

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA MARIA
CENTRO DE CIÊNCIAS NATURAIS E EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

Marcos Leopoldo Wayhs Basso

**COMPLEMENTARIEDADE, EMARANHAMENTO, INCERTEZA E
INVARIÂNCIA DE LORENTZ**

Santa Maria, RS
2021

Marcos Leopoldo Wayhs Basso

**COMPLEMENTARIEDADE, EMARANHAMENTO, INCERTEZA E INVARIÂNCIA DE
LORENTZ**

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física, Área de Concentração em Matéria Condensada Teórica, da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM, RS), como requisito parcial para obtenção do grau de **Mestre em Física**.

ORIENTADOR: Prof. Jonas Maziero

Santa Maria, RS
2021

Basso, Marcos
Complementariedade, Emaranhamento, Incerteza e
Invariância de Lorentz / Marcos Basso.- 2021.
175 p.; 30 cm

Orientador: Jonas Maziero
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Santa
Maria, Centro de Ciências Naturais e Exatas, Programa de
Pós-Graduação em Física, RS, 2021

1. Fundamentos de Mecânica Quântica 2.
Complementariedade 3. Emaranhamento 4. Incerteza 5.
Invariância de Lorentz I. Maziero, Jonas II. Título.

Sistema de geração automática de ficha catalográfica da UFSM. Dados fornecidos pelo autor(a). Sob supervisão da Direção da Divisão de Processos Técnicos da Biblioteca Central. Bibliotecária responsável Paula Schoenfeldt Patta CRB 10/1728.

©2021

Todos os direitos autorais reservados a Marcos Leopoldo Wayhs Basso. A reprodução de partes ou do todo deste trabalho só poderá ser feita mediante a citação da fonte.

End. Eletr.: marcoslwbasso@hotmail.com

Marcos Leopoldo Wayhs Basso

**COMPLEMENTARIEDADE, EMARANHAMENTO, INCERTEZA E INVARIÂNCIA DE
LORENTZ**

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física, Área de Concentração em Matéria Condensada Teórica, da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM, RS), como requisito parcial para obtenção do grau de **Mestre em Física**.



Aprovado em 20 de maio de 2021:

Jonas Maziero, Prof.Dr. (UFSM)
(Presidente/Orientador)

Renato M. Angelo, Prof.Dr. (UFPR)

Lucas C. Céleri, Prof.Dr. (UFG)

Santa Maria, RS
2021

NUP: 23081.042188/2021-49		Prioridade: Normal
Homologação de Ata 010 - Organização e Funcionamento		
COMPONENTE		
Ordem	Descrição	Nome do arquivo
1	Ata de defesa de dissertação/tese (134.332)	Ata defesa Marcos Leopoldo.pdf
Assinaturas		
21/05/2021 09:42:49 Renato Moreira Angelo (Pessoa Física) Usuário Externo (182.***.***.**)		
21/05/2021 09:44:42 JONAS MAZIERO (PROFESSOR DO MAGISTÉRIO SUPERIOR) 02.32.00.00.0.0 - DEPARTAMENTO DE FÍSICA - DFSC		
21/05/2021 10:56:30 Lucas Chibebe Céleri (Pessoa Física) Usuário Externo (183.***.***.**)		
		
Código Verificador: 664769		
Código CRC: cac69be8		
Consulte em: https://portal.ufsm.br/documentos/publico/autenticacao/assinaturas.html		

AGRADECIMENTOS

A fim de não esquecer ninguém, tentarei ser o mais geral possível.

Primeiro, gostaria de agradecer a todas pessoas que fazem e/ou fizeram parte da minha vida e que, de alguma maneira, direta ou indireta, ajudaram na construção do meu caráter. Em especial, àqueles e àquelas que dividi mesas de bar, copos de cerveja, conversas, caminhadas, músicas, filmes e comilanças.

Segundo, gostaria tanto de agradecer ao pessoal do grupo de Informação Quântica e Fenômenos Emergentes, por propiciar um ambiente tranquilo e descontraído, quanto ao professor Jonas Maziero, pela orientação, colaboração e discussões assim como pela liberdade que tive a fim de perseguir meus interesses.

Por último, mas não menos importante, ao povo brasileiro que, através do seu suor, permitiu a minha formação acadêmica, seja em forma de custeio através da CAPES, quanto em forma de estrutura física e humana através da UFSM.

Os humanos são primatas bipolares. Temos um pouco da sensualidade e da amabilidade dos bonobos, e pode ser que nos agrade a ideia de imitá-los, mas seria bom que não o fizéssemos em demasia, ou o mundo se transformaria numa gigantesca festa hippie. Não que isso não nos fizesse felizes, mas é difícil imaginar que seríamos produtivos dessa maneira. De outro lado, a nossa espécie também tem algo do chimpanzé brutal e dominador, um aspecto que possivelmente gostaríamos de suprimir, mas não completamente. É possível argumentar que não haveria problema algum se toda a humanidade se tornasse pacífica ao mesmo tempo, mas isso também é difícil de imaginar. Nenhuma população é estável, a menos que esteja imune à invasão de mutantes. No entanto, eu continuaria a me preocupar com os lunáticos dispostos a formar um exército e explorar os medos do restante da população. Assim, por mais estranho que pareça, eu relutaria em mudar radicalmente a condição humana. Mas, se pudesse mudar uma única coisa, eu alargaria o espectro dos nossos sentimentos de empatia.

(Frans de Waal)

RESUMO

COMPLEMENTARIEDADE, EMARANHAMENTO, INCERTEZA E INVARIÂNCIA DE LORENTZ

AUTOR: Marcos Leopoldo Wayhs Basso

ORIENTADOR: Jonas Maziero

O princípio de complementaridade de Bohr foi introduzido como uma afirmação qualitativa sobre sistemas quânticos únicos, que possuem propriedades que são igualmente reais, mas mutuamente excludentes. Tal princípio, junto com o princípio da incerteza, está na gênese da Mecânica Quântica (MQ), acompanhando o desenvolvimento da teoria desde então. Outro aspecto intrigante da MQ é o emaranhamento, sendo este um tipo de correlação ligada à não separabilidade dentro do formalismo matemático da MQ. Sua importância central nos fundamentos da MQ, bem como seu importante papel nos campos da informação quântica e computação quântica, fez com que a teoria do emaranhamento alcançasse grande progresso nas décadas recentes. Nesta dissertação, nos propomos a discutir relações de complementariedade, incerteza e emaranhamento, bem como abordar tais aspectos em cenários relativísticos, uma vez que o interesse sobre como emaranhamento se comporta em cenários relativísticos tem crescido cada vez mais. Primeiramente, explorando as propriedades do operador densidade, obtemos relações de complementariedade, usando medidas de coerência bem conhecidas na literatura. Em seguida, mostramos que é possível obter relações completas de complementariedade, levando em conta emaranhamento. Para isso, exploramos a pureza de um sistema quântico de muitas partes. Além disso, discutimos a relação entre complementariedade e incerteza de um observável, uma vez que é possível decompor incerteza em suas partes clássica e quântica. Também obtemos relações de complementariedade para incerteza. Por fim, estudamos as relações completas de complementariedade e sua invariância frente a transformações de Lorentz. Embora sabe-se que entropia de emaranhamento não permaneça invariante sob transformações de Lorentz, e tampouco as medidas que quantificam o princípio da complementariedade, quando tomadas juntas, em uma relação de complementariedade completa, são invariantes de Lorentz.

Palavras-chave: Complementariedade. Incerteza. Emaranhamento. Invariância de Lorentz.

ABSTRACT

COMPLEMENTARITY, ENTANGLEMENT, UNCERTAINTY AND LORENTZ INVARIANCE

AUTHOR: Marcos Leopoldo Wayhs Basso

ADVISOR: Jonas Maziero

Bohr's complementarity principle was introduced as a qualitative statement about quantum systems, which have properties that are equally real, but mutually exclusive. This principle, together with the uncertainty principle, is at the origin of Quantum Mechanics (QM), following the development of the theory since then. Another intriguing aspect of QM is entanglement, which is a type of correlation that is only possible within the mathematical formalism of QM. Its central importance in the Quantum foundations, as well as its important role in the fields of quantum information and quantum computation, has made the theory of entanglement achieve great progress in recent decades. In this dissertation we discuss the aspects and relations among complementarity relations, uncertainty, and entanglement. Such aspects are also investigated in relativistic scenarios, since the interest on how entanglement behaves in relativistic scenarios has grown more and more. First, by exploring the properties of the density operator, we obtain complementarity relations, using coherence measures well known in the literature. Next, we show that it is possible to obtain complete complementarity relations, i.e., relations that also take into account entanglement. For this, we explore the purity of a multipartite quantum system. In addition, we discuss the relation between complementarity and uncertainty of an observable, since it is possible to decompose uncertainty into its classical and quantum parts. We also obtain complementarity relations for uncertainty. Finally, we study the complete complementary relations and its Lorentz invariance. Although it is known that entanglement entropy does not remain invariant under Lorentz transformations, and neither does the measures that quantifies complementarity, we show that these measures when taken together, in a complete complementarity relation, are Lorentz invariant.

Keywords: Complementarity. Uncertainty. Entanglement. Lorentz Invariance.

LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1 – Interferômetro de Mach-Zehnder (AULETTA; FORTUNATO; PARISI, 2009).	34
Figura 2.2 – Probabilidade de detecção em D3 e D4 em função de ϕ	35
Figura 2.3 – Constraste das franjas de interferência (DIMITROVA; WEIS, 2008)	36
Figura 3.1 – Comparação entre $f(x) = x - 1$ e $g(x) = \ln x$ para $x > 0$	60
Figura 3.2 – Comparação entre $f(x) = (x - 1)/x$ e $g(x) = \ln x$ para $x > 0$	64
Figura 3.3 – Comportamento das propriedades locais de um quanton no estado $\rho = w \psi\rangle\langle\psi + \frac{1-w}{2} I_{2 \times 2}$	68
Figura 5.1 – Rotação de Wigner. Adaptado de (TERASHIMA; UEDA, 2003).	105
Figura 5.2 – Dependência do ângulo de Wigner em função do ângulo θ entre os boosts caracterizados por α e ω	108
Figura 5.3 – A região acima da curva corresponde aos valores de v_α, v_ω tais que $\phi > \frac{\pi}{2}$, enquanto a região abaixo da curva corresponde aos valores de v_α, v_ω tais que $\phi < \frac{\pi}{2}$, para $\theta = \frac{3\pi}{4}$	109
Figura 5.4 – $S_l(\rho_{\Lambda s})$ em função de ϕ	110
Figura 5.5 – $S_l(\rho_{\Lambda s})$ em função de ξ	115
Figura 5.6 – Diferentes aspectos do estado de spin do quanton para diferentes valores de θ	118
Figura 5.7 – Os diferentes aspectos do estado de momento, dado o estado global $ \Psi_\Lambda\rangle$, para diferentes valores de θ	119
Figura 5.8 – Os diferentes aspectos dos graus de liberdade do quanton no estado $ \Xi_\Lambda\rangle$ para diferentes valores de θ	120
Figura 5.9 – Aspectos complementares do estado de spin, dado o estado global $ \Phi_\Lambda\rangle$, para diferentes valores de θ	120

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

<i>RCC</i>	Relações completas de complementariedade
<i>RIC</i>	Relações incompletas de complementariedade
<i>MQ</i>	Mecânica Quântica
<i>MC</i>	Mecânica Clássica
<i>MZ</i>	Mach-Zehnder

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	23
2	FORMALISMO MATEMÁTICO	29
2.1	POSTULADOS DA MECÂNICA QUÂNTICA	29
2.2	OPERADOR DENSIDADE	38
2.2.1	Propriedades do operador densidade	39
2.3	COERÊNCIA QUÂNTICA	41
2.4	SISTEMAS DE VÁRIAS PARTES E EMARANHAMENTO	46
2.4.1	Monótonos de emaranhamento para estados globais puros	54
3	RELAÇÕES DE COMPLEMENTARIEDADE E O OPERADOR DENSIDADE	59
3.1	RELAÇÕES INCOMPLETAS DE COMPLEMENTARIEDADE	59
3.1.1	Relação de Hilbert-Schmidt	60
3.1.2	Relação da norma-l_1	62
3.1.3	Relação baseada na entropia relativa	63
3.1.4	Relação de Wigner-Yanase	66
3.2	COMPLETANDO AS RELAÇÕES DE COMPLEMENTARIEDADE	67
3.2.1	Procedimento para o caso bipartido	70
3.2.2	Caso tripartido	73
3.2.3	Caso multipartido	76
3.2.4	Caso bipartido novamente	78
4	INCERTEZA E COMPLEMENTARIEDADE	81
4.1	RELAÇÃO ENTRE OS CRITÉRIOS DE INCERTEZA, COMPLEMENTARIEDADE E EMARANHAMENTO	82
4.2	A COMPLEMENTARIEDADE DA INCERTEZA	85
4.3	A INCERTEZA DA COMPLEMENTARIEDADE	90
4.4	MONÓTONOS DE EMARANHAMENTO A PARTIR DE RELAÇÕES DE COMPLEMENTARIEDADE	94
5	RELAÇÕES COMPLETAS DE COMPLEMENTARIEDADE E INVARIÂNCIA DE LORENTZ	99
5.1	REPRESENTAÇÕES UNITÁRIAS DO GRUPO DE POINCARÉ	100
5.1.1	Representações para estados de partículas de spin-$1/2$	103
5.1.2	Caso contínuo para partículas de spin-$1/2$	112
5.2	A INVARIÂNCIA DE LORENTZ DE RELAÇÕES COMPLETAS DE COMPLEMENTARIEDADE	115
6	CONSIDERAÇÕES FINAIS	121
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	123
	APÊNDICE A – SOBRE O PRODUTO TENSORIAL	131
	APÊNDICE B – MATRIZES POSITIVAS SEMI-DEFINIDAS	133
	APÊNDICE C – SOBRE CONVEXIDADE	137
	APÊNDICE D – MAJORIZAÇÃO, MONÓTONOS DE EMARANHAMENTO E FUNÇÕES CÔNCAVAS DE SCHUR	141
	APÊNDICE E – VERIFICAÇÃO DOS CRITÉRIOS PARA VISIBILIDADE E PREVISIBILIDADE	145
	APÊNDICE F – VARIÂNCIA DAS MATRIZES GENERALIZADAS DE GELLMANN	157
	APÊNDICE G – SOBRE OS GRUPOS DE LORENTZ E DE POINCARÉ ...	163

1 INTRODUÇÃO

Um dos aspectos mais intrigantes da mecânica quântica é a dualidade onda-partícula. Este aspecto é geralmente expresso, de forma qualitativa, pelo princípio de complementaridade de Bohr (BOHR, 1928). Tal princípio afirma que sistemas quânticos, ou quantons¹, possuem características que são igualmente reais, mas mutuamente excludentes, sendo a dualidade onda-partícula o exemplo mais conhecido deste princípio. Por exemplo, em um interferômetro de dois caminhos, como o interferômetro de Mach-Zehnder ou o interferômetro de dupla fenda, o aspecto ondulatório é caracterizado por franjas de interferência, enquanto a natureza corpuscular é dada pela informação de caminho ao longo do interferômetro, de modo que o conhecimento completo do caminho destrói o padrão de interferência e vice-versa. O primeiro cenário quantitativo da dualidade onda-partícula foi explorado por Wootters e Zurek (WOOTTERS; ZUREK, 1979), quando investigaram interferômetros nos quais se obtém informações incompletas de caminho introduzindo dispositivos de detecção de caminho, mostrando que um padrão de interferência ainda pode ser retido. Posteriormente, este trabalho foi estendido por Englert, que derivou uma relação de complementariedade (ENGLERT, 1996). No entanto, há uma outra maneira pela qual a dualidade onda-partícula foi quantificada, sem a introdução de dispositivos de detecção de caminho. Usando uma linha de raciocínio diferente, Greenberger e Yasin (GREENBERGER; YASIN, 1988) consideraram um interferômetro de dois feixes, no qual a intensidade de cada feixe não era necessariamente a mesma, e definiram uma medida de informação de caminho, denominada de previsibilidade. Assim, se o quanton que passa pelo divisor de feixe tem probabilidades diferentes de ser refletido em cada caminho, pode-se inferir qual será o caminho mais provável. Este tipo de raciocínio foi seguido por Jaeger, Shimony e Vaidmann (JAEGER; SHIMONY; VAIDMAN, 1995), sendo capturado por uma simples relação de complementariedade

$$P^2 + V^2 \leq 1, \quad (1.1)$$

onde P é a previsibilidade e V é a visibilidade do padrão de interferência. A partir da formulação quantitativa, notou-se que não apenas casos extremos são possíveis, mas também que é possível um experimento fornecer informações parciais tanto sobre a natureza ondulatória quanto sobre o aspecto corpuscular de um quanton, de modo que quanto maior a informação ele fornece sobre um aspecto do sistema, menor será a informação que o experimento pode fornecer sobre o outro. Por exemplo,

¹O termo quanton foi dado por M. Bunge. A utilidade desse termo é que podemos nos referir a um sistema quântico genérico sem usar palavras como partícula ou onda (LÉVY-LEBLOND, 2003).

em (AUCCAISE et al., 2012), os autores confirmaram que é possível medir ambos os aspectos do sistema com o mesmo aparato experimental, empregando técnicas de Ressonância Magnética Nuclear.

Recentemente, vários passos foram dados em direção à quantificação da dualidade onda-partícula por diversos autores, como Dürr (DÜRR, 2000) e Englert et al. (ENGLERT et al., 2008), que estabeleceram critérios básicos que toda medida de previsibilidade e visibilidade devem satisfazer. Da mesma forma, com o desenvolvimento do campo da informação quântica, foi sugerido que a coerência quântica (BAUMGRATZ; CRAMER; PLENIO, 2014) seria uma boa generalização da medida de visibilidade (BERA et al., 2015; BAGAN et al., 2016; QURESHI, 2019; MISHRA; VENUGOPALAN; QURESHI, 2019) para sistemas quânticos de d -níveis. Por outro lado, previsibilidade é uma medida do conhecimento sobre o estado em que um quanton se encontra. Esses estados podem representar, além dos caminhos em um interferômetro de Mach-Zehnder, os níveis de energia de um átomo (XU; TU; ZOU, 2020), ou, mais geralmente, se um determinado estado está populado ou não (HIESMAYR; VEDRAL, 2005).

Além disso, muitas direções foram tomadas a fim de obter relações de complementariedade análogas à equação (1.1) (ANGELO; RIBEIRO, 2015; COLES, 2016; BAGAN et al., 2018; ROY; QURESHI, 2019). Entre elas, destacamos (BASSO; CHRYSOSTHEMOS; MAZIERO, 2020), onde derivamos relações de complementariedade a partir da estrutura matemática da mecânica quântica, e mostramos que, para cada medida de visibilidade, é possível definir uma medida de previsibilidade, obtendo assim várias relações de complementariedade. No entanto, relações de complementariedade como da equação (1.1) são saturadas apenas para estados quânticos puros. Já, para estados mistos, o lado esquerdo é sempre menor que 1. Como ressaltado em (QIAN et al., 2020), relações de complementariedade expressas através da Eq. (1.1) não prevêem realmente um intercâmbio equilibrado entre P e V , uma vez que a desigualdade permite uma diminuição de V , através de um processo de decoerência, sem necessariamente que haja um aumento correspondente em P . Tais relações até permitem o caso extremo em que $P = V = 0$ ocorra enquanto, em uma configuração experimental, ainda temos um sistema quântico em mãos. Consequentemente, nenhuma informação sobre os aspectos ondulatório e corpuscular do sistema pode ser obtida.

Entretanto, como notado por Jakob e Bergou (JAKOB; BERGOU, 2010), essa falta de conhecimento sobre o sistema se deve a outra característica quântica intrigante: o emaranhamento (BRUSS, 2002). Isso significa que a informação está sendo compartilhada com outro sistema e este tipo de correlação quântica pode ser vista como responsável pela perda de pureza de cada subsistema de tal forma que, para estados maximamente emaranhados, não é possível obter informações sobre as propriedades locais (ondulatórias e corpusculares) dos subsistemas. Como mostrado por

esses autores, a Concurrence (WOOTTERS, 1998) é reconhecida como a medida de correlação quântica apropriada em um estado bipartido de dois qubits que completa a relação (1.1). Tal relação é denominada de relação completa de complementariedade (RCC), uma vez que, em (QIAN; VAMIVAKAS; EBERLY, 2018), os autores interpretaram a adição de uma medida de emaranhamento conveniente à Eq. (1.1) como completando a relação de complementariedade, transformando assim a desigualdade em uma igualdade. Jakob e Bergou estenderam esta ideia para sistemas bipartidos compostos de dimensão arbitrária (JAKOB; BERGOU, 2006; JAKOB; BERGOU, 2007), sugerindo que deve existir uma relação complementar entre as informações das propriedades locais de cada subsistema e o emaranhamento do sistema composto, e mostraram que I-Concurrence (RUNGTA et al., 2001) é a medida de correlação quântica que completa a relação (1.1) para estados puros bipartidos compostos.

Assim, nessa dissertação nos propomos a explorar os diversos aspectos das relações de complementariedade. Primeiro, no capítulo 2, nos ocuparemos tanto em estabelecer os postulados da mecânica quântica quanto em apresentar as principais ideias e ferramentas que serão necessárias nos capítulos que se seguirão. No capítulo 3, iremos explorar as propriedades do operador densidade, e derivar limites superiores para a coerência quântica de Hilbert-Schmidt (MAZIERO, 2017b) de um qudit (por exemplo, um interferômetro com d -caminhos) em termos das entropias linear e de von Neumann do estado incoerente mais próximo. Tais desigualdades obtidas, como veremos, permitem obter relações de complementariedade entre a coerência e a previsibilidade, no qual a previsibilidade é quantificada através de medidas entrópicas uma vez que a entropia está ligada à medida de incerteza sobre uma variável aleatória antes de sua medição (NIELSEN; CHUANG, 2000), que nesse caso pode ser o caminho que a partícula rumou, ou por qual fenda ela passou. Também, iremos obter relações de complementariedade usando outras medidas de coerência bem conhecidas na literatura, como a coerência de Wigner-Yanase (YU, 2017), a coerência baseada na norma- l_1 e a coerência baseada na entropia relativa (BAUMGRATZ; CRAMER; PLENIO, 2014), cada uma com sua respectiva medida de previsibilidade. Além disso, mostraremos que é possível obter relações completas de complementariedade equivalentes àquelas obtidas em (JAKOB; BERGOU, 2007), explorando a pureza de um sistema quântico de duas partes (BASSO; MAZIERO, 2020b). Esse procedimento nos permitirá estender o trabalho feito por Jakob e Bergou e obter RCC para subsistemas que fazem parte de um sistemas quântico puro multipartido, no qual a medida de correlação é equivalente a Concurrence generalizada, definida em (BHASKARA; PANIGRAHI, 2017).

Ademais, no capítulo 4, discutiremos a relação entre complementariedade e incerteza de um observável, uma vez que Luo, em (LUO, 2005b), propôs uma de-

composição da incerteza ² em suas partes clássica e quântica, estabelecendo critérios que qualquer medida de incerteza clássica e incerteza quântica devem satisfazer. Para isso, lembremos que fenômenos quânticos são manifestamente imprevisíveis. Enquanto a incerteza clássica surge da ignorância que temos sobre a preparação do sistema, a incerteza quântica é intrínseca. Mesmo para estados quânticos puros, que representam o conhecimento máximo sobre a preparação de um estado que um experimentador pode ter, só é possível fazer previsões probabilísticas. No entanto, como apontado por Luo, a principal observação é que a informação de assimetria de Wigner-Yanase (WIGNER; YANASE, 1963) pode ser interpretada como uma medida de incerteza quântica, enquanto que a incerteza clássica pode ser capturada pela diferença entre a variância total e a incerteza quântica quantificada pela informação de Wigner-Yanase. A partir disso, abordaremos as relações entre os critérios de Luo para incerteza quântica e clássica e os critérios de Dürr e Englert et al. para medidas de visibilidade, assim como os critérios para medidas de emaranhamento (BRUSS, 2002). Também discutiremos a relação entre emaranhamento e medidas de incerteza clássica locais, bem como a relação entre coerência quântica e quantificadores de incerteza quântica, obtendo uma relação completa de complementaridade para incerteza quântica, incerteza clássica e previsibilidade. A incerteza quântica total de um interferômetro d -caminhos é mostrada ser equivalente à coerência de Wigner-Yanase e a incerteza clássica correspondente é mostrada ser um quantificador de emaranhamento.

Por fim, no capítulo 5, estudaremos as relações completas de complementaridade e sua invariância frente transformações de Lorentz, uma vez que há bastante interesse de como o processamento, armazenamento e distribuição de informação quântica e também, como um dos seus principais recursos, o emaranhamento, se comportam em cenários relativísticos (CZACHOR, 1997; ALSING; MILBURN, 2002; PERES; TERNO, 2004; GINGRICH; ADAMI, 2002; TERASHIMA; UEDA, 2003). Por exemplo, foi mostrado por Peres, Scudo e Terno (PERES; SCUDO; TERNO, 2002) que a entropia de emaranhamento de uma partícula massiva de spin-1/2 não permanece invariante frente às transformações de Lorentz. Como ressaltado por Palge e Dunningham (PALGE; DUNNINGHAM, 2015), o emaranhamento sob transformações de Lorentz é altamente dependente da geometria do boost³ em questão. Além disso, os boosts de Lorentz podem ser considerados como operações quânticas controladas onde o momento desempenha o papel do sistema de controle, enquanto que o spin pode ser tomado como o qubit alvo, conforme argumentado em (DUNNINGHAM; PALGE; VEDRAL, 2009). Assim, embora a entropia de emaranhamento não perma-

²Onde a incerteza é quantificada pela variância de um observável.

³Um boost de Lorentz corresponde a uma transformação de Lorentz que liga dois referenciais inerciais se movendo com velocidade relativa constante entre si.

neça invariante sob transformações de Lorentz, e nem as medidas de previsibilidade e coerência, mostraremos que essas três medidas juntas, ou seja, que as CCR's, pelo menos para um trio de medidas em específico, são invariantes de Lorentz, dado que o subsistema em questão faça parte de um sistema multipartido puro (BASSO; MAZIERO, 2020a).

2 FORMALISMO MATEMÁTICO

A mecânica quântica (MQ) foi elaborada a fim de descrever sistemas atômicos e subatômicos, sua estrutura e evolução temporal. Naturalmente, a MQ deve desempenhar o mesmo papel da mecânica clássica (MC), uma vez que tal teoria surgiu da incapacidade da mecânica clássica para descrever tais fenômenos. Portanto, é razoável que a MQ responda às mesmas perguntas que a MC. Isto é, como descrever matematicamente o estado de um sistema em um determinado momento? Dado este estado, como podemos determinar o valor de quantidades observáveis? Como descrever a evolução temporal do sistema em questão? Na MC, o estado de um sistema é especificado pelos valores de posição e velocidade (ou momento linear) em certo instante de tempo, uma vez estabelecido um referencial. Formalmente, um estado de um sistema na MC é descrito por um ponto no espaço de fase. Também, na MC, os valores dos observáveis estão implicitamente determinados antes mesmo de serem medidos, e todos os observáveis em questão possuem valores bem definidos em um determinado instante de tempo de modo que podem ser preditos com probabilidade igual a 1. Por fim, a evolução temporal do sistema pode ser descrita de várias maneiras, por exemplo: pela segunda lei de Newton ou pelas equações de Hamilton. Já a MQ responde essas perguntas de maneira radicalmente diferente. Assim, neste capítulo nos ocuparemos tanto em estabelecer os postulados da MQ quanto em apresentar as ferramentas e principais ideias que serão necessárias nos próximos capítulos. Esse capítulo é majoritariamente guiado pelas seguintes referências: (AULLETTA; FORTUNATO; PARISI, 2009; MELO; CHAVES, 2019; NIELSEN; CHUANG, 2000; BERGOU; HILLERY, 2013).

2.1 POSTULADOS DA MECÂNICA QUÂNTICA

A física tem como objetivo descrever a Natureza da forma mais precisa possível. Como tal, é razoável (ou até obrigatório) considerar experimentos como guias norteadores para definir os principais aspectos da teoria. Por exemplo, a partir do famoso experimento da dupla-fenda, devemos levar em consideração que, quaisquer que sejam os postulados da teoria a fim de descrever sistemas quânticos, eles devem permitir fenômenos de interferência, e portanto, algum tipo de superposição entre os estados, como também descrever situações no qual essa interferência não é observada. Assim, uma maneira de levar isso em conta é descrever o estado do sistema

quântico através de um vetor em um espaço de Hilbert \mathcal{H}^1 . Uma das características desse espaço vetorial é que qualquer combinação linear de vetores também pertence a \mathcal{H} , permitindo a superposição de estados (AULETTA; FORTUNATO; PARISI, 2009). Esta superposição de estados é crucial para explicar os padrões de interferência em experimentos de múltiplas fendas, que de outra forma não podem ser explicados pela física clássica.

Postulado 1. *O estado de um sistema quântico é descrito por um vetor normalizado $|\psi\rangle$ em um espaço de Hilbert \mathcal{H} .*

Mais rigorosamente, qualquer estado $|\psi\rangle$ multiplicado por uma fase global, ou seja, por um número complexo do tipo $z = e^{i\theta}$ descreve as mesmas propriedades (probabilidades) do sistema. Isso motiva a introdução de uma relação de equivalência \sim , i.e., dois vetores $|\phi\rangle, |\psi\rangle \in \mathcal{H}$ pertencem a mesma classe de equivalência, $|\psi\rangle \sim |\phi\rangle$, se $|\phi\rangle = e^{i\theta} |\psi\rangle$. Assim, as classes de equivalência de $\mathcal{H} \setminus \{0\}^2$ determinam o espaço de estados do sistema quântico em questão, sendo denominado de espaço de Hilbert projetivo. A classe de equivalência de um estado $|\psi\rangle$ é denominada de raio. No entanto, nesta dissertação nos referimos ao estado de um sistema quântico como um vetor normalizado no espaço de Hilbert \mathcal{H} . Também, neste trabalho, nos restringimos majoritariamente a espaços de Hilbert finitos $\mathcal{H} \simeq \mathbb{C}^d$, i.e., \mathcal{H} é isomórfico ao corpo dos números complexos \mathbb{C}^d , onde $d > 1 \in \mathbb{N}$. Assim, para qualquer grau de liberdade de um dado sistema, pode-se definir um espaço \mathcal{H} com produto interno $\langle \cdot | \cdot \rangle$, cuja dimensão é determinada pelas propriedades do sistema. Por exemplo, em experimentos de Stern e Gerlach, quantons que possuem graus de liberdades internos, no caso, o spin, quando atravessam uma região com um gradiente de campo magnético, em uma determinada direção, são defletidos em feixes discretos. Partículas de spin-1/2, como o elétron, são defletidas em dois feixes bem separados (NAPOLITANO; SAKURAI, 2017). Portanto, $\mathcal{H} = \mathbb{C}^2$ e temos um sistema quântico de dois níveis, também chamado de qubit. Na base computacional, o estado de um qubit pode ser escrito como $|\psi\rangle = a_0 |0\rangle + a_1 |1\rangle$, com $a_0, a_1 \in \mathbb{C}$ tal que $|a_0|^2 + |a_1|^2 = 1$.

Além disso, um aspecto fundamental de qualquer teoria física é a medição das propriedades do sistema de interesse, como posição, momento angular, energia, spin, etc. Na MQ, quantidades observáveis são representadas por operadores hermitianos ($X = X^\dagger$) definidos em \mathcal{H} , que, por sua vez, podem ser escritos em termos da decomposição espectral, i.e., $X = \sum_j x_j |x_j\rangle\langle x_j|$, onde seus autovetores $|x_j\rangle$ formam uma base ortonormal em \mathcal{H} e os autovalores correspondentes são reais. Assim, ao medirmos um observável, obteremos um dos seus possíveis autovalores de modo

¹Consideraremos um espaço de Hilbert \mathcal{H} como sendo um espaço vetorial finito ou infinito munido de um produto interno $\langle \cdot | \cdot \rangle$ no qual toda sequência de Cauchy formada pelos elementos de \mathcal{H} converge para um elemento de \mathcal{H} .

² $\mathcal{H} \setminus \{0\}$ denota o espaço de Hilbert \mathcal{H} sem a origem.

que o estado do sistema após a medida é projetado no autovetor normalizado correspondente ao autovalor obtido. No entanto, como sabemos, a probabilidade de obter qualquer um dos possíveis resultados, em geral, não é igual a 1, exceto se prepararmos o sistema em um dos autovetores do observável que queremos medir. Assim, a MQ nos fornece as frequências relativas com que esses resultados são obtidos via regra de Born.

Postulado 2. *Um observável físico é descrito por um operador hermitiano X em \mathcal{H} , de modo que a probabilidade de medir um autovalor x_j , dado que o sistema está no estado $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$, é dada pela regra de Born:*

$$Pr(x_j, \psi) := |\langle x_j | \psi \rangle|^2, \quad (2.1)$$

de modo que o estado pós-medida é descrito por

$$\frac{P_j |\psi\rangle}{\|P_j |\psi\rangle\|},$$

onde $P_j := |x_j\rangle\langle x_j|$ é o projetor no subespaço gerado por $|x_j\rangle$.

Assim, é possível entender o motivo pelo qual exige-se que os vetores de estado são normalizados, uma vez que, escrevendo o estado $|\psi\rangle$ na base de autovetores do observável X , temos

$$\begin{aligned} 1 &= \langle \psi | \psi \rangle = \left(\sum_j a_j |x_j\rangle \right)^\dagger \left(\sum_k a_k |x_k\rangle \right) = \sum_{j,k} a_j^* a_k \langle x_j | x_k \rangle \\ &= \sum_{j,k} a_j^* a_k \delta_{jk} = \sum_j |a_j|^2 = \sum_j |\langle x_j | \psi \rangle|^2 \\ &= \sum_j Pr(x_j, \psi), \end{aligned} \quad (2.2)$$

ou seja, a soma das probabilidades de obter algum resultado deve ser igual a 1. Ainda, fazendo o caminho inverso, podemos ver que

$$1 = \sum_j Pr(x_j, \psi) = \sum_j |\langle x_j | \psi \rangle|^2 = \sum_j \langle \psi | x_j \rangle \langle x_j | \psi \rangle = \langle \psi | \left(\sum_j |x_j\rangle\langle x_j| \right) | \psi \rangle$$

implica em $\sum_j |x_j\rangle\langle x_j| = \sum_j P_j = \mathbb{I}_{\mathcal{H}}$, onde $\mathbb{I}_{\mathcal{H}}$ é o operador identidade em \mathcal{H} . Ou seja, projetores de um determinado observável dividem o espaço de Hilbert \mathcal{H} do sistema em subespaços ortogonais gerados por cada autovetor do operador X e, portanto, os projetores de um observável varrem todo espaço de Hilbert associado ao sistema. Até agora, discutimos apenas resultados de medidas e suas respectivas probabilidades. No entanto, uma vez obtidas as probabilidades, o valor médio (esperado) do

observável X , dado que o sistema está no estado $|\psi\rangle$, é dado pela média ponderada:

$$\begin{aligned} \sum_j x_j Pr(x_j, \psi) &= \sum_j x_j \langle \psi | x_j \rangle \langle x_j | \psi \rangle = \langle \psi | \left(\sum_j x_j |x_j\rangle \langle x_j| \right) | \psi \rangle \\ &= \langle \psi | X | \psi \rangle := \langle X \rangle_\psi. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Portanto, os observáveis físicos desempenham o papel de variáveis aleatórias, dentro do contexto da teoria de probabilidades. Os autovalores estão relacionados aos possíveis valores do observável e, como esperado, são números reais. E a decomposição espectral contém todas as informações sobre os possíveis valores da quantidade física X , e também sobre os projetores associados a esses valores.

Por fim, devemos abordar a dinâmica de sistemas quânticos. Assim como na dinâmica clássica, a equação que dita a evolução do sistema não pode ser derivada de "primeiros princípios", no entanto é possível seguir alguns critérios norteadores, além de resultados experimentais que devem ser levados em consideração. Por exemplo, dado o estado do sistema $|\psi(t)\rangle$ no instante t , a equação que dita a dinâmica deve ser capaz de informar o estado do sistema em qualquer outro instante de tempo. Isso implica que a equação de movimento deve ser uma equação diferencial de primeira ordem, i.e., $d_t |\psi(t)\rangle = A |\psi(t)\rangle$, onde A é algum operador linear em \mathcal{H} . Também, A deve estar ligado ao gerador de translações temporais. No entanto, sabemos da MC que tal gerador é a hamiltoniana H (LEMOS, 2007). Logo, A deve ser uma função do operador hamiltoniano: $A = f(H)$. Ademais, se o sistema em questão é composto por dois subsistemas não interagentes, com hamiltonianas H_1 e H_2 , então a dinâmica de um dos subsistemas não influencia a dinâmica do outro. Matematicamente, isso é expresso através da linearidade de f : $f(H_1 + H_2) = f(H_1) + f(H_2)$. Logo, resta que $f(H) = \alpha H$, com $\alpha \in \mathbb{C}$. Por fim, é razoável (ou até, obrigatório) supor que a evolução preserve as probabilidades, o que implica que a norma dos vetores de estados devem ser preservadas. Assim,

$$\begin{aligned} 0 &= d_t \langle \psi(t) | \psi(t) \rangle = (d_t \langle \psi(t) |) | \psi(t) \rangle = \langle \psi(t) | (d_t | \psi(t) \rangle) \\ &= \langle \psi(t) | (\alpha^* H + \alpha H) | \psi(t) \rangle, \end{aligned} \quad (2.4)$$

onde usamos o fato de que $H = H^\dagger$, uma vez que o operador hamiltoniano está associado à energia do sistema, dado que o sistema seja um sistema fechado. Para a equação acima ser satisfeita é necessário que $\alpha = -\alpha^*$, ou seja, α é um imaginário puro. Definindo sugestivamente $\alpha := 1/i\beta$, com $\beta \in \mathbb{R}$, obtemos

$$i\beta d_t |\psi(t)\rangle = H |\psi(t)\rangle. \quad (2.5)$$

Por análise dimensional, é possível concluir que β deve ter dimensão de momento

angular [Joule \times segundo], sendo possível determinar seu valor através de resultados experimentais de modo que $\beta = \hbar := h/2\pi$, onde h é a constante de Planck. Por exemplo, se o hamiltoniano é independente do tempo, a equação (2.5) pode ser integrada de modo que a solução é dada por

$$|\psi(t)\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}Ht} |\psi(0)\rangle, \quad (2.6)$$

sendo possível ver que $U(t) := e^{-\frac{i}{\hbar}Ht}$, denominado de operador de evolução, é um operador unitário ($U^{-1} = U^\dagger$), uma vez que H é um operador hermitiano. Ademais, para casos mais gerais, também é possível descrever a evolução do sistema através de um operador unitário, no entanto a forma de tal operador não é dada implicitamente pela Eq. (2.6).

Postulado 3. *A dinâmica de um sistema quântico é descrita por uma transformação unitária:*

$$|\psi(t)\rangle = U(t) |\psi(0)\rangle, \quad (2.7)$$

com $U(t)$ satisfazendo a equação (2.5).

Estabelecidos os postulados que respondem às perguntas feitas no início deste capítulo, consideremos o seguinte exemplo:

Exemplo 1. *Interferômetro de Mach-Zehnder (MZ) e a dualidade onda-partícula. Na MC, a distinção entre partícula e onda é nítida: partículas são localizadas numa determinada região do espaço, idealmente "puntual", isto é, sem estrutura interna e com posição e momento bem definidos, o que implica numa trajetória bem definida; já, ondas, idealmente, estendem-se por todo o espaço-tempo, sendo matematicamente descrita por um campo (escalar, vetorial, tensorial, etc), carregando momento e energia. Já, na mecânica quântica, isto representa dois casos extremos de um espectro de comportamentos de sistemas quânticos; ou seja, quantons podem apresentar tanto comportamento ondulatório quanto corpuscular, ou uma mistura dos dois. Isso não quer dizer que quantons (elétrons, etc) são ondas ou partículas, mas que apresentam tais comportamentos clássicos.*

Assim, para descrever e quantificar a dualidade onda-partícula, consideremos um quanton (fóton, elétron, etc) em um interferômetro de Mach-Zehnder, como exemplificado na figura (2.1): inicialmente, o quanton está no estado $|i\rangle$ e incide sobre um divisor de feixes (BS1) cujo coeficiente de transmissão é $T \in \mathbb{R}$ e o coeficiente de reflexão é $R \in \mathbb{R}$ tal que $R^2 + T^2 = 1$. A ação do divisor de feixes sob o quanton é equivalente a uma transformação unitária U . Depois de BS1 o estado do quanton é descrito por

$$|i\rangle \xrightarrow{U} T|1\rangle + iR|2\rangle, \quad (2.8)$$

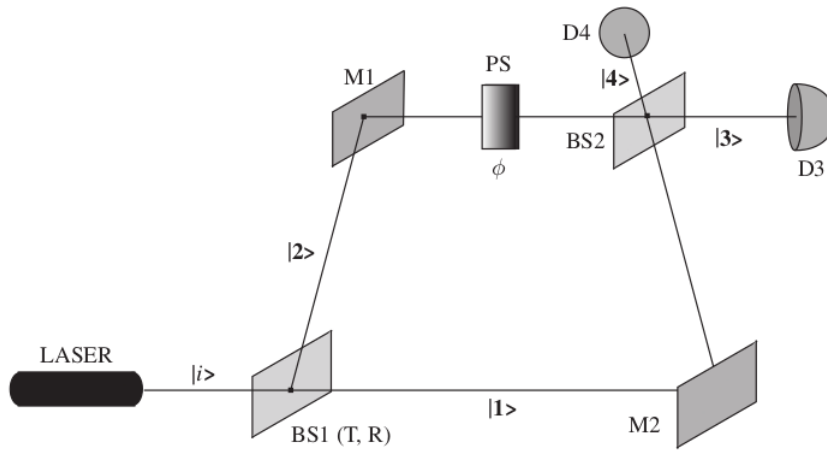


Figura 2.1 – Interferômetro de Mach-Zehnder (AULETTA; FORTUNATO; PARISI, 2009).

onde os estados $|1\rangle, |2\rangle, \dots$ fazem referência ao caminho do quanton ao longo do interferômetro, de modo que $\langle i|j\rangle = \delta_{ij}$. Assim o quanton tem uma probabilidade T^2 de ser transmitido e uma probabilidade R^2 de ser refletido com uma fase de $\pi/2$. Os espelhos M1 e M2 apenas adicionam uma fase global de $\pi/2$ enquanto o deslocador de fase³ adiciona uma fase de ϕ na componente $|2\rangle$:

$$T|1\rangle + iR|2\rangle \rightarrow iT|1\rangle - Re^{i\phi}|2\rangle. \quad (2.9)$$

Finalmente, quando o quanton incide sobre o último divisor de feixes (BS2), cujos coeficientes de transmissão e reflexão são iguais, i.e., $R = T = 1/\sqrt{2}$, temos que

$$|1\rangle \xrightarrow{U} \frac{1}{\sqrt{2}}(i|3\rangle + |4\rangle), \quad (2.10)$$

$$|2\rangle \xrightarrow{U} \frac{1}{\sqrt{2}}(|3\rangle + i|4\rangle), \quad (2.11)$$

de modo que o estado final do quanton após BS2 é dado por

$$|f\rangle = -\frac{1}{\sqrt{2}}(T + Re^{i\phi})|3\rangle + \frac{i}{\sqrt{2}}(T - Re^{i\phi})|4\rangle. \quad (2.12)$$

Assim, as probabilidades de detectar o quanton nos detectores D3 e D4 são dadas pela regra de Born:

$$Pr(D3) = |\langle 3|f\rangle|^2 = \frac{1}{2} + TR \cos \phi \quad (2.13)$$

$$Pr(D4) = |\langle 4|f\rangle|^2 = \frac{1}{2} - TR \cos \phi. \quad (2.14)$$

³O deslocador de fase nesse caso pode ser simplesmente o fato de que um braço do interferômetro é maior do que o outro.

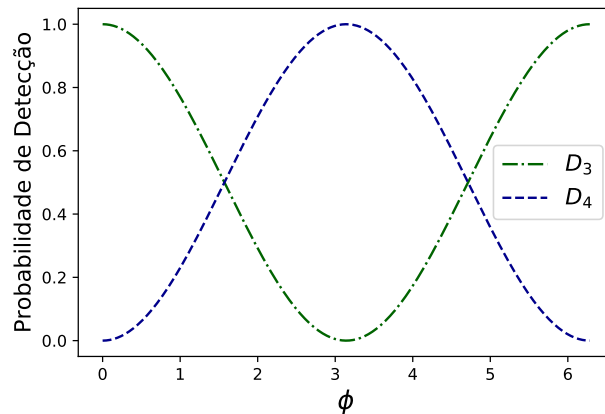


Figura 2.2 – Probabilidade de detecção em D3 e D4 em função de ϕ .

Analisando as expressões, podemos ver que:

- se $T = 0$ ou 1 (correspondentemente $R = 1$ ou 0), então o caminho é perfeitamente determinado de modo que $Pr(D3) = Pr(D4) = 1/2$. Note que, repetindo o experimento inúmeras vezes, o quanton chegará metade das vezes em D3 e metade das vezes em D4, mas como $T = 0$ ou 1 , sabemos exatamente o caminho tomado pelo quanton.
- se $T = R = 1/\sqrt{2}$, temos interferência, não sendo possível determinar o caminho. No caso em que $\phi = 0$, por exemplo, então $P(D3) = 1$ e $P(D4) = 0$.
- se $T \in (0, 1/\sqrt{2})$ ou $T \in (1/\sqrt{2}, 1)$, temos uma gama de possibilidades no qual informação parcial de caminho e interferência estão presentes simultaneamente.

Essa gama de possibilidades pode ser quantificada através de uma relação entre visibilidade (aspecto ondulatório) e previsibilidade⁴ (informação de caminho). Por exemplo, a interferência pode ser melhor analisada se repetirmos inúmeras vezes o experimento variando a fase ϕ de modo a obter a figura 2.2. Como a intensidade de quantons em cada detector é proporcional as probabilidades de detecção, podemos definir a visibilidade⁵ como

$$V := \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}} = \frac{Pr(D3)_{max} - Pr(D3)_{min}}{Pr(D3)_{max} + Pr(D3)_{min}} = 2TR. \quad (2.15)$$

Já a previsibilidade (como o próprio nome sugere) pode ser entendida como a probabilidade de prever (ou adivinhar) corretamente o caminho do quanton. Assim, consideremos o estado do quanton após o primeiro divisor de feixe. Como vimos anteriormente, se $T = 0$ ou 1 , sabemos com probabilidade igual a 1 o caminho, enquanto

⁴Ou também predictibilidade.

⁵Em analogia as franjas de interferência que possuem contraste, como exemplificado pela figura 2.3.

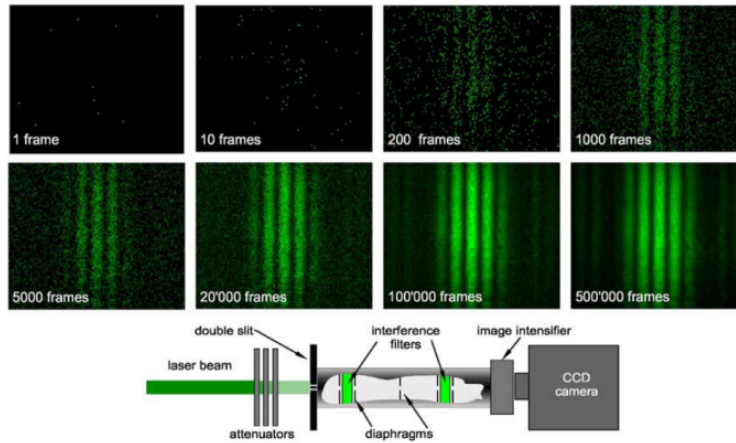


Figura 2.3 – Contraste das franjas de interferência (DIMITROVA; WEIS, 2008)

que, se $T = R = 1/\sqrt{2}$, i.e., se o quanton tiver probabilidade igual de ser refletido ou transmitido no BS1, a nossa capacidade de prever o caminho é nula. Logo, podemos ver que a preditibilidade deve ser uma função das probabilidades de transmissão e reflexão. Uma possível definição é dada por

$$P := |T^2 - R^2|, \quad (2.16)$$

que implica na relação de complementariedade $P^2 + V^2 = 1$, obtida por Greenberger e Yasin (GREENBERGER; YASIN, 1988). Além disso, vale ressaltar que a previsibilidade é o módulo do valor esperado do operador σ_3 , que mede o caminho tomado pelo quanton, associando ao autovalor 1 o caminho $|1\rangle$, e ao autovalor -1 , o caminho $|2\rangle$. Enquanto, a visibilidade é o módulo do valor esperado do operador $\sigma_+ = \sigma_1 + i\sigma_2$, uma vez que o único elemento não-nulo desta matriz está fora da diagonal principal, sendo associada à interferência entre os dois estados, onde $\{\sigma_i\}_{i=1}^3$ são as matrizes de Pauli. Para ver isso, lembremos que

$$\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \sigma_+ = 2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.17)$$

enquanto que o estado após BS1 é dado por $|\psi\rangle = T|1\rangle + iR|2\rangle$. Logo,

$$\begin{aligned} P &= \left| \langle \sigma_3 \rangle_\psi \right| = \left| \langle \psi | \sigma_3 | \psi \rangle \right| = \left| (T \langle 1| - iR \langle 2|) \sigma_3 (T|1\rangle + iR|2\rangle) \right| \\ &= \left| (T \langle 1| - iR \langle 2|) (T|1\rangle - iR|2\rangle) \right| \\ &= |T^2 - R^2|, \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
 V &= \left| \langle \sigma_+ \rangle_\psi \right| = \left| \langle \psi | \sigma_+ | \psi \rangle \right| = 2 \left| (T \langle 1 | - iR \langle 2 |) \sigma_+ (T | 1 \rangle + iR | 2 \rangle) \right| \\
 &= 2 \left| (T \langle 1 | - iR \langle 2 |) (iR | 1 \rangle) \right| \\
 &= 2TR.
 \end{aligned}$$

Por fim, vale ressaltar que, se ao invés de um interferômetro de MZ, usássemos um interferômetro de fenda dupla, a análise seria análoga. O estado logo após BS1 seria equivalente ao estado após a fenda dupla e variar ϕ é equivalente a variar a posição no qual analisamos as colisões no anteparo, i.e., a diferença de fase em um experimento de fenda dupla é dada pela diferença de caminhos percorridos pelo quanton ao sair de cada fenda.

Para terminar esta breve revisão sobre os postulados da mecânica quântica, devemos ainda mencionar como lidar com sistemas compostos: suponhamos que para um sistema A atribuímos o espaço de Hilbert \mathcal{H}_A , e a um sistema B atribuímos o espaço de Hilbert \mathcal{H}_B . Qual espaço devemos atribuir ao sistema composto AB ? Para começar, vamos considerar que os dois sistemas não interagem um com o outro, e que é possível manipular os sistemas A e B separadamente. Assim, se o estado do sistema A é descrito por $|\psi\rangle \in \mathcal{H}_A$ e medimos o observável $X = \sum_j x_j |x_j\rangle\langle x_j|$, analogamente, dado que o estado do sistema B é descrito por $|\phi\rangle \in \mathcal{H}_B$ e medimos o observável $Y = \sum_k y_k |y_k\rangle\langle y_k|$, espera-se que não haja correlações entre eles, i.e., a probabilidade conjunta de obter o valor x_j e y_k é o produto das probabilidades individuais:

$$Pr(x_j, y_k | \psi, \phi) = Pr(x_j, \psi) Pr(y_k, \phi). \quad (2.18)$$

Este resultado para sistemas não correlacionados sugere algum tipo de produto entre os espaços individuais \mathcal{H}_A e \mathcal{H}_B . Além disso, para preparações independentes dos sistemas A e B , devemos ter um mapa $\mathcal{H}_A \times \mathcal{H}_B \rightarrow \mathcal{H}_{A,B}$, onde $\mathcal{H}_{A,B}$ é o espaço de Hilbert composto do sistema AB . Para variáveis aleatórias clássicas emprega-se o produto cartesiano.⁶ No entanto, como as probabilidades na mecânica quântica são obtidas a partir do produto escalar, o produto cartesiano entre os espaços individuais implicaria na soma das probabilidades de maneira que somos levados a considerar o produto tensorial dos espaços individuais, uma vez que é a estrutura matemática que reproduz a equação (2.18) (MELO; CHAVES, 2019). Assim, se o sistema quântico em questão for composto por vários subsistemas, seu estado é descrito por um vetor normalizado $|\psi\rangle$ no espaço de Hilbert composto que é obtido tomando-se o produto tensorial dos espaços de cada subsistema, i.e., $\mathcal{H}_{AB\dots} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B \dots$. Além disso,

⁶Por exemplo, dado dois sistemas S e S' , o estado de tal sistema é caracterizado pela posição e momento de ambos (x, p, x', p') , de modo que o espaço de fase pode ser identificado com $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$.

a dimensão do espaço composto cresce com o produto das dimensões individuais: $\dim(\mathcal{H}_{AB\dots}) = \dim(\mathcal{H}_A)\dim(\mathcal{H}_B)\dots$, enquanto que a dimensão de um espaço vetorial construído pelo produto cartesiano é dado pela soma das dimensões dos espaços individuais. Isso significa que há mais configurações possíveis para estados de um sistema na MQ em comparação à MC.⁷ A definição de produto tensorial entre espaços vetoriais e suas propriedades é revisada no apêndice A.

2.2 OPERADOR DENSIDADE

Considere a seguinte situação: quando pressionamos um botão em uma máquina, ela prepara com probabilidade p_1 um sistema quântico no estado $|\psi_1\rangle$, com probabilidade p_2 ela prepara o estado $|\psi_2\rangle$, e assim por diante até a n -ésima preparação $|\psi_n\rangle$ que acontece com probabilidade p_n , onde $p_i \geq 0 \forall i = 1, \dots, n$ e $\sum_i p_i = 1$. Em cenários como este, que denominamos de mistura estatística, a única informação de que dispomos é a existência de probabilidades de que o sistema se encontre em algum dos possíveis estados $|\psi_i\rangle$, e, portanto, é preciso descrevê-lo como uma combinação entre estes diferentes estados, dispondo apenas do conhecimento da probabilidade p_i associada a $|\psi_i\rangle$, sendo que os estados $|\psi_i\rangle$ não são necessariamente ortogonais. Por exemplo, consideremos o observável X de modo que, para cada medida de X , o sistema estará em um dos estados $|\psi_i\rangle$, $i = 1, \dots, n$. Assim, para cada conjunto de quantons no estado $|\psi_i\rangle$ para algum i , continuará valendo a regra de Born: $Pr(x_j, \psi_i) = |\langle x_j | \psi_i \rangle|^2$, de modo que a probabilidade de ocorrência do valor x_j sobre todo o ensemble $\{p_i, |\psi_i\rangle\}_{i=1}^n$ é a média dessas probabilidades, i.e.,

$$\begin{aligned} Pr(x_j, \{p_i, |\psi_i\rangle\}) &= \sum_i p_i Pr(x_j, \psi_i) = \sum_i p_i |\langle x_j | \psi_i \rangle|^2 \\ &= \sum_i p_i \langle x_j | \psi_i \rangle \langle \psi_i | x_j \rangle \\ &= \langle x_j | \left(\sum_i p_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i| \right) | x_j \rangle \\ &=: \langle x_j | \rho | x_j \rangle, \end{aligned} \tag{2.19}$$

onde $\rho := \sum_i p_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i|$ é denominado de operador (ou matriz) densidade e representa a descrição do sistema dado o conhecimento que temos sobre sua preparação.⁸ A matriz densidade nos permite descrever situações, como a que descrevemos acima,

⁷Como ressaltado por alguém famoso, embora não exatamente no contexto de produto tensorial: "there's a lot of room left in Hilbert Space."

⁸A maneira usada aqui para introduzir o operador densidade, em termos de um ensemble estatístico, foi devida a John von-Neumann no contexto da mecânica estatística quântica (NEUMANN, 1927)

onde temos alguma ignorância sobre a preparação do sistema quântico. Note que temos dois tipos de incerteza, a "clássica", codificada nas probabilidades dos diferentes estados do ensemble $\{p_i, |\psi_i\rangle\}_{i=1}^n$, e a "quântica", devida ao fato de que cada estado $|\psi_i\rangle$ pode estar em uma superposição de autovetores do observável a ser medido. Ainda, vale ressaltar que a situação descrita acima não corresponde a preparar o sistema no estado $|\psi\rangle = \sum_i p_i |\psi_i\rangle$, uma vez que isso representa que a máquina sempre prepara o estado $|\psi\rangle$ com probabilidade igual a 1. Assim, para o cenário em que temos pleno conhecimento sobre a preparação de um sistema quântico, e temos certeza de que cada elemento do conjunto é preparado no mesmo estado quântico $|\psi\rangle$, dizemos que o estado do sistema é puro, de modo que matriz densidade associada é $|\psi\rangle \rightarrow \rho = |\psi\rangle\langle\psi|$, sendo possível notar que todo estado descrito por um vetor em \mathcal{H} corresponde a um operador densidade. No entanto, o inverso não é verdade, nem todo sistema representado por um operador densidade corresponde a um vetor em \mathcal{H} . Para isso, basta ver que não é possível construir $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$ tal que $\rho = \sum_i p_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i|$. Logo, o operador densidade é a maneira mais geral possível de descrever um sistema quântico e, portanto, no caso em que o conjunto é composto por dois ou mais estados, ou seja, quando não temos controle total sobre a preparação do sistema⁹, então dizemos que o estado do sistema é misto.

Ainda, definindo o operador linear Traço $\text{Tr} : \mathcal{L}(\mathcal{H}) \rightarrow \mathbb{C}$, onde $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ é o conjunto dos operadores lineares em \mathcal{H} , como $\text{Tr} A := \sum_{j=1}^{\dim \mathcal{H}} \langle j|A|j\rangle$, onde $\{|j\rangle\}_{j=1}^{\dim \mathcal{H}}$ é uma base ortonormal de \mathcal{H} enquanto que $A : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ é um operador linear. Considerando que a base ortonormal em questão é a base de autovetores do observável X , então

$$Pr(x_j, \{p_i, |\psi_i\rangle\}) := \text{Tr}(|x_j\rangle\langle x_j| \rho) = \sum_i \underbrace{\langle x_i|x_j\rangle}_{=\delta_{ij}} \langle x_j|\rho|x_i\rangle \quad (2.20)$$

$$= \langle x_j|\rho|x_j\rangle. \quad (2.21)$$

Analogamente, o valor esperado do observável X pode escrito como $\langle X \rangle = \text{Tr}(\rho X)$.

2.2.1 Propriedades do operador densidade

Dada a definição $\rho := \sum_j p_j |\psi_j\rangle\langle\psi_j|$, é imediato as seguintes propriedades (BERGOU; HILLERY, 2013):

1. Normalização: $\text{Tr} \rho = 1$.
2. Hermiticidade: $\rho = \rho^\dagger$.

⁹Ou quando ignoramos parte de um sistema conjunto, como veremos mais adiante.

3. Positividade semi-definida: $\rho \geq 0$, i.e., $\langle \phi | \rho | \phi \rangle \geq 0, \forall |\phi\rangle \in \mathcal{H}$ ¹⁰.

Teorema 1. *Dado que $\rho \geq 0$ então seus autovalores $\{\lambda_j\}_{j=1}^{\dim \mathcal{H}}$ são não-negativos. Ademais, dado que $\text{Tr } \rho = 1$, então $\lambda_j \in [0, 1], \forall j = 1, \dots, \dim \mathcal{H}$.*

Demonstração. Como ρ é hermitiano (uma vez que $\rho \geq 0$), então ele possui decomposição espectral em termos de seus autovetores, isto é, $\rho = \sum_j \lambda_j |\phi_j\rangle\langle\phi_j|$. Agora, por hipótese, $\langle \phi | \rho | \phi \rangle \geq 0, \forall |\phi\rangle \in \mathcal{H}$. Em particular, consideremos um autovetor arbitrário $|\phi_k\rangle$ de ρ . Logo, $\langle \phi_k | \rho | \phi_k \rangle = \sum_j \lambda_j \langle \phi_k | \phi_j \rangle \langle \phi_j | \phi_k \rangle = \sum_j \lambda_j \delta_{jk} \geq 0$ implica em $\lambda_k \geq 0, \forall k = 1, \dots, \dim \mathcal{H}$. Agora, dado $\text{Tr } \rho = \sum_j \lambda_j = 1$, e $\lambda_j \geq 0 \forall j$, é necessário que $\lambda_j \in [0, 1] \forall j = 1, \dots, d$. \square

Corolário 1. $\det \rho \geq 0$.

Demonstração. Segue imediatamente do fato que os autovalores de ρ são não negativos. \square

Teorema 2. *Uma vez que $\rho \geq 0$ e $\text{Tr } \rho = 1$, então $\rho_{jj} \in [0, 1] \forall j = 1, \dots, \dim \mathcal{H}$.*

Demonstração. Por hipótese, $\langle \phi | \rho | \phi \rangle \geq 0, \forall |\phi\rangle \in \mathcal{H}$. Em particular, consideremos a base computacional $(|j\rangle)^\dagger = (\delta_{i1} \dots \delta_{ij} \dots \delta_{i \dim \mathcal{H}})$, ou seja, a única componente não nula de $|j\rangle$ é a j -ésima linha, então $0 \leq \langle j | \rho | j \rangle = \sum_{k,l} \delta_{jk} \rho_{kl} \delta_{jl} = \rho_{jj} \forall j$. Além do mais, como $\text{Tr } \rho = \sum_j \rho_{jj} = 1$, resta que $\rho_{jj} \in [0, 1] \forall j = 1, \dots, \dim \mathcal{H}$. \square

Teorema 3. *O operador densidade é puro se, e somente se, $\text{Tr } \rho^2 = 1$.*

Demonstração. (\rightarrow) Supondo que ρ é puro, então $\exists |\psi\rangle \in \mathcal{H}$ tal que $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$. Logo, $\rho^2 = \rho$ que implica em $\text{Tr } \rho^2 = 1$. (\leftarrow) Agora, para mostrar a volta, lembremos que $\rho = \rho^\dagger$ e, portanto, possui decomposição espectral dada por $\rho = \sum_j \lambda_j P_j$, onde λ_j são os autovalores de ρ e P_j são os respectivos projetores espectrais. Assim, é de imediato que $\rho^2 = \sum_j \lambda_j^2 P_j$. Como, pelo teorema 1, $0 \leq \lambda_j \leq 1$, então $\lambda_j^2 \leq \lambda_j \forall j$, onde a igualdade só é válida para $\lambda_j = 1$ para algum j . Somando sobre todos os índices j , temos $\sum_j \lambda_j^2 \leq \sum_j \lambda_j = 1$, isto é, $\text{Tr } \rho^2 \leq \text{Tr } \rho = 1$. Mas, estamos supondo que $\text{Tr } \rho^2 = 1$, note que isso só é possível se $\lambda_j = 1$ para algum j em particular, de modo que $\lambda_k = 0 \forall k \neq j$, o que implica em $\rho = P_j$, ou seja, ρ é puro. \square

Ademais, como visto na prova acima, em geral, temos que $\text{Tr } \rho^2 \leq 1$, de modo que $\text{Tr } \rho^2$ serve como uma medida de pureza de um sistema quântico. Tal propriedade será de extrema importância no próximo capítulo, onde iremos obter relações completas de complementariedade explorando a pureza de um sistema quântico de muitas partes. Também fixada uma base de referência, como a base computacional, temos que ρ_{ii} descreve a probabilidade de um certo estado $|i\rangle$ estar populado, i.e., $\{\rho_{ii}\}_{i=1}^d$ pode

¹⁰O fato de ρ ser positivo semi-definido implica que ρ é hermitiano.

ser interpretado como uma distribuição de probabilidade clássica e os elementos ρ_{ii} são denominados de populações. Enquanto que ρ_{ij} , $i \neq j$, descreve os efeitos de interferência entre os estados $|i\rangle$ e $|j\rangle$. Assim, voltando ao exemplo 1, é possível escrever as medidas de visibilidade e previsibilidade em termos dos elementos do operador densidade, isto é,

$$V = 2|\rho_{12}|, \quad P = |\rho_{11} - \rho_{22}|, \quad (2.22)$$

sendo possível notar que a visibilidade é igual a medida de coerência quântica normalizada l_1 (BAUMGRATZ; CRAMER; PLENIO, 2014), que será discutida na próxima seção. E agora é possível entender por que a relação obtida no exemplo 1 sempre satura, i.e., $P^2 + V^2 = 1$, já que o estado preparado antes de passar no primeiro divisor de feixes é puro. Logo, podemos associar em cada etapa do interferômetro de MZ um vetor no espaço de Hilbert. No entanto, se o estado preparado, em geral, não é puro, temos que

$$\begin{aligned} P^2 + V^2 &= |\rho_{11} - \rho_{22}|^2 + 4|\rho_{12}|^2 \leq \rho_{11}^2 + \rho_{22}^2 + 2|\rho_{12}|^2 \\ &= \text{Tr } \rho^2 \\ &\leq 1, \end{aligned} \quad (2.23)$$

onde, na primeira desigualdade, usamos o fato de que $|\rho_{12}|^2 \leq \rho_{11}\rho_{22}$. Tal fato será provado mais adiante e decorre imediatamente de $\rho \geq 0$.

2.3 COERÊNCIA QUÂNTICA

Na seção anterior, vimos que os elementos da diagonal principal do operador densidade são denominados de populações e que eles estão diretamente relacionados com uma distribuição de probabilidades clássica e, portanto, com a capacidade de prever em qual estado o sistema se encontra. Enquanto isso, os elementos fora da diagonal principal descrevem superposições entre os diferentes estados e, portanto, estão ligados com o aspecto ondulatório do sistema e tais elementos são denominados de coerências. Logo, nessa seção definiremos medidas de coerência que servem para quantificar o quanto de superposição há entre os autoestados de um observável físico que formam uma base ortonormal.

Em (BAUMGRATZ; CRAMER; PLENIO, 2014), os autores estabeleceram condições mínimas que quaisquer medidas de coerência devem satisfazer. Vale aqui ressaltar que os critérios para medidas de coerência não são os mesmos critérios para medidas de visibilidade. Tanto que, como veremos mais adiante, a coerência

de Hilbert-Schmidt (ou norma- l_2) é considerada uma boa medida de visibilidade, enquanto que não satisfaz todos os critérios para uma boa medida de coerência. Ademais, a existência de superposição entre estados na descrição de uma unidade de informação¹¹ implica em importantes consequências no processamento, armazenamento e distribuição de informação, o que acabou dando origem à ciência da informação quântica. Nessas condições, a medida de coerência quantifica a existência de superposição de estados em relação a uma base convenientemente escolhida de acordo com o sistema de interesse de modo que tal propriedade exige um certo custo para que ela possa existir e pode ser visto como um tipo de recurso que é utilizado por algum protocolo. Assim, podemos considerar a coerência como um importante recurso para realização de protocolos dentro da área de informação quântica, dando origem à teoria de recursos de coerência (STRELTSOV; ADESSO; PLENIO, 2017).

Há na literatura diversas formas de se quantificar coerência (STRELTSOV; ADESSO; PLENIO, 2017). No entanto, aqui nos restringiremos a 4 medidas de coerência, sendo duas delas baseada em norma de matrizes e duas delas em termos de entropia:

1. Uma das formas de mensurar a coerência é através da distância entre ρ e o estado incoerente mais próximo, onde o estado incoerente numa base de referência é dado por $\iota = \sum_j \iota_{jj} |j\rangle\langle j|$, onde $\iota_{jj} \in [0, 1]$ e $\sum_j \iota_{jj} = 1$.

- Coerência de Hilbert-Schmidt (ou norma- l_2):

$$\begin{aligned} C_{hs}(\rho) &:= \min_{\iota \in I} \|\rho - \iota\|_{hs}^2 = \min_{\iota \in I} \sum_{j,k} |(\rho - \iota)_{jk}|^2 \\ &= \min_{\iota \in I} \sum_{j,k} |\rho_{jk} - \iota_j \delta_{jk}|^2 \\ &= \sum_{j \neq k} |\rho_{jk}|^2. \end{aligned} \quad (2.24)$$

onde $\|A\|_{hs} := \sqrt{\text{Tr } A^\dagger A} = \sqrt{\sum_{j,k} |A_{jk}|^2}$ e I é o conjunto de todos os operadores densidade incoerentes. Nesse caso, obtemos que o estado incoerente mais próximo possui os elementos da sua diagonal igual os elementos da diagonal de ρ na base de referência: $\iota_\rho = \rho_{diag} = \sum_j \rho_{jj} |j\rangle\langle j|$.

- Coerência norma- l_1 :

$$\begin{aligned} C_{l_1}(\rho) &= \min_{\iota \in I} \|\rho - \iota\|_{l_1} = \min_{\iota \in I} \sum_{j,k=1}^d |(\rho - \iota)_{jk}| = \min_{\iota \in I} \sum_{j,k=1}^d |\rho_{jk} - \iota_j \delta_{jk}| \\ &= \sum_{j \neq k} |\rho_{jk}|, \end{aligned} \quad (2.25)$$

¹¹O famigerado qubit.

onde $\|A\|_{l_1} = \sum_{j,k} |A_{jk}|$. Novamente, $\iota_\rho = \rho_{diag} = \sum_j \rho_{jj} |j\rangle\langle j|$.

2. Também é possível definir medidas de coerência através da entropia relativa, ou também, mais recentemente, a partir da entropia de Wigner-Yanase (ou Wigner-Yanase skew information) (YU, 2017):

- Coerência baseada na entropia relativa é definida como:

$$C_{re}(\rho) = \min_{\iota \in I} S_{vn}(\rho|\iota) = S_{vn}(\rho_{diag}) - S_{vn}(\rho), \quad (2.26)$$

onde $S_{vn}(\rho|\iota) := \text{Tr}(\rho \ln \rho - \rho \ln \iota)$ é a entropia relativa e $S_{vn}(\rho) := -\text{Tr} \rho \ln \rho$ é a entropia de von Neumann.

- Coerência de Wigner-Yanase:

$$\begin{aligned} C_{wy}(\rho) &:= \sum_j I_{wy}(\rho, |j\rangle\langle j|) := -\frac{1}{2} \sum_j \text{Tr}(([\sqrt{\rho}, |j\rangle\langle j|])^2) \\ &= \sum_{j,k} |\langle j|\sqrt{\rho}|k\rangle|^2 - \sum_j \langle j|\sqrt{\rho}|j\rangle^2 \\ &= \sum_{j \neq k} |\langle j|\sqrt{\rho}|k\rangle|^2, \end{aligned} \quad (2.27)$$

onde $\sum_j I_{wy}(\rho, |j\rangle\langle j|) := -\frac{1}{2} \sum_j \text{Tr}(([\sqrt{\rho}, |j\rangle\langle j|])^2)$ é a informação de Wigner-Yanase (WIGNER; YANASE, 1963).

Dentre essas medidas, como mencionado anteriormente, C_{hs} não é considerada uma boa medida de coerência pois não satisfaz a condição de não aumentar sob operações incoerentes (BAUMGRATZ; CRAMER; PLENIO, 2014). No entanto, como mostraremos, satisfaz todos os critérios para uma boa medida de visibilidade. Além disso, é interessante notar que é possível definir C_{hs} como $C_{hs}(\rho) := S_l(\rho_{diag}) - S_l(\rho)$, em analogia com $C_{re}(\rho)$, onde S_l é entropia linear que será definida mais adiante. Logo, para finalizar esta seção, enunciaremos os critérios para visibilidade e previsibilidade estabelecidos por (DÜRR, 2000; ENGLERT et al., 2008). Para visibilidade, considerando $d = \dim \mathcal{H}$, os critérios são dados por:

- V1 V deve ser uma função contínua dos elementos do operador densidade.
- V2 V deve ser invariante frente a permutações dos índices que rotulam o caminho do quanton ao longo do interferômetro (ou, de maneira mais geral, que rotulam o estado do sistema quântico).
- V3 Se $\rho_{jj} = 1$ para algum j , então V deve atingir seu valor mínimo, uma vez que o estado do quanton é conhecido.
- V4 Se ρ é puro e $\{\rho_{jj} = 1/d\}_{j=1}^d$, então V deve atingir seu valor máximo.

V5 V não pode aumentar quando o módulo de um elemento ρ_{jk} com $j \neq k$ diminui de uma quantidade infinitesimal.

V6 V deve ser uma função convexa, i.e., $V(\lambda\sigma + (1-\lambda)\eta) \leq \lambda V(\sigma) + (1-\lambda)V(\eta)$, com $0 \leq \lambda \leq 1$ e σ, η sendo matrizes densidade, uma vez que uma mistura clássica de estados quânticos, representado por $\lambda\sigma + (1-\lambda)\eta$, não é capaz de aumentar a superposição quântica do sistema.

Enquanto isso, os critérios para previsibilidade são definidos como:

P1 P deve ser uma função contínua dos elementos da diagonal do operador densidade, uma vez que os elementos diagonais representam uma distribuição de probabilidades.

P2 P deve ser invariante frente a permutações dos índices que rotulam o caminho do quanton ao longo do interferômetro (ou, de maneira mais geral, que rotulam o estado do sistema quântico).

P3 Se $\rho_{jj} = 1$ para algum j , então P deve atingir seu valor máximo, uma vez que o estado do quanton é conhecido.

P4 Se $\{\rho_{jj} = 1/d\}_{j=1}^d$, então P deve atingir seu valor mínimo, independentemente se ρ é puro ou misto, uma vez que todos os estados são equiprováveis.

P5 Se $\rho_{jj} > \rho_{kk}$ para $j \neq k$, então o valor de P não pode aumentar se as probabilidades são equalizadas. Isto é, fazendo $\rho_{jj} \rightarrow \rho_{jj} - \epsilon$ e $\rho_{kk} \rightarrow \rho_{kk} + \epsilon$, para $\epsilon \in \mathbb{R}_+$ e $\epsilon \ll 1$.

P6 P deve ser uma função convexa, i.e., $P(\lambda\sigma + (1-\lambda)\eta) \leq \lambda P(\sigma) + (1-\lambda)P(\eta)$, com $0 \leq \lambda \leq 1$ e σ, η sendo matrizes densidade, uma vez que uma mistura clássica de estados quânticos não aumenta a capacidade de previsão.

Dos critérios mencionados acima, talvez o menos óbvio (ou intuitivo) seja o critério V4. Para entendê-lo, consideremos um qubit descrito pelo operador densidade na base computacional $\rho = \sum_{j,k=0}^1 \rho_{jk} |j\rangle\langle k|$. Em geral, temos que

$$\begin{aligned}
 0 \leq 1 - \text{Tr} \rho^2 &= 1 - \sum_{j,k=0}^1 |\rho_{jk}|^2 \\
 &= 1 - \rho_{00}^2 - \rho_{11}^2 - 2|\rho_{01}|^2 \\
 &= 1 - (1 - \rho_{11})^2 - \rho_{11}^2 - 2|\rho_{01}|^2 \\
 &= 2\rho_{11}(1 - \rho_{11}) - 2|\rho_{01}|^2,
 \end{aligned} \tag{2.28}$$

onde foi usado o fato de que $\text{Tr } \rho = 1$. Da equação acima, decorre imediatamente que

$$|\rho_{01}|^2 \leq \rho_{00}\rho_{11}, \quad (2.29)$$

com a igualdade sendo válida apenas se o estado for puro. Assim, como os elementos fora da diagonal estão ligados à interferência entre os diferentes estados e tais elementos são majorados pelas populações, a fim de que visibilidade (e também medidas de coerência) atinja seu máximo, é necessário que o estado seja puro. Além do mais, $|\rho_{01}|$ atinge seu valor máximo quando $\rho_{00} = \rho_{11} = 1/2$. Para o caso geral, basta lembrar que ρ é uma matriz positiva semi-definida. O que implica que todas as suas sub-matrizes principais¹² são positivas semi-definida (ZHANG, 2011). Tal afirmação é provada no apêndice B. Por exemplo, vamos nos restringir às sub-matrizes principais 2×2 de ρ :

$$\rho_{2 \times 2} = \begin{pmatrix} \rho_{jj} & \rho_{jk} \\ \rho_{kj} & \rho_{kk} \end{pmatrix}, \quad \text{para algum } j \text{ e } k \text{ tal que } j \neq k. \quad (2.30)$$

Dado que $\rho_{2 \times 2} \geq 0$, então $\det \rho_{2 \times 2} \geq 0$, e portanto,

$$|\rho_{jk}|^2 \leq \rho_{jj}\rho_{kk}, \quad (2.31)$$

com a igualdade sendo válida apenas se ρ é puro. Assim, podemos ver que as coerências são sempre majoradas pelas populações. Ademais, vale mencionar que um estado incoerente do tipo $\iota = \sum_j \iota_{jj} |j\rangle\langle j|$ é um estado clássico. Por exemplo, poderíamos quantificar a probabilidade de obter cara ou coroa no lançamento de uma moeda através de tais operadores. De fato, podemos atribuir o surgimento de um estado clássico (mais geral, do 'mundo clássico') devido ao processo de decoerência (ZUREK, 2003). Decoerência é o processo de perda da coerência devido à interação com o ambiente (ou com o resto do universo) no sentido de que começamos com um estado $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$ puro e, devido à interação com o ambiente e possível geração de correlações entre eles, o estado de interesse acaba no estado $\iota = \rho_{diag} = \sum_j \iota_{jj} |j\rangle\langle j|$. Nesse caso, o ambiente pode ser tanto outros sistemas quânticos de interesse, que temos controle sobre, quanto sistemas no qual não temos controle.¹³ O próprio vácuo quântico pode desempenhar o papel do meio ambiente, uma vez que consiste em um conjunto infinito enumerável de modos eletromagnéticos de vibração que se acoplam a sistemas físicos. Isso significa que a informação está sendo compartilhada com ou-

¹²Uma submatriz principal de uma matriz $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ é uma matriz obtida de A eliminando-se sua k -ésima linha e sua k -ésima coluna, com $k \leq n$. É possível deletar mais de uma linha e coluna correspondente.

¹³É como se o ambiente estivesse continuamente realizando medidas sobre o sistema de interesse, de modo a apagar as superposições do sistema em questão.

tro sistema e este tipo de correlação quântica pode ser vista como responsável pela perda de pureza de cada subsistema de tal forma que, para estados maximamente emaranhados, não é possível obter informações sobre as propriedades locais¹⁴ dos subsistemas. Por isso também, exige-se que para uma medida de visibilidade atingir seu máximo, ρ deve ser puro.

2.4 SISTEMAS DE VÁRIAS PARTES E EMARANHAMENTO

No final da seção (2.1), vimos que a um sistema quântico composto de duas ou mais partes, atribuímos um espaço de Hilbert global que é dado pelo produto tensorial dos espaços de Hilbert individuais. Isso permite configurações que não são possíveis quando temos o produto cartesiano entre os espaços individuais, que normalmente temos entre sistemas clássicos. Por exemplo, consideremos um sistema composto de dois subsistemas, A e B , ao qual atribuímos o espaço de Hilbert $\mathcal{H}_{AB} \simeq \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$. Considerando bases ortonormais $\{|i\rangle_A\}_{i=0}^{\dim \mathcal{H}_A - 1}$, $\{|j\rangle_B\}_{j=0}^{\dim \mathcal{H}_B - 1}$ dos espaços $\mathcal{H}_A, \mathcal{H}_B$, respectivamente, então o produto tensorial $\{|i\rangle_A \otimes |j\rangle_B\}_{i,j=0}^{\dim \mathcal{H}_A - 1, \dim \mathcal{H}_B - 1}$ forma uma base ortonormal em \mathcal{H}_{AB} (NIELSEN; CHUANG, 2000). Se o estado do sistema como um todo é puro, então $\exists |\Psi\rangle_{A,B} \in \mathcal{H}_{AB}$ tal que

$$|\Psi\rangle_{A,B} = \sum_{i,j} a_{ij} |i\rangle_A \otimes |j\rangle_B = \sum_{i,j} a_{ij} |i, j\rangle_{A,B}, \quad (2.32)$$

com $\sum_{i,j} |a_{ij}|^2 = 1$, enquanto que o operador densidade associado à $|\psi\rangle$ é dado por

$$\rho_{AB} = \sum_{i,j,k,l} a_{ij} a_{kl}^* |i, j\rangle_{A,B} \langle k, l|, \quad (2.33)$$

e, de maneira geral, um estado misto bipartido é descrito por

$$\rho_{AB} = \sum_{i,j,k,l} \rho_{ij,kl} |i, j\rangle_{A,B} \langle k, l|. \quad (2.34)$$

Assim podemos ver que, se $\rho_{ij,kl} = a_{ij} a_{kl}^*$, então ρ_{AB} é puro. Agora, supondo que estamos interessados em medir o observável X_A do sistema A , sem medir observável algum do sistema B , então, por abuso de notação, escrevemos $X_A = X_A \otimes I_B$, onde

¹⁴Nessa dissertação, propriedades locais significa previsibilidade e visibilidade (ou coerência).

I_B é o operador identidade. Assim, o valor esperado de X_A é calculado a partir de

$$\begin{aligned}
\langle X_A \rangle &= \text{Tr}(\rho_{A,B} X_A \otimes I_B) = \sum_{m,n} \langle m, n | (\rho_{A,B} X_A \otimes I_B) | m, n \rangle_{A,B} \\
&= \sum_{m,n} \langle m, n | \left(\sum_{i,j,k,l} \rho_{ij,kl} |i, j\rangle_{A,B} \langle k, l| \right) (X_A \otimes I_B) | m, n \rangle_{A,B} \\
&= \sum_{m,n} \sum_{i,j,k,l} \rho_{ij,kl} \underbrace{\langle m | i \rangle}_{\delta_{m,i}} \underbrace{\langle n | j \rangle}_{\delta_{n,j}} \langle k | X_A | m \rangle \underbrace{\langle l | I_B | n \rangle}_{\delta_{l,n}} \\
&= \sum_{i,j,k} \rho_{ij,kj} \langle k | X_A | i \rangle, \tag{2.35}
\end{aligned}$$

o que nos motiva a definir o traço parcial sobre B :

$$\text{Tr}_B(|a\rangle_A \langle a'| \otimes |b\rangle_B \langle b'|) := |a\rangle_A \langle a'| \text{Tr}(|b\rangle_B \langle b'|) = |a\rangle_A \langle a'| \langle b|b'\rangle,$$

sendo o traço parcial um mapa linear tal que $\text{Tr}_B : \mathcal{L}(\mathcal{H}_{A,B}) \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H}_A)$ (MAZIERO, 2017a)¹⁵. Similarmente, é possível definir o traço parcial sobre A . Assim, o traço parcial mapeia o operador densidade do sistema AB em um dos operadores densidades reduzidos A ou B , i.e., $\rho_{\mathcal{X}} = \text{Tr}_{\mathcal{Y}} \rho_{\mathcal{X}\mathcal{Y}}$, $\mathcal{X}, \mathcal{Y} = A, B$. É interessante notar que a versão quântica de uma distribuição de probabilidade é um operador densidade; já, a versão quântica de marginalização é o traço parcial; enquanto, que a versão quântica de uma distribuição de probabilidade marginal é um operador densidade reduzido (BRADLEY, 2020). Assim, voltando à equação (2.35) e notando que $\sum_j \rho_{ij,kj} = \langle i | (\text{Tr}_B \rho_{AB}) | k \rangle = \langle i | \rho_A | k \rangle = \rho_{ik}^A$ é um elemento do operador densidade reduzido do sistema A , temos

$$\begin{aligned}
\langle X_A \rangle &= \sum_{i,j,k} \rho_{ij,kj} \langle k | X_A | i \rangle = \sum_{i,k} \langle i | \rho_A | k \rangle \langle k | X_A | i \rangle \\
&= \sum_i \langle i | \rho_A \left(\sum_k |k\rangle \langle k| \right) X_A | i \rangle = \sum_i \langle i | \rho_A X_A | i \rangle \\
&= \text{Tr}(\rho_A X_A), \tag{2.36}
\end{aligned}$$

onde $\text{Tr} = \text{Tr}_A$, uma vez que a equação acima não faz nenhuma menção ao subsistema B . Ou seja, se temos um sistema composto e temos acesso a uma das partes do sistemas, não é necessário continuar descrevendo a estrutura matemática do sistema que não temos acesso. Assim, se realizarmos medidas do observável X_A no sistema A , a princípio, o valor esperado de tal observável é dado por $\langle X_A \rangle = \text{Tr}(\rho_{A,B} X_A \otimes I_B)$, onde nesta expressão consideremos a estrutura matemática do sistema como um todo. Por outro lado, acabamos de mostrar que $\text{Tr}(\rho_{A,B} X_A \otimes I_B) = \text{Tr}(\rho_A X_A)$, de

¹⁵Tal definição é equivalente a definir o traço parcial sobre B como $\text{Tr}_B(A \otimes B) := \sum_b I_A \otimes \langle b | (A \otimes B) | b \rangle = A \text{Tr} B$.

modo que o lado direito apenas envolve operadores atuando em \mathcal{H}_A , e assim o sistema B pode ser ignorado por completo. Vale mencionar aqui que é possível introduzir o operador densidade através da seguinte equação $\rho_A = \text{Tr}_B |\Psi\rangle\langle\Psi|_{A,B} \Psi_{A,B}$, ou seja, a partir do descarte de parte de subsistema de um sistema composto.

Agora, consideremos $|\Psi\rangle_{A,B} \in \mathcal{H}_{AB}$ descreve um sistema composto cujo estado é produto dos estados individuais, i.e., $|\Psi\rangle_{A,B} = |\psi\rangle_A \otimes |\phi\rangle_B$, onde $|\psi\rangle_A \in \mathcal{H}_A$ e $|\phi\rangle_B \in \mathcal{H}_B$. Então é possível observar que não há correlações entre medidas realizadas nos sistemas A e B separadamente. Por exemplo, sendo X_A e Y_B observáveis de A e B , a probabilidade de obter conjuntamente os autovalores x_j e y_k é dado por

$$\begin{aligned} Pr(x_j, y_k | \Psi) &= \text{Tr} \left(|\Psi\rangle_{A,B} \langle\Psi| (|x_j\rangle\langle x_j|_A \otimes |y_k\rangle\langle y_k|_B) \right) \\ &= \sum_{m,n} \langle m, n | \left((|\psi\rangle\langle\psi|_A |x_k\rangle\langle x_k|) \otimes (|\phi\rangle\langle\phi|_B |y_k\rangle\langle y_k|) \right) |m, n\rangle_{A,B} \\ &= \left(\sum_m \langle m | (|\psi\rangle\langle\psi|_A |x_k\rangle\langle x_k|) |m\rangle \right) \left(\sum_n \langle n | (|\phi\rangle\langle\phi|_B |y_k\rangle\langle y_k|) |n\rangle \right) \\ &= \text{Tr}(|\psi\rangle\langle\psi|_A |x_k\rangle\langle x_k|) \text{Tr}(|\phi\rangle\langle\phi|_B |y_k\rangle\langle y_k|) \\ &= Pr(x_j, \psi) Pr(y_k, \phi), \end{aligned} \quad (2.37)$$

mostrando que ambos os eventos são independentes. Logo, o estado $|\Psi\rangle_{A,B} = |\psi\rangle_A \otimes |\phi\rangle_B$ é descorrelacionado e sugere a seguinte definição:

Definição 1. Um estado $|\Psi\rangle_{A,B} \in \mathcal{H}_{AB}$ é dito separável (ou descorrelacionado) se $\exists |\psi\rangle_A \in \mathcal{H}_A$ e $|\phi\rangle_B \in \mathcal{H}_B$ tal que $|\Psi\rangle_{A,B} = |\psi\rangle_A \otimes |\phi\rangle_B$.

Seja um sistema quânticos de dois qubits¹⁶ descritos na base computacional, consideremos os seguintes estados:

Exemplo 2. Um exemplo possível de estado separável é dado por

$$|\Psi\rangle_{A,B} = \frac{1}{2}(|0, 0\rangle_{A,B} + |0, 1\rangle_{A,B} + |1, 0\rangle_{A,B} + |1, 1\rangle_{A,B}), \quad (2.38)$$

uma vez que pode ser escrito como

$$|\Psi\rangle_{A,B} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle_A + |1\rangle_A) \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle_B + |1\rangle_B) = |\psi\rangle_A \otimes |\phi\rangle_B. \quad (2.39)$$

Exemplo 3. Agora, consideremos o seguinte estado:

$$|\Phi^+\rangle_{A,B} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0, 0\rangle_{A,B} + |1, 1\rangle_{A,B}). \quad (2.40)$$

Tal estado não pode ser escrito na forma $|\Phi^+\rangle_{A,B} = |\psi\rangle_A \otimes |\phi\rangle_B$, i.e., não é possível encontrar $|\psi\rangle_A \in \mathcal{H}_A$ e $|\psi\rangle_B \in \mathcal{H}_B$ tal que $|\Phi^+\rangle_{A,B} = |\psi\rangle_A \otimes |\phi\rangle_B$. Para ver isso,

¹⁶Dois sistemas de dois níveis.

basta supor que existe $|\psi\rangle_A = \alpha|0\rangle_A + \beta|1\rangle_A$ e $|\phi\rangle_B = \gamma|0\rangle_B + \delta|1\rangle_B$, tomar o produto tensorial entre os dois estados e igualar com a equação acima, de modo que obtém-se o seguinte sistema de equações

$$\alpha\gamma = 1/\sqrt{2}, \quad \alpha\delta = 0, \quad (2.41)$$

$$\beta\gamma = 0, \quad \beta\delta = 1/\sqrt{2}, \quad (2.42)$$

para o qual não há solução. Ademais, podemos ver que as medidas são correlacionadas. Também, é interessante observar que os estados reduzidos dos subsistemas são maximamente mistos, isto é, $\rho_A = \rho_B = \frac{1}{2}(|0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1|)$, sendo um estado clássico. No contexto de interferometria, por exemplo, tanto a previsibilidade quanto a coerência são nulas, não sendo possível obter nenhuma informação local dos subsistemas, vendo assim que a falta de pureza dos subsistemas (propriedades locais) está diretamente ligada à correlações entre os subsistemas, dado que o sistema global é puro. Se um dos subsistemas é um quanton no interferômetro de MZ e o outro pode ser considerado como o ambiente (ou até um detector), vemos que a informação do estado do quanton 'vazou' para o ambiente, sendo possível, em princípio, obter informações sobre o quanton de interesse, fazendo medições sobre o ambiente. Neste caso, não temos mais superposição dos estados do quanton, mas sim emaranhamento com outro subsistema.

A partir do exemplo anterior, é possível perceber uma das principais diferenças entre a MQ e a MC, isto é, que o conhecimento sobre o todo, não necessariamente implica no conhecimento completo sobre as partes, como ressaltado por Schrödinger (SCHRÖDINGER, 1935). E também, sugere a seguinte definição:

Definição 2. Se um estado puro $|\Psi\rangle_{A,B} \in \mathcal{H}_{AB}$ não é separável, então ele é dito emaranhado.

Teorema 4. Decomposição de Schmidt. Todo estado puro bipartido em \mathcal{H}_{AB} pode ser escrito na forma

$$|\Psi\rangle_{A,B} = \sum_{i=1}^{\min(d_A, d_B)} \sqrt{\lambda_i} |\psi_i\rangle_A \otimes |\phi_i\rangle_B, \quad (2.43)$$

onde $\{|\psi_i\rangle\}_{i=1}^{d_A}$, $\{|\phi_i\rangle\}_{i=1}^{d_B}$ são bases ortonormais em \mathcal{H}_A e \mathcal{H}_B , respectivamente. Além disso, $d_{\mathcal{X}} = \dim \mathcal{H}_{\mathcal{X}}$, $\mathcal{X} = A, B$.

Demonstração. Considerando uma base ortonormal $\{|\psi_i\rangle_A \otimes |j\rangle_B\}_{i,j=1}^{d_A, d_B} \in \mathcal{H}_{A,B}$, qual-

quer estado puro bipartido pode ser escrito como

$$\begin{aligned} |\Psi\rangle_{A,B} &= \sum_{i,j} a_{ij} |\psi_i\rangle_A \otimes |j\rangle_B = \sum_i |\psi_i\rangle_A \otimes \sum_j a_{ij} |j\rangle_B \\ &= \sum_i |\psi_i\rangle_A \otimes |\phi_i\rangle_B, \end{aligned} \quad (2.44)$$

onde $|\phi_i\rangle_B := \sum_j a_{ij} |j\rangle$ de modo que $|\phi_i\rangle_B$ não é necessariamente ortogonal. Sem perda de generalidade, consideremos que $d_A \leq d_B$, de modo que o somatório em i corre de 1 até d_A . Tomando o traço parcial sobre B de $\rho = |\Psi\rangle_{A,B} \langle\Psi|$, temos que o operador densidade reduzido

$$\rho_A = \sum_{i,j} \langle\phi_i|\phi_j\rangle |\psi_i\rangle\langle\psi_j| = \sum_i \lambda_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i| \quad (2.45)$$

é diagonal¹⁷ se $\langle\phi_i|\phi_j\rangle = \lambda_i \delta_{ij}$. Assim, definindo $a_{ij} := \sqrt{\lambda_i} \delta_{ij}$, temos que

$$|\Psi\rangle_{A,B} = \sum_{i=1}^{d_A} \sqrt{\lambda_i} |\psi_i\rangle_A \otimes |\phi_i\rangle_B. \quad (2.46)$$

□

Vale ressaltar que, dada a decomposição de Schmidt, o espectro de autovalores de ρ_A e ρ_B são iguais uma vez que $\rho_A = \sum_i \lambda_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i|$ e $\rho_B = \sum_i \lambda_i |\phi_i\rangle\langle\phi_i|$. A partir daí, é possível usar como critério tais autovalores para determinar se um estado puro composto é ou não emaranhado: se $\lambda_j = 1$ para algum j , e $\lambda_i = 0, \forall i \neq j$, então o estado é separável, uma vez que $|\Psi\rangle_{A,B} = |\psi_j\rangle_A \otimes |\phi_j\rangle_B$ e, portanto, ρ_A e ρ_B também são estados puros. Caso contrário, $|\Psi\rangle_{A,B}$ é um estado emaranhado, com ρ_A, ρ_B representando estados mistos. Ademais, λ_j são denominados de coeficientes de Schmidt. Agora, dado que sabemos que estados mistos podem ser gerados tomando o traço parcial de um estado bipartido puro emaranhado, é possível fazer o inverso? Isto é, dado um estado misto, é possível obter um estado puro em um espaço de Hilbert composto? A resposta a esta pergunta é positiva e é conhecida como teorema da purificação.

Teorema 5. Teorema da purificação. *Seja ρ_A uma matriz densidade atuando em \mathcal{H}_A . Então, é possível construir um segundo espaço de Hilbert \mathcal{H}_B e um estado puro $|\Psi\rangle_{A,B} \in \mathcal{H}_{AB}$ tal que $\rho_A = \text{Tr}_B |\Psi\rangle_{A,B} \langle\Psi|$.*

Demonstração. Como ρ_A é um operador hermitiano, consideremos sua decomposição espectral $\rho_A = \sum_i \lambda_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i|$, onde $|\psi_i\rangle, i = 1, \dots, d_A$ forma uma base em \mathcal{H}_A composta

¹⁷É sempre possível diagonalizar tal operador através de uma transformação unitária dado que operadores unitários levam bases ortonormais em bases ortonormais (BENGTSSON; ŻYCZKOWSKI, 2017).

pelos autovetores de ρ_A . Definindo \mathcal{H}_B como uma cópia de \mathcal{H}_A com mesma dimensão e seja $|i\rangle_B, i = 1, \dots, d_A$ base ortonormal de \mathcal{H}_B , então, pela decomposição de Schmidt, temos que $|\Psi\rangle_{A,B} = \sum_i \sqrt{\lambda_i} |\psi_i\rangle_A \otimes |i\rangle_B$ de modo que

$$\begin{aligned} \rho_A &= \text{Tr}_B |\Psi\rangle_{A,B} \langle\Psi| = \sum_{i,j} \sqrt{\lambda_i \lambda_j} |\psi_i\rangle \langle\psi_j| \underbrace{\text{Tr}(|i\rangle \langle j|)}_{\delta_{i,j}} \\ &= \sum_i \lambda_i |\psi_i\rangle \langle\psi_i|. \end{aligned} \quad (2.47)$$

□

Tal teorema é de extrema importância para obter relações completas de complementariedade, uma vez que partimos da hipótese de que é sempre possível achar um estado puro multipartido no qual o sistema de interesse faz parte. Ademais, vale ressaltar que a purificação não é única. Ou seja, existem varios estados puros multipartidos que dão o mesmo operador densidade reduzido.

Agora, voltando ao estado do exemplo 3, $|\Phi^+\rangle_{A,B} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0,0\rangle_{A,B} + |1,1\rangle_{A,B})$, e consideremos dois personagens famosos em informação quântica: Alice, de posse do qubit A , e Bob, de posse do qubit B . Supondo que Bob mede seu qubit na base computacional e obtém 0. Então o postulado da medida nos diz que a partir deste momento o estado compartilhado é $|0,0\rangle$, e o qubit de Alice passou de algo indeterminado para $|0\rangle$. Einstein se referiu a este efeito como "spooky action at a distance", e viu aí algo estranho. O que levou a seguinte pergunta: é possível transmitir informação através dessa ação fantasmagórica? Por exemplo, consideremos o seguinte protocolo: caso Bob deseje enviar o bit 0, ele deve obter o resultado 0; caso ele queira enviar 1, ele deve obter o resultado 1. Mas Bob não pode obrigar sua medição a retornar o valor desejado, uma vez que o resultado da medição é probabilístico. Além disso, Alice não tem como saber em que base Bob mediu o seu qubit a fim de medir a mesma base, a não ser que Bob comunique a ela. No entanto, nesse caso, Bob terá que usar um canal clássico para comunicar tal medida, quebrando qualquer possibilidade de comunicação superluminal. O problema é que estamos interpretando o vetor em um espaço de Hilbert como algo com realidade física, quando ele é apenas um instrumento para calcular probabilidades¹⁸. Quando dizemos que o estado de Alice colapsa para $|0\rangle$ quando Bob obtém 0, a afirmação concreta que fazemos é apenas que $Pr(a = 0|b = 0) = 1$, isto é, a probabilidade de Alice obter o valor $a = 0$ dado que $b = 0$ é igual a 1. Mas isso já sabíamos desde o começo, uma vez que sabemos o estado do sistema, pois tal estado é puro.

Teorema 6. *Medições realizadas na parte A de um sistema quântico não podem re-*

¹⁸Vale ressaltar aqui que estamos nos apoiando sobre a visão epistêmica da função de onda ou de vetores no espaço de Hilbert.

velar informações sobre medições realizadas na parte B .

Demonstração. Consideremos que Alice e Bob compartilham um estado possivelmente emaranhado $|\Psi\rangle \in \mathcal{H}_{A,B}$, e estão realizando medições com os observáveis X e Y , respectivamente. Pelo bem do argumento, vamos supor que Alice e Bob estão em planetas distintos. Então a probabilidade de Alice obter o autovalor x e Bob obter a saída y é dada por

$$Pr(x, y|X, Y) = |\langle x, y|\Psi\rangle|^2 = \langle \Psi | \left(|x\rangle\langle x| \otimes |y\rangle\langle y| \right) | \Psi \rangle, \quad (2.48)$$

mas fazendo medições localmente sem qualquer comunicação entre as partes, Alice tem acesso apenas às probabilidades marginais

$$\begin{aligned} Pr(x|X, Y) &:= \sum_y Pr(x, y|X, Y) = \sum_y \langle \Psi | \left(|x\rangle\langle x| \otimes |y\rangle\langle y| \right) | \Psi \rangle \\ &= \langle \Psi | \left(|x\rangle\langle x| \otimes \sum_y |y\rangle\langle y| \right) | \Psi \rangle \\ &= \langle \Psi | \left(|x\rangle\langle x| \otimes I_{\mathcal{H}_B} \right) | \Psi \rangle \end{aligned} \quad (2.49)$$

$$= Pr(x|X), \quad (2.50)$$

uma vez que não tem nenhuma dependência com as medições realizadas por Bob. \square

Isso não significa que não possa haver correlação entre os resultados de experimentos locais. Tal resultado também pode ser generalizado para o caso misto, nesse caso é possível mostrar que o operador densidade reduzido ρ_B permanece invariante frente à qualquer medida local em A . Nesse sentido, não é difícil perceber que a mecânica quântica é uma teoria local (MELO; CHAVES, 2019). Tal fato é abordado em (DEUTSCH, 2012). No entanto, é possível mostrar que estas correlações quânticas são mais fortes que correlações clássicas, uma vez que violam as famosas desigualdades de Bell (BELL, 1964; CLAUSER et al., 1969).

Por fim, discutimos a relação entre visibilidade e emaranhamento através de um exemplo.

Exemplo 4. Seja $|\psi_i\rangle$ a amplitude de probabilidade do sistema quântico passar pela i -ésima fenda (ou pelo i -ésimo caminho de um interferômetro de MZ), $i = 0, 1$ de modo que o estado do sistema é descrito por

$$|\psi\rangle = \sum_i a_i |\psi_i\rangle \quad (2.51)$$

tal que $\sum_{i=1}^2 |a_i|^2 = 1$. A interferência na tela (ou nos detectores) é descrita pela den-

sidade de probabilidade da partícula atingir a tela em uma particular posição x (ou chegar em um determinado detector na posição x). Isto é,

$$|\langle x|\psi\rangle|^2 = \sum_j |a_j|^2 |\langle x|\psi_j\rangle|^2 + \sum_{j \neq k} a_j^* a_k \langle x|\psi_k\rangle \langle \psi_j|x\rangle, \quad (2.52)$$

onde o segundo termo do lado direito da equação acima corresponde ao termo de interferência.

Agora, é interessante considerar que exista um detector de caminho, ou ainda, um grau de liberdade interno da partícula que evolua no tempo (e que tal evolução dependa do caminho ou da fenda) de tal maneira que este grau de liberdade se correlacione com o grau de liberdade de caminho, como em (ZYCH et al., 2011). Isto é, o detector de caminho também é um sistema quântico. Assim, a condição básica para uma medida em MQ, de acordo com von Neumann (NEUMANN, 1955), é deixar que o detector interaja com o sistema de interesse de modo que ambos se correlacionem. Matematicamente, $U(|\psi_i\rangle \otimes |\tau\rangle) \rightarrow |\psi_i\rangle \otimes |\tau_i\rangle$, onde $|\tau\rangle$ é o estado inicial do detector e U representa o operador de evolução. Sendo $|\tau_i\rangle$ os estados do grau de liberdade interno (ou do detector de caminho) após a evolução, temos que o estado total do sistema é descrito por

$$|\psi\rangle = \sum_i a_i |\psi_i\rangle \otimes |\tau_i\rangle, \quad (2.53)$$

em geral tal estado é emaranhado, o que implica que a informação sobre a amplitude de probabilidade pode ser codificada nos estados $|\tau_i\rangle$. O operador densidade associado ao estado do sistema é

$$\begin{aligned} \rho &= \sum_{i,j} a_i a_j^* |\psi_i\rangle \otimes |\tau_i\rangle \langle \psi_j| \otimes \langle \tau_j| \\ &= \sum_{i,j} \rho_{ij} |\psi_i\rangle \langle \psi_j| \otimes |\tau_i\rangle \langle \tau_j|, \end{aligned} \quad (2.54)$$

onde os estados $|\tau_i\rangle$ são normalizados, mas não necessariamente ortogonais (já que nada garante que durante sua evolução, os estados finais serão ortogonais). Assim, tomando o traço parcial sobre os estados $|\tau_i\rangle$, obtemos o operador densidade reduzido:

$$\rho_\psi = \text{Tr}_\tau \rho = \sum_{i,j} \rho_{ij} \langle \tau_j|\tau_i\rangle |\psi_i\rangle \langle \psi_j|, \quad (2.55)$$

a visibilidade pode agora ser calculada usando-se o operador densidade reduzido, ou seja,

$$\begin{aligned} V &= 2|\langle \psi_0|\rho_\psi|\psi_1\rangle| \\ &= 2|\rho_{01}|\langle \tau_0|\tau_1\rangle|, \end{aligned} \quad (2.56)$$

sendo interessante notar que, se os estados $|\tau_i\rangle$ são ortogonais entre si, o estado reduzido do sistema torna-se incoerente de modo que obtemos visibilidade nula. Isso implica que é possível obter informação de caminho através dos estados $|\tau_i\rangle$. Já, se os estados $|\tau_i\rangle$ não são ortogonais entre si, os elementos fora da diagonal do estado reduzido não necessariamente se anulam. No entanto, a visibilidade será reduzida por um fator $|\langle\tau_j|\tau_i\rangle|$ em relação ao estado inicial, antes dos sistemas interagirem.

2.4.1 Monótonos de emaranhamento para estados globais puros

Assim como a coerência, o emaranhamento também é um recurso para realizar certos protocolos de informação quântica (VEDRAL et al., 1997; CHITAMBAR, 2019). Logo, uma pergunta imediata dentro desse contexto é: o quão emaranhado um estado bipartido pode ser? Como veremos, quantificar o emaranhamento também é importante para obtermos relações completas de complementariedade. Aqui nos restringiremos apenas a monótonos de emaranhamento para estados globais puros dentro do contexto de complementariedade. Como para um estado bipartido puro, $|\Psi\rangle_{A,B}$, a entropia de von Neumann¹⁹ é nula, $S_{vn}(\rho_{A,B}) = 0$, o que implica que temos a máxima informação possível sobre o sistema bipartido. Se $S_{vn}(\rho_A) = S_{vn}(\rho_B) = 0$, também temos a máxima informação sobre os subsistemas. Logo, pela decomposição de Schmidt, o estado bipartido $|\Psi\rangle_{A,B}$ é separável. Além disso, como o espectro de autovalores dos estados reduzidos ρ_A e ρ_B são iguais, então $S_{vn}(\rho_A) = S_{vn}(\rho_B)$. Assim, se $S_{vn}(\rho_A) = S_{vn}(\rho_B) \neq 0$ temos que, ao nos restringimos aos subsistemas A ou B , não temos mais a informação máxima sobre os mesmos, apesar de termos a informação máxima sobre o sistema total. Como já vimos, isso implica a presença de emaranhamento, que será tão maior quanto maior a ignorância sobre os subsistemas, de modo que, se o estado bipartido puro é maximamente emaranhado, os subsistemas são maximamente mistos. Em particular, se $d_A = d_B = d$ e $\rho_\tau = \frac{1}{d}I_\tau$, com $\tau = A, B$ e I_τ sendo o operador identidade em \mathcal{H}_τ , então a entropia de von-Neumann atinge seu máximo dado por $\ln d$, onde d é a dimensão dos subsistemas. Logo, é natural definir uma possível medida de emaranhamento²⁰ de um estado $|\Psi\rangle_{A,B}$ como (BERGOU; HILLERY, 2013)

$$E(|\Psi\rangle_{A,B}) := S_{vn}(\rho_A) = S_{vn}(\rho_B). \quad (2.57)$$

¹⁹Lembrando que entropia de von Neumann de um estado ρ é definida como $S_{vn}(\rho) = -\text{Tr} \rho \ln \rho$.

²⁰Nessa dissertação, ‘medida de emaranhamento’ será usada como sinônimo de monótono de emaranhamento.

Assim, é imediato ver que $0 \leq E(|\Psi\rangle_{A,B}) \leq \ln d$, com $E(|\Psi\rangle_{A,B}) = 0$ se, e somente se, $|\Psi\rangle_{A,B}$ é separável. Ademais, qualquer medida de emaranhamento deve ser invariante frente à unitárias locais, i.e., $E(U_A \otimes U_B |\Psi\rangle_{A,B}) = E(|\Psi\rangle_{A,B})$, onde U_A, U_B são operadores unitários, uma vez que estados emaranhados permanecem emaranhados frente a uma mudança de base.

Também, como mencionado anteriormente, para um sistema quântico, $\text{Tr} \rho^2 \leq 1$, saturando a igualdade apenas para casos puros. Sugerindo assim a entropia linear dos subsistemas como uma medida de emaranhamento

$$S_l(\rho_\tau) := 1 - \text{Tr} \rho_\tau^2, \quad \tau = A, B, \quad (2.58)$$

sendo que $S_l(\rho_A) = S_l(\rho_B)$. Também é possível ver que, quando os estados reduzidos são maximamente mistos, a entropia linear atinge seu máximo $S_l^{max}(\rho_\tau) = (d-1)/d$. Novamente, $0 \leq S_l(\rho_\tau) \leq (d-1)/d$, com $S_l(\rho_\tau) = 0$ se, e somente se, o estado global é separável. Além disso, $S_l(\rho_\tau)$ é invariante por unitárias locais. No entanto, há mais um critério que é necessário levar em conta para estabelecermos uma boa medida de emaranhamento²¹: qualquer medida de emaranhamento não deve aumentar, em média, através de comunicação clássica e operações locais (LOCC²²). Operações locais são operações realizadas em uma das partes do sistema bipartido e são caracterizadas por (BERGOU; HILLERY, 2013): (i) introduzir um sistema auxiliar, sem estar emaranhado com uma das partes; (ii) operações unitárias locais; (iii) medidas ortogonais; (iv) ignorar parte do sistema.

A fim de exemplificarmos o que significa uma medida de emaranhamento não aumentar por LOCC, consideremos, por exemplo, a entropia de von Neumann dos subsistemas e mostremos que tal medida não aumenta se fizermos medidas projetivas locais. No entanto, antes é necessário mostrar que a entropia de von Neumann é uma função côncava de ρ ²³. Assim, consideremos a seguinte proposição

Proposição 1. *Seja A e B dois operadores hermitianos e positivos semi-definidos em um espaço de Hilbert \mathcal{H} . Então $\text{Tr}(A \ln B) - \text{Tr}(A \ln A) \leq \text{Tr}(B) - \text{Tr}(A)$.*

Demonstração. Seja $|j\rangle, 1, \dots, n$ base que diagonaliza A e $|m\rangle, m = 1, \dots, n$ base que diagonaliza B . Assim,

$$\begin{aligned} \ln A &= \sum_j \ln a_j |j\rangle\langle j|, \\ \ln B &= \sum_m \ln b_m |m\rangle\langle m|, \end{aligned} \quad (2.59)$$

²¹Nesta dissertação, uma boa medida de emaranhamento significa um monótono de emaranhamento. Monótonos de emaranhamento são funções não negativas cujo valor não aumenta sob operações locais e comunicação clássica (LOCC) (VIDAL, 2000)

²²Sigla para Local Operations and Classical Communication.

²³Sobre funções côncavas e convexas, ver apêndice C.

de modo que $\text{Tr}(A \ln A) = \sum_j a_j \ln a_j$ e

$$\text{Tr}(A \ln B) = \text{Tr} \left(\sum_{j,m} a_j \ln(b_m) \langle j|m \rangle |j\rangle\langle m| \right) = \sum_{j,m} |\langle j|m \rangle|^2 a_j \ln(b_m), \quad (2.60)$$

mas, notando que

$$\sum_m |\langle j|m \rangle|^2 = \sum_m \langle j|m \rangle \langle m|j \rangle = \langle j| \left(\sum_m |m\rangle\langle m| \right) |j \rangle = \langle j|j \rangle = 1, \quad (2.61)$$

é possível escrever

$$\text{Tr} A \ln A = \sum_{j,m} |\langle j|m \rangle|^2 a_j \ln a_j, \quad (2.62)$$

de modo que

$$\text{Tr}(A \ln B) - \text{Tr}(A \ln A) = \sum_{j,m} |\langle j|m \rangle|^2 a_j \ln \left(\frac{b_m}{a_j} \right), \quad (2.63)$$

como $\ln x \leq x - 1$, seja $x = \frac{b_m}{a_j}$ e, portanto,

$$\begin{aligned} \text{Tr}(A \ln B) - \text{Tr}(A \ln A) &\leq \sum_{j,m} |\langle j|m \rangle|^2 a_j \left(\frac{b_m}{a_j} - 1 \right) \\ &= \sum_{j,m} |\langle j|m \rangle|^2 (b_m - a_j) \\ &= \sum_m \langle m| \left(\sum_j |j\rangle\langle j| \right) |m \rangle b_m - \sum_j \langle j| \left(\sum_m |m\rangle\langle m| \right) |j \rangle a_j \\ &= \sum_m \langle m|m \rangle b_m - \sum_j \langle j|j \rangle a_j \\ &= \sum_m b_m - \sum_j a_j \\ &= \text{Tr} B - \text{Tr} A. \end{aligned} \quad (2.64)$$

□

Proposição 2. A entropia de von Neumann é função côncava de ρ .

Demonstração. Definindo $A = \rho$ e $B = \lambda\rho + (1 - \lambda)\sigma$, com ρ, σ sendo operadores densidade e $\lambda \in [0, 1]$, então a desigualdade fica

$$\text{Tr} \left(\rho \ln(\lambda\rho + (1 - \lambda)\sigma) \right) - \text{Tr}(\rho \ln \rho) \leq \text{Tr} \left(\lambda\rho + (1 - \lambda)\sigma \right) - \text{Tr} \rho = 0. \quad (2.65)$$

Agora, seja $A = \sigma$ e $B = \lambda\rho + (1 - \lambda)\sigma$ de modo que

$$\text{Tr} \left(\sigma \ln(\lambda\rho + (1 - \lambda)\sigma) \right) - \text{Tr}(\sigma \ln \sigma) \leq 0. \quad (2.66)$$

Multiplicando a primeira desigualdade por λ e a segunda por $(1 - \lambda)$, e somando-as temos que

$$\lambda \operatorname{Tr} \left(\rho \ln(\lambda \rho + (1 - \lambda)\sigma) \right) + (1 - \lambda) \operatorname{Tr} \left(\sigma \ln(\lambda \rho + (1 - \lambda)\sigma) \right) \leq \lambda \operatorname{Tr}(\rho \ln \rho) + (1 - \lambda) \operatorname{Tr}(\sigma \ln \sigma), \quad (2.67)$$

usando a linearidade do traço no lado esquerdo, vem que

$$\operatorname{Tr} \left((\lambda \rho + (1 - \lambda)\sigma) \ln(\lambda \rho + (1 - \lambda)\sigma) \right) \leq \lambda \operatorname{Tr}(\rho \ln \rho) + (1 - \lambda) \operatorname{Tr}(\sigma \ln \sigma), \quad (2.68)$$

ou seja,

$$S_{vn}(\lambda \rho + (1 - \lambda)\sigma) \geq \lambda S_{vn}(\rho) + (1 - \lambda) S_{vn}(\sigma), \quad (2.69)$$

□

Proposição 3. *O efeito de medidas projetivas locais não aumenta, em média, o emaranhamento.*

Demonstração. Consideremos um sistema bipartido puro $|\Psi\rangle_{A,B} \in \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ e, também, consideremos Alice e Bob²⁴, dois experimentalistas, de posse dos sistemas A e B , respectivamente. Dado que Alice realiza medidas projetivas sobre seu sistema, os possíveis resultados são rotulados pelo índice k e a medida ortogonal correspondente é dado pelo projetor P_k^A , com $\sum_k P_k^A = I_A$ e $P_k^A P_m^A = P_k^A \delta_{km}$. Assim, Alice obtém o resultado k com probabilidade $p_k = \langle \Psi | P_k^A \otimes I_B | \Psi \rangle_{A,B}$ de modo que o estado pós medida será $p_k^{-1} P_k^A |\Psi\rangle_{A,B} \langle \Psi | P_k^A$. Como o estado reduzido de Bob não pode mudar, caso contrário comunicação superluminal seria possível e, como já vimos, isso não é possível. Assim, o estado de Bob pós medida é dado por

$$\begin{aligned} \rho_B &= \sum_k p_k \operatorname{Tr}_A \left(p_k^{-1} P_k^A |\Psi\rangle_{A,B} \langle \Psi | P_k^A \right) = \sum_k \operatorname{Tr}_A \left(P_k^A |\Psi\rangle_{A,B} \langle \Psi | P_k^A \right) \\ &= \sum_k \operatorname{Tr}_A \left(P_k^A |\Psi\rangle_{A,B} \langle \Psi | \right) = \operatorname{Tr}_A \left(\sum_k P_k^A |\Psi\rangle_{A,B} \langle \Psi | \right) \\ &= \operatorname{Tr}_A \left(|\Psi\rangle_{A,B} \langle \Psi | \right), \end{aligned} \quad (2.70)$$

onde foi usado as propriedades de ciclicidade e linearidade do traço. Definindo o emaranhamento médio como

$$E = \sum_k p_k E(|\psi^{(k)}\rangle_{A,B}), \quad \text{onde } |\psi^{(k)}\rangle_{A,B} = \frac{1}{\sqrt{p_k}} P_k^A |\Psi\rangle_{A,B}, \quad (2.71)$$

dado que Alice e Bob compartilham o estado $|\psi^{(k)}\rangle_{A,B}$ com probabilidade p_k . Sendo

²⁴Personagens muito comuns dentro do campo de informação quântica. Embora, aqui no Brasil, poderíamos muito bem chamá-los de Amary e Bacuara, cuja origem dos nomes é Tupi (MELO; CHAVES, 2019).

$\rho_B^{(k)} = \text{Tr}_A(|\psi^{(k)}\rangle_{A,B} \langle \psi^{(k)}|)$, então $\sum_k p_k E(|\psi^{(k)}\rangle_{A,B}) = \sum_k p_k S_{vn}(\rho_B^{(k)})$. Agora, notando que

$$\begin{aligned} \sum_k p_k \rho_B^{(k)} &= \sum_k p_k \text{Tr}_A(|\psi^{(k)}\rangle_{A,B} \langle \psi^{(k)}|) = \sum_k p_k \text{Tr}_A \left(p_k^{-1} P_k^A |\Psi\rangle_{A,B} \langle \Psi| P_k^A \right) \\ &= \rho_B, \end{aligned} \quad (2.72)$$

então $E(|\Psi\rangle_{A,B}) = S_{vn}(\rho_B)$. Pela concavidade da entropia de von Neumann, $S_{vn}(\rho_B) \geq \sum_k p_k S_{vn}(\rho_B^{(k)})$, segue que

$$E(|\Psi\rangle_{A,B}) \geq \sum_k p_k E(|\psi^{(k)}\rangle_{A,B}). \quad (2.73)$$

□

A proposição acima também é válida para entropia linear, dado que tal medida também é côncava em ρ . Tal demonstração é feita no apêndice C.2. Por fim, vale ressaltar que qualquer medida do grau de 'mistura' dos subsistemas fornece um indicativo da quantidade de emaranhamento entre A e B dado que o sistema global é puro. Tais medidas de mistura podem ser expressadas na forma $f(\text{Tr}_\tau |\Psi\rangle_{A,B} \langle \Psi|)$, $\tau = A, B$, onde $f(x)$ é um função côncava e unitariamente invariante (VIDAL, 2000), ou equivalentemente, $f(x)$ é uma função côncava e invariante frente permutações dos elementos de uma distribuição de probabilidades (ZHU et al., 2017). Estas ideias são desenvolvidas no apêndice D. Tanto para entropia linear, quanto para entropia de von Neumann, é possível ver que essas condições são satisfeitas.

3 RELAÇÕES DE COMPLEMENTARIEDADE E O OPERADOR DENSIDADE

Este capítulo tem como objetivo obter relações de complementariedade entre as medidas de coerência quântica mencionadas no capítulo anterior e suas correspondentes medidas de previsibilidade. Para fazer isso, iremos explorar as propriedades do operador densidade, quantificando assim o princípio da complementariedade. A verificação de que as medidas de visibilidade e previsibilidade obtidas satisfazem os critérios estabelecidos em (DÜRR, 2000; ENGLERT et al., 2008) é feita no apêndice E. Além disso, vamos mostrar como obter relações completas de complementariedade explorando a pureza de sistema quântico multipartido.

3.1 RELAÇÕES INCOMPLETAS DE COMPLEMENTARIEDADE

A fim de exemplificar como é possível obter relações de complementariedade usando as propriedades do operador densidade, consideremos um qubit descrito por um operador densidade ρ e exploremos o fato de que, em geral, $S_l(\rho) = 1 - \text{Tr} \rho^2 \geq 0$ implica em

$$1 - \rho_{00}^2 - \rho_{11}^2 - 2|\rho_{01}|^2 \geq 0, \quad (3.1)$$

ou ainda,

$$\rho_{00}^2 + \rho_{11}^2 - 1/2 + 2|\rho_{01}|^2 \leq 1/2, \quad (3.2)$$

onde

$$\begin{aligned} \rho_{00}^2 + \rho_{11}^2 - 1/2 &= \rho_{00}^2 + \rho_{11}^2 - \frac{1}{2}(\rho_{00} + \rho_{11})^2 \\ &= \frac{1}{2}(\rho_{00} - \rho_{11})^2, \end{aligned} \quad (3.3)$$

o que nos motiva a definir

$$\frac{1}{2}P^2 := \frac{1}{2}(\rho_{00} - \rho_{11})^2, \quad \frac{1}{2}V^2 := 2|\rho_{01}|^2, \quad (3.4)$$

recuperando assim as expressões (2.22) de modo que a equação (3.2) fica

$$P^2 + V^2 \leq 1. \quad (3.5)$$

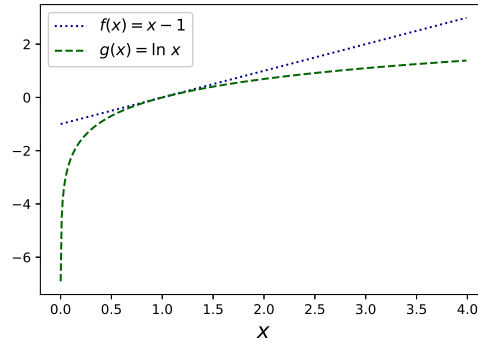


Figura 3.1 – Comparação entre $f(x) = x - 1$ e $g(x) = \ln x$ para $x > 0$.

3.1.1 Relação de Hilbert-Schmidt

Dado que um quanton descrito por um operador densidade, em geral, satisfaz $1 - \text{Tr} \rho^2 \geq 0$, onde

$$\text{Tr} \rho^2 = \text{Tr} \left(\sum_{i,j} \rho_{ij} |i\rangle\langle j| \sum_{k,l} \rho_{kl} |k\rangle\langle l| \right) \quad (3.6)$$

$$= \sum_{i,j} \sum_{k,l} \rho_{ij} \rho_{kl} \text{Tr}(|i\rangle\langle j| |k\rangle\langle l|) \quad (3.7)$$

$$= \sum_{i,j} \sum_{k,l} \rho_{ij} \rho_{kl} \delta_{jk} \delta_{il} \quad (3.8)$$

$$= \sum_{i,j} |\rho_{ij}|^2, \quad (3.9)$$

é possível notar que

$$1 - \text{Tr} \rho^2 = 1 - \sum_{j,k} |\rho_{jk}|^2 = 1 - \sum_j \rho_{jj}^2 - \sum_{j \neq k} |\rho_{jk}|^2 \geq 0, \quad (3.10)$$

ou seja,

$$C_{hs}(\rho) \leq 1 - \sum_j \rho_{jj}^2 = 1 - \text{Tr} \rho_{diag}^2 = S_l(\iota_\rho^{hs}). \quad (3.11)$$

Ainda, dado que $x - 1 \geq \ln x$ para $x > 0$, como mostrado na Fig. 3.1,

$$S_{vn}(x) := \text{Tr}(x(-\ln x)) \quad (3.12)$$

$$\geq \text{Tr}(x(1-x)) = \text{Tr}(x) - \text{Tr}(x^2) = S_l(x) + \text{Tr}(x) - 1. \quad (3.13)$$

como $\text{Tr} \iota_\rho^{hs} = 1$, obtém-se

$$C_{hs}(\rho) \leq S_l(\iota_\rho^{hs}) \leq S_{vn}(\iota_\rho^{hs}), \quad (3.14)$$

onde $\iota_\rho^{hs} = \rho_{diag}$ é o estado incoerente mais próximo de ρ .

Separando a desigualdade (3.14) em duas

$$C_{hs}(\rho) \leq S_\tau(\iota_\rho^{hs}), \quad \tau = l, vn, \quad (3.15)$$

e somando S_τ^{max} em ambos lados, temos

$$C_{hs}(\rho) + S_\tau^{max} - S_\tau(\iota_\rho^{hs}) \leq S_\tau^{max}, \quad (3.16)$$

o que sugere a seguinte definição como medidas de previsibilidade

$$P_\tau(\rho) := S_\tau^{max} - S_\tau(\iota_\rho^{hs}), \quad \tau = l, vn \quad (3.17)$$

obtendo assim as seguintes relações de complementariedade

$$C_{hs}(\rho) + P_\tau(\rho) \leq S_\tau^{max}, \quad \tau = l, vn, \quad (3.18)$$

onde a previsibilidade em termos dos elementos do operador densidade pode ser escrita como

$$P_l(\rho) = \sum_j \rho_{jj}^2 - 1/d = \frac{d-1}{d} - \sum_{j \neq k} \rho_{jj} \rho_{kk}, \quad (3.19)$$

$$P_{vn}(\rho) = \ln d + \sum_j \rho_{jj} \ln \rho_{jj}. \quad (3.20)$$

Vale ressaltar que a expressão (3.19) é equivalente às expressões usadas em (DÜRR, 2000; JAKOB; BERGOU, 2007), embora foram obtidas por outros caminhos. Enquanto que a expressão (3.20) foi sugerida em (ENGLERT et al., 2008), mas não foi definida em termos de $S_{vn}^{max} - S_{vn}(\iota_\rho^{hs})$. Além disso, para $\tau = l$, a relação (3.18) satura se, e somente se, o estado do sistema é puro, uma vez que $1 - \text{Tr} \rho^2 = 0$. O caso $\tau = vn$ será discutido mais adiante.

Definindo $\Pi_j := |j\rangle\langle j|$ como a projeção sobre o caminho j , então a incerteza (variância) sobre o caminho j é dada por

$$\mathcal{V}(\rho, \Pi_j) = \langle \Pi_j^2 \rangle - \langle \Pi_j \rangle^2 = \text{Tr} \rho \Pi_j^2 - (\text{Tr} \rho \Pi_j)^2 = \rho_{jj} - \rho_{jj}^2, \quad (3.21)$$

de modo que a incerteza total sobre os caminhos é obtida quando somamos sobre j

$$\sum_j \mathcal{V}(\rho, \Pi_j) = 1 - \sum_j \rho_{jj}^2, \quad (3.22)$$

que é justamente a entropia linear $S(\rho_{diag})$. Assim, depois de repetir várias vezes o mesmo experimento, obteremos uma distribuição de probabilidade $\rho_{00}, \dots, \rho_{d-1d-1}$ que

representa a probabilidade do quanton ser medido no estado $|0\rangle, \dots, |d-1\rangle$. A partir dessa distribuição de probabilidades, é possível calcular a incerteza sobre os caminhos através da entropia linear, de modo que $P_l(\rho) := S_l^{max} - S_l(\rho^{hs})$ fornece uma medida da capacidade de prever qual será o resultado da próxima vez que realizarmos o experimento. Por exemplo, se depois de repetirmos o experimento inúmeras vezes, e obtivermos uma distribuição de probabilidades equiprovável, i.e., $\{\rho_{jj} = 1/d\}_{j=0}^{d-1}$, a nossa capacidade de fazer uma previsão é nula. Agora, se $\{\rho_{jj}\}_{j=0}^{d-1}$ não representar uma distribuição de probabilidades equiprovável, então $P_l(\rho) \neq 0$. Assim, podemos ver que $P_l(\rho) = \sum_j \rho_{jj}^2 - 1/d$ é uma maneira de quantificar o quanto a distribuição de probabilidade $\{\rho_{jj}\}_{j=0}^{d-1}$ difere da distribuição de probabilidades equiprovável. Além do mais, também é possível quantificar a incerteza total sobre os caminhos através de $S_{vn}(\rho_{diag})$ de modo que a mesma interpretação se mantém para P_{vn} . Ademais, a previsibilidade P_l assim definida calcula explicitamente a soma das diferenças quadráticas entre as populações, generalizando a primeira definição dada por (GREENBERGER; YASIN, 1988):

$$\begin{aligned}
P_l &= \sum_j \rho_{jj}^2 - \frac{1}{d} = \sum_j \rho_{jj}^2 - \frac{1}{d} \left(\sum_j \rho_{jj} \right)^2 \\
&= \sum_j \rho_{jj}^2 - \frac{1}{d} \left(\sum_j \rho_{jj}^2 + 2 \sum_{j>k} \rho_{jj} \rho_{kk} \right) \\
&= \frac{d-1}{d} \sum_j \rho_{jj}^2 - \frac{2}{d} \sum_{j>k} \rho_{jj} \rho_{kk} \\
&= \frac{1}{d} \left(\sum_{j>k} (\rho_{jj}^2 + \rho_{kk}^2) - 2 \sum_{j>k} \rho_{jj} \rho_{kk} \right) \\
&= \frac{1}{d} \sum_{j>k} (\rho_{jj} - \rho_{kk})^2.
\end{aligned} \tag{3.23}$$

Por fim, gostaríamos de ressaltar que não optamos por normalizar as relações de complementariedade a fim de deixar explícito a dependência do limite superior das relações de complementariedade com a dimensão dos sistemas, como argumentado em (JAKOB; BERGOU, 2007).

3.1.2 Relação da norma- l_1

Como vimos anteriormente, uma vez que $\rho \geq 0$, segue que $|\rho_{jk}| \leq \sqrt{\rho_{jj} \rho_{kk}}$, $\forall j \neq k$, ou seja,

$$C_{l_1}(\rho) = \sum_{j \neq k} |\rho_{jk}| \leq \sum_{j \neq k} \sqrt{\rho_{jj} \rho_{kk}}, \tag{3.24}$$

sugerindo a seguinte definição $P_{l_1}(\rho) := \alpha - \sum_{j \neq k} \sqrt{\rho_{jj}\rho_{kk}}$. Para descobrir α , basta impor que $P_{l_1} = 0$ para $\{\rho_{jj} = 1/d\}_{j=0}^{d-1}$:

$$\begin{aligned} 0 &= \alpha - \sum_{j \neq k} \frac{1}{d} \\ &= \alpha - \frac{1}{d} \left[\underbrace{1(1+1+\dots+1)}_{d-1 \text{ vezes}} + \underbrace{1(1+1+\dots+1)}_{d-1 \text{ vezes}} + \dots + \underbrace{1(1+1+\dots+1)}_{d-1 \text{ vezes}} \right] \\ &= \alpha - \frac{1}{d} d(d-1) \end{aligned} \quad (3.25)$$

e, portanto, $\alpha = d - 1$, sendo também o valor máximo de C_{l_1} . Logo, temos a seguinte relação de complementariedade para a norma- l_1 :

$$C_{l_1}(\rho) + P_{l_1}(\rho) \leq d - 1. \quad (3.26)$$

Em particular, para $d = 2$,

$$P_{l_1}(\rho) = 1 - 2\sqrt{\rho_{00}\rho_{11}} = \rho_{00} + \rho_{11} - 2\sqrt{\rho_{00}\rho_{11}} = (\sqrt{\rho_{00}} - \sqrt{\rho_{11}})^2, \quad (3.27)$$

ou seja, $P_{l_1}(\rho)$ é uma função do tipo $(f(\rho_{00}) - f(\rho_{11}))^2$, com f sendo uma função monotonicamente crescente das probabilidades, sendo também uma generalização das diferenças quadráticas entre as probabilidades. Por fim, a relação (3.26) satura se, e somente se, ρ é puro, uma vez que $|\rho_{jk}| = \sqrt{\rho_{jj}\rho_{kk}} \quad \forall j \neq k$ somente se ρ é puro.

3.1.3 Relação baseada na entropia relativa

Antes de obtermos uma relação de complementariedade entre a coerência baseada na entropia relativa e sua correspondente medida de previsibilidade, consideremos a relação de complementariedade

$$C_{hs}(\rho) + P_{vn}(\rho) \leq S_{vn}^{max} = \ln d, \quad (3.28)$$

e notemos que, para o caso em que o estado do sistema é puro e $\{\rho_{jj} = 1/d\}_{j=0}^{d-1}$, então $P_{vn}(\rho) = 0$ enquanto que a coerência atinge seu máximo $C_{hs}^{max}(\rho) = (d - 1)/d$. No entanto, o limite superior desta relação complementariedade é $\ln d$ de modo que $\frac{d-1}{d} \leq \ln d \quad \forall d \geq 1$, como é possível ver na Fig. 3.2. Ou seja, a relação de complementariedade não satura quando o estado é puro e $\{\rho_{jj} = 1/d\}_{j=0}^{d-1}$, i.e., quando $C_{hs}(\rho)$ é máximo. Aliás, a relação acima só satura quando $P_{vn}(\rho)$ atinge seu máximo, ou seja, quando o estado do sistema é completamente previsível, sendo um indicativo de que

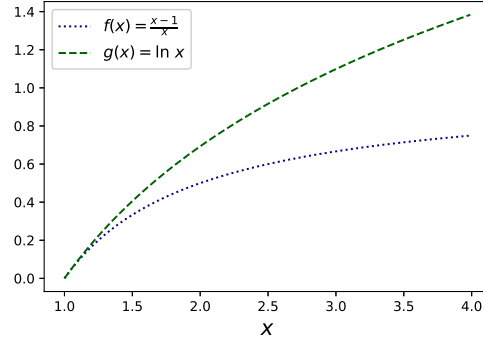


Figura 3.2 – Comparação entre $f(x) = (x - 1)/x$ e $g(x) = \ln x$ para $x > 0$.

a medida de $P_{vn}(\rho)$ não é a medida natural de previsibilidade que acompanha $C_{hs}(\rho)$ e, sim, $P_l(\rho)$. De fato, se ρ é puro e existe coerência na base de referência, então

$$\begin{aligned}
C_{hs}(\rho) + P_{vn}(\rho) &= \sum_{j \neq k} |\rho_{jk}|^2 + \ln d + \sum_j \rho_{jj} \ln \rho_{jj} \\
&= \sum_{j \neq k} \rho_{jj} \rho_{kk} + \sum_j \rho_{jj} \ln \rho_{jj} + \ln d \\
&= \sum_j \rho_{jj} (1 - \rho_{jj}) + \sum_j \rho_{jj} \ln \rho_{jj} + \ln d \\
&< \sum_j \rho_{jj} (1 - \rho_{jj}) - \sum_j \rho_{jj} (1 - \rho_{jj}) + \ln d \\
&< \ln d,
\end{aligned} \tag{3.29}$$

uma vez que $-\ln x < 1 - x \forall x \in (0, 1)$.

Como vimos anteriormente, para qualquer estado quântico ρ , a coerência baseada na entropia relativa é definida como

$$C_{re}(\rho) := \min_{\iota \in I} S_{vn}(\rho|\iota) = S_{vn}(\rho_{diag}) - S_{vn}(\rho), \tag{3.30}$$

onde $\iota \in I$ representam estados incoerentes. De fato, a minimização implica que $\iota = \rho_{diag}$. Para isso, note que $S_{vn}(\rho|\iota) = -S(\rho) - \text{Tr } \rho \ln \iota$, onde

$$\begin{aligned}
\text{Tr } \rho \ln \iota &= \text{Tr} \left(\sum_{j,k} \rho_{jk} |j\rangle\langle k| \sum_i \ln \iota_{ii} |i\rangle\langle i| \right) \\
&= \text{Tr} \left(\sum_{i,j} \rho_{ji} \ln \iota_{ii} |j\rangle\langle i| \right) \\
&= \sum_i \rho_{ii} \ln \iota_{ii} \\
&= \text{Tr } \rho_{diag} \ln \iota,
\end{aligned} \tag{3.31}$$

e, portanto, $S_{vn}(\rho_{diag}|\iota) = -S(\rho_{diag}) - \text{Tr } \rho_{diag} \ln \iota$ implica em

$$\text{Tr } \rho_{diag} \ln \iota = \text{Tr } \rho \ln \iota = -S(\rho_{diag}) - S_{vn}(\rho_{diag}|\iota). \quad (3.32)$$

Assim,

$$\begin{aligned} C_{re}(\rho) &:= \min_{\iota \in I} S_{vn}(\rho|\iota) = \min_{\iota \in I} \left(-S(\rho) + S(\rho_{diag}) + S_{vn}(\rho_{diag}|\iota) \right) \\ &= S_{vn}(\rho_{diag}) - S_{vn}(\rho), \end{aligned} \quad (3.33)$$

uma vez que o mínimo ocorre quando $S_{vn}(\rho_{diag}|\iota) = 0$, quando $\iota = \rho_{diag}$. A partir da igualdade acima e notando que $S_{vn}(\rho) \geq 0$, segue a desigualdade

$$C_{re}(\rho) \leq S_{vn}(\rho_{diag}), \quad (3.34)$$

sendo equivalente a seguinte relação de complementariedade

$$C_{re}(\rho) + P_{vn}(\rho) \leq S_{vn}^{max} = \ln d, \quad (3.35)$$

onde $P_{vn}(\rho) := \ln d - S_{vn}(\rho_{diag})$. Se o estado sistema é puro e $\{\rho_{jj}\}_{j=0}^{d-1}$, então $S_{vn}(\rho) = 0$, e $C_{re}^{max}(\rho) = S_{vn}(\rho_{diag}) = \ln d$, saturando a relação de complementariedade. Ademais, se ρ é puro, a relação (3.35) sempre satura:

$$C_{re}(\rho) + P_{vn}(\rho) = S_{vn}(\rho_{diag}) - S_{vn}(\rho) + \ln d - S_{vn}(\rho_{diag}) = \ln d. \quad (3.36)$$

Vale ressaltar que tal relação de complementariedade só foi possível de ser obtida devido às propriedades de ρ , pois $\text{Tr } \rho = 1$ e $\rho \geq 0$ permite interpretar os elementos da diagonal de ρ como uma distribuição de probabilidade e, portanto, sendo possível definir $P_{vn}(\rho)$ a partir $S_{vn}(\rho_{diag})$.

3.1.4 Relação de Wigner-Yanase

Como vimos anteriormente, a coerência de Wigner-Yanase é dada por

$$\begin{aligned}
C_{wy}(\rho) &:= \sum_j I(\rho, |j\rangle\langle j|) = -\frac{1}{2} \sum_j \text{Tr} \left([\sqrt{\rho}, |j\rangle\langle j|]^2 \right) \\
&= -\frac{1}{2} \sum_j \text{Tr} \left(\sqrt{\rho} |j\rangle\langle j| - |j\rangle\langle j| \sqrt{\rho} \right)^2 \\
&= -\frac{1}{2} \sum_j \text{Tr} \left(\sqrt{\rho} |j\rangle\langle j| \sqrt{\rho} |j\rangle\langle j| - \sqrt{\rho} |j\rangle\langle j| \sqrt{\rho} - |j\rangle\langle j| \rho |j\rangle\langle j| + |j\rangle\langle j| \sqrt{\rho} |j\rangle\langle j| \sqrt{\rho} \right) \\
&= -\frac{1}{2} \sum_j \left(\langle j | \sqrt{\rho} |j\rangle^2 - \sum_k \langle k | \sqrt{\rho} |j\rangle \langle j | \sqrt{\rho} |k\rangle - \langle j | \rho |j\rangle + \langle j | \sqrt{\rho} |j\rangle^2 \right). \quad (3.37)
\end{aligned}$$

Mas, notando a seguinte identidade

$$\langle j | \rho |j\rangle = \langle j | \sqrt{\rho} \sqrt{\rho} |j\rangle = \langle j | \sqrt{\rho} \left(\sum_k |k\rangle\langle k| \right) \sqrt{\rho} |j\rangle = \sum_k \langle k | \sqrt{\rho} |j\rangle \langle j | \sqrt{\rho} |k\rangle, \quad (3.38)$$

temos que

$$\begin{aligned}
C_{wy}(\rho) &= \sum_j \left(\sum_k \langle k | \sqrt{\rho} |j\rangle \langle j | \sqrt{\rho} |k\rangle - \langle j | \sqrt{\rho} |j\rangle^2 \right) \\
&= \sum_{j,k} |\langle j | \sqrt{\rho} |k\rangle|^2 - \sum_j \langle j | \sqrt{\rho} |j\rangle^2 \\
&= \sum_j \langle j | \sqrt{\rho} |j\rangle^2 + \sum_{j \neq k} |\langle j | \sqrt{\rho} |k\rangle|^2 - \sum_j \langle j | \sqrt{\rho} |j\rangle^2 \\
&= \sum_{j \neq k} |\langle j | \sqrt{\rho} |k\rangle|^2. \quad (3.39)
\end{aligned}$$

A fim de obter relações de complementariedade para $C_{wy}(\rho)$ e sua respectiva medida de previsibilidade, consideremos o seguinte teorema:

Teorema 7. $\langle j | \sqrt{\rho} |j\rangle \geq \langle j | \rho |j\rangle \quad \forall j$.

Demonstração. Dado que $\rho \geq 0$ e $\text{Tr} \rho = 1$, então $0 \leq \lambda_j \leq 1 \quad \forall j$, onde λ_j são os autovalores de ρ . Logo, $\sqrt{\lambda_j} \geq \lambda_j$. Assim $\langle j | \sqrt{\rho} |j\rangle \geq \langle j | \rho |j\rangle$ no caso em que $\langle j | \sqrt{\rho} |j\rangle = \sqrt{\lambda_j}$, ou seja, na base que diagonaliza ρ . Agora, fazendo uma mudança de base, temos

$$\rho = \sum_m \lambda_m |e_m\rangle\langle e_m| = \sum_{j,k} \sum_m \lambda_m \alpha_j^m \alpha_k^{m*} |j\rangle\langle k| = \sum_{j,k} \rho_{jk} |j\rangle\langle k|. \quad (3.40)$$

Analogamente, $\sqrt{\rho} = \sum_{j,k} \sum_m \sqrt{\lambda_m} \alpha_j^m \alpha_k^{m*} |j\rangle\langle k| = \sum_{j,k} (\sqrt{\rho})_{jk} |j\rangle\langle k|$. Assim

$$\langle j|\sqrt{\rho}|j\rangle = \sum_m \sqrt{\lambda_m} |\alpha_j^m|^2 \geq \sum_m \lambda_m |\alpha_j^m|^2 = \langle j|\rho|j\rangle \quad \forall j. \quad (3.41)$$

□

Esse resultado permite obter desigualdades entre $C_{wy}(\rho)$ e $S_l(\rho_{diag})$, decorrendo das propriedades de ρ (positividade e traço igual a 1). Como $\langle j|\sqrt{\rho}|j\rangle \geq \langle j|\rho|j\rangle$, segue que

$$C_{wy}(\rho) = 1 - \sum_j \langle j|\sqrt{\rho}|j\rangle^2 \leq 1 - \sum_j \langle j|\rho|j\rangle^2 = S_l(\rho_{diag}). \quad (3.42)$$

Definindo $P_l(\rho) := S_l^{max} - S_l(\rho_{diag})$, obtemos a relação de complementariedade

$$C_{wy}(\rho) + P_l(\rho) \leq S_l^{max}, \quad (3.43)$$

sendo interessante notar que $P_l(\rho)$ acompanha tanto $C_{wy}(\rho)$ quanto $C_{hs}(\rho)$. Além disso, se ρ é puro, então $\sqrt{\rho} = \rho$ e, consequentemente, $C_{wy}(\rho) = C_{hs}(\rho)$. Ou seja, a relação de complementariedade (3.43) se reduz à relação (3.18) para $\tau = l$. Logo, (3.43) satura se, e somente se, ρ é puro.

3.2 COMPLETANDO AS RELAÇÕES DE COMPLEMENTARIEDADE

A fim de exemplificar o fato de que relações de complementariedade expressas em termos de uma desigualdade não correspondem a uma troca balanceada entre previsibilidade e visibilidade, consideremos o seguinte estado puro

$$|\psi\rangle_A = x|0\rangle + \sqrt{1-x^2}|1\rangle, \quad \text{com } x \in [0, 1]. \quad (3.44)$$

Agora, se considerarmos um estado misto do tipo

$$\rho_A = w|\psi\rangle_A\langle\psi| + \frac{1-w}{2}I_{2 \times 2} = \begin{pmatrix} \frac{1-w}{2} + wx^2 & wx\sqrt{1-x^2} \\ wx\sqrt{1-x^2} & \frac{1-w}{2} + w(1-x^2) \end{pmatrix}, \quad (3.45)$$

tal estado pode ser o resultado da interação do quanton em questão com o seu ambiente modelado através do depolarizing channel (NIELSEN; CHUANG, 2000). Note que para $w \rightarrow 0$, temos o estado do sistema tende para um estado maximamente misto $\rho \rightarrow \frac{1}{2}I_{2 \times 2}$, o que implica em $P, C \rightarrow 0$ para qualquer medida de previsibilidade e coerência, como exemplificado na Fig. 3.3 usando as medidas $C_{hs}(\rho)$ e $P_l(\rho)$. Como ressaltado em (QIAN et al., 2020): as relações de complementariedade ob-

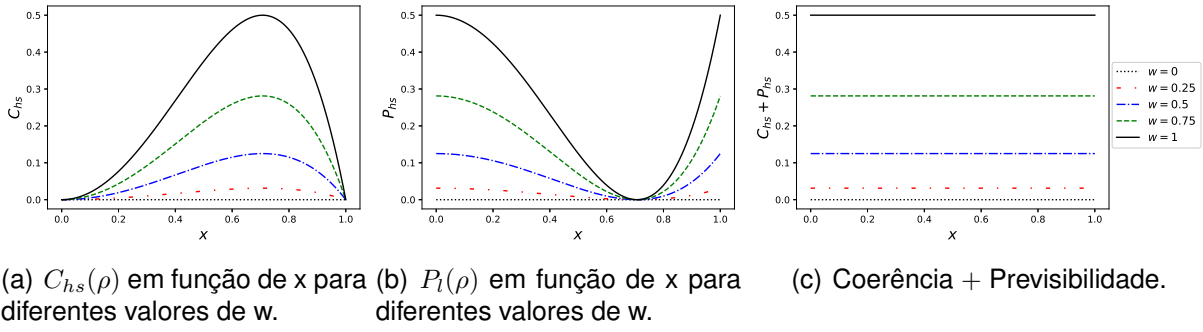


Figura 3.3 – Comportamento das propriedades locais de um quanton no estado $\rho = w |\psi\rangle\langle\psi| + \frac{1-w}{2} I_{2 \times 2}$.

tidas até aqui não prevêem um intercâmbio balanceado entre C e P , uma vez que C pode diminuir sem necessariamente P aumentar uma vez que as relações do tipo $P + C \leq \text{constante}$ permanecem válidas devido à desigualdade. Além disso, também permitem o caso extremo $C = P = 0$ para estados maximamente mistos, de modo que não é possível obter nenhuma informação das propriedades locais do quanton, enquanto, em um aparato experimental, ainda temos um sistema quântico em mãos. Ele deve ser caracterizado de alguma maneira. Logo, é possível ver que algo está faltando nas relações do $P + C \leq \text{constante}$. No entanto, como já visto anteriormente, pelo teorema da purificação, sabemos que um estado maximamente misto pode ser visto como um estado emaranhado com outro sub-sistema, de maneira a formar um sistema puro global de dimensão maior. Assim, o que está faltando para quantificar completamente um quanton são suas correlações com outros sistemas.

No exemplo anterior, vimos que se $\rho_A = \frac{1}{2} I_{2 \times 2}$, tanto a previsibilidade quanto a coerência se anulam e não obtemos nenhuma informação sobre o sistema quântico que queremos estudar. No entanto, pelo teorema da purificação, podemos construir um estado puro $|\Psi\rangle_{A,B}$ emaranhado no qual $\rho_A = \text{Tr}_B |\Psi\rangle_{A,B} \langle\Psi|$. De fato, basta considerar

$$|\Psi\rangle_{A,B} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle_A \otimes |0\rangle_B + |1\rangle_A \otimes |1\rangle_B) := \frac{1}{\sqrt{2}}(|0,0\rangle_{A,B} + |1,1\rangle_{A,B}), \quad (3.46)$$

de modo que

$$\rho_A = \text{Tr}_B |\Psi\rangle_{A,B} \langle\Psi| = \frac{1}{2} |0\rangle\langle 0| + \frac{1}{2} |1\rangle\langle 1| = \frac{1}{2} I_{2 \times 2}. \quad (3.47)$$

Ou ainda, uma possível purificação para o estado (3.45) é dada por

$$\begin{aligned} |\Psi\rangle_{AB} &= (-\sqrt{1-x} |0\rangle_A + \sqrt{x} |1\rangle_A) \otimes \sqrt{\frac{1-w}{2}} |0\rangle_B \\ &\quad + (\sqrt{x} |0\rangle_A + \sqrt{1-x} |1\rangle_A) \otimes \sqrt{\frac{1+w}{2}} |1\rangle_B, \end{aligned} \quad (3.48)$$

de modo que o sistema B pode ser tanto um sistema auxiliar sobre o qual temos controle, quanto o ambiente sobre o qual não temos controle e que, geralmente, não temos acesso aos seus graus de liberdade. Assim, se considerarmos alguma medida de emaranhamento (ou mais geral, de correlações) entre os sistemas A e B , podemos obter informações sobre o sistema A que estão sendo compartilhadas com o sistema B , e que, portanto, não estão acessíveis localmente. Assim, completar uma relação de complementariedade

$$\text{Previsibilidade} + \text{Coerência} \leq \text{Constante} \quad (3.49)$$

significa considerar todas as medidas possíveis na qual sempre se possa extrair alguma informação sobre o estado do quanton:

$$\text{Previsibilidade} + \text{Coerência} + \text{Correlação} = \text{Constante}. \quad (3.50)$$

Tal fato foi notado por Jakob e Bergou em (JAKOB; BERGOU, 2010), onde eles consideraram o seguinte estado puro de dois qubits: $|\Psi\rangle \in \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ com

$$|\Psi\rangle = a|0\rangle_A \otimes |0\rangle_B + b|0\rangle_A \otimes |1\rangle_B + c|1\rangle_A \otimes |0\rangle_B + d|1\rangle_A \otimes |1\rangle_B. \quad (3.51)$$

tal que $|a|^2 + |b|^2 + |c|^2 + |d|^2 = 1$. Assim,

$$\begin{aligned} \rho &= \begin{pmatrix} |a|^2 & ab^* & ac^* & ad^* \\ ba^* & |b|^2 & bc^* & bd^* \\ ca^* & cb^* & |c|^2 & cd^* \\ da^* & db^* & dc^* & |d|^2 \end{pmatrix} \\ \rho_A &= \text{Tr}_B \rho = \begin{pmatrix} |a|^2 + |b|^2 & ac^* + bd^* \\ a^*c + b^*d & |c|^2 + |d|^2 \end{pmatrix} \\ \rho_B &= \text{Tr}_A \rho = \begin{pmatrix} |a|^2 + |c|^2 & ab^* + cd^* \\ a^*b + c^*d & |b|^2 + |d|^2 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (3.52)$$

de modo que

$$\begin{aligned} P_A &= |\text{Tr}(\rho_A \sigma_3)| = |\rho_{11}^A - \rho_{22}^A| = ||a|^2 + |b|^2 - |c|^2 + |d|^2| \\ P_B &= |\text{Tr}(\rho_B \sigma_3)| = |\rho_{11}^B - \rho_{22}^B| = ||a|^2 + |c|^2 - |b|^2 + |d|^2| \\ V_A &= 2|\text{Tr}(\rho_A \sigma_+)| = 2|\rho_{12}^A| = 2|ac^* + bd^*| \\ V_B &= 2|\text{Tr}(\rho_B \sigma_+)| = 2|\rho_{12}^B| = 2|ab^* + cd^*| \\ E_\Psi &= \sqrt{1 - \text{Tr} \rho_j^2}, \quad j = A, B, \end{aligned} \quad (3.53)$$

onde E_Ψ é uma medida de emaranhamento denominada Concurrence (WOOTTERS,

1998), obtendo assim a seguinte relação completa de complementariedade

$$P_j^2 + V_j^2 + E_\Psi^2 = 1, \quad j = A, B. \quad (3.54)$$

Jakob e Bergou estenderam esta ideia para sistemas bipartidos compostos de dimensão arbitrária (JAKOB; BERGOU, 2006; JAKOB; BERGOU, 2007), sugerindo que deve existir uma relação complementar entre as informações das propriedades locais de cada subsistema e o emaranhamento do sistema composto, e mostraram que a I-Concurrence (RUNGTA et al., 2001) é a medida de correlação quântica que completa a relação (1.1) para estados puros bipartidos compostos.

3.2.1 Procedimento para o caso bipartido

Nessa seção, vamos explorar as propriedades de um sistema quântico bipartido puro a fim de obter relações completas de complementariedade análogas à (3.54) obtidas por Jakob e Bergou. O principal ponto a ser notado aqui é que vamos derivar relações completas de complementariedade para subsistemas explorando a pureza do operador densidade bipartido, diferentemente de (JAKOB; BERGOU, 2010; JAKOB; BERGOU, 2007), onde eles notam de maneira ‘ad hoc’ que a Concurrence é a medida que completa as relações consideradas.

Assim, consideremos um sistema bipartido puro descrito por $|\Psi\rangle_{A,B} \in \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ com dimensão $d = d_A d_B$. Seja $\{|i\rangle_A\}_{i=0}^{d_A-1}$, $\{|j\rangle_B\}_{j=0}^{d_B-1}$ bases ortonormais locais em \mathcal{H}_A , \mathcal{H}_B , respectivamente, de modo que $\{|i\rangle_A \otimes |j\rangle_B := |i, j\rangle_{A,B}\}_{i,j=0}^{d_A-1, d_B-1}$ é uma base ortonormal em $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$. Logo, é possível representar um estado qualquer em $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ como $|\Psi\rangle_{A,B} = \sum_{i,j=0}^{d_A-1, d_B-1} a_{ij} |i, j\rangle_{A,B}$, ou equivalentemente, através do operador densidade

$$\rho_{A,B} = \sum_{i,k=0}^{d_A-1} \sum_{j,l=0}^{d_B-1} \rho_{ij,kl} |i, j\rangle_{A,B} \langle k, l|, \quad (3.55)$$

onde $\rho_{ij,kl} = a_{ij} a_{kl}^*$. Já, o estado do subsistema $A(B)$ é obtido através do traço parcial sobre $B(A)$:

$$\rho_A = \sum_{i,k=0}^{d_A-1} \rho_{ik}^A |i\rangle_A \langle k| = \sum_{i,k=0}^{d_A-1} \sum_{j=0}^{d_B-1} \rho_{ij,kj} |i\rangle_A \langle k|, \quad (3.56)$$

$$\rho_B = \sum_{j,l=0}^{d_B-1} \rho_{jl}^B |j\rangle_B \langle l| = \sum_{j,l=0}^{d_B-1} \sum_{i=0}^{d_A-1} \rho_{ij,il} |j\rangle_B \langle l|, \quad (3.57)$$

em geral, os estados dos subsistemas A e B não são puros, o que implica que alguma informação sobre o estado completo dos subsistemas está faltando. É possível

ver este fato explorando as propriedades do operador densidade de um dos subsistemas. Por exemplo, se o estado do subsistema A é misto, então $1 - \text{Tr} \rho_A^2 > 0$, ou equivalentemente,

$$1 - \sum_{i,k=0}^{d_A-1} \left| \sum_{j=0}^{d_B-1} \rho_{ij,kj} \right|^2 > 0, \quad (3.58)$$

que, como mostramos anteriormente, leva à seguinte relação incompleta de complementariedade:

$$P_l(\rho_A) + C_{hs}(\rho_A) < \frac{d_A - 1}{d_A}, \quad (3.59)$$

onde

$$\begin{aligned} P_l(\rho) &= \sum_{i=0}^{d_A-1} \left(\sum_{j=0}^{d_B-1} \rho_{ij,ij} \right)^2 - 1/d_A = \sum_{\substack{i=k \\ j=l}} \rho_{ij,ij}^2 + \sum_{\substack{i=k \\ j \neq l}} \rho_{ij,ij} \rho_{kl,kl} - 1/d_A \\ &= \left(\sum_{\substack{i=k \\ j=l}} + \sum_{\substack{i=k \\ j \neq l}} \right) |\rho_{ij,kl}|^2 - 1/d_A, \end{aligned} \quad (3.60)$$

e

$$C_{hs}(\rho_A) = \sum_{\substack{i \neq k=0 \\ j=0}}^{d_A-1} \left| \sum_{j=0}^{d_B-1} \rho_{ij,kj} \right|^2 = \sum_{\substack{i \neq k \\ j=l}} |\rho_{ij,kj}|^2 + \sum_{\substack{i \neq k \\ j \neq l}} \rho_{ij,kj} \rho_{il,kl}^*, \quad (3.61)$$

uma vez que o estado global é puro e, portanto, $\rho_{ij,ij} \rho_{kl,kl} = |\rho_{ij,kl}|^2$. No entanto, se partirmos da hipótese de que o estado bipartido global é puro, então $1 - \text{Tr} \rho_{A,B}^2 = 0$, ou equivalentemente,

$$1 - \left(\underbrace{\sum_{\substack{i=k \\ j=l}} + \sum_{\substack{i=k \\ j \neq l}}}_{P_l} + \underbrace{\sum_{\substack{i \neq k \\ j=l}} + \sum_{\substack{i \neq k \\ j \neq l}}}_{C_{hs}} \right) |\rho_{ij,kl}|^2 = 0, \quad (3.62)$$

como $1 = \frac{d_A-1}{d_A} + 1/d_A$, podemos reescrever a Eq. (3.62) como

$$P_l(\rho_A) + \sum_{\substack{i \neq k \\ j=l}} |\rho_{ij,kj}|^2 + \sum_{\substack{i \neq k \\ j \neq l}} |\rho_{ij,kl}|^2 = \frac{d_A - 1}{d_A}, \quad (3.63)$$

mas, por outro lado, pela Eq. (3.61),

$$\sum_{\substack{i \neq k \\ j=l}} |\rho_{ij,kj}|^2 = C_{hs}(\rho_A) - \sum_{\substack{i \neq k \\ j \neq l}} \rho_{ij,kj} \rho_{il,kl}^*. \quad (3.64)$$

Logo, substituindo (3.64) em (3.63), obtemos

$$P_l(\rho_A) + C_{hs}(\rho_A) + \sum_{\substack{i \neq k \\ j \neq l}} |\rho_{ij,kl}|^2 - \sum_{\substack{i \neq k \\ j \neq l}} \rho_{ij,kj} \rho_{il,kl}^* = \frac{d_A - 1}{d_A}, \quad (3.65)$$

sugerindo a seguinte definição $C_{hs}^{ml}(\rho_{A|B}) := \sum_{\substack{i \neq k \\ j \neq l}} |\rho_{ij,kl}|^2 - \sum_{\substack{i \neq k \\ j \neq l}} \rho_{ij,kj} \rho_{il,kl}^*$ como coerência compartilhada entre A e B . E, portanto, chegamos na seguinte relação completa de complementariedade

$$P_l(\rho_A) + C_{hs}(\rho_A) + C_{hs}^{ml}(\rho_{A|B}) = \frac{d_A - 1}{d_A}. \quad (3.66)$$

Ou seja, é possível observar que parte da informação sobre o sistema $|A$ está sendo compartilhada com o sistema B e na relação acima é expressa por $C_{hs}^{ml}(\rho_{A|B})$. Tal relação é equivalente à obtida por Jakob e Bergou em (JAKOB; BERGOU, 2006), uma vez que $P_l(\rho_A) = \frac{1}{2}P_A^2$, and $C_{hs}(\rho_A) = \frac{1}{2}V_A^2$ e $C_{hs}^{ml}(\rho_{A|B}) = \frac{1}{2}E^2$ onde E é concurrence generalizada para sistemas bipartidos de dimensão arbitrária (RUNGTA et al., 2001). É interessante notar que $C_{hs}^{ml}(\rho_{A|B}) = 1 - \text{Tr} \rho_A^2 = S_l(\rho_A)$ para casos globais puros. De fato,

$$S_l(\rho_A) = 1 - \text{Tr} \rho_A^2 = \sum_{i,j} \rho_{ij,ij} - \sum_{i,k} \left| \sum_j \rho_{ij,kj} \right|^2 \quad (3.67)$$

$$= \sum_{i,j} \rho_{ij,ij} - \left(\sum_{i=k} + \sum_{i \neq k} \right) \left(\sum_j |\rho_{ij,kj}|^2 + \sum_{j \neq l} \rho_{ij,kj} \rho_{il,kl}^* \right) \quad (3.68)$$

$$= \sum_{i,j} \rho_{ij,ij} (1 - \rho_{ij,ij}) - \sum_{\substack{i \neq k \\ j}} |\rho_{ij,kj}|^2 - \left(\sum_{i=k} + \sum_{i \neq k} \right) \rho_{ij,kj} \rho_{il,kl}^* \quad (3.69)$$

$$= \left(\sum_{\substack{i \neq k \\ j=l}} + \sum_{\substack{i=k \\ j \neq l}} + \sum_{\substack{i \neq k \\ j \neq l}} \right) \rho_{ij,ij} \rho_{kl,kl} - \sum_{\substack{i \neq k \\ j}} |\rho_{ij,kj}|^2 - \left(\sum_{\substack{i=k \\ j \neq l}} + \sum_{\substack{i \neq k \\ j \neq l}} \right) \rho_{ij,kj} \rho_{il,kl}^* \quad (3.70)$$

$$= \left(\sum_{\substack{i \neq k \\ j=l}} + \sum_{\substack{i=k \\ j \neq l}} + \sum_{\substack{i \neq k \\ j \neq l}} \right) |\rho_{ij,kl}|^2 - \sum_{\substack{i \neq k \\ j}} |\rho_{ij,kj}|^2 - \left(\sum_{\substack{i=k \\ j \neq l}} + \sum_{\substack{i \neq k \\ j \neq l}} \right) \rho_{ij,kj} \rho_{il,kl}^* \quad (3.71)$$

$$= \sum_{\substack{i \neq k \\ j \neq l}} \left(|\rho_{ij,kl}|^2 - \rho_{ij,kj} \rho_{il,kl}^* \right) \quad (3.72)$$

$$= C_{hs}^{ml}(\rho_{A|B}), \quad (3.73)$$

sendo possível notar, portanto, que a entropia linear de A é a medida de emaranhamento entre A e B que completa a relação de complementariedade baseada na medida de Hilbert-Schmidt, dado que o estado global é puro.

3.2.2 Caso tripartido

Seguindo o mesmo raciocínio da seção anterior, consideremos um sistema quântico tripartido puro representado por $|\Psi\rangle_{A,B,C} \in \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B \otimes \mathcal{H}_C$. Seja $\{|i\rangle_A\}_{i=0}^{d_A-1}$, $\{|j\rangle_B\}_{j=0}^{d_B-1}$, $\{|k\rangle_C\}_{k=0}^{d_C-1}$ bases ortonormais locais em \mathcal{H}_A , \mathcal{H}_B , \mathcal{H}_C , respectivamente, de modo que

$$\rho_{A,B,C} = |\Psi\rangle_{A,B,C} \langle\Psi| = \sum_{i,l=0}^{d_A-1} \sum_{j,m=0}^{d_B-1} \sum_{k,n=0}^{d_C-1} \rho_{ijk,lmn} |i,j,k\rangle_{A,B,C} \langle l,m,n| \quad (3.74)$$

representa o estado do sistema tripartido puro. O subsistema A , por exemplo, é representado pelo operador densidade reduzido

$$\rho_A = \sum_{i,l=0}^{d_A-1} \rho_{il}^A |i\rangle_A \langle l| = \sum_{i,l=0}^{d_A-1} \sum_{j=0}^{d_B-1} \sum_{k=0}^{d_C-1} \rho_{ijk,ljk} |i\rangle_A \langle l|, \quad (3.75)$$

e similarmente para B e C . Em geral, o estado do subsistema A é misto, e, portanto, explorando $1 - \text{Tr} \rho_A^2 \geq 0$, é possível obter uma relação incompleta de complementariedade para o subsistema A . Agora, dado que

$$P_l(\rho_A) = \sum_{i=0}^{d_A-1} (\rho_{ii}^A)^2 - 1/d_A = \sum_{i=0}^{d_A-1} \left(\sum_{j=0}^{d_B-1} \sum_{k=0}^{d_C-1} \rho_{ijk,ijk} \right)^2 - 1/d_A, \quad (3.76)$$

$$C_{hs}(\rho) = \sum_{i \neq k=0}^{d_A-1} |\rho_{ik}^A|^2 = \sum_{i \neq l=0}^{d_A-1} \left| \sum_{j=0}^{d_B-1} \sum_{k=0}^{d_C-1} \rho_{ijk,ljk} \right|^2, \quad (3.77)$$

notemos

$$\begin{aligned} P_l(\rho_A) &= \sum_{i=0}^{d_A-1} \left(\sum_{j=0}^{d_B-1} \sum_{k=0}^{d_C-1} \rho_{ijk,ijk} \right)^2 - 1/d_A \\ &= \sum_i \sum_{j,k} \rho_{ijk,ijk}^2 + \sum_i \left(\sum_{\substack{j \neq m \\ k=n}} + \sum_{\substack{j=m \\ k \neq n}} + \sum_{\substack{j \neq m \\ k \neq n}} \right) \rho_{ijk,ijk} \rho_{imn,imn} - 1/d_A \\ &= \left(\sum_{\substack{i=l \\ j=m \\ k=n}} + \sum_{\substack{i=l \\ j \neq m \\ k \neq n}} + \sum_{\substack{i=l \\ j=m \\ k \neq n}} + \sum_{\substack{i=l \\ j \neq m \\ k=n}} \right) |\rho_{ijk,lmn}|^2 - 1/d_A, \end{aligned} \quad (3.78)$$

onde novamente foi usada a pureza de $\rho_{A,B,C}$: $\rho_{ijk,ljk}\rho_{imn,imn} = |\rho_{ijk,lmn}|^2$, enquanto que

$$\begin{aligned} C_{hs}(\rho_A) &= \sum_{i \neq l=0}^{d_A-1} \left| \sum_{j=0}^{d_B-1} \sum_{k=0}^{d_C-1} \rho_{ijk,ljk} \right|^2 \\ &= \sum_{i \neq l} \sum_{j,k} |\rho_{ijk,ljk}|^2 + \sum_{i \neq l} \left(\sum_{\substack{j=m \\ k \neq n}} + \sum_{\substack{j \neq m \\ k=n}} + \sum_{\substack{j \neq m \\ k \neq n}} \right) \rho_{ijk,ljk} \rho_{imn,lmn}^*. \end{aligned} \quad (3.79)$$

Caso queira se convencer dessa expressão, sugiro considerar três qubits e abrir o somatório. Logo, como a impureza de A pode ser atribuída às correlações de A com B e C , então explorando a pureza de $\rho_{A,B,C}$, temos

$$1 - \left(\underbrace{\sum_{\substack{i=l \\ j=m \\ k=n}} + \sum_{\substack{i=l \\ j=m \\ k \neq n}} + \sum_{\substack{i=l \\ j \neq m \\ k=n}} + \sum_{\substack{i=l \\ j \neq m \\ k \neq n}}}_{P_{hs}(\rho_A)} + \underbrace{\sum_{\substack{i \neq l \\ j=m \\ k \neq n}} + \sum_{\substack{i \neq l \\ j \neq m \\ k=n}} + \sum_{\substack{i \neq l \\ j \neq m \\ k \neq n}}}_{C_{hs}(\rho_A)} \right) |\rho_{ijk,lmn}|^2 = 0, \quad (3.80)$$

sendo possível reescrever a equação acima como

$$P_l(\rho_A) + \left(\sum_{\substack{i \neq l \\ j=m \\ k \neq n}} + \sum_{\substack{i \neq l \\ j \neq m \\ k=n}} + \underbrace{\sum_{\substack{i \neq l \\ j=m \\ k=n}}}_{C_{hs}(\rho_A)} + \sum_{\substack{i \neq l \\ j \neq m \\ k \neq n}} \right) |\rho_{ijk,lmn}|^2 = \frac{d_A - 1}{d_A}, \quad (3.81)$$

mas, por outro lado,

$$\sum_{i \neq l} \sum_{j,k} |\rho_{ijk,ljk}|^2 = C_{hs}(\rho_A) - \sum_{i \neq l} \left(\sum_{\substack{j=m \\ k \neq n}} + \sum_{\substack{j \neq m \\ k=n}} + \sum_{\substack{j \neq m \\ k \neq n}} \right) \rho_{ijk,ljk} \rho_{imn,lmn}^*, \quad (3.82)$$

e, portanto, temos que

$$P_l(\rho_A) + C_{hs}(\rho_A) + \left(\sum_{\substack{i \neq l \\ j \neq m \\ k \neq n}} + \sum_{\substack{i \neq l \\ j=m \\ k \neq n}} + \sum_{\substack{i \neq l \\ j \neq m \\ k=n}} \right) \left(|\rho_{ijk,lmn}|^2 - \rho_{ijk,ljk} \rho_{imn,lmn}^* \right) = \frac{d_A - 1}{d_A}, \quad (3.83)$$

sendo, novamente, sugestivo definir a coerência compartilhada de A com B e C como

$$\begin{aligned} C_{hs}^{nl}(\rho_{A|BC}) &:= \left(\sum_{\substack{i \neq l \\ j \neq m \\ k \neq n}} + \sum_{\substack{i \neq l \\ j=m \\ k \neq n}} + \sum_{\substack{i \neq l \\ j \neq m \\ k=n}} \right) \left(|\rho_{ijk,lmn}|^2 - \rho_{ijk,ljk} \rho_{imn,lmn}^* \right) \\ &= \sum_{i \neq l} \left(\sum_{\substack{j \neq m \\ k \neq n}} + \sum_{\substack{j=m \\ k \neq n}} + \sum_{\substack{j \neq m \\ k=n}} \right) |\rho_{ijk,lmn}|^2 - 2 \sum_{i \neq l} \left(\sum_{\substack{j=m \\ k < n}} + \sum_{\substack{j < m \\ k=n}} + \sum_{\substack{j < m \\ k \neq n}} \right) \Re e(\rho_{ijk,ljk} \rho_{imn,lmn}^*). \end{aligned} \quad (3.84)$$

Nesse caso, novamente $C_{hs}^{nl}(\rho_{A|BC}) = 1 - \text{Tr} \rho_A^2 = S_l(\rho_A)$, satisfazendo assim o básico para uma medida de emaranhamento para casos globais puros. De fato,

$$1 - \text{Tr} \rho_A^2 = 1 - \sum_{i,l} \left| \sum_{j,k} \rho_{ijk,ljk} \right|^2 = 1 - \sum_{i,l} \sum_{j,k} \sum_{m,n} \rho_{ijk,ljk} \rho_{imn,lmn}^* \quad (3.85)$$

$$= \sum_{i,j,k} \rho_{ijk,ijk} - \left(\sum_{i=l} + \sum_{i \neq l} \right) \left(\sum_{\substack{j=m \\ k=n}} + \sum_{\substack{j=m \\ k \neq n}} + \sum_{\substack{j \neq m \\ k=n}} + \sum_{\substack{j \neq m \\ k \neq n}} \right) \rho_{ijk,ljk} \rho_{imn,lmn}^* \quad (3.86)$$

$$= \sum_{i,j,k} \rho_{ijk,ijk} (1 - \rho_{ijk,ijk}) - \left(\sum_{i=l} + \sum_{i \neq l} \right) \left(\sum_{\substack{j=m \\ k \neq n}} + \sum_{\substack{j \neq m \\ k=n}} + \sum_{\substack{j \neq m \\ k \neq n}} \right) \rho_{ijk,ljk} \rho_{imn,lmn}^* - \sum_{\substack{i \neq l \\ j=m \\ k=n}} \rho_{ijk,ljk} \rho_{imn,lmn}^*. \quad (3.87)$$

Notando as seguintes identidades

$$\sum_{i,j,k} \rho_{ijk,ijk} (1 - \rho_{ijk,ijk}) = \left(\sum_{\substack{i \neq l \\ j \neq m \\ k \neq n}} + \sum_{\substack{i=l \\ j \neq m \\ k \neq n}} + \sum_{\substack{i \neq l \\ j=m \\ k \neq n}} + \sum_{\substack{i \neq l \\ j \neq m \\ k=n}} + \sum_{\substack{i=l \\ j=m \\ k \neq n}} + \sum_{\substack{i=l \\ j \neq m \\ k=n}} + \sum_{\substack{i \neq l \\ j=m \\ k=n}} \right) \rho_{ijk,ijk} \rho_{lmn,lmn},$$

$$\sum_{i \neq l} \sum_{\substack{j=m \\ k=n}} \rho_{ijk,ljk} \rho_{imn,lmn}^* = \sum_{i \neq l} \sum_{\substack{j=m \\ k=n}} \rho_{ijk,ijk} \rho_{lmn,lmn}^*, \quad (3.88)$$

onde, na primeira identidade, apenas reescrevemos o produto dos elementos diagonais usando $\text{Tr} \rho_{A,B,C} = 1$, enquanto, na segunda identidade, exploramos a pureza $\rho_{A,B,C}$. Logo,

$$1 - \text{Tr} \rho_A^2 = \left(\sum_{\substack{i \neq l \\ j \neq m \\ k \neq n}} + \sum_{\substack{i \neq l \\ j=m \\ k \neq n}} + \sum_{\substack{i \neq l \\ j \neq m \\ k=n}} \right) \rho_{ijk,ijk} \rho_{lmn,lmn} - \sum_{i \neq l} \left(\sum_{\substack{j=m \\ k \neq n}} + \sum_{\substack{j \neq m \\ k=n}} + \sum_{\substack{j \neq m \\ k \neq n}} \right) \rho_{ijk,ljk} \rho_{imn,lmn}^* = C_{hs}^{nl}(\rho_{A|BC}), \quad (3.89)$$

que também implica em $E = \sqrt{2C_{hs}^{nl}(\rho_{A|BC})}$, onde E é a Concurrence generalizada definida em (BHASKARA; PANIGRAHI, 2017), para o caso de um sistema tripartido puro. E, portanto, temos a seguinte relação completa de complementariedade

$$P_l(\rho_A) + C_{hs}(\rho_A) + C_{hs}^{nl}(\rho_{A|BC}) = \frac{d_A - 1}{d_A}. \quad (3.90)$$

3.2.3 Caso multipartido

Generalizando o procedimento apresentado nas últimas duas seções, derivamos aqui relações completas de complementariedade para um subsistema pertencente a um sistema quântico multipartido puro. Sejam n -quantons puros cujo estado global é descrito por $|\Psi\rangle_{A_1, \dots, A_n} \in \mathcal{H}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{H}_n$. Seja também $\{|i_m\rangle_{A_m}\}_{i_m=0}^{d_m-1}$ uma base ortonormal local para cada subsistema $A_m, m = 1, \dots, n$. Assim, o estado do sistema é dado por

$$\rho_{A_1, \dots, A_n} = \sum_{i_1, \dots, i_n} \sum_{j_1, \dots, j_n} \rho_{i_1 \dots i_n, j_1 \dots j_n} |i_1, \dots, i_n\rangle_{A_1, \dots, A_n} \langle j_1, \dots, j_n|. \quad (3.91)$$

Sem perda de generalidade, consideremos o estado do subsistema A_1 , que é obtido ignorando o resto dos subsistemas

$$\rho_{A_1} = \sum_{i_1, j_1} \rho_{i_1, j_1}^{A_1} |i_1\rangle_{A_1} \langle j_1| = \sum_{i_1, j_1} \sum_{i_2, \dots, i_n} \rho_{i_1 i_2 \dots i_n, j_1 i_2 \dots i_n} |i_1\rangle_{A_1} \langle j_1|, \quad (3.92)$$

no qual $C_{hs}(\rho_{A_1}), P_l(\rho_{A_1})$ são dados por

$$C_{hs}(\rho_{A_1}) = \sum_{i_1 \neq j_1} |\rho_{i_1, j_1}^{A_1}|^2 = \sum_{i_1 \neq j_1} \left| \sum_{i_2, \dots, i_n} \rho_{i_1 i_2 \dots i_n, j_1 i_2 \dots i_n} \right|^2, \quad (3.93)$$

$$P_l(\rho_{A_1}) = \sum_{i_1} (\rho_{i_1, i_1}^{A_1})^2 - 1/d_{A_1} = \sum_{i_1} \left(\sum_{i_2, \dots, i_n} \rho_{i_1 i_2 \dots i_n, i_1 i_2 \dots i_n} \right)^2 - 1/d_{A_1}. \quad (3.94)$$

Agora, dada a pureza de ρ_{A_1, \dots, A_n} , teremos

$$1 - \text{Tr} \rho_{A_1, \dots, A_n}^2 = 1 - \left(\sum_{(i_1, \dots, i_n) = (j_1, \dots, j_n)} + \sum_{(i_1, \dots, i_n) \neq (j_1, \dots, j_n)} \right) |\rho_{i_1 i_2 \dots i_n, j_1 j_2 \dots j_n}|^2 = 0, \quad (3.95)$$

onde

$$\sum_{(i_1, \dots, i_n) \neq (j_1, \dots, j_n)} \equiv \sum_{\substack{i_1 \neq j_1 \\ i_2 = j_2 \\ \vdots \\ i_n = j_n}} + \sum_{\substack{i_1 = j_1 \\ i_2 \neq j_2 \\ \vdots \\ i_n = j_n}} + \dots + \sum_{\substack{i_1 = j_1 \\ i_2 = j_2 \\ \vdots \\ i_n \neq j_n}} + \sum_{\substack{i_1 \neq j_1 \\ i_2 \neq j_2 \\ \vdots \\ i_n = j_n}} + \dots + \sum_{\substack{i_1 \neq j_1 \\ i_2 = j_2 \\ \vdots \\ i_n \neq j_n}} + \dots + \sum_{\substack{i_1 = j_1 \\ i_2 \neq j_2 \\ \vdots \\ i_n \neq j_n}}. \quad (3.96)$$

de modo que a Eq. (3.95) pode ser reescrita como uma relação completa de complementariedade para o subsistema A_1

$$P_l(\rho_{A_1}) + C_{hs}(\rho_{A_1}) + C_{hs}^{ml}(\rho_{A_1|A_2, \dots, A_n}) = \frac{d_{A_1} - 1}{d_{A_1}}, \quad (3.97)$$

onde a coerência compartilhada de A_1 com A_2, \dots, A_n é definida como

$$C_{hs}^{nl}(\rho_{A_1|A_2, \dots, A_n}) := \sum_{i_1 \neq j_1} \sum_{(i_2, \dots, i_n) \neq (j_2, \dots, j_n)} \left(|\rho_{i_1 i_2 \dots i_n, j_1 j_2 \dots j_n}|^2 - \rho_{i_1 i_2 \dots i_n, j_1 i_2 \dots i_n} \rho_{i_1 j_2 \dots j_n, j_1 j_2 \dots j_n}^* \right). \quad (3.98)$$

Novamente $E = \sqrt{2C_{hs}^{nl}(\rho_{A_1|A_2, \dots, A_n})}$, onde E é a Concurrence generalizada definida em (BHASKARA; PANIGRAHI, 2017). Para isso, basta mostrar que $C_{hs}^{nl}(\rho_{A_1|A_2, \dots, A_n})$ é igual a entropia linear de A_1 :

$$\begin{aligned} 1 - \text{Tr}(\rho_{A_1}^2) &= 1 - \sum_{i_1, j_1} \left| \sum_{i_2, \dots, i_n} \rho_{i_1 i_2 \dots i_n, j_1 i_2 \dots i_n} \right|^2 \\ &= \sum_{i_1, \dots, i_n} \rho_{i_1 i_2 \dots i_n, i_1 i_2 \dots i_n} - \left(\sum_{i_1=j_1} + \sum_{i_1 \neq j_1} \right) \sum_{i_2, \dots, i_n} \sum_{j_2, \dots, j_n} \rho_{i_1 i_2 \dots i_n, j_1 i_2 \dots i_n} \rho_{i_1 j_2 \dots j_n, j_1 j_2 \dots j_n}^* \\ &= \sum_{(i_1, \dots, i_n) \neq (j_1, \dots, j_n)} |\rho_{i_1 i_2 \dots i_n, j_1 j_2 \dots j_n}|^2 - \left(\sum_{i_1=j_1} + \sum_{i_1 \neq j_1} \right) \sum_{(i_2, \dots, i_n) \neq (j_2, \dots, j_n)} \rho_{i_1 i_2 \dots i_n, j_1 i_2 \dots i_n} \\ &\quad \rho_{i_1 j_2 \dots j_n, j_1 j_2 \dots j_n}^* - \sum_{i_1 \neq j_1} \sum_{(i_2, \dots, i_n) = (j_2, \dots, j_n)} \rho_{i_1 i_2 \dots i_n, j_1 i_2 \dots i_n} \rho_{i_1 j_2 \dots j_n, j_1 j_2 \dots j_n}^* \\ &= \sum_{i_1 \neq j_1} \sum_{(i_2, \dots, i_n) \neq (j_2, \dots, j_n)} \left(|\rho_{i_1 i_2 \dots i_n, j_1 j_2 \dots j_n}|^2 - \rho_{i_1 i_2 \dots i_n, j_1 i_2 \dots i_n} \rho_{i_1 j_2 \dots j_n, j_1 j_2 \dots j_n}^* \right) \\ &= C_{hs}^{nl}(\rho_{A_1|A_2, \dots, A_n}). \end{aligned} \quad (3.99)$$

Finalmente, gostaríamos de ressaltar a principal ideia aqui apresentada: devido ao teorema da purificação, é sempre possível considerar um sistema multipartido puro, e então explorar sua pureza a fim de obter relações completas de complementariedade para qualquer um de seus subsistemas. Também, vale mencionar que para o caso multipartido, a entropia linear está medindo o emaranhamento do sistema A_1 com o resto dos subsistemas A_2, \dots, A_n como um todo. Ou seja, como se tivéssemos uma bipartição do tipo $A_1|A_2 \dots A_n$. Em (BASSO; MAZIERO, 2020b), mostramos que para alguns tipos de estado é possível expressar a entropia linear $S_l(\rho_{A_1})$ em termos da coerência correlacionada entre A_1 e diferentes partições com o resto do sistema. Por outro lado, se considerarmos um sistema multipartido misto descrito por ρ_{A_1, \dots, A_n} , então $S_l(\rho_{A_1}) \neq C_{hs}^{nl}(\rho_{A_1|A_2, \dots, A_n})$. Nesse caso, $S_l(\rho_{A_1}) = 1 - \text{Tr} \rho_{A_1}^2$ não mede apenas o emaranhamento entre A_1 e o resto dos subsistemas, mas quantifica de maneira geral a mistura de A_1 , que, nesse caso, pode ser devido à varios fatores, além do emaranhamento com o resto dos subsistemas, como, por exemplo, a incerteza na preparação do estado. Assim, $P_l(\rho_{A_1}) + C_{hs}(\rho_{A_1}) + S_l(\rho_{A_1}) = \frac{d_{A_1}-1}{d_{A_1}}$ continuará sendo uma relação completa de complementariedade com $S_l(\rho_{A_1})$ medindo a mistura de A_1 , no entanto, tal relação não pode ser derivada explorando a pureza do sistema global.

3.2.4 Caso bipartido novamente

Voltando ao caso bipartido puro, consideremos a relação de complementariedade

$$C_{re}(\rho_A) + P_{vn}(\rho_A) \leq S_{vn}^{max} = \ln d_A, \quad (3.100)$$

para o subsistema A . Como enfatizado anteriormente, tal relação de complementariedade só é possível devido às propriedades de ρ , pois $\text{Tr } \rho = 1$ e $\rho \geq 0$ permite interpretar os elementos da diagonal de ρ como uma distribuição de probabilidade e, portanto, sendo possível definir $P_{vn}(\rho)$ a partir $S_{vn}(\rho_{diag})$. Mas note que a relação (3.100) é uma relação incompleta, ou seja, parte da informação sobre o sistema está faltando. Agora, seja $|\Psi\rangle_{A,B} \in \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ o estado do sistema quântico bipartido. Pela decomposição de Schmidt, é possível escrever

$$|\Psi\rangle_{A,B} = \sum_i \sqrt{\lambda_i} |\psi_i\rangle_A \otimes |\phi_i\rangle_B, \quad (3.101)$$

que, em particular, implica em $S_{vn}(\rho_A) = S_{vn}(\rho_B)$. Como já visto, $E(|\Psi\rangle_{A,B}) = S_{vn}(\rho_A) = S_{vn}(\rho_B)$ quantifica o emaranhamento entre A e B . Assim, tal medida de correlação junto com a expressão (3.100) permite obter uma relação de complementariedade completa a partir da entropia relativa. Isto é, a partir da expressão para coerência baseada na entropia relativa

$$C_{re}(\rho_A) = S_{vn}(\rho_{diag}^A) - S_{vn}(\rho_A), \quad (3.102)$$

é possível reescrever tal equação como uma relação completa de complementariedade

$$C_{re}(\rho_A) + P_{vn}(\rho_A) + S_{vn}(\rho_A) = \ln d_A. \quad (3.103)$$

É interessante notar que a equação acima é equivalente à relação de complementariedade proposta em (ANGELO; RIBEIRO, 2015), onde os autores consideram $P_{vn}(\rho_A) + S_{vn}(\rho_A)$ como uma medida da propriedade corpuscular do sistema A , uma vez que podemos considerar que o caráter corpuscular está associado à informação acessível de caminho e/ou ao emaranhamento com outro sistema. A soma $P_{vn}(\rho_A) + S_{vn}(\rho_A)$ na realidade pode ser considerada como uma medida de distinguibilidade que também está associada ao caráter corpuscular do sistema. Enquanto a previsibilidade está relacionada com a capacidade de prever o estado do sistema antes de realizar alguma medição, sem qualquer detector de caminho, a distinguibilidade está relacionada à capacidade de distinguir os estados do detector de caminho (que estão

emaranhados com o quanton) após as medições e também com a informação de caminho pós-medida. Ambas as medidas estão relacionadas ao mesmo aspecto, mas são conceitualmente diferentes. Além disso, Englert e Bergou (ENGLERT; BERGOU, 2000) apontaram a possível conexão entre distinguibilidade, previsibilidade e emaranhamento, e conjecturaram que uma medida de emaranhamento estaria oculta na medida de distinguibilidade. Para uma discussão mais recente entre distinguibilidade, previsibilidade e emaranhamento, ver (QURESHI, 2021). Conforme apontado pelo autor, se o quanton se acopla ao dispositivo de detecção de trajetória, então o emaranhamento é útil para relacionar a distinguibilidade à previsibilidade. No entanto, se o quanton não acoplar-se com o detector de caminho, o conceito de distinguibilidade será inútil, já que não se está fazendo uma distinção experimental entre os caminhos. Por outro lado, o emaranhamento pode ser considerado parte integrante das RCC's uma vez que, por exemplo, é possível que a trajetória do quanton esteja emaranhada com um grau de liberdade interno ou com um grau de liberdade inacessível do ambiente.

A fim de exemplificar a relação entre o aspecto corpuscular e emaranhamento, consideremos um qubit, denotado por A , e um qutrit¹, denotado por B , no seguinte estado puro:

$$|\Psi\rangle_{A,B} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0,0\rangle_{A,B} + |1,1\rangle_{A,B}). \quad (3.104)$$

Como é possível perceber, ambos os sistemas estão em um estado emaranhado, de modo que o estado reduzido de cada subsistema é dado por $\rho_A = \rho_B = \frac{1}{2}|0\rangle\langle 0| + \frac{1}{2}|1\rangle\langle 1|$. Agora, vamos imaginar que dois experimentalistas, Alice e Bob, estão de posse do qutrit B em um interferômetro de 3 fendas, e em cada rodada do experimento, eles estão apostando quem consegue prever o caminho do qutrit ao longo do interferômetro. Depois de repetido o experimento inúmeras vezes, o apostador que mais acertar o caminho do qutrit ganha uma cerveja no final do dia. Além disso, Alice também possui a informação de que o qutrit está emaranhado com o qubit A (que nesse caso, pode ser um grau de liberdade interno do qutrit ou outro sistema quântico qualquer) e sabe que o estado do sistema global é dado pela Eq. (3.104). No entanto, ela não conta esta informação à Bob, uma vez que eles estão apostando quem paga a cerveja no final do dia. Logo, Bob não sabendo que o qutrit está emaranhado e que o estado do sistema é dado pela Eq.(3.104), dado que o caminho das 3 fendas são igualmente prováveis, em algumas rodadas do experimento, ele apostará no caminho associado ao estado $|2\rangle$ do qutrit, sendo possível observar que Alice tem mais poder de previsão que Bob, uma vez que ela sabe que o qutrit estará no caminho associado ao estado $|0\rangle$, ou no caminho associado ao estado $|1\rangle$, ambos com 50% de

¹Isto é, um sistema quântico de 3 níveis

chance. Mais precisamente, a previsibilidade do qutrit B associado estado global dado Eq.(3.104) é diferente de zero: $P_{vn}(\rho_B) = \ln 3 - \ln 2 > 0$, mesmo que os caminhos 0 e 1 sejam igualmente prováveis. Pois, neste caso, estamos considerando um sistema de 3 níveis, e o caminho 2 está descartado para quem tem informação do estado global. Indo além, se Alice fosse capaz de realizar medidas no qubit A sem que Bob perceba, ela seria capaz de acessar a informação de caminho e ganhar todas as rodadas de aposta. Assim, podemos ver que o caráter corpuscular de um subsistema também está ligado com o emaranhamento com outros subsistemas, uma vez que a informação de caminho está codificada nos estados de outros subsistemas. No entanto, vale ressaltar que o emaranhamento não precisa ser necessariamente com outro sistema no qual o experimentador tenha controle, mas sim com um grau de liberdade do ambiente no qual o experimentador não tem acesso.

4 INCERTEZA E COMPLEMENTARIEDADE

No capítulo anterior, vimos como obter relações incompletas de complementariedade, explorando as propriedades do operador densidade. Ademais, também vimos como obter relações completas de complementariedade explorando a pureza do operador densidade global. No entanto, o procedimento para completar as relações foi feito apenas para a relação de Hilbert-Schmidt e a relação baseada na entropia relativa. A fim de completar as outras duas restantes, i.e., as relações de Wigner-Yanase e norma- l_1 , neste capítulo iremos explorar a relação existente entre incerteza e complementariedade, uma vez que Luo, em (LUO, 2005b), propôs uma decomposição da incerteza sobre um observável em suas partes clássica e quântica, e também, estabeleceu critérios que qualquer medida de incerteza clássica e incerteza quântica devem satisfazer. Enquanto a incerteza clássica surge da ignorância que temos sobre a preparação do sistema, a incerteza quântica é intrínseca. Mesmo para estados quânticos puros, que representam o conhecimento máximo sobre a preparação de um estado que um experimentador pode ter, só é possível fazer previsões probabilísticas. A situação fica ainda pior quando consideramos dois observáveis incompatíveis de um sistema. Isso é capturado pelas relações de incerteza, como a relação de incerteza de Heisenberg-Robertson (ROBERTSON, 1929), que é representada pela expressão

$$\mathcal{V}(\rho, A)\mathcal{V}(\rho, B) \geq \frac{1}{4}|\text{Tr}(\rho[A, B])|^2, \quad (4.1)$$

onde $\mathcal{V}(\rho, A) = \text{Tr} \rho A^2 - (\text{Tr} \rho A)^2$ é a variância do observável A no estado ρ , $\mathcal{V}(\rho, B)$ é definido de forma semelhante e $[A, B] = AB - BA$ é comutador entre A e B . A existência de observáveis incompatíveis na mecânica quântica está de certa maneira relacionada à coerência quântica. No entanto, em experimentos reais, a maioria dos estados quânticos são mistos, o que significa que parte da imprevisibilidade é clássica. Uma vez que a incerteza de um observável em um estado quântico é geralmente descrita pela variância, quando os estados são mistos, a variância é um híbrido de incertezas quântica e clássica. Como apontado por Luo, a informação de Wigner-Yanase (WIGNER; YANASE, 1963) pode ser interpretada como uma medida de incerteza quântica, enquanto que a incerteza clássica pode ser capturada pela diferença entre a variância total e a incerteza quântica quantificada pela informação de Wigner-Yanase. Posteriormente, o mesmo autor também estabeleceu uma relação de incerteza mais forte do que a Eq. (4.1), levando em consideração apenas as incertezas quânticas (LUO, 2005a). Mais recentemente, a mesma decomposição foi feita para relações de incerteza entrópicas em (KORZEKWA et al., 2014).

No entanto, no presente trabalho nos restringiremos apenas à decomposição

da incerteza de um observável em suas partes clássica e quântica. A partir disso, estabelecemos relações entre os critérios de Luo para incerteza quântica e clássica e os critérios de Dürr e Englert et al. para medida de visibilidade, assim como critérios para emaranhamento (VIDAL, 2000). Também discutimos a relação entre emaranhamento e medidas de incerteza clássica local, bem como a relação entre coerência quântica e quantificadores de incerteza quântica, obtendo uma relação completa de complementaridade para incerteza quântica, incerteza clássica e previsibilidade. A incerteza quântica total de um interferômetro d -caminhos é mostrada como equivalente à coerência de Wigner-Yanase e a incerteza clássica correspondente é mostrada como um quantificador de emaranhamento. A dualidade entre complementaridade e incerteza é usada para derivar medidas de correlações quânticas que completam as relações de complementaridade para coerência norma- l_1 e rederivar a relação de Hilbert-Schmidt (BASSO; MAZIERO, 2020c). Por fim, vamos mostrar que é sempre possível obter monótonos de emaranhamento para casos globais puros a partir de qualquer relação de complementariedade cujas medidas de previsibilidade e visibilidade satisfaçam os critérios estabelecidos na literatura (DÜRR, 2000; ENGLERT et al., 2008), sintetizando todas as relações completas de complementariedade conhecidas na literatura, bem como abrindo a possibilidade de estabelecer novas medidas de emaranhamento sempre que houver uma relação de complementariedade que satisfaça os critérios mencionados anteriormente.

4.1 RELAÇÃO ENTRE OS CRITÉRIOS DE INCERTEZA, COMPLEMENTARIEDADE E EMARANHAMENTO

Na MQ, a incerteza sobre um observável A , como o caminho em um interferômetro de muitas fendas, quando o sistema é descrito pelo estado ρ , é dado pela sua variância (NAPOLITANO; SAKURAI, 2017)

$$\mathcal{V}(\rho, A) = \text{Tr} \rho A_0^2 = \text{Tr} \rho A^2 - (\text{Tr} \rho A)^2, \quad (4.2)$$

onde $A_0 = A - \text{Tr} \rho A$. Como, em geral, o estado ρ é misto, a variância $\mathcal{V}(\rho, A)$ quantifica tanto a incerteza de natureza quântica quanto de natureza clássica. Assim, Luo (LUO, 2005b) propôs separar a variância nas suas partes quântica e clássica

$$\mathcal{V}(\rho, A) = \mathcal{Q}(\rho, A) + \mathcal{C}(\rho, A), \quad (4.3)$$

onde $\mathcal{Q}(\rho, A)$ e $\mathcal{C}(\rho, A)$ corresponde às incertezas quântica e clássica, respectivamente, do observável A dado que o sistema está no estado ρ . Além disso, Luo estabele-

leceu um conjunto de critérios razoáveis que quaisquer medidas de incerteza quântica e clássica deve satisfazer. Essas propriedades são:

- L.1 Se ρ é puro, então $\mathcal{V}(\rho, A) = \mathcal{Q}(\rho, A)$ e $\mathcal{C}(\rho, A) = 0$, uma vez que o estado do sistema é conhecido e, portanto, toda a incerteza é intrinsecamente quântica.
- L.2 Se $[\rho, A] = 0$, ambos compartilham a mesma base de autovetores, sendo diagonais nessa base. Assim ρ e A se comportam como variáveis clássicas de modo que toda incerteza é de origem clássica, i.e., $\mathcal{Q}(\rho, A) = 0$ e $\mathcal{V}(\rho, A) = \mathcal{C}(\rho, A)$.
- L.3 $\mathcal{Q}(\rho, A)$ deve ser uma função convexa de ρ , uma vez que mistura clássica não aumenta a incerteza quântica. Enquanto, $\mathcal{C}(\rho, A)$ deve ser côncava em ρ , dado que uma mistura clássica de estados aumenta a incerteza clássica. Logo, $\mathcal{Q}(\sum_i p_i \rho_i, A) \leq \sum_i p_i \mathcal{Q}(\rho_i, A)$ e $\mathcal{C}(\sum_i p_i \rho_i, A) \geq \sum_i p_i \mathcal{C}(\rho_i, A)$, onde $\sum_i p_i = 1$, $p_i \in [0, 1]$, e ρ_i são operadores densidade.

A fim de explorar a relação entre as condições para uma medida de incerteza quântica e aquelas para uma medida de visibilidade, vamos nos restringir ao contexto da interferometria de múltiplas fendas¹, i.e., vamos considerar que o observável A é a projeção em um dos d -caminhos de um interferômetro de Mach-Zehnder: $A = |j\rangle\langle j|$, onde j rotula o j -ésimo caminho (estado). No caso extremo em que ρ é puro, e $\rho_{jj} = 1/d \forall j$, é de se esperar que incerteza quântica seja máxima $\mathcal{V}(\rho, A) = \mathcal{Q}(\rho, A) = \mathcal{Q}^{max}$, uma vez que há interferências entre todos os possíveis caminhos dois a dois e, portanto, o módulo das coerências de ρ atinge seu valor máximo. Logo, a visibilidade (ou coerência quântica) também atinge seu valor máximo, enquanto a incerteza clássica se anula $\mathcal{C}(\rho, A) = 0$. Já, no outro extremo, quando $[\rho, A] = 0$, ρ é um estado incoerente na base de autovetores que rotulam os caminhos, ou seja, $\rho = \sum_j \rho_{jj} |j\rangle\langle j|$, com $\rho_{jj}, j = 1, \dots, d$, sendo uma distribuição de probabilidades clássica. Logo, toda a incerteza sobre o sistema é clássica. Além disso, tanto a visibilidade quanto a incerteza quântica se anulam, i.e., $V = \mathcal{Q}(\rho, A) = 0$, uma vez que não há coerência nessa base. Por outro lado, se o caminho é conhecido, então ρ é puro e $\rho_{jj} = 1$ para algum j que rotula o caminho conhecido. Logo, $V = \mathcal{Q}(\rho, |j\rangle\langle j|) = \mathcal{C}(\rho, |j\rangle\langle j|) = 0$ e a previsibilidade atinge seu valor máximo. Finalmente, tanto a visibilidade quanto a incerteza quântica devem ser funções convexas de ρ , uma vez que mistura clássica de estados não aumenta a coerência do sistema e nem sua incerteza quântica.

Em contrapartida, a relação entre incerteza clássica e emaranhamento é mais sutil. Como vimos, as relações de complementariedade, que quantificam os aspectos ondulatórios e corpusculares de um sistema quântico descrito pelo operador densidade ρ , saturam apenas para estados puros. Para um estado maximamente incoe-

¹Esse é apenas um cenário físico específico no qual complementariedade e incerteza se aplicam, no entanto as conclusões aqui tiradas são válidas para quaisquer sistemas quânticos.

rente, isto é, se todos os caminhos são igualmente prováveis, $\rho = \frac{1}{d} \sum_j |j\rangle\langle j|$, as medidas que quantificam os aspectos ondulatórios e corpusculares de ρ se anulam e nenhuma informação ‘local’ sobre o sistema é obtida. Nesse caso $\mathcal{V}(\rho, A) = \mathcal{Q}(\rho, A) = 0$, e a incerteza clássica atinge seu valor máximo. Além disso, estados reduzidos maximamente incoerentes são usados para classificar estados maximamente emaranhados (BERGOU; HILLERY, 2013) uma vez que, como vimos, é sempre possível purificar ρ e pensá-lo como parte de um sistema maior no qual o estado global é conhecido e, geralmente, tal estado é emaranhado. Logo, a informação sobre ρ está codificada nas suas correlações com outros sistemas de modo que o emaranhamento pode ser visto como responsável pela perda das propriedades locais de ρ . Assim, se o sistema não está emaranhado, então ρ é puro. Nesse caso, a incerteza clássica também se anula. Por exemplo, podemos supor que ρ está emaranhado com os estados de um detector de caminho. Se os estados do detector são ortogonais, quando ignorarmos os estados do detector, obteremos um estado incoerente ρ na base que rotula os caminhos. Logo, podemos esperar que $\mathcal{C}(\rho, |j\rangle\langle j|) \neq 0$ é uma assinatura de emaranhamento. Embora, para qualquer estado quântico multipartido, medidas de emaranhamento devem ser convexas (BRUSS, 2002), a condição de que $\mathcal{C}(\rho, A)$ deve ser côncava diz respeito ao estado reduzido ρ . Como qualquer mistura clássica do tipo $\rho = \sum_i p_i \rho_i$ pode ser considerada como o efeito de medidas locais em outra parte do sistema (por exemplo, no detector de caminho), então tal mistura clássica pode ser considerada como o efeito de operações locais e comunicação clássica. Logo, como discutido anteriormente, qualquer medida de emaranhamento, assim como $\mathcal{C}(\rho, A)$, deve ser côncava sobre o efeito de LOCC.

Proposição 4. *Uma mistura clássica pode ser considerada como o efeito de medidas locais não-seletivas em outra parte do sistema global.*

Demonstração. Tal prova corresponde à parte inicial da prova de que a entropia de emaranhamento não aumenta em média por medidas locais em uma das partes. Mesmo assim, repetimos a parte inicial aqui. Consideremos um sistema bipartido puro $|\Psi\rangle_{A,B} \in \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ e, também, consideremos Alice e Bob de posse dos sistemas A e B, respectivamente. Dado que Alice realiza medidas projetivas sobre seu sistema, os possíveis resultados são rotulados pelo índice k e a medida ortogonal correspondente é dada pelo projetor P_k^A , com $\sum_k P_k^A = I_A$ e $P_k^A P_m^A = P_k^A \delta_{km}$. Assim, Alice obtém o resultado k com probabilidade $p_k = \langle \Psi | P_k^A \otimes I_B | \Psi \rangle_{A,B}$ de modo que o estado pós medida será $p_k^{-1} P_k^A |\Psi\rangle_{A,B} \langle \Psi | P_k^A$. Como o estado reduzido do Bob não pode mudar, caso contrário comunicação superluminal seria possível, então o estado de Bob pós

medida é dado por

$$\begin{aligned}\rho_B &= \text{Tr}_A(|\Psi\rangle_{A,B} \langle\Psi|) = \text{Tr}_A\left(\sum_j P_j^A |\Psi\rangle_{A,B} \langle\Psi| P_j^A\right) \\ &= \sum_j p_j \text{Tr}_A(p_j^{-1} P_j^A |\Psi\rangle_{A,B} \langle\Psi| P_j^A) \end{aligned} \quad (4.4)$$

$$= \sum_j p_j \text{Tr}_A \rho_{A,B}^{(j)}. \quad (4.5)$$

onde foram usadas as propriedades de ciclicidade e linearidade do traço. \square

Vale ressaltar aqui esse resultado já é bem conhecido na literatura e pode ser visto como um corolário direto do teorema de Neumark (BERGOU; HILLERY, 2013). Finalmente, como discutido anteriormente, podemos atribuir o surgimento de um estado clássico (incoerente) ao processo de decoerência (ZUREK, 2003), processo pelo qual há perda da coerência devido à interação com o ambiente (ou com um detector). Assim, começando com um estado $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$ puro e, devido à interação com o ambiente (ou com um detector) e a geração de correlações entre eles, o estado de interesse acaba no estado $\rho_{diag} = \sum_j \rho_{jj} |j\rangle\langle j|$, e a incerteza que temos sobre o sistema é apenas de origem clássica e representada pelos elementos $\rho_{jj}, j = 1, \dots, d$.

4.2 A COMPLEMENTARIEDADE DA INCERTEZA

A fim de introduzir uma medida de incerteza quântica, Luo considerou a seguinte definição

$$\mathcal{Q}(\rho, A) := \mathcal{I}_{wy}(\rho, A) = -\frac{1}{2} \text{Tr}([\sqrt{\rho}, A_0]^2), \quad (4.6)$$

onde $\mathcal{I}(\rho, A)$ é a informação de Wigner-Yanase e $A_0 := A - \text{Tr} \rho A$. Como ressaltado por Luo em (LUO, 2005b), a interpretação dada por Wigner e Yanase é que $\mathcal{Q}(\rho, A)$ quantifica o conteúdo de informação do estado quântico ρ em relação aos observáveis não comutantes com o observável A . Por causa do princípio de complementaridade de Bohr, podemos ainda interpretar $\mathcal{Q}(\rho, A)$ como algum tipo de incerteza do próprio observável A codificada em ρ (LUO, 2005b). De fato, quando ρ é puro, a informação de Wigner-Yanase se reduz a variância do observável A dado que o sistema está no estado ρ . A partir daí, a definição de incerteza clássica segue diretamente como a diferença entre a variância do observável A e sua incerteza quântica

$$\mathcal{C}(\rho, A) := \mathcal{V}(\rho, A) - \mathcal{Q}(\rho, A) = \text{Tr} \sqrt{\rho} A_0 \sqrt{\rho} A_0, \quad (4.7)$$

onde $A_0 = A - \text{Tr} \rho A$.

Seguindo o mesmo raciocínio da última seção, vamos considerar o observável A como a projeção sobre um dos caminhos de um interferômetro de Mach-Zehnder, i.e., $A = |j\rangle\langle j|$. Nesse caso, a incerteza quântica do j -ésimo caminho é dada por

$$\mathcal{Q}(\rho, |j\rangle\langle j|) = -\frac{1}{2} \text{Tr}([\sqrt{\rho}, |j\rangle\langle j|_0]^2) \quad (4.8)$$

$$= -\frac{1}{2} \left(\langle j|\sqrt{\rho}|j\rangle^2 + \langle j|\sqrt{\rho}|j\rangle^2 \right) \quad (4.9)$$

$$- \sum_k \langle k|\sqrt{\rho}|j\rangle\langle j|\sqrt{\rho}|k\rangle - \langle j|\rho|j\rangle \Big) \quad (4.10)$$

$$= \langle j|\rho|j\rangle - \langle j|\sqrt{\rho}|j\rangle^2. \quad (4.11)$$

Se ρ é um estado puro, então $\sqrt{\rho} = \rho$ e $\mathcal{Q}(\rho, A) = \langle j|\rho|j\rangle - \langle j|\rho|j\rangle^2$. Para $\langle j|\rho|j\rangle := \rho_{jj} = 1/d, \forall j$, a incerteza quântica do caminho j atinge seu valor máximo dado por $\mathcal{Q}^{max} = (d-1)/d^2$. Por outro lado, se o caminho é conhecido, i.e., $\rho_{kk} = 1$ para algum rótulo de caminho k , então $\mathcal{Q}(\rho, A) = 0$, mesmo se $k = j$. Agora, se $[\rho, |j\rangle\langle j|] = 0 \forall j$, então ρ é diagonal na base de caminho e $\rho_{jj} = (\sqrt{\rho_{jj}})^2 \forall j$, o que implica em $\mathcal{Q}(\rho, A) = 0$. Agora, definindo a incerteza quântica sobre todos os d -caminhos como

$$\mathcal{U}_q := \sum_j \mathcal{Q}(\rho, |j\rangle\langle j|_0) \quad (4.12)$$

$$= \sum_j (\langle j|\rho|j\rangle - \langle j|\sqrt{\rho}|j\rangle^2) \quad (4.13)$$

$$= \sum_j \left(\sum_k \langle j|\sqrt{\rho}|k\rangle\langle k|\sqrt{\rho}|j\rangle - \langle j|\sqrt{\rho}|j\rangle^2 \right) \quad (4.14)$$

$$= \sum_{j,k} |\langle j|\sqrt{\rho}|k\rangle|^2 - \sum_j \langle j|\sqrt{\rho}|j\rangle^2 \quad (4.15)$$

$$= \sum_{j \neq k} |\langle j|\sqrt{\rho}|k\rangle|^2 \quad (4.16)$$

$$= C_{wy}(\rho), \quad (4.17)$$

vemos que a incerteza quântica sobre todos os caminhos \mathcal{U}_q é igual a coerência de Wigner-Yanase $C_{wy}(\rho)$. Ademais, é de imediato ver que \mathcal{U}_q satisfaz os critérios propostos por Luo.

Já, a incerteza clássica do j -ésimo caminho é dada por

$$\mathcal{C}(\rho, |j\rangle\langle j|) = \text{Tr} \sqrt{\rho} |j\rangle\langle j|_0 \sqrt{\rho} |j\rangle\langle j|_0 \quad (4.18)$$

$$= \langle j|\sqrt{\rho}|j\rangle^2 - \langle j|\rho|j\rangle \sum_k \langle k|\rho|j\rangle\langle j|\rho|k\rangle \quad (4.19)$$

$$= \langle j|\sqrt{\rho}|j\rangle^2 - \langle j|\rho|j\rangle^2. \quad (4.20)$$

Se ρ é puro, então $\mathcal{C}(\rho, A) = 0$ uma vez que $\sqrt{\rho} = \rho$. Por outro lado, se ρ é inco-

erente, temos que $\mathcal{C}(\rho, A) \neq 0$, e para o caso extremo no qual todos os caminhos são equiprováveis, i.e., $\rho = \sum_j \frac{1}{d} |j\rangle\langle j|$, a incerteza clássica atinge seu valor máximo $\mathcal{C}^{max} = (d-1)/d^2$. Enquanto isso, a incerteza clássica sobre todos os d -caminhos é dada por

$$\mathcal{U}_c = \sum_j \mathcal{C}(\rho, |j\rangle\langle j|) = \sum_j (\langle j|\sqrt{\rho}|j\rangle^2 - \langle j|\rho|j\rangle^2). \quad (4.21)$$

Agora, somando ambas as incertezas, temos

$$\mathcal{U}_q + \mathcal{U}_c = \sum_{j \neq k} |\langle j|\sqrt{\rho}|k\rangle|^2 + \sum_j (\langle j|\sqrt{\rho}|j\rangle^2 - \langle j|\rho|j\rangle^2) \quad (4.22)$$

$$= \sum_{j,k} |\langle j|\sqrt{\rho}|k\rangle|^2 - \sum_j \langle j|\rho|j\rangle^2 \quad (4.23)$$

$$= \text{Tr}(\sqrt{\rho})^2 - \sum_j \langle j|\rho|j\rangle^2 \quad (4.24)$$

$$= 1 - \sum_j \langle j|\rho|j\rangle^2 \quad (4.25)$$

$$= S_l(\rho_{diag}), \quad (4.26)$$

sendo possível estabelecer a seguinte relação de complementariedade entre incertezas quântica e clássica:

$$\mathcal{U}_q + \mathcal{U}_c \leq S_l^{max}. \quad (4.27)$$

No entanto, é possível explorar a Eq. (4.26) ainda mais. Dado que, para d caminhos com probabilidades $\rho_{11}, \rho_{22}, \dots, \rho_{dd}$, a falta de informação sobre o j -ésimo caminho pode ser quantificada por $\rho_{jj}(1 - \rho_{jj})$ (BRUKNER; ZEILINGER, 1999). A falta de informação sobre todos os d -caminhos é dada por $\sum_j \rho_{jj}(1 - \rho_{jj}) = 1 - \sum_j \rho_{jj}^2 = S_l(\rho_{diag})$. Em outras palavras, dado que a projeção sobre o j -ésimo caminho é $\Pi_j := |j\rangle\langle j|$, a incerteza do caminho j é dada por

$$\mathcal{V}(\rho, \Pi_j) = \text{Tr} \rho \Pi_j^2 - (\text{Tr} \rho \Pi_j)^2 = \rho_{jj} - \rho_{jj}^2, \quad (4.28)$$

de modo que a incerteza sobre todos os caminhos é dada somando sobre j :

$$\sum_j \mathcal{V}(\rho, \Pi_j) = 1 - \sum_j \rho_{jj}^2. \quad (4.29)$$

Portanto, como esperado, $\mathcal{U}_q + \mathcal{U}_c = \sum_j \mathcal{V}(\rho, \Pi_j)$. Além disso, a Eq. (4.26) pode ser escrita como uma relação completa de complementariedade entre previsibilidade e incertezas:

$$\mathcal{U}_q + \mathcal{U}_c + P_l(\rho) = S_l^{max}, \quad (4.30)$$

onde $P_l(\rho) = S_l^{max} - S_l(\rho_{diag})$ é a previsibilidade linear. Uma vez que $S_l(\rho_{diag})$ está medindo a incerteza total sobre todos os caminhos, é possível, novamente, interpretar $P_l(\rho) := S_l^{max} - S_l(\rho_{diag})$ como uma medida da capacidade de fazer uma previsão (ou "palpite") correto sobre os possíveis resultados na base de caminho, i.e., se nossa incerteza total sobre os caminhos decresce, a capacidade de fazer uma previsão correta tem que aumentar. É interessante ressaltar que a capacidade de previsão fora do campo de informação quântica é definida como a diferença entre medidas de entropia a priori e a posteriori (SCHNEIDER; GRIFFIES, 1999). Ademais, é possível ver que as coerências de ρ dão origem à incerteza quântica, enquanto a incerteza clássica é devido às possíveis correlações quânticas (emaranhamento) com outros sistemas, dado que ρ faça parte de sistema quântico multipartido puro.

Teorema 8. *Seja $|\Psi\rangle_{A,B}$ um estado puro de sistema quântico de duas partes. Então, emaranhamento dá origem à incerteza clássica local, enquanto que coerência quântica dá origem à incerteza quântica. Inversamente, incerteza clássica é uma assinatura de emaranhamento, enquanto incerteza quântica é uma assinatura de coerência quântica.*

Demonstração. Sem perda de generalidade, no contexto de interferometria de Mach-Zehnder, seja $|j\rangle$ o estado correspondendo ao quanton estar no j -ésimo caminho. Assim, o estado geral após passar pelo primeiro divisor de d -feixes é dado por $|\psi\rangle_A = \sum_j a_j |j\rangle$, onde a_j representa a amplitude de probabilidade do quanton tomar o j -ésimo caminho, e $\{|j\rangle\}_{j=1}^d$ representa uma base ortonormal. Considerando agora um detector de caminho que também é um sistema quântico. A condição básica para uma medida em MQ, de acordo com von Neumann (NEUMANN, 1955), é deixar que o detector interaja com o sistema de interesse de modo que ambos se correlacionem. Matematicamente, $U(|j\rangle \otimes |d_0\rangle) \rightarrow |j\rangle \otimes |d_j\rangle$, onde $|d_0\rangle$ é o estado inicial do detector e U representa o operador de evolução. Sendo $|d_j\rangle$ o estado do detector correspondente ao quanton estar no caminho j , temos que o estado total do sistema é descrito por

$$|\Psi\rangle_{A,B} = \sum_j a_j |j\rangle \otimes |d_j\rangle, \quad (4.31)$$

com $|\Psi\rangle_{A,B}$ representando um estado puro bipartido. Também, sem perda de generalidade, consideremos que os estados do detector $\{|d_j\rangle\}_{j=1}^d$ são normalizados, mas não necessariamente ortogonais. Agora, se ignorarmos os estados do detector, temos o seguinte estado misto

$$\rho_A = \text{Tr}_B(|\Psi\rangle_{A,B} \langle\Psi|) = \sum_{j,k} a_j a_k^* \langle d_k | d_j \rangle |j\rangle \langle k|. \quad (4.32)$$

Se os estados do detector são completamente distinguíveis, i.e., $\langle d_k | d_j \rangle = \delta_{jk}$, en-

tão $\rho_A = \sum_j |a_j|^2 |j\rangle\langle j|$ é um estado incoerente, e portanto, ρ_A comuta com qualquer projetor $|j\rangle\langle j|$. Logo, toda incerteza é clássica. Por outro lado, se o detector não interage com o quanton, então o sistema bipartido é separável e o estado do quanton é puro. Logo, toda incerteza é de natureza quântica. Ademais, se os estados do detector não são mutuamente ortogonais entre si, os elementos fora da diagonal de $\rho_A = \sum_{j,k} a_j a_k^* \langle d_k | d_j \rangle |j\rangle\langle k|$ não se anulam. Mas, a coerência do quanton será diminuída em comparação ao estado puro $|\psi\rangle_A = \sum_j a_j |j\rangle$ (BERA et al., 2015), uma vez que $|\rho_{jk}| < \rho_{jj}\rho_{kk}$ para estados mistos. Logo, parte da incerteza quântica é transformada em incerteza clássica, e teremos uma mistura de ambas. Além disso, a diminuição da incerteza quântica não pode corresponder a um aumento da previsibilidade, uma vez que $P_l(\rho)$ não é afetada pelo acoplamento entre o detector e o quanton. Para isso, basta ver que $\rho_{jj}^A = |a_j|^2 \langle d_j | d_j \rangle = |a_j|^2$, uma vez que os estados do detector são normalizados. Inversamente, se temos apenas incerteza quântica, ρ é um estado puro e haverá, pelo menos, coerência entre dois elementos da base de caminho, caso contrário o caminho é completamente previsível, o que contradiz a hipótese que temos incerteza quântica. Por outro, se temos apenas incerteza clássica, ρ é incoerente na base de caminho, sendo uma assinatura de emaranhamento com outro sistema, uma vez que é sempre possível purificar ρ e emaranhá-lo com outro sistema. O caso trivial em que ρ é um projetor sobre um dos caminhos implica que ρ é puro e o caminho é conhecido, o que contradiz a hipótese de que temos incerteza clássica. \square

Portanto, no contexto de complementariedade, se aceitarmos que $\mathcal{U}_q = C_{wy}(\rho)$ é uma medida do aspecto ondulatório do quanton, enquanto $P_l(\rho)$ é uma medida do aspecto corpuscular, então $\mathcal{U}_c = \sum_j \text{Tr} \sqrt{\rho} |j\rangle\langle j|_0 \sqrt{\rho} |j\rangle\langle j|_0$ pode ser considerada como uma medida de emaranhamento do quanton com outros graus de liberdade, dado que o sistema global seja puro.

Teorema 9. *Seja $|\Psi\rangle_{A,B} \in \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ o estado de um sistema bipartido puro, com $\rho_A = \text{Tr}_B(|\Psi\rangle_{A,B}\langle\Psi|)$. Então, $\mathcal{U}_c := \sum_j \mathcal{C}(\rho_A, |j\rangle\langle j|) = \sum_j \text{Tr} \sqrt{\rho_A} |j\rangle\langle j|_0 \sqrt{\rho_A} |j\rangle\langle j|_0$ é um monótono de emaranhamento, com $\sum_{j=1}^d |j\rangle\langle j| = I_{d \times d}$.*

Demonstração. • Se $|\Psi\rangle_{A,B}$ é separável, então $\rho_A = \text{Tr}_B(|\Psi\rangle_{A,B}\langle\Psi|)$ é puro, e portanto, $\mathcal{U}_c = \sum_j (\langle j | \sqrt{\rho_A} |j\rangle^2 - \langle j | \rho_A |j\rangle^2) = 0$. Inversamente, $\mathcal{U}_c = 0 \implies \langle j | \sqrt{\rho_A} |j\rangle = \langle j | \rho_A |j\rangle \forall j$, ou seja, $\sqrt{\rho_A} = \rho_A$. Logo, ρ_A é puro e segue que o estado $|\Psi\rangle_{A,B}$ é separável.

• $\mathcal{U}_c \geq 0$. De fato

$$\mathcal{U}_c := \sum_j \text{Tr} \sqrt{\rho_A} |j\rangle\langle j|_0 \sqrt{\rho_A} |j\rangle\langle j|_0 = \sum_j \text{Tr} \rho_A^{1/4} |j\rangle\langle j|_0 \rho_A^{1/4} \rho_A^{1/4} |j\rangle\langle j|_0 \rho_A^{1/4} \quad (4.33)$$

$$= \sum_j \text{Tr} X_j^\dagger X_j \geq 0, \quad (4.34)$$

onde $X_j := \rho_A^{1/4} |j\rangle\langle j|_0 \rho_A^{1/4}$, e portanto, $X_j^\dagger X_j$ caracteriza uma matriz positiva semi-definida (ZHANG, 2011), como mostrado no apêndice B. Além disso, já mostramos anteriormente que, dada uma base de referência, temos que $\rho_{jj}^A \in [0, 1]$, $\forall j$. O que implica em $(\sqrt{\rho^A})_{jj} \geq \rho_{jj}^A \forall j$, e portanto, $\mathcal{U}_c \geq 0$.

- \mathcal{U}_c é invariante por transformações unitárias locais. De fato, seja $U_A \otimes U_B |\Psi\rangle_{A,B}$ onde U_A, U_B são operadores unitários em $\mathcal{H}_A, \mathcal{H}_B$, respectivamente. Logo, $\rho'_A = U_A \rho_A U_A^\dagger$ e

$$\sum_j \mathcal{C}(U_A \rho_A U_A^\dagger, |j\rangle\langle j|_0) = \sum_j \text{Tr} U_A \sqrt{\rho_A} U_A^\dagger |j\rangle\langle j|_0 U_A \sqrt{\rho_A} U_A^\dagger |j\rangle\langle j|_0 \quad (4.35)$$

$$= \sum_j \text{Tr} \sqrt{\rho_A} U_A^\dagger |j\rangle\langle j|_0 U_A \sqrt{\rho_A} U_A^\dagger |j\rangle\langle j|_0 U_A \quad (4.36)$$

$$= \sum_j \mathcal{C}(\rho_A, U_A^\dagger |j\rangle\langle j|_0 U_A), \quad (4.37)$$

onde foi usada a ciclicidade do traço. Dado que, para qualquer transformação unitária local U_A , o conjunto $\{U_A^\dagger |j\rangle\langle j| U_A\}$ ainda é uma base ortonormal, uma vez que operadores unitários levam bases ortonormais em bases ortonormais, então \mathcal{U}_c é invariante por transformações unitárias locais.

- \mathcal{U}_c não aumenta por LOCC. De fato, segundo (VIDAL, 2000), e pelas ideias desenvolvidas no apêndice D, $\mathcal{U}_c = f(\text{Tr}_B |\Psi\rangle_{A,B} \langle \Psi|)$ não aumentar por LOCC é equivalente a mostrar que \mathcal{U}_c é invariante por unitárias locais e \mathcal{U}_c é uma função côncava. Como já mostramos que \mathcal{U}_c é invariante por unitárias locais, basta mostrar que \mathcal{U}_c é uma função côncava. De fato, escrevendo

$$\mathcal{U}_c = \frac{d_A - 1}{d_A} - P_l(\rho_A) - C_{wy}(\rho_A), \quad (4.38)$$

dado que $P_l(\rho_A), C_{wy}(\rho_A)$ são funções convexas, como mostrado em apêndice E, então \mathcal{U}_c é côncava. Também, é possível mostrar que \mathcal{U}_c é uma função côncava de Schur, e portanto, que não aumenta por LOCC, como discutido no apêndice D. □

4.3 A INCERTEZA DA COMPLEMENTARIEDADE

Invertando a lógica, e explorando a dualidade entre incerteza e complementariedade, podemos interpretar qualquer relação completa de complementariedade em

termos de incerteza e previsibilidade. Por exemplo, consideremos a seguinte RCC

$$P_{vn}(\rho_A) + C_{re}(\rho_A) + S_{vn}(\rho_A) = \ln d_A, \quad (4.39)$$

onde $\rho_A = \text{Tr} |\Psi\rangle_{A,B} \langle \Psi|$ e $|\Psi\rangle_{A,B}$ descreve o estado de um sistema bipartido puro. É possível mostrar que $C_{re}(\rho_A)$ e $S_{vn}(\rho_A)$ podem ser tomadas como medidas de incerteza quântica e clássica, respectivamente, i.e., $\mathcal{U}(\rho_A) := C_{re}(\rho_A) + S_{vn}(\rho_A)$ representa a incerteza total ² em relação à base de referência $\{|j\rangle\}$. Seguindo (KORZEKWA et al., 2014), consideremos o seguinte mapa $D(\rho_A) = \sum_j \langle j| \rho_A |j\rangle |j\rangle\langle j|$ denominado de dephasing. As medidas projetivas $\{|j\rangle\langle j|\}_{j=0}^{d-1}$ relacionadas aos caminhos de um interferômetro são medidas que podem ser repetidas inúmeras vezes. Assim, é razoável supor que uma segunda medida realizada em sequência não deve revelar nenhuma incerteza quântica de modo que o estado do sistema após a primeira medida possui apenas incerteza clássica, levando em conta que o resultado da primeira é descartado. Logo, podemos considerar $S_{vn}(\rho_A || D(\rho_A)) = \min_{\iota \in I} S(\rho_A || \iota) = C_{re}(\rho_A)$ como uma medida de incerteza quântica, e $S_{vn}(\rho_A)$ uma medida de incerteza clássica. De fato, se ρ_A é puro $S_{vn}(\rho) = 0$ e $\mathcal{U}(\rho) = C_{re}(\rho_A)$. Por outro lado, se $[\rho, |k\rangle\langle k|] = 0$, para algum índice k , então ρ é diagonal na base de caminho, e portanto, $C_{re}(\rho) = 0$, uma vez que $S_{vn}(\rho_{A\text{diag}}) = S_{vn}(\rho_A)$ e $\mathcal{U}(\rho_A) = S_{vn}(\rho_A)$. Além do mais, $C_{re}(\rho_A)$ é uma função convexa sob mistura clássica como mostrado no apêndice E, enquanto $S_{vn}(\rho_A)$ é uma função côncava de ρ_A como mostrado anteriormente. Além disso, podemos ver que

$$\mathcal{U}(\rho_A) = C_{re}(\rho_A) + S_{vn}(\rho_A) = S_{vn}(\rho_A || D(\rho_A)) + S_{vn}(\rho_A) \quad (4.40)$$

$$= \text{Tr} \rho_A \ln \rho_A - \text{Tr} \rho_A \ln D(\rho_A) + S_{vn}(\rho_A) \quad (4.41)$$

$$= -S_{vn}(\rho_A) - \text{Tr} D(\rho_A) \ln D(\rho_A) + S_{vn}(\rho_A) \quad (4.42)$$

$$= S_{vn}(D(\rho_A)), \quad (4.43)$$

onde $S_{vn}(D(\rho_A)) = S_{vn}(\rho_{A\text{diag}}) = -\sum_j p_j \ln p_j$ é a entropia de Shannon (NIELSEN; CHUANG, 2000), com $p_j = \text{Tr}(\rho_A |j\rangle\langle j|) = \rho_{jj}$, representando assim a incerteza total do observável caminho dado que o sistema está no estado ρ_A . Por fim, podemos interpretar a Eq. (4.39) como uma RCC entre previsibilidade, incerteza quântica e incerteza clássica.

Agora, seguindo o mesmo raciocínio, vamos rederivar a RCC

$$P_i(\rho_A) + C_{hs}(\rho_A) + S_i(\rho_A) = \frac{d_A - 1}{d_A}, \quad (4.44)$$

onde $\rho_A = \text{Tr} |\Psi\rangle_{A,B} \langle \Psi|$, a partir da variância das matrizes generalizadas de Gellmann. Dada a base de caminho $\{|j\rangle\}_{j=0}^{d-1}$, é possível definir as matrizes generalizadas

²Aqui, não definimos $C_{re}(\rho) + S_{vn}(\rho)$ como $\mathcal{V}(\rho)$ uma vez que não representa uma variância.

de Gell-mann como (BERTLMANN; KRAMMER, 2008):

$$\Gamma_m^d := \sqrt{\frac{2}{m(m+1)}} \sum_{l=1}^{m+1} (-m)^{\delta_{l,m+1}} |l\rangle\langle l|, \quad (4.45)$$

$$\Gamma_{j,k}^s := |j\rangle\langle k| + |k\rangle\langle j|, \quad (4.46)$$

$$\Gamma_{j,k}^a := -i(|j\rangle\langle k| - |k\rangle\langle j|), \quad (4.47)$$

onde $m = 1, \dots, d-1$ e $1 \leq j < k \leq d$. As variâncias desses observáveis são calculadas explicitamente no apêndice F, sendo dadas por

$$\sum_m \mathcal{V}(\rho_A, \Gamma_m^d) = \frac{2(d_A - 1)}{d_A} - 2P_l(\rho_A), \quad (4.48)$$

$$\sum_{j < k} \left(\mathcal{V}(\rho_A, \Gamma_{j,k}^s) + \mathcal{V}(\rho_A, \Gamma_{j,k}^a) \right) = 2(d_A - 1) - 2C_{hs}(\rho_A). \quad (4.49)$$

Somando as Eqs. (4.48) e (4.49), obtemos a seguinte relação de complementariedade

$$\mathcal{C}(\rho_A, \Gamma) + C_{hs}(\rho_A) + P_l(\rho_A) = \frac{d_A - 1}{d_A}, \quad (4.50)$$

onde

$$\mathcal{C}(\rho_A, \Gamma) := \frac{1}{2} \sum_m \mathcal{V}(\rho_A, \Gamma_m^d) + \frac{1}{2} \sum_{j < k} (\mathcal{V}(\rho_A, \Gamma_{j,k}^s) + \mathcal{V}(\rho_A, \Gamma_{j,k}^a)) - (d_A - 1) \quad (4.51)$$

é uma medida de incerteza clássica, uma vez que

$$\mathcal{C}(\rho_A, \Gamma) = \frac{d_A - 1}{d_A} - C_{hs}(\rho_A) - P_l(\rho_A) \quad (4.52)$$

satisfaz os critérios de Luo, assim como $C_{hs}(\rho_A)$ pode ser considerar uma medida de incerteza quântica. Por comparação, a Eq. (4.50) é equivalente à RCC (4.44). Ademais, como ρ_A representa um estado misto, $P_l(\rho_A) + C_{hs}(\rho_A) \leq \frac{d_A - 1}{d_A}$, sendo possível obter a seguinte relação de incerteza para as matrizes generalizadas de Gell-Mann:

$$\frac{1}{2} \sum_m \mathcal{V}(\rho, \Gamma_m^d) + \frac{1}{2} \sum_{j < k} (\mathcal{V}(\rho, \Gamma_{j,k}^s) + \mathcal{V}(\rho, \Gamma_{j,k}^a)) \geq d_A - 1. \quad (4.53)$$

Por fim, explorando esta dualidade entre incerteza e complementariedade, é possível completar a relação de complementariedade baseada na norma- l_1 . Lembrando que

$$C_{l_1}(\rho_A) + P_{l_1}(\rho_A) \leq d_A - 1, \quad (4.54)$$

onde $C_{l_1}(\rho_A) = \sum_{j \neq k} |\rho_{jk}|$, $P_{l_1}(\rho_A) = d - 1 - \sum_{j \neq k} \sqrt{\rho_{jj}\rho_{kk}}$ e $\rho_A = \text{Tr} |\Psi\rangle_{A,B} \langle \Psi|$. Note-mos que

$$C_{l_1}(\rho_A) + P_{l_1}(\rho_A) = d_A - 1 + \sum_{j \neq k} (|\rho_{jk}| - \sqrt{\rho_{jj}\rho_{kk}}) \quad (4.55)$$

pode ser reescrita como uma CCR

$$C_{l_1}(\rho_A) + W_{l_1}(\rho_A) + P_{l_1}(\rho_A) = d_A - 1, \quad (4.56)$$

se definirmos $W_{l_1}(\rho_A) := \sum_{j \neq k} (\sqrt{\rho_{jj}^A \rho_{kk}^A} - |\rho_{jk}^A|)$ como um indicativo de emaranhamento entre o sistema A e B . Como mostraremos na próxima seção, tal medida de fato é um monótono de emaranhamento quando restrita aos coeficientes de Schmidt. Além do mais, podemos observar que $C_{l_1}(\rho_A)$ e $W_{l_1}(\rho_A)$ também são medidas de incerteza quântica e clássica, respectivamente. De fato, se ρ_A é puro (e portanto separável), segue que $|\rho_{jk}^A| = \sqrt{\rho_{jj}^A \rho_{kk}^A} \forall j \neq k$, e $W_{l_1}(\rho) = 0$. Por outro lado, se ρ_A é incoerente na base de caminho, então $C_{l_1}(\rho) = 0$. Já, a convexidade de $C_{l_1}(\rho_A)$ é mostrada no apêndice E, enquanto a concavidade de $W_{l_1}(\rho_A) = d_A - 1 - C_{l_1}(\rho_A) - P_{l_1}(\rho_A)$ segue da convexidade de $C_{l_1}(\rho_A), P_{l_1}(\rho_A)$.

A fim de resumir o papel das entropias linear e de von-Neumann em relações de complementariedade e incerteza para sistemas globais puros, consideremos a seguinte tabela:

Entropia	Papel em relações de incerteza	Papel em relações de complementariedade
$S_l(\rho)$	Medida de incerteza clássica	Medida de emaranhamento
$S_l(\rho_{diag})$	Medida de incerteza total	Pode ser usada para definir previsibilidade
$S_{vn}(\rho)$	Medida de incerteza clássica	Medida de emaranhamento
$S_{vn}(\rho_{diag})$	Medida de incerteza total	Pode ser usada para definir previsibilidade

Tabela 4.1 – O papel das entropias linear e de von Neumann em incerteza e complementariedade.

Além do mais, podemos notar que a distinção geral entre incerteza clássica, total e quântica é que a incerteza clássica é caracterizada a partir dos autovalores da matriz densidade, dado que $S_l(\rho_A), S_{vn}(\rho_A)$ são caracterizadas pelos autovalores de ρ_A . No próxima seção, também veremos que isso vale para as outras duas medidas de incerteza clássica, uma vez que as outras medidas também são monótonos de emaranhamento quando restritas aos autovalores da matriz densidade. Já a incerteza total é caracterizada a partir dos elementos diagonais da matriz densidade (ou seja, a distribuição de probabilidade adquirida em um experimento), uma vez que a incerteza total pode ser escrita em termos da previsibilidade, i.e., Incerteza Total = Constante – Previsibilidade, e qualquer medida de previsibilidade deve depender apenas dos elementos diagonais do operador densidade. Enquanto

isso, a incerteza quântica é definida como a diferença entre a incerteza total e a incerteza clássica, usando qualquer medida de incerteza que seja mais conveniente.

4.4 MONÓTONOS DE EMARANHAMENTO A PARTIR DE RELAÇÕES DE COMPLEMENTARIEDADE

Como discutido no apêndice D e seguindo (ZHU et al., 2017), vamos denotar $\mathcal{D}(\mathcal{H})$ o conjunto dos operadores densidades em $\mathcal{H} \simeq \mathbb{C}^d$ e $U(d)$ o grupo de operadores unitários em \mathcal{H} . Além disso, seja \mathcal{F}_U o conjunto de funções unitariamente invariantes em $\mathcal{D}(\mathcal{H})$ tal que cada função $f \in \mathcal{F}_U$ é definida no espaço dos operadores densidades para cada inteiro positivo $d = \dim \mathcal{H}$. Ou seja, para cada d , $f \in \mathcal{F}_U$ satisfaz

$$f(U\rho U^\dagger) = f(\rho) \quad \forall \rho \in \mathcal{D}(\mathcal{H}), U \in U(d). \quad (4.57)$$

Logo, $f(\rho)$ é uma função dos autovalores de ρ . Ademais, vamos nos restringir ao conjunto $\mathcal{F}_{Uc} \subset \mathcal{F}_U$ de funções côncavas e unitariamente invariante em $\mathcal{D}(\mathcal{H})$. Assim, cada $f \in \mathcal{F}_{Uc}$ satisfaz Eq. (4.57) e

$$\begin{aligned} f(\lambda\rho + (1-\lambda)\sigma) &\geq \lambda f(\rho) + (1-\lambda)f(\sigma) \\ \forall \rho, \sigma \in \mathcal{D}(\mathcal{H}), \lambda \in [0, 1], \end{aligned} \quad (4.58)$$

para qualquer d . Agora, seja $\mathcal{H} \simeq \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ um espaço de Hilbert bipartido correspondente aos sistemas A e B , com dimensão $d_A = d_B = d$. O fato da dimensão dos subsistemas ser a mesma não é essencial para o que se segue. Logo, qualquer função $f \in \mathcal{F}_{Uc}$ pode ser usada para construir monótonos de emaranhamento E_f em $\mathcal{D}(\mathcal{H})$. Para estados puros $|\Psi\rangle_{A,B} \in \mathcal{H}$,

$$E_f(\Psi) := f(\text{Tr}_B(|\Psi\rangle\langle\Psi|)) = f(\rho_A), \quad (4.59)$$

sendo possível estender a medida para casos mistos $\rho \in \mathcal{D}(\mathcal{H})$ através de

$$E_f(\rho) := \min_{p_j, \rho_j} \sum_j p_j E_f(\rho_j), \quad (4.60)$$

onde a minimização é tomada sobre o conjunto de estados puros de ρ no qual $\rho = \sum_j p_j \rho_j$. Inversamente, a restrição para estados puros de qualquer monótono de emaranhamento é igual à E_f para alguma $f \in \mathcal{F}_{Uc}$. Esses resultados são demonstrados em (VIDAL, 2000).

Além disso, seja Δ_d o espaço das distribuições de probabilidades de vetores

de probabilidades com d componentes. Ou seja, cada ponto (ou vetor) nesse espaço representa uma distribuição de probabilidades com d elementos. Uma função f é dita simétrica se é invariante sob a permutação das componentes dos vetores de probabilidades. Seja \mathcal{F}_s o conjunto de funções simétricas no espaço de distribuição de probabilidades tal que cada função $f \in \mathcal{F}_s$ está definida para qualquer inteiro positivo d . Logo, os autores em (ZHU et al., 2017), mostraram que cada função simétrica $f \in \mathcal{F}_s$ pode ser elevada a uma função unitariamente invariante em $\mathcal{D}(\mathcal{H})$, i.e.,

$$\hat{f}(\rho) := f(\text{eig}(\rho)) \quad \forall \rho \in \mathcal{D}(\mathcal{H}), \quad (4.61)$$

onde $\text{eig}(\rho)$ são os autovalores de ρ . Inversamente, qualquer função f unitariamente invariante em $\mathcal{D}(\mathcal{H})$ define uma função simétrica em Δ_d quando restrita aos elementos diagonais do operador densidade:

$$\check{f}(p) := f(\text{diag}(p)) \quad \forall p \in \Delta_d, \quad (4.62)$$

onde $p \in \Delta_d$ representa uma distribuição de probabilidade, enquanto $\text{diag}(p)$ representa os elementos diagonais de ρ . Logo, para qualquer função côncava $f \in \mathcal{F}_s$, a medida E_f definida por Eqs. (4.59) e (4.60) é um monótono de emaranhamento. Inversamente, a restrição para estados puros de qualquer monótono de emaranhamento é igual à E_f para alguma função côncava em \mathcal{F}_s . A partir dessa construção, é possível relacionar monótonos de emaranhamento com relações de complementariedade como se segue:

Teorema 10. *Seja $P(\rho_A) + C(\rho_A) \leq \alpha$ uma relação de complementariedade para o estado ρ_A de modo que tal relação satura apenas se ρ_A é puro, com $P(\rho_A)$ e $C(\rho_A)$ satisfazendo os critérios de previsibilidade e visibilidade estabelecidos em (DÜRR, 2000; ENGLERT et al., 2008), respectivamente, e $\alpha \in \mathbb{R}$ com $\alpha > 0$. Logo, a quantidade*

$$E_f := \alpha - P(\rho_A) - C(\rho_A) \quad (4.63)$$

é um monótono de emaranhamento definido pelas Eqs. (4.59) e (4.60).

Demonstração. Como, por hipótese, as medidas $P(\rho_A)$ e $C(\rho_A)$ satisfazem os critérios estabelecidos em (DÜRR, 2000; ENGLERT et al., 2008), então tais medidas são funções convexas de ρ_A , o que implica em $E_f := \alpha - P(\rho_A) - C(\rho_A) = f(\rho_A)$ ser uma função côncava em ρ_A . Agora, seja $|\Psi\rangle \in \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ uma purificação de ρ_A , i.e., $\rho_A = \text{Tr}_B |\Psi\rangle \langle \Psi|$. Usando a decomposição de Schmidt $|\Psi\rangle = \sum_k \sqrt{\lambda_k} |\phi_k\rangle_A \otimes |\psi_k\rangle_B$, temos que $\rho_A = \sum_k \lambda_k |\phi_k\rangle \langle \phi_k|$, ou seja, $C(\rho_A) = 0$ e $P(\rho_A) \neq 0$. No entanto, $P(\rho_A)$ deve ser invariante sob a permutação dos índices de caminho (ou estado), o que implica que $P(\rho_A)$ deve ser invariante sob a permutação dos vetores de probabilidade

$\vec{\lambda} = (\lambda_0, \dots, \lambda_{d-1})$, uma vez que $P(\rho_A)$ deve ser função apenas dos elementos diagonais de ρ_A . Portanto, $E_f = f(\rho_A)$ é invariante frente à permutações dos elementos de probabilidade $\vec{\lambda}$. Ademais, dada qualquer base de referência, quando nos restringimos aos elementos diagonais de ρ_A , temos que $C(\rho_A) = 0$ e $P(\rho_A) \neq 0$, o que implica novamente que $E_f = f(\rho_A)$ é invariante frente à permutações dos elementos de probabilidade. Logo, $E_f := \alpha - P(\rho_A) - C(\rho_A)$ é um monótono de emaranhamento. \square

Uma definição equivalente e normalizada da Eq. (4.63) é dada por $E_f := 1 - \frac{1}{\alpha}(P(\rho_A) + C(\rho_A))$. Também, a partir da Eq. (4.63), podemos ver que os estados que maximizam E_f são da mesma forma, i.e., estados nos quais os estados reduzidos satisfazem $P(\rho_A) + C(\rho_A) = 0$, ou seja, estados maximamente mistos. Ademais, podemos ver que esse resultado é muito importante e geral, uma vez que sintetiza todas as relações completas de complementariedade conhecidas na literatura, bem como abre a possibilidade de estabelecer novas medidas de emaranhamento sempre que houver uma relação de complementariedade que satisfaça os critérios mencionados anteriormente. Ainda, a partir dele podemos ver que é sempre possível completar uma relação de complementariedade com um monótono de emaranhamento dado que o estado global é puro. Definindo os monótonos

$$W_{l_1}(\rho_A) := d_A - 1 - P_{l_1}(\rho_A) - C_{l_1}(\rho_A), \quad (4.64)$$

$$W_{wy}(\rho_A) := \frac{d_A - 1}{d_A} - P_{hs}(\rho_A) - C_{wy}(\rho_A), \quad (4.65)$$

podemos ver que as medidas obtidas nas seções anteriores para norma- l_1 e para Wigner-Yanase são de fato monótonos de emaranhamento, e podem ser escritas em termos dos coeficientes de Schmidt como

$$W_{l_1}(\rho_A) := \sum_{j \neq k} \sqrt{\lambda_j \lambda_k}, \quad (4.66)$$

$$W_{wy}(\rho_A) := \sum_j ((\sqrt{\lambda_j})^2 - \lambda_j^2), \quad (4.67)$$

com $W_{wy}(\rho_A) = S_l(\rho_A)$ se escrito em termos dos coeficientes de Schmidt. Na verdade, essa igualdade se mantém para qualquer estado incoerente ρ_A . No entanto, em geral, para uma base na qual a coerência quântica é diferente de zero, então $W_{wy}(\rho_A) \neq S_l(\rho_A)$ uma vez que $C_{wy}(\rho_A) \neq C_{hs}(\rho_A)$ para estados mistos ρ_A . Além disso, a partir da Eq. (4.66), é possível ver que $W_{l_1}(\rho)$ é igual a medida denominada de robustness of entanglement para estados globais puros (VIDAL; TARRACH, 1999), quando restrita aos coeficientes de Schmidt, uma vez que $\sum_{j \neq k} \sqrt{\lambda_j \lambda_k} = (\sum_j \sqrt{\lambda_j})^2 - 1$.

Finalmente, vale ressaltar que tanto as relações de complementariedade incompletas quanto as relações completas discutidas até aqui, foram verificadas ex-

perimentalmente no IBM quantum experience para uma classe particular de estados quânticos de um qubit e também para estados quânticos aleatórios de um, dois e três qubits (POZZOBOM; BASSO; MAZIERO, 2021).

5 RELAÇÕES COMPLETAS DE COMPLEMENTARIEDADE E INVARIÂNCIA DE LORENTZ

Recentemente, há cada vez mais interesse em como o emaranhamento se comporta em cenários relativísticos. Por exemplo, em (CZACHOR, 1997) o autor considerou a versão relativística do famoso experimento de Einstein-Podolsky-Rosen com partículas massivas de spin-1/2. Czachor argumentou que o grau de violação da desigualdade de Bell depende da velocidade das partículas. Alguns anos depois, os autores em (GINGRICH; ADAMI, 2002) montaram um cenário no qual o emaranhamento entre dois sistemas depende do referencial no qual está sendo medido. Isto é, considerando emaranhamento spin-spin entre duas partículas, tal emaranhamento decresce se for observado por um segundo referencial, enquanto o emaranhamento entre o spin e o momento de cada partícula pode aumentar. Assim, as transformações Lorentz introduzem uma redistribuição de emaranhamento entre os graus de liberdade do sistema. Também, no mesmo ano, foi demonstrado por Peres et al. (PERES; SCUDO; TERNO, 2002) que a entropia de uma única partícula massiva de spin-1/2 não permanece invariante sob transformações de Lorentz. Posteriormente, o comportamento do emaranhamento sob transformações de Lorentz recebeu muita atenção dos pesquisadores (LI; DU, 2003; TERASHIMA; UEDA, 2003; JORDAN; SHAJI; SUDARSHAN, 2007; DUNNINGHAM; PALGE; VEDRAL, 2009; FRIIS et al., 2010; BITTENCOURT; BERNARDINI; BLASONE, 2018).

Como apontado por Palge e Dunningham em (PALGE; DUNNINGHAM, 2015), o principal aspecto a ser notado aqui é que muitos desses resultados aparentemente conflitantes envolvem sistemas contendo diferentes estados de partículas, diferentes números de partículas e também diferentes tipos de transformações de Lorentz. Portanto, o emaranhamento sob boosts¹ de Lorentz é altamente dependente do cenário de boost em questão. Para estados de partícula única, um estado produto spin-momentum pode ser transformado em um estado emaranhado. Além disso, os boosts de Lorentz podem ser considerados como operações quânticas controladas onde o momentum desempenha o papel do sistema de controle, enquanto o spin pode ser tomado como o qubit alvo, como argumentado em (DUNNINGHAM; PALGE; VEDRAL, 2009). Além disso, vale ressaltar que Saldanha e Vedral (SALDANHA; VEDRAL, 2012) forneceram uma interpretação física das rotações de Wigner no contexto da informação quântica, que resulta do fato de que diferentes observadores computam diferentes eixos de quantização para medidas de spin. Com base nisso, os autores calcularam os valores esperado das medições de spin feitas em partículas de spin-1/2 e argu-

¹Lembrando que um boost de Lorentz corresponde a uma transformação de Lorentz que liga dois referenciais inerciais se movendo com velocidade relativa constante entre si.

mentaram que não é possível medir o spin da partícula independentemente de seu momento, de modo que uma partição entre momento e spin do sistema não é possível. No entanto, nessa dissertação, estamos interessados apenas no comportamento das medidas de complementariedade e emaranhamento que, por sua vez, são funções apenas dos elementos dos operadores densidade reduzido de momento e spin, e portanto, não é necessário considerarmos as sutilezas envolvidas para medir spin em cenários relativísticos assim como na própria definição de um observável para o spin no contexto relativístico.

Embora a entropia de emaranhamento não permaneça invariante sob transformações de Lorentz, e nem as medidas de previsibilidade e coerência, vamos mostrar neste capítulo, como em (BASSO; MAZIERO, 2020a), que essas três medidas juntas, ou seja, que as CCR's, pelo menos para um trio de medidas em particular, são invariantes de Lorentz, dado que o subsistema em questão faça parte de um sistema multipartido puro. No entanto, antes iremos discutir as representações unitárias do grupo de Poincaré e as rotações de Wigner, bem como analisar alguns resultados da literatura comentados acima. Ademais, para uma revisão básica de relatividade restrita e do grupo de Poincaré, o leitor é encorajado à ler o apêndice G.

5.1 REPRESENTAÇÕES UNITÁRIAS DO GRUPO DE POINCARÉ

Uma das questões fundamentais ao estudar a formulação relativística da teoria quântica é como estados quânticos são descritos sob transformações de Lorentz. A ação de transformações de Lorentz se dá no nível das coordenadas espaço-temporais, ou seja, no espaço de Minkowski². Dado que sistemas quânticos são descritos por vetores no espaço de Hilbert, qual é o efeito destas transformações sob os estados do sistema? Na linguagem da teoria de grupos, isso significa que estamos procurando representar um elemento do grupo de Poincaré por um operador no espaço de Hilbert ao qual os estados quânticos pertencem. Ou seja, dados dois referenciais descrevendo o mesmo sistema quântico, os estados do sistema descritos em cada referencial estão ligados por uma transformação. Isso pode ser motivado considerando o seguinte cenário: suponha que temos um sistema físico S e observadores \mathcal{O} que carregam aparatos de medida. Se aplicarmos uma transformação do grupo de Poincaré tanto no sistema S quanto nos observadores \mathcal{O} , obteremos S' e observadores \mathcal{O}' . Por exemplo, podemos rotacionar o sistema e o aparato de medida, ou dar uma velocidade constante v para ambos. Esse tipo de transformação é denominada de transformação de simetria (WEINBERG, 1995). A invariância das leis da Física afirma

²A definição de espaço de Minkowski usada nesta dissertação pode ser encontrada no apêndice G.

que os resultados das medições feitas por \mathcal{O} em S , e \mathcal{O}' em S' , devem ser idênticos. O que levou Wigner a formular o seguinte teorema (WIGNER, 1959):

Teorema 11. *Qualquer transformação de simetria pode ser representada no espaço de Hilbert a partir de um operador unitário e linear, ou anti-unitário e anti-linear, i.e., qualquer representação $U : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ que preserva $|\langle \phi | \psi \rangle|$ é unitária e linear, ou anti-unitária e anti-linear.³*

Aqui, estamos interessados apenas em representações unitárias, uma vez que estão diretamente ligadas com transformações contínuas, como discutido a seguir. Dados S em \mathcal{O} e S' em \mathcal{O}' , impõe-se que $\psi'(x') = \psi(x)$ ⁴ de maneira que os resultados das medidas serão os mesmos. Por exemplo, vamos considerar que o sistema S junto com o aparato experimental é rotacionado de um ângulo θ em torno do eixo z :

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ de modo que } x' = R(\theta)x. \quad (5.1)$$

Essa rotação, como discutido anteriormente, não deve afetar as características do sistema, de modo que

$$\psi'(x') = \psi'(R(\theta)x) = \psi(x), \text{ o que implica em } \psi'(x) = \psi(R^{-1}(\theta)x). \quad (5.2)$$

Considerando que a rotação é infinitesimal $\delta\theta$, então

$$R^{-1}(\delta\theta) = \begin{pmatrix} 1 & \delta\theta & 0 \\ -\delta\theta & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \delta\theta \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (5.3)$$

de modo que

$$R^{-1}(\delta\theta) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + \delta\theta y \\ y - \delta\theta x \\ z \end{pmatrix}. \quad (5.4)$$

Agora, vamos ver o reflexo dessa reflexão espacial no espaço de Hilbert das funções

³Mais formalmente, tal teorema pode ser formulado em termos das classes de equivalências dos estados em \mathcal{H} .

⁴ $\psi(x)$ é a função de onda que descreve o estado do sistema quântico S na base da posição no referencial \mathcal{O} . Isto é, $|\psi\rangle = \int dx |x\rangle \langle x|\psi\rangle = \int dx \psi(x) |x\rangle$.

de onda do sistema:

$$\psi'(x) = \psi(R^{-1}(\theta)x) = \psi(x + \delta\theta y, y - \delta\theta x) \quad (5.5)$$

$$\approx \psi(x) - \delta\theta(x\partial_y - y\partial_x)\psi(x) \quad (5.6)$$

$$= \left(1 - \frac{i}{\hbar}\delta\theta L_z\right)\psi(x), \quad (5.7)$$

onde L_z é o operador associado ao momento angular ao longo do eixo z . Assim, para uma rotação finita, temos $\theta = \delta\theta/n$ e

$$\psi'(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \frac{-i\theta L_z}{\hbar}\right)^n \psi(x) = e^{-\frac{i}{\hbar}\vec{\theta} \cdot \mathbf{L}} \psi(x), \quad (5.8)$$

representando o reflexo da rotação espacial no estado do sistema S . Dado que \mathbf{L} é um operador hermitiano, $U(\theta) := e^{-\frac{i}{\hbar}\vec{\theta} \cdot \mathbf{L}}$ é um operador unitário no espaço de Hilbert, sendo uma representação do grupo de rotações espaciais nesse espaço vetorial, com \mathbf{L} sendo o gerador dessa representação. Nesse sentido, dizemos que \mathbf{L} é o gerador de rotações no espaço de Hilbert. Ademais, nesta dissertação, estamos interessados apenas nas representações unitárias do grupo de Poincaré.

Definição 3. *Dados dois grupos G e H , um homomorfismo entre G e H é um mapeamento ϕ que associa cada elemento $g \in G$ a algum (ou vários) elemento (elementos) de H : $g = \phi(h_j)$ para $h_j \in H$ e que preserva a regra de composição do grupo. Se o mapa ϕ é um-para-um, então cada elemento $g \in G$ é a imagem de um único elemento $h \in H$, e os grupos G e H são ditos isomorfos.*

Definição 4. *Se há um homomorfismo entre um grupo G e um grupo de operadores $H = \phi(G)$, cujos operadores atuam em um espaço vetorial, então H é dito ser uma representação do grupo G , com H preservando a estrutura (a regra de composição) do grupo G . A dimensão da representação é igual a dimensão do espaço vetorial. Além disso, se os elementos do grupo de operadores são unitários, a representação é dita unitária.*

Por exemplo, se considerarmos o subgrupo de Lorentz constituído de boosts apenas em uma direção⁵, então dois boosts seguidos são equivalentes a um terceiro: $\Lambda_3 = \Lambda_2\Lambda_1$. Agora, considerando uma representação arbitrária A desse grupo, então dados os elementos $A_1 = \phi(\Lambda_1), A_2 = \phi(\Lambda_2), A_3 = \phi(\Lambda_3)$, temos que $A_2A_1 = A_3 \implies \phi(\Lambda_2)\phi(\Lambda_1) = \phi(\Lambda_3) = \phi(\Lambda_2\Lambda_1)$. Assim, dado o grupo de Poincaré, buscamos transformações unitárias U no espaço de Hilbert \mathcal{H} que preservam a estrutura do grupo:

$$U : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H} \quad \text{com} \quad |\psi\rangle \in \mathcal{H} \rightarrow |\psi'\rangle = U|\psi\rangle \in \mathcal{H}, \\ \psi'(x') = U\psi(Tx) = \psi(x), \quad (5.9)$$

⁵Ver apêndice G.

onde T é um elemento do grupo de Poincaré. Dado que a regra de composição do grupo de Poincaré é dada por (WEINBERG, 1995)

$$T(\Lambda_1, a_1)T(\Lambda_2, a_2) = T(\Lambda_1\Lambda_2, \Lambda_1 a_2 + a_1). \quad (5.10)$$

então

$$U(\Lambda_1, a_1)U(\Lambda_2, a_2) = U(\Lambda_1\Lambda_2, \Lambda_1 a_2 + a_1). \quad (5.11)$$

Definindo $U(\Lambda, 0) := U(\Lambda)$, $U(I_{\mathcal{M}}, a) = U(a)$, onde $I_{\mathcal{M}}$ corresponde à identidade no espaço de Minkowski. Como $I_{\mathcal{M}}$ é uma transformação de Lorentz (que mantém o mesmo referencial), a representação da identidade no espaço de Hilbert não deve mudar o estado do sistema, ou seja, $U(I_{\mathcal{M}}, 0) |\psi\rangle = U(I_{\mathcal{M}}) |\psi\rangle = |\psi\rangle$, o que implica em $U(I_{\mathcal{M}}) = I_{\mathcal{H}}$. Além do mais, se considerarmos transformações infinitesimais de Poincaré, a representação $U(I + \omega, \epsilon)$ deve possuir a mesma forma que $I_{\mathcal{H}} + \mathcal{O}(\omega, \epsilon)$ a fim de respeitar a estrutura do grupo. Ou seja,

$$U(I + \omega, \epsilon) = I_{\mathcal{H}} + i\omega J - i\epsilon P = I_{\mathcal{H}} + \frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}J^{\mu\nu} - i\epsilon_{\mu}P^{\mu} \quad (5.12)$$

onde J, P são operadores em \mathcal{H} . Vale ressaltar aqui que já estamos fazendo uso da convenção da soma, como discutido no apêndice G. Além disso, J, P devem ser hermitianos a fim de que U seja unitário. E também, dado que os elementos $\omega_{\mu\nu}$ são antissimétricos, os elementos $J^{\mu\nu}$ também são antissimétricos. Enquanto isso, os elementos finitos são dados por $U(\Lambda) = e^{\frac{i}{2}\xi_{\mu\nu}J^{\mu\nu}}$, $U(a) = e^{-ia_{\mu}P^{\mu}}$, onde P^{μ} são as componentes do operador associado ao 4-momento com P^0 associado à energia do sistema. Já J^{ij} , com⁶ $i \neq j$, são as componentes do operador associado ao momento angular enquanto J^{0i} estão relacionados aos geradores de boost no espaço de Hilbert (WEINBERG, 1995).

5.1.1 Representações para estados de partículas de spin-1/2

Começamos assumindo que os momentos podem ser tratados como variáveis discretas (JORDAN; SHAJI; SUDARSHAN, 2007; JORDAN; SHAJI; SUDARSHAN, 2010; PALGE; DUNNINGHAM, 2015). Isso pode ser justificado, uma vez que podemos considerar distribuições estreitas centradas em torno de diferentes valores de momentum. Como as componentes de P comutam entre si (WEINBERG, 1995), é

⁶Lembrando que, no apêndice G, definimos que os índices latinos variam de 1 até 3, enquanto os índices gregos variam de 0 até 3.

natural expressar o estado do sistema em termos de autovetores de P , ou seja,

$$P^\mu |p, \sigma\rangle = p^\mu |p, \sigma\rangle, \quad (5.13)$$

onde p^μ é o autovalor de P^μ e $|p, \sigma\rangle := |p\rangle \otimes |\sigma\rangle$, com σ representando outros graus de liberdade do sistema (como spin). Ainda, a condição de normalização é dada por $\langle p', \sigma' | p, \sigma\rangle = \delta_{p,p'} \delta_{\sigma,\sigma'}$. Como nos restringimos a estados de momento discreto, não é necessário levar em conta nenhum fator extra de normalização. Tal estado corresponde a soluções em termos de ondas planas da equação de Dirac para uma partícula livre com momento linear bem definido. Assim, se o sistema é transladado, então esse efeito no estado do sistema é representado por $U(I, a) |p, \sigma\rangle = U(a) |p, \sigma\rangle = e^{ia_\mu P^\mu} |p, \sigma\rangle$. Agora, vamos considerar o efeito de um boost de Lorentz sobre o estado do sistema: $U(\Lambda) |p, \sigma\rangle$. Para isso, notemos que

$$P^\mu U(\Lambda) |p, \sigma\rangle = U(\Lambda) U^{-1}(\Lambda) P^\mu U(\Lambda) |p, \sigma\rangle \quad (5.14)$$

$$= U(\Lambda) \Lambda^\mu_\nu P^\nu |p, \sigma\rangle \quad (5.15)$$

$$= U(\Lambda) \Lambda^\mu_\nu p^\nu |p, \sigma\rangle \quad (5.16)$$

$$= \Lambda^\mu_\nu p^\nu U(\Lambda) |p, \sigma\rangle, \quad (5.17)$$

onde usamos o fato de que $U^{-1}(\Lambda) P^\mu U(\Lambda) = \Lambda^\mu_\nu P^\nu$ (WEINBERG, 1995). Ou seja, o efeito de operar $U(\Lambda)$ em um autovetor de P , $|p\rangle$, é produzir um outro autovetor de P : $U |p\rangle$, com autovalor Λp . Dito de outra maneira, o efeito de um boost de Lorentz no espaço de Hilbert é levar o autovalor $p \rightarrow \Lambda p$ e o estado $|p\rangle$ em $|\Lambda p\rangle := U(\Lambda) |p\rangle$ cujo autovalor é Λp , sendo sugestivo escrever $U(\Lambda) |p\rangle = |\Lambda p\rangle$.

No entanto, ainda não sabemos os efeitos de um boost Λ nos graus de liberdade internos. Para isso, notemos que $U(\Lambda)$ deixa $p^2 := p_\mu p^\mu = \vec{p} \cdot \vec{p} - (E/c)^2 = -m^2 c^2$ e o sinal de $p^0 = E/c$ invariantes para uma partícula de massa m . A partir daqui, usamos $c = 1$. Logo, é possível usar esses dois invariantes, junto com o spin da partícula, para classificar os estados de uma partícula. Isso decorre do fato de que, para caracterizarmos partículas⁷, devemos especificar os operadores de Casimir. Os operadores de Casimir são construídos a partir dos geradores do grupo e são caracterizados por comutar com todos os geradores do grupo de modo que seus autovalores são invariantes frente a todas as transformações do grupo (OHNUKI, 1988). Neste caso, $P_\mu P^\mu$ e $W_\mu W^\mu$ são os operadores de Casimir referentes às representações do grupo de Poincaré, onde $W^\mu := -\frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} M_{\nu\alpha} P_\beta$ é o 4-vetor de Pauli-Lubanski. Os respectivos autovalores de $P_\mu P^\mu$ e $W_\mu W^\mu$ são dados por $p^2 = -m^2$ e $-m^2 j(j+1)$, onde m é massa da partícula e j seu spin (LANZAGORTA, 2014). Aqui, estamos interessados

⁷Ou, equivalentemente, as representações unitárias irredutíveis do grupo de Poincaré. Uma representação T de um grupo G em um espaço vetorial \mathcal{H} é dita irredutível se \mathcal{H} não possui subespaços invariantes.

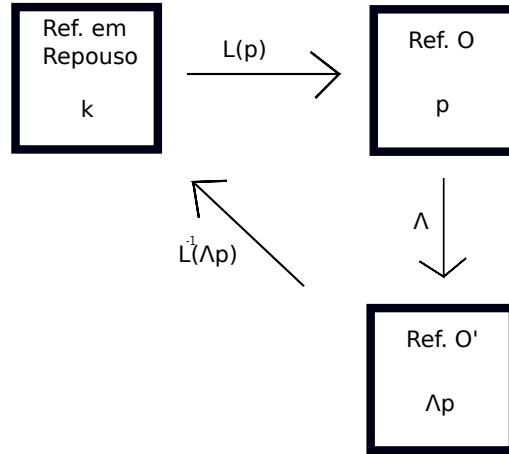


Figura 5.1 – Rotação de Wigner. Adaptado de (TERASHIMA; UEDA, 2003).

em partículas massivas de spin-1/2.

Para cada valor de p^2 e para cada $sign(p^0)$, é possível escolher um 4-momento k padrão (de referência). Para partículas massivas, é usual fixar o momento padrão k como o 4-momento no referencial da partícula (referencial no qual a partícula está em repouso): $k = (m, 0, 0, 0)$. Assim, qualquer outro momento p (ou Λp) pode ser expresso em termos do momento padrão:

$$p^\mu = (L(p)k)^\mu = L(p)^\mu_\nu k^\nu, \quad (5.18)$$

$$(\Lambda p)^\mu = (L(\Lambda p)k)^\mu = L(\Lambda p)^\mu_\nu k^\nu, \quad (5.19)$$

onde $L(p)$ é uma transformação de Lorentz que depende de p e leva $k \rightarrow p$ e, por definição, atua apenas nos graus de liberdade do momento. Portanto, estados quânticos $|p, \sigma\rangle$ podem ser definidos em termos dos estados $|k, \sigma\rangle$:

$$|p, \sigma\rangle = U(L(p)) |k, \sigma\rangle. \quad (5.20)$$

Agora, se aplicarmos um boost de Lorentz arbitrário Λ em $|p, \sigma\rangle$, temos que

$$U(\Lambda) |p, \sigma\rangle = I_{\mathcal{H}} U(\Lambda) U(L(p)) |k, \sigma\rangle \quad (5.21)$$

$$= U(I_{\mathcal{M}}) U(\Lambda L(p)) |k, \sigma\rangle \quad (5.22)$$

$$= U(L(\Lambda p) L^{-1}(\Lambda p)) U(\Lambda L(p)) |k, \sigma\rangle \quad (5.23)$$

$$= U(L(\Lambda p)) U(L^{-1}(\Lambda p) \Lambda L(p)) |k, \sigma\rangle \quad (5.24)$$

$$= U(L(\Lambda p)) U(W(\Lambda, p)) |k, \sigma\rangle, \quad (5.25)$$

onde $W(\Lambda, p) = L^{-1}(\Lambda p) \Lambda L(p)$ é denominada de rotação de Wigner e deixa o momento

padrão k invariante:

$$k \xrightarrow{L} p \xrightarrow{\Lambda} \Lambda p \xrightarrow{L^{-1}} k, \quad (5.26)$$

Portanto, o momento final no referencial de repouso difere do momento inicial por, no máximo, uma rotação, uma vez que

$$L(\Lambda p) \neq \Lambda L(p), \text{ na realidade } L(\Lambda p)W = \Lambda L(p), \quad (5.27)$$

como discutido no apêndice G. Por outro lado, $U(L(\Lambda p))$ leva $k \rightarrow \Lambda p$ sem afetar os graus de liberdade internos, por definição. Logo,

$$U(\Lambda) |p, \sigma\rangle = U(L(\Lambda p))U(W(\Lambda, p)) |k, \sigma\rangle \quad (5.28)$$

$$= U(L(\Lambda p)) \sum_{\lambda} D_{\lambda, \sigma}(W(\Lambda, p)) |k, \lambda\rangle \quad (5.29)$$

$$= \sum_{\lambda} D_{\lambda, \sigma}(W(\Lambda, p)) |\Lambda p, \lambda\rangle. \quad (5.30)$$

onde $D_{\lambda, \sigma}(W(\Lambda, p))$ é um elemento de matriz de um dos elementos da representação do grupo de rotações. No entanto, é possível muito bem escrever

$$U(\Lambda) |p, \sigma\rangle = |\Lambda p\rangle \otimes D(W(\Lambda, p)) |\sigma\rangle, \quad (5.31)$$

onde $D(W(\Lambda, p))$ é um elemento da representação do grupo de rotações, cujos elementos são caracterizados por W . O conjunto das rotações de Wigner formam um grupo, conhecido como *Wigner's little group*, sendo um subgrupo do grupo de Poincaré (WEINBERG, 1995). Assim, podemos dizer que, sob uma transformação de Lorentz Λ , o momento p é levado em Λp e os estados de spin se transformam sob uma representação do little group cujos elementos são caracterizados por W . Para partículas massivas, o little group é o grupo de rotações em 3 dimensões, $SO(3)$. No entanto, também é sabido que $SO(3)$ é homomórfico ao $SU(2)$, e as representações unitárias de $SU(2)$ varrem um espaço de Hilbert de $2j+1$ dimensões, com $j = n/2$, onde n é um inteiro (OHNUKI, 1988). Logo, é possível concluir que, para saber as representações do grupo de Lorentz para estados quânticos, basta saber as representações do grupo de rotações no espaço de Hilbert. Os elementos de $SU(2)$ descrevem rotações e são caracterizados por

$$R(\phi) = e^{i\frac{\phi}{2}\vec{\sigma}\cdot\hat{n}} = I_{2\times 2} \cos \frac{\phi}{2} + i(\vec{\sigma}\cdot\hat{n}) \sin \frac{\phi}{2}. \quad (5.32)$$

Para partículas de spin-1/2, a representação de $SU(2)$ é bidimensional e terá a mesma

forma que a equação acima. Ou seja,

$$D(W(\Lambda, p)) = I_{2 \times 2} \cos \frac{\phi}{2} + i(\vec{\sigma} \cdot \hat{n}) \sin \frac{\phi}{2}, \quad (5.33)$$

atuando no espaço de Hilbert. No entanto, a obtenção da equação acima é feita pela seguinte construção

$$D(W(\Lambda, p)) = D(L^{-1}(\Lambda p)\Lambda L(p)) = D(L^{-1}(\Lambda p))D(\Lambda)D(L(p)) \quad (5.34)$$

$$= D^{-1}(L(\Lambda p))D(\Lambda)D(L(p)). \quad (5.35)$$

A dedução detalhada pode ser encontrada em (HALPERN, 1968), e mais recentemente em (AHN et al., 2003), de modo que a forma final de $D(W(\Lambda, p))$ é dada por

$$\begin{aligned} D(W(\Lambda, p)) &= \frac{(p^0 + m) \cosh(\omega/2) I_{2 \times 2} + (\vec{p} \cdot \hat{e}) \sinh(\omega/2) - i \sinh(\omega/2) \vec{\sigma} \cdot (\vec{p} \times \hat{e})}{\sqrt{(p^0 + m)((\Lambda p)^0 + m)}} \\ &= \cos \frac{\phi}{2} I_{2 \times 2} + i \sin \frac{\phi}{2} (\vec{\sigma} \cdot \hat{n}), \end{aligned} \quad (5.36)$$

onde

$$\cos \frac{\phi}{2} = \frac{\cosh(\omega/2) \cosh(\alpha/2) + \sinh(\omega/2) \sinh(\alpha/2) (\hat{e} \cdot \hat{p})}{\sqrt{\frac{1}{2}(1 + \cosh \omega \cosh \alpha + \sinh \omega \sinh \alpha (\hat{e} \cdot \hat{p}))}}, \quad (5.37)$$

$$\sin \frac{\phi}{2} \hat{n} = \frac{\sinh(\omega/2) \sinh(\alpha/2) (\hat{e} \times \hat{p})}{\sqrt{\frac{1}{2}(1 + \cosh \omega \cosh \alpha + \sinh \omega \sinh \alpha (\hat{e} \cdot \hat{p}))}}, \quad (5.38)$$

com $\cosh \alpha = p^0/m$ caracterizando o boost que leva $k \rightarrow p$, $\omega = \tanh^{-1} v/c$ caracterizando o boost que leva \mathcal{O} em \mathcal{O}' e \hat{e} é o vetor unitário na direção do boost Λ , p é o 4-momento da partícula em \mathcal{O} , e Λp é o 4-momento da partícula em \mathcal{O}' . Além disso, ϕ é o ângulo de Wigner, e é dado por (RHODES; SEMON, 2004)

$$\tan \frac{\phi}{2} = \frac{\sinh(\omega/2) \sinh(\alpha/2) \sin \theta}{\cosh(\omega/2) \cosh(\alpha/2) + \sinh(\omega/2) \sinh(\alpha/2) \cos \theta} \quad (5.39)$$

$$= \frac{\sin \theta}{\mathcal{D} + \cos \theta}, \quad (5.40)$$

onde $\hat{e} \cdot \hat{p} = \cos \theta$, $|\hat{e} \times \hat{p}| = \sin \theta$ e

$$\mathcal{D} = \coth \frac{\omega}{2} \coth \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\left(\frac{\gamma_\omega + 1}{\gamma_\omega - 1}\right) \left(\frac{\gamma_\alpha + 1}{\gamma_\alpha - 1}\right)}, \quad (5.41)$$

dado que $\cosh \frac{\omega}{2} = \left(\frac{\cosh \omega + 1}{2}\right)^{1/2} = \left(\frac{\gamma_\omega + 1}{2}\right)^{1/2}$, $\sinh \frac{\omega}{2} = \left(\frac{\cosh \omega - 1}{2}\right)^{1/2} = \left(\frac{\gamma_\omega - 1}{2}\right)^{1/2}$ e similarmente para o boost caracterizado por α . A partir da Fig. 5.2, várias características

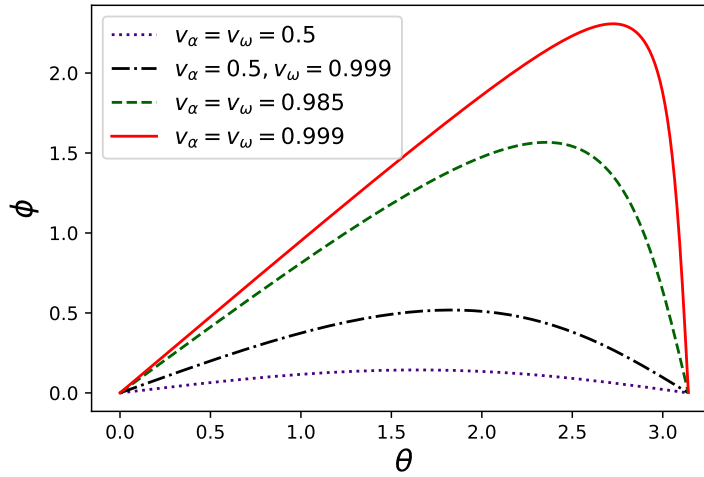


Figura 5.2 – Dependência do ângulo de Wigner em função do ângulo θ entre os boosts caracterizados por α e ω .

interessantes são imediatamente perceptíveis. Primeiro, para quaisquer dois boosts com velocidades v_α, v_ω fazendo um ângulo θ entre si, a rotação de Wigner aumenta com ambos v_α, v_ω , se aproximando do valor máximo π conforme v_α, v_ω se aproxima da velocidade de luz. Em segundo lugar, o valor máximo de ϕ é limitado pela velocidade do menor boost. Se $v_\alpha = 0.5$, então, mesmo que v_ω se torne arbitrariamente próximo da velocidade da luz, ϕ será consideravelmente mais baixo do que no caso em que ambos os boosts se aproximam da velocidade da luz. Terceiro, o ângulo θ no qual a rotação de Wigner é máxima depende da magnitude de ambas as velocidades v_α, v_ω (PALGE; DUNNINGHAM, 2012). Para ver isso, notemos que o ângulo θ , cuja rotação de Wigner é máxima, é dado por $\theta = \arccos(-1/\mathcal{D})$, onde \mathcal{D} depende da magnitude de ambas as velocidades v_α, v_ω . Tal máximo é um máximo global, uma vez que a função $\phi(\theta)$ é uma função côncava no domínio $\theta \in [0, \pi]$ (ROBERTS; VARBERG, 1973).

Além disso, para que $\phi \geq \frac{\pi}{2}$, é necessário que $\frac{\sin \theta}{\cos \theta + \mathcal{D}} \geq 1$, ou seja, $\sin 2\theta \geq 1 - \mathcal{D}^2$. Como $\mathcal{D} \geq 1$, então $1 - \mathcal{D}^2 \leq 0$, o que implica em $2\theta \in [\pi, 2\pi]$, i.e., $\theta \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$. Logo, para que $\phi \geq \frac{\pi}{2}$ é necessário que as direções entre os boosts α, ω sejam pelo menos levemente anti-paralelas. Vale ressaltar que o boost caracterizado por α , que leva o referencial da partícula ao referencial \mathcal{O} , está diretamente ligado com o referencial \mathcal{O} , o qual descreve o movimento da partícula. Também, na Fig. 5.3, é possível notar que os valores $\phi \geq \frac{\pi}{2}$ podem ser atingidos para velocidades menores que c . A região acima da curva corresponde aos valores de v_α, v_ω tais que $\phi > \frac{\pi}{2}$, enquanto a região abaixo da curva corresponde aos valores de v_α, v_ω tais que $\phi < \frac{\pi}{2}$, para $\theta = \frac{3\pi}{4}$. Logo, pelas características destacadas até aqui, é possível observar o fato crucial de que a rotação Wigner é altamente dependente da geometria do boost em questão, i.e, a especificação das magnitudes dos boosts e o ângulo formado entre eles, denotado pela tripla $(v_\alpha, v_\omega, \theta)$.

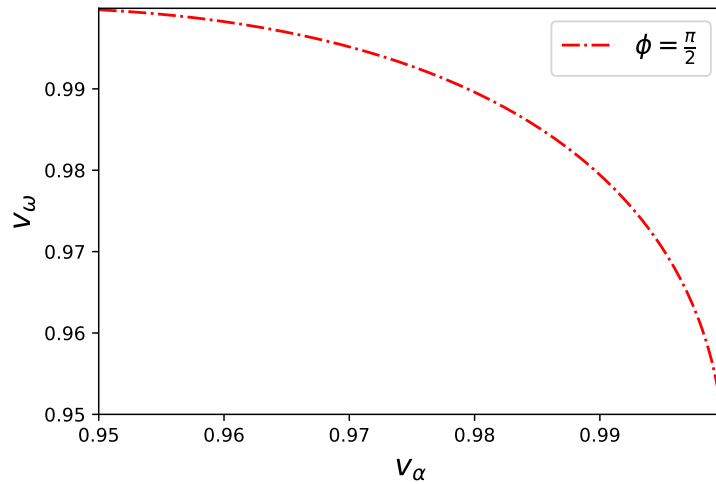


Figura 5.3 – A região acima da curva corresponde aos valores de v_α, v_ω tais que $\phi > \frac{\pi}{2}$, enquanto a região abaixo da curva corresponde aos valores de v_α, v_ω tais que $\phi < \frac{\pi}{2}$, para $\theta = \frac{3\pi}{4}$.

Como exemplo, consideremos uma partícula se movendo ao longo do eixo- x no referencial \mathcal{O} cujo momento é dado por $p^\mu = (E, \gamma m \vec{v}) = (m \cosh \alpha, m \sinh \alpha, 0, 0)$, onde

$$L(p) = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta & 0 & 0 \\ \gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh \alpha & \sinh \alpha & 0 & 0 \\ \sinh \alpha & \cosh \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (5.42)$$

é o boost que leva o referencial da partícula ao referencial \mathcal{O} . Agora, considerando um outro observador \mathcal{O}' que se move ao longo do eixo z em relação à \mathcal{O} com velocidade $V = \tanh \omega$. Logo, temos que $\hat{e} = \hat{z}$, $\hat{p} = \hat{x}$, e portanto, $\theta = \frac{\pi}{2}$ de modo que

$$D(W(\Lambda, p)) = \cos \frac{\phi}{2} I_{2 \times 2} + i \sin \frac{\phi}{2} \sigma_y \quad (5.43)$$

$$= \begin{pmatrix} \cos \frac{\phi}{2} & \sin \frac{\phi}{2} \\ -\sin \frac{\phi}{2} & \cos \frac{\phi}{2} \end{pmatrix}, \quad (5.44)$$

com

$$\cos \frac{\phi}{2} = \frac{\cosh(\alpha/2) \cosh(\omega/2)}{\sqrt{\frac{1}{2}(1 + \cosh \alpha \cosh \omega)}}, \quad (5.45)$$

$$\sin \frac{\phi}{2} \hat{n} = \frac{-\sinh(\alpha/2) \sinh(\omega/2) \hat{y}}{\sqrt{\frac{1}{2}(1 + \cosh \alpha \cosh \omega)}}, \quad (5.46)$$

$$\tan \phi = \frac{\sinh \alpha \sinh \omega}{\cosh \alpha + \cosh \omega}. \quad (5.47)$$

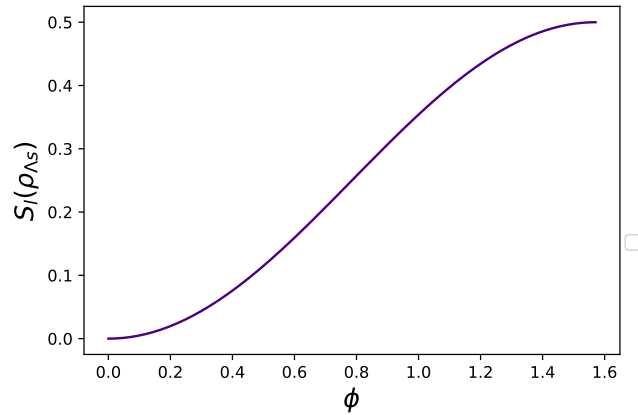


Figura 5.4 – $S_l(\rho_{\Lambda s})$ em função de ϕ .

A partir da Eq. (5.47), para um boost caracterizado por α finito, então $\tan \phi \rightarrow \sinh \alpha$ para $\omega \rightarrow \infty$. Ou seja, a rotação de Wigner é menor que $\frac{\pi}{2}$ mesmo que a velocidade do referencial \mathcal{O}' em relação à \mathcal{O} tenda à velocidade da luz. Assim, é possível ver que $\phi \rightarrow \pi/2$ apenas se $\alpha, \omega \rightarrow \infty$ para o caso em que $\theta = \frac{\pi}{2}$. Portanto, dado o estado de uma partícula de spin-1/2 com momento \vec{p} ao longo do eixo x de \mathcal{O} , e o eixo de quantização do spin ao longo de z , os estados no referencial \mathcal{O}' são descritos por

$$U(\Lambda) |p, 0\rangle = |\Lambda p\rangle \otimes \left(\cos \frac{\phi}{2} |0\rangle - \sin \frac{\phi}{2} |1\rangle \right), \quad (5.48)$$

$$U(\Lambda) |p, 1\rangle = |\Lambda p\rangle \otimes \left(\sin \frac{\phi}{2} |0\rangle + \cos \frac{\phi}{2} |1\rangle \right), \quad (5.49)$$

onde $|0\rangle$ significa spin 'up' e $|1\rangle$ spin 'down'. Assim, podemos ver que o boost Λ de $\mathcal{O} \rightarrow \mathcal{O}'$ rotaciona o momento da partícula

$$(\Lambda p)^\mu = (mc \cosh \xi \cosh \chi, mc \sinh \xi, 0, -mc \cosh \xi \sinh \chi) \quad (5.50)$$

de modo que o ângulo dessa rotação é dado por

$$\tan \phi_p = \left| \frac{(\Lambda p)^3}{(\Lambda p)^1} \right| = \frac{\sinh \chi}{\tanh \xi}. \quad (5.51)$$

Assim, o spin é 'arrastado' junto com essa rotação já que, na teoria quântica relativística, spin e momento estão acoplados, sendo possível observar que $\phi \leq \phi_p$ (TERASHIMA; UEDA, 2003). Agora, se considerarmos que o estado da partícula no referencial \mathcal{O} possui superposição nos estados de momento ao longo do eixo x , por exemplo,

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|p\rangle + |-p\rangle) \otimes |0\rangle, \quad (5.52)$$

então o mesmo sistema será descrito por \mathcal{O}' como

$$|\Psi_\Lambda\rangle = U(\Lambda)|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|\Lambda p\rangle \otimes D(W(\Lambda, p))|0\rangle + |-\Lambda p\rangle \otimes D(W(\Lambda, -p))|0\rangle \right) \quad (5.53)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} |\Lambda p\rangle \left(\cos \frac{\phi}{2} |0\rangle - \sin \frac{\phi}{2} |1\rangle \right) + \frac{1}{\sqrt{2}} |-\Lambda p\rangle \left(\cos \frac{\phi}{2} |0\rangle + \sin \frac{\phi}{2} |1\rangle \right) \quad (5.54)$$

sendo, em geral, um estado emaranhado. Para vermos isso, basta, por exemplo, tomar o traço parcial sobre os estados de momento de modo a obtermos o estado reduzido de spin no referencial \mathcal{O}' : $\rho_{\Lambda s} = \cos^2 \frac{\phi}{2} |0\rangle\langle 0| + \sin^2 \frac{\phi}{2} |1\rangle\langle 1|$, onde na Fig. 5.4 plotamos a entropia linear $S_i(\rho_{\Lambda s})$ em função de ϕ . Mais especificamente, enquanto o referencial \mathcal{O} atribui ao estado da partícula um estado separável, o referencial \mathcal{O}' atribui ao estado da partícula um estado emaranhado. No limite em que $\phi \rightarrow \pi/2$, temos o estado maximamente emaranhado:

$$|\Psi_\Lambda\rangle = \frac{1}{2} |\Lambda p\rangle \otimes (|0\rangle - |1\rangle) + \frac{1}{2} |-\Lambda p\rangle \otimes (|0\rangle + |1\rangle). \quad (5.55)$$

Nesse sentido, os autores de (DUNNINGHAM; PALGE; VEDRAL, 2009) argumentam que os boosts de Lorentz podem ser considerados como operações quânticas controladas, onde o momento desempenha o papel do sistema de controle, enquanto o spin pode ser tomado como o qubit alvo, i.e., $U(\Lambda)$ pode ser visto como um tipo de C-not no sentido de que o estado de spin $|0\rangle$ é transformado em um dos dois estados ortogonais $|0\rangle \mp |1\rangle$ dependendo do estado de momento $|\pm \Lambda p\rangle$. Já, em (PALGE; DUNNINGHAM, 2012), os autores consideraram um cenário em particular no qual o emaranhamento máximo pode ser alcançado com boosts menores do que a velocidade da luz. Logo, o seguinte teorema resume o principal ponto da transformação $U(\Lambda)$:

Teorema 12. *Dado um estado separável $|\Psi\rangle = |p\rangle \otimes |\phi_{\text{spin}}\rangle$ em \mathcal{O} , onde $|p\rangle = \sum_i \sqrt{p_i} |p_i\rangle$ com $\sum_i p_i = 1$. Então, no referencial \mathcal{O}' ligado à \mathcal{O} por um boost Λ , o estado $|\Psi_\Lambda\rangle = U(\Lambda)|\Psi\rangle$ é possivelmente um estado emaranhado.*

Demonstração. De fato, dado que $U(\Lambda)|\Psi\rangle = \sum_i \sqrt{p_i} |\Lambda p_i\rangle \otimes D(W(\Lambda, p_i))|\phi_{\text{spin}}\rangle$, então o estado reduzido de spin é dado por

$$\rho_{\Lambda s} = \sum_i p_i D(W(\Lambda, p_i)) |\phi_{\text{spin}}\rangle\langle \phi_{\text{spin}}| D^\dagger(W(\Lambda, p_i)). \quad (5.56)$$

Considerando um monótono de emaranhamento qualquer, S , para estados globais

puros, temos que

$$S(\rho_{\Lambda_s}) \geq \sum_i p_i S(D(W(\Lambda, p_i)) |\phi_{\text{spin}}\rangle\langle\phi_{\text{spin}}| D^\dagger(W(\Lambda, p_i))) \quad (5.57)$$

$$= \sum_i p_i S(|\phi_{\text{spin}}\rangle\langle\phi_{\text{spin}}|) \quad (5.58)$$

$$= S(|\phi_{\text{spin}}\rangle\langle\phi_{\text{spin}}|), \quad (5.59)$$

ou seja, $S(\rho_{\Lambda_s}) \geq S(|\phi_{\text{spin}}\rangle\langle\phi_{\text{spin}}|) = 0$. □

5.1.2 Caso contínuo para partículas de spin-1/2

Nesta seção, vamos tratar do caso em que os estados de momentos são contínuos. Seguindo (PALGE et al., 2018), dado um referencial \mathcal{O} que descreve uma partícula livre de spin 1/2, o estado completo da partícula pode ser caracterizado por

$$|\psi\rangle = \left(\sum_\lambda |\lambda\rangle\langle\lambda| \otimes \int d\mu(p) |p\rangle\langle p| \right) |\psi\rangle \quad (5.60)$$

$$= \sum_\lambda \int d\mu(p) \psi_\lambda(p) |p, \lambda\rangle, \quad (5.61)$$

onde $\psi_\lambda(p) := \langle\lambda, p|\psi\rangle$ é a função de onda na base do momento, sendo uma função de duas componentes (um spinor) a fim de levar em conta o spin, enquanto que

$$d\mu(p) = \frac{1}{(2\pi)^3 2p^0} d^3p \quad (5.62)$$

é a medida de integração invariante de Lorentz, ou seja, $d\mu(\Lambda p) = d\mu(p)$ (WEINBERG, 1995). A função de onda ainda satisfaz a condição de normalização

$$\sum_\lambda \int d\mu(p) |\psi_\lambda(p)|^2 = 1, \quad (5.63)$$

enquanto os autoestados de spin e momento satisfazem a condição de ortogonalidade dada por $\langle p', \lambda' | p, \lambda \rangle = 2p^0 \delta(p' - p) \delta_{\lambda, \lambda'}$, onde $\delta(p' - p)$ é a distribuição delta de Dirac. Agora, dado o referencial \mathcal{O}' ligado ao referencial \mathcal{O} pela transformação de Lorentz Λ , onde Λ é caracterizado pela rapidez ξ , o referencial \mathcal{O}' atribuirá o seguinte estado à

partícula de spin 1/2:

$$|\psi_\Lambda\rangle = U(\Lambda) |\psi\rangle = \sum_\lambda \int d\mu(p) \psi_\lambda(p) U(\Lambda) |p, \lambda\rangle \quad (5.64)$$

$$= \sum_{\lambda, \sigma} \int d\mu(p) \psi_\lambda(p) D_{\sigma, \lambda}(W(\Lambda, p)) |\Lambda p, \sigma\rangle \quad (5.65)$$

$$= \sum_{\lambda, \sigma} \int d\mu(\Lambda^{-1}p) \psi_\lambda(\Lambda^{-1}p) D_{\sigma, \lambda}(W(\Lambda, \Lambda^{-1}p)) |p, \sigma\rangle \quad (5.66)$$

$$= \sum_\sigma \int d\mu(p) \psi'_\sigma(p) |p, \sigma\rangle, \quad (5.67)$$

onde $\psi'_\sigma(p) = \sum_\lambda D_{\sigma, \lambda}(W(\Lambda, \Lambda^{-1}p)) \psi_\lambda(\Lambda^{-1}p)$ é a função de onda descrita pelo referencial \mathcal{O}' na base $|p\rangle$. Assim, o estado de spin reduzido no referencial \mathcal{O}' é dado por

$$\rho'_s = \text{Tr}_p |\psi'\rangle\langle\psi'| = \int d\mu(p) \langle p|\psi'\rangle \langle\psi'|p\rangle \quad (5.68)$$

$$= \sum_{\sigma, \lambda} \int d\mu(p) \int d\mu(q) \int d\mu(k) (2q^0) \delta(p - q) (2k^0) \delta(p - k) \psi'_\sigma(q) \psi'^*_\lambda(k) |\sigma\rangle\langle\lambda| \quad (5.69)$$

$$= \sum_{\sigma, \lambda} \int d\mu(p) \psi'_\sigma(p) \psi'^*_\lambda(p) |\sigma\rangle\langle\lambda| \quad (5.70)$$

enquanto um elemento qualquer de ρ'_s é caracterizador por

$$\rho'^s_{\sigma\lambda} = \int d\mu(p) \psi'_\sigma(p) \psi'^*_\lambda(p) \quad (5.71)$$

$$= \sum_{\alpha, \beta} D_{\sigma, \alpha}(W(\Lambda, \Lambda^{-1}p)) \psi_\alpha(\Lambda^{-1}p) D^*_{\lambda, \beta}(W(\Lambda, \Lambda^{-1}p)) \psi^*_\beta(\Lambda^{-1}p). \quad (5.72)$$

Agora, seguindo Peres, Scudo e Terno (PERES; SCUDO; TERNO, 2002), consideremos uma partícula de spin-1/2 descrita pelo referencial \mathcal{O} como

$$\psi(p) = \begin{pmatrix} \psi_0(p) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (5.73)$$

ou seja, o estado dela é puro e separável com spin up: $|\psi\rangle = \int d\mu(p) \psi_0(p) |p\rangle \otimes |0\rangle$. Tomando o traço parcial sobre os momentos, obtemos um estado puro e bem definido $\rho_s = |0\rangle\langle 0|$. Por conseguinte, tanto a entropia linear quanto a entropia de von Neumann (ou qualquer outro monótono de emaranhamento para estados bipartidos puros) se anula $S_l(\rho_s) = S_{vn}(\rho_s) = 0$. Considerando que o estado dos momentos é um pacote

gaussiano no referencial \mathcal{O} dado por

$$\psi_0(p) = (2\pi)^{-3/4} w^{-3/2} e^{-p^2/2w^2}, \quad (5.74)$$

ou seja, um estado de mínima incerteza em posição e momentum. O parâmetro $w > 0$ dá uma medida da dispersão do momento no referencial de preparação. Agora, dado o referencial \mathcal{O}' se movendo ao longo do eixo- x em relação ao referencial \mathcal{O} e caracterizado pelo boost Λ , de modo que o estado da partícula em \mathcal{O}' é descrito por

$$|\psi'\rangle = \sum_{\sigma} \int d\mu(\Lambda^{-1}p) \psi_0(\Lambda^{-1}p) D_{\sigma,0}(W(\Lambda, \Lambda^{-1}p)) |p, \sigma\rangle \quad (5.75)$$

$$= \int d\mu(p) \psi_0(\Lambda^{-1}p) \left(D_{0,0}(W(\Lambda, \Lambda^{-1}p)) |p, 0\rangle + D_{1,0}(W(\Lambda, \Lambda^{-1}p)) |p, 1\rangle \right) \quad (5.76)$$

que, em geral, é um estado emaranhado uma vez que os elementos $D_{\sigma,\lambda}$ dependem de momento e o pacote gaussiano constitui uma superposição de estados de momento em torno de $p = 0$. No entanto, vale notar que a pureza do estado global é preservada. Ignorando os estados de momento, obteremos um estado misto. Para resolver analiticamente as integrais que surgem, os autores consideraram pacotes de momento estreitos, caracterizados por

$$W = \frac{w}{m} \ll 1, \quad (5.77)$$

de modo que o operador densidade reduzido em \mathcal{O}' é dado por (PERES; SCUDO; TERNO, 2002)

$$\rho_{\Lambda s} = \left(1 - \frac{1}{8} \frac{w^2}{m^2} \tanh^2 \frac{\xi}{2} \right) |0\rangle\langle 0| + \frac{1}{8} \frac{w^2}{m^2} \tanh^2 \frac{\xi}{2} |1\rangle\langle 1|, \quad (5.78)$$

onde ξ é o parâmetro que caracteriza o boost Λ , sendo possível perceber que as entropias que medem o emaranhamento são diferentes de zero nesse caso, como é possível perceber pela Fig. 5.5, onde plotamos a entropia linear de $\rho_{\Lambda s}$ em função de ξ .

A não-invariância dos monótonos de emaranhamento de spin é uma consequência do fato de que o operador densidade reduzido de spin ρ_s não admite nenhuma lei de transformação covariante, exceto no caso em que o estado possui momentum bem definido; em geral, apenas o operador densidade global ρ admite. Isto é, o momento p transforma-se linearmente, mas a lei de transformação das componentes do spin dependem explicitamente de p . Mais especificamente, em (PERES; TERNO, 2004), os autores denominaram variáveis primárias aquelas que possuem leis de transformações relativísticas que dependem apenas das transformações de Lorentz (por exemplo, o momento de uma partícula); e variáveis secundárias, aquelas que têm leis de

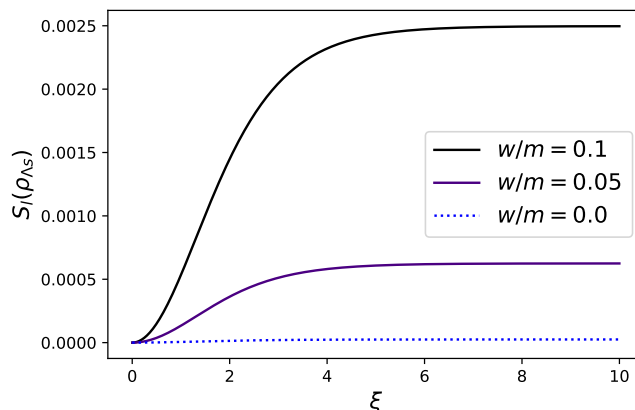


Figura 5.5 – $S_i(\rho_{\Lambda_s})$ em função de ξ .

transformações que não dependem apenas das transformações de Lorentz, mas também do momento da partícula (por exemplo, o spin de uma partícula). Quando computado ρ_s , ignorando o estado de momento em ρ , todo o conhecimento do estado de momento é perdido, sendo impossível obter ρ'_s direto de ρ_s . Ou seja, não existe transformação unitária $U(\Lambda)$ bem definida que atua apenas no espaço de Hilbert dos spin e que independa de p . Em suma, para tratar relativisticamente o problema de uma partícula de spin-1/2 do ponto de vista informacional, somos obrigados a considerar o estado completo do sistema, incluindo o momento da partícula. Para uma mudança de referencial (por exemplo, se um detector está em movimento em relação ao aparato de preparação), precisamos transformar o estado completo, aplicando uma rotação de Wigner, e só então tomar o traço sobre os estados de momento para obter o operador densidade reduzido de spin no referencial em movimento:

$$|\psi\rangle\langle\psi| \rightarrow |\psi'\rangle\langle\psi'| = U(\Lambda) |\psi\rangle\langle\psi| U^\dagger(\Lambda) \rightarrow \rho'_s. \quad (5.79)$$

Portanto, por mais que um operador densidade reduzido de spin é bem definido para todo referencial de Lorentz, não existe uma relação direta entre eles para diferentes referenciais (PERES; SCUDO; TERNO, 2002).

5.2 A INVARIÂNCIA DE LORENTZ DE RELAÇÕES COMPLETAS DE COMPLEMENTARIEDADE

Para facilitar nossa investigação, voltamos a nos restringir a estados discretos de momento. Além disso, ao longo desta seção, consideraremos apenas partículas massivas de spin 1/2. Ao fazer isso, estamos considerando uma representação particular do grupo de Wigner. Também, nesta seção usamos a base de spin padrão,

e não outras formas como a base da helicidade. Mesmo que a base da helicidade seja mais frequentemente considerada em investigações teóricas e experimentais em física de altas energias, tanto os estados de helicidade quanto os estados de spin constituem uma base para o espaço de Hilbert de uma partícula. Bem como, ambas podem ser estudadas por meio de representações unitárias do grupo de Poincaré. No entanto, o resultado obtido nesta seção não vai depender da escolha particular da representação, dado que a representação permaneça unitária.

Sejam n -quantons massivos de spin-1/2 descritos por $|\Psi\rangle_{A_1, \dots, A_{2n}} \in \mathcal{H}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{H}_{2n}$ cuja dimensão é $d = d_{A_1} d_{A_2} \dots d_{A_{2n}}$, no referencial inercial \mathcal{O} . Aqui, A_1, A_2 se refere ao momento e spin do primeiro quanton, e assim por diante. Como vimos na seção 3.2.3, explorando o fato de que $1 - \text{Tr} \rho^2 = 0$, onde $\rho = |\Psi\rangle_{A_1, \dots, A_{2n}} \langle \Psi|$, é possível obter relações de complementariedade completas para qualquer um dos subsistemas. Em particular, dado o sistema A_1 , cujo estado reduzido é dado por

$$\rho_{A_1} = \sum_{i_1, j_1} \rho_{i_1, j_1}^{A_1} |i_1\rangle_{A_1} \langle j_1| = \sum_{i_1, j_1} \sum_{i_2, \dots, j_{2n}} \rho_{i_1 i_2 \dots i_{2n}, j_1 i_2 \dots i_{2n}} |i_1\rangle_{A_1} \langle j_1|, \quad (5.80)$$

então a RCC $P_l(\rho_{A_1}) + C_{hs}(\rho_{A_1}) + S_l(\rho_{A_1}) = \frac{d_{A_1}-1}{d_{A_1}}$ é válida no referencial \mathcal{O} . Agora, para o referencial inercial \mathcal{O}' , obtido a partir de \mathcal{O} por uma transformação de Lorentz, o mesmo sistema quântico de n -quantons é descrito por $|\Psi_\Lambda\rangle_{A_1, \dots, A_{2n}} = U(\Lambda) |\Psi\rangle_{A_1, \dots, A_{2n}}$, de modo que o operador densidade é dado por

$$\rho_{A_1, \dots, A_{2n}}^\Lambda = |\Psi_\Lambda\rangle_{A_1, \dots, A_{2n}} \langle \Psi_\Lambda| = U(\Lambda) \rho_{A_1, \dots, A_{2n}} U^\dagger(\Lambda), \quad (5.81)$$

o que implica que a pureza é invariante: $\text{Tr}(\rho_{A_1, \dots, A_{2n}}^\Lambda)^2 = \text{Tr}(\rho_{A_1, \dots, A_{2n}})^2$. Como usamos a hipótese de que o estado do sistema global é puro para obter RCC, então, a partir de $1 - \text{Tr}(\rho_{A_1, \dots, A_{2n}}^\Lambda)^2 = 0$, segue que

$$P_l(\rho_{A_1}^\Lambda) + C_{hs}(\rho_{A_1}^\Lambda) + S_l(\rho_{A_1}^\Lambda) = \frac{d_{A_1} - 1}{d_{A_1}}. \quad (5.82)$$

é válida no referencial \mathcal{O}' . Isso significa que, além de ser possível definir RCC em qualquer referencial inercial, as relações de complementariedade completas estão relacionadas nos diferentes referenciais. Também vale mencionar que tal resultado permanece válido no caso em que os autovalores do momento formam um contínuo, bastando substituir o somatório sobre os índices referentes aos estados de momento por uma integral, levando em conta que os elementos do operador densidade na base do momento serão funções contínuas do momento. Por exemplo, para o caso de um quanton de spin-1/2, $\rho_{ij,kl} \rightarrow \rho_{ik}(p, q) = \psi_i(p) \psi_k^*(q)$. Por fim, vale mencionar que os autores em (SAVI; ANGELO, 2021), dentro do contexto de covariância por trocas de referenciais quânticos, obtiveram uma relação similar às equações do tipo (5.82),

onde a noção de previsibilidade é substituída pela incompatibilidade e o monótono de emaranhamento é substituído por uma medida mais geral de correlações quânticas..

A fim de exemplificar o fato de que as RCC's estão relacionadas nos diferentes referenciais, consideremos o seguinte cenário: uma partícula massiva de spin-1/2 se movendo ao longo do eixo- y e o eixo de quantização do spin é paralelo ao eixo- z no referencial \mathcal{O} . Consideremos também que a partícula pode ser descrita em um dos seguintes estados no referencial \mathcal{O} :

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|p\rangle + |-p\rangle) \otimes |0\rangle, \quad (5.83)$$

$$|\Xi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|p, 0\rangle + |-p, 1\rangle), \quad (5.84)$$

$$|\Phi\rangle = \frac{1}{2}(|p\rangle + |-p\rangle) \otimes (|0\rangle + |1\rangle), \quad (5.85)$$

onde $|-p\rangle$ descreve o estado no qual o momento tem direção oposta ao estado $|p\rangle$, sendo possível observar que os estados $|\Psi\rangle, |\Phi\rangle$ são separáveis, enquanto $|\Xi\rangle$ é um estado maximamente emaranhado. Além disso, o estado $|\Psi\rangle$ possui máxima coerência nos estados de momento, e o estado de spin é complementamente previsível. Enquanto o estado $|\Phi\rangle$ possui máxima coerência em ambos os graus de liberdade. Já, o estado $|\Xi\rangle$ não possui propriedades locais. Agora, seja um referencial \mathcal{O}' que se move com velocidade \vec{v} cuja direção é ortogonal ao momento da partícula no referencial \mathcal{O} , i.e., no plano $x - z$, fazendo um ângulo $\theta \in [0, \pi/2]$ com o eixo x . Assim, a direção do boost é dada por $\hat{e} = \cos\theta\hat{x} + \sin\theta\hat{z}$, e portanto, a rotação de Wigner é dada por:

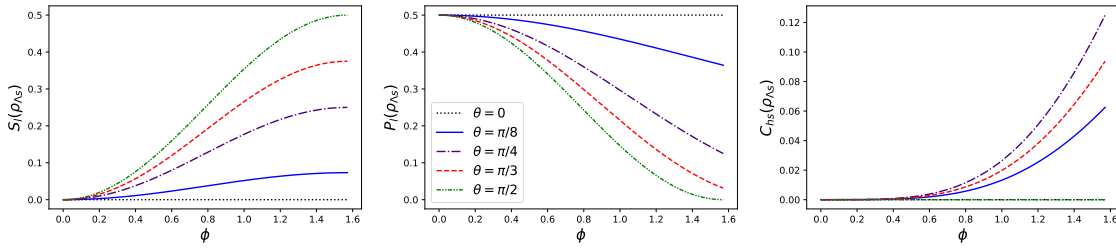
$$\begin{aligned} D(W(\Lambda, \pm p)) &= \cos\frac{\phi}{2}I_{2\times 2} + i\sin\frac{\phi}{2}(\mp\sin\theta\sigma_x \pm \cos\theta\sigma_z) \\ &= \begin{pmatrix} \cos\frac{\phi}{2} \pm i\sin\frac{\phi}{2}\cos\theta & \mp i\sin\frac{\phi}{2}\sin\theta \\ \mp i\sin\frac{\phi}{2}\sin\theta & \cos\frac{\phi}{2} \mp i\sin\frac{\phi}{2}\cos\theta \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (5.86)$$

uma vez que $\pm\hat{p} = \pm\hat{y}$.

Assim, o estado dado por Eq. (5.83) no referencial \mathcal{O} , em \mathcal{O}' é descrito por

$$\begin{aligned} |\Psi_\Lambda\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|\Lambda p\rangle [(\cos\frac{\phi}{2} + i\sin\frac{\phi}{2}\cos\theta)|0\rangle - i\sin\frac{\phi}{2}\sin\theta|1\rangle] \right. \\ &\quad \left. + |-\Lambda p\rangle [(\cos\frac{\phi}{2} - i\sin\frac{\phi}{2}\cos\theta)|0\rangle + i\sin\frac{\phi}{2}\sin\theta|1\rangle] \right), \end{aligned} \quad (5.87)$$

de modo que os estados reduzidos de spin e momento são dados respectivamente



(a) $S_l(\rho_{\Lambda_s})$ em função do ângulo de Wigner. (b) $P_l(\rho_{\Lambda_s})$ em função do ângulo de Wigner. (c) $C_{hs}(\rho_{\Lambda_s})$ em função do ângulo de Wigner.

Figura 5.6 – Diferentes aspectos do estado de spin do quanton para diferentes valores de θ .

por

$$\rho_{\Lambda_s} = \text{Tr}_{\Lambda_p} |\Psi_{\Lambda}\rangle\langle\Psi_{\Lambda}| = \begin{pmatrix} \cos^2 \frac{\phi}{2} + \sin^2 \frac{\phi}{2} \cos^2 \theta & -\sin^2 \frac{\phi}{2} \sin \theta \cos \theta \\ -\sin^2 \frac{\phi}{2} \sin \theta \cos \theta & \sin^2 \frac{\phi}{2} \sin^2 \theta \end{pmatrix}, \quad (5.88)$$

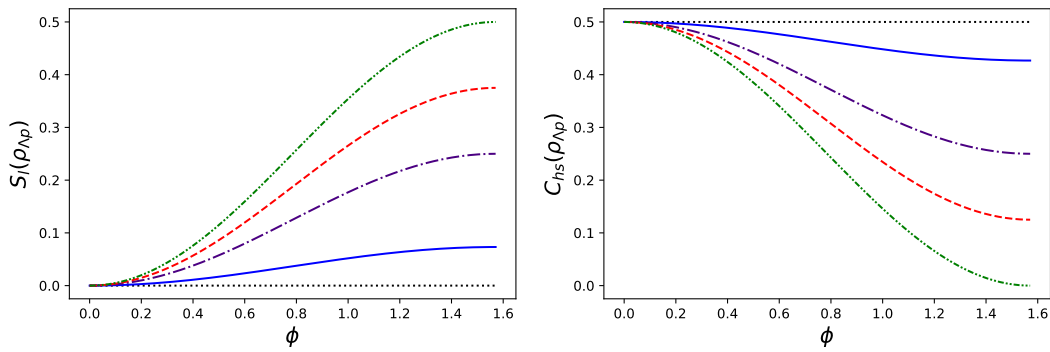
$$\rho_{\Lambda_p} = \text{Tr}_{\Lambda_s} |\Psi_{\Lambda}\rangle\langle\Psi_{\Lambda}| = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2}(\cos \phi + i \sin \phi \cos \theta) \\ \frac{1}{2}(\cos \phi - i \sin \phi \cos \theta) & \frac{1}{2} \end{pmatrix}. \quad (5.89)$$

Nas Figs. 5.6 e 5.7, plotamos os diferentes aspectos dos graus de liberdade do quanton para diferentes valores de θ . É possível ver que, se não há boost ($\phi = 0$), o estado permanece o mesmo. Também, se o boost é ao longo do eixo- x ($\theta = 0$), o estado permanece o mesmo. Já, para $\theta > 0$, podemos ver que o emaranhamento entre spin e momento aumenta com o ângulo de Wigner. No caso extremo em que $\theta = \pi/2$ e $\phi = \pi/2$, o estado é maximamente emaranhado. De fato, fazendo $\theta = \phi = \pi/2$ na Eq. (5.87), temos

$$|\Psi_{\Lambda}\rangle_{\theta=\phi=\pi/2} = \frac{1}{\sqrt{2}} |\Lambda p\rangle \otimes \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle - i|1\rangle) + \frac{1}{\sqrt{2}} |-\Lambda p\rangle \otimes \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle + i|1\rangle). \quad (5.90)$$

Também, é interessante notar que, para $\theta \in (0, \pi/2)$, a coerência dos estados de spin aumenta com o ângulo de Wigner. Em contrapartida, a coerência do estado de momento e a preditibilidade do estado de spin decresce com ϕ . No entanto, podemos ver que, para qualquer $\theta, \phi \in [0, \pi/2]$, a relação de complementariedade $P_l + C_{hs} + S_l = 1/2$ é sempre satisfeita. Agora, o estado $|\Xi\rangle$ dado pela Eq. (5.84) é descrito em \mathcal{O}' como

$$|\Xi_{\Lambda}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|\Lambda p\rangle \left[(\cos \frac{\phi}{2} + i \sin \frac{\phi}{2} \cos \theta) |0\rangle - i \sin \frac{\phi}{2} \sin \theta |1\rangle \right] + |-\Lambda p\rangle \left[i \sin \frac{\phi}{2} \sin \theta |0\rangle + (\cos \frac{\phi}{2} + i \sin \frac{\phi}{2} \cos \theta) |1\rangle \right] \right), \quad (5.91)$$



(a) $S_l(\rho_{\Lambda p})$ em função do ângulo de Wigner. (b) $C_{hs}(\rho_{\Lambda p})$ em função do ângulo de Wigner.

Figura 5.7 – Os diferentes aspectos do estado de momento, dado o estado global $|\Psi_{\Lambda}\rangle$, para diferentes valores de θ .

enquanto as matrizes densidade reduzidas são dadas por

$$\rho_{\Lambda s} = \rho_{\Lambda p}^{\dagger} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & i \cos \frac{\phi}{2} \sin \frac{\phi}{2} \sin \theta \\ -i \cos \frac{\phi}{2} \sin \frac{\phi}{2} \sin \theta & \frac{1}{2} \end{pmatrix}. \quad (5.92)$$

Nesse exemplo, pela Fig. 5.8, se não há nenhum boost, i.e., $\phi = 0$ o estado permanece o mesmo. Também, como anteriormente, se o boost é ao longo do eixo- x , $\theta = 0$, o estado permanece o mesmo. No entanto, para $\theta \in (0, \pi/2]$ e $\phi \neq 0$, há um aumento da coerência no estado de ambos os graus de liberdade. Em troca, o emaranhamento entre spin e momento diminui. No caso extremo em que $\theta = \pi/2$ e $\phi \rightarrow \pi/2$, os estados de ambos graus de liberdade são maximamente coerentes e o estado global $|\Phi_{\Lambda}\rangle$ é separável

$$|\Xi_{\Lambda}\rangle_{\phi=\theta=\pi/2} = \frac{1}{2}(|\Lambda p\rangle + i|-\Lambda p\rangle) \otimes (|0\rangle - i|1\rangle). \quad (5.93)$$

Por último, no referencial \mathcal{O}' , o estado $|\Phi\rangle$ dado pela Eq. (5.85) é descrito por

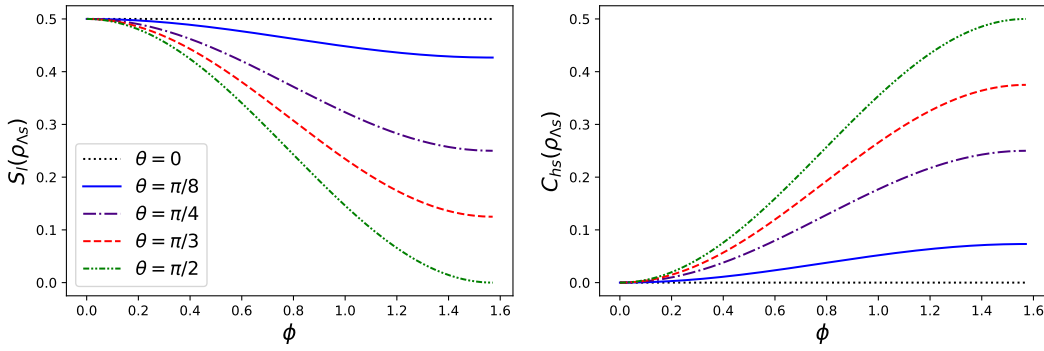
$$|\Phi_{\Lambda}\rangle = \frac{1}{2} \left(|\Lambda p\rangle \left\{ \left[\cos \frac{\phi}{2} + i \sin \frac{\phi}{2} (\cos \theta - \sin \theta) \right] |0\rangle + \left[\cos \frac{\phi}{2} - i \sin \frac{\phi}{2} (\cos \theta + \sin \theta) \right] |1\rangle \right\} \right. \quad (5.94)$$

$$\left. + |-\Lambda p\rangle \left\{ \left[\cos \frac{\phi}{2} - i \sin \frac{\phi}{2} (\cos \theta - \sin \theta) \right] |0\rangle + \left[\cos \frac{\phi}{2} + i \sin \frac{\phi}{2} (\cos \theta + \sin \theta) \right] |1\rangle \right\} \right),$$

com as matrizes densidade reduzidas expressas por

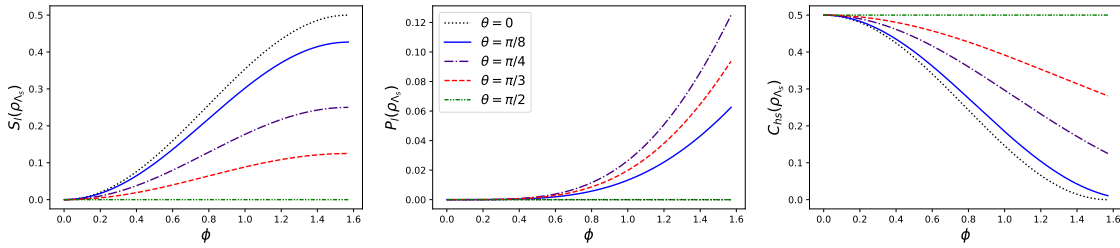
$$\rho_{\Lambda s} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2}(\cos^2 \frac{\phi}{2} - \sin^2 \frac{\phi}{2} \cos 2\theta) \\ \frac{1}{2}(\cos^2 \frac{\phi}{2} - \sin^2 \frac{\phi}{2} \cos 2\theta) & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad (5.95)$$

$$\rho_{\Lambda p} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2}(\cos \phi - i \sin \phi \sin \theta) \\ \frac{1}{2}(\cos \phi + i \sin \phi \sin \theta) & \frac{1}{2} \end{pmatrix}. \quad (5.96)$$



(a) $S_l(\rho_{\Lambda s})$, $j = s, p$, como função do ângulo de Wigner. (b) $C_{hs}(\rho_{\Lambda j})$, $j = s, p$, como função do ângulo de Wigner.

Figura 5.8 – Os diferentes aspectos dos graus de liberdade do quanton no estado $|\Xi_{\Lambda}\rangle$ para diferentes valores de θ .



(a) $S_l(\rho_{\Lambda s})$ como função do ângulo de Wigner. (b) $P_l(\rho_{\Lambda s})$ como função do ângulo de Wigner. (c) $C_{hs}(\rho_{\Lambda s})$ como função do ângulo de Wigner.

Figura 5.9 – Aspectos complementares do estado de spin, dado o estado global $|\Phi_{\Lambda}\rangle$, para diferentes valores de θ .

Em contraste com o segundo exemplo, aqui o emaranhamento entre momento e spin aumenta com o ângulo de Wigner. Por outro lado, a coerência dos estados de ambos graus de liberdade diminui com o ângulo de Wigner. Também, é possível notar que, para $\theta = 0$ (rotação ao longo do eixo-z), os aspectos complementares do estado de spin do quanton variam, diferentemente dos outros exemplos onde o estado global permaneceu o mesmo. Enquanto que, para $\theta = \pi/2$, o estado permanece separável:

$$|\Psi_{\Lambda}\rangle_{\phi=\pi/2} = \frac{1}{2}(A|\Lambda p\rangle + A^*|-\Lambda p\rangle) \otimes (|0\rangle + |1\rangle), \quad (5.97)$$

onde $A = \cos\frac{\phi}{2} - i \sin\frac{\phi}{2}$.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Nesta dissertação, estudamos os diversos aspectos das relações de complementariedade. Primeiro, no capítulo 3, explorando as propriedades do operador densidade, obtivemos relações de complementariedade incompletas, usando medidas de coerência bem conhecidas na literatura, como a coerência de Wigner-Yanase (YU, 2017), a coerência baseada nas normas l_1 e l_2 e a coerência baseada na entropia relativa (BAUMGRATZ; CRAMER; PLENIO, 2014), cada uma com sua respectiva medida de previsibilidade. Em particular, duas medidas de previsibilidade são quantificadas através de medidas entrópicas, uma vez que a entropia está ligada à medida de incerteza sobre uma variável aleatória antes de sua medição, que nesse caso pode ser o caminho que a partícula rumou, ou por qual fenda ela passou. Além disso, mostramos que é possível obter relações completas de complementariedade equivalentes às aquelas obtidas em (JAKOB; BERGOU, 2007), explorando a pureza de um sistema quântico de duas partes. Esse procedimento nos permitiu estender o trabalho feito por Jakob e Bergou e obter RCC's para subsistemas que fazem parte de um sistema quântico puro multipartido. Nossa abordagem pode ser vista como natural, no sentido de que derivamos tais relações diretamente da hipótese de que o sistema quântico multipartido é puro, encontrando as medidas de complementariedade dentro da expressão $1 - \text{Tr} \rho_{A_1, A_2, \dots}^2 = 0$.

No capítulo 4, discutimos a relação entre complementariedade e incerteza de um observável, uma vez que Luo, em (LUO, 2005b), propôs uma decomposição da incerteza em suas partes clássica e quântica, estabelecendo critérios que qualquer medida de incerteza clássica e incerteza quântica deve satisfazer. A partir disso, estabelecemos relações entre os critérios de Luo para incerteza quântica e clássica e os critérios de Dürr e Englert et al. para medidas de visibilidade, assim como critérios de emaranhamento no caso em que o estado global é puro. Também discutimos a relação entre emaranhamento e medidas de incerteza clássica locais, bem como a relação entre coerência quântica e quantificadores de incerteza quântica, obtendo uma relação completa de complementariedade para incerteza quântica, incerteza clássica e previsibilidade. A incerteza quântica total de um interferômetro d -caminhos foi mostrada como equivalente à coerência de Wigner-Yanase e a incerteza clássica correspondente é mostrada como um monótono de emaranhamento para o caso global puro. Assim, a dualidade entre complementariedade e incerteza nos permitiu completar as relações de complementariedade que faltavam. Por fim, mostramos que é sempre possível obter monótonos de emaranhamento para casos globais puros a partir de qualquer relação de complementariedade cujas medidas de previsibilidade e visibilidade satisfaçam os critérios estabelecidos na literatura (DÜRR, 2000; ENGLERT et

al., 2008). Tal resultado permitiu conectar formalmente os monótonos de emaranhamento com as relações de complementaridade, sem apelar para um trio de medidas particular, bem como sintetizar todas as relações completas de complementariedade conhecidas na literatura. Também abre a possibilidade de estabelecer novas medidas de emaranhamento sempre que houver uma relação de complementaridade que satisfaça os critérios mencionados anteriormente.

Por fim, estudamos as relações completas de complementariedade e sua invariância Lorentz no capítulo 5. Vimos que, embora a entropia de emaranhamento não permaneça invariante sob boosts de Lorentz, e tampouco as medidas de previsibilidade e coerência, as três medidas P_l, C_{hs}, S_l tomadas em conjunto, em uma relação de complementaridade completa, são invariantes de Lorentz. Comparando com o resultado de Peres et. al. (PERES; SCUDO; TERNO, 2002), embora seja possível definir formalmente o spin em qualquer referencial de Lorentz, não há relação entre os valores esperados dos observáveis em diferentes referenciais de Lorentz. Aqui a situação é bem diferente. Embora seja possível definir formalmente complementariedade em qualquer referencial de Lorentz e, a princípio, não haveria relação entre as relações de complementariedade em diferentes referenciais de Lorentz, nosso resultado mostra o contrário, ou seja, que é possível conectar relações de complementariedade completas em diferentes referenciais de Lorentz. Por fim, uma pergunta natural que surge é a seguinte: as outras RCC's definidas nesta dissertação são invariantes de Lorentz? Primeiro, podemos responder que as outras RCC's são bem definidas para diferentes observadores, assim como o spin. Também é possível argumentar que como elas dependem da pureza do estado global para serem interpretadas como uma relação completa, com S_{vn}, W_{l_1} e W_{wy} como indicador de emaranhamento, e como as transformações de Lorentz preservam a pureza do estado global, então tais relações também estão ligadas por diferentes referenciais de Lorentz, embora nesse caso não é possível mostrar isso tão diretamente quanto para as medidas de P_l, C_{hs}, S_l , uma vez que elas foram obtidas diretamente da expressão $1 - Tr\rho_{A_1, A_2, \dots}^2 = 0$.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

AHN, D. et al. Relativistic entanglement and Bell's inequality. **Phys. Rev. A**, v. 67, p. 012103, 2003.

ALSING, P. M.; MILBURN, G. J. Lorentz invariance of entanglement. **arXiv:quant-ph/0203051**, 2002.

ANGELO, R. M.; RIBEIRO, A. D. Wave-particle duality: An information-based approach. **Found. Phys.**, v. 45, p. 1407, 2015.

AUCCAISE, R. et al. Experimental analysis of the quantum complementarity principle. **Phys. Rev. A**, v. 85, p. 032121, 2012.

AULETTA, G.; FORTUNATO, M.; PARISI, G. **Quantum Mechanics: into a modern perspective**. Cambridge: Cambridge University Press, 2009.

BAGAN, E. et al. Relations between coherence and path information. **Phys. Rev. Lett.**, v. 116, p. 160406, 2016.

_____. Duality games and operational duality relations. **Phys. Rev. Lett.**, v. 120, p. 050402, 2018.

BASSO, M. L. W.; CHRYSOSTHEMOS, D. S. S.; MAZIERO, J. Quantitative wave-particle duality relations from the density matrix properties. **Quant. Inf. Process.**, v. 19, p. 254, 2020.

BASSO, M. L. W.; MAZIERO, J. Complete complementarity relations and its Lorentz invariance. **arXiv:2007.14480**, 2020.

_____. Complete complementarity relations for multipartite pure states. **J. Phys. A: Math. Theor.**, v. 53, p. 465301, 2020.

_____. An uncertainty view on complementarity and a complementarity view on uncertainty. **arXiv:2007.05053**, 2020.

BAUMGRATZ, T.; CRAMER, M.; PLENIO, M. B. Quantifying coherence. **Phys. Rev. Lett.**, v. 113, p. 140401, 2014.

BELL, J. On the Einstein-Podolsky-Rosen paradox. **Physics Physique Fizika**, v. 1, p. 195, 1964.

BENGTSSON, I.; ŻYCZKOWSKI, K. **Geometry of Quantum States: an introduction to quantum entanglement**. Cambridge: Cambridge University Press, 2017.

BERA, M. N. et al. Duality of quantum coherence and path distinguishability. **Phys. Rev. A**, v. 92, p. 012118, 2015.

BERGOU, J. A.; HILLERY, M. **Introduction to the Theory of Quantum Information Processing**. New York: Springer, 2013.

BERTLMANN, R. A.; KRAMMER, P. Bloch vectors for qudits. **J. Phys. A: Math. Theor.**, v. 41, p. 235303, 2008.

BERZI, V.; GORINI, V. Reciprocity principle and the Lorentz transformations. **Journal of Mathematical Physics**, v. 10, p. 1518, 1969.

BHASKARA, V. S.; PANIGRAHI, P. K. Generalized concurrence measure for faithful quantification of multiparticle pure state entanglement using lagranges identity and wedge product. **Quant. Inf. Process.**, v. 16, p. 118, 2017.

BITTENCOURT, V. A. S. V.; BERNARDINI, A. E.; BLASONE, M. Effects of Lorentz boosts on Dirac bispinor entanglement. **J. Phys.: Conf. Ser.**, v. 1071, p. 012001, 2018.

BOHR, N. The quantum postulate and the recent development of atomic theory. **Nature**, v. 121, p. 580, 1928.

BRADLEY, T.-D. **At the Interface of Algebra and Statistics**. 2020. Tese (Phd em Física), 2020. Disponível em: <<https://arxiv.org/pdf/2004.05631.pdf>>.

BRUKNER, C.; ZEILINGER, A. Operationally invariant information in quantum measurements. **Phys. Rev. Lett.**, v. 83, p. 3354, 1999.

BRUSS, D. Characterizing entanglement. **J. Math. Phys.**, v. 43, p. 4237, 2002.

BUCHLEITNER, A.; VIVIESCAS, C.; TIERSCH, M. **Entanglement and Decoherence: Foundations and Modern Trends**. New York: Springer, 2009.

CARLEN, E. Trace inequalities and quantum entropy: an introductory course. **Contemporary Mathematics**, v. 529, 2010.

CHITAMBAR, G. G. E. Quantum resource theories. **Rev. Mod. Phys.**, v. 78, p. 025001, 2019.

CLAUSER, J. F. et al. Proposed experiment to test local hidden-variable theories. **Phys. Rev. Lett.**, v. 23, p. 880, 1969.

COLES, P. J. Entropic framework for wave-particle duality in multipath interferometers. **Phys. Rev. A**, v. 93, p. 062111, 2016.

CZACHOR, M. Einstein-Podolsky-Rosen-Bohm experiment with relativistic massive particles. **Phys. Rev. A**, v. 55, p. 72, 1997.

DEUTSCH, D. Vindication of quantum locality. **Proc. R. Soc. A**, v. 468, p. 2246, 2012.

DIMITROVA, T. L.; WEIS, A. The wave-particle duality of light: A demonstration experiment. **American Journal of Physics**, v. 76, p. 137, 2008.

DUNNINGHAM, J.; PALGE, V.; VEDRAL, V. Entanglement and nonlocality of a single relativistic particle. **Phys. Rev. A**, v. 80, p. 044302, 2009.

DÜRR, S. Quantitative wave-particle duality in multibeam interferometers. **Phys. Rev. A**, v. 64, p. 042113, 2000.

EINSTEIN, A.; DAVIES, F. A. **The Principle of Relativity**. New York: Dover Publications, 1932.

ENGLERT, B.-G. Fringe visibility and which-way information: An inequality. **Phys. Rev. Lett.**, v. 77, p. 2154, 1996.

ENGLERT, B.-G.; BERGOU, J. A. Quantitative quantum erasure. **Opt. Comm.**, v. 179, p. 337, 2000.

ENGLERT, B.-G. et al. Wave-particle duality in multi-path interferometers: General concepts and three-path interferometers. **Int. J. Quant. Inf.**, v. 6, p. 129, 2008.

FRIIS, N. et al. Relativistic entanglement of two massive particles. **Phys. Rev. A**, v. 81, p. 042114, 2010.

GINGRICH, R. M.; ADAMI, C. Quantum entanglement of moving bodies. **Phys. Rev. Lett.**, v. 89, p. 270402, 2002.

GREENBERGER, D. M.; YASIN, A. Simultaneous wave and particle knowledge in a neutron interferometer. **Phys. Rev. A**, v. 128, p. 391, 1988.

HALPERN, F. R. **Special Relativity and Quantum Mechanics**. New Jersey: Prentice-Hall, 1968.

HIESMAYR, B. C.; VEDRAL, V. Thermodynamical versus optical complementarity. **arXiv:quant-ph/0501015**, 2005.

HORN, R.; JOHNSON, C. R. **Matrix Analysis**. Cambridge: Cambridge University Press, 2012.

JAEGER, G.; SHIMONY, A.; VAIDMAN, L. Two interferometric complementarities. **Phys. Rev. A**, v. 51, p. 51, 1995.

JAKOB, M.; BERGOU, J. A. Generalized complementarity relations in composite quantum systems of arbitrary dimensions. **Int. J. Mod. Phys. B**, v. 20, p. 1371, 2006.

_____. Complementarity and entanglement in bipartite qudit systems. **Phys. Rev. A**, v. 76, p. 052107, 2007.

_____. Quantitative complementarity relations in bipartite systems: Entanglement as a physical reality. **Opt. Comm.**, v. 283, p. 827, 2010.

JORDAN, T. F.; SHAJI, A.; SUDARSHAN, E. C. G. Lorentz transformations that entangle spins and entangle momenta. **Phys. Rev. A**, v. 75, p. 022101, 2007.

_____. Relativistic entanglement of two massive particles. **Phys. Rev. A**, v. 81, p. 042114, 2010.

KORZEKWA, K. et al. Quantum and classical entropic uncertainty relations. **Phys. Rev. A**, v. 89, p. 042122, 2014.

LANZAGORTA, M. **Quantum Information in Gravitational Fields**. San Rafael: Morgan & Claypool Publishers, 2014.

LEMOS, N. **Mecânica Analítica**. São Paulo: Livraria da Física, 2007.

LÉVY-LEBLOND, J.-M. On the nature of quanta. **Science and Education**, v. 12, p. 495, 2003.

LI, H.; DU, J. Relativistic invariant quantum entanglement between the spins of moving bodies. **Phys. Rev. A**, v. 68, p. 022108, 2003.

LIMA, E. L. **Cálculo Tensorial**. Rio de Janeiro: IMPA, 2012.

_____. **Análise Real, vol. 1**. Rio de Janeiro: IMPA, 2016.

LUO, S. Heisenberg uncertainty relation for mixed states. **Phys. Rev. A**, v. 72, p. 042110, 2005.

_____. Quantum versus classical uncertainty. **Theor. Math. Phys.**, v. 143, p. 681, 2005.

MARSHALL, A. W.; OLKIN, I.; ARNOLD, B. C. **Inequalities: Theory of Majorization and Its Applications**. New York: Springer, 2011.

MAZIERO, J. Computing partial traces and reduced density matrices. **Int. J. Mod. Phys. C**, v. 28, p. 1750005, 2017.

_____. Hilbert-schmidt quantum coherence in multi-qudit systems. **Quant. Inf. Process.**, v. 16, p. 274, 2017.

MELO, F. de; CHAVES, R. Selected topics on quantum foundations. 2019. Disponível em: <<https://qigcbpf.files.wordpress.com/2019/07/qfound2907.pdf>>.

MINTERT, F. et al. Measures and dynamics of entangled states. **Physics Reports**, v. 415, p. 207, 2005.

MISHRA, S.; VENUGOPALAN, A.; QURESHI, T. Decoherence and visibility enhancement in multi-path interference. **Phys. Rev. A**, v. 100, p. 042122, 2019.

NAPOLITANO, J.; SAKURAI, J. J. **Modern Quantum Mechanics: second edition**. Cambridge: Cambridge University Press, 2017.

NEUMANN, J. von. Wahrscheinlichkeitstheoretischer aufbau der quantenmechanik. 1927. Disponível em: <<http://eudml.org/doc/59230>>.

_____. **Mathematical Foundations of Quantum Mechanics**. Princeton: Princeton University Press, 1955.

NIELSEN, M. A. Conditions for a class of entanglement transformations. **Phys. Rev. Lett.**, v. 83, p. 436, 1999.

NIELSEN, M. A.; CHUANG, I. L. **Quantum Computation and Quantum Information**. Cambridge: Cambridge University Press, 2000.

NIELSEN, M. A.; VIDAL, G. Majorization and the interconversion of bipartite states. **Quantum Information and Computation**, v. 1, p. 76, 2001.

OHLSSON, T. Relativistic quantum physics: From advanced quantum mechanics to introductory quantum field theory. **Cambridge University Press**, Cambridge, 2011.

OHNUKI, Y. **Unitary Representations of the Poincaré group and Relativistic Wave Equations**. Singapore: World Scientific, 1988.

PALGE, V.; DUNNINGHAM, J. Generation of maximally entangled states with subluminal Lorentz boost. **Phys. Rev. A**, v. 85, p. 042322, 2012.

_____. Entanglement of two relativistic particles with discrete momenta. **Ann. Phys.**, v. 363, p. 275, 2015.

PALGE, V. et al. Relativistic entanglement of two particles driven by continuous product momenta. **Phys. Rev. A**, v. 98, p. 052322, 2018.

PELISSETTO, A.; TESTA, M. Getting the Lorentz transformations without requiring an invariant speed. **American Journal of Physics**, v. 83, p. 338, 2015.

PERES, A.; SCUDO, P. F.; TERNO, D. R. Quantum entropy and special relativity. **Phys. Rev. Lett.**, v. 88, p. 230402, 2002.

PERES, A.; TERNO, D. R. Quantum information and relativity theory. **Rev. Mod. Phys.**, v. 76, p. 93, 2004.

POZZOBOM, M. B.; BASSO, M. L. W.; MAZIERO, J. Experimental tests of the density matrix's property-based complementarity relations. **Phys. Rev. A**, v. 103, p. 022212, 2021.

QIAN, K. K. X.-F. et al. Turning off quantum duality. **Phys. Rev. Research**, v. 2, p. 012016, 2020.

QIAN, X.-F.; VAMIVAKAS, A. N.; EBERLY, J. H. Entanglement limits duality and vice versa. **Optica**, v. 5, p. 942, 2018.

QURESHI, T. Coherence, interference and visibility. **Quanta**, v. 8, p. 24, 2019.

_____. Predictability, distinguishability and entanglement. **Opt. Lett.**, v. 46, p. 492, 2021.

R.FERRARO; THIBEAULT, M. Generic composition of boosts: an elementary derivation of the Wigner rotation. **Eur. J. Phys.**, v. 20, p. 143, 1999.

RHODES, J. A.; SEMON, M. D. Relativistic velocity space, Wigner rotation and Thomas precession. **Am. J. Phys.**, v. 72, p. 943, 2004.

ROBERTS, A. W.; VARBERG, D. **Convex Functions**. New York: Academic Press, 1973.

ROBERTSON, H. P. The uncertainty principle. **Phys. Rev.**, v. 34, p. 163, 1929.

ROY, P.; QURESHI, T. Path predictability and quantum coherence in multi-slit interference. **Phys. Scr.**, v. 94, p. 095004, 2019.

RUNGTA, P. et al. Universal state inversion and concurrence in arbitrary dimensions. **Phys. Rev. A**, v. 64, p. 042315, 2001.

SALDANHA, P. L.; VEDRAL, V. Physical interpretation of the wigner rotations and its implications for relativistic quantum information. **New J. Phys.**, v. 14, p. 023041, 2012.

SAVI, M. F.; ANGELO, R. M. Quantum resource covariance. **Phys. Rev. A**, v. 103, p. 022220, 2021.

SCHNEIDER, T.; GRIFFIES, S. M. A conceptual framework for predictability studies. **Journal of Climate**, v. 12, p. 3133, 1999.

SCHRÖDINGER, E. Discussion of probability relations between separated systems. **Math. Proc. Camb. Phil. Soc**, v. 31, p. 555, 1935.

SEXL, R. U.; URBANTKE, H. K. **Relativity, Groups, Particles: Special Relativity and Relativistic Symmetry in Field and particle Physics**. New York: Springer, 2001.

STRELTSOV, A.; ADESSO, G.; PLENIO, M. Colloquium: Quantum coherence as a resource. **Reviews of Modern Physics**, v. 89, p. 041003, 2017.

TERASHIMA, H.; UEDA, M. Relativistic Einstein-Podolsky-Rosen correlation and Bell's inequality. **Int. J. Quantum Inform.**, v. 01, p. 93, 2003.

TUNG, W.-K. **Group Theory in Physics**. Philadelphia: World Scientific, 1985.

VEDRAL, V. et al. Quantifying entanglement. **Phys. Rev. Lett.**, v. 78, p. 2275, 1997.

VIDAL, G. Entanglement monotones. **J. Mod. Opt.**, v. 47, p. 355, 2000.

VIDAL, G.; TARRACH, R. Robustness of entanglement. **Phys. Rev. A**, v. 59, p. 141, 1999.

WEINBERG, S. **The Quantum Theory of Fields I**. Cambridge: Cambridge University Press, 1995.

WIGNER, E. P. **Group theory and its application to the quantum mechanics of atomic spectra**. New York: Academic Press, 1959.

WIGNER, E. P.; YANASE, M. M. Information contents of distributions. **Proc. Nat. Acad. Sci.**, v. 49, p. 910, 1963.

WOOTTERS, W. K. Entanglement of formation of an arbitrary state of two qubits. **Phys. Rev. Lett.**, v. 80, p. 2245, 1998.

WOOTTERS, W. K.; ZUREK, W. H. Complementarity in the double-slit experiment: Quantum nonseparability and a quantitative statement of bohr's principle. **Phys. Rev. D**, v. 19, p. 473, 1979.

XU, B.-M.; TU, Z. C.; ZOU, J. Duality in quantum work. **Phys. Rev. A**, v. 101, p. 022113, 2020.

YU, C. s. Quantum coherence via skew information and its polygamy. **Phys. Rev. A**, v. 95, p. 042337, 2017.

ZHANG, F. **Matrix Theory: Basic Results and Techniques**. New York: Springer, 2011.

ZHU, H. et al. Operational one-to-one mapping between coherence and entanglement measures. **Phys. Rev. A**, v. 96, p. 032316, 2017.

ZUREK, W. H. Decoherence, einselection, and the quantum origins of the classical. **Rev. Mod. Phys.**, v. 75, p. 715, 2003.

ZYCH, M. et al. Quantum interferometric visibility as a witness of general relativistic proper time. **Nat. Commun**, v. 2, p. 505, 2011.

APÊNDICE A – SOBRE O PRODUTO TENSORIAL

Esta seção sobre produto tensorial segue a referência (LIMA, 2012).

Definição 5. *O produto cartesiano entre dois espaços vetoriais U, V é o conjunto $U \times V := \{(u, v) | u \in U \text{ e } v \in V\}$ que satisfaz*

$$(u_1, v_1) + (u_2, v_2) = (u_1 + u_2, v_1 + v_2) \quad \forall u_1, u_2 \in U, \forall v_1, v_2 \in V, \quad (\text{A.1})$$

$$\alpha(u, v) = (\alpha u, \alpha v) \quad \forall \alpha \in \mathbb{C}, u \in U, v \in V. \quad (\text{A.2})$$

O produto cartesiano $U \times V$ é também um espaço vetorial de dimensão $\dim(U \times V) = \dim(U) + \dim(V)$, cujo produto interno usual é tal que $\langle (u_1, v_1) | (u_1, v_1) \rangle = \langle u_1 | v_1 \rangle + \langle u_2 | v_2 \rangle$.

Definição 6. *Sejam U, V, W espaços vetoriais. Uma aplicação $\phi : U \times V \rightarrow W$ é bilinear se é linear em cada um dos seus argumentos.*

Definição 7. *Sejam U, V dois espaços vetoriais. O produto tensorial de U por V é todo par (W, ϕ) que satisfaz os seguintes axiomas:*

- W é um espaço vetorial e $\phi : U \times V \rightarrow W$ é uma aplicação bilinear.
- $\dim(W) = \dim(U) \dim(V)$.
- $\phi(U \times V)$ gera Z , ou seja, todo elemento de Z pode ser representado como uma combinação linear dos elementos de $\phi(U \times V)$.

No entanto, é possível mostrar que os últimos dois axiomas podem ser substituídos por um único axioma: sejam $\{e_i\}_{i=1}^{\dim U}$ e $\{f_j\}_{j=1}^{\dim V}$ bases de U e V respectivamente, então $\{\phi(e_i, f_j)\}_{i,j=1}^{\dim U, \dim V}$ forma uma base de W . Além disso, é mais comum denotar o produto tensorial de U e V por $U \otimes V$ de modo que os elementos $\phi(a, b)$ são substituídos por $a \otimes b$ de modo que todo elemento $w \in W$ pode ser escrito como $w = \sum_j a_j \otimes b_j$. Assim o produto interno usual de $U \otimes V$ é definido como: $\langle (u_1, v_1) | (u_1, v_1) \rangle = \langle u_1 | v_1 \rangle \langle u_2 | v_2 \rangle$. Ademais, seja R um espaço vetorial de dimensão 1 sobre si próprio. Assim, o produto tensorial $R \otimes V$ terá dimensão igual a dimensão de V de modo que há um isomorfismo $R \otimes V \simeq V$ caracterizado por transformar $\alpha \otimes v$ em αv , onde $\alpha \in R$ é um escalar e $v \in V$. Para isso, basta definir a aplicação bilinear $\phi : R \times V \rightarrow V$ dada por $\phi(\alpha, v) = \alpha v$. Assim, podemos ver que o traço parcial sobre B definido como:

$$\text{Tr}_B(|a\rangle_A \langle a'| \otimes |b\rangle_B \langle b'|) := |a\rangle_A \langle a'| \text{Tr}(|b\rangle_B \langle b'|) = |a\rangle_A \langle a'| \langle b|b'\rangle,$$

sendo um mapa linear tal que $\text{Tr}_B : \mathcal{L}(\mathcal{H}_{A,B}) \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H}_A)$, também define um isomorfismo entre $\mathbb{C} \otimes \mathcal{L}(\mathcal{H}_A)$ e $\mathcal{L}(\mathcal{H}_A)$.

Definição 8. *Sejam $A : U \rightarrow W$ e $B : V \rightarrow Z$ aplicações lineares, com U, V, W e Z sendo espaços vetoriais. O produto tensorial de A e B é a aplicação linear $A \otimes B : U \otimes V \rightarrow W \otimes Z$ caracterizada por*

$$A \otimes B(u \otimes v) = A(u) \otimes B(v) \quad \forall u \in U, v \in V. \quad (\text{A.3})$$

Definição 9. *Sejam $A, B : V \rightarrow V$ aplicações lineares e $\mathcal{E} = \{e_i\}_{i=1}^{\dim V}$ uma base do espaço vetorial V . Sejam ainda a_{ij} e b_{ij} os elementos de matrizes de A e B na base \mathcal{E} . A matriz da aplicação linear $A \otimes B : V \otimes V \rightarrow V \otimes V$ na base $\mathcal{E} \otimes \mathcal{E} = \{e_i \otimes e_j, i, j = 1, \dots, \dim V\}$ é denominada de produto de Kronecker, ou produto tensorial, das matrizes A e B na base \mathcal{E} .*

Assim, como $A(e_k) = \sum_i a_{ik} e_i$ e $B(e_l) = \sum_j b_{jl} e_j$, então

$$(A \otimes B)(e_k \otimes e_l) = A(e_k) \otimes B(e_l) = \sum_i a_{ik} e_i \otimes \sum_j b_{jl} e_j \quad (\text{A.4})$$

$$= \sum_{ij} a_{ik} b_{jl} e_i \otimes e_j. \quad (\text{A.5})$$

Logo, dada as matrizes A, B (que, por abuso de notação, denotam as transformações lineares de A, B na base \mathcal{E}), temos que

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \dots & a_{1n}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \dots & a_{2n}B \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}B & a_{n2}B & \dots & a_{nn}B \end{pmatrix}. \quad (\text{A.6})$$

Por fim, o produto tensorial de matrizes satisfaz as seguintes propriedades: bilinearidade; associatividade; e também $(A \otimes B)(C \otimes D) = (AC) \otimes (BD)$.

APÊNDICE B – MATRIZES POSITIVAS SEMI-DEFINIDAS

Definição 10. *Seja A um conjunto. Um subconjunto $B \subset A$ é um subconjunto próprio de A se $B \neq \emptyset$ e $B \neq A$.*

Definição 11. *Uma submatriz principal de uma matriz $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ é uma matriz obtida de A eliminando-se sua k -ésima linha e sua k -ésima coluna, com $k \leq n$. É possível deletar mais de uma linha e coluna correspondente.*

Agora, seja $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ dada por

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad (\text{B.1})$$

e um vetor $|x\rangle \in \mathbb{C}^{n \times 1}$ expresso por

$$|x\rangle = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad (\text{B.2})$$

então

$$\begin{aligned} \langle x|A|x\rangle &= \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n a_{1j}x_j \\ \sum_{j=1}^n a_{2j}x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n a_{nj}x_j \end{pmatrix} \\ &= x_1 \sum_{j=1}^n a_{1j}x_j + x_2 \sum_{j=1}^n a_{2j}x_j + \dots + x_n \sum_{j=1}^n a_{nj}x_j \\ &= \sum_{i,j=1}^n x_i a_{ij} x_j = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i x_j \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

Teorema 13. *Considerar 0 em uma linha de $|x\rangle$ equivale a excluir a linha e coluna de A com o índice correspondente.*

Demonstração. Sem perda de generalidade, seja

$$|x\rangle = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{B.4})$$

então

$$\begin{aligned} \langle x|A|x\rangle &= \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n-1}x_{n-1} \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n-1}x_{n-1} \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn-1}x_{n-1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n-1} a_{1j}x_j \\ \sum_{j=1}^{n-1} a_{2j}x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n-1} a_{nj}x_j \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

isto é,

$$\begin{aligned} \langle x|A|x\rangle &= x_1 \sum_{j=1}^{n-1} a_{1j}x_j + x_2 \sum_{j=1}^{n-1} a_{2j}x_j + \dots + 0 \sum_{j=1}^{n-1} a_{nj}x_j \\ &= \sum_{i,j=1}^{n-1} x_i a_{ij}x_j = \sum_{i,j=1}^{n-1} a_{ij}x_i x_j, \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

sendo equivalente à

$$\langle x'|A'|x'\rangle = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n-1} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n-11} & a_{n-12} & \dots & a_{n-1n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix} \quad (\text{B.7})$$

□

Teorema 14. *Toda submatriz principal de uma matriz semi-positiva definida é semi-positiva definida.*

Demonstração. Seja S um subconjunto próprio de $\{1, 2, \dots, n\}$ e seja $A(S)$ a submatriz principal de A (matriz semi-positiva definida) obtida a partir de A deletando as linhas e colunas complementares ao conjunto S . Seja $|x\rangle \in \mathbb{R}^{|S|}$, onde $|S| < n$ é o número de elementos do conjunto S . Seja $|x'\rangle \in \mathbb{R}^n$ o vetor obtido a partir de $|x\rangle$ acrescentando 0 no resto das componentes, ou seja, $|x'\rangle \in \mathbb{R}^n$ tal que $x'_j = x_j, \forall j \in S$ e $x'_j = 0$ caso contrário. Logo, $\langle x|A(S)|x\rangle = \langle x'|A|x'\rangle \geq 0$, uma vez que, por hipótese, A é positiva semi-definida. Logo $A(S)$ é uma matriz positiva semi-definida. \square

Se $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, existem: (a) $\frac{n!}{1!(n-1)!} = n$ submatrizes principais de A 1×1 ; (b) $\frac{n!}{1!(n-2)!} = \frac{n(n-1)}{2}$ submatrizes principais de A 2×2 ; ...; (n) existem $\frac{n!}{(n-1)!1!} = n$ submatrizes principais de A $(n-1) \times (n-1)$. No total, há $2^n - 1$ submatrizes principais de A incluindo A (HORN; JOHNSON, 2012).

Teorema 15. Se A é positiva semi-definida, então $a_{ii} \geq 0 \forall i = 1, \dots, n$.

Demonstração. Como A é positiva semi-definida, $\langle x|A|x\rangle \geq 0 \forall |x\rangle$. Em particular, se

$$|x\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = x_i \delta_{ij}, \quad (\text{B.8})$$

$j = 1, \dots, n$, então

$$\langle x|A|x\rangle = \sum_{kl} (x_i \delta_{ik}) a_{kl} (x_i \delta_{il}) = \sum_{kl} \delta_{ik} a_{kl} \delta_{il} x_i^2 = a_{ii} x_i^2 \geq 0 \quad (\text{B.9})$$

que implica em $a_{ii} \geq 0 \forall i = 1, \dots, n$. \square

Teorema 16. Seja uma matriz $A \geq 0, A = A^\dagger$. Se $a_{ii} = 0$ para algum i , então a linha e a coluna contendo o elemento a_{ii} são formados por zeros.

Demonstração. Pelos teoremas anteriores, se $A \geq 0$, então $a_{ii} \geq 0$ e $a_{ii} a_{jj} \geq |a_{ij}|^2$, para $i \neq j$, considerando qualquer submatriz principal de A 2×2 :

$$\begin{pmatrix} a_{ii} & a_{ij} \\ a_{ji} & a_{jj} \end{pmatrix} \geq 0, \quad (\text{B.10})$$

logo, por hipótese, se $a_{ii} = 0$ então $|a_{ij}| = 0 \implies a_{ij} = 0 \forall j$. Como A é hermitiana, então $a_{ji} = a_{ij}^* = 0 \forall j$. \square

Teorema 17. Para uma matriz simétrica (ou hermitiana) A , as seguintes afirmações são equivalentes:

(a) $A \geq 0$.

(b) $A = B^T B$, para alguma matriz B .

Demonstração. (a) \implies (b): Como A é simétrica, existe uma matriz ortogonal U que diagonaliza A . Isto é, $A = UDU^T$, onde $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, ou seja, os elementos da diagonal de D são os autovalores de A . Como, por hipótese, $A \geq 0$, então seus autovalores são não negativos, então existe $D^{1/2}$, isto é, $D = D^{1/2}D^{1/2}$ com $D^{1/2} = \text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n})$. Assim,

$$A = UD^{1/2}D^{1/2}U^T = (UD^{1/2})(UD^{1/2})^T = B^T B, \quad (\text{B.11})$$

onde $B = D^{1/2}U^T$.

(b) \implies (a): Como A é simétrica,

$$\lambda_i = \frac{\langle x_i | A | x_i \rangle}{\langle x_i | x_i \rangle}, \quad (\text{B.12})$$

são autovalores de A cujo autovetor é $|x_i\rangle$, $i = 1, \dots, n$. Mas, por hipótese, $A = B^T B$,

$$\lambda_i = \frac{\langle x_i | B^T B | x_i \rangle}{\langle x_i | x_i \rangle} = \frac{\|B |x_i\rangle\|^2}{\| |x_i\rangle \|^2} \geq 0 \quad \forall i = 1, \dots, n. \quad (\text{B.13})$$

Logo, $A \geq 0$, pois todos seus autovalores são não negativos. □

APÊNDICE C – SOBRE CONVEXIDADE

C.1 – CONVEXIDADE DE FUNÇÕES DE UMA VARIÁVEL REAL

Definição 12. Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Então f é:

- (i) *Côncava*, se para todo segmento de linha ligando dois pontos no gráfico de f , tal segmento nunca está acima do gráfico de f .
- (ii) *Convexa*, se para todo segmento de linha ligando dois pontos no gráfico de f , tal seguimento nunca está abaixo do gráfico de f .

Equivalentemente, temos que

Definição 13. Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Então f é:

- (i) *Côncava se*, $\forall a, b \in \mathbb{R}$ e $\forall \lambda \in [0, 1]$, $f(\lambda a + (1 - \lambda)b) \geq \lambda f(a) + (1 - \lambda)f(b)$.
- (ii) *Convexa se*, $\forall a, b \in \mathbb{R}$ e $\forall \lambda \in [0, 1]$, $f(\lambda a + (1 - \lambda)b) \leq \lambda f(a) + (1 - \lambda)f(b)$.

Proposição 5. Dado qualquer intervalo $[a, b] \in \mathbb{R}$. Se $\lambda \in [0, 1]$, então $a \leq (1 - \lambda)a + \lambda b \leq b$.

Demonstração. Como $0 \leq \lambda \leq 1$, então

$$0 \leq \lambda(b - a) \leq (b - a), \quad (\text{C.1})$$

somando a em ambos os lados, temos

$$a \leq \lambda(b - a) + a \leq (b - a) + a, \quad (\text{C.2})$$

ou seja, $a \leq (1 - \lambda)a + \lambda b \leq b$. □

É como se variando λ de 0 até 1, a função $f(\lambda) = (1 - \lambda)a + \lambda b$ passasse por todos os valores no intervalo $[a, b]$.

Teorema 18. Seja $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Então f é convexa em I se, e somente se, o gráfico de f está abaixo de suas linhas secantes em I .

Demonstração. Dados $a, b \in I$ com $a < b$, seja $S_{ab}(x) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) + f(a)$, $\forall x \in [a, b]$ a expressão da reta secante de f . Seja $x = (1 - \lambda)a + \lambda b \in I$, $\forall \lambda \in [0, 1]$, pela proposição

anterior. Considerando a volta, por hipótese, seja $f(x) \leq S_{ab}(x), \forall x \in [a, b]$. Como

$$\begin{aligned}
 S_{ab}(x) &= S_{ab}((1 - \lambda)a + \lambda b) \\
 &= \frac{f(b) - f(a)}{b - a}((1 - \lambda)a + \lambda b - a) + f(a) \\
 &= \frac{f(b) - f(a)}{b - a}((b - a)\lambda) + f(a) \\
 &= (1 - \lambda)f(a) + \lambda f(b),
 \end{aligned} \tag{C.3}$$

temos que

$$f(x) = f((1 - \lambda)a + \lambda b) \leq S_{ab}((1 - \lambda)a + \lambda b) = (1 - \lambda)f(a) + \lambda f(b). \tag{C.4}$$

Portanto, f é convexa. Agora, por hipótese, seja f convexa, então

$$f(x) = f((1 - \lambda)a + \lambda b) \leq (1 - \lambda)f(a) + \lambda f(b) = S_{ab}((1 - \lambda)a + \lambda b). \tag{C.5}$$

Portanto, $f(x) \leq S_{ab}(x) \forall x \in [a, b]$. □

Exemplo 5. $f(x) = x^2$ é convexa. De fato, seja $x = \lambda a + (1 - \lambda)b$, com $a, b \in \mathbb{R}$ e $\lambda \in [0, 1]$. Então, $f(\lambda a + (1 - \lambda)b) \leq \lambda f(a) + (1 - \lambda)f(b)$ é equivalente a

$$\begin{aligned}
 (\lambda a + (1 - \lambda)b)^2 &\leq \lambda a^2 + (1 - \lambda)b^2 \\
 \lambda^2 a^2 + (1 - \lambda)^2 b^2 + 2\lambda(1 - \lambda)ab &\leq \lambda a^2 + (1 - \lambda)b^2 \\
 (\lambda^2 - \lambda)a^2 + (\lambda^2 - \lambda)b^2 - 2(\lambda^2 - \lambda)ab &\leq 0 \\
 (\lambda^2 - \lambda)(a^2 + b^2 - 2ab) &\leq 0 \\
 (\lambda^2 - \lambda)(a - b)^2 &\leq 0,
 \end{aligned} \tag{C.6}$$

como $(a - b)^2 \geq 0$ e $\lambda^2 \leq \lambda$, tal desigualdade é verdadeira.

Teorema 19. Se f é côncava, então $-f$ é convexa.

Demonstração. Se f é côncava, então $\forall a, b \in \mathbb{R}$ e $\forall \lambda \in [0, 1]$, $f(\lambda a + (1 - \lambda)b) \geq \lambda f(a) + (1 - \lambda)f(b)$. Assim

$$-[f(\lambda a + (1 - \lambda)b)] \leq -[\lambda f(a) + (1 - \lambda)f(b)], \tag{C.7}$$

ou seja,

$$(-f)(\lambda a + (1 - \lambda)b) \leq \lambda(-f)(a) + (1 - \lambda)(-f)(b). \tag{C.8}$$

Logo $-f$ é convexa. □

Alguns teoremas importantes (LIMA, 2016):

Teorema 20. Uma função convexa $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua em todo ponto interior ao intervalo I .

Teorema 21. As seguintes afirmações sobre a função $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, diferenciável no intervalo I , são equivalentes:

(i) f é convexa.

(ii) A derivada $f' : I \rightarrow \mathbb{R}$ é monótona não decrescente.

(iii) Para quaisquer $a, x \in I$, tem-se $f(x) \geq f(a) + f'(a)(x - a)$. Isto é, o gráfico de f está situado acima de qualquer de suas tangentes.

Teorema 22. Uma função $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, duas vezes diferenciável em I , é convexa se, e somente se, $f''(x) \geq 0 \forall x \in I$.

Demonstração. Se, por hipótese, f é convexa, então $f(x) \geq f(a) + f'(a)(x - a)$. Derivando tal relação, temos $f'(x) \geq f'(a)$. Derivando mais uma vez, temos $f''(x) \geq 0 \forall x \in [a, b]$.

Agora, se $f''(x) \geq 0, \forall x \in [a, b]$, então a função $f' : I \rightarrow \mathbb{R}$ é monótona não-decrescente (pensando em f'' como reta tangente de f'). Logo, pelo teorema (4), f é convexa. \square

Exemplo 6. $f(x) = x \ln x$, para $x > 0$, é uma função convexa. De fato, $f''(x) = 1/x \geq 0 \forall x > 0$.

Vale ressaltar que resultados análogos são válidos para funções de várias variáveis reais.

C.2 – CONVEXIDADE PARA FUNÇÕES DE OPERADORES

Seguindo (CARLEN, 2010):

Proposição 6. Se f é uma função convexa e A é um operador hermitiano, então $\text{Tr } f(A) \geq \sum_i f(\langle i|A|i \rangle)$, onde $\{|i\rangle\}$ é uma base ortonormal. A igualdade é válida se $A|i\rangle = a_i|i\rangle \forall i$, ou seja, se $\{|i\rangle\}$ constitui uma base de autovetores de A .

Demonstração. Pela decomposição espectral, $f(A) = \sum_j f(a_j) |e_j\rangle\langle e_j|$, de modo que

$$\begin{aligned} \text{Tr } f(A) &= \sum_i \langle i| \left(\sum_j f(a_j) |e_j\rangle\langle e_j| \right) |i\rangle \\ &= \sum_i \sum_j f(a_j) |\langle e_j|i\rangle|^2, \end{aligned} \tag{C.9}$$

mas como $\lambda_j := |\langle e_j | i \rangle|^2 \in [0, 1]$, uma vez que ambas as bases são ortonormais, e dado que f é convexa, então

$$\begin{aligned} \text{Tr } f(A) &\geq \sum_i f\left(\sum_j a_j |\langle e_j | i \rangle|^2\right) = \sum_i f\left(\langle i | \left(\sum_j a_j |e_j\rangle\langle e_j| \right) | i \rangle\right) \\ &= \sum_i f(\langle i | A | i \rangle) \end{aligned} \quad (\text{C.10})$$

□

Proposição 7. *Seja f uma função convexa. Seja também $\lambda \in [0, 1]$ e A, B operadores hermitianos. Logo, $\text{Tr } f(\lambda A + (1 - \lambda)B) \leq \lambda \text{Tr}(f(A)) + (1 - \lambda) \text{Tr}(f(B))$. Ou seja, se $t \rightarrow f(t)$ é convexa então $A \rightarrow \text{Tr } f(A)$ também é.*

Demonstração. Como A e B são hermitianos, então a combinação convexa $\lambda A + (1 - \lambda)B$ também é um operador hermitiano. Seja $\{|i\rangle\}$ base de autovetores de $\lambda A + (1 - \lambda)B$, assim

$$\begin{aligned} \text{Tr } f(\lambda A + (1 - \lambda)B) &= \sum_i \langle i | f(\lambda A + (1 - \lambda)B) | i \rangle \\ &= \sum_i f(\langle i | \lambda A + (1 - \lambda)B | i \rangle) \\ &= \sum_i f(\lambda \langle i | A | i \rangle + (1 - \lambda) \langle i | B | i \rangle). \end{aligned} \quad (\text{C.11})$$

Observando que os argumentos de f não são mais operadores, mas sim as componentes desses operadores na base $\{|i\rangle\}$, então f é uma função de duas variáveis para cada i que assume valores reais, e, por hipótese, convexa, logo,

$$\begin{aligned} \sum_i f(\lambda \langle i | A | i \rangle + (1 - \lambda) \langle i | B | i \rangle) &\leq \sum_i \lambda f(\langle i | A | i \rangle) + \sum_i (1 - \lambda) f(\langle i | B | i \rangle) \\ &\leq \lambda \text{Tr}(f(A)) + (1 - \lambda) \text{Tr}(f(B)), \end{aligned} \quad (\text{C.12})$$

onde foi usado a proposição anterior para obter a última desigualdade. □

Commentário 1. *Também é possível notar que, se f é concâva, obteríamos $\text{Tr } f(\lambda A + (1 - \lambda)B) \geq \lambda \text{Tr}(f(A)) + (1 - \lambda) \text{Tr}(f(B))$.*

Dados os resultados acima, podemos formular a seguinte proposição:

Proposição 8. *A entropia linear é uma função concâva em ρ .*

Demonstração. Por definição $S_l(\rho) = 1 - \text{Tr } \rho^2$. Como $f(x) = x^2$ é uma função convexa, então $\text{Tr } f(\rho)$ é também uma função convexa. E, portanto, $-\text{Tr } f(\rho)$ é uma função concâva, completando assim a prova. □

APÊNDICE D – MAJORIZAÇÃO, MONÓTONOS DE EMARANHAMENTO E FUNÇÕES CÔNCAVAS DE SCHUR

Majorização é uma ferramenta matemática que permite determinar se uma distribuição de probabilidades é mais desordenada que outra. Intuitivamente, considere distribuições de probabilidades x e y com n elementos caracterizadas por vetores reais de n -dimensões. Então, x é dito ser majorizado por y , e denotado por $x \prec y$, se existem matrizes de permutação n -dimensionais, P_j , e uma distribuição de probabilidades, p_j , tal que $x = \sum_j p_j P_j y$ (NIELSEN; VIDAL, 2001). Isto é, x é majorizado por y quando x pode ser obtido a partir de y permutando aleatoriamente as componentes de y e então tomando a média sobre as permutações. Assim, dizemos que x é mais desordenado que y . Por exemplo, se consideremos permutações $P_j y$ de y , onde j é escolhido maneira uniformemente aleatória do grupo de permutações de d elementos, i.e., $p_j = 1/n \forall j = 1, \dots, n$, então a distribuição de probabilidades $x = (x_1, \dots, x_n)$ terá a forma $x_i = \frac{1}{n}(y_1 + \dots + y_n) \forall i = 1, \dots, n$. Como y também é uma distribuição de probabilidades, temos que $x_i = 1/n \forall i = 1, \dots, n$. Logo, $(1/n, \dots, 1/n) \prec y$ para qualquer y . Podemos ver que esse exemplo concorda com a nossa intuição de que a distribuição de probabilidades uniforme é tão ou mais desordenada que qualquer outra distribuição de probabilidades. Agora, dadas quaisquer duas distribuições de probabilidades x e y , existe um procedimento efetivo no qual podemos concluir que $x \prec y$? Uma vez que nem sempre é óbvio encontrar as matrizes de permutações e a distribuição de probabilidades que nos permite obter x a partir de y . A fim de responder essa pergunta, seguimos (MARSHALL; OLKIN; ARNOLD, 2011).

Definição 14. $\forall x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $x_{[1]} \geq x_{[2]} \geq \dots \geq x_{[n]}$ denota as componentes de x em ordem decrescente e $x_{\downarrow} = (x_{[1]}, \dots, x_{[n]})$ é denominado de rearranjo decrescente de x .

Definição 15. Seja $x, y \in \mathbb{R}^n$, então x é majorado por y , $x \prec y$, se

$$\sum_{i=1}^k x_{[i]} \leq \sum_{i=1}^k y_{[i]}, \quad k = 1, \dots, n-1, \quad (\text{D.1})$$

$$\sum_{i=1}^n x_{[i]} = \sum_{i=1}^n y_{[i]}. \quad (\text{D.2})$$

Assim, dado $A \subset \mathbb{R}^n$, então $x \prec y$ em A significa que $x, y \in A$ e $x \prec y$.

Exemplo 7. $(\frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n}) \prec (\frac{1}{n-1}, \dots, \frac{1}{n-1}, 0) \prec \dots \prec (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \dots, 0) \prec (1, 0, \dots, 0)$.

Definição 16. Seja $\phi : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, ϕ é dita *convexa de Schur* se

$$x \prec y \text{ em } A \implies \phi(x) \leq \phi(y). \quad (\text{D.3})$$

Se $\phi(x) \geq \phi(y)$, então ϕ é *côncava de Schur*.

Teorema 23. Seja $\phi : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciável em A . Se ϕ é *côncava de Schur*, então

$$\forall x \in A, i, j \in \{1, \dots, n\} \text{ temos que } (x_i - x_j) \left(\frac{\partial \phi}{\partial x_i} - \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \right) \leq 0. \quad (\text{D.4})$$

Demonstração. Seja $i = 1, j = 2$, sem perda de generalidade. Dado $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in A$, onde $x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_n$, $\epsilon > 0, \epsilon \ll 1$, seja $x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t)) = ((1-t)x_1 + tx_2, tx_1 + (1-t)x_2, \dots, x_n) \in A$ com $t \in [0, \epsilon]$. Então,

$$\begin{aligned} x_1(t) &= (1-t)x_1 + tx_2 \leq (1-t)x_1 + tx_1 = x_1 \\ x_1(t) + x_2(t) &= (1-t)x_1 + tx_2 + tx_1 + (1-t)x_2 = x_1 + x_2 \\ &\vdots \\ x_1(t) + \dots + x_n(t) &= x_1 + \dots + x_n, \end{aligned} \quad (\text{D.5})$$

ou seja, $x(t) \prec x$ em A . E, portanto, $\phi(x(t)) \geq \phi(x)$. Logo

$$\begin{aligned} 0 &\leq \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\phi(x(t)) - \phi(x)}{t} = \left. \frac{d}{dt} \phi(x(t)) \right|_{t=0} \\ &= \left. \frac{d}{dt} \phi((1-t)x_1 + tx_2, tx_1 + (1-t)x_2, \dots, x_n) \right|_{t=0} \\ &= \left. \frac{\partial \phi}{\partial x_1(t)} \frac{dx_1(t)}{dt} \right|_{t=0} + \left. \frac{\partial \phi}{\partial x_2(t)} \frac{dx_2(t)}{dt} \right|_{t=0} \\ &= \left. \frac{\partial \phi}{\partial x_1(t)} (-x_1 + x_2) \right|_{t=0} + \left. \frac{\partial \phi}{\partial x_2(t)} (x_1 - x_2) \right|_{t=0} \\ &= -(x_1 - x_2) \left(\frac{\partial \phi}{\partial x_1} - \frac{\partial \phi}{\partial x_2} \right). \end{aligned} \quad (\text{D.6})$$

□

De maneira mais geral, temos o seguinte teorema (MARSHALL; OLKIN; ARNOLD, 2011):

Teorema 24. Seja $\phi : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciável em A . A função ϕ é *côncava de Schur* se, e somente se, é *simétrica sob a permutação dos vetores* $x \in A$ e

$$\forall x \in A, i, j \in \{1, \dots, n\} \text{ temos que } (x_i - x_j) \left(\frac{\partial \phi}{\partial x_i} - \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \right) \leq 0. \quad (\text{D.7})$$

A fim de conectar a teoria de majorização com a MQ, lembremos que o análogo quântico de uma distribuição de probabilidades é o operador densidade. Portanto, consideremos a seguinte definição:

Definição 17. *Sejam A e B matrizes hermitianas, então $A \prec B$ se $\lambda(A) \prec \lambda(B)$, onde $\lambda(X)$ denota o vetor cujas componentes são os autovalores de X em ordem decrescente, onde $X = A, B$.*

Como exemplo, dado ρ a matriz densidade que descreve um sistema quântico de d -níveis. Então $I_{d \times d}/d \prec \rho$, onde $I_{d \times d}/d$ descreve um estado maximamente misto. Tal observação segue imediatamente do fato de que a distribuição de probabilidades uniforme é majorizada por qualquer outra distribuições de probabilidades. Agora, consideremos o seguinte teorema devido a Nielsen (NIELSEN, 1999):

Teorema 25. *Um estado quântico bipartido $|\psi\rangle$ pode ser transformado em outro estado quântico $|\phi\rangle$ através de LOCC se, e somente se, $\lambda(\psi)$ é majorado por $\lambda(\phi)$, onde λ denota o vetor cujas componentes são os coeficientes de Schmidt. Isto é, $|\psi\rangle \rightarrow |\phi\rangle \Leftrightarrow \lambda(\psi) \prec \lambda(\phi)$.*

Agora, dado que $\lambda = (1/d, \dots, 1/d)$ é majorado por qualquer outro vetor de probabilidades no qual as componentes são os coeficientes da decomposição Schmidt de um estado bipartido, então qualquer estado quântico pode ser preparado a partir de um estado maximamente emaranhado a partir de LOCC. Como o emaranhamento não pode aumentar por LOCC, qualquer mónico E deve inverter a ordem de majorização: $E(\psi) > E(\phi)$ para $\lambda(\psi) \prec \lambda(\phi)$ (MINTERT et al., 2005). Ademais, f inverte a ordem de majorização, $f(x) \geq f(y)$ sempre que $x \prec y$. Logo, as funções côncavas de Schur são exatamente as funções que são monotônicas sob majorização e que invertem a ordem de majorização (e que, portanto, não aumentam sob LOCC) de modo que elas podem ser usadas para quantificar emaranhamento de estados puros (BUCHLEITNER; VIVIESCAS; TIERSCH, 2009).

Agora, seguindo (ZHU et al., 2017), vamos denotar $\mathcal{D}(\mathcal{H})$ o conjunto dos operadores densidade em $\mathcal{H} \simeq \mathbb{C}^d$ e $U(d)$ o grupo de operadores unitários em \mathcal{H} . Além disso, seja \mathcal{F}_U o conjunto de funções unitariamente invariantes em $\mathcal{D}(\mathcal{H})$ tal que cada função $f \in \mathcal{F}_U$ é definida no espaço dos operadores densidade para cada inteiro positivo $d = \dim \mathcal{H}$. Ou seja, para cada d , $f \in \mathcal{F}_U$ satisfaz

$$f(U\rho U^\dagger) = f(\rho) \quad \forall \rho \in \mathcal{D}(\mathcal{H}), U \in U(d). \quad (\text{D.8})$$

Logo, $f(\rho)$ é uma função dos autovalores de ρ . Ademais, vamos nos restringir ao conjunto $\mathcal{F}_{Uc} \subset \mathcal{F}_U$ de funções côncavas e unitariamente invariante em $\mathcal{D}(\mathcal{H})$. Assim,

cada $f \in \mathcal{F}_{Uc}$ satisfaz Eq. (D.8) e

$$\begin{aligned} f(\lambda\rho+(1-\lambda)\sigma) &\geq \lambda f(\rho) + (1-\lambda)f(\sigma) \\ \forall \rho, \sigma \in \mathcal{D}(\mathcal{H}), \lambda \in [0, 1], \end{aligned} \quad (\text{D.9})$$

para qualquer d . Agora, seja $\mathcal{H} \simeq \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ um espaço de Hilbert bipartido correspondente aos sistemas A e B , com dimensão $d_A = d_B = d$. O fato da dimensão dos subsistemas ser a mesma não é essencial para o que se segue. Logo, qualquer função $f \in \mathcal{F}_{Uc}$ pode ser usada para construir monótonos de emaranhamento E_f em $\mathcal{D}(\mathcal{H})$. Para estados puros $|\Psi\rangle_{A,B} \in \mathcal{H}$,

$$E_f(\Psi) := f(\text{Tr}_B(|\Psi\rangle\langle\Psi|)) = f(\rho_A), \quad (\text{D.10})$$

sendo possível estender a medida para casos mistos $\rho \in \mathcal{D}(\mathcal{H})$ através de

$$E_f(\rho) := \min_{p_j, \rho_j} \sum_j p_j E_f(\rho_j), \quad (\text{D.11})$$

onde a minimização é tomada sobre o conjunto de estados puros de ρ no qual $\rho = \sum_j p_j \rho_j$. Inversamente, a restrição para estados puros de qualquer monótono de emaranhamento é igual à E_f para alguma $f \in \mathcal{F}_{Uc}$. Esses resultados são demonstrados em (VIDAL, 2000).

Além disso, seja Δ_d o espaço das distribuições de probabilidades de vetores de probabilidades com d componentes. A função Δ_d é dita simétrica se é invariante sob a permutação das componentes dos vetores de probabilidades. Seja \mathcal{F}_s o conjunto de funções simétricas no espaço de distribuição de probabilidades tal que cada função $f \in \mathcal{F}_s$ está definida para qualquer inteiro positivo d . Logo, os autores em (ZHU et al., 2017) mostraram que cada função simétrica $f \in \mathcal{F}_s$ é equivalente à funções unitariamente invariantes em $\mathcal{D}(\mathcal{H})$. Inversamente, qualquer função unitariamente invariante em $\mathcal{D}(\mathcal{H})$ define uma função simétrica em Δ_d quando restringida aos elementos diagonais do operador densidade. Logo, para qualquer função côncava $f \in \mathcal{F}_s$, a medida E_f definida por Eqs. (D.10) e (D.11) é um monótono de emaranhamento. Inversamente, a restrição para estados puros de qualquer monótono de emaranhamento é igual à E_f para alguma função côncava em \mathcal{F}_s .

Usando os resultados descritos no início desta seção: para ver se uma função f é unitariamente invariante, ou equivalentemente, simétrica sobre a permutação das componentes de vetores de probabilidade, basta verificar se f é uma função côncava de Schur.

APÊNDICE E – VERIFICAÇÃO DOS CRITÉRIOS PARA VISIBILIDADE E PREVISIBILIDADE.

Neste apêndice nos ocupamos em verificar que todas as medidas de Visibilidade e Previsibilidade satisfazem os critérios definidos em (DÜRR, 2000; ENGLERT et al., 2008) e enunciados na Sec. 2.3.

E.1 – COERÊNCIA DE HILBERT-SCHMIDT

Dada a medida Coerência de Hilbert-Schmidt

$$C_{hs}(\rho) = \sum_{j \neq k} |\rho_{jk}|^2, \quad (\text{E.1})$$

é possível ver que:

- (V1) $C_{hs}(\rho)$ é uma função contínua dos elementos ρ_{jk} , $\forall j \neq k$ uma vez que $f(z) := |z|$, com $z = \rho_{jk} \in \mathbb{C}$, é uma função contínua. Para ver isso, lembremos que f é contínua no ponto $z_0 \in \mathbb{C}$ se

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \text{ tal que } 0 < |z - z_0| < \delta \implies 0 < |f(z) - f(z_0)| < \epsilon. \quad (\text{E.2})$$

Logo, $f(z) = |z|$ é contínua para todo $z_0 \in \mathbb{C}$. De fato, dado $|f(z) - f(z_0)| = |z - z_0| < \epsilon$, basta tomar $\delta = \epsilon$. Como $g(x) = x^2$ é uma função contínua, então $|z|^2$ também é uma função contínua.

- (V2) Dada a forma da expressão (E.1), $C_{hs}(\rho)$ é invariante frente a permutações dos índices. Ademais, se mudarmos o índice que atribuímos a cada caminho (ou estado), por exemplo, se permutarmos os índices correspondentes ao estado 1 e 2, isso implica em permutarmos as linhas e as colunas 1 e 2 do operador densidade, de modo que as propriedades do operador densidade permanecem invariantes e, portanto, $C_{hs}(\rho)$ também permanece invariante. Isto é,

$$\begin{pmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} & \cdots & \rho_{1n} \\ \rho_{12}^* & \rho_{22} & \cdots & \rho_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{1n}^* & \rho_{2n}^* & \cdots & \rho_{nn} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \rho_{12}^* & \rho_{22} & \cdots & \rho_{2n} \\ \rho_{11} & \rho_{12} & \cdots & \rho_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{1n}^* & \rho_{2n}^* & \cdots & \rho_{nn} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \rho_{22} & \rho_{12}^* & \cdots & \rho_{2n} \\ \rho_{12} & \rho_{11} & \cdots & \rho_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{2n}^* & \rho_{1n}^* & \cdots & \rho_{nn} \end{pmatrix} \quad (\text{E.3})$$

não implica em nenhuma mudança nos valores que os elementos do operador densidade assume e, também, é possível ver que não há nenhuma mistura entre os elementos da diagonal principal e os elementos fora da diagonal. Ou seja, elementos fora da diagonal são mapeados em elementos fora diagonal. Portanto, C_{hs} permanece invariante.

- (V3) Se o estado do sistema é conhecido, i.e., $\rho_{jj} = 1$ para algum j , então os elementos $\rho_{kk} \forall k \neq j$, e todas as coerências $\rho_{jk} \forall j \neq k$ se anulam, uma vez que $|\rho_{jk}|^2 \leq \rho_{jj}\rho_{kk} \forall j \neq k$. Logo, $C_{hs}(\rho) = 0$, atingindo seu valor mínimo uma vez que $C_{hs}(\rho) \geq 0$.
- (V4) Se todos os estados são equiprováveis, i.e., $\rho_{jj} = 1/d \forall j = 1, \dots, d$ e $|\rho_{jk}|^2 \leq \rho_{jj}\rho_{kk}$, $\forall j \neq k$, então $|\rho_{jk}| \leq 1/d, \forall j \neq k$, de modo que a igualdade só é válida quando ρ é puro, isto é, $\rho^2 = \rho$. Neste caso, $C_{hs}(\rho)$ atinge seu valor máximo:

$$\begin{aligned} C_{hs} &= \sum_{j \neq k} \frac{1}{d^2} = \frac{1}{d^2} \sum_{j=1}^d \sum_{j \neq k} 1 = \frac{1}{d^2} \left[\underbrace{1(1+1+\dots+1)}_{d-1 \text{ vezes}} + \underbrace{1(1+1+\dots+1)}_{d-1 \text{ vezes}} + \dots + \underbrace{1(1+1+\dots+1)}_{d-1 \text{ vezes}} \right] \\ &= \frac{1}{d^2} d(d-1) = \frac{d-1}{d}. \end{aligned} \quad (\text{E.4})$$

- (V5) Se o módulo de algum elemento ρ_{jk} , $j \neq k$, diminui de uma quantidade infinitesimal, i.e., $|\rho_{jk}| \rightarrow |\rho'_{jk}| = (1-\epsilon)|\rho_{jk}|$, com $\epsilon > 0$ e $\epsilon \ll 1$, então $C_{hs}(\rho') = (1-\epsilon)^2 C_{hs}(\rho) \leq C_{hs}(\rho)$.
- (V6) Dada a combinação convexa $\rho = \lambda\rho_1 + (1-\lambda)\rho_2$, onde ρ, ρ_1, ρ_2 são operadores densidades e $\lambda \in [0, 1]$. Expandindo ρ, ρ_1, ρ_2 em uma base ortonormal de

referência,

$$\begin{aligned}\rho &= \sum_{jk} \rho_{jk} |j\rangle\langle k| \\ \rho_1 &= \sum_{jk} \rho_{jk}^{(1)} |j\rangle\langle k| \\ \rho_2 &= \sum_{jk} \rho_{jk}^{(2)} |j\rangle\langle k|,\end{aligned}\tag{E.5}$$

é possível ver que

$$\rho_{jk} = \lambda \rho_{jk}^{(1)} + (1 - \lambda) \rho_{jk}^{(2)}.\tag{E.6}$$

Assim,

$$\begin{aligned}C_{hs}(\rho) &= C_{hs}(\lambda \rho_1 + (1 - \lambda) \rho_2) = \sum_{j \neq k} |\lambda \rho_{jk}^{(1)} + (1 - \lambda) \rho_{jk}^{(2)}|^2 \\ &\leq \sum_{j \neq k} (\lambda^2 |\rho_{jk}^{(1)}|^2 + (1 - \lambda)^2 |\rho_{jk}^{(2)}|^2 + 2\lambda(1 - \lambda) |\rho_{jk}^{(1)}| |\rho_{jk}^{(2)}|).\end{aligned}\tag{E.7}$$

Definindo

$$\mathcal{C}(\rho) := \sum_{j \neq k} (\lambda^2 |\rho_{jk}^{(1)}|^2 + (1 - \lambda)^2 |\rho_{jk}^{(2)}|^2 + 2\lambda(1 - \lambda) |\rho_{jk}^{(1)}| |\rho_{jk}^{(2)}|),\tag{E.8}$$

então $C_{hs}(\rho) \leq \mathcal{C}(\rho)$. Agora, dado que

$$\lambda C_{hs}(\rho_1) + (1 - \lambda) C_{hs}(\rho_2) = \sum_{j \neq k} (\lambda |\rho_{jk}^{(1)}|^2 + (1 - \lambda) |\rho_{jk}^{(2)}|^2),\tag{E.9}$$

segue que

$$\begin{aligned}\lambda C_{hs}(\rho_1) + (1 - \lambda) C_{hs}(\rho_2) - \mathcal{C}(\rho) &= \sum_{j \neq k} \left((\lambda - \lambda^2) |\rho_{jk}^{(1)}|^2 + (\lambda - \lambda^2) |\rho_{jk}^{(2)}|^2 \right. \\ &\quad \left. - 2\lambda(1 - \lambda) |\rho_{jk}^{(1)}| |\rho_{jk}^{(2)}| \right) \\ &= \sum_{j \neq k} (\lambda - \lambda^2) (|\rho_{jk}^{(1)}|^2 + |\rho_{jk}^{(2)}|^2 - 2|\rho_{jk}^{(1)}| |\rho_{jk}^{(2)}|) \\ &= \sum_{j \neq k} (\lambda - \lambda^2) (|\rho_{jk}^{(1)}| - |\rho_{jk}^{(2)}|)^2 \\ &\geq 0,\end{aligned}\tag{E.10}$$

uma vez que $(|\rho_{jk}^{(1)}| - |\rho_{jk}^{(2)}|)^2 > 0$ e $\lambda \geq \lambda^2$, já que $0 \leq \lambda \leq 1$. Logo,

$$C_{hs}(\rho_1) + (1 - \lambda) C_{hs}(\rho_2) \geq \mathcal{C}(\rho) \geq C_{hs}(\rho).\tag{E.11}$$

E.2 – COERÊNCIA NORMA- L_1

Uma vez que

$$C_{l_1}(\rho) = \sum_{j \neq k} |\rho_{j,k}|. \quad (\text{E.12})$$

é possível ver que

- (V1) A continuidade $C_{l_1}(\rho)$ segue da continuidade da função módulo, como mostrado anteriormente.
- (V2) A invariância sob permutação dos índices de estados segue direto da expressão analítica de $C_{l_1}(\rho)$;
- (V3) Se o estado do sistema é conhecido, i.e., $\rho_{jj} = 1$ para algum j , então os elementos $\rho_{kk} \forall k \neq j$, e as coerências $\rho_{jk} \forall j \neq k$ se anulam, uma vez que $|\rho_{jk}|^2 \leq \rho_{jj}\rho_{kk} \forall j \neq k$. Logo $C_{l_1}(\rho) = 0$, atingindo seu valor mínimo uma vez que $C_{l_1}(\rho) \geq 0$.
- (V4) Se $\{\rho_{jj} = 1/d\}_{j=1}^d$, então $|\rho_{j,k}| \leq 1/d, \forall j \neq k$, onde a igualdade é válida somente se $\text{Tr}(\rho^2) = 1$ e, portanto, $C_{l_1} = d-1$, atingindo assim seu valor máximo.
- (V5) Se o módulo de algum elemento $\rho_{jk}, j \neq k$, diminui de uma quantidade infinitesimal, i.e., $|\rho_{jk}| \rightarrow |\rho'_{jk}| = (1 - \epsilon)|\rho_{jk}|$, com $\epsilon > 0$ e $\epsilon \ll 1$, então $C_{l_1}(\rho') = (1 - \epsilon)C_{l_1}(\rho) \leq C_{l_1}(\rho)$.
- (V6) Para $0 \leq \lambda \leq 1$ com ρ_1 e ρ_2 sendo operadores densidades tal que $\rho = \lambda\rho_1 + (1 - \lambda)\rho_2$, então a convexidade de $C_{l_1}(\rho)$ segue de:

$$C_{l_1}(\lambda\rho_1 + (1 - \lambda)\rho_2) = \sum_{j \neq k} |(\lambda\rho_1 + (1 - \lambda)\rho_2)_{j,k}| \quad (\text{E.13})$$

$$= \sum_{j \neq k} |\lambda\rho_{jk}^{(1)} + (1 - \lambda)\rho_{jk}^{(2)}| \quad (\text{E.14})$$

$$\leq \sum_{j \neq k} (\lambda|\rho_{jk}^{(1)}| + (1 - \lambda)|\rho_{jk}^{(2)}|) \quad (\text{E.15})$$

$$= \lambda C_{l_1}(\rho_1) + (1 - \lambda)C_{l_1}(\rho_2). \quad (\text{E.16})$$

E.3 – COERÊNCIA DE WIGNER-YANASE

Dado

$$C_{wy}(\rho) = 1 - \sum_j \langle j | \sqrt{\rho} | j \rangle^2 = \sum_{j \neq k} |\langle j | \sqrt{\rho} | k \rangle|^2, \quad (\text{E.17})$$

temos que

- (V1) A continuidade C_{wy} segue da continuidade de $\{(\sqrt{\rho})_{jj}\}_{j=1}^d$.
- (V2) Uma vez que $\sum_{j=1}^d ((\sqrt{\rho})_{j,j})^2$ é invariante frente a permutação $|j\rangle \leftrightarrow |k\rangle$, $C_{wy}(\rho)$ é invariante sob a permutação dos índices de caminho.
- (V3) Se $\rho_{jj} = 1$ para algum j , então, a partir de $\text{Tr}(\rho) = 1$ temos que $\rho_{kk} = 0 \forall k \neq j$, o que implica em $\rho = |j\rangle\langle j| = \sqrt{\rho}$. Portanto, $(\sqrt{\rho})_{jj} = 1$ e $(\sqrt{\rho})_{kk} = 0 \forall k \neq j$. Logo, $C_{wy} = 1 - 1 = 0$.
- (V4) Se ρ é puro, então $\sqrt{\rho} = \rho$. Logo, se $\{\rho_{jj} = 1/d\}_{j=1}^d$ segue que $C_{wy}(\rho) = C_{hs}(\rho) = (d - 1)/d$.
- (V5) Uma vez que é possível diminuir $|\rho_{jk}|$ infinitesimalmente a partir de $\rho_{jk} \rightarrow (1 - \epsilon)\rho_{jk}$, com $\epsilon \in \mathbb{R}_+$ e $\epsilon \ll 1$. Notando que $\rho_{j,k} = \sum_l (\sqrt{\rho})_{j,l} (\sqrt{\rho})_{l,k}$, então $\rho_{j,k} \rightarrow \sum_l (1 - \epsilon)(\sqrt{\rho})_{j,l} (\sqrt{\rho})_{l,k} = \sum_l \left((1 - \epsilon)(\sqrt{\rho})_{j,l} \right) (\sqrt{\rho})_{l,k}$, o que é equivalente a multiplicar a j -ésima linha de $\sqrt{\rho}$ por $1 - \epsilon$. Logo, segue que

$$C_{wy}(\rho') = \sum_{l \neq j} |(1 - \epsilon)(\sqrt{\rho})_{jl}|^2 + \sum_{k \neq j} \sum_{l \neq k} |(\sqrt{\rho})_{kl}|^2 \quad (\text{E.18})$$

$$\approx (1 - 2\epsilon) \sum_{l \neq j} |(\sqrt{\rho})_{jl}|^2 + \sum_{k \neq j} \sum_{l \neq k} |(\sqrt{\rho})_{kl}|^2 \quad (\text{E.19})$$

$$= C_{wy}(\rho) - 2\epsilon \sum_{l \neq j} |(\sqrt{\rho})_{jl}|^2 \quad (\text{E.20})$$

$$\leq C_{wy}(\rho). \quad (\text{E.21})$$

- (V6) A convexidade $C_{wy}(\rho)$ segue da convexidade da informação de Wigner-Yanase I_{wy} (WIGNER; YANASE, 1963). De fato, uma vez que

$$I_{wy}(\rho, H) := -\frac{1}{2} \text{Tr}([\sqrt{\rho}, H]^2) = \text{Tr}(H^2 \rho) - \text{Tr} \sqrt{\rho} H \sqrt{\rho} H, \quad (\text{E.22})$$

onde A é um operador hermitiano. Assim, para mostrar que $I_{wy}(\rho, H)$ é convexa, basta mostrar que $\text{Tr} \sqrt{\rho} H \sqrt{\rho} H$ é côncava em ρ , uma vez que $\text{Tr}(H^2 \rho)$ é linear em ρ . Considerando o seguinte teorema devido à Lieb (CARLEN, 2010):

Teorema 26. Para qualquer matriz X , e para qualquer $t \in [0, 1]$, a função $f(A, B) = \text{Tr } X^\dagger A^t X B^{1-t}$ é conjuntamente côncava no par de matrizes positivas A, B .

Logo, tomando $X = H$, $A = B = \rho$ e $t = 1/2$, segue que $\text{Tr } \sqrt{\rho} H \sqrt{\rho} H$ é côncava.

E.4 – COERÊNCIA BASEADA NA ENTROPIA RELATIVA

Lembrando que

$$C_{re}(\rho) = \min_{\iota \in I} S_{vn}(\rho || \iota) = S_{vn}(\rho_{diag}) - S_{vn}(\rho), \quad (\text{E.23})$$

segue que

(V1) $C_{re}(\rho)$ é uma função contínua dos elementos de ρ uma vez que a entropia de von Neumann é continua (NIELSEN; CHUANG, 2000).

(V2) Pela expressão analítica da entropia de von Neumann, $C_{re}(\rho)$ é invariante frente a permutação dos índices que rotulam os estados.

(V3) Se $\rho_{jj} = 1$ para algum j , então $S_{vn}(\rho_{diag}) = S_{vn}(\rho) = 0$, e portanto, $C_{re}(\rho) = 0$.

(V4) Se ρ é puro, então $S_{vn}(\rho) = 0$. Ademais, se $\{\rho_{jj} = 1/d\}_{j=1}^d$ então $C_{re}(\rho) = S_{vn}(\rho_{diag}) = \ln d$, atingindo assim o seu máximo.

(V.5) Uma maneira de diminuir as coerências de ρ é a partir de $\rho_{jk} \rightarrow (1 - \epsilon)\rho_{jk}$, com $\epsilon \in \mathbb{R}_+$ e $\epsilon \ll 1$. Um possível mapa que implementa a diminuição das coerências de ρ é dado por $\mathcal{T} : \rho \rightarrow \rho' = (1 - \epsilon)\rho + \epsilon\rho_{diag}$. Agora, como $\rho'_{diag} = \rho_{diag} \implies S_{vn}(\rho'_{diag}) = S_{vn}(\rho_{diag})$ e dado que $S_{vn}(\rho)$ é côncava, então

$$C_{re}(\rho') = S_{vn}(\rho'_{diag}) - S_{vn}(\rho') \leq S_{vn}(\rho_{diag}) - (1 - \epsilon)S_{vn}(\rho) - \epsilon S_{vn}(\rho_{diag}) \quad (\text{E.24})$$

$$= (1 - \epsilon)(S_{vn}(\rho_{diag}) - S_{vn}(\rho)) \quad (\text{E.25})$$

$$\leq S_{vn}(\rho_{diag}) - S_{vn}(\rho) = C_{re}(\rho). \quad (\text{E.26})$$

(V6) $C_{re}(\rho)$ é uma função convexa em ρ , uma vez que $S_{vn}(\rho || \iota)$ conjuntamente convexa no par ρ, ι (NIELSEN; CHUANG, 2000).

E.5 – PREVISIBILIDADE LINEAR E DE VON NEUMANN

Lembrando que

$$P_l(\rho) := S_l^{\max} - S_l(t_\rho^{hs}) = \sum_j \rho_{jj}^2 - 1/d \quad (\text{E.27})$$

$$P_{vn}(\rho) := S_{vn}^{\max} - S_{vn}(t_\rho^{hs}) = \ln d + \sum_j \rho_{jj} \ln \rho_{jj}, \quad (\text{E.28})$$

temos

- (P1) Como $S_\tau(t_\rho^{hs})$, $\tau = l, vn$ é uma função contínua dos elementos $\{\rho_{j,j}\}_{j=1}^d$, as medidas de previsibilidade $P_\tau(\rho)$ também são.
- (P2) A invariância frente aos índices que rotulam os estados segue direto das expressões analíticas (E.27) e (E.28).
- (P3) Se $\rho_{jj} = 1$ para algum j , então $\rho_{kk} = 0 \forall k \neq j$. Consequentemente, $S_l = 1 - \rho_{jj}^2 - \sum_{k \neq j} \rho_{kk}^2 = 0$ e $S_{vn} = -\rho_{j,j} \ln \rho_{j,j} - \sum_{k \neq j} \rho_{k,k} \ln \rho_{k,k} = 0$. Logo, $P_l = S_l^{\max} = \frac{d-1}{d}$ e $P_{vn} = S_{vn}^{\max} = \ln d$.
- (P4) Se $\{\rho_{jj} = 1/d\}_{j=1}^d$, independentemente se ρ é puro ou misto, então $S_l = 1 - \sum_{j=1}^d (1/d^2) = S_l^{\max}$ e $S_{vn} = -\sum_{j=1}^d (1/d) \ln(1/d) = S_{vn}^{\max}$. Logo $P_\tau = 0$, $\tau = l, vn$.
- (P5) Como P_τ é invariante frente às permutações do tipo $\rho_{jj} \leftrightarrow \rho_{kk} \forall j, k$ é possível, sem perda de generalidade, considerar $\rho_{11} > \rho_{22}$. Indo na direção da equalização das probabilidades, i.e., $\rho_{11} \rightarrow \rho'_{11} = \rho_{11} - \epsilon$, e $\rho_{22} \rightarrow \rho'_{22} = \rho_{22} + \epsilon$ for $\epsilon > 0$ and $\epsilon \ll 1$, segue que

$$P_l(\rho') = S_l^{\max} - 1 + (\rho_{11} - \epsilon)^2 + (\rho_{22} + \epsilon)^2 + \sum_{j=3}^d \rho_{jj}^2 \quad (\text{E.29})$$

$$= S_l^{\max} - (1 - \sum_{j=1}^d \rho_{jj}^2) - 2\epsilon(\rho_{11} - \rho_{22}) + \mathcal{O}(\epsilon^2) \quad (\text{E.30})$$

$$= P_l(\rho) - 2\epsilon(\rho_{11} - \rho_{22}) + \mathcal{O}(\epsilon^2) \quad (\text{E.31})$$

$$\leq P_l(\rho), \quad (\text{E.32})$$

e

$$P_{vn}(\rho') = S_{vn}^{\max} + (\rho_{11} - \epsilon) \ln(\rho_{11} - \epsilon) + (\rho_{22} + \epsilon) \ln(\rho_{22} + \epsilon) + \sum_{j=3}^d \rho_{jj} \ln \rho_{jj} \quad (\text{E.33})$$

$$= S_{vn}^{\max} + \sum_{j=1}^d \rho_{jj} \ln \rho_{jj} - \epsilon(\ln \rho_{11} - \ln \rho_{22}) + (\rho_{11} - \epsilon)(-\epsilon/\rho_{11}) \quad (\text{E.34})$$

$$+ (\rho_{22} + \epsilon)(\epsilon/\rho_{22}) + \mathcal{O}(\epsilon^2) \\ = P_{hs}^{vn} - \epsilon(\ln \rho_{11} - \ln \rho_{22}) + \mathcal{O}(\epsilon^2) \quad (\text{E.35})$$

$$\leq P_{vn}(\rho), \quad (\text{E.36})$$

onde foi usado o fato de que $\ln(1 \pm x) \approx \pm x$ para $x > 0$ e $x \ll 1$.

- (P6) A convexidade de $P_{\tau}(\rho)$, $\tau = l, vn$, segue do fato já demonstrado de que $S_{\tau}(\rho_{diag})$, $\tau = l, vn$, são funções côncavas em ρ .

E.6 – PREVISIBILIDADE NORMA- L_1

Dado que

$$P_{l_1}(\rho) := d - 1 - \sum_{j \neq k} \sqrt{\rho_{j,j} \rho_{k,k}} = d - 1 - 2 \sum_{j < k} \sqrt{\rho_{j,j} \rho_{k,k}}. \quad (\text{E.37})$$

Então,

- (P1) A continuidade de $P_{l_1}(\rho)$ segue da continuidade da raiz quadrada dos elementos da diagonal de ρ .
- (P2) A soma $\sum_{j \neq k} \sqrt{\rho_{j,j} \rho_{k,k}}$ garante que $P_{l_1}(\rho)$ é invariante frente à permutação dos índices.
- (P3) Se $\rho_{jj} = 1$ para algum j , então $\rho_{kk} = 0 \forall k \neq j$. Logo, $P_{l_1} = d - 1 - 0$, atingindo seu valor máximo.
- (P4) Se $\{\rho_{jj} = 1/d\}_{j=1}^d$, então $\sum_{j \neq k} \sqrt{\rho_{jj} \rho_{kk}} = d - 1$, e, portanto, $P_{l_1} = 0$.
- (P5) Como P_{l_1} é invariante frente à permutações do tipo $\rho_{jj} \leftrightarrow \rho_{kk} \forall j, k$ é possível, sem perda de generalidade, considerar $\rho_{11} > \rho_{22}$. Indo na direção da equalização das probabilidades, i.e., $\rho_{11} \rightarrow \rho'_{11} = \rho_{11} - \epsilon$, e $\rho_{22} \rightarrow \rho'_{22} = \rho_{22} + \epsilon$ for

$\epsilon > 0$ and $\epsilon \ll 1$, segue que

$$P_{l_1}(\rho') = d - 1 - 2\sqrt{\rho_{11} - \epsilon}\sqrt{\rho_{22} + \epsilon} - 2\sqrt{\rho_{11} - \epsilon} \sum_{k=3}^d \sqrt{\rho_{kk}} - 2\sqrt{\rho_{22} + \epsilon} \sum_{k=3}^d \sqrt{\rho_{kk}} - 2 \sum_{j=3}^{d-1} \sum_{k=j+1}^d \sqrt{\rho_{jj}\rho_{kk}} \quad (\text{E.38})$$

$$\approx d - 1 - 2\sqrt{\rho_{11}\rho_{22}} (1 - \epsilon/2\rho_{11}) (1 + \epsilon/2\rho_{22}) - 2\sqrt{\rho_{11}} (1 - \epsilon/2\rho_{11}) \sum_{k=3}^d \sqrt{\rho_{kk}} - 2\sqrt{\rho_{22}} (1 + \epsilon/2\rho_{22}) \sum_{k=3}^d \sqrt{\rho_{kk}} - 2 \sum_{j=3}^{d-1} \sum_{k=j+1}^d \sqrt{\rho_{jj}\rho_{kk}} \quad (\text{E.39})$$

$$\approx P_{l_1} - \epsilon \left(\sqrt{\frac{\rho_{11}}{\rho_{22}}} - \sqrt{\frac{\rho_{22}}{\rho_{11}}} \right) - \epsilon \left(\frac{1}{\sqrt{\rho_{22}}} - \frac{1}{\sqrt{\rho_{11}}} \right) \sum_{k=3}^d \sqrt{\rho_{kk}} \quad (\text{E.40})$$

$$< P_{l_1}(\rho). \quad (\text{E.41})$$

- (P6) A fim de mostrar a convexidade de $P_{l_1}(\rho)$, consideremos o seguinte teorema (ROBERTS; VARBERG, 1973):

Teorema 27. *Se $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função diferenciável definida em um conjunto convexo $A \subset \mathbb{C}^n$, então f é convexa se, e somente se, a matriz Hessiana*

$$H = (H_{ij}) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) \right), \quad \forall x \in A, \quad (\text{E.42})$$

é positiva semi-definida.

Dado que $P_{l_1}(\rho)$ é função de operadores densidade (que formam um conjunto convexo), e quando expresso em termos de seus elementos numa dada base, as previsibilidades tornam-se função de várias variáveis reais, uma vez que $\rho_{jj} \in [0, 1] \forall j$. Assim, para verificar se a previsibilidade é convexa, basta verificar se o Hessiano da função é positivo semi definido, isto é,

$$\langle y|H|y \rangle = \sum_{jk} y_j^* H_{jk} y_k = \sum_{jk} y_j^* \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k} y_k \geq 0, \quad (\text{E.43})$$

$\forall y \in \mathbb{C}^n$. Para isso, definindo $f(x) := \alpha - \sum_{j \neq k} \sqrt{x_j x_k}$, temos que

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = - \sum_{j \neq k} \frac{x_k \delta_{ji}}{2\sqrt{x_j x_k}} - \sum_{j \neq k} \frac{x_j \delta_{ki}}{2\sqrt{x_j x_k}}, \quad (\text{E.44})$$

ou seja,

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = - \sum_{i \neq k} \frac{x_k}{2\sqrt{x_i x_k}} - \sum_{j \neq i} \frac{x_j}{2\sqrt{x_j x_i}} = - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \sqrt{\frac{x_j}{x_i}}, \quad (\text{E.45})$$

lembrando que o índice i é fixo. A soma é apenas sobre j . Agora,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(- \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \sqrt{\frac{x_j}{x_i}} \right) = \frac{1}{2} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{x_j^{1/2}}{x_i^{3/2}}, \quad (\text{E.46})$$

pois a soma em j passa por todos os elementos, exceto o i -ésimo elemento, que é fixo. Enquanto que, para $k \neq i$,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_k} \left(- \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \sqrt{\frac{x_j}{x_i}} \right) = - \frac{1}{2} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{\delta_{jk}}{\sqrt{x_i x_j}} = - \frac{1}{2\sqrt{x_k x_i}}. \quad (\text{E.47})$$

Assim,

$$\begin{aligned} \langle y|H|y \rangle &= \sum_{j,k} y_j^* \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k} y_k = \sum_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2} |y_j|^2 + \sum_{j \neq k} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k} y_j^* y_k \\ &= \frac{1}{2} \sum_j \left(\sum_{k \neq j} \frac{x_k^{1/2}}{x_j^{3/2}} \right) |y_j|^2 - \frac{1}{2} \sum_{j \neq k} \frac{1}{\sqrt{x_j x_k}} y_j^* y_k. \end{aligned} \quad (\text{E.48})$$

Agora, para mostrar que $\langle y|H|y \rangle \geq 0$, consideremos o caso em que $d = 2$

$$\begin{aligned} \langle y|H|y \rangle &= \frac{1}{2} \frac{x_2^{1/2}}{x_1^{3/2}} |y_1|^2 + \frac{1}{2} \frac{x_1^{1/2}}{x_2^{3/2}} |y_2|^2 - \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{x_1 x_2}} (y_1^* y_2 + y_2^* y_1) \\ &= \frac{1}{2} \frac{x_2^{1/2}}{x_1^{3/2}} |y_1|^2 + \frac{1}{2} \frac{x_1^{1/2}}{x_2^{3/2}} |y_2|^2 - \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{x_1 x_2}} 2\text{Re}(y_1 y_2^*) \\ &= \frac{1}{2} x_1^{1/2} x_2^{1/2} \left(\frac{1}{x_1^2} |y_1|^2 + \frac{1}{x_2^2} |y_2|^2 - 2 \frac{1}{x_1 x_2} \text{Re}(y_1 y_2^*) \right) \\ &= \frac{1}{2} x_1^{1/2} x_2^{1/2} \left| \frac{y_1}{x_1} - \frac{y_2}{x_2} \right|^2 \\ &\geq 0. \end{aligned} \quad (\text{E.49})$$

Para $d = 3$, o padrão se repete:

$$\begin{aligned}
\langle y|H|y\rangle &= \frac{1}{2} \frac{x_2^{1/2} + x_3^{1/2}}{x_1^{3/2}} |y_1|^2 + \frac{1}{2} \frac{x_1^{1/2} + x_3^{1/2}}{x_2^{3/2}} |y_2|^2 + \frac{1}{2} \frac{x_1^{1/2} + x_2^{1/2}}{x_3^{3/2}} |y_3|^2 - \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{x_1 x_2}} (y_1^* y_2 + y_2^* y_1) \\
&\quad - \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{x_1 x_3}} (y_1^* y_3 + y_3^* y_1) - \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{x_2 x_3}} (y_2^* y_3 + y_3^* y_2) \\
&= \frac{1}{2} \frac{x_2^{1/2} + x_3^{1/2}}{x_1^{3/2}} |y_1|^2 + \frac{1}{2} \frac{x_1^{1/2} + x_3^{1/2}}{x_2^{3/2}} |y_2|^2 + \frac{1}{2} \frac{x_1^{1/2} + x_2^{1/2}}{x_3^{3/2}} |y_3|^2 - \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{x_1 x_2}} 2\Re e(y_1 y_2^*) \\
&\quad - \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{x_1 x_3}} 2\Re e(y_1 y_3^*) - \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{x_2 x_3}} 2\Re e(y_2 y_3^*) \\
&= \frac{1}{2} x_1^{1/2} x_2^{1/2} \left(\frac{1}{x_1^2} |y_1|^2 + \frac{1}{x_2^2} |y_2|^2 - 2 \frac{1}{x_1 x_2} \Re e(y_1 y_2^*) \right) + \frac{1}{2} x_1^{1/2} x_3^{1/2} \left(\frac{1}{x_1^2} |y_1|^2 + \frac{1}{x_3^2} |y_3|^2 \right. \\
&\quad \left. - 2 \frac{1}{x_1 x_3} \Re e(y_1 y_3^*) \right) + \frac{1}{2} x_2^{1/2} x_3^{1/2} \left(\frac{1}{x_2^2} |y_2|^2 + \frac{1}{x_3^2} |y_3|^2 - 2 \frac{1}{x_2 x_3} \Re e(y_2 y_3^*) \right) \\
&= \frac{1}{2} x_1^{1/2} x_2^{1/2} \left| \frac{y_1}{x_1} - \frac{y_2}{x_2} \right|^2 + \frac{1}{2} x_1^{1/2} x_3^{1/2} \left| \frac{y_1}{x_1} - \frac{y_3}{x_3} \right|^2 + \frac{1}{2} x_2^{1/2} x_3^{1/2} \left| \frac{y_2}{x_2} - \frac{y_3}{x_3} \right|^2 \\
&= \frac{1}{2} \sum_{i < j} x_i^{1/2} x_j^{1/2} \left| \frac{y_i}{x_i} - \frac{y_j}{x_j} \right|^2 \\
&\geq 0.
\end{aligned} \tag{E.50}$$

Assim, de maneira geral,

$$\begin{aligned}
\langle y|H|y\rangle &= \frac{1}{2} \sum_j \left(\sum_{k \neq j} \frac{x_k^{1/2}}{x_j^{3/2}} \right) |y_j|^2 - \frac{1}{2} \sum_{j \neq k} \frac{1}{\sqrt{x_j x_k}} y_j^* y_k \\
&= \frac{1}{2} \sum_{j < k} \left(\frac{x_k^{1/2}}{x_j^{3/2}} |y_j|^2 + \frac{x_j^{1/2}}{x_k^{3/2}} |y_k|^2 \right) - \frac{1}{2} \sum_{j < k} \frac{1}{\sqrt{x_j x_k}} (y_j^* y_k + y_k^* y_j) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{j < k} \left(\frac{x_k^{1/2}}{x_j^{3/2}} |y_j|^2 + \frac{x_j^{1/2}}{x_k^{3/2}} |y_k|^2 - \frac{1}{\sqrt{x_j x_k}} 2\Re e(y_j^* y_k) \right) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{j < k} x_j^{1/2} x_k^{1/2} \left(\frac{1}{x_j^2} |y_j|^2 + \frac{1}{x_k^2} |y_k|^2 - \frac{1}{x_j x_k} 2\Re e(y_j^* y_k) \right) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{j < k} x_j^{1/2} x_k^{1/2} \left| \frac{y_j}{x_j} - \frac{y_k}{x_k} \right|^2 \geq 0.
\end{aligned} \tag{E.51}$$

Note que a maneira como o somatório está sendo realizando foi trocado da primeira para segunda linha, mas nenhum dos elementos da soma foi perdido (ou adicionado). Logo, $P_{l_1}(\rho)$ é convexa em ρ .

APÊNDICE F – VARIÂNCIA DAS MATRIZES GENERALIZADAS DE GELL-MANN

Dada a base de caminho $\{|j\rangle\}_{j=0}^{d-1}$, é possível definir as matrizes generalizadas de Gell-Mann como (BERTLMANN; KRAMMER, 2008):

$$\Gamma_m^d := \sqrt{\frac{2}{m(m+1)}} \sum_{l=1}^{m+1} (-m)^{\delta_{l,m+1}} |l\rangle\langle l|, \quad (\text{F.1})$$

$$\Gamma_{j,k}^s := |j\rangle\langle k| + |k\rangle\langle j|, \quad (\text{F.2})$$

$$\Gamma_{j,k}^a := -i(|j\rangle\langle k| - |k\rangle\langle j|), \quad (\text{F.3})$$

onde $m = 1, \dots, d-1$ e $1 \leq j < k \leq d$. Agora, calculando o valor esperado de $\Gamma_{j,k}^s$, temos que

$$\langle \Gamma_{j,k}^s \rangle = \text{Tr} \rho \Gamma_{j,k}^s = \text{Tr} \left(\rho (|j\rangle\langle k| + |k\rangle\langle j|) \right) = \text{Tr}(\rho |j\rangle\langle k|) + \text{Tr}(\rho |k\rangle\langle j|) \quad (\text{F.4})$$

$$= \rho_{kj} + \rho_{jk} = \rho_{jk} + (\rho_{jk})^* \quad (\text{F.5})$$

$$= 2\mathbb{R}(\rho_{jk}), \quad (\text{F.6})$$

onde $\mathbb{R}(\rho_{jk})$ denota a parte real de ρ_{jk} . Analogamente, temos que $\langle \Gamma_{j,k}^a \rangle = -2\mathbb{I}(\rho_{jk})$, onde $\mathbb{I}(\rho_{jk})$ denota a parte imaginária de ρ_{jk} . Assim,

$$\sum_{j < k} \left(\langle \Gamma_{j,k}^s \rangle^2 + \langle \Gamma_{j,k}^a \rangle^2 \right) = 4 \sum_{j < k} \left((\mathbb{R}(\rho_{jk}))^2 + (\mathbb{I}(\rho_{jk}))^2 \right)^2 \quad (\text{F.7})$$

$$= 4 \sum_{j < k} |\rho_{jk}|^2 = 2 \sum_{j \neq k} |\rho_{jk}|^2 \quad (\text{F.8})$$

$$= 2C_{hs}(\rho) \quad (\text{F.9})$$

Agora, calculando o valor esperado de $(\Gamma_{j,k}^s)^2$, temos que

$$\langle (\Gamma_{j,k}^s)^2 \rangle = \text{Tr} \left(\rho (|j\rangle\langle k| + |k\rangle\langle j|) (|j\rangle\langle k| + |k\rangle\langle j|) \right) \quad (\text{F.10})$$

$$= \text{Tr}(\rho |j\rangle\langle j|) + \text{Tr}(\rho |k\rangle\langle k|) \quad (\text{F.11})$$

$$= \rho_{jj} + \rho_{kk}, \quad (\text{F.12})$$

uma vez que $j < k$ e, portanto, $\langle j|k \rangle = 0$. Analogamente, $\langle (\Gamma_{j,k}^a)^2 \rangle = \rho_{jj} + \rho_{kk}$. Notando que

$$\sum_{j < k} (\rho_{jj} + \rho_{kk}) = \sum_{j=1}^{d-1} \sum_{k=j+1}^d \rho_{jj} + \sum_{j=1}^{d-1} \sum_{k=j+1}^d \rho_{kk} \quad (\text{F.13})$$

$$= \left(\rho_{11}(d-1) + \rho_{22}(d-2) + \dots + \rho_{d-1,d-1} \right) \quad (\text{F.14})$$

$$+ \left((\rho_{22} + \rho_{33} + \dots + \rho_{dd}) + (\rho_{33} + \dots + \rho_{dd}) + \dots + \rho_{dd} \right)$$

$$= \left(\rho_{11}(d-1) + \rho_{22}(d-2) + \dots + \rho_{d-1,d-1} \right) \quad (\text{F.15})$$

$$+ \left(\rho_{22} + 2\rho_{33} + \dots + (d-1)\rho_{dd} \right)$$

$$= (d-1)(\rho_{11} + \rho_{22} + \dots + \rho_{dd})$$

$$= d-1, \quad (\text{F.16})$$

segue que

$$\sum_{j < k} \left(\langle (\Gamma_{j,k}^s)^2 \rangle + \langle (\Gamma_{j,k}^a)^2 \rangle \right) = 2 \sum_{j < k} (\rho_{jj} + \rho_{kk}) = 2(d-1), \quad (\text{F.17})$$

e, portanto,

$$\sum_{j < k} \left(\mathcal{V}(\rho_A, \Gamma_{j,k}^s) + \mathcal{V}(\rho_A, \Gamma_{j,k}^a) \right) = 2(d-1) - 2C_{hs}(\rho). \quad (\text{F.18})$$

Já, o valor médio de Γ_m^d é dado por

$$\langle \Gamma_m^d \rangle = \text{Tr} \rho \Gamma_m^d = \sqrt{\frac{2}{m(m+1)}} \text{Tr} \left(\rho \left(\sum_{l=1}^m |l\rangle\langle l| - m |m+1\rangle\langle m+1| \right) \right) \quad (\text{F.19})$$

$$= \sqrt{\frac{2}{m(m+1)}} \left(\sum_{l=1}^m \rho_{ll} - m\rho_{m+1,m+1} \right), \quad (\text{F.20})$$

de modo que

$$\sum_{m=1}^{d-1} \langle \Gamma_m^d \rangle^2 = \sum_{m=1}^{d-1} \frac{2}{m(m+1)} \left(\sum_{l=1}^m \rho_{ll} - m\rho_{m+1,m+1} \right)^2. \quad (\text{F.21})$$

A fim de obter intuição sobre este somatório, consideremos o caso $d = 3$. Assim, $m = 1, 2$ e

$$\sum_{m=1}^{d-1} \langle \Gamma_m^d \rangle^2 = \sum_{m=1}^2 \frac{2}{m(m+1)} \left(\sum_{l=1}^m \rho_{ul} - m\rho_{m+1m+1} \right)^2 \quad (\text{F.22})$$

$$= (\rho_{11} - \rho_{22})^2 + \frac{2}{2 \times 3} (\rho_{11} + \rho_{22} - 2\rho_{33})^2 \quad (\text{F.23})$$

$$= \frac{4}{3} \left(\rho_{11}^2 + \rho_{22}^2 + \rho_{33}^2 - \rho_{11}\rho_{22} - \rho_{11}\rho_{33} - \rho_{22}\rho_{33} \right) \quad (\text{F.24})$$

$$= \frac{4}{3} \left(\frac{3}{2} \sum_{j=1}^3 \rho_{jj}^2 - \frac{1}{2} \left(\sum_{j=1}^3 \rho_{jj}^2 + \sum_{j \neq k} \rho_{jj}\rho_{kk} \right) \right) \quad (\text{F.25})$$

$$= 2 \left(\sum_{j=1}^3 \rho_{jj}^2 - \frac{1}{3} \left(\sum_{j=1}^3 \rho_{jj} \right)^2 \right) \quad (\text{F.26})$$

$$= 2P_l(\rho). \quad (\text{F.27})$$

Assim, de maneira geral, temos

$$\sum_{m=1}^{d-1} \langle \Gamma_m^d \rangle^2 = \sum_{m=1}^{d-1} \frac{2}{m(m+1)} \left(\sum_{l=1}^m \rho_{ul} - m\rho_{m+1m+1} \right)^2 \quad (\text{F.28})$$

$$= \sum_{m=1}^{d-1} \frac{2}{m(m+1)} \left(\left(\sum_{l=1}^m \rho_{ul} \right)^2 + m^2 \rho_{m+1m+1}^2 - 2m\rho_{m+1m+1} \sum_{l=1}^m \rho_{ul} \right) \quad (\text{F.29})$$

$$= \sum_{m=1}^{d-1} \frac{2}{m(m+1)} \left(\sum_{l=1}^m \rho_{ul}^2 + \sum_{k \neq l} \rho_{kk}\rho_{ul} + m^2 \rho_{m+1m+1}^2 - 2m\rho_{m+1m+1} \sum_{l=1}^m \rho_{ul} \right),$$

notando que

$$\sum_{m=1}^{d-1} \frac{2}{m(m+1)} \left(\sum_{l=1}^m \rho_{ul}^2 + m^2 \rho_{m+1m+1}^2 \right) = 2 \left(\frac{1}{2} \rho_{11}^2 + \frac{1}{2 \times 3} \sum_{j=1}^2 \rho_{jj}^2 + \frac{1}{3 \times 4} \sum_{j=1}^3 \rho_{jj}^2 + \dots \right.$$

$$\left. + \frac{1}{(d-1)d} \sum_{j=1}^{d-1} \rho_{jj}^2 \right) + 2 \left(\frac{1}{2} \rho_{22}^2 + \frac{2}{3} \rho_{33}^2 + \dots + \frac{d-1}{d} \rho_{dd}^2 \right)$$

$$= 2 \left(\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \dots + \frac{1}{(d-1)d} \right) \sum_{j=1}^{d-1} \rho_{jj}^2 + \frac{2(d-1)}{d} \rho_{dd}^2 \quad (\text{F.30})$$

$$= 2 \sum_{k=1}^{d-1} \frac{1}{k(k+1)} \sum_{j=1}^{d-1} \rho_{jj}^2 + \frac{2(d-1)}{d} \rho_{dd}^2 \quad (\text{F.31})$$

$$= \frac{2(d-1)}{d} \sum_{j=1}^d \rho_{jj}^2, \quad (\text{F.32})$$

uma vez que

$$\sum_{k=1}^{d-1} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{d-1} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = \sum_{k=1}^{d-1} \frac{1}{k} - \sum_{k=2}^d \frac{1}{k} \quad (\text{F.33})$$

$$= 1 + \sum_{k=2}^{d-1} \frac{1}{k} - \sum_{k=2}^{d-1} \frac{1}{k} + \frac{1}{d} \quad (\text{F.34})$$

$$= \frac{d-1}{d}. \quad (\text{F.35})$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{d-1} \frac{2}{m(m+1)} \left(\sum_{k \neq l}^m \rho_{kk} \rho_{ll} - 2m \rho_{m+1m+1} \sum_{l=1}^m \rho_{ll} \right) &= -2\rho_{22}\rho_{11} + \frac{2}{2 \times 3} \left(2\rho_{11}\rho_{22} - 2\rho_{33} \sum_{j=1}^2 \rho_{jj} \right) \\ &+ \dots + \frac{2}{(d-1)d} \left(\sum_{j \neq k}^{d-1} \rho_{jj} \rho_{kk} - 2(d-1)\rho_{dd} \sum_{j=1}^{d-1} \rho_{jj} \right), \end{aligned} \quad (\text{F.36})$$

onde o fator que multiplica o termo $\rho_{11}\rho_{22}$ é dado

$$-2 + \frac{2 \times 2}{2 \times 3} + \frac{2 \times 2}{3 \times 4} + \dots + \frac{2 \times 2}{(d-1)d} = -2 + 4 \sum_{j=1}^{d-1} \frac{1}{j(j+1)} - 4\frac{1}{2} \quad (\text{F.37})$$

$$= 4 \left(\frac{d-1}{d} - 1 \right) = -\frac{4}{d}. \quad (\text{F.38})$$

Analogamente, o fator $-4/d$ multiplica todos os outros termos do tipo $\rho_{jj}\rho_{kk} \forall j < k$, de modo que

$$\sum_{m=1}^{d-1} \frac{2}{m(m+1)} \left(\sum_{k \neq l}^m \rho_{kk} \rho_{ll} - 2m \rho_{m+1m+1} \sum_{l=1}^m \rho_{ll} \right) = -\frac{4}{d} \sum_{j < k}^d \rho_{jj} \rho_{kk} \quad (\text{F.39})$$

Portanto, substituindo os resultados (F.32) e (F.39) na Eq. (F.28), temos que

$$\sum_{m=1}^{d-1} \langle \Gamma_m^d \rangle^2 = \frac{2(d-1)}{d} \sum_{j=1}^d \rho_{jj}^2 - \frac{4}{d} \sum_{j < k} \rho_{jj} \rho_{kk} \quad (\text{F.40})$$

$$= \frac{2(d-1)}{d} \left(\sum_{j=1}^d \rho_{jj}^2 - \frac{2}{d-1} \sum_{j < k} \rho_{jj} \rho_{kk} \right) \quad (\text{F.41})$$

$$= \frac{2(d-1)}{d} \left(\frac{d}{d-1} \sum_{j=1}^d \rho_{jj}^2 - \frac{1}{d-1} \left(\sum_{j=1}^d \rho_{jj}^2 + \sum_{j \neq k} \rho_{jj} \rho_{kk} \right) \right) \quad (\text{F.42})$$

$$= \frac{2(d-1)}{d} \left(\frac{d}{d-1} \sum_{j=1}^d \rho_{jj}^2 - \frac{1}{d-1} \left(\sum_{j=1}^d \rho_{jj} \right)^2 \right), \quad (\text{F.43})$$

ou seja, $\sum_{m=1}^{d-1} \langle \Gamma_m^d \rangle^2 = 2P_l(\rho)$. Por fim, o valor esperado de $(\Gamma_m^d)^2$ é dado por

$$\langle (\Gamma_m^d)^2 \rangle = \text{Tr} \rho (\Gamma_m^d)^2 \quad (\text{F.44})$$

$$= \frac{2}{m(m+1)} \text{Tr} \left(\rho \left(\sum_{k=1}^m |k\rangle\langle k| - m |m+1\rangle\langle m+1| \right) \left(\sum_{l=1}^m |l\rangle\langle l| - m |m+1\rangle\langle m+1| \right) \right)$$

$$= \frac{2}{m(m+1)} \text{Tr} \left(\rho \left(\sum_{l=1}^m |l\rangle\langle l| + m^2 |m+1\rangle\langle m+1| \right) \right) \quad (\text{F.45})$$

$$= \frac{2}{m(m+1)} \left(\sum_{l=1}^m \rho_{jj} + m^2 \rho_{m+1m+1} \right), \quad (\text{F.46})$$

de modo que

$$\sum_{m=1}^{d-1} \langle (\Gamma_m^d)^2 \rangle = \sum_{m=1}^{d-1} \frac{2}{m(m+1)} \left(\sum_{l=1}^m \rho_{jj} + m^2 \rho_{m+1m+1} \right) \quad (\text{F.47})$$

$$\begin{aligned} &= (\rho_{11} + \rho_{22}) + \frac{2}{2 \times 3} (\rho_{11} + \rho_{22} + 4\rho_{33}) + \frac{2}{3 \times 4} (\rho_{11} + \rho_{22} + \rho_{33} + 9\rho_{44}) \\ &+ \dots + \frac{2}{(d-2)(d-1)} \left(\sum_{j=1}^{d-2} \rho_{jj} + (d-2)^2 \rho_{d-1d-1} \right) + \frac{2}{(d-1)d} \left(\sum_{j=1}^{d-1} \rho_{jj} + (d-1)^2 \rho_{dd} \right) \\ &= \left(1 + \frac{2}{2 \times 3} + \frac{2}{3 \times 4} + \dots + \frac{2}{(d-1)d} \right) (\rho_{11} + \rho_{22}) + \left(\frac{4 \times 2}{2 \times 3} + \frac{2}{3 \times 4} + \dots \right. \\ &+ \left. \frac{2}{(d-1)d} \right) \rho_{33} + \dots + \left(\frac{2}{(d-2)(d-1)} (d-2)^2 + \frac{2}{(d-1)d} \right) \rho_{d-1d-1} + \frac{2(d-1)}{d} \rho_{dd} \\ &= 2 \sum_{k=1}^{d-1} \frac{1}{k(k+1)} (\rho_{11} + \rho_{22}) + 2 \sum_{k=1}^{d-1} \frac{1}{k(k+1)} \rho_{33} + \dots + \frac{2(d-1)}{d} (\rho_{d-1d-1} + \rho_{dd}) \\ &= \frac{2(d-1)}{d} \sum_{j=1}^d \rho_{jj} = \frac{2(d-1)}{d}. \end{aligned} \quad (\text{F.48})$$

Portanto

$$\sum_{m=1}^{d-1} \mathcal{V}(\rho_A, \Gamma_m^d) = \sum_{m=1}^{d-1} \left(\langle (\Gamma_m^d)^2 \rangle - \langle \Gamma_m^d \rangle^2 \right) = \frac{2(d-1)}{d} - 2P_l(\rho). \quad (\text{F.49})$$

APÊNDICE G – SOBRE OS GRUPOS DE LORENTZ E DE POINCARÉ

Seja Σ um referencial inercial e Σ' um outro referencial inercial que se move em relação à Σ com velocidade constante v , de maneira que as origens O e O' coincidam nos instantes $t = t' = 0$ e que a velocidade relativa v seja paralela ao eixo x de Σ . Então, as coordenadas (x, y, z) no intervalo t , e (x', y', z') no intervalo t' , atribuídas a um mesmo evento por observadores fixos nos referenciais Σ e Σ' , estão relacionadas através de

$$t' = \gamma(t - \beta x/c), \quad t = \gamma(t' + \beta x'/c), \quad (\text{G.1})$$

$$x' = \gamma(x - vt), \quad x = \gamma(x' + vt'), \quad (\text{G.2})$$

$$y' = y, \quad y = y', \quad (\text{G.3})$$

$$z' = z, \quad z = z', \quad (\text{G.4})$$

onde $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$ e $\beta = v/c$. Tais transformações são denominadas de transformações de Lorentz. Há inúmeras maneiras de deduzir tais relações. Por exemplo, Einstein as obteve a partir dos postulados 1. Princípio da relatividade ¹ e 2. Constância da velocidade da luz ² (EINSTEIN; DAVIES, 1932). No entanto, também é possível obter tais transformações assumindo apenas o princípio da relatividade e a estrutura de grupo que tais relações devem satisfazer (PELISSETTO; TESTA, 2015; BERZI; GORINI, 1969). Por outro lado, também é possível obtê-las dentro do contexto de teoria de grupos, buscando transformações que deixam o produto escalar no espaço de Minkowski invariante (WEINBERG, 1995). Logo, dado tal conjunto de transformações, podemos ver que um vetor em \mathbb{R}^3 não se mantém invariante. Por exemplo, se considerarmos o vetor deslocamento infinitesimal entre dois pontos $dx = (dx, dy, dz)$ em Σ e $dx' = (dx', dy', dz')$ em Σ' , então $dx \cdot dx \neq dx' \cdot dx'$.

Proposição 9. *A distância (ou intervalo) entre dois pontos infinitesimais (ou dois eventos), (ct, x, y, z) e $(c(t + dt), x + dx, y + dy, z + dz)$, que se mantém invariante frente as transformações de Lorentz, é dada por:*

$$ds^2 := c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2. \quad (\text{G.5})$$

Demonstração. Dado que

$$dt' = \gamma(dt - \beta dx/c), \quad dx' = \gamma(dx - vdt), \quad dy' = dy, \quad dz' = dz, \quad (\text{G.6})$$

¹Princípio da Relatividade: as leis físicas são as mesmas em todos os referenciais inerciais.

²A velocidade da luz no vácuo é a mesma em todas as direções e em todos os referenciais inerciais, sendo independente do movimento da fonte.

então

$$ds'^2 = c^2 dt'^2 - dx'^2 - dy'^2 - dz'^2 \quad (\text{G.7})$$

$$= c^2 \gamma^2 (dt - \beta dx/c)^2 - \gamma^2 (dx - v dt)^2 - dy^2 - dz^2 \quad (\text{G.8})$$

$$= \gamma^2 (1 - v^2/c^2) c^2 dt^2 - \gamma^2 (1 - \beta^2) dx^2 - dy^2 - dz^2 \quad (\text{G.9})$$

$$= c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \quad (\text{G.10})$$

$$= ds^2. \quad (\text{G.11})$$

□

Assim, o substrato (espaço vetorial) no qual objetos (vetores, etc) estão definidos não é mais o espaço euclidiano (\mathbb{R}^3 com o produto interno usual), sugerindo a seguinte definição:

Definição 18. *O espaço de Minkowski é um espaço vetorial 4-dimensional, \mathbb{R}^4 , dotado de um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ definido a partir de*

$$\langle x, y \rangle = x^0 y^0 - \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \sum_{\mu, \nu} \eta_{\mu\nu} x^\mu y^\nu = x^T \eta y, \quad (\text{G.12})$$

onde $\eta := (\eta_{\mu\nu}) = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ é a métrica de Minkowski e $x := (x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, x, y, z)$ são elementos do espaço de Minkowski, denotado por \mathcal{M} , e são denominados de eventos.

Assim, $ds^2 = \langle dx, dx \rangle$ e as transformações de Lorentz são aquelas que deixam a norma de um evento $x \in \mathcal{M}$ (ou o intervalo entre dois eventos ds^2) invariante:

Definição 19. *Uma transformação de Lorentz Λ é uma transformação linear em \mathcal{M} que preserva seu produto interno, i.e.,*

$$\Lambda : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M} \text{ tal que } x \rightarrow x' = \Lambda x, \forall x, x' \in \mathcal{M} \text{ com } \langle x', x' \rangle = \langle x, x \rangle. \quad (\text{G.13})$$

Ou seja, dois referenciais movendo-se com velocidade relativa constante entre si, atribuem o mesmo valor para a norma de um evento $x \in \mathcal{M}$ (ou o intervalo entre dois eventos ds^2). A métrica definida por $\eta = (1, -1, -1, -1)$ é uma matriz simétrica, i.e., $\eta_{\mu\nu} = \eta_{\nu\mu}$, cuja inversa é ela mesma, i.e., $\eta^{-1} = \eta$. Denotamos $\eta^{-1} := (\eta^{\mu\nu})$ de tal maneira que $\eta^{-1} \eta = I \rightarrow \sum_{\alpha} \eta^{\mu\alpha} \eta_{\alpha\nu} = \delta_{\nu}^{\mu}$. Por exemplo, para $\mu = \nu = 1$, temos que

$$\sum_{\alpha} \eta^{1\alpha} \eta_{\alpha 1} = \eta^{10} \eta_{01} + \eta^{11} \eta_{11} + \eta^{12} \eta_{21} + \eta^{13} \eta_{31} = \eta^{11} \eta_{11} = 1. \quad (\text{G.14})$$

É comum, nesse contexto, a omissão dos símbolos de soma em expressões do tipo $\sum_{\mu, \nu} \eta_{\mu\nu} x^\mu y^\nu$ com o entendimento de que índices repetidos são sempre somados, com

índices gregos μ, ν, \dots variando de 0 à 3 e índices latinos i, j, \dots variando de 1 à 3. Assim, implicitamente temos que

$$\eta_{\mu\nu}x^\mu y^\nu = \sum_{\mu,\nu} \eta_{\mu\nu}x^\mu y^\nu. \quad (\text{G.15})$$

Ademais, as transformações de Lorentz formam um conjunto de transformações lineares que podem ser reescritas na forma

$$t' = \gamma(t - \beta x/c) \rightarrow x'^0 = \Lambda^0_0 x^0 + \Lambda^0_1 x^1 + \Lambda^0_2 x^2 + \Lambda^0_3 x^3 \quad (\text{G.16})$$

$$x' = \gamma(x - vt) \rightarrow x'^1 = \Lambda^1_0 x^0 + \Lambda^1_1 x^1 + \Lambda^1_2 x^2 + \Lambda^1_3 x^3, \quad (\text{G.17})$$

$$y' = y \rightarrow x'^2 = \Lambda^2_0 x^0 + \Lambda^2_1 x^1 + \Lambda^2_2 x^2 + \Lambda^2_3 x^3, \quad (\text{G.18})$$

$$z' = z \rightarrow x'^3 = \Lambda^3_0 x^0 + \Lambda^3_1 x^1 + \Lambda^3_2 x^2 + \Lambda^3_3 x^3, \quad (\text{G.19})$$

ou ainda, mais compactamente: $x'^\mu = \sum_\nu \Lambda^\mu_\nu x^\nu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu$, onde a matriz $\Lambda := (\Lambda^\mu_\nu)$ neste caso é dada por

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (\text{G.20})$$

de modo que é possível observar que

$$\Lambda^0_0 = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \geq 1, \quad (\text{G.21})$$

$$\det \Lambda = \gamma^2 - \gamma^2\beta^2 = 1. \quad (\text{G.22})$$

Além disso, se considerarmos o intervalo de dois eventos tais que $dy = dz = 0$, então

$$ds'^2 = c^2 dt'^2 - dx'^2 = c^2 dt^2 - dx^2 = ds^2, \quad (\text{G.23})$$

ou ainda,

$$(\gamma^2 - \gamma^2\beta^2)(c^2 dt^2 - dx^2) = c^2 dt^2 - dx^2, \quad (\text{G.24})$$

ou seja,

$$\gamma^2 - \gamma^2\beta^2 = 1, \quad (\text{G.25})$$

de modo que a equação acima sugere a seguinte parametrização

$$\cosh \xi = \gamma, \quad \beta = \tanh \xi, \quad (\text{G.26})$$

$$\sinh \xi = \gamma\beta, \quad \xi \in [0, \infty), \quad (\text{G.27})$$

uma vez que $\cosh^2 \xi - \sinh^2 \xi = 1$, e ξ é denominado de *rapidity* (RHODES; SEMON, 2004). De posse da definição de espaço de Minkowski e das observações acima, podemos começar a falar dos objetos definidos sobre essa estrutura:

Definição 20. *Um escalar (ou, um campo escalar) é uma quantidade invariante sob transformações de Lorentz, ou seja, cujo valor é o mesmo em todos os referenciais inerciais. E.g.: carga elétrica de uma partícula, intervalo entre dois eventos, velocidade da luz no vácuo, o produto escalar,*

Definição 21. *Um vetor contravariante é um objeto de 4 componentes $V^\mu = (V^0, V^1, V^2, V^3)$ definido em \mathcal{M} que, sob uma transformação de Lorentz, transforma-se da mesma maneira que um evento x^μ no espaço de Minkowski, i.e.,*

$$V'^\mu = \Lambda^\mu_\nu V^\nu. \quad (\text{G.28})$$

Resumindo, o protótipo de vetor contravariante é o evento $x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3)$.

Assim, o produto escalar entre dois vetores V^μ, W^ν que pertencem ao espaço de Minkowski é dado por

$$\langle V, W \rangle = \eta_{\mu\nu} V^\mu W^\nu = V^0 W^0 - V^1 W^1 - V^2 W^2 - V^3 W^3, \quad (\text{G.29})$$

sendo um escalar e, portanto, invariante frente à transformações de Lorentz.

Definição 22. *Um vetor covariante V_μ é definido pela lei de transformação $V'_\mu = \Lambda_\mu^\nu V_\nu$, onde (Λ_μ^ν) é a inversa de (Λ^μ_ν) ³.*

Agora, como em notação matricial, temos

$$\langle x, y \rangle = x^T \eta y, \quad (\text{G.30})$$

$$\langle x', y' \rangle = x'^T \eta y' \quad (\text{G.31})$$

então

$$ds'^2 = \langle dx', dx' \rangle = dx'^T \eta dx' = dx^T \eta dx = \langle dx, dx \rangle = ds^2 \quad (\text{G.32})$$

³Na realidade, (Λ_μ^ν) é a transposta inversa de (Λ^μ_ν) (LEMOS, 2007)

ou seja,

$$dx'^T \eta dx' = dx^T \Lambda^T \eta \Lambda dx = dx^T \eta dx \quad (\text{G.33})$$

que implica em

$$\Lambda^T \eta \Lambda = \eta. \quad (\text{G.34})$$

Já em notação indicial, temos

$$ds'^2 = \eta_{\mu\nu} dx'^{\mu} dx'^{\nu} = \eta_{\alpha\beta} dx^{\alpha} dx^{\beta} = ds^2, \quad (\text{G.35})$$

temos que

$$\eta_{\mu\nu} dx'^{\mu} dx'^{\nu} = \eta_{\mu\nu} \Lambda^{\mu}_{\alpha} \Lambda^{\nu}_{\beta} dx^{\alpha} dx^{\beta} = \eta_{\alpha\beta} dx^{\alpha} dx^{\beta}, \quad (\text{G.36})$$

ou seja,

$$\eta_{\mu\nu} \Lambda^{\mu}_{\alpha} \Lambda^{\nu}_{\beta} = \eta_{\alpha\beta}. \quad (\text{G.37})$$

A equação $\Lambda^T \eta \Lambda = \eta$ pode ser usada para definir as transformações Lorentz ⁴. Além disso, as principais propriedades das transformações de Lorentz podem ser inferidas a partir da equação acima. Ademais, é possível mostrar que as transformações de Lorentz formam um grupo (TUNG, 1985), denotado por \mathcal{L} . Isto é,

1. Dados Λ_1, Λ_2 então $\Lambda_3 := \Lambda_2 \Lambda_1$ também é uma transformação de Lorentz.
2. $\Lambda_3(\Lambda_2 \Lambda_1) = (\Lambda_3 \Lambda_2) \Lambda_1$.
3. A identidade é uma transformação de Lorentz: $I = \Lambda(v = 0)$.
4. A inversa também é uma transformação de Lorentz: $\Lambda^{-1}(v) = \Lambda(-v)$.

Pela estrutura de grupo, o produto de duas transformações de Lorentz é também uma transformação de Lorentz $\Lambda_3 = \Lambda_2 \Lambda_1$. No entanto, tais transformações, em geral, não irão envolver apenas "boosts", mas também rotações. Por exemplo, se Λ_1, Λ_2 são boosts em direções diferentes, então Λ_3 também pode ser construído a partir de uma rotação e um único boost (R.FERRARO; THIBEAULT, 1999):

$$\Lambda_3 = \Lambda_2 \Lambda_1 = R \Lambda, \quad (\text{G.38})$$

onde R é uma matriz de rotação. Para ver isso, consideremos um boost ao longo de x

⁴No entanto, como veremos, ela define uma classe mais geral de transformações denominadas de transformações de Poincaré.

e outro ao longo de y

$$\Lambda_1 = \begin{pmatrix} \gamma_1 & -\gamma_1\beta_1 & 0 & 0 \\ -\gamma_1\beta_1 & \gamma_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \Lambda_2 = \begin{pmatrix} \gamma_2 & 0 & -\gamma_2\beta_2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\gamma_2\beta_2 & 0 & \gamma_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (\text{G.39})$$

de modo que

$$\Lambda_2\Lambda_1 = \begin{pmatrix} \gamma_2\gamma_1 & -\gamma_2\gamma_1\beta_1 & -\gamma_2\beta_2 & 0 \\ -\gamma_1\beta_1 & \gamma_1 & 0 & 0 \\ -\gamma_2\gamma_1\beta_2 & \gamma_2\gamma_1\beta_2\beta_1 & \gamma_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (\text{G.40})$$

sendo possível observar que o produto $\Lambda_2\Lambda_1$ não é simétrico, não sendo possível ver que tal produto representa uma transformação de Lorentz de maneira tão direta assim. Por outro lado, dado $\Lambda_2\Lambda_1 = R(\phi)\Lambda$, onde $R(\phi)$ é uma matriz de rotação ao longo do eixo z :

$$R(\phi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ 0 & -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (\text{G.41})$$

então

$$\Lambda = R^{-1}\Lambda_2\Lambda_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & -\sin \phi & 0 \\ 0 & \sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_2\gamma_1 & -\gamma_2\gamma_1\beta_1 & -\gamma_2\beta_2 & 0 \\ -\gamma_1\beta_1 & \gamma_1 & 0 & 0 \\ -\gamma_2\gamma_1\beta_2 & \gamma_2\gamma_1\beta_2\beta_1 & \gamma_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{G.42})$$

$$= \begin{pmatrix} \gamma_2\gamma_1 & -\gamma_2\gamma_1\beta_1 & -\gamma_2\beta_2 & 0 \\ -\gamma_1\beta_1 \cos \phi + \gamma_2\gamma_1\beta_2 \sin \phi & \gamma_1 \cos \phi - \gamma_2\gamma_1\beta_2\beta_1 \sin \phi & -\gamma_2 \sin \phi & 0 \\ -\gamma_1\beta_1 \sin \phi - \gamma_2\gamma_1\beta_2 \cos \phi & \gamma_1 \sin \phi + \gamma_2\gamma_1\beta_2\beta_1 \cos \phi & \gamma_2 \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (\text{G.43})$$

Agora, temos liberdade para impor que a matriz Λ seja simétrica, uma vez que temos um parâmetro ϕ livre, que pode ser determinado a partir da seguinte imposição:

$$-\gamma_2 \sin \phi = \gamma_1 \sin \phi + \gamma_2\gamma_1\beta_2\beta_1 \cos \phi, \quad (\text{G.44})$$

ou seja,

$$\tan \phi = -\frac{\gamma_2 \gamma_1 \beta_2 \beta_1}{\gamma_2 + \gamma_1}, \quad (\text{G.45})$$

$$\sin \phi = -\frac{\gamma_2 \gamma_1 \beta_2 \beta_1}{\gamma_2 \gamma_1 + 1}, \quad (\text{G.46})$$

$$\cos \phi = \frac{\gamma_2 + \gamma_1}{\gamma_2 \gamma_1 + 1}, \quad (\text{G.47})$$

fixando assim a rotação. Ademais, podemos perceber que

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \gamma_2 \gamma_1 & -\gamma_2 \gamma_1 \beta_1 & -\gamma_2 \beta_2 & 0 \\ -\gamma_2 \gamma_1 \beta_1 & 1 + \frac{\gamma_2^2 \gamma_1^2 \beta_1^2}{\gamma_2 \gamma_1 + 1} & \frac{\gamma_2^2 \gamma_1 \beta_2 \beta_1}{\gamma_2 \gamma_1 + 1} & 0 \\ -\gamma_2 \beta_2 & \frac{\gamma_2^2 \gamma_1 \beta_2 \beta_1}{\gamma_2 \gamma_1 + 1} & \frac{\gamma_1 (\gamma_2 + \gamma_1)}{\gamma_2 \gamma_1 + 1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (\text{G.48})$$

é uma matriz simétrica e que as rotações fazem parte do grupo de Lorentz. Uma outra maneira de ver que rotações também pertencem à \mathcal{L} é a partir do fato de que rotações espaciais também preservam o produto interno $\langle x, y \rangle$. Logo, o grupo de rotações espaciais é um subgrupo do grupo de Lorentz.

Calculando o determinante de $\Lambda^T \eta \Lambda = \eta$ e usando o fato de que $\det \eta = -1$, então

$$-1 = \det \eta = \det (\Lambda^T \eta \Lambda) = \det \Lambda^T \det \eta \det \Lambda \quad (\text{G.49})$$

$$= \det \Lambda (-1) \det \Lambda, \quad (\text{G.50})$$

ou seja, $\det \Lambda = \pm 1$. Também, a partir de $\eta_{\mu\nu} \Lambda^\mu_\alpha \Lambda^\nu_\beta = \eta_{\alpha\beta}$, e olhando para os elementos $\alpha = \beta = 0$,

$$1 = \eta_{00} = \eta_{\mu\nu} \Lambda^\mu_0 \Lambda^\nu_0 \quad (\text{G.51})$$

$$= \eta_{00} \Lambda^0_0 \Lambda^0_0 + \eta_{11} \Lambda^1_0 \Lambda^1_0 + \eta_{22} \Lambda^2_0 \Lambda^2_0 + \eta_{33} \Lambda^3_0 \Lambda^3_0 \quad (\text{G.52})$$

$$= \Lambda^0_0 \Lambda^0_0 - \Lambda^1_0 \Lambda^1_0 - \Lambda^2_0 \Lambda^2_0 - \Lambda^3_0 \Lambda^3_0, \quad (\text{G.53})$$

ou seja,

$$(\Lambda^0_0)^2 = 1 + (\Lambda^1_0)^2 + (\Lambda^2_0)^2 + (\Lambda^3_0)^2 \geq 1, \quad (\text{G.54})$$

que implica em $\Lambda^0_0 \geq 1$ ou $\Lambda^0_0 \leq -1$. Assim, podemos usar as condições $\det \Lambda = \pm 1$, $\Lambda^0_0 \geq 1$ e $\Lambda^0_0 \leq -1$ para classificar/dividir o grupo de Lorentz (LEMOS, 2007):

- $\mathcal{L}_+ = \{\Lambda \in \mathcal{L} : \det \Lambda = 1\}$ é o conjunto das transformações de Lorentz próprias.
- $\mathcal{L}^\dagger = \{\Lambda \in \mathcal{L} : \Lambda^0_0 \geq 1\}$ é o conjunto das transformações de Lorentz ortócronas,

ou seja, que preservam o sentido do tempo.

- $\mathcal{L}_+^\uparrow = \mathcal{L}_+ \cap \mathcal{L}^\uparrow = \{\Lambda \in \mathcal{L} : \det \Lambda = 1, \Lambda^0_0 \geq 1\}$ forma um subgrupo do grupo de Lorentz, denominado de grupo restrito de Lorentz (ou grupo homogêneo de Lorentz).
- $\mathcal{L}_-^\uparrow = \{\Lambda \in \mathcal{L} : \det \Lambda = -1, \Lambda^0_0 \geq 1\}$.
- $\mathcal{L}_+^\downarrow = \{\Lambda \in \mathcal{L} : \det \Lambda = 1, \Lambda^0_0 \leq -1\}$.
- $\mathcal{L}_-^\downarrow = \{\Lambda \in \mathcal{L} : \det \Lambda = -1, \Lambda^0_0 \leq -1\}$.

Dos conjuntos $\mathcal{L}_+^\uparrow, \mathcal{L}_-^\uparrow, \mathcal{L}_+^\downarrow, \mathcal{L}_-^\downarrow$, apenas \mathcal{L}_+^\uparrow forma um subgrupo⁵. Se considerarmos transformações de Lorentz infinitesimais, tais transformações são necessariamente próprias e ortócronas, pois diferem infinitesimalmente da matriz identidade, que é própria e ortócrona, e uma variação infinitesimal não pode causar um salto finito tanto em Λ^0_0 , quanto em $\det \Lambda$. Logo, somente as transformações de Lorentz restritas e finitas podem ser construídas a partir de sucessivas transformações de Lorentz infinitesimais. Além disso, se observarmos que

$$\Lambda_p := \text{diag}(1, -1, -1, -1) \in \mathcal{L}_-^\uparrow, \quad (\text{G.55})$$

$$\Lambda_t := \text{diag}(-1, 1, 1, 1) \in \mathcal{L}_-^\downarrow, \quad (\text{G.56})$$

$$\Lambda_{pt} := \Lambda_p \Lambda_t = \text{diag}(-1, -1, -1, -1) \in \mathcal{L}_+^\downarrow, \quad (\text{G.57})$$

de modo que $\mathcal{L}_-^\uparrow = \Lambda_p \mathcal{L}_+^\uparrow, \mathcal{L}_-^\downarrow = \Lambda_t \mathcal{L}_+^\uparrow, \mathcal{L}_+^\downarrow = \Lambda_{pt} \mathcal{L}_+^\uparrow$, ou seja, $\mathcal{L}_-^\uparrow, \mathcal{L}_+^\downarrow, \mathcal{L}_-^\downarrow$ são os cosets⁶ do grupo de Lorentz com respeito ao subgrupo \mathcal{L}_+^\uparrow e, portanto, o grupo de Lorentz pode ser decomposto da seguinte maneira (OHLSSON, 2011)

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_+^\uparrow \cup \mathcal{L}_-^\uparrow \cup \mathcal{L}_+^\downarrow \cup \mathcal{L}_-^\downarrow. \quad (\text{G.58})$$

Logo, o estudo do grupo de Lorentz se reduz ao estudo do subgrupo \mathcal{L}_+^\uparrow levando em conta reversões espaço-temporais. No entanto, as transformações de Lorentz não são o conjunto de transformações mais geral possível que satisfaz (i) $\eta_{\mu\nu} dx'^\mu dx'^\nu = \eta_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta$; (ii) $\Lambda^T \eta \Lambda = \eta$. Para ver isso, é possível reescrever a equação (i) como

$$\eta_{\mu\nu} \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\beta} dx^\alpha dx^\beta = \eta_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta, \quad (\text{G.59})$$

ou seja,

$$\eta_{\mu\nu} \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\beta} = \eta_{\alpha\beta}. \quad (\text{G.60})$$

⁵ $H \subset G$ é um subgrupo do grupo G se for um grupo sob a mesma regra de multiplicação de G .

⁶Para um subgrupo H de G e $\forall g \in G$ tal que $g \notin H$, então gH e Hg são denominados de cosets de H em G .

Diferenciando a relação acima em relação à x^σ , temos que

$$\eta_{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x^\sigma} \left(\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\beta} \right) = \eta_{\mu\nu} \left(\frac{\partial^2 x'^\mu}{\partial x^\sigma \partial x^\alpha} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\beta} + \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial^2 x'^\nu}{\partial x^\sigma \partial x^\beta} \right) = 0 \quad (\text{G.61})$$

que pode ser reescrita como

$$2\eta_{\mu\nu} \frac{\partial^2 x'^\mu}{\partial x^\sigma \partial x^\alpha} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\beta} = 0, \quad (\text{G.62})$$

Como η e $\partial x'^\nu / \partial x^\beta$ possuem inversas, resta que

$$\frac{\partial^2 x'^\mu}{\partial x^\sigma \partial x^\alpha} = 0. \quad (\text{G.63})$$

A solução dessa equação diferencial é

$$x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu + a^\mu, \quad (\text{G.64})$$

onde a^μ é um 4-vetor constante e pode ser identificado como uma translação, enquanto Λ^μ_ν representa as componentes de uma matriz constante (com respeito as coordenadas) e pode ser identificada com as transformações de Lorentz. Tal conjunto de transformações forma um grupo, e é denominado de grupo de Poincaré (SEXL; URBANTKE, 2001), sendo a união do grupo de Lorentz com o grupo de translações:

$$\mathcal{P} = \{(\Lambda, a) : x^\mu \rightarrow x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu + a^\mu\}. \quad (\text{G.65})$$

$$\mathcal{P}_+^\uparrow = \{(\Lambda, a) : x^\mu \rightarrow x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu + a^\mu, \text{ com } \Lambda \in \mathcal{L}_+^\uparrow\} \quad (\text{G.66})$$

Para ver a regra de composição de tal grupo, consideremos duas transformações sucessivas: $x^\mu \rightarrow x'^\mu \rightarrow x''^\mu$, ou seja,

$$x''^\mu = \bar{\Lambda}^\mu_\nu x'^\nu + a'^\mu \quad (\text{G.67})$$

$$= \bar{\Lambda}^\mu_\nu (\Lambda^\nu_\alpha x^\alpha + a^\nu) + a'^\mu \quad (\text{G.68})$$

$$= \underbrace{\bar{\Lambda}^\mu_\nu \Lambda^\nu_\alpha}_{=\bar{\Lambda}^\mu_\alpha} x^\alpha + \underbrace{\bar{\Lambda}^\mu_\nu a^\nu + a'^\mu}_{=A^\mu}, \quad (\text{G.69})$$

ou seja, se identificarmos $T(\Lambda, a)$ como uma transformação de Poincaré tal que $x' = T(\Lambda, a)x$, então a regra de composição do grupo é dada por

$$T(\Lambda_1, a_1)T(\Lambda_2, a_2) = T(\Lambda_1\Lambda_2, \Lambda_1 a_2 + a_1). \quad (\text{G.70})$$

Além disso, o elemento identidade e a inversa são caracterizadas por

$$T(\Lambda = I, a = 0) = T(I, 0), \quad (\text{G.71})$$

$$T^{-1}(\Lambda, a) = T(\Lambda^{-1}, -\Lambda^{-1}a). \quad (\text{G.72})$$

Ademais, tanto o grupo de Lorentz quanto o grupo de Poincaré são exemplos de grupos contínuos⁷, cujos elementos são parametrizados por números reais (ou complexos). Grupos contínuos são tais que os parâmetros que determinam o elemento composto são funções analíticas dos parâmetros dos elementos sendo compostos. Isto é, dado um grupo G que pode ser parametrizado por $x = (x_1, \dots, x_n)$, então $g(x'') = g(x)g(x')$ de modo que x'' é uma função analítica de x e x' , i.e., $x'' = f(x, x')$, onde f é uma função analítica. Nesses casos, é possível descrever todo o grupo olhando para elementos infinitesimalmente próximos ao elemento identidade. Particularmente, dada a transformação de Lorentz ao longo do eixo x :

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh \xi & -\sinh \xi & 0 & 0 \\ -\sinh \xi & \cosh \xi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (\text{G.73})$$

de modo que ξ faz o papel do parâmetro. Assim, se considerarmos

$$\beta_{inf} = \frac{v}{c} \ll 1 \implies \cosh \xi_{inf} = \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta_{inf}^2}} \approx 1, \quad (\text{G.74})$$

$$\implies \sinh \xi_{inf} \approx \xi_{inf} \quad (\text{G.75})$$

de modo que

$$\Lambda_{inf} \approx \begin{pmatrix} 1 & -\xi_{inf} & 0 & 0 \\ -\xi_{inf} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{G.76})$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \xi_{inf} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{G.77})$$

$$= I_{4 \times 4} - \omega_{10} M^{10}, \quad (\text{G.78})$$

⁷Na realidade, tanto o grupo de Lorentz quanto o grupo de Poincaré são exemplos de grupos de Lie. Um grupo de Lie é um grupo contínuo que possui estrutura de uma Variedade Diferenciável.

onde $\omega_{10} = \xi_{inf}$ e a matriz M^{10} é um dos geradores do grupo de Poincaré (ou de Lorentz) (OHNUKI, 1988), no sentido de que podemos gerar qualquer transformação de Poincaré finita a partir de sucessivas transformações infinitesimais de Poincaré. Ademais, podemos inferir que a forma das transformações infinitesimais de maneira geral são dada por

$$\Lambda_{inf} = I_{4 \times 4} + \Sigma = I_{4 \times 4} - \omega_{\mu\nu} M^{\mu\nu}, \quad (\text{G.79})$$

enquanto as transformações finitas são descritas por

$$\Lambda = e^{\Sigma} = e^{-\omega_{\mu\nu} M^{\mu\nu}}, \quad (\text{G.80})$$

onde $\omega_{\mu\nu}$ são parâmetros infinitesimais. Assim,

$$\Lambda^{-1} = e^{-\Sigma}, \quad (\text{G.81})$$

$$\Lambda^T = (e^{\Sigma})^T = e^{\Sigma^T}, \quad (\text{G.82})$$

de modo que

$$\Lambda^T \eta \Lambda = \eta \implies \eta \Lambda^T \eta = \Lambda^{-1} \implies \eta e^{\Sigma^T} \eta = e^{-\Sigma}, \quad (\text{G.83})$$

mas

$$e^{\eta \Sigma^T \eta} = I + \eta \Sigma^T \eta + \frac{1}{2!} (\eta \Sigma^T \eta)^2 + \dots \quad (\text{G.84})$$

$$= I + \eta \Sigma^T \eta + \frac{1}{2!} \eta \Sigma^T \eta \eta \Sigma^T \eta^2 + \dots \quad (\text{G.85})$$

$$= I + \eta \Sigma^T \eta + \frac{1}{2!} \eta (\Sigma^T)^2 \eta^2 + \dots \quad (\text{G.86})$$

$$= \eta (I + \Sigma^T + \frac{1}{2!} (\Sigma^T)^2 + \dots) \eta \quad (\text{G.87})$$

$$= \eta e^{\Sigma^T} \eta, \quad (\text{G.88})$$

de modo que

$$\eta e^{\Sigma^T} \eta = e^{\eta \Sigma^T \eta} = e^{-\Sigma} \implies \eta \Sigma^T \eta = -\Sigma \quad (\text{G.89})$$

A partir da condição acima, temos que

$$\Sigma_{0i} = \Sigma_{i0}, \quad (\text{G.90})$$

$$\Sigma_{ij} = -\Sigma_{ji}, \quad (\text{G.91})$$

$$\Sigma_{\mu\mu} = -\Sigma_{\mu\mu}, \quad (\text{G.92})$$

ou seja,

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 0 & \omega_{01} & \omega_{02} & \omega_{03} \\ \omega_{01} & 0 & \omega_{12} & \omega_{13} \\ \omega_{02} & -\omega_{12} & 0 & \omega_{23} \\ \omega_{03} & -\omega_{13} & -\omega_{23} & 0 \end{pmatrix} = \omega_{01} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \omega_{02} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{G.93})$$

$$+ \omega_{03} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \omega_{12} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \omega_{13} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \dots \quad (\text{G.94})$$

$$= \omega_{01}M^{01} + \omega_{02}M^{02} + \dots + \omega_{13}M^{13} + \omega_{23}M^{23}, \quad (\text{G.95})$$

sendo possível identificar que M possui uma parte simétrica, M^{0i} , $i = 1, 2, 3$, e outra parte antissimétrica, M^{ij} , que pode ser identificada com os geradores do grupo de rotações $SO(3)$, enquanto que M^{0i} são os geradores dos boosts de Lorentz. Redefinindo a notação

$$K^i := M^{0i}, \quad J^i := \epsilon_{ijk}M^{jk}, \quad (\text{G.96})$$

verifica-se que os geradores satisfazem as seguintes relações de comutação:

$$[K^i, K^j] = -\epsilon_{ijk}J^k \quad (\text{G.97})$$

$$[J^i, J^j] = \epsilon_{ijk}J^k \quad (\text{G.98})$$

$$[J^i, K^j] = \epsilon_{ijk}K^k. \quad (\text{G.99})$$

As relações acima mostram que os geradores das rotações formam uma álgebra fechada, mostrando que $SO(3)$ é um subgrupo do grupo de Lorentz, enquanto que boosts em direções arbitrárias não formam um subgrupo, pois, como já vimos, eles diferem por uma rotação. Ainda, a partir dessas definições, é possível decompor Σ em termos das matrizes J, K escrevendo

$$\Sigma = \vec{\omega} \cdot \mathbf{J} + \vec{\xi} \cdot \mathbf{K}, \quad (\text{G.100})$$

onde $\vec{\omega}$ é uma rotação em torno do eixo $\hat{\omega}$ e $\vec{\xi}$ representa um boost na direção $\hat{\xi}$. Assim,

$$\Lambda = e^{-\vec{\omega} \cdot \mathbf{J} - \vec{\xi} \cdot \mathbf{K}} \quad (\text{G.101})$$

representa um elemento qualquer do grupo de Lorentz. Por exemplo, consideremos

um único boost numa direção arbitrária. Para isso,

$$\vec{\omega} = 0 \quad \text{e} \quad \vec{\xi} = \hat{\beta} \tanh^{-1} \beta = \hat{\beta} \xi, \quad (\text{G.102})$$

de modo que obtemos

$$\Lambda = e^{-\xi \cdot \mathbf{K}} = I_{4 \times 4} - (\hat{\beta} \cdot \mathbf{K}) \xi + \frac{1}{2!} (\hat{\beta} \cdot \mathbf{K})^2 \xi^2 + \dots \quad (\text{G.103})$$

$$= I_{4 \times 4} - (\hat{\beta} \cdot \mathbf{K}) \left(\xi + \frac{1}{3!} \xi^3 + \dots \right) + (\hat{\beta} \cdot \mathbf{K})^2 \left(\frac{1}{2!} \xi^2 + \frac{1}{4!} \xi^4 + \dots \right) \quad (\text{G.104})$$

$$= I_{4 \times 4} - (\hat{\beta} \cdot \mathbf{K}) \sinh \xi + (\hat{\beta} \cdot \mathbf{K})^2 (\cosh \xi - 1) \quad (\text{G.105})$$

$$= I_{4 \times 4} - \gamma (\beta_1 K^1 + \beta_2 K^2 + \beta_3 K^3) + \frac{\gamma - 1}{\beta^2} \left(\sum_i \beta_i^2 (K^i)^2 + \sum_{i \neq j} \beta_i \beta_j K_i K_j \right) \quad (\text{G.106})$$

$$= \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma \beta_1 & -\gamma \beta_2 & -\gamma \beta_3 \\ -\gamma \beta_1 & 1 + \frac{(\gamma-1)}{\beta^2} \beta_1^2 & \frac{(\gamma-1)}{\beta^2} \beta_1 \beta_2 & \frac{(\gamma-1)}{\beta^2} \beta_1 \beta_3 \\ -\gamma \beta_2 & \frac{(\gamma-1)}{\beta^2} \beta_1 \beta_2 & 1 + \frac{(\gamma-1)}{\beta^2} \beta_2^2 & \frac{(\gamma-1)}{\beta^2} \beta_2 \beta_3 \\ -\gamma \beta_3 & \frac{(\gamma-1)}{\beta^2} \beta_1 \beta_3 & \frac{(\gamma-1)}{\beta^2} \beta_2 \beta_3 & 1 + \frac{(\gamma-1)}{\beta^2} \beta_3^2 \end{pmatrix}. \quad (\text{G.107})$$