma$.

Consideremos o espaço de Hilbert $X = [L^2(\Omega)]^3 \times [L^2(\Omega)]^3$ munido do produto interno apresentado na **Seção 3.1** e

$$\begin{aligned}\mathcal{H} &= \{(E, H) \in X;\ \nabla \cdot E = 0,\ \nabla \cdot H = 0,\ \eta \cdot H|_{\Gamma} = 0\} \\ &= H(div\ 0, \Omega) \times H_0(div\ 0, \Omega),\end{aligned}$$

em que, por definição,

$$\begin{aligned}H(div\ 0, \Omega) &= \{u \in [L^2(\Omega)]^3;\ \nabla \cdot u = 0\}, \\ H_0(div\ 0, \Omega) &= \{u \in [L^2(\Omega)]^3;\ \nabla \cdot u = 0 \text{ e } \eta \cdot u|_{\Gamma} = 0\}.\end{aligned}$$

Vimos na **Seção 2.4** que $H(div\ 0, \Omega)$ e $H_0(div\ 0, \Omega)$ são espaços de Hilbert com o produto interno oriundo de $[L^2(\Omega)]^3$. Com isso, $\mathcal{H}$ é espaço de Hilbert.

As considerações anteriores nos levam a definição do operador $\mathcal{A}_{\mathcal{H}}$, restrição de $\mathcal{A}$ ao espaço $\mathcal{H}$, dado por

$$\mathcal{A}_{\mathcal{H}} : D(\mathcal{A}_{\mathcal{H}}) \subset \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$$
$$\mathcal{A}_{\mathcal{H}} v = \mathcal{A} v,\ \forall\ v \in D(\mathcal{A}_{\mathcal{H}}),$$

em que

$$\begin{aligned} D(\mathcal{A}_{\mathcal{H}}) &= D(\mathcal{A}) \cap \mathcal{H} \\ &= \{(E,H) \in X;\ \nabla \times E, \nabla \times H \in [L^2(\Omega)]^3,\ \nabla \cdot E = \nabla \cdot H = 0,\ \eta \times E|_\Gamma = \eta \cdot H|_\Gamma = 0\} \\ &= [H_0(rot,\Omega) \cap H(div\ 0,\Omega)] \times [H(rot,\Omega) \cap H_0(div\ 0,\Omega)]. \end{aligned}$$

Na proposição seguinte mostramos que, de fato, o operador $\mathcal{A}_{\mathcal{H}} : D(\mathcal{A}_{\mathcal{H}}) \to \mathcal{H}$ está bem definido, isto é, o operador $\mathcal{A}$ aplica $D(\mathcal{A}) \cap \mathcal{H}$ em $\mathcal{H}$.

Proposição 3.3 *$\mathcal{H}$ é um subespaço de $X = [L^2(\Omega)]^3 \times [L^2(\Omega)]^3$ "estável" para o operador $\mathcal{A}$, ou seja,*

$$v \in D(\mathcal{A}) \cap \mathcal{H} \Longrightarrow \mathcal{A}v \in \mathcal{H}.$$

Demonstração: Segue das observações 2.8, 2.9 e 3.2 que

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^\perp &= [H(div\ 0,\Omega)]^\perp \times [H_0(div\ 0,\Omega)]^\perp \\ &\subset H_0(rot\ 0,\Omega) \times H(rot\ 0,\Omega) \\ &= ker(\mathcal{A}) = ker(\mathcal{A}^*). \end{aligned}$$

Fixemos $v \in D(\mathcal{A}) \cap \mathcal{H}$. Então, para todo $w \in ker(\mathcal{A})$, temos

$$(\mathcal{A}v, w)_X = (v, \mathcal{A}^* w)_X = (v, -\mathcal{A}w)_X = (v, 0)_X = 0,$$

o que mostra que $\mathcal{A}v \subset [ker(\mathcal{A})]^\perp \subset \mathcal{H}$. ∎

Como consequência da proposição anterior, vemos que é natural a definição dada anteriormente para o operador $\mathcal{A}_{\mathcal{H}}$.

Proposição 3.4 *$D(\mathcal{A}_{\mathcal{H}})$ é denso em $\mathcal{H}$.*

Demonstração: Segue como consequência das proposições 2.8 e 2.9. ∎

Devido a **Proposição 3.4**, notemos que $\mathcal{A}^*_{\mathcal{H}}$, o operador adjunto de $\mathcal{A}_{\mathcal{H}}$, está bem definido. Nossa meta agora consiste em estabelecer a caracterização de $\mathcal{A}^*_{\mathcal{H}}$.

Lema 3.4 *$D(\mathcal{A}_{\mathcal{H}}) \subset D(\mathcal{A}^*_{\mathcal{H}})$.*

Demonstração: Já sabemos do **Lema 3.3** que

$$(\mathcal{A}u, v)_X = (u, -\mathcal{A}v)_X,\ \forall\ u, v \in D(\mathcal{A}) = D(\mathcal{A}^*).$$

Em particular, vale

$$(\mathcal{A}u, v)_X = (u, -\mathcal{A}v)_X,\ \forall\ u, v \in D(\mathcal{A}_{\mathcal{H}}) \subset D(\mathcal{A}),$$

ou seja,

$$(\mathcal{A}_{\mathcal{H}}u, v)_{\mathcal{H}} = (u, -\mathcal{A}_{\mathcal{H}}v)_{\mathcal{H}}, \ \forall \ u, v \in D(\mathcal{A}_{\mathcal{H}}).$$

Daí, se $v \in D(\mathcal{A}_{\mathcal{H}})$, temos

$$(\mathcal{A}_{\mathcal{H}}u, v)_{\mathcal{H}} = (u, -\mathcal{A}_{\mathcal{H}}v)_{\mathcal{H}}, \ \forall \ u \in D(\mathcal{A}_{\mathcal{H}}).$$

A igualdade acima garante que $v \in D(\mathcal{A}^*_{\mathcal{H}})$ e $\mathcal{A}^*_{\mathcal{H}}v = -\mathcal{A}_{\mathcal{H}}v$, isto é,

$$D(\mathcal{A}_{\mathcal{H}}) \subset D(\mathcal{A}^*_{\mathcal{H}}) \text{ e } \mathcal{A}^*_{\mathcal{H}}v = -\mathcal{A}_{\mathcal{H}}v, \ \forall \ v \in D(\mathcal{A}_{\mathcal{H}}).$$

■

Lema 3.5 $D(\mathcal{A}^*_{\mathcal{H}}) \subset D(\mathcal{A}_{\mathcal{H}})$.

Demonstração: Consideremos $v = (v_1, v_2) \in D(\mathcal{A}^*_{\mathcal{H}}) \subset \mathcal{H}$. Logo, existe $g = (g_1, g_2) \in \mathcal{H}$ tal que

$$(\mathcal{A}_{\mathcal{H}}u, v)_{\mathcal{H}} = (u, g)_{\mathcal{H}}, \ \forall \ u \in D(\mathcal{A}_{\mathcal{H}}). \tag{3.26}$$

Em particular, obtemos

$$(\mathcal{A}_{\mathcal{H}}u, v)_{\mathcal{H}} = (u, g)_{\mathcal{H}}, \ \forall \ u \in P_d([\mathcal{D}(\Omega)]^3) \times P_0([\mathcal{D}(\Omega)]^3), \tag{3.27}$$

visto que $P_d([\mathcal{D}(\Omega)]^3) \times P_0([\mathcal{D}(\Omega)]^3) \subset D(\mathcal{A}_{\mathcal{H}})$ (proposições 2.6 e 2.7).

Observamos que se $\varphi \in [\mathcal{D}(\Omega)]^3$, então $(0, P_0\varphi) \in D(\mathcal{A}_{\mathcal{H}})$ e, por (3.27), temos

$$(\mathcal{A}_{\mathcal{H}}(0, P_0\varphi), v)_{\mathcal{H}} = ((0, P_0\varphi), g)_{\mathcal{H}}, \ \forall \ \varphi \in [\mathcal{D}(\Omega)]^3,$$

ou seja,

$$\int_\Omega \nabla \times (P_0\varphi) \cdot v_1 \ dx = \int_\Omega P_0\varphi \cdot g_2 \ dx, \ \forall \ \varphi \in [\mathcal{D}(\Omega)]^3. \tag{3.28}$$

Devido a **Proposição 2.7**,

$$\nabla \times (P_0\varphi) = \nabla \times \varphi \text{ e } (P_0\varphi, g_2) = (\varphi, g_2),$$

uma vez que $g_2 \in H_0(div\ 0, \Omega)$. Usando esse fato e (3.28), ficamos com

$$\int_\Omega (\nabla \times \varphi) \cdot v_1 \ dx = \int_\Omega \varphi \cdot g_2 \ dx, \ \forall \ \varphi \in [\mathcal{D}(\Omega)]^3,$$

donde obtemos que $g_2 = \nabla \times v_1$ em $[\mathcal{D}'(\Omega)]^3$. Haja visto que $g_2 \in [L^2(\Omega)]^3$, garantimos que $v_1 \in H(rot, \Omega)$.

Por outro lado, dado qualquer $\varphi \in [\mathcal{D}(\Omega)]^3$, temos $u = (P_d\varphi, 0) \in D(\mathcal{A}_{\mathcal{H}})$. Consequentemente, por (3.27), teremos

$$(\mathcal{A}_{\mathcal{H}}(P_d\varphi, 0), v)_{\mathcal{H}} = ((P_d\varphi, 0), g)_{\mathcal{H}}, \ \forall \ \varphi \in [\mathcal{D}(\Omega)]^3,$$

isto é,

$$\int_\Omega -\nabla \times (P_d\varphi) \cdot v_2 \ dx = \int_\Omega P_d\varphi \cdot g_1 \ dx, \ \forall \ \varphi \in [\mathcal{D}(\Omega)]^3,$$

ou ainda, recordando que $g_1 \in H(div\ 0, \Omega)$ e $\nabla \times (P_d\varphi) = \nabla \times \varphi$,

$$\int_\Omega -(\nabla \times \varphi) \cdot v_2 \ dx = \int_\Omega \varphi \cdot g_1 \ dx, \ \forall \ \in [\mathcal{D}(\Omega)]^3.$$

Desta última equação decorre que $g_1 = -\nabla \times v_2$ em $[\mathcal{D}'(\Omega)]^3$ e, como $g_1 \in [L^2(\Omega)]^3$, concluímos que $v_2 \in H(rot, \Omega)$.

Em resumo, vimos até agora que se $v = (v_1, v_2) \in D(\mathcal{A}_{\mathcal{H}}^*)$, então

$$v \in [H(rot, \Omega) \cap H(div\ 0, \Omega)] \times [H(rot, \Omega) \cap H_0(div\ 0, \Omega)]$$

e, além disso,

$$(\mathcal{A}_{\mathcal{H}} u, v)_{\mathcal{H}} = (u, (-\nabla \times v_2, \nabla \times v_1))_{\mathcal{H}}, \ \forall \ u \in D(\mathcal{A}_{\mathcal{H}}). \tag{3.29}$$

Para concluir a demonstração deste lema, devemos mostrar que $v_1 \times \eta|_\Gamma = 0$. Com este intuito, usaremos (3.29).

Se $\varphi \in [\mathcal{D}(\overline{\Omega})]^3$, então $P_0\varphi \in H(rot, \Omega) \cap H_0(div\ 0, \Omega)$ (**Proposição 2.7**). Assim, $u = (0, P_0\varphi) \in D(\mathcal{A}_{\mathcal{H}})$. Desse modo, de posse de (3.29), escrevemos

$$(\mathcal{A}_{\mathcal{H}}(0, P_0\varphi), (v_1, v_2))_{\mathcal{H}} = ((0, P_0\varphi), (-\nabla \times v_2, \nabla \times v_1))_{\mathcal{H}}, \ \forall \ \varphi \in [\mathcal{D}(\overline{\Omega})]^3,$$

ou seja,

$$\int_\Omega \nabla \times (P_0\varphi) \cdot v_1 \ dx = \int_\Omega (P_0\varphi) \cdot \nabla \times v_1 \ dx.$$

Sabemos que $\nabla \times (P_0\varphi) = \nabla \times \varphi$ e também $\nabla \times v_1 = g_2 \in H_0(div\ 0, \Omega)$. Com isso,

$$(P_0\varphi, \nabla \times v_1) = (\varphi, \nabla \times v_1).$$

Assim,

$$\int_\Omega (\nabla \times \varphi) \cdot v_1 \ dx = \int_\Omega \varphi \cdot (\nabla \times v_1) \ dx, \ \forall \ \varphi \in [\mathcal{D}(\overline{\Omega})]^3,$$

donde concluímos que $v_1 \in H_0(rot, \Omega)$ graças ao **Teorema 2.2**. ■

Em decorrência dos lemas 3.4 e 3.5, obtemos $D(\mathcal{A}_{\mathcal{H}}^*) = D(\mathcal{A}_{\mathcal{H}})$ e $\mathcal{A}_{\mathcal{H}}^* = -\mathcal{A}_{\mathcal{H}}$. Logo, o *Teorema de Stone* (**Teorema 1.7**) estabelece que $\mathcal{A}_{\mathcal{H}}$ é gerador de um grupo de operadores unitários $\{T(t)\}$ de classe $\mathcal{C}_0$. Com auxílio deste, obtemos o seguinte resultado de existência e unicidade de solução:

Teorema 3.3 *Dado* $(E_0, H_0) \in D(\mathcal{A}_{\mathcal{H}})$*, existe uma única solução*

$$(E, H) \in \mathcal{C}([0, +\infty), D(\mathcal{A}_{\mathcal{H}})) \cap \mathcal{C}^1([0, +\infty), \mathcal{H})$$

do problema $(3.21) - (3.25)$.

Demonstração: Como $(E_0, H_0) \in D(\mathcal{A}_{\mathcal{H}})$, $T(t)(E_0, H_0) \in D(\mathcal{A}_{\mathcal{H}})$. Definindo

$$(E(t), H(t)) = T(t)(E_0, H_0)$$

e usando as propriedades de semigrupos (**Seção 1.5**), obtemos o resultado desejado. ∎

CONCLUSÃO

Durante a elaboração deste trabalho, enaltecemos diversos pontos positivos.

Inicialmente, tentamos exibi-lo de maneira mais didática possível. Para tanto, preparamos o capítulo de preliminares, cujo objetivo foi fornecer as ferramentas fundamentais para a leitura dos capítulos seguintes. Além disso, nesta exposição, insistimos na citação da bibliografia utilizada a fim de proporcionar ao leitor o desenvolvimento dos fatos enunciados.

No que tange ao **Capítulo 2**, preocupamo-nos, sobretudo, com o rigor matemático na caracterização dos espaços funcionais $H(div, \Omega)$ e $H(rot, \Omega)$, buscando sempre torná-lo acessível a futuros interessados neste assunto. Embora os teoremas deste capítulo, tidos como auge deste texto, estão demonstrados em [5], nossa meta fora de detalhar os aspectos dessas provas, elaborando lemas auxiliares quando necessário. Destacamos também a utilização do operador projeção na busca de resultados de densidade nos subespaços $H(div\ 0, \Omega)$ e $H_0(div\ 0, \Omega)$ de $[L^2(\Omega)]^3$. Para este fim, recorremos ao artigo [14].

No **Capítulo 3**, selecionamos algumas aplicações para os espaços funcionais abordados anteriormente. O objetivo central desse capítulo foi de aproximar toda teoria desenvolvida em modelos de origem eletromagnética. A busca por existência e unicidade de solução nestes sistemas deu-se pela caracterização do *operador de Maxwell* $\mathcal{A}$. Dada suas propriedades e almejando uma forma elegante de garantir existência e unicidade, optamos pelo uso do *Teorema de Stone*, do qual requer um estudo do operador adjunto de $\mathcal{A}$.

Para encerrar, apontamos outras metas que podem ser traçadas como, por exemplo, a caracterização dos espaços

$$H^1_{\tau 0} = \{u \in [H^1(\Omega)]^3;\ u \times \eta|_\Gamma = 0\} \text{ e } H^1_{\eta 0} = \{u \in [H^1(\Omega)]^3;\ u \cdot \eta|_\Gamma = 0\}$$

e suas relações com o espaço de Sobolev $[H^1_0(\Omega)]^3$ e, também o estudo das decomposições ortogonais descritas em [5] (p. 216). Para este propósito, exige-se o estudo de resultados não-clássicos da Geometria e da Análise Funcional. O estudo dessas caracterizações e das decomposições citadas é tido como objetivo futuro do autor.

REFERÊNCIAS

[1] ADAMS, R. A. **Sobolev Spaces**. New York: Academic Press, 1975.

[2] BERNARDI, C. **Méthode d'éléments finis pour les équations de Navier-Stokes**. 1979. Thèse 3ème cycle - Université Pierre et Marie Currie, Paris, 1979.

[3] BREZIS, H. **Análisis funcional - Teoría y Aplicaciones**. Madrid: Alianza Editorial S.A, 1984.

[4] CAVALCANTI, M. M.; DOMINGUES CAVALCANTI, V. N. **Introdução à Teoria das Distribuições e aos Espaços de Sobolev**. Maringá: Eduem, 2009.

[5] DAUTRAY, R.; LIONS, J. L. **Mathematical Analysis and Numerical Methods for Science and Technology**, Spectral Theory and Applications. Berlin: Spring-Verlag, 1990, v. 3.

[6] FERREIRA, M. V.; PERLA MENZALA, G. Uniform Stabilization of an electromagnetic-elasticity problem in exterior domain, **Discrete and Continuous Dynamical Systems**, v. 18, n. 4, p. 719-746, 2007.

[7] FERREIRA, M. V. **Ondas Elásticas e Electromagnéticas em Domínios Exteriores: Propriedades Assintóticas**. 2005. Tese (Doutorado em Matemática) - Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2005.

[8] FOLLAND, G. B. **Real Analysis: modern techniques and their applications**. 2. ed. United States of America: Willey-Interscience Series of Texts, 1999.

[9] GIRAULT, V.; RAVIART, P. A. **Finit Element Methods for Navier-Stokes Equations**. Berlin: Springer-Verlag, Berlin, 1986.

[10] KREYSZIG, E. **Introductory functional analysis with applications**. United States of America: John Wiley & Sons. Inc., 1978.

[11] MEDEIROS, L. A.; MELLO, E. A. **A Integral de Lebesgue**. 6. ed. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática - UFRJ, 2008.

[12] MEDEIROS, L. A.; MIRANDA, M. M. **Espaços de Sobolev: iniciação aos problemas elíticos não homogêneos**. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática - UFRJ, 2000.

[13] MONK, P. **Finite Element Methods for Maxwell's Equations**. New York: Oxford University Press, 2003.

[14] NICAISE, S. Exact Boundary Controllability of Maxwell's Equations in Heterogeneous Media and an Application to an Inverse Source Problem. **SIAM Journal on Control Optimization**, v. 38, n. 4, p. 1145-1170, 2000.

[15] PAZY, A. **Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations**. New York: Springer-Verlag, 1983.

[16] PINTO MIRANDA, F. A. **Problemas de Electromagnetismo Associados a Leis Não Lineares**. 2007. Tese (Doutorado em Ciências) - Universidade do Minho, Braga, 2007.

[17] PHUNG, K. D. Contrôle et Stabilisation D'Ondes Électromagnétiques. **ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations**, v. 5, p. 87-137, 2000.

[18] YIN, H. On Maxwell's equations in an electromagnetic field with the temperature effect. **SIAM Journal on Mathematical Analysis**, v. 29, n. 3, p. 637-651, 1998.

[19] YIN, H. On a singular limit problem for nonlinear Maxwell's equations. **Journal of Differential Equations**, v. 156, n. 2, p. 355-375, 1999.