

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA MARIA
CENTRO DE CIÊNCIAS NATURAIS E EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Andressa Paola Cordeiro

RETRATOS DE FASE DE UMA FAMÍLIA DE SISTEMAS
QUADRÁTICOS PLANARES INTEGRÁVEIS COM DUAS
PARÁBOLAS INVARIANTES

Santa Maria, RS
2021

Andressa Paola Cordeiro

RETRATOS DE FASE DE UMA FAMÍLIA DE SISTEMAS
QUADRÁTICOS PLANARES INTEGRÁVEIS COM DUAS PARÁBOLAS
INVARIANTES

Dissertação apresentada ao Curso de Pós-Graduação em Matemática, da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM, RS), como requisito parcial para a obtenção do grau de **Mestre em Matemática**.

Orientador: Prof. Dr. Maurício Fronza da Silva

Santa Maria, RS
2021

This study was financed in part by the Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Finance Code 001

Cordeiro, Andressa Paola

Retratos de fase de uma família de sistemas quadráticos planares integráveis com duas parábolas invariantes / Andressa Paola Cordeiro.- 2021.

71 p.; 30 cm

Orientador: Maurício Fronza da Silva

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Santa Maria, Centro de Ciências Naturais e Exatas, Programa de Pós-Graduação em Matemática, RS, 2021

1. Equações Diferenciais Ordinárias 2. Teorema de Grobman-Hartman 3. Teorema da Variedade Estável Local 4. Sistemas quadráticos planares 5. Retratos de fase I. Silva, Maurício Fronza da II. Título.

Sistema de geração automática de ficha catalográfica da UFSM. Dados fornecidos pelo autor(a). Sob supervisão da Direção da Divisão de Processos Técnicos da Biblioteca Central. Bibliotecária responsável Paula Schoenfeldt Patta CRB 10/1728.

Declaro, ANDRESSA PAOLA CORDEIRO, para os devidos fins e sob as penas da lei, que a pesquisa constante neste trabalho de conclusão de curso (Dissertação) foi por mim elaborada e que as informações necessárias objeto de consulta em literatura e outras fontes estão devidamente referenciadas. Declaro, ainda, que este trabalho ou parte dele não foi apresentado anteriormente para obtenção de qualquer outro grau acadêmico, estando ciente de que a inveracidade da presente declaração poderá resultar na anulação da titulação pela Universidade, entre outras consequências legais.

Andressa Paola Cordeiro

**RETRATOS DE FASE DE UMA FAMÍLIA DE SISTEMAS QUADRÁTICOS
PLANARES INTEGRÁVEIS COM DUAS PARÁBOLAS INVARIANTES**

Dissertação apresentada ao Curso de Pós-Graduação em Matemática, da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM, RS), como requisito parcial para a obtenção do grau de **Mestre em Matemática**.


Aprovada em 07 de maio de 2021:



Maurício Fronza da Silva (UFSM)
(Presidente/Orientador)



Alexandre Tavares Baraviera (UFRGS)



Jackson Itikawa (UNIR)

Santa Maria, RS
2021

Agradecimentos

Agradeço À quem cuida de cada passo meu e irrestritamente me protege.

Agradeço à minha mãe. Seu amor incondicional, seu apoio e sua força me inspiram a ir mais longe e a me dedicar para conquistar tudo que almejo. Você é meu guia e meu porto seguro.

Agradeço ao professor Maurício por toda a paciência, atenção e preocupação, antes e durante o período de isolamento social. Sem teu apoio inicial, possivelmente meus passos teriam trilhado outro caminho que não a finalização desses dois anos de aprendizado e estudo árduo.

Meu mais sincero agradecimento à professora Larissa, que me conquistou com suas demonstrações em aula e primeiro me incentivou à pós-graduação. Aos professores Wilian, Emerson e tantos outros que fizeram do meu período de graduação na Universidade Tecnológica Federal do Paraná anos de muito aprendizado e muita alegria. Vocês são grandes inspirações, como professores de Matemática e como pessoas. Vinícius (primeiro colega com quem conversei e, por certo, o mais esquisito de todos), contigo descobri que dedicação faz mais matemáticos do que puro talento, obrigada por isso.

Agradeço à todos os professores da Universidade Federal de Santa Maria que fizeram parte da minha caminhada. Amigos de corrida, nunca pensei que sentiria tanta saudade de vocês!

Agradeço às Luizas, Danlei, Matheus, Arthur e todos os demais amigos do PPG-MAT, pelos momentos de descontração, estudo, discussão de atividades e, principalmente, de apoio irrestrito. À Adina, cuja amizade foi um porto seguro em um momento tão difícil quanto o que vivemos nos anos de 2020 e 2021. Meninas, vocês são incríveis, muito obrigada por tudo!

Agradeço, por fim, à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - CAPES, pelo apoio financeiro para a realização desse trabalho.

*“If you can’t excell with talent,
triumph with effort.”*
-Dave Weinbaum Quotes

RESUMO

RETRATOS DE FASE DE UMA FAMÍLIA DE SISTEMAS QUADRÁTICOS PLANARES INTEGRÁVEIS COM DUAS PARÁBOLAS INVARIANTES

AUTOR: Andressa Paola Cordeiro

ORIENTADOR: Maurício Fronza da Silva

Neste trabalho demonstramos o Teorema de Grobman-Hartman e o Teorema da Variedade Estável Local, resultados clássicos no estudo do comportamento local das soluções de equações diferenciais não lineares. Em seguida, apresentamos o retrato de fase global no disco de Poincaré de todos os sistemas diferenciais quadráticos planares com duas parábolas invariantes dadas por equações $f_1 = 0, f_2 = 0$ e integral primeira da forma $H = f_1^\alpha f_2^\beta$, onde α, β são constantes reais.

Palavras-Chave: Equações Diferenciais Ordinárias. Teorema de Grobman-Hartman. Teorema da Variedade Estável Local. Sistemas quadráticos planares. Retratos de fase. Parábolas invariantes.

ABSTRACT

PHASE PORTRAITS OF A FAMILY OF INTEGRABLE QUADRATIC PLANAR SYSTEMS WITH TWO INVARIANT PARABOLAS

AUTHOR: Andressa Paola Cordeiro

ADVISOR: Maurício Fronza da Silva

In this work we prove the Grobman-Hartman Theorem and the Local Stable Manifold Theorem, classical results in the study of the local behavior of the solutions of nonlinear differential equations. Then we provide the global phase portrait in the Poincaré disc of all quadratic planar differential systems with two invariant parabolas given by equations $f_1 = 0, f_2 = 0$ and a first integral of the form $H = f_1^\alpha f_2^\beta$, where α, β are real constants.

Keywords: Ordinary Differential Equations. Grobman-Hartman Theorem. Local Stable Manifold Theorem. Quadratic planar system. Phase portraits. Invariant parabolas.

Sumário

1	INTRODUÇÃO	10
2	RESULTADOS PRELIMINARES	12
2.1	Resultados de Análise no \mathbb{R}^n	12
2.2	Resultados de Equações Diferenciais Ordinárias	13
2.3	O Teorema da Função Implícita em Espaços de Banach	16
3	TEOREMA DE GROBMAN-HARTMAN	19
3.1	Conjugação topológica	20
3.2	Resultados auxiliares	22
3.3	Demonstração do Teorema de Grobman-Hartman	34
4	TEOREMA DA VARIEDADE ESTÁVEL LOCAL	39
4.1	Primeiras propriedades da variedade estável	40
4.2	O Teorema da Variedade Estável Local	41
5	ARTIGO: PHASE PORTRAITS OF A FAMILY OF INTEGRABLE QUADRATIC SYSTEMS WITH TWO INVARIANT PARABOLAS .	49
6	CONCLUSÃO	69
	REFERÊNCIAS	70

1 Introdução

As Equações Diferenciais modelam um grande número de leis gerais e eventos da Biologia, Economia, Física e, claro, da própria Matemática. Seu estudo foi motivado por problemas dessas duas últimas áreas em especial, inicialmente utilizando métodos do Cálculo Diferencial e Integral. Entretanto, o que se percebeu é que não é possível obter fórmulas explícitas para a solução da maior parte das equações diferenciais não lineares. Mesmo em muitos casos onde isso é possível a interpretação das soluções não é clara.

Dessa forma, ao perceber-se a dificuldade de buscar soluções explícitas, o estudo de Equações Diferenciais Ordinárias se ramificou na chamada Teoria Qualitativa, que visa descrever o comportamento qualitativo das soluções de um sistema diferencial sem necessariamente resolvê-lo explicitamente. Tais sistemas podem ter tantas dimensões e comportamentos quanto se precisar (ou imaginar). De especial interesse para esse trabalho, são os sistemas polinomiais planares, ou seja, aqueles determinados por funções polinomiais de duas variáveis, usualmente x e y , onde ambas dependem da variável t correspondente ao tempo. Mesmo este sendo um caso particular das equações diferenciais ordinárias em geral, trata-se de uma família abrangente de sistemas que ainda não foi totalmente estudada.

Para dimensionarmos sua importância, basta tomarmos como exemplo o 16º Problema de Hilbert, que propõe determinar o número de ciclos limite de um sistema diferencial polinomial planar em função do grau do polinômio que o define e estudar as posições relativas entre tais ciclos limites, problema ainda em aberto na Matemática.

Podemos nos restringir ainda mais e analisar apenas sistemas diferenciais quadráticos planares integráveis, subfamília dos sistemas diferenciais polinomiais planares que tem sido intensamente estudada, mas cuja classificação topológica é ainda um problema em aberto. Nosso trabalho estuda uma subfamília dos sistemas planares integráveis que possuem duas parábolas invariantes.

Seguindo as normas estabelecidas pela UFSM para o tipo de trabalho que desenvolvemos, esse texto está dividido em duas partes. A primeira delas consiste nos Capítulos 2 a 4, nos quais são apresentados os resultados centrais utilizados para o estudo local dos pontos singulares hiperbólicos, a saber, os teoremas de Grobman-Hartman e da Variedade Estável Local.

A segunda parte é formada pelo Capítulo 5. Nela aplicamos resultados dos capítulos anteriores, bem como as técnicas de Compactificação de Poincaré e de Blow-up, para estudar uma família específica de campos quadráticos. Mais precisamente, apresentamos a classificação topológica dos retratos de fase no disco de Poincaré de todos os campos

planares quadráticos que possuem duas parábolas dadas por equações $f_1 = 0, f_2 = 0$ como curvas algébricas invariantes, e que possuem integral primeira da forma $H = f_1^\alpha f_2^\beta$, sendo $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ constantes. Até onde sabemos, este resultado ainda não é conhecido.

2 Resultados preliminares

Neste capítulo são estabelecidos notação, conceitos e resultados fundamentais para o desenvolvimento dos capítulos seguintes. Inicialmente fixamos alguma notação e apresentamos resultados relacionados, em especial, à Análise e à Topologia. Em seguida, pontuamos conceitos e resultados pertinentes à Teoria Qualitativa de Equações Diferenciais Ordinárias úteis a este trabalho. Na última seção apresentamos o Teorema da Função Implícita em Espaços de Banach. Sendo esta uma teoria preliminar para os demais capítulos, os resultados aqui abordados serão somente enunciados.

2.1 Resultados de Análise no \mathbb{R}^n

O objetivo dessa seção é familiarizar o leitor com a notação, as definições e os resultados básicos que serão utilizados ao longo de todo o texto. As referências aqui utilizadas são Lima (2018), Munkres (1974), Munkres (1984) e Barros-Neto (1973).

Denotaremos por $M_n(K)$ o conjunto das matrizes quadradas de dimensão n^2 com coeficientes em K , onde K será usualmente \mathbb{R} ou \mathbb{C} . Para cada norma $|\cdot|$ em \mathbb{R}^n , definimos uma norma em $M_n(K)$ por

$$\|A\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|,$$

para toda $A \in M_n(K)$.

Fixada $A \in M_n(K)$, se λ é autovalor de A , sabemos que e^λ é autovalor de e^A . Mais ainda, $\|e^A\| \leq e^{\|A\|}$ e $\frac{d}{dt}e^{At} = Ae^{At} \in M_n(K)$. Além disso, se $B \in M_n(K)$ e existe $P \in M_n(\mathbb{R})$ inversível satisfazendo $A = PBP^{-1}$, então $e^A = Pe^B P^{-1}$.

Sejam agora $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto contendo a origem e $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ uma função qualquer. Dizemos que f é da ordem de x , e escrevemos $f(x) = o(\|x\|)$, se

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\|f(x)\|}{\|x\|} = 0.$$

Apresentamos agora alguns resultados relacionados a continuidade que serão úteis no decorrer do trabalho. O resultado que segue é usado na verificação de que uma função contínua inversível é um homeomorfismo.

Teorema 2.1.1. *Seja $f : X \rightarrow Y$ uma função contínua e bijetora. Se X é compacto e Y é um espaço de Hausdorff, então f é um homeomorfismo.*

Teorema 2.1.2 (Teorema de Invariância do Domínio). *Se $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ é contínua e injetora, com $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto, então $f(U)$ é aberto em \mathbb{R}^n .*

Dentre muitos resultados relacionados com funções diferenciáveis, destacamos aqui a Desigualdade do Valor Médio. Ela nos garante que, sob certas hipóteses, a limitação da derivada implica em função lipschitziana.

Teorema 2.1.3 (Desigualdade do Valor Médio). *Seja $U \subset \mathbb{R}^m$ aberto e convexo. Se $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ é diferenciável, com $\|Df(x)\| \leq M$ para todo $x \in U$, então f é lipschitziana, com $\|f(y) - f(x)\| \leq M\|y - x\|$, para quaisquer $x, y \in U$.*

Introduzimos agora as funções de corte. Para isso, começamos com o conceito de suporte de uma função. Dados X um espaço topológico e $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, definimos o *suporte* de f por

$$\text{supp}(f) = \overline{\{x \in X; f(x) \neq 0\}}.$$

Se $\text{supp}(f)$ for um conjunto compacto, dizemos que f é uma função de suporte compacto.

Observação 2.1.4. *Se $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função de classe C^1 de suporte compacto, então $\|Df(x)\| < \infty$.*

O próximo resultado será diretamente usado na demonstração do Lema 3.2.7 e garante a existência de uma função por vezes chamada de função de corte.

Teorema 2.1.5. *Se K é um subconjunto compacto de \mathbb{R}^n e $\varepsilon > 0$ é um número arbitrário, então existe $\psi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que*

$$0 \leq \psi \leq 1, \quad \text{supp } \psi \subset K + B[0, \varepsilon] \quad \text{e} \quad \psi = 1 \text{ em uma vizinhança de } K.$$

2.2 Resultados de Equações Diferenciais Ordinárias

No que segue apresentamos definições e resultados relacionados a Equações Diferenciais Ordinárias. Mais informações e demonstrações podem ser encontrados em Sotomayor (1979), Viana e Espinar (2020), Perko (2001), Doering e Lopes (2016) e Dumortier, Llibre e Artés (2006), referências utilizadas para esta seção.

Dada $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma função de classe C^k , com $k \geq 1$, definida no aberto $U \subset \mathbb{R}^n$, defina o sistema diferencial

$$x' = f(x). \tag{2.1}$$

Teorema 2.2.1. *Considere o sistema diferencial (2.1).*

- i. Para cada $x \in U$ existe um intervalo aberto I_x , chamado de intervalo maximal, onde está definida a única solução máxima φ_x do sistema (2.1) tal que $\varphi_x(0) = x$;*
- ii. Se $y = \varphi_x(t)$ e $t \in I_x$, então $I_y = I_x - t = \{r - t \mid r \in I_x\}$ e $\varphi_y(s) = \varphi_x(t + s)$, para todo $s \in I_y$;*

iii. O conjunto $D = \{(t, x) \mid x \in U, t \in I_x\}$ é aberto em \mathbb{R}^{n+1} e a aplicação $\varphi : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ dada por $\varphi(t, x) = \varphi_x(t)$ é de classe C^k .

Ao longo desse texto, ao nos referirmos a uma solução de uma equação diferencial assumiremos que a mesma está definida em seu intervalo maximal. A aplicação φ dada pelo Teorema 2.2.1 é chamada de *fluxo* de f ou de *fluxo do sistema* (2.1). Se $\psi_x : I_x \rightarrow U$ é a solução do sistema (2.1) passando por $x \in U$ no tempo $t = 0$, o conjunto dos pontos de sua imagem $\{\psi_x(t) \mid t \in I_x\}$ é dita *trajetória* de ψ .

O próximo resultado nos fornece uma condição suficiente para que o intervalo maximal de qualquer solução de um sistema (2.1) seja igual a \mathbb{R} .

Teorema 2.2.2. *Se $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é lipschitziana então qualquer solução do sistema (2.1) está definida para todo $t \in \mathbb{R}$.*

Como consequência do resultado anterior, as soluções de qualquer equação diferencial linear estão sempre definidas em toda a reta.

Apresentamos agora dois resultados nos quais obtemos estimativas. O primeiro fornece uma majoração exponencial para uma função contínua não negativa sob certas circunstâncias, e, o segundo, mostra o decaimento exponencial no tempo para fluxos lineares no caso de uma matriz que possui apenas autovalores com parte real negativa.

Lema 2.2.3 (Lema de Gronwall). *Se $v : I \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua e não negativa no intervalo $I \subset \mathbb{R}$ tal que existem constantes $a, b \geq 0$ e $u \in I$ satisfazendo*

$$v(t) \leq a + \left| \int_u^t bv(s) ds \right|$$

para todo $t \in I$, então

$$v(t) \leq ae^{b|t-u|},$$

para todo $t \in I$.

Proposição 2.2.4. *Se todos os autovalores de $A \in M_n(\mathbb{R})$ têm parte real negativa, então existem $M, \mu > 0$ tais que*

$$\|e^{At}x\| \leq Me^{-\mu t}\|x\|, \quad t \geq 0, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

e, conseqüentemente,

$$\|e^{At}\| \leq Me^{-\mu t}, \quad t \geq 0.$$

Se, por outro lado, todos os autovalores de $A \in M_n(\mathbb{R})$ possuírem parte real positiva, então existem constantes $M, \mu > 0$ de modo que $\|e^{At}\| \leq Me^{\mu t}$, $t \leq 0$.

A definição que segue classifica cada $x \in U$ como ponto singular ou ponto regular da função f ou do sistema (2.1). Essa classificação torna-se importante ao estudarmos o comportamento local de um sistema diferencial.

Definição 2.2.5. *Suponha que $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ é de classe C^1 no aberto $U \subset \mathbb{R}^n$. Se $x_0 \in U$ é tal que $f(x_0) = 0$, dizemos que x_0 é um ponto singular de f . Caso contrário, dizemos que x_0 é ponto regular de f . Denotando por $Df(x_0)$ a matriz Jacobiana de f aplicada em x_0 , dizemos que x_0 é um ponto singular hiperbólico de f se x_0 for um ponto singular de f e todos os autovalores de $Df(x_0)$ possuem parte real não nula. Dizemos também que x_0 é um ponto singular (hiperbólico) do sistema (2.1) se x_0 for ponto singular (hiperbólico) da função f .*

Dentre os pontos singulares, aqueles que apresentam comportamento local mais simples são os hiperbólicos. Assim, nosso foco nos próximos dois capítulos será estudar o comportamento dos fluxos do sistema (2.1) em uma vizinhança de um ponto singular hiperbólico.

Observação 2.2.6. *Do Teorema da Função Inversa, todo ponto singular hiperbólico é isolado, isto é, existe uma vizinhança do mesmo na qual não há nenhum outro ponto singular.*

O próximo resultado nos mostra que, ao trabalharmos com sistemas diferenciais, tais como (2.1), se x_0 é um ponto singular desse sistema podemos, sem perda de generalidade, supor $x_0 = 0$.

Teorema 2.2.7. *Considere o sistema (2.1) e defina, para $x_0 \in U$, o conjunto aberto $V = U - x_0 \subset \mathbb{R}^n$ obtido pela translação de U , e $g \in C^1(V, \mathbb{R}^n)$ a função dada por $g(y) = f(y + x_0)$, $y \in V$. Então x_0 é um ponto singular do sistema (2.1) se, e somente se, 0 é um ponto singular do sistema $y' = g(y)$.*

Ao estudarmos um sistema diferencial, nos interessamos em conhecer o comportamento de seu fluxo ao longo do tempo. Caso uma solução esteja definida para todo tempo positivo, podemos nos questionar o que ocorre com a mesma quando $t \rightarrow +\infty$. Do mesmo modo, se a solução está definida para todo tempo negativo, podemos nos perguntar o que ocorre quando $t \rightarrow -\infty$. Isso motiva a seguinte definição:

Definição 2.2.8. *Seja φ o fluxo do sistema (2.1). Se $t \mapsto \varphi(t, x)$ está definida para todo $t \geq 0$, definimos o conjunto ω -limite de $x \in U$, denotado por $\omega(x)$, como*

$$\omega(x) = \left\{ q \in U \mid \exists t_n \rightarrow +\infty \text{ satisfazendo } \lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi(t_n, x) = q \right\}.$$

De maneira análoga, se $t \mapsto \varphi(t, x)$ está definida para todo $t \leq 0$, definimos o conjunto α -limite de x como

$$\alpha(x) = \left\{ q \in U \mid \exists t_n \rightarrow -\infty \text{ satisfazendo } \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(t_n, x) = q \right\}.$$

Os conjuntos ω -limite e α -limite assumem grande relevância no estudo que faremos nos próximos capítulos. Note que, para qualquer $x \in U$, o conjunto $\omega(x)$ do sistema (2.1) coincide com o conjunto $\alpha(x)$ correspondente ao sistema $x' = -f(x)$. Consequentemente, podemos reduzir nosso estudo aos conjuntos ω -limite de um sistema diferencial, pois resultados análogos aos obtidos podem ser enunciados para os conjuntos α -limite do mesmo.

Observação 2.2.9. *Os conjuntos ω -limite e α -limite de quaisquer dois pontos de uma mesma solução coincidem.*

Uma caracterização muito útil para um conjunto ω -limite consistindo de um único ponto é o seguinte:

Observação 2.2.10. *Para $x \in U$, $\omega(x) = \{x_0\}$ se, e somente se, $\lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi(t, x) = x_0$.*

Apresentamos a seguir um dos principais resultados da Teoria Qualitativa de Equações Diferenciais Ordinárias no plano. Ele descreve as possibilidades para o conjunto ω -limite de um sistema planar.

Teorema 2.2.11 (Teorema de Poincaré-Bendixson). *Suponha que $t \mapsto \varphi(t, x)$ seja uma solução do sistema planar (2.1) definida para todo $t \geq 0$ e que, para tais valores de t , esta esteja contida em um subconjunto compacto de U . Se f possui um número finito de pontos singulares em $\omega(x)$, então uma e apenas uma das seguintes possibilidades ocorre:*

1. *se $\omega(x)$ contém apenas pontos regulares, então $\omega(x)$ é uma órbita periódica;*
2. *se $\omega(x)$ contém tanto pontos regulares quanto pontos singulares, então $\omega(x)$ é um conjunto de órbitas onde cada uma tende a um dos pontos singulares de $\omega(x)$;*
3. *se $\omega(x)$ não possui pontos regulares, então $\omega(x) = \{y\}$ para algum ponto singular y .*

2.3 O Teorema da Função Implícita em Espaços de Banach

Nesta seção apresentamos o enunciado do Teorema da Função Implícita em Espaços de Banach e pontuamos alguns resultados e definições úteis para o desenvolvimento dos demais capítulos. Tomamos como referência básica Driver (2003).

Um espaço de Banach é um espaço normado completo. Podemos generalizar para espaços de Banach conhecidos conceitos e resultados de espaços euclidianos. Se X e Y

são espaços de Banach, denotamos o conjunto de todas as aplicações lineares $\Lambda : X \rightarrow Y$ contínuas por $L(X, Y)$. Observamos que, em espaços de dimensão infinita, podem existir aplicações lineares não contínuas.

Definição 2.3.1. *Sejam X e Y espaços de Banach cujas normas denotaremos por $\|\cdot\|_X$ e $\|\cdot\|_Y$, respectivamente. Uma função $f : U \rightarrow Y$, com $U \subset X$ aberto, é dita diferenciável em $x_0 \in U$ se existe um operador linear limitado $\Lambda \in L(X, Y)$ tal que*

$$f(x_0 + h) - f(x_0) - \Lambda(h) = r(h), \quad x_0 + h \in U,$$

e

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|r(h)\|_Y}{\|h\|_X} = 0.$$

Denotamos Λ por $f'(x_0)$ ou $Df(x_0)$, caso exista, e a denominamos de derivada de f no ponto x_0 . Dizemos ainda que f é diferenciável em U se f for diferenciável em todos os pontos de U . Se f for diferenciável, e além disso, $Df : U \rightarrow L(X, Y)$ for contínua, então dizemos que f é de classe C^1 .

É possível provar que o operador $Df(x_0)$ é necessariamente único, quando existe.

Denotamos por $C_B^0(\mathbb{R}^n)$ o subespaço vetorial de $C^0(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ formado pelas funções limitadas em \mathbb{R}^n , e definimos a norma de $f \in C_B^0$ por

$$\|f\|_{C_B^0} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \|f(x)\|.$$

Analogamente, denotamos por $C_B^1(\mathbb{R}^n)$ o subespaço vetorial de $C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ formado pelas funções limitadas cujas derivadas de primeira ordem são também limitadas em \mathbb{R}^n , e definimos a norma de $f \in C_B^1$ por

$$\|f\|_{C_B^1} = \|f\|_{C_B^0} + \|Df\|_{C_B^0}.$$

É possível verificar que $C_B^0(\mathbb{R}^n)$ e $C_B^1(\mathbb{R}^n)$ são espaços de Banach.

Em espaços euclidianos e, em geral, espaços métricos, é recorrente o uso do Lema da Contração, conhecido resultado muitas vezes usado para provar a unicidade de um valor ou uma igualdade em situações apropriadas. Esse resultado também possui uma versão para espaços de Banach, apresentado a seguir, que será utilizado para provar a unicidade de uma função na Proposição 3.2.5.

Teorema 2.3.2 (Lema da Contração). *Sejam (X, ρ) espaço métrico completo e $S : X \rightarrow X$ uma contração, isto é, existe $\alpha \in (0, 1)$ tal que $\rho(S(x), S(y)) \leq \alpha\rho(x, y)$, para quaisquer $x, y \in X$. Então S possui um único ponto fixo em X , isto é, existe um único $x \in X$ tal que $S(x) = x$.*

Enunciamos agora um resultado que apresenta explicitamente a inversa de uma aplicação linear em espaços de Banach sob certas hipóteses. Esse resultado será também utilizado na demonstração da Proposição 3.2.5 com o intuito de mostrar a existência da inversa de uma aplicação linear específica. Denotamos por $GL(X, Y)$ o subconjunto de $L(X, Y)$ cujas aplicações são inversíveis.

Proposição 2.3.3. *Sejam X e Y espaços de Banach. Se $A \in GL(X, Y)$ e $B \in L(X, Y)$ satisfazem $\|B - A\| < \|A^{-1}\|^{-1}$, então $B \in GL(X, Y)$ e*

$$B^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (I_X - A^{-1}B)^n A^{-1} \in L(Y, X).$$

A seguir apresentamos a versão do Teorema da Função Implícita para espaços de Banach, cuja utilização será essencial para a demonstração do Teorema da Variedade Estável Local, na Seção 4.2.

Teorema 2.3.4 (Teorema da Função Implícita). *Sejam X, Y e W espaços de Banach, $k \geq 1$, $A \subset X \times Y$ aberto, $(x_0, y_0) \in A$ e $f : A \rightarrow W$ de classe C^1 tal que $f(x_0, y_0) = 0$. Assuma que*

$$D_2f(x_0, y_0) := D(f(x_0, \cdot))(y_0) : Y \rightarrow W$$

é uma aplicação inversível tal que $D_2f(x_0, y_0)^{-1}$ é limitada, e defina

$$D_1f(x_0, y_0) := D(f(\cdot, y_0))(x_0) : X \rightarrow W.$$

Então existe uma vizinhança U_0 de x_0 em X tal que para toda vizinhança aberta conexa U de x_0 contida em U_0 , existe uma única função $\gamma : U \rightarrow Y$ de classe C^1 tal que $\gamma(x_0) = y_0$, $(x, \gamma(x)) \in A$ e $f(x, \gamma(x)) = 0$ para todo $x \in U$. Mais ainda,

$$D\gamma(x) = -D_2f(x, \gamma(x))^{-1}D_1f(x, \gamma(x))$$

para todo $x \in U$.

3 Teorema de Grobman-Hartman

O Teorema do Fluxo Tubular, que pode ser encontrado em Viana (2020), Sotomayor (1979) e Doering e Lopes (2016) caracteriza o comportamento do fluxo da equação diferencial

$$x' = f(x) \tag{3.1}$$

em uma vizinhança de qualquer ponto regular quando $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma função de classe C^1 definida no aberto $U \subset \mathbb{R}^n$. O estudo do comportamento dos fluxos em uma vizinhança de um ponto singular é um problema bem mais complexo.

Suponha que $x_0 \in U$ é um ponto singular de f , ou seja, $f(x_0) = 0$. Observe que, por f ser diferenciável, para cada $x_0, x_0 + h \in U$, podemos escrever

$$f(x_0 + h) = Df(x_0)h + r(h),$$

onde $r(h) = o(\|h\|)$. Logo, é natural nos questionarmos se a equação diferencial

$$y' = Df(x_0)y, \tag{3.2}$$

que é definida pela aproximação linear $Df(x_0)$ da função f em torno do ponto x_0 , tem em seus fluxos uma boa aproximação para os fluxos da equação original (3.1).

Neste capítulo veremos uma classe de pontos singulares para os quais a resposta para essa indagação é positiva. Mais precisamente, demonstraremos o Teorema de Grobman-Hartman, resultado que afirma que, próximo a um ponto singular hiperbólico x_0 , os fluxos do sistema possivelmente não linear (3.1) possuem comportamento similar aos fluxos do sistema linear (3.2), que possui a origem como ponto singular hiperbólico considerando $y = x - x_0$. Em uma linguagem mais precisa, isso significa que os campos definidos pelos sistemas (3.1) e (3.2) são localmente topologicamente conjugados.

Assim, o Teorema de Grobman-Hartman dá a sustentação para o método de linearização de f , muitas vezes utilizado para determinar o comportamento topológico das soluções do sistema (3.1) em uma vizinhança suficientemente pequena de x_0 .

Ao longo de todo esse capítulo, $U \subset \mathbb{R}^n$ será um subconjunto aberto contendo a origem e $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$, uma função de classe C^1 . Nosso objetivo nas primeiras seções do capítulo é apresentar uma série de resultados que serão essenciais para a demonstração do Teorema de Grobman-Hartman, apresentada na última seção.

Baseamos os resultados aqui apresentados em Chicone (2006), Perko (2001) e Viana e Espinar (2020).

3.1 Conjugação topológica

Definição 3.1.1. *Suponha que $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $g : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ sejam funções de classe C^1 definidas nos abertos $U, V \subset \mathbb{R}^n$. Sejam $\varphi : D_1 \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $\psi : D_2 \rightarrow \mathbb{R}^n$ os fluxos dos sistemas diferenciais $x' = f(x)$ e $y' = g(y)$, definidos nos abertos $D_1, D_2 \subset \mathbb{R}^{n+1}$, respectivamente. As funções f e g são ditas localmente topologicamente conjugadas se existem $U' \subset U$ e $V' \subset V$ abertos e um homeomorfismo $H : U' \rightarrow V'$ tal que $H(\varphi(t, x)) = \psi(t, H(x))$, para qualquer $(t, x) \in D_1 \cap (\mathbb{R} \times U')$. Nesse caso o homeomorfismo H é dito uma conjugação topológica entre f e g nas vizinhanças U' e V' .*

Observação 3.1.2. *Nas condições da definição 3.1.1 dizemos que os sistemas $x' = f(x)$ e $y' = g(y)$ são localmente topologicamente conjugados quando f e g forem localmente topologicamente conjugados.*

A definição acima significa que H mapeia o fluxo local de f no fluxo local de g preservando o tempo e, em particular, preservando a orientação. Ou seja, se um fluxo $\varphi(\cdot, x)$ em U' tem o sentido de ir de x_1 para x_2 ao longo do intervalo de tempo t , então o fluxo $\psi(\cdot, H(x))$ em V' tem o comportamento de ir de $H(x_1)$ para $H(x_2)$ ao longo do mesmo intervalo de tempo. Portanto, a conjugação topológica local consiste em uma tradução matemática precisa da noção intuitiva de que os fluxos dos sistemas (3.1) e (3.2) tenham localmente a mesma estrutura qualitativa. No caso em que $U' = U$ e $V' = V$, dizemos apenas que os sistemas são topologicamente conjugados.

A seguir, apresentamos um exemplo de sistemas topologicamente conjugados no qual o homeomorfismo da definição é facilmente determinado. Enfatizamos aqui que, no caso diferenciável, o homeomorfismo H pode ser interpretado como uma mudança de coordenadas. No exemplo abaixo, a mudança de coordenadas é linear e dada pela diagonalização da matriz do sistema.

Exemplo 3.1.3. *Os sistemas lineares*

$$\begin{aligned} x'_1 &= -x_1 - 3x_2, & e & & y'_1 &= -y_1, \\ x'_2 &= 2x_2 & & & y'_2 &= 2y_2 \end{aligned}$$

são topologicamente conjugados.

De fato, denotemos por B e C as matrizes correspondentes aos dois sistemas, respectivamente. O primeiro deles pode ser escrito como

$$x' = Bx, \tag{3.3}$$

onde $x = (x_1, x_2)$, e o segundo,

$$y' = Cy, \tag{3.4}$$

sendo $y = (y_1, y_2)$.

Os autovalores de B são $\lambda_1 = -1$ e $\lambda_2 = 2$ e, calculando seus autovetores correspondentes, obtemos $v_1 = (1, 0)$ e $v_2 = (-1, 1)$, respectivamente. Dessa forma,

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ e } P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

são tais que $C = P^{-1}BP$ e, fazendo a mudança de variável $x = P^{-1}y$, obtemos

$$y' = (Px)' = Px' = PBx = PBP^{-1}y = Cy,$$

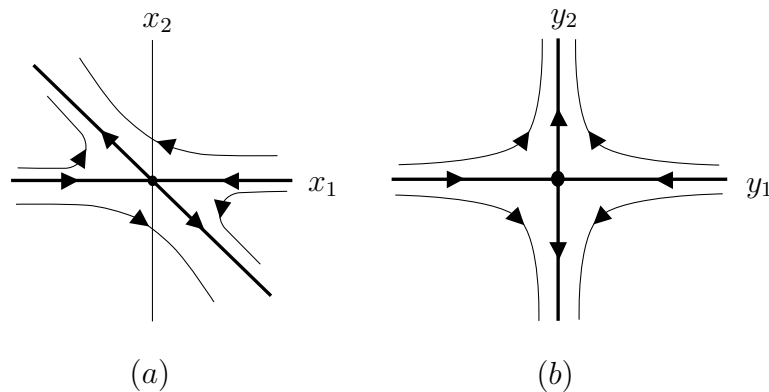
ou seja, cada solução de (3.3) corresponde a uma solução do sistema (3.4).

Mostraremos agora que a aplicação $H : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $H(x) = P^{-1}x$ é uma conjugação topológica entre esses sistemas. Por ser um isomorfismo linear, H é um homeomorfismo. Além disso, os fluxos dos sistemas (3.3) e (3.4) são dados por $e^{Bt}x$ e $e^{Ct}y$, respectivamente. Assim,

$$H(e^{Bt}x) = P^{-1}e^{Bt}x = e^{Ct}P^{-1}x = e^{Ct}H(x).$$

O retrato de fase de ambos os sistemas é mostrado na Figura 1.

Figura 1 – (a) Retrato de fase do sistema (3.3). (b) Retrato de fase do sistema (3.4).



Fonte: Autora.

No exemplo acima o homeomorfismo é uma transformação linear, mas existem conjugações topológicas não lineares, como mostra o próximo exemplo.

Exemplo 3.1.4. A conjugação topológica entre o sistema

$$\begin{aligned} x' &= -x \\ y' &= x^2 + y \end{aligned} \tag{3.5}$$

e seu sistema linearizado

$$\begin{aligned} x' &= -x \\ y' &= y \end{aligned} \tag{3.6}$$

é dada por $H(x, y) = (x, y + x^2/3)$.

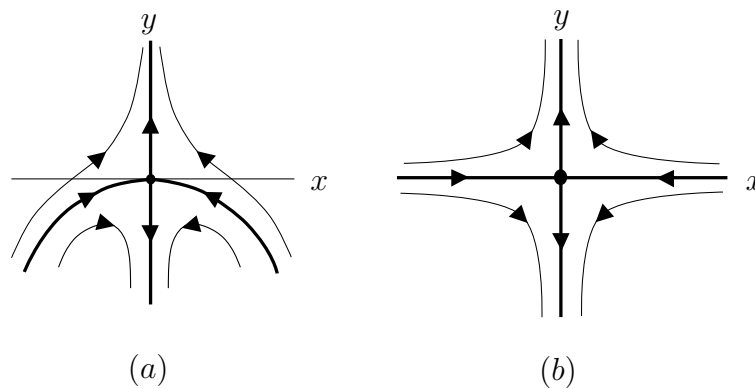
De fato, observe que a origem é um ponto singular hiperbólico do sistema (3.5), cujo fluxo é da forma $\varphi(t, x, y) = (e^{-t}x, e^t y + (e^t - e^{-2t})x^2/3)$, e que o fluxo do sistema (3.6) é $\psi(t, x, y) = (e^{-t}x, e^t y)$. Dessa forma,

$$H \circ \varphi(t, x, y) = (e^{-t}x, e^t y + e^t x^2/3) = (e^{-t}x, e^t(y + x^2/3)) = \psi(t, H(x, y)),$$

o que prova que H é de fato uma conjugação topológica entre os sistemas considerados.

O retrato de fase local de ambos os sistemas é mostrado na Figura 2.

Figura 2 – (a) Retrato de fase do sistema (3.5). (b) Retrato de fase do sistema (3.6).



Fonte: Autora.

Perceba que, nos exemplos anteriores, pudemos explicitar o homeomorfismo entre os dois sistemas de interesse. Contudo, determinar a fórmula de uma conjugação topológica é um trabalho quase sempre impossível de ser realizado. Provaremos, contudo, que sob certas circunstâncias não há necessidade de explicitar tal conjugação topológica, pois sua existência estará garantida.

Observação 3.1.5. Se $H : U' \rightarrow V'$ é uma conjugação topológica entre as funções f e g como na Definição 3.1.1, para todo $x \in U'$ tem-se que $\omega(x) = \omega(H(x))$, isto é, uma conjugação topológica preserva conjuntos ω -limite.

3.2 Resultados auxiliares

Nesta seção apresentaremos resultados que serão essenciais para a demonstração do Teorema 3.3.1, conhecido como Teorema de Grobman-Hartman, concluído na seção 3.3. O primeiro deles trata da existência de uma norma apropriada para operadores lineares definidos por matrizes quadradas que nos será útil mais adiante.

Proposição 3.2.1. Dada $A \in M_n(\mathbb{C})$, escrevamos $\rho(A) = \max\{|\lambda|; \lambda \text{ é autovalor de } A\}$. Para cada $\varepsilon > 0$, existem $\mu > 0$ e uma norma $|\cdot|_\mu$ em \mathbb{C}^n tais que

$$\|A\|_\mu := \sup\{|Ax|_\mu; |x|_\mu = 1\} \leq \rho(A) + \varepsilon.$$

Demonstração. Fixada $A \in M_n(\mathbb{C})$, pelo Teorema de Jordan existe uma matriz inversível $Q \in M_n(\mathbb{C})$ tal que

$$QAQ^{-1} = D + N, \tag{3.7}$$

onde D é a matriz diagonal formada pelos autovalores de A e N é matriz nilpotente com zeros e/ou uns acima da diagonal principal e nula nas demais entradas.

Observe que, tomando em \mathbb{C}^n a norma do máximo e denotando-a por $\|\cdot\|$, obtemos

$$\begin{aligned} \|D\| &= \sup\{\|Dx\|; \|x\| = \max\{|x_1|, \dots, |x_n|\} = 1\} \\ &= \sup\left\{\max_{1 \leq i \leq n}\{|\lambda_1 x_1|, \dots, |\lambda_n x_n|\}\right\} \\ &= \sup\left\{\max_{1 \leq i \leq n}\{|\lambda_i| |x_i|\}\right\} \\ &= \max\{|\lambda|; \lambda \text{ é autovalor de } A\} \\ &= \rho(A). \end{aligned}$$

Fixado agora $\mu > 0$, defina a matriz diagonal $S = \text{diag}[1, \mu^{-1}, \mu^{-2}, \dots, \mu^{1-n}]$. Note que

$$S(D + N)S^{-1} = D + SNS^{-1}, \tag{3.8}$$

em que a matriz SNS^{-1} é da forma

$$\begin{bmatrix} 0 & k_1\mu & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & k_2\mu & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_3\mu & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & k_{n-1}\mu \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix},$$

onde $k_1, \dots, k_{n-1} \in \{0, 1\}$. Assim, para cada $w = (w_1, \dots, w_n) \in \mathbb{C}^n$ vale

$$SNS^{-1}w = \mu(k_1w_2, \dots, k_{n-1}w_n, 0),$$

logo,

$$\|SNS^{-1}\| \leq |\mu|. \tag{3.9}$$

Agora, para cada $v \in \mathbb{C}^n$, defina a norma

$$|v|_\mu := \sqrt{\langle SQv, SQv \rangle} = \|SQv\|,$$

onde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota o produto interno usual de \mathbb{C}^n . As propriedades de norma seguem imediatamente das de produto interno e do fato de SQ ser inversível. Como esta norma envolve

a matriz S definida em termos de μ , sua norma depende também de μ . Multiplicando ambos os lados de (3.7) por S à esquerda e S^{-1} à direita e usando a identidade (3.8), obtemos

$$SQAQ^{-1}S^{-1} = D + SNS^{-1}.$$

Multiplicando agora ambos os lados da igualdade acima por SQ à direita, segue que

$$SQA = (D + SNS^{-1})SQ.$$

Dessa forma, para cada $v \in \mathbb{C}^n$, usando a definição da norma $|\cdot|_\mu$, temos

$$|Av|_\mu^2 = \|SQAv\|^2 = \|(D + SNS^{-1})SQv\|^2.$$

Defina então $w = SQv$. Expandindo a última norma em produto interno, obtemos

$$|Av|_\mu^2 = \langle Dw, Dw \rangle + \langle Dw, SNS^{-1}w \rangle + \langle SNS^{-1}w, Dw \rangle + \langle SNS^{-1}w, SNS^{-1}w \rangle. \quad (3.10)$$

Para estimar a primeira parcela do lado direito de (3.10), aplicamos a desigualdade de Cauchy-Schwarz, obtendo

$$|\langle Dw, Dw \rangle| \leq \|Dw\|^2 \leq \|D\|^2 \|w\|^2.$$

Como $\|D\| = \rho(A)$, então

$$|\langle Dw, Dw \rangle| \leq \rho(A)^2 \|w\|^2.$$

Analogamente para a segunda parcela do lado direito de (3.10), temos

$$|\langle Dw, SNS^{-1}w \rangle| \leq \|D\| \|SNS^{-1}\| \|w\|^2 \leq \rho(A) \|SNS^{-1}\| \|w\|^2.$$

Usando agora (3.9), resulta que

$$|\langle Dw, SNS^{-1}w \rangle| \leq \rho(A) \mu \|w\|^2. \quad (3.11)$$

Aplicando a desigualdade de Cauchy-Schwarz nos demais fatores de (3.10), obtemos

$$|Av|_\mu^2 \leq \rho(A)^2 \|w\|^2 + 2\rho(A)\mu \|w\|^2 + \mu^2 \|w\|^2 = (\rho(A)^2 + 2\rho(A)\mu + \mu^2) \|w\|^2.$$

Como tomamos $\mu > 0$ arbitrário, escolhendo em particular $\mu \leq 1$, temos $\mu^2 \leq \mu$, logo,

$$|Av|_\mu^2 \leq (\rho(A)^2 + (2\rho(A) + 1)\mu) \|w\|^2.$$

Além disso, por definição, $|v|_\mu = \|w\|$. Em particular, se $|v|_\mu = 1$, então $\|w\| = 1$. Desta forma,

$$|Av|_\mu \leq (\rho(A)^2 + (2\rho(A) + 1)\mu)^{\frac{1}{2}}.$$

Tomando então $\mu > 0$ que satisfaça

$$\mu < \min \left\{ 1, \frac{\varepsilon^2}{2\rho(A) + 2} \right\}, \quad (3.12)$$

teremos

$$\begin{aligned} \|A\|_\mu &= \sup_{v \in \mathbb{C}} \{|Av|_\mu ; |v|_\mu = 1\} \\ &\leq \sup_{v \in \mathbb{C}} \left\{ \sqrt{(\rho(A))^2 + (2\rho(A) + 1)\mu} \right\} \\ &\leq \sqrt{\rho(A)^2} + \sqrt{(2\rho(A) + 1)\mu} \\ &< \rho(A) + \varepsilon. \end{aligned}$$

Portanto se $\mu > 0$ satisfaz (3.12), então $\|A\|_\mu < \rho(A) + \varepsilon$, como queríamos. \square

Observe que, na Proposição 3.2.1, se A é uma matriz real, então a norma $|\cdot|_\mu$ obtida em \mathbb{C}^n , quando restrita a \mathbb{R}^n , também satisfaz $\|A\|_\mu \leq \rho(A) + \varepsilon$ para $\varepsilon > 0$ inicialmente fixado.

O próximo resultado é uma consequência direta da Proposição 3.2.1.

Corolário 3.2.2. *Se todos os autovalores da matriz $A \in M_n(\mathbb{C})$ possuem norma menor que 1, então existem uma norma $|\cdot|$ e um número $0 < \lambda < 1$ tais que $|Av| < \lambda|v|$, para todo vetor não nulo $v \in \mathbb{C}^n$.*

Demonstração. Por hipótese, $\rho(A) < 1$, logo, fixado $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, pela Proposição 3.2.1 existem uma norma $|\cdot|_a$ para algum $a > 0$ e um número $\lambda < 1$ tais que $\|A\|_a < \rho(A) + \varepsilon < \lambda$. Agora, do fato de que todas as normas em espaços de dimensão finita são equivalentes, existem constantes positivas C_1 e C_2 tais que

$$C_1\|v\| \leq |v|_a \leq C_2\|v\|, \text{ para todo } v \in \mathbb{C}^n.$$

Portanto, qualquer que seja o vetor não nulo $v \in \mathbb{C}^n$, tem-se

$$\frac{|Av|_a}{|v|_a} \leq \sup_{v \in \mathbb{C}^n} \{|Av|_a ; |v|_a = 1\} < \lambda,$$

o que prova o resultado, tomando $|\cdot| = |\cdot|_a$. \square

Observe que no Corolário 3.2.2, a matriz A é uma contração em relação à norma $|\cdot|$ obtida.

Observação 3.2.3. *Como consequência direta do Corolário 3.2.2, se $A \in M_n(\mathbb{R})$ possui apenas autovalores com módulo menor que 1, existem $0 < \lambda < 1$ e uma norma $|\cdot|$ tais que $|Av| < \lambda|v|$ para todo $v \in \mathbb{R}^n$ não nulo.*

Relembremos que se a origem é um ponto singular hiperbólico do sistema (3.1), então $A = Df(0)$ é uma matriz inversível cujos autovalores têm parte real não nula, e que as soluções do sistema (3.2) são dadas por $e^{At}x$. Mais ainda, como os autovalores de e^A são da forma e^λ , onde λ é autovalor de A , segue que e^A não possui autovalor igual a $1 = e^0$ e tampouco autovalor com parte real nula. Isso motiva a seguinte definição.

Definição 3.2.4. Uma transformação linear $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é dita hiperbólica se não possui autovalores com parte real nula ou com módulo igual a 1.

Observe que, como consequência da definição, toda transformação linear hiperbólica é inversível.

Na próxima Proposição, usamos o Teorema 2.3.2 (Lema da Contração) para estabelecer condições sob as quais existe uma função contínua e limitada h com propriedades úteis para a demonstração do Teorema 3.3.1 (Teorema de Grobman-Hartman).

Proposição 3.2.5. Sejam $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma transformação linear hiperbólica e $\alpha \in (0, 1/2)$. Se $p \in C_B^1(\mathbb{R}^n)$ é tal que $p(0) = 0$ e $\|p\|_{C_B^1} \leq \varepsilon$ para algum $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno dependendo de α , então existe uma única função $h \in C_B^0(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$\|h\|_{C_B^0} \leq \alpha, \quad h(0) = 0 \quad e \quad h(Ax) - Ah(x) = p(x + h(x)) \quad (3.13)$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

Demonstração. Sabendo que A não possui autovalor nulo e nem com módulo igual a 1, denotamos por E o autoespaço gerado pelos autovalores de A com parte real menor que 1 e por F o autoespaço associado aos autovalores de A com parte real maior que 1. Suponha que $\dim E = n_1$ e $\dim F = n_2$. Como A é hiperbólica temos $n = n_1 + n_2$, logo, escrevemos $\mathbb{R}^n = E \oplus F$. Assumimos, a menos de mudança de coordenadas, que A está na forma diagonal

$$A = \begin{pmatrix} A_E & 0 \\ 0 & A_F \end{pmatrix},$$

onde $A_E = A|_E : E \rightarrow E$ possui todos seus autovalores no interior do círculo unitário fechado e $A_F = A|_F : F \rightarrow F$ possui todos seus autovalores fora do círculo unitário fechado.

Sabemos que, se β é autovalor de A , então $1/\beta$ é autovalor de A^{-1} , logo, F é gerado pelos autovalores de A^{-1} com norma menor que 1. Aplicando o Corolário 3.2.2 a A_E e A_F e denotando ambas as normas obtidas em E e F por $|\cdot|$, definimos a norma $\|\cdot\|$ em \mathbb{R}^n por $\|x\| = |x_E| + |x_F|$, onde $x = x_E + x_F \in E \oplus F$. Ainda pelo Corolário 3.2.2, existe $\lambda \in (0, 1)$ de forma que

$$|A_E x_E| < \lambda |x_E| \quad e \quad |A_F^{-1} x_F| < \lambda |x_F|, \quad (3.14)$$

ou seja,

$$\|A_E\| \leq \lambda \quad e \quad \|A_F^{-1}\| \leq \lambda. \quad (3.15)$$

A existência e unicidade de uma função $h \in C_B^0(\mathbb{R}^n)$ satisfazendo (3.13) será dada ao mostrarmos que h é único ponto fixo de uma contração, que será construída em cinco etapas.

Etapa 1. A aplicação $L : C_B^0(\mathbb{R}^n) \rightarrow C_B^0(\mathbb{R}^n)$ definida por

$$L(\xi) = \xi \circ A - A \circ \xi$$

é linear e pode ser escrita como $L = (L_E, L_F)$, onde L_E e L_F são limitadas e inversíveis.

Note primeiramente que L está bem definida, pois, fixando arbitrariamente $\xi \in C_B^0(\mathbb{R}^n)$, por $Ax \in \mathbb{R}^n$ para qualquer $x \in \mathbb{R}^n$, temos

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} \{|\xi(Ax)|\} \leq \sup_{y \in \mathbb{R}^n} \{|\xi(y)|\} < +\infty.$$

Da mesma forma, A é um operador limitado, isso é, possui norma finita, logo, $A(M)$ é um conjunto limitado para qualquer $M \subset \mathbb{R}^n$ limitado. Assim, como ξ é limitada, temos em particular $\xi(\mathbb{R}^n)$ limitado, donde

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} \{|A \circ \xi(x)|\} < +\infty.$$

Portanto, $\xi \circ A - A \circ \xi \in C_B^0(\mathbb{R}^n)$, o que prova a boa definição de L . Mais ainda, pela linearidade de A segue imediatamente a linearidade de L .

Da decomposição de \mathbb{R}^n feita anteriormente, tomando $\xi \in C_B^0(\mathbb{R}^n)$ qualquer, podemos unicamente expressá-la como uma soma de funções $\xi = \xi_E + \xi_F$, onde

$$\xi_E : \mathbb{R}^n \rightarrow E \quad \text{e} \quad \xi_F : \mathbb{R}^n \rightarrow F,$$

$\xi_E \in C_B^0(\mathbb{R}^n, E)$ e $\xi_F \in C_B^0(\mathbb{R}^n, F)$. Então para cada $x \in \mathbb{R}^n$, temos

$$\begin{aligned} L(\xi)(x) &= L(\xi_E + \xi_F)(x) \\ &= (\xi_E + \xi_F)(Ax) - A(\xi_E + \xi_F)(x) \\ &= \xi_E(Ax) + \xi_F(Ax) - A(\xi_E(x) + \xi_F(x)) \\ &= (\xi_E(Ax) - A_E \xi_E(x), \xi_F(Ax) - A_F \xi_F(x)) \\ &= (L_E(\xi_E)(x), L_F(\xi_F)(x)), \end{aligned}$$

com

$$L_E(\xi_E) = \xi_E \circ A - A_E \circ \xi_E \quad \text{e} \quad L_F(\xi_F) = \xi_F \circ A - A_F \circ \xi_F. \quad (3.16)$$

Definindo então $T_E : C_B^0(\mathbb{R}^n, E) \rightarrow C_B^0(\mathbb{R}^n, E)$ por $T_E(\xi_E) = \xi_E \circ A$, esta aplicação é inversível com $T_E^{-1}(\xi_E) = \xi_E \circ A^{-1}$, pois

$$(T_E^{-1} \circ T_E)(\xi_E) = T_E^{-1}(\xi_E \circ A) = (\xi_E \circ A) \circ A^{-1} = \xi_E$$

e

$$(T_E \circ T_E^{-1})(\xi_E) = T_E(\xi_E \circ A^{-1}) = (\xi_E \circ A^{-1}) \circ A = \xi_E.$$

Mais ainda, $\|T_E\| \leq 1$, já que

$$\|T_E\| = \sup_{\xi_E \neq 0} \frac{\|T_E(\xi_E)\|}{\|\xi_E\|} = \sup_{\xi_E \neq 0} \frac{\sup_{x \in \mathbb{R}^n} |\xi_E(Ax)|}{\sup_{y \in \mathbb{R}^n} |\xi_E(y)|} \leq \sup_{\xi_E \neq 0} \frac{\sup_{y \in \mathbb{R}^n} |\xi_E(y)|}{\sup_{y \in \mathbb{R}^n} |\xi_E(y)|} = 1.$$

As mesmas conclusões obtemos ao definirmos $T_F : C_B^0(\mathbb{R}^n, F) \rightarrow C_B^0(\mathbb{R}^n, F)$ por $T_F(\xi_F) = \xi_F \circ A$, isto é, T_F é uma aplicação inversível de norma menor ou igual a um.

Definimos ainda $S : C_B^0(\mathbb{R}^n, E) \rightarrow C_B^0(\mathbb{R}^n, E)$ e $U : C_B^0(\mathbb{R}^n, F) \rightarrow C_B^0(\mathbb{R}^n, F)$ dadas por

$$S(\xi_E) = A_E \circ \xi_E \quad \text{e} \quad U(\xi_F) = A_F \circ \xi_F.$$

Dessa forma, de (3.16) podemos escrever

$$L_E(\xi_E) = (T_E - S)(\xi_E) \quad \text{e} \quad L_F(\xi_F) = (T_F - U)(\xi_F),$$

para quaisquer $\xi_E \in C_B^0(\mathbb{R}^n, E)$ e $\xi_F \in C_B^0(\mathbb{R}^n, F)$. Observe agora que, por (3.15),

$$\|S\| = \sup_{\xi_E \neq 0} \frac{\|A_E \circ \xi_E\|}{\|\xi_E\|} \leq \sup_{\xi_E \neq 0} \frac{\|A_E\| \|\xi_E\|}{\|\xi_E\|} = \|A_E\| \sup_{\xi_E \neq 0} \frac{\|\xi_E\|}{\|\xi_E\|} \leq \lambda. \quad (3.17)$$

Mais ainda, a função U é inversível, com $U^{-1}(\xi_F) = A_F^{-1} \circ \xi_F$, e novamente por (3.15),

$$\|U^{-1}\| = \sup_{\xi_F \neq 0} \frac{\|A_F^{-1} \circ \xi_F\|}{\|\xi_F\|} \leq \sup_{\xi_F \neq 0} \frac{\|A_F^{-1}\| \|\xi_F\|}{\|\xi_F\|} = \|A_F^{-1}\| \sup_{\xi_F \neq 0} \frac{\|\xi_F\|}{\|\xi_F\|} \leq \lambda. \quad (3.18)$$

Das relações em (3.17) e (3.18) e por existirem as composições $T_E^{-1} \circ S$ e $U^{-1} \circ T_F$, da Proposição 2.3.3, os operadores $I - T_E^{-1} \circ S$ e $I - U^{-1} \circ T_F$ são inversíveis, com

$$(I - T_E^{-1} \circ S)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (T_E^{-1} \circ S)^k \quad (3.19)$$

e

$$(I - U^{-1} \circ T_F)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (U^{-1} \circ T_F)^k. \quad (3.20)$$

Note que tais funções estão de fato bem definidas pois, como $\|T_E^{-1} \circ S\| \leq \lambda$ e $\|U^{-1} \circ T_F\| \leq \lambda$ e pelo teste da comparação com a série geométrica $\sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k = \frac{1}{1-\lambda}$, os somatórios em (3.19) e (3.20) em norma são finitos, uma vez que $\|T_E^{-1} \circ S\|^k \leq \lambda^k$ e $\|U^{-1} \circ T_F\|^k \leq \lambda^k$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

Mas, por (3.16), podemos escrever os operadores L_E e L_F como

$$L_E = T_E - S = T_E \circ (I - T_E^{-1} \circ S) \quad \text{e} \quad L_F = T_F - U = -U \circ (I - U^{-1} \circ T_F),$$

portanto, ambos são inversíveis por serem composição de aplicações inversíveis, com

$$L_E^{-1} = (I - T_E^{-1} \circ S)^{-1} \circ T_E^{-1} \quad \text{e} \quad L_F^{-1} = -(I - U^{-1} \circ T_F)^{-1} \circ U^{-1}.$$

Conseqüentemente,

$$\|L_E^{-1}\| \leq \|(I - T_E^{-1} \circ S)^{-1}\| \|T_E^{-1}\| \leq \frac{1}{1-\lambda} \quad (3.21)$$

e, sendo $0 < \lambda < 1$,

$$\|L_F^{-1}\| \leq \|(I - U^{-1} \circ T_F)^{-1}\| \|U^{-1}\| \leq \frac{1}{1-\lambda} \lambda < \frac{1}{1-\lambda}. \quad (3.22)$$

Tem-se provado, então, que $L = (L_E, L_F)$ é linear e as aplicações L_E e L_F são limitadas e inversíveis.

Etapa 2. L é inversível e sua inversa é limitada.

Da Etapa 1 segue que L é inversível e, das estimativas em (3.21) e (3.22), concluímos que

$$\|L^{-1}\| < \frac{2}{1-\lambda}.$$

Etapa 3. A equação em (3.13) pode ser reescrita como

$$\xi(x) = L^{-1}\Phi(\xi)(x) + L^{-1}p(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (3.23)$$

onde $\Phi : C_B^0(\mathbb{R}^n) \rightarrow C_B^0(\mathbb{R}^n)$ é uma aplicação definida em função de p .

Com efeito, defina $\Phi : C_B^0(\mathbb{R}^n) \rightarrow C_B^0(\mathbb{R}^n)$ por

$$\Phi(\xi)(x) = p(x + \xi(x)) - p(x),$$

com $\xi \in C_B^0(\mathbb{R}^n)$, $x \in \mathbb{R}^n$. Como p e $Id \circ h$ são contínuas, onde Id representa a função identidade em \mathbb{R}^n , segue a continuidade da função $x \mapsto p(x + \xi(x))$. Mais ainda, se $y = x + \xi(x)$ para qualquer $x \in \mathbb{R}^n$, por p ser limitada segue que $\|p(y)\| < +\infty$. Portanto, Φ está bem definida.

Dessa maneira, a equação (3.13) pode ser reescrita como

$$L(\xi)(x) = \Phi(\xi)(x) + p(x) \quad (3.24)$$

e, diante disso, por já termos provado a inversibilidade de L na Etapa 2, podemos de fato reescrever (3.24) como

$$\xi(x) = L^{-1}\Phi(\xi)(x) + L^{-1}p(x).$$

Isso conclui a prova da Etapa 3.

Para $\alpha \in (0, 1)$ da hipótese, defina $C_\alpha^0 = \{\xi \in C_B^0(\mathbb{R}^n) ; \|\xi\| \leq \alpha, \xi(0) = 0\}$.

Etapa 4. O conjunto C_α^0 é um espaço de Banach quando considerado com a norma induzida por $C_B^0(\mathbb{R}^n)$ e existe uma aplicação $Q : C_\alpha^0 \rightarrow C_\alpha^0$ cujos pontos fixos são soluções da equação (3.23).

Mostremos inicialmente que C_α^0 é um subespaço fechado do espaço de Banach $C_B^0(\mathbb{R}^n)$, logo, é um espaço métrico completo. De fato, seja (ξ_n) uma sequência de funções em C_α^0 tal que $\xi_n \rightarrow \xi$. A mostrar que $\xi \in C_\alpha^0$. Ora, como $\xi_n(0) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, segue imediatamente que $\xi(0) = 0$ e, da convergência tomada, dado $\delta > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$

tal que $\|\xi - \xi_n\| < \delta$ para todo $n > n_0$. Disso e do fato de que $\|\xi_n\| \leq \alpha$ para qualquer índice n , temos

$$\|\xi\| \leq \|\xi - \xi_n\| + \|\xi_n\| < \delta + \alpha,$$

para todo $n > n_0$. Fazendo então $\delta \rightarrow 0$, concluímos que $\|\xi\| \leq \alpha$, isto é, $\xi \in C_\alpha^0$, como desejado. Isso conclui a prova de que C_α^0 , com a norma induzida por $C_B^0(\mathbb{R}^n)$, é Banach.

Considere agora o operador $\bar{Q} : C_B^0(\mathbb{R}^n) \rightarrow C_B^0(\mathbb{R}^n)$ dado por

$$\bar{Q}(\xi) = L^{-1}\Phi(\xi) + L^{-1}p, \quad (3.25)$$

cuja boa definição segue das propriedades de L^{-1} e Φ . Observe que as soluções da equação (3.23) são exatamente os pontos fixos do operador \bar{Q} .

Definindo agora $Q : C_\alpha^0 \rightarrow C_\alpha^0$ restrição de \bar{Q} , provemos que Q é uma contração. Primeiramente, precisamos verificar que a aplicação Q está de fato bem definida. Para isso, dado $\xi \in C_\alpha^0$, como $\xi(0) = 0$,

$$Q(\xi)(0) = L^{-1}\Phi(\xi)(0) + L^{-1}p(0) = L^{-1}(p(\xi(0)) - p(0)) + L^{-1}(0) = 0.$$

Mais ainda, usando a Desigualdade do Valor Médio para a função p ,

$$\begin{aligned} \|Q(\xi)\| &= \|L^{-1}\Phi(\xi) + L^{-1}p\| \\ &\leq \|L^{-1}\| (\|\Phi(\xi)\| + \|p\|_{C_B^0}) \\ &\leq \frac{2}{1-\lambda} \left(\sup_{x \in \mathbb{R}^n} \|p(x + \xi(x)) - p(x)\| + \|p\|_{C_B^0} \right) \\ &\leq \frac{2}{1-\lambda} \left(\sup_{x \in \mathbb{R}^n} \|Dp(x)\| \|\xi\| + \|p\|_{C_B^0} \right) \\ &\leq \frac{2}{1-\lambda} (\|p\|_{C_B^1} \alpha + \|p\|_{C_B^0}) \\ &\leq \frac{2}{1-\lambda} (\|p\|_{C_B^1} \alpha + \|p\|_{C_B^1}) \\ &\leq \frac{2}{1-\lambda} (1 + \alpha) \|p\|_{C_B^1}. \end{aligned}$$

Dessa forma, sempre que a norma de $p \in C_B^1$ satisfizer

$$\|p\|_{C_B^1} \leq \frac{\alpha}{2 + 2\alpha} (1 - \lambda), \quad (3.26)$$

teremos $\|Q\| \leq \alpha$, logo, Q estará bem definida. Nesse ponto obtemos que $\varepsilon > 0$ deve ser tal que

$$\varepsilon \leq \frac{\alpha}{2 + 2\alpha} (1 - \lambda).$$

Os pontos fixos de Q coincidem com os pontos fixos de \bar{Q} quando restrito a C_α^0 .

Etapa 5. A aplicação Q definida na Etapa 4 possui único ponto fixo, que satisfaz (3.13).

Verifiquemos que Q é uma contração. Como consequência da Desigualdade do Valor Médio, p é lipschitziana, donde

$$\begin{aligned} \|Q(\xi_1) - Q(\xi_2)\| &= \|L^{-1}\Phi(\xi_1) + L^{-1}p - L^{-1}\Phi(\xi_2) - L^{-1}p\| \\ &= \|L^{-1}(\Phi(\xi_1) - \Phi(\xi_2))\| \\ &\leq \|L^{-1}\| \|\Phi(\xi_1) - \Phi(\xi_2)\| \\ &\leq \frac{2}{1-\lambda} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \|p(x + \xi_1(x)) - p(x + \xi_2(x))\| \\ &\leq \frac{2}{1-\lambda} \|p\|_{C_B^1} \|\xi_1 - \xi_2\|, \end{aligned}$$

para quaisquer $\xi_1, \xi_2 \in C_\alpha^0$, portanto, a mesma restrição para a norma $\|p\|_{C_B^1}$ definida em (3.26) garante que Q é uma contração.

Assim, pelo Lema da Contração, concluímos que Q possui um único ponto fixo h , e este satisfaz a equação (3.23), o que finaliza a prova do resultado. \square

O próximo resultado é também bastante técnico e será usado diretamente na demonstração do Teorema de Grobman-Hartman. Omitimos sua demonstração rigorosa por ser semelhante à do Lema 3.2.5, mas pontuamos todas as funções que devem ser definidas, a fim de que a prova possa facilmente ser concluída de maneira análoga à do mesmo.

Proposição 3.2.6. *Sejam $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma transformação linear hiperbólica e $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ um homeomorfismo. O operador $\Phi : C_B^0(\mathbb{R}^n) \rightarrow C_B^0(\mathbb{R}^n)$ definido por*

$$\Phi(g)(x) = Ag(x) - g(F(x)), \quad g \in C_B^0(\mathbb{R}^n), x \in \mathbb{R}^n,$$

é um operador linear limitado com inversa limitada.

Demonstração. Para cada $g \in C_B^0(\mathbb{R}^n)$, a aplicação $x \mapsto \Phi(g)(x)$ é contínua em \mathbb{R}^n , pois A , F e g o são. Considerando agora $f, g \in C_B^0(\mathbb{R}^n)$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, notamos que

$$\begin{aligned} \Phi(\lambda f + g)(x) &= A(\lambda f + g)(x) - (\lambda f + g)(F(x)) \\ &= \lambda Af(x) + Ag(x) + \lambda f(F(x)) + g(F(x)) \\ &= \lambda[Af(x) + f(F(x))] + Ag(x) + g(F(x)) \\ &= \lambda\Phi(f)(x) + \Phi(g)(x), \end{aligned}$$

donde segue a linearidade do operador Φ . Resta mostrarmos que Φ e Φ^{-1} são limitadas.

Estimando a norma de Φ , obtemos, para cada $x \in \mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned} \|\Phi(g)(x)\| &= \|Ag(x) + g(F(x))\| \\ &\leq \|Ag(x)\| + \|g(F(x))\| \\ &\leq \|A\| \|g(x)\| + \|g\| \\ &\leq (\|A\| + 1)\|g\|. \end{aligned}$$

Como A e g são limitadas, segue que Φ é limitada. Para provarmos que Φ é inversível com inversa limitada, consideramos a decomposição $\mathbb{R}^n = E \oplus F$ relativa ao operador A . Usando a mesma notação da Proposição 3.2.5, escrevemos cada $g \in C_B^0(\mathbb{R}^n)$ como $g = g_E + g_F$, com $g_E \in C_B^0(\mathbb{R}^n, E)$ e $g_F \in C_B^0(\mathbb{R}^n, F)$, definimos as funções

$$\begin{aligned} L(g) &= A \circ g - g \circ F, \\ L_E(g_E) &= A_E \circ g_E - g_E \circ F, & L_F(g_F) &= A_F \circ g_F - g_F \circ F, \\ T_E(g_E) &= g_E \circ F, & T_F(g_F) &= g_F \circ F, \\ S(g_E) &= A_E \circ g_E, & U(g_F) &= A_F \circ g_F, \end{aligned}$$

e é possível provar para cada um desses operadores as mesmas propriedades encontradas na Proposição 3.2.5. Dessa forma, obtemos que

$$L_E^{-1} = -(I - T_E^{-1} \circ S)^{-1} \circ T_E^{-1} \quad \text{e} \quad L_F^{-1} = (I - U^{-1} \circ T_F)^{-1} \circ U^{-1},$$

onde, por $L = \Phi$, concluímos que $L^{-1} = \Phi^{-1}$ existe e, mais ainda,

$$\|\Phi^{-1}\| < \frac{2}{1 - \lambda},$$

onde $\lambda > 0$ é dado pelo Corolário 3.2.2 de maneira que $\|A_E\| \leq \lambda$ e $\|A_F^{-1}\| \leq \lambda$. \square

Apresentamos um último resultado que nos fornecerá de maneira indireta as vizinhanças nas quais construiremos a conjugação topológica local enunciada pelo Teorema de Grobman-Hartman. Como estamos interessados em um resultado local, usamos funções de corte para obter um sistema com fluxo globalmente definido sem alterar o sistema original em uma vizinhança do ponto singular. Aqui, denotamos por $(B_r(0))^c \subset \mathbb{R}^n$ o complementar da bola aberta de centro na origem e raio r , isto é, o conjunto

$$(B_r(0))^c = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x \notin B_r(0)\}.$$

Lema 3.2.7. *Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto contendo a origem e $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^1 tal que 0 é um ponto singular hiperbólico de f . Denotando $A = Df(0)$, existem $r > 0$ e $\psi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^1 satisfazendo as propriedades:*

1. $B_{2r}(0) \subset U$, $\psi \equiv f$ em $B_r(0)$ e $\psi \equiv A$ em $(B_{2r}(0))^c$;
2. Representando por φ^* o fluxo do sistema $x' = \psi(x)$, para cada $x \in \mathbb{R}^n$ tem-se que a aplicação $t \mapsto \varphi^*(t, x)$ está definida para todo $t \in \mathbb{R}$;
3. Dado $\varepsilon > 0$, a função $p : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ definida por

$$p(x) := \varphi^*(1, x) - e^A x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (3.27)$$

satisfaz $\|p\|_{C_B^1} \leq \varepsilon$.

Demonstração. Nesta demonstração tomamos a norma euclidiana em \mathbb{R}^n , a qual é diferenciável em $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Considere $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ a parte não linear de f , isto é, para cada $x \in U$ escrevemos

$$f(x) = A(x) + \phi(x), \quad x \in U$$

com ϕ de classe C^1 por f o ser. Note que $\phi(0) = 0$ e $D\phi(0) = 0$, logo, por continuidade, existem $r, \delta > 0$ de maneira que $B_{2r}(0) \subset U$ e valem as estimativas

$$\|\phi(x)\| < \delta \quad \text{e} \quad \|D\phi(x)\| < \delta, \quad (3.28)$$

para todo $x \in B_{2r}(0)$.

Pelo Teorema 2.1.5, existe uma função de corte $\nu : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ tal que $\nu(x) = 1$ se $|x| \leq r$ e $\nu(x) = 0$ se $|x| \geq 2r$. Note que $\sup_{x \in \mathbb{R}} |D\nu(x)| < \infty$ pela Proposição 2.1.4, então definimos $N = \sup_{x \in \mathbb{R}} |D\nu(x)|$.

Defina agora $\psi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ por

$$\psi(x) = \begin{cases} A(x) + \nu(\|x\|)\phi(x), & \text{se } x \in U, \\ A(x) & \text{, se } x \notin U. \end{cases}$$

Como $B_{2r}(0) \subset U$ e $\nu \equiv 0$ em $B_{2r}(0)^c$ segue que $\psi \in C^1(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$. Além disso, $\nu \equiv 1$ em $B_r(0)$, logo $\nu(\|x\|)\phi(x) = \phi(x)$, $\forall x \in B_r(0)$, daí resulta que $\psi \in C^1(\mathbb{R}^n)$.

Nesse sentido, se $x \in B_r(0)$, temos $\nu(\|x\|) = 1$ por definição, logo, $\psi(x) = A(x) + \phi(x) = f(x)$. Da mesma maneira, se $x \notin B_{2r}(0)$, então $\nu(\|x\|) = 0$, logo temos $\psi(x) = A(x)$ e a prova do item 1 do Lema está concluída.

Do Teorema 2.2.2 segue que, para demonstrar o item 2, é suficiente mostrar que ψ é uma função lipschitziana. Para isso, basta provar que $\psi - A$ é lipschitziana. De fato, considerando inicialmente $x \in B_r(0)$, temos $(\psi - A)(x) = \phi(x)$, logo, $D(\psi - A)(x) = D\phi(x)$ e, das limitações em (3.28), $\|D(\psi - A)(x)\| < \delta$. Tomando agora $x \in B_{2r}(0)^c$ temos $(\psi - A)(x) = 0$, logo, $\|D(\psi - A)(x)\| = 0$. Por fim, para $r \leq \|x\| \leq 2r$, temos $(\psi - A)(x) = \nu(\|x\|)\phi(x)$ e, conseqüentemente,

$$\|D(\psi - A)(x)\| \leq \|D\nu(\|x\|)\| \|D(\|x\|)\| \|\phi(x)\| + \|\nu(\|x\|)\| \|D\phi(x)\| < N\delta + \delta.$$

Ao definirmos $M = N\delta + \delta$ segue que $\psi - A$ é lipschitziana, e a prova do item 2 do Lema está concluída.

Considere agora $p(x) = \varphi^*(1, x) - e^A x$, $x \in \mathbb{R}^n$. Por $x \mapsto \varphi^*(1, x)$ e $x \mapsto e^A x$ serem funções de classe C^1 , segue que p é de classe C^1 . Como $\psi \equiv A$ em $(B_{2r}(0))^c$, temos $p \equiv 0$ nesse conjunto, e, em particular, $p \equiv 0$ fora do compacto $\overline{(B_{2r}(0))^c}$. Por p ser contínua, segue que p é limitada, donde $p \in C_B^0$ e, mais ainda, da Proposição 2.1.4 segue imediatamente que $\|Dp(x)\| < \infty$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Além disso, p é uma função de suporte compacto e sua norma C^1 depende diretamente da constante $r > 0$ inicialmente

fixada. Dessa forma, dado $\varepsilon > 0$, podemos escolher r de modo que $\|p\|_{C_B^1} \leq \varepsilon$, o que conclui a demonstração do item 3. \square

3.3 Demonstração do Teorema de Grobman-Hartman

Relembremos que, apesar de considerar a origem como ponto singular de interesse, a versão do Teorema de Grobman-Hartman enunciado e provado abaixo não perde sua generalidade devido ao Teorema 2.2.7, pois no caso geral a demonstração permanece a mesma a menos de uma mudança de coordenadas.

Teorema 3.3.1 (Teorema de Grobman-Hartman). *Suponha que $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ seja uma função de classe C^1 definida no aberto $U \subset \mathbb{R}^n$ tal que $0 \in U$ seja um ponto singular hiperbólico de f . Se $A = Df(0)$, então f e $x \mapsto A(x)$ são localmente topologicamente conjugados.*

Demonstração. A prova do Teorema será feita em cinco etapas.

Etapa 1. Existe uma função $G : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ contínua e limitada que relaciona localmente os fluxos dos sistemas (3.1) e (3.2) no tempo $t = 1$, sistemas estes que correspondem respectivamente às aplicações f e A , no sentido de que $G(\varphi(1, x)) = e^A G(x)$ em uma vizinhança da origem.

Consideremos inicialmente ψ e p dadas pelo Lema 3.2.7. Do fato de p ser contínua e limitada, $\varphi^*(1, \cdot)$ ser um homeomorfismo e e^A ser uma transformação linear hiperbólica, a aplicação Φ definida na Proposição 3.2.6 nos garante a unicidade de uma função contínua e limitada $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ satisfazendo

$$e^A g(x) - g(\varphi^*(1, x)) = p(x), \quad x \in \mathbb{R}^n. \quad (3.29)$$

Definindo então $G : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ por $G(x) = x + g(x)$, de (3.27) e (3.29) obtemos

$$\varphi^*(1, x) + g(\varphi^*(1, x)) = e^A x + e^A g(x),$$

donde

$$G(\varphi^*(1, x)) = e^A G(x). \quad (3.30)$$

Observe que isso significa que G relaciona os fluxos no tempo $t = 1$ dos sistemas linear (3.2) e não linear (3.1) na vizinhança $B_r(0)$, pois $\varphi^*(1, \cdot) \equiv \varphi(1, \cdot)$ nesse conjunto, onde φ é fluxo do sistema (3.1). Note, contudo, que isso não garante que G satisfaça todas as propriedades de conjugação topológica entre esses fluxos, pois só temos garantida sua continuidade até o momento.

Etapa 2. A função $\mathcal{H}(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ definida por

$$\mathcal{H}(x) = \int_0^1 e^{-As} \circ G \circ \varphi(s, x) \, ds$$

satisfaz

$$\mathcal{H}(\varphi^*(t, x)) = e^{At}(\mathcal{H}(x)),$$

para quaisquer $x \in \mathbb{R}^n$ e $t \in \mathbb{R}$.

Observe inicialmente que, por $G = e^{-A} \circ G \circ \varphi^*(1, \cdot)$ devido a (3.30), fazendo a mudança de coordenadas $\tau = s + 1$, temos

$$\begin{aligned} \int_{-t}^0 e^{-As} \circ G \circ \varphi^*(s, x) \, ds &= \int_{-t}^0 e^{-As} \circ e^{-A} \circ G \circ \varphi^*(1, \varphi^*(s, x)) \, ds \\ &= \int_{1-t}^1 e^{-A\tau} \circ G \circ \varphi^*(\tau, x) \, d\tau. \end{aligned} \quad (3.31)$$

Usando então (3.31) e a mudança de coordenadas $\theta = s - t$, obtemos

$$\begin{aligned} e^{At} \circ \mathcal{H}(x) &= \int_0^1 e^{A(t-s)} \circ G \circ \varphi^*(s, x) \, ds \\ &= \int_0^1 e^{A(t-s)} \circ G \circ \varphi^*(s-t, x) \, ds \quad \varphi^*(t, x) \\ &= \int_{1-t}^1 e^{-A\theta} \circ G \circ \varphi^*(\theta, x) \, d\theta \quad \varphi^*(t, x) \\ &= \left(\int_{-t}^0 e^{-A\theta} \circ G \circ \varphi^*(\theta, x) \, d\theta + \int_0^{1-t} e^{-A\theta} \circ G \circ \varphi^*(\theta, x) \, d\theta \right) \varphi^*(t, x) \\ &= \int_0^1 e^{-As} \circ G \circ \varphi^*(s, x) \, ds \quad \varphi^*(t, x) \\ &= \mathcal{H} \circ \varphi^*(t, x) \end{aligned}$$

para quaisquer $x \in \mathbb{R}^n$ e $t \in \mathbb{R}$, como desejado. Em particular, para $t = 1$, isso significa que

$$e^A \circ \mathcal{H}(x) = \mathcal{H} \circ \varphi^*(1, x), \quad (3.32)$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

Etapa 3. As funções G e \mathcal{H} coincidem, isto é, $G(x) = \mathcal{H}(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

Relembremos que devido ao uso da Proposição 3.2.6 para obtermos (3.30), G é a única função contínua da forma $G(x) = x + g(x)$, com g contínua e limitada, que satisfaz (3.32). Dessa maneira, para mostrarmos que \mathcal{H} coincide com G , provaremos que a função $\bar{g} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ dada por $\bar{g}(x) = \mathcal{H}(x) - x$ é limitada, pois a continuidade é imediata da construção da função \mathcal{H} e da função identidade. Para estimarmos a norma de \bar{g} em cada

ponto $x \in \mathbb{R}^n$, note inicialmente que

$$\begin{aligned}\bar{g}(x) &= \int_0^1 e^{-As} \circ G \circ \varphi^*(s, x) \, ds - x \\ &= \int_0^1 e^{-As} \circ (G \circ \varphi^*(s, x) - e^{As}x) \, ds \\ &= \int_0^1 e^{-As} \circ (G \circ \varphi_s^*(x) - \varphi^*(s, x) + \varphi^*(s, x) - e^{As}x) \, ds.\end{aligned}$$

Isso nos leva a

$$\begin{aligned}\|\bar{g}(x)\| &\leq \int_0^1 \|e^{-As}\| \left(\|G \circ \varphi^*(s, x) - \varphi^*(s, x)\| + \|\varphi^*(s, x) - e^{As}x\| \right) ds \\ &\leq e^{\|A\|} \left(\sup_{0 \leq s \leq 1} \|\varphi^*(s, x) + g(\varphi^*(s, x)) - \varphi^*(s, x)\| + \sup_{0 \leq s \leq 1} \|\varphi^*(s, x) - e^{As}x\| \right) \\ &\leq e^{\|A\|} \left(\|g\| + \sup_{0 \leq s \leq 1} \|\varphi^*(s, x) - e^{As}x\| \right).\end{aligned}$$

Lembrando que $\varphi^*(s, x) = x + \int_0^s \psi(\varphi^*(\tau, x)) \, d\tau$ e que $e^{As}x = x + \int_0^s Ae^{A\tau}x \, d\tau$, para $0 \leq s \leq 1$ temos

$$\begin{aligned}\|\varphi^*(s, x) - e^{As}x\| &= \left| \int_0^s (\psi(\varphi^*(\tau, x)) - Ae^{A\tau}x) \, d\tau \right| \\ &\leq \int_0^s (\|\psi(\varphi^*(\tau, x)) - \psi(e^{A\tau}x)\| + \|\psi(e^{A\tau}x) - Ae^{A\tau}x\|) \, d\tau \\ &\leq \int_0^s k \|\varphi^*(\tau, x) - e^{A\tau}x\| \, d\tau + \int_0^s (\|\psi\| + \|A\| \|e^{A\tau}x\|) \, d\tau \\ &\leq k \int_0^s \|\varphi^*(\tau, x) - e^{A\tau}x\| \, d\tau + \|\psi\| + \|A\| e^{\|A\|},\end{aligned}$$

onde k é a constante de Lipschitz de ψ , que existe em decorrência do Teorema do Valor Médio.

Consequentemente, pelo Lema de Gronwall, obtemos

$$\|\varphi^*(s, x) - e^{As}x\| \leq (\|\psi\| + \|A\| e^{\|A\|}) e^{ks} \leq (\|\psi\| + \|A\| e^{\|A\|}) e^k.$$

Finalmente, temos

$$\|\bar{g}(x)\| \leq e^{\|A\|} (\|g\| + \|\psi\|) + \|A\| e^{2\|A\|+k} < \infty,$$

portanto, \bar{g} é limitada. Tem-se garantido, dessa forma, que \mathcal{H} coincide com G , ou seja,

$$G \circ \varphi^*(t, x) = e^{At} \circ G(x),$$

para quaisquer $x \in \mathbb{R}^n$ e $t \in \mathbb{R}$.

Etapa 4. G possui uma função inversa à direita $H : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Como a função p tomada em (3.27) a partir do Lema 3.2.7 possui norma C^1 suficientemente pequena, usando o Lema 3.2.5 podemos tomar uma (única) função $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ contínua e limitada tal que $h(0) = 0$, $\|h\| < 1$ e

$$h(e^A x) - e^A h(x) = p(x + h(x)),$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Definimos então $H : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ por

$$H(x) = x + h(x).$$

Provaremos que essa função é inversa à direita de G . Observe que vale

$$h(e^A x) - e^A h(x) = p(x + h(x)) = \varphi^*(1, x + h(x)) - e^A(x + h(x)),$$

donde obtemos

$$h(e^A x) + e^A x = \varphi^*(1, x + h(x)),$$

isto é,

$$H \circ e^A x = \varphi^*(1, H(x)). \quad (3.33)$$

Aplicando a função G em (3.33), por (3.30) segue que

$$G(H \circ e^A x) = G \circ \varphi^*(1, H(x)) = e^A \circ G(H(x)). \quad (3.34)$$

Escrevendo então $J = G \circ H$, temos

$$J(e^A x) = e^A \circ J(x), \quad (3.35)$$

para todo $x \in U$, com J da forma $J(x) = x + h(x) + g(x + h(x))$. Por g e h serem contínuas e limitadas por construção, a aplicação

$$\eta : x \mapsto h(x) + g(x + h(x))$$

é também contínua e limitada e, por (3.35),

$$e^A \eta(x) - \eta(e^A x) = 0. \quad (3.36)$$

Sendo e^A uma transformação linear hiperbólica e também um homeomorfismo, da Proposição 3.2.6 a função η satisfazendo (3.36) para todo $x \in \mathbb{R}^n$ é única. Podemos concluir então que $\eta \equiv 0$, logo, J é a função identidade, ou seja,

$$G \circ H(x) = x \quad (3.37)$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Portanto, H é inversa à direita de G .

Etapa 5. H é um homeomorfismo que conjuga topologicamente os sistemas linear e não linear em uma vizinhança da origem de ambos os sistemas.

Note que a continuidade de H é imediata por h ser contínua. Para provarmos a injetividade de H , suponha que $x, y \in \mathbb{R}^n$ sejam tais que $H(x) = H(y)$. De (3.33), temos

$$H \circ e^A x = \varphi^*(1, H(x)) = \varphi^*(1, H(y)) = H \circ e^A y.$$

Em particular, para cada $i \in \mathbb{Z}$, segue que

$$H \circ (e^A)^i x = H \circ (e^A)^i y.$$

Usando a definição de H , temos então

$$(e^A)^i x + h\left((e^A)^i x\right) = (e^A)^i y + h\left((e^A)^i y\right)$$

e, por h ser limitada,

$$\left\| (e^A)^i (x - y) \right\| = \left\| h\left((e^A)^i x\right) - h\left((e^A)^i y\right) \right\| \leq 2\|h\|.$$

Isso mostra que o conjunto $X = \left\{ \left\| (e^A)^i (x - y) \right\|; i \in \mathbb{Z} \right\}$ é limitado. Contudo, por e^A ser transformação linear hiperbólica, para cada $z \neq 0$, vale

$$\lim_{i \rightarrow +\infty} \left\| (e^A)^i z \right\| = +\infty \quad \text{ou} \quad \lim_{i \rightarrow -\infty} \left\| (e^A)^i z \right\| = +\infty.$$

Portanto, X somente é limitado se $x - y = 0$, isto é, $x = y$.

Tomemos então U' aberto em $B_r(0)$ contendo a origem de forma que $\overline{U'} \subset B_r(0)$ e $H(\overline{U'}) \subset B_r(0)$. Provadas injetividade e continuidade de H em \mathbb{R}^n , em particular vale o mesmo no conjunto $\overline{U'} \subset \mathbb{R}^n$. Do Teorema 2.1.1 segue que $H|_{\overline{U'}}$ é um homeomorfismo. Mais ainda, H restrita a U' é também um homeomorfismo, ou seja, possui inversa contínua. Disso e de (3.37) segue que $H^{-1} = G$ em U' . Em particular, G restrita à $H(U')$ é um homeomorfismo em U' e, do Teorema 2.1.2, conclui-se que $H(U')$ é aberto. Portanto, U' e $V' = H(U')$ são as vizinhanças desejadas e H restrito à essas vizinhanças, o homeomorfismo que torna os sistemas (3.1) e (3.2) localmente topologicamente conjugados. \square

4 Teorema da Variedade Estável Local

Suponha que $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ é de classe C^1 no aberto $U \subset \mathbb{R}^n$ e que $x_0 \in U$ é um ponto singular hiperbólico do sistema

$$x' = f(x). \quad (4.1)$$

Vimos no capítulo anterior que o Teorema de Grobman-Hartman garante que o comportamento local das soluções de (4.1) é descrito em função do sistema linearizado

$$y' = Df(x_0)y. \quad (4.2)$$

Em particular, em uma vizinhança de x_0 , as trajetórias de (4.1) cujo conjunto ω -limite é $\{x_0\}$ correspondem às trajetórias de (4.2) cujo conjunto ω -limite é $\{0\}$. O conjunto de tais trajetórias do sistema (4.1) é útil na determinação do comportamento das demais trajetórias nessa vizinhança. Nesse capítulo mostraremos que esse conjunto especial de trajetórias é descrito localmente pelo gráfico de uma função e, por esse motivo, é denominado de variedade estável local de x_0 .

Assim, nosso objetivo nesse capítulo é caracterizar localmente a estrutura do conjunto dos pontos do sistema (4.1) que possuem trajetórias que convergem para um determinado ponto singular quando $t \rightarrow +\infty$, caracterização essa dada pelo Teorema da Variedade Estável Local, que será demonstrado na seção 4.2 utilizando o Teorema da Função Implícita em Espaços de Banach. De maneira análoga pode-se definir um Teorema da Variedade Instável Local, que por sua vez caracteriza a estrutura dos pontos em uma vizinhança de um ponto singular hiperbólico cujas trajetórias convergem para esse ponto quando $t \rightarrow -\infty$. Provaremos que os pontos da variedade estável local variam diferenciavelmente com relação ao ponto inicial x_0 e a parte não linear do sistema (4.1).

Supondo $x_0 \in U$ um ponto singular hiperbólico do sistema (4.1), ao longo desse capítulo denotaremos por E^s e E^u os espaços gerados pelos autovalores de $Df(x_0)$ com parte real negativa e positiva, respectivamente, donde decompomos o espaço euclidiano real de dimensão n como $\mathbb{R}^n = E^s \oplus E^u$.

Na primeira seção desse capítulo definimos variedades estável e instável (globais e locais) e verificamos algumas de suas propriedades. Na seção 4.2 apresentamos dois lemas que auxiliarão na demonstração do Teorema da Variedade Estável Local. Esse capítulo é baseado em Júnior e Mello (1979).

4.1 Primeiras propriedades da variedade estável

Como no capítulo anterior, considere $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto, $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma aplicação de classe C^1 e suponha que $x_0 \in U$ é ponto singular hiperbólico do sistema (4.1). Definimos a variedade estável de x_0 como o conjunto

$$W^s(x_0) = \{x \in U \mid \omega(x) = \{x_0\}\}.$$

Analogamente, a variedade instável de x_0 é definida por

$$W^u(x_0) = \{x \in U \mid \alpha(x) = \{x_0\}\}.$$

Exemplo 4.1.1. *No Exemplo 3.1.3, o sistema (3.3) possui o eixo x_1 como variedade estável e a reta $x_2 = -x_1$ como variedade instável e, analogamente, o eixo y_1 representa a variedade estável e o eixo y_2 , a variedade instável do sistema (3.4). Já no Exemplo 3.1.4, o eixo y representa a variedade instável e a parábola $y = -x^2/3$, a variedade estável do sistema (3.5), enquanto que o eixo x representa a variedade estável e o eixo y a variedade instável de seu sistema linearizado (3.6). De maneira mais geral, todo sistema linear hiperbólico tem $W^s(0)$ coincidindo com seu espaço estável E^s e $W^u(0)$, com seu espaço instável E^u .*

Dada $V \subset U$ vizinhança de x_0 , definimos a variedade estável e instável local de x_0 relativa a V como os conjuntos

$$W_V^s(x_0) = \{x \in W^s(x_0) \mid \varphi(t, x) \in V, \forall t \geq 0\},$$

e

$$W_V^u(x_0) = \{x \in W^u(x_0) \mid \varphi(t, x) \in V, \forall t \leq 0\},$$

respectivamente.

Repare que podemos nos limitar ao estudo da variedade estável local do sistema (4.1), pois todos os resultados obtidos nesse caso, quando aplicados ao sistema $x' = -f(x)$, nos fornecem as informações correspondentes à variedade instável local do sistema (4.1).

Para vizinhanças suficientemente pequenas de x_0 temos a seguinte caracterização para a variedade estável local.

Proposição 4.1.2. *Se $x_0 \in U$ é um ponto singular hiperbólico do sistema (4.1), existe uma vizinhança V de x_0 tal que*

$$W_V^s(x_0) = \{x \in U \mid \varphi(t, x) \in V, \forall t \geq 0\}.$$

Demonstração. Pelo Teorema de Grobman-Hartman existem uma vizinhança W da origem do sistema (4.2), uma vizinhança Z de x_0 e uma conjugação topológica local $H :$

$Z \rightarrow W$. Em particular, podemos tomar uma vizinhança V de x_0 de forma que $\bar{V} \subset Z$. Resta mostrarmos que, se $\varphi(t, x) \in V$ para todo $t \geq 0$, então $\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t, x) = x_0$.

Do fato de H ser contínua e \bar{V} ser compacto, $H(\bar{V})$ é compacto, logo, se $y \in H(\bar{V})$ é tal que sua trajetória no sistema linearizado permanece em $H(\bar{V})$ para $t \geq 0$, então $y \in E^s$, logo, $\omega(y) = \{0\}$. Ainda, por H ser conjugação topológica, qualquer ponto $x \in \bar{V}$ tal que $H(x) = y \in E^s$ possui a propriedade de que $\varphi(t, x) \in \bar{V}$ para todo $t \geq 0$, ou seja, $x \in E^s$, donde $\omega(x) = \{x_0\}$. Podemos então de fato encontrar V vizinhança de x_0 de forma que $W_V^s = \{x \in U \mid \varphi(t, x) \in V, \forall t \geq 0\}$. \square

4.2 O Teorema da Variedade Estável Local

Utilizando o Teorema da Função Implícita em Espaços de Banach, nesta seção mostraremos que existe uma função γ de classe C^1 , definida em vizinhanças adequadas de E^s e E^u , cujo gráfico coincide com a variedade estável local $W_V^s(x_0)$. Em particular, isso mostra que $W_V^s(x_0)$ varia diferenciavelmente com relação tanto ao ponto $x_0 \in U$ quanto à parte não linear do sistema (4.1).

A menos de uma translação do sistema (4.1), podemos sempre considerar $x_0 = 0$. Construiremos, inicialmente, dois resultados que nos ajudarão na obtenção da função γ . O primeiro deles determina uma fórmula para toda solução cuja imagem está na variedade estável local. Como \mathbb{R}^n pode ser decomposto como soma direta dos espaços E^s e E^u , usando a fórmula de Taylor e uma mudança linear de coordenadas podemos reescrever o sistema (4.1) como

$$\begin{aligned} x' &= P(x) + Y_s(x, y) \\ y' &= Q(y) + Y_u(x, y) \end{aligned} \quad (4.3)$$

onde P e Q são matrizes reais tais que os autovalores de P têm parte real negativa e os de Q têm parte real positiva, e $Y = (Y_s, Y_u) : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma aplicação de classe C^1 tal que $Y(0, 0) = 0$ e $DY(0, 0) = 0$. Escreveremos ainda $B_r^s = B(0, r) \subset E^s$ e $B_r^u = B(0, r) \subset E^u$, onde $B(0, r)$ denota a bola de centro na origem e raio $r > 0$ em cada um dos espaços dados.

Lema 4.2.1. *O sistema (4.3) admite $r > 0$ tal que, para a vizinhança $V = B_r^s \times B_r^u$ da origem, uma solução $t \mapsto (x(t), y(t))$ do sistema (4.3) tem imagem contida na variedade local $W_V^s(0)$ para todo $t \geq 0$ se, e somente se, as funções $x : [0, +\infty) \rightarrow B_r^s$ e $y : [0, +\infty) \rightarrow B_r^u$ são contínuas e satisfazem*

$$x(t) = e^{Pt} z_0 + \int_0^t e^{P(t-\tau)} Y_s(x(\tau), y(\tau)) d\tau \quad (4.4)$$

e

$$y(t) = - \int_t^{+\infty} e^{Q(t-\tau)} Y_u(x(\tau), y(\tau)) d\tau \quad (4.5)$$

para $z_0 = x(0) \in E^s$.

Demonstração. Como os autovalores de Q têm todos parte real positiva, da Proposição 2.2.4 existem $M, \mu > 0$ tais que

$$\|e^{Qt}\| \leq M e^{\mu t}, \quad t \leq 0. \quad (4.6)$$

Suponha inicialmente que existe $r > 0$ tal que a vizinhança $V = B_r^s \times B_r^u$ da origem satisfaz $(x(t), y(t)) \in W_V^s((0, 0))$ para $t \geq 0$, para alguma solução $t \mapsto (x(t), y(t))$ do sistema (4.3). Pela fórmula de variação dos parâmetros, segue que

$$x(t) = e^{Pt} z_0 + \int_0^t e^{P(t-\tau)} Y_s(x(\tau), y(\tau)) \, d\tau \quad (4.7)$$

e

$$y(t) = e^{Qt} y_0 + \int_0^t e^{Q(t-\tau)} Y_u(x(\tau), y(\tau)) \, d\tau, \quad (4.8)$$

onde $x(0) = z_0 \in E^s$ e $y(0) = y_0 \in E^u$.

A equação (4.7) já está de acordo com a equação (4.4). Observe agora que, para qualquer $v \in E^u$,

$$\|v\| = \|e^{-Qt} e^{Qt} v\| \leq \|e^{-Qt}\| \|e^{Qt} v\|$$

logo,

$$\frac{\|v\|}{\|e^{-Qt}\|} \leq \|e^{Qt} v\|. \quad (4.9)$$

Em particular, para

$$v = y_0 + \int_0^t e^{-Q\tau} Y_u(x(\tau), y(\tau)) \, d\tau,$$

de (4.6) e (4.9), temos

$$\begin{aligned} \|y(t)\| &= \left\| e^{Qt} y_0 + \int_0^t e^{Q(t-\tau)} Y_u(x(\tau), y(\tau)) \, d\tau \right\| \\ &= \left\| e^{Qt} \left(y_0 + \int_0^t e^{-Q\tau} Y_u(x(\tau), y(\tau)) \, d\tau \right) \right\| \\ &\geq \frac{1}{\|e^{-Qt}\|} \left\| y_0 + \int_0^t e^{-Q\tau} Y_u(x(\tau), y(\tau)) \, d\tau \right\| \\ &\geq \frac{1}{M} e^{\mu t} \left\| y_0 + \int_0^t e^{-Q\tau} Y_u(x(\tau), y(\tau)) \, d\tau \right\|, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\|y(t)\| \geq \frac{1}{M} e^{\mu t} \left\| y_0 + \int_0^t e^{-Q\tau} Y_u(x(\tau), y(\tau)) \, d\tau \right\|, \quad (4.10)$$

para todo $t \geq 0$.

Mas, por hipótese, a imagem de y é limitada para todo t não negativo e, além disso, $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{\mu t} = \infty$, logo, para que a desigualdade em (4.10) seja verdadeira, devemos ter

$$y_0 = - \int_0^{+\infty} e^{-Q\tau} Y_u(x(\tau), y(\tau)) d\tau. \quad (4.11)$$

A expressão acima está bem definida pois a função $e^{-Q\tau} Y_u(x(\tau), y(\tau))$ é limitada em uma vizinhança da origem e possui decaimento exponencial para $t \rightarrow +\infty$, logo, é integrável no intervalo $(0, +\infty)$.

Substituindo o resultado obtido em (4.11) na equação (4.8), obtemos

$$\begin{aligned} y(t) &= -e^{Qt} \left(\int_0^{+\infty} e^{-Q\tau} Y_u(x(\tau), y(\tau)) d\tau - \int_0^t e^{-Q\tau} Y_u(x(\tau), y(\tau)) d\tau \right) \\ &= -e^{Qt} \int_t^{+\infty} e^{-Q\tau} Y_u(x(\tau), y(\tau)) d\tau \\ &= - \int_t^{+\infty} e^{Q(t-\tau)} Y_u(x(\tau), y(\tau)) d\tau. \end{aligned}$$

Portanto, vale também a equação (4.5).

Reciprocamente, se $x : [0, +\infty) \rightarrow B_r^s$ e $y : [0, +\infty) \rightarrow B_r^u$ são dadas pelas equações (4.4) e (4.5) e $r > 0$ é tal que $V = B_r^s \times B_r^u$ é uma vizinhança da origem na qual vale a Proposição 4.1.2, então, usando a Regra de Leibniz para derivar sob o sinal da integral, que pode ser encontrada em (LIMA, 2018, p 144), temos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} x(t) &= P e^{Pt} z_0 + Y_s(x(t), y(t)) + \int_0^t P e^{P(t-\tau)} Y_s(x(\tau), y(\tau)) d\tau \\ &= P \left(e^{Pt} z_0 + \int_0^t e^{P(t-\tau)} Y_s(x(\tau), y(\tau)) d\tau \right) + Y_s(x(t), y(t)) \\ &= P(x(t)) + Y_s(x(t), y(t)). \end{aligned}$$

Além disso, como consequência do Teorema da Convergência Dominada e do Teorema do Valor Médio há uma correspondência entre derivação e integração imprópria, encontrada

em (FOLLAND, 2013, p 54), de onde obtemos

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt}y(t) &= \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^t e^{Q(t-\tau)} Y_u(x(\tau), y(\tau)) d\tau \\
 &= \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^0 e^{Q(t-\tau)} Y_u(x(\tau), y(\tau)) d\tau + \frac{d}{dt} \int_0^t e^{Q(t-\tau)} Y_u(x(\tau), y(\tau)) d\tau \\
 &= \int_{-\infty}^0 \frac{d}{dt} e^{Q(t-\tau)} Y_u(x(\tau), y(\tau)) d\tau + Y_u(x(t), y(t)) + \int_0^t Q e^{Q(t-\tau)} Y_s(x(\tau), y(\tau)) d\tau \\
 &= \int_{-\infty}^0 Q e^{Q(t-\tau)} Y_u(x(\tau), y(\tau)) d\tau + Y_u(x(t), y(t)) + \int_0^t Q e^{Q(t-\tau)} Y_s(x(\tau), y(\tau)) d\tau \\
 &= Q \left(\int_{-\infty}^t e^{(t-\tau)} Y_u(x(\tau), y(\tau)) d\tau \right) + Y_u(x(t), y(t)) \\
 &= Q(y(t)) + Y_u(x(t), y(t)).
 \end{aligned}$$

Portanto, $(x(t), y(t))$ é solução do sistema (4.3) e, por hipótese, temos $(x(t), y(t)) \in W_V^s(0)$ para todo $t \geq 0$. \square

Para o próximo resultado, introduziremos os seguintes espaços normados:

$$B = C^1(\overline{B_r^s \times B_r^u}, \mathbb{R}^n), \text{ com norma } C^1, \text{ para algum } r > 0,$$

$$B_k = B(0, k) \subset B, \text{ com norma } C^1,$$

$$C^s = \{g : [0, +\infty) \rightarrow E^s \mid g \text{ é contínua e limitada}\}, \text{ com norma uniforme,}$$

$$C^u = \{h : [0, +\infty) \rightarrow E^u \mid h \text{ é contínua e limitada}\}, \text{ com norma uniforme}$$

$$C_r^s = B(0, r) \subset C^s, \text{ com norma uniforme}$$

$$C_r^u = B(0, r) \subset C^u, \text{ com norma uniforme,}$$

onde a norma uniforme é a norma do supremo. Observamos inicialmente que os espaços $E^s \times B$, $C_r^s \times C_r^u$ e $C^s \times C^u$ munidos de suas respectivas normas induzidas são espaços de Banach. Definiremos, no resultado que segue, uma função de $E^s \times B \times C_r^s \times C_r^u$ em $C^s \times C^u$ a partir do que obtivemos no Lema 4.2.1 na qual será possível aplicar o Teorema da Função Implícita, que nos garantirá a existência de uma função Φ que será usada para provarmos o Teorema da Variedade Estável.

Lema 4.2.2. *Sob as condições apresentadas no Lema 4.2.1, defina a função $F = (F^s, F^u) : E^s \times B \times C_r^s \times C_r^u \rightarrow C^s \times C^u$ por*

$$F^s(\tilde{x}, Y, x, y)(t) = x(t) - e^{Pt}\tilde{x} - \int_0^t e^{P(t-\tau)} Y_s(x(\tau), y(\tau)) d\tau$$

e

$$F^u(\tilde{x}, Y, x, y)(t) = y(t) + \int_t^{+\infty} e^{Q(t-\tau)} Y_u(x(\tau), y(\tau)) d\tau.$$

Existem $\delta, \rho > 0$ e uma função $\Phi : B_\delta^s \times B_\delta \rightarrow C_\rho^s \times C_\rho^u$ de classe C^1 tais que $F(\tilde{x}, Y, x, y) = (0, 0)$ se, e somente se, $(x, y) = \Phi(\tilde{x}, Y)$.

Demonstração. Provemos inicialmente que F está bem definida, isto é, que as funções F^s e F^u são limitadas, pois sua continuidade é imediata da continuidade das funções envolvidas em suas definições.

Como $x \in C_r^s$ e $y \in C_r^u$, temos $\|x(t)\| \leq r$ e $\|y(t)\| \leq r$ para todo $t \in [0, +\infty)$. Além disso, como $Y \in B$, temos $Y = (Y_s, Y_u) : \overline{B_r^s} \times \overline{B_r^u} \rightarrow \mathbb{R}^n$ contínua definida em um domínio compacto, logo, suas funções coordenadas Y_s e Y_u são limitadas, digamos, por k_1 e k_2 , isto é, $\|Y_s(x(t), y(t))\| \leq k_1$ e $\|Y_u(x(t), y(t))\| \leq k_2$ para quaisquer $t \geq 0$. Mais ainda, sejam $M, \mu > 0$ tais que $\|e^{Pt}\| \leq Me^{-\mu t} \leq M$ para $t \geq 0$ e $\|e^{Qt}\| \leq Me^{\mu t}$ para $t \leq 0$. Por fim, para cada $\tilde{x} \in \mathbb{R}^n$ existe $a \in \mathbb{R}$ tal que $\|\tilde{x}\| \leq a$. Dessa forma, para todo $t \geq 0$,

$$\begin{aligned} \|F^s(\tilde{x}, Y, x, y)(t)\| &= \left\| x(t) - e^{Pt}\tilde{x} - \int_0^t e^{P(t-\tau)} Y_s(x(\tau), y(\tau)) d\tau \right\| \\ &\leq \|x(t)\| + \|e^{Pt}\tilde{x}\| + \int_0^t \|e^{P(t-\tau)}\| \|Y_s(x(\tau), y(\tau))\| d\tau \\ &\leq r + Ma + Mk_1 \int_0^t e^{-\mu(t-\tau)} d\tau \\ &= r + Ma + Mk_1 \left(\frac{1 - e^{-\mu t}}{\mu} \right) \\ &\leq r + Ma + \frac{Mk_1}{\mu} \end{aligned}$$

e, analogamente,

$$\begin{aligned} \|F^u(\tilde{x}, Y, x, y)(t)\| &= \left\| y(t) + \int_t^{+\infty} e^{Q(t-\tau)} Y_u(x(\tau), y(\tau)) d\tau \right\| \\ &\leq \|y(t)\| + \int_t^{+\infty} \|e^{Q(t-\tau)}\| \|Y_u(x(\tau), y(\tau))\| d\tau \\ &\leq r + \int_t^{+\infty} Me^{\mu(t-\tau)} k_2 d\tau \\ &= r + Mk_2 \lim_{A \rightarrow \infty} \int_t^A e^{\mu(t-\tau)} d\tau \\ &= r + Mk_2 \left(-\frac{1}{\mu} \right) \left(\lim_{A \rightarrow \infty} e^{\mu(t-A)} - e^0 \right) \\ &= r + \frac{Mk_2}{\mu}. \end{aligned}$$

Concluimos então que F está de fato bem definida.

Dados $(\tilde{x}, Y, x, y) \in E^s \times B \times C_r^s \times C_r^u$, da definição de F e pelo Lema 4.2.1, $F(\tilde{x}, Y, x, y) = (0, 0)$ se, e somente se, $(x(t), y(t)) \in W_V^s((0, 0))$ para todo $t \geq 0$. Além disso, da substituição do vetor nulo em F^s e F^u segue imediatamente que $F(0, 0, 0, 0) =$

$(0, 0)$. Observe ainda que

$$F^s(0, 0, x, y)(t) = x(t) - e^{Pt}0 - \int_0^t e^{P(t-\tau)}0 \, d\tau = x(t)$$

e

$$F^u(0, 0, x, y)(t) = y(t) + \int_t^{+\infty} e^{Q(t-\tau)}0 \, d\tau = y(t),$$

o que implica que $F(0, 0, x, y) = (x, y)$.

Considerando agora $r(x, y) \equiv 0$, temos $r(x, y) = o((x, y))$ e

$$F(0, 0, x, y) = F(0, 0, 0, 0) + (x, y) + r(x, y),$$

donde, pela definição de derivada, segue que $DF_{(x,y)}(0, 0, 0, 0)(x, y) = (x, y)$, ou seja, $DF_{(x,y)}(0, 0, 0, 0) = Id_{C^s \times C^u}$.

Sendo, portanto, $DF_{(x,y)}(0, 0, 0, 0)$ uma transformação linear limitada inversível, pelo Teorema da Função Implícita existem uma vizinhança Z de $(0, 0) \in E^s \times B$ e uma única função $\tilde{\Phi} : Z \rightarrow C_r^s \times C_r^u$ de classe C^1 tais que $\tilde{\Phi}(\tilde{x}, Y) = (x, y)$. Escrevendo $Z = Z_1 \times Z_2$, onde $Z_1 \subset E^s$ e $Z_2 \subset B$, existem então $\delta_1, \delta_2 > 0$ tais que $B_{\delta_1}^s \subset Z_1$ e $B_{\delta_2} \subset Z_2$. Fazendo $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, temos $(0, 0) \in B_\delta^s \times B_\delta \subset Z$, logo, podemos considerar $\Phi : B_\delta^s \times B_\delta \rightarrow C_\rho^s \times C_\rho^u$ restrição de $\tilde{\Phi}$, com $0 < \rho \leq r$. Ainda pelo teorema, tal função satisfaz $\Phi(0, 0) = (0, 0)$ e $F(\tilde{x}, Y, \Phi(\tilde{x}, Y)) = (0, 0)$ para qualquer (\tilde{x}, Y) no domínio de Φ . Em particular, $(0, 0) \in Z$ é um ponto do domínio de Φ e $F(0, 0, x, y) = (x, y)$, logo, $F(\tilde{x}, Y, \Phi(\tilde{x}, Y)) = (0, 0)$ se, e somente se, $\Phi(\tilde{x}, Y) = (x, y)$, como queríamos demonstrar. \square

Estamos finalmente em condições de demonstrar o Teorema da Variedade Estável Local.

Teorema 4.2.3 (Teorema da Variedade Estável Local). *Dado $x_0 \in U$ ponto singular hiperbólico do sistema (4.3), existem $r > 0$ e $\gamma : B_r^s \rightarrow B_r^u$ de classe C^1 de maneira que $\gamma(0) = 0$, $D\gamma(0) = 0$, γ varia em classe C^1 com relação à parte não linear do campo e $W_V^s(0)$ é o gráfico de γ , onde $V = B_r^s \times B_r^u$.*

Demonstração. Sem perda de generalidade, suponha $x_0 = 0$. Pelo Lema 4.2.1 podemos tomar $\bar{r} > 0$ tal que, para $V_1 = B_{\bar{r}}^s \times B_{\bar{r}}^u$, as equações (4.4) e (4.5) representam as soluções do sistema (4.3) que pertencem à variedade estável local $W_{V_1}^s(0)$ para $t \geq 0$. Para tal $\bar{r} > 0$, considere também as constantes $\delta, \rho > 0$ e a função $\Phi : B_\delta^s \times \tilde{B}_\delta \rightarrow C_\rho^s \times C_\rho^u$ de classe C^1 definida implicitamente em termos das soluções $(x(t), y(t))$ do sistema (4.3) na variedade estável $W_{V_1}^s(0)$, dadas pelo Lema 4.2.2, onde \tilde{B}_δ é definido por \bar{r} .

Do fato de tomarmos $Y = (Y_s, Y_u) \in \tilde{B}_\delta$, pelo Lema 3.2.7 existem $0 < \tilde{r} \leq \bar{r}$ e $\tilde{Y} = (\tilde{Y}_s, \tilde{Y}_u)$ de classe C^1 definida em \mathbb{R}^n de maneira que $\tilde{Y} \equiv Y$ em $B_{\tilde{r}}^s \times B_{\tilde{r}}^u$ e $\|\tilde{Y}\| < \delta$.

Note que, em particular, restringindo \tilde{Y} a $\overline{B_r^s \times B_r^u}$, isso significa que $\tilde{Y} \in \tilde{B}_\delta$ e $\tilde{Y}(0) = 0$, donde $\tilde{Y}_s(0) = \tilde{Y}_u(0) = 0$.

Desejamos agora construir a função γ satisfazendo as hipóteses do Teorema. Fixe então $r \leq \min\{\tilde{r}, \rho, \delta\}$ positivo e defina $\gamma : B_r^s \rightarrow B_r^u$ por

$$\gamma(\tilde{x}) = \Phi^u(\tilde{x}, \tilde{Y})(0).$$

Note que γ está bem definida pois $\Phi^u(\tilde{x}, \tilde{Y})$ é uma função em C^u de norma menor que r , logo, $\Phi^u(\tilde{x}, \tilde{Y})(0) \in B_r^u$.

Do fato de Φ ser de classe C^1 segue que tanto a função γ quanto sua variação com relação ao campo \tilde{Y} são de classe C^1 . Esse último significa que, à medida que a parte não linear da função f varia em classe C^1 , \tilde{Y} também varia em classe C^1 e, conseqüentemente, a aplicação γ definida em função de \tilde{Y} varia em classe C^1 .

Defina agora $V = B_r^s \times B_r^u$. Para cada $\tilde{x} \in B_r^s$, temos $\gamma(\tilde{x}) \in B_r^u$, logo, novamente pelos Lemas 4.2.1 e 4.2.2, por Φ ser unicamente determinada, o gráfico de γ ,

$$\text{Graf}(\gamma) = \{(\tilde{x}, \gamma(\tilde{x})) \mid \tilde{x} \in B_r^s\},$$

coincide com $W_V^s(0)$.

Observe agora que

$$F^s(0, \tilde{Y}, 0, 0) = - \int_0^t e^{P(t-\tau)} \tilde{Y}_s(0, 0) d\tau = 0$$

e

$$F^u(0, \tilde{Y}, 0, 0) = - \int_t^\infty e^{Q(t-\tau)} \tilde{Y}_u(0, 0) d\tau = 0,$$

isto é, $F(0, \tilde{Y}, 0, 0) = (0, 0)$, logo, da construção de Φ , temos $\gamma(0) = \Phi^u(0, \tilde{Y})(0) = 0$.

Mostremos por fim que $D\gamma(0) = 0$. Do Teorema da Função Implícita e da definição de γ , temos

$$D\gamma(0) = D\Phi^u(0, \tilde{Y})(0)$$

e

$$D\Phi(\tilde{x}, Y) = \left(- \left(D_{(x,y)} F(\tilde{x}, \tilde{Y}, x, y) \right)^{-1} D_{(\tilde{x}, Y)} F(\tilde{x}, \tilde{Y}, x, y) \right).$$

Da definição de F , segue que

$$D_{(x,y)} F^s(0, \tilde{Y}, x, y)(t) = (1, 0) - \int_0^t e^{P(t-\tau)} D_{(x,y)} \tilde{Y}_s(x(\tau), y(\tau)) d\tau$$

e

$$D_{(x,y)} F^u(0, \tilde{Y}, x, y)(t) = (0, 1) - \int_t^\infty e^{Q(t-\tau)} D_{(x,y)} \tilde{Y}_u(x(\tau), y(\tau)) d\tau,$$

logo,

$$D_{(x,y)}F(0, \tilde{Y}, 0, 0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = Id.$$

Agora, note que

$$D_{(\tilde{x}, Y)}F^s(0, \tilde{Y}, x, y) = (-e^{Pt}, 0) - \int_0^t e^{P(t-\tau)} D_{(\tilde{x}, \tilde{Y})} \tilde{Y}_s(x(\tau), y(\tau)) d\tau$$

e

$$D_{(\tilde{x}, Y)}F^u(0, Y, x, y) = \int_t^\infty e^{Q(t-\tau)} D_{(\tilde{x}, \tilde{Y})} \tilde{Y}_u(x(\tau), y(\tau)) d\tau,$$

consequentemente,

$$D_{(\tilde{x}, Y)}F(0, \tilde{Y}, 0, 0) = \begin{pmatrix} D_{(\tilde{x}, Y)}F^s(0, \tilde{Y}, 0, 0) \\ D_{(\tilde{x}, Y)}F^u(0, \tilde{Y}, 0, 0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -e^{Pt} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dessa forma,

$$D\Phi(0, \tilde{Y}) = \begin{pmatrix} D\Phi^s(0, \tilde{Y}) \\ D\Phi^u(0, \tilde{Y}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{Pt} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Concluimos finalmente que

$$D\gamma(0) = D\Phi^u(0, \tilde{Y}) = 0,$$

o que finaliza a prova do Teorema. □

5 Artigo: Phase portraits of a family of integrable quadratic systems with two invariant parabolas

Neste capítulo apresentamos os resultados obtidos no estudo de uma família de sistemas quadráticos integráveis, organizados em formato de artigo a ser futuramente submetido. O texto se encontra nas normas da Revista *Dynamical Systems: An International Journal*, de acordo com o layout de Taylor & Francis.

Retratos de fase de uma família de sistemas quadráticos integráveis com duas parábolas invariantes

Phase portraits of a family of integrable quadratic systems with two invariant parabolas

Andressa Paola Cordeiro^a and Maurício Fronza da Silva^a

^a Mathematics Department, Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria, Brazil

ARTICLE HISTORY

Compiled May 28, 2021

RESUMO

Apresentamos o retrato de fase global no disco de Poincaré de todos os sistemas diferenciais quadráticos planares com duas parábolas invariantes dadas por equações $f_1 = 0, f_2 = 0$ e integral primeira da forma $H = f_1^\alpha f_2^\beta$, onde α, β são constantes reais.

PALAVRAS-CHAVE

Sistemas quadráticos; retratos de fase; parábolas invariantes.

ABSTRACT

We provide the global phase portrait in the Poincaré disc of all quadratic planar differential systems with two invariant parabolas given by equations $f_1 = 0, f_2 = 0$ and a first integral of the form $H = f_1^\alpha f_2^\beta$, where α, β are real constants.

KEYWORDS

Quadratic system; phase portraits; invariant parabolas.

1. Introduction and statement of main results

In this work, we consider a planar polynomial differential system of the form

$$\dot{x} = P(x, y), \quad \dot{y} = Q(x, y), \quad (1)$$

where P and Q are real polynomials defined on \mathbb{R}^2 and the derivative with respect to the independent variable t is denoted by the dot. If $d(P)$ and $d(Q)$ denote the degrees of P and Q , respectively, we say that the planar polynomial differential system (1) has *degree* $d = \max\{d(P), d(Q)\}$. In the case that $d = 2$, we simply say that system (1) is a *quadratic system*.

Let $U \subset \mathbb{R}^2$ be an open and dense set. The vector field X given by system (1) is *integrable* in \mathbb{R}^2 if there is an analytic non-locally constant function $H : U \rightarrow \mathbb{R}$, called a *first integral* of system (1), which is constant on each orbit of X .

CONTACT Andressa Paola Cordeiro. Email: andressa.paola@acad.ufsm.br

CONTACT Maurício Fronza da Silva. Email: mauriciofronzadasilva@gmail.com

Suppose that X is the vector field defined by system (1). Let f be a real polynomial function not identically zero defined on \mathbb{R}^2 . The curve defined by $f = 0$ is an *invariant algebraic curve* of system (1) if there exists a real polynomial K defined on \mathbb{R}^2 , called the *cofactor* of the invariant algebraic curve $f = 0$, such that

$$X(f) = P \frac{\partial f}{\partial x} + Q \frac{\partial f}{\partial y} = Kf. \quad (2)$$

Invariant algebraic curves that are relatively prime are used to construct first integrals.

The class of systems of the form (1) is very large. Even for the quadratic systems, despite being intensely studied, the problem of the topological classification is still open. The strategy used to improve knowledge about them is the study of subclasses of these systems satisfying specific properties, such as integrability.

The normal form of a quadratic system with an invariant parabola was presented in [1]. In [2] the authors studied the quadratic systems with invariant hyperbolas. The works [3], [4], [5] and [6] classify, for instance, the global phase portraits of quadratic integrable vector fields having two invariant straight lines, two invariant circles, an ellipse and a straight line, a parabola and a straight line as invariant, respectively.

In this work we provide the normal forms and the global phase portraits in the Poincaré disc of all planar differential polynomial systems with degree less or equal 2, different of the null system, having two parabolas defined by $f_1 = 0, f_2 = 0$ as invariant algebraic curves, and a first integral of the form $H = f_1^\alpha f_2^\beta$, where α, β are real constants. First we observe that, under these conditions, the axes of the parabolas are parallel.

Proposition 1.1. *If a planar polynomial differential system of degree ≤ 2 , different of the null system, has two parabolas defined by $f_1 = 0, f_2 = 0$ as invariant algebraic curves, and a first integral of the form $H = f_1^\alpha f_2^\beta$ with α, β real constants, then there exists a system of coordinates such that*

$$f_1(x, y) = y - x^2 \quad \text{and} \quad f_2(x, y) = ax^2 + bx + y + c, \quad (3)$$

for suitable constants $a, b, c \in \mathbb{R}$ satisfying $a \neq 0$ and $(a + 1)^2 + b^2 + c^2 \neq 0$.

Then we present the normal forms of the systems that we study in this work.

Proposition 1.2. *All polynomial planar differential system of degree ≤ 2 , having the parabolas $f_1 = 0$ and $f_2 = 0$ given by (3) as invariant algebraic curves, and a first integral of the form $H = f_1^\alpha f_2^\beta$ with α, β real constants, is topologically equivalent to one of the following systems, where A, B, C are real parameters:*

$$\dot{x} = A + Bx + Cy, \quad \dot{y} = 2x(A + Bx + Cy), \quad (4)$$

the cofactors are $k_1 \equiv k_2 \equiv 0$; or

$$\dot{x} = (2(1 + a)x + b)k(x, y), \quad \dot{y} = 2(2(1 + a)y + bx)k(x, y), \quad (5)$$

where $k(x, y) = A + Bx + Cy$ and the cofactors are $k_1(x, y) = k_2(x, y) = 4(a + 1)k(x, y)$; or

$$\dot{x} = (1 + a)x^2 + bx + c, \quad \dot{y} = 2(1 + a)xy + by + bx^2 + 2cx, \quad (6)$$

the cofactors are $k_1(x, y) = k_2(x, y) = 2(a + 1)x + b$.

In our main result we provide the phase portraits in the Poincaré disc of a class of integrable quadratic systems having two parabolas as invariant algebraic curves.

Theorem 1.3. *The phase portrait in the Poincaré disc of a planar polynomial differential system of degree ≤ 2 different of the null system, having two parabolas defined by $f_1 = 0, f_2 = 0$ as invariant algebraic curves and a first integral of the form $H = f_1^\alpha f_2^\beta$, with $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, is topologically equivalent to one on the eleven phase portraits presented in Figure 1.*

In this work we use three types of lines in the figures. The separatrices are presented by lines thinner than the lines of singular points and the finest lines are the orbits in canonical regions.

From propositions 1.1 and 1.2 it follows that, to prove Theorem 1.3, it is sufficient to determine the phase portrait, in the Poincaré disc, of the normal forms (4), (5) and (6). In Table 1 we provide the correspondence between normal forms (4), (5), (6), and the phase portraits of Figure 1.

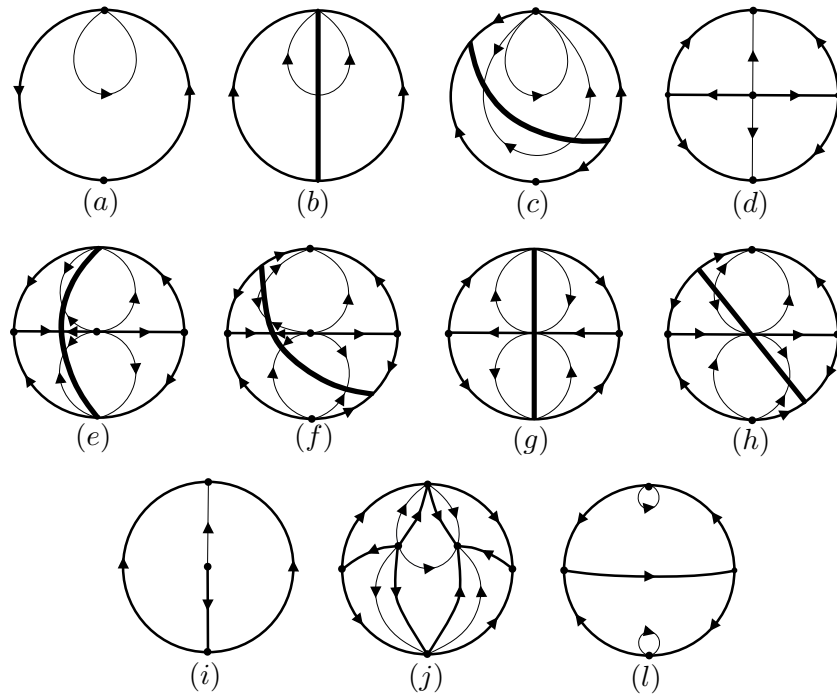


Figure 1. Phase portraits in the Poincaré disc of a planar polynomial differential system of degree ≤ 2 , different of the null system, having two parabolas defined by $f_1 = 0, f_2 = 0$ as invariant algebraic curves, and a first integral of the form $H = f_1^\alpha f_2^\beta, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

We organized this work as follows. In Section 2 we presented the definitions and tools to study phase portraits of planar polynomial differential systems. The phase portraits in the Poincaré disc of the normal forms (4) and (5) are presented in Section 3. The objective of Section 4 is to present the phase portrait in the Poincaré disc of the normal form (6). Finally we prove Theorem 1.3 in Section 5. The propositions 1.1 and 1.2 are proved in the Appendix A.

Global Phase Portrait of Figure 1	Normal form	Parameters
(a)	(4)	$B = C = 0$
	(5)	$a = -1, B = C = 0$
	(6)	$a = -1, b = 0, c \neq 0$
(b)	(4)	$B = 0, C \neq 0$ or $B \neq 0, C = 0$
	(5)	$a = -1, B = 0, C \neq 0$ or $a = -1, B \neq 0, C = 0$
(c)	(4)	$BC \neq 0$
	(5)	$a = -1, BC \neq 0$
(d)	(5)	$B = C = 0$
(e)	(5)	$A \neq bB/(2(1+a)), C = 0$
(f)	(5)	$A \neq (b/(2(1+a)))(B - bC/(2(1+a))), C \neq 0$
(g)	(5)	$A = bB/(2(1+a)), C = 0$
	(6)	$a \neq -1, b = \sqrt{\theta}$
(h)	(5)	$A = (b/(2(1+a)))(B - bC/(2(1+a))), C \neq 0$
(i)	(6)	$a = -1, b \neq 0$
(j)	(6)	$a \neq -1, b^2 > \theta$
(l)	(6)	$a \neq -1, b^2 < \theta$

Table 1. The correspondence between the phase portraits presented in Figure 1 and the normal forms of Proposition 1.2. Here, $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$ and $\theta = 4(1+a)c$.

2. Preliminary definitions and results

Let $X : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ be a vector field defined on the open set $U \subset \mathbb{R}^2$ and let $DX(x, y)$ be the Jacobian matrix of X at $(x, y) \in U$. Suppose that (x, y) is a singular point of X . If both the eigenvalues of $DX(x, y)$ have real part different from zero, then (x, y) is called a *hyperbolic singular point*; if only one eigenvalue of $DX(x, y)$ is zero, then (x, y) is a *semi-hyperbolic singular point*; if both eigenvalues of $DX(x, y)$ are zero but the Jacobian matrix is not the null matrix, then (x, y) is called a *nilpotent singular point*; if $DX(x, y)$ is the null matrix, then (x, y) is a *linearly null singular point*.

The local topological classification of hyperbolic, semi-hyperbolic and nilpotent singular points is given, for instance, in Theorems 2.15, 2.19 and 3.5 of [8], respectively.

To study the behavior of the orbits near linearly null singular points we use the blow-up technique. Translating the singular point to the origin, we consider the change of coordinates $x = u, y = uv$, called *blow-up in the x-direction*. This is a diffeomorphism between the regions $x \neq 0$ and $u \neq 0$ which maps the region $x < 0, y > 0$ into the region $u < 0, v < 0$ and the region $x < 0, y < 0$ into the region $u < 0, v > 0$.

In a similar way, the change of coordinates $x = uv, y = v$, is called *blow-up in the y-direction*. This is a diffeomorphism between the regions $y \neq 0$ and $v \neq 0$ which maps the region $x < 0, y < 0$ into the region $u > 0, v < 0$ and the region $x > 0, y < 0$ into the region $u < 0, v < 0$.

In order to study the behaviour of a polynomial planar vector field $X = (P, Q)$ near the infinity we use the Poincaré compactification. The open northern and the open southern hemisphere of \mathbb{S}^2 are denoted by H^+ and H^- , respectively.

We identify the tangent plane to \mathbb{S}^2 at the point $(0, 0, 1)$ with \mathbb{R}^2 . Using the central projections $f^+ : \mathbb{R}^2 \rightarrow H^+, f^- : \mathbb{R}^2 \rightarrow H^-$ defined by $f^\pm(x_1, x_2) = \pm(x_1, x_2, 1)/\Delta x$, where $\Delta x = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + 1}$, we obtain the vector field \tilde{X} defined on

$H^+ \cup H^-$ by $\tilde{X} = Df^\pm \circ X$ on H^\pm . Denote a point $y \in \mathbb{S}^2$ by $y = (y_1, y_2, y_3)$ and let $d \in \mathbb{N}$ be the degree of X . We verify that $y \mapsto y_3^{d-1} \tilde{X}(y)$ has an analytical extension $\rho(X)$ to \mathbb{S}^2 , called *the Poincaré compactification* of X . Then X is topologically equivalent to the restriction of $\rho(X)$ to H^+ and to the restriction of $\rho(X)$ to H^- . Therefore, considering only the phase portrait of $\rho(X)$ restricted to H^+ we determine the phase portrait of X .

The orthogonal projection of the northern closed hemisphere is called the *Poincaré disc*. We identify the circle $y_1^2 + y_2^2 = 1, y_3 = 0$ of \mathbb{R}^3 with \mathbb{S}^1 . A singular point of $\rho(X)$ contained in $\mathbb{S}^2 \setminus \mathbb{S}^1$ or in \mathbb{S}^1 is called a *finite* or *infinite* singular point of X , respectively.

We consider the six local charts (U_i, φ_i) and (V_i, ψ_i) , $i = 1, 2, 3$, of \mathbb{S}^2 , where $U_i = \{y \in \mathbb{S}^2 \mid y_i > 0\}$, $V_i = \{y \in \mathbb{S}^2 \mid y_i < 0\}$, and $\varphi_1(y) = -\psi_1(y) = (y_2, y_3)/y_1$, $\varphi_2(y) = -\psi_2(y) = (y_1, y_3)/y_2$, $\varphi_3(y) = -\psi_3(y) = (y_1, y_2)/y_3$. If we denote by (u, v) the value $\varphi_i(y)$, $y \in U_i$, or $\psi_i(y)$, $y \in V_i$, $i = 1, 2, 3$, we obtain that the expression for $\rho(X)$ in the local chart (U_1, φ_1) is given by

$$\dot{u} = v^d(-uP(1/v, u/v) + Q(1/v, u/v)), \quad \dot{v} = -v^{d+1}P(1/v, u/v),$$

in (U_2, φ_2) is

$$\dot{u} = v^d(P(u/v, 1/v) - uQ(u/v, 1/v)), \quad \dot{v} = -v^{d+1}Q(u/v, 1/v),$$

and, in the chart (U_3, φ_3) ,

$$\dot{u} = P(u, v), \quad \dot{v} = Q(u, v),$$

where d is the degree of X . For (V_i, ψ_i) the expression of $\rho(X)$ is given by the expression in the chart (U_i, φ_i) multiplied by $(-1)^{d-1}$, $i = 1, 2, 3$.

If y is a infinite singular point of X contained in U_i or V_i , $i = 1, 2, 3$, then the expression of y in the correspondent chart is of the form $(u, 0)$ for a suitable choice of $u \in \mathbb{R}$.

Notice that we cover the boundary of the Poincaré disc with U_1, U_2, V_1 and V_2 . Since $\rho(X)$ is symmetric with respect the origin, to study the infinite singular points of X it is sufficient to study the infinite singular points contained in U_1 and the origin of U_2 . More details of the Poincaré compactification in [8, Chapter 5].

Let g be a real polynomial function defined on \mathbb{R}^2 . Since the inverse function of $f^+ : \mathbb{R}^2 \rightarrow H^+$ is given by $x_1 = y_1/y_3, x_2 = y_2/y_3, y = (y_1, y_2, y_3) \in H^+$, we observe that the expression of $g = 0$ in H^+ is $g(y_1/y_3, y_2/y_3) = 0$.

Moreover, the inverse of $\varphi_1 : U_1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ is given by $y_1 = 1/m, y_2 = u/m, y_3 = v/m$, with $m = \sqrt{1 + u^2 + v^2}$. Then, the points $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ such that $g(x_1, x_2) = 0$ correspond to the points $(u, v) \in U_1$ such that $g(1/v, u/v), v \neq 0$. The inverse of $\varphi_2 : U_2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ is given by $y_1 = u/m, y_2 = 1/m, y_3 = v/m$. The points $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ such that $g(x_1, x_2) = 0$ correspond to points $(u, v) \in U_2$ such that $g(u/v, 1/v), v \neq 0$.

In particular, for f_1 and f_2 given by (3) we have the following expressions.

Remark 1. The points of \mathbb{R}^2 of the parabola $f_1 = 0$ are mapped into the points (u, v) such that $uv = 1, v = u^2$ of U_1, U_2 , respectively, with $v \neq 0$.

Remark 2. The points $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ of the parabola $f_2 = 0$ such that $x_1 > 0$ or $x_1 < 0$, are mapped into points (u, v) of U_1 or V_1 , respectively, such that $a + bv + cv^2 + uv = 0$, with $v \neq 0$.

Remark 3. The points $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ of the parabola $f_2 = 0$ such that $x_2 > 0$ or $x_2 < 0$, are mapped into points (u, v) of U_2 or V_2 , respectively, such that $au^2 + buv + cv^2 + v = 0$, with $v \neq 0$.

Remark 4. Given $A, B, C \in \mathbb{R}$, with $B^2 + C^2 \neq 0$, the points $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ of the straight line $A + Bx_1 + Cx_2 = 0$ such that $x_1 > 0$ or $x_2 > 0$, are mapped into points $(u, v) \in U_1$ such that $Av + B + Cu = 0$, or into points $(u, v) \in U_2$ such that $Av + Bu + C = 0$, respectively, with $v \neq 0$. If $B \neq 0$, it intercepts the line of infinity $v = 0$ of chart (U_1, φ_1) at $(-B/C, 0)$ if $C \neq 0$ and at the origin otherwise and, if $B = 0$ but $AC \neq 0$, then this straight line intercepts the origin of the chart (U_2, φ_2) .

Consider two C^1 planar vector fields X and Y defined on the open sets $U, V \subset \mathbb{R}^2$, respectively. We say that X and Y are *topologically equivalent* if there exists a homeomorphism that maps the orbits of X into orbits of Y preserving the orientation of all orbits, or reversing the orientation of all orbits. Denoting by $\beta(x)$, $\omega(x)$ and $\alpha(x)$ the orbit, the ω -limit and the α -limit of a point $x \in U$, respectively, an orbit $\beta(x)$ of the vector field X is called a *separatrix* of X if

- $\beta(x) = \{x\}$, or
- $\beta(x)$ is a periodic orbit and there is a neighborhood of $\beta(x)$ with no other periodic orbits, or
- $\beta(x)$ is homeomorphic to \mathbb{R} and there is not a neighborhood Z of $\beta(x)$ such that both situations occurs:
 - (1) $\alpha(y) = \alpha(x)$ and $\omega(y) = \omega(x)$ for each $y \in Z$;
 - (2) the boundary of Z is formed by $\omega(x), \alpha(x), \beta(y)$ and $\beta(z)$, where $y, z \in U$ satisfies $\omega(x) = \omega(y) = \omega(z)$ and $\alpha(x) = \alpha(y) = \alpha(z)$.

The union of the separatrices of X is called *extended separatrix skeleton*, denoted by Σ , and it is a closed set invariant under the flow. Each connected component of \mathbb{R}^2/Σ is called a *canonical region* and the union of the extended separatrix skeleton with one orbit in each canonical region is a *completed separatrix skeleton*. Two completed separatrix skeletons are *topologically equivalent* if there exists a homeomorphism that maps the orbits of one into orbits of the other preserving the orientation of all orbits, or reversing the orientation of all orbits.

Theorem 2.1 (Markus-Neumann-Peixoto). *Two planar analytic vector fields are topologically equivalent in \mathbb{R}^2 if and only if their completed separatrices skeleton are topologically equivalent.*

Hence, to determine the global phase portrait of planar systems it is sufficient to determine only its separatrices and one orbit in each canonical region. The proof can be found in [9].

3. Phase portrait of the normal forms (4) and (5)

Lemma 3.1. *Consider system (4) with the hypothesis $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$.*

- (i) *If $B = C = 0$ then the phase portrait in the Poincaré disc of system (4) is presented in Figure 1-(a).*
- (ii) *If $B \neq 0, C = 0$ then the phase portrait in the Poincaré disc of system (4) is presented in Figure 1-(b).*
- (iii) *If $C \neq 0$ then the phase portrait in the Poincaré disc of system (4) is presented*

in Figure 1-(c).

Proof. We define $k(x, y) = A + Bx + Cy$. After the rescaling given by $ds = k(x, y) dt$, system (4) is topologically equivalent to system

$$x' = 1, \quad y' = 2x, \quad (7)$$

in the region $k(x, y) \neq 0$. Here the comma denotes the derivative with respect to s . System (7) has no singular points and its orbits are contained in parabolas of the form $y = x^2 + \alpha$, with $\alpha \in \mathbb{R}$. The expression of the points of the parabola $y = x^2 + \alpha$ with $y > 0$ in the chart (U_2, φ_2) is $u^2 = (1 + \alpha)v, v \neq 0$.

The expression of system (4) in the charts (U_1, φ_1) and (U_2, φ_2) are

$$\dot{u} = (2 - uv)\tilde{k}(u, v), \quad \dot{v} = -v^2\tilde{k}(u, v), \quad (8)$$

and

$$\dot{u} = (v - 2u^2)\bar{k}(u, v), \quad \dot{v} = -2uv\bar{k}(u, v), \quad (9)$$

respectively. If $B = C = 0$ then the degree of system (4) is one and $\tilde{k} = \bar{k} = A$. If $B^2 + C^2 \neq 0$ then the degree of system (4) is two and, in this case, $\tilde{k}(u, v) = Av + B + Cu$ and $\bar{k}(u, v) = Av + Bu + C$.

After the rescaling given by $dw = \tilde{k}(u, v) ds$ system (8) becomes

$$u' = 2 - uv, \quad v' = -v^2, \quad (10)$$

and, after the rescaling given by $dw = \bar{k}(u, v) ds$ system (9) becomes

$$u' = v - 2u^2, \quad v' = -2uv. \quad (11)$$

System (10) has no singular points. The origin is a nilpotent singular point of system (11). If we choose $f(u, v) = 2u^2, F(u, v) = -4u^3, G(u, v) = -6u, m = 3, n = 1, a = -4, b = -6$ in [8, Theorem 3.5], we obtain that the sectorial decomposition of system (11) at the origin is composed by a hyperbolic sector and an elliptic sector.

To complete the proof we analyse now the constants A, B and C .

Case (i). If $B = C = 0$, then $k(x, y) = A$. There is no finite singular points in system (4). The phase portrait in the Poincaré disc of system (4) is presented in Figure 1-(a).

Case (ii). If $B \neq 0, C = 0$, then the line $\bar{k} = 0$ contains the origin of the U_2 . The phase portrait in the Poincaré disc of system (4) is presented in Figure 1-(b).

Case (iii). If $C \neq 0$ then the curve $\tilde{k} = 0$ cuts the line $v = 0$ of U_1 . The phase portrait in the Poincaré disc of system (4) is presented in Figure 1-(c). □

Remark 5. Notice that if $a = -1$ then system (5) can be written as system (4). If $A = B = C = 0$ then system (5) becomes $\dot{x} = \dot{y} = 0$.

Lemma 3.2. Consider system (5) with the hypotheses $a \neq -1$ and $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$.

(i) If $B = C = 0$ then the phase portrait in the Poincaré disc of system (5) is presented in Figure 1-(d).

- (ii) If $C = 0$ and $A \neq bB/(2(a+1))$ then the phase portrait in the Poincaré disc of system (5) is presented in Figure 1-(e).
- (iii) If $C \neq 0$ and $A \neq [b/(2(a+1))][B - Cb/(2(a+1))]$ then the phase portrait in the Poincaré disc of system (5) is presented in Figure 1-(f).
- (iv) If $C = 0$ and $A = bB/(2(a+1))$ then the phase portrait in the Poincaré disc of system (5) is presented in Figure 1-(g).
- (v) If $C \neq 0$ and $A = [b/(2(a+1))][B - bC/(2(a+1))]$ then the phase portrait in the Poincaré disc of system (5) is presented in Figure 1-(h).

Proof. Considering the rescaling given by $ds = k(x, y) dt$, we obtain that system (5) is topologically equivalent to system

$$x' = 2(1+a)x + b, \quad y' = 4(1+a)y + 2bx, \quad (12)$$

in the region $k(x, y) \neq 0$. The unique singular point of system (12) is (x_0, x_0^2) , where $x_0 = -b/2(1+a)$. This is a hyperbolic attracting node (resp. repelling node) if $1+a < 0$ (resp. $1+a > 0$).

Now we study the infinite singular points of system (6). The expression of system (6) in charts (U_1, φ_1) and (U_2, φ_2) are, respectively,

$$\dot{u} = (2(1+a)u - buv + 2b)\tilde{k}(u, v), \quad \dot{v} = (-2(1+a)v - bv^2)\tilde{k}(u, v) \quad (13)$$

and

$$\dot{u} = (-2(1+a)u + bv + 2bu^2)\bar{k}(u, v), \quad \dot{v} = (-4(1+a)v - 2buv)\bar{k}(u, v). \quad (14)$$

If $B = C = 0$ then the degree of system (6) is one and $\tilde{k} = \bar{k} = A$. If $B^2 + C^2 \neq 0$ then the degree of system (6) is two, and in this case $\tilde{k}(u, v) = Av + B + Cu$ and $\bar{k}(u, v) = Av + Bu + C$.

After the rescaling giving by $dw = \tilde{k}(u, v) ds$ system (13) becomes

$$u' = 2(1+a)u - buv - 2b, \quad v' = -2(1+a)v - bv^2 \quad (15)$$

and, after the rescaling giving by $dw = \bar{k}(u, v) ds$, system (16) becomes

$$u' = 2(1+a)u + bv + 2bu^2, \quad v' = -4(1+a)v - 2buv. \quad (16)$$

Notice that $(u_0, 0)$ is the unique singular point (u, v) of system (15) with $v = 0$, where $u_0 = b/(1+a)$. The origin is a singular point of system (16). The Jacobian matrix of system (15) evaluated at $(u_0, 0)$ and the Jacobian matrix of system (16) evaluated at the origin are, respectively,

$$\begin{pmatrix} 2(1+a) & -b^2/(1+a) \\ 0 & -4(1+a) \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad \begin{pmatrix} -2(1+a) & b \\ 0 & -2(1+a) \end{pmatrix}.$$

Hence, $(u_0, 0)$ is a hyperbolic saddle of system (15) and the origin is a hyperbolic repelling (resp. attracting) node of system (16) when $1+a < 0$ (resp. $1+a > 0$).

We determine the phase portrait of system (5) using systems (12), (15), (16) and the conditions on A , B and C .

Case (i). If $B = C = 0$, then k is a constant function different from zero and (x_0, x_0^2) is the unique singular point of system (5). The phase portrait in the Poincaré disc of system (5) is presented in Figure 1-(d).

From now on we suppose that $B^2 + C^2 \neq 0$. Observe that $k(x_0, x_0^2) = 0 \Leftrightarrow A = [b/(2(a+1))][B - bC/(2(a+1))]$, $\tilde{k}(u_0, 0) = 0 \Leftrightarrow B + Cu_0 = 0$ and $\bar{k}(0, 0) = 0 \Leftrightarrow C = 0$. Since $B^2 + C^2 \neq 0$ we obtain $k(x_0, x_0^2) = 0 \Leftrightarrow \bar{k}(0, 0) \neq 0$.

Case (ii). If $C = 0$ and $A \neq bB/(2(a+1))$ then the finite singular point (x_0, x_0^2) is not contained in the line $k = 0$ and the origin of U_2 is contained in the line $\bar{k} = 0$. The phase portrait in the Poincaré disc of system (5) is presented in Figure 1-(e).

Case (iii). If $C \neq 0$ and $A \neq [b/(2(a+1))][B - bC/(2(a+1))]$ then the finite singular point (x_0, x_0^2) is not contained in the line $k = 0$ and the infinite singular point $(u_0, 0)$ is contained in the line $\tilde{k} = 0$. The phase portrait in the Poincaré disc of system (5) is presented in Figure 1-(f).

Case (iv). If $C = 0$ and $A = bB/(2(a+1))$ then the finite singular point (x_0, x_0^2) is contained in the line $k = 0$ and the origin of U_2 is contained in the line $\bar{k} = 0$. The Poincaré disc of system (5) is presented in Figure 1-(g).

Case (v). If $C \neq 0$ and $A = [b/(2(a+1))][B - bC/(2(a+1))]$ then the finite singular point (x_0, x_0^2) is contained in the line $k = 0$ and the infinite singular point $(u_0, 0)$ is contained in the line $\tilde{k} = 0$. The phase portrait in the Poincaré disc of system (5) is presented in Figure 1-(h). \square

4. Phase portrait of the normal form (6)

Remark 6. All the isolated finite singular points of system (6) are contained in the intersection of the parabolas $f_1 = 0$ and $f_2 = 0$. In system (6), if $a = -1$, then $f_1 = 0$ and $f_2 = 0$ are never tangent. On the other hand, if $a \neq -1$ and $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ satisfies $f_1(x, y) = f_2(x, y) = 0$, then $k(x, y) = 0$ if, and only if, the parabolas $f_1 = 0$ and $f_2 = 0$ are tangent.

Remark 7. The vector field defined by the normal form (6) is topologically equivalent to the vector field defined by

$$\dot{x} = (a+1)x^2 - bx + c, \quad \dot{y} = 2(a+1)xy - by - bx^2 + 2cx,$$

under the change of coordinates given by $(t, x, y) \mapsto (-t, -x, y)$. Therefore, in this section we consider only the case $b \geq 0$.

From now on we consider $\theta = 4(1+a)c$ and $\delta = \sqrt{b^2 - 4(1+a)c}$, that is, $\delta = \sqrt{b^2 - \theta}$.

Remark 8. If $a \neq -1, b^2 = \theta$, then system (6) becomes system (5) with $A = b/(2(1+a)), B = 1$ and $C = 0$. Considering $a = -1, b = 0, c \neq 0$, system (6) becomes system (4) with $B = C = 0$ and $A = c$.

Remark 9. From remarks 7 and 8 it is sufficient to consider the cases:

- (i) $a \neq -1, b \geq 0, b^2 \neq \theta$,
- (ii) $a = -1, b > 0$.

4.1. Finite Singular Points

Remark 10. In the case that $b^2 < \theta$, system (6) has no singular points.

Lemma 4.1. *If $a = -1$ and $b > 0$, then system (6) has a hyperbolic repelling node as its unique singular point.*

Proof. Under these hypotheses the unique singular point (x, y) of system (6) is $(-c/b, c^2/b^2)$. The eigenvalues of the Jacobian matrix at this point are both equal to b , what implies that it is a hyperbolic repelling node. \square

Lemma 4.2. *Suppose that $a \neq -1$ and $b^2 > \theta$. Then system (6) has two singular points, (x_1, y_1) and (x_2, y_2) , with $x_1, x_2 \geq 0$, where the first point is a hyperbolic repelling node and the second point is a hyperbolic attracting node. If $1 + a > 0$, then $x_2 < x_1$ and if $1 + a < 0$, then $x_1 < x_2$.*

Proof. If $b^2 > \theta$ then the singular points (x_1, y_1) and (x_2, y_2) of system (6) are such that $x_1 = (-b + \delta)/2(1 + a)$, $x_2 = (-b - \delta)/2(1 + a)$, $y_1 = x_1^2$ and $y_2 = x_2^2$. The eigenvalues of the Jacobian matrix of the vector field defined by system (6) evaluated at (x_1, y_1) are equal to δ , and at (x_2, y_2) are equal to $-\delta$. Since $\delta = \sqrt{b^2 - \theta} > 0$, the point (x_1, y_1) is a hyperbolic repelling node and (x_2, y_2) is a hyperbolic attracting node.

Moreover, it is not difficult to notice that if $1 + a > 0$, then $x_2 < x_1$ and, on the other hand, if $1 + a < 0$, we have $x_1 < x_2$. Due to the fact that $f_1 = 0$ has no points in the third and fourth quadrants, we conclude the proof of the lemma. \square

4.2. Infinite Singular Points

The expression of the Poincaré compactification of system (6) in the charts (U_1, φ_1) and (U_2, φ_2) is

$$\dot{u} = (1 + a)u - cuv^2 + 2cv + b, \quad \dot{v} = -v((1 + a) + bv + cv^2), \quad (17)$$

and

$$\dot{u} = -(1 + a)u^2 + cv^2 - 2cu^2v - bu^3, \quad \dot{v} = -v(2(1 + a)u + bu^2 + 2cuv + bv), \quad (18)$$

respectively.

4.2.1. Infinite singular points in U_1

In Lemma 4.3 we summarize the possibilities for the infinite singular points of system (6) contained in U_1 .

Lemma 4.3. *If $a \neq -1$, then there is an unique singular point (u, v) of system (17) such that $v = 0$ and it is a hyperbolic saddle; if then $1 + a < 0$ the stable manifold is contained in the axis $v = 0$; if $1 + a > 0$ then the unstable manifold is contained in the axis $v = 0$. If $a = -1$ and $b > 0$, system (17) has no singular points (u, v) with $v = 0$.*

Proof. If $a \neq -1$ then the unique singular point (u, v) of system (17) with $v = 0$ is

$(-b/(1+a), 0)$. The Jacobian matrix of system (17) evaluated at this singular point is

$$\begin{pmatrix} (1+a) & 2c \\ 0 & -(1+a) \end{pmatrix}$$

and it is a hyperbolic saddle. If $1+a < 0$, the axis $v = 0$ contains the stable manifold and, if $1+a > 0$, the axis $v = 0$ contains the unstable manifold of system (17).

If $a = -1$ and $b \neq 0$ then system (17) has no singular point of the form (u, v) with $v = 0$. \square

4.2.2. The origin of U_2

The origin is a linearly null singular point of system (18). To study this point we consider the blow-up in the u -direction given by $u = p, v = pq$ that carries system (18) into

$$\dot{p} = p^2(-(1+a) + cq^2 - 2cpq - bp), \quad \dot{q} = -pq((1+a) + bq + cq^2). \quad (19)$$

This blow-up maps the region $u < 0, v > 0$ into the region $p < 0, q < 0$, and the region $u < 0, v < 0$ into the region $p < 0, q > 0$. Taking the rescaling defined by $ds = p dt$, system (19) becomes

$$\bar{p}' = \bar{p}(-(1+a) + c\bar{q}^2 - 2c\bar{p}\bar{q} - b\bar{p}), \quad \bar{q}' = -\bar{q}((1+a) + b\bar{q} + c\bar{q}^2). \quad (20)$$

Considering the possibilities for system (20), we divide the study of the origin of system (18) in three cases.

Lemma 4.4. *If $a \neq -1$ and $b^2 > \theta$ then the local phase portrait of system (18) at the origin is presented in Figure 2-(c).*

Proof. We consider the cases $c \neq 0$ and $c = 0$ separately.

Case 1. Suppose that $c \neq 0$. The singular points (\bar{p}, \bar{q}) of system (20) with $\bar{p} = 0$ are $(0, w_j), j = 0, 1, 2$, where $w_1 = 0, w_2 = (-b+\delta)/2c$ and $w_3 = -(b+\delta)/2c$. The Jacobian matrices of the vector field defined by system (20) evaluated at $(0, w_1), (0, w_2)$ and $(0, w_3)$ are

$$\begin{pmatrix} -(1+a) & 0 \\ 0 & -(1+a) \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -\epsilon_1 & 0 \\ 0 & \epsilon_1 \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad \begin{pmatrix} \epsilon_2 & 0 \\ 0 & -\epsilon_2 \end{pmatrix},$$

respectively, where $\epsilon_1 = \delta(b-\delta)/2c$ and $\epsilon_2 = \delta(b+\delta)/2c$. Then $(0, w_1)$ is a hyperbolic node and $(0, w_2), (0, w_3)$ are hyperbolic saddles.

If $1+a < 0$ and $c > 0$, then $w_3 < w_1 < w_2, \epsilon_1 < 0$ and $\epsilon_2 > 0$; if $1+a < 0$ and $c < 0$, then $w_1 < w_2 < w_3, \epsilon_1 < 0$ and $\epsilon_2 < 0$; if $1+a > 0$ and $c > 0$, then $w_3 < w_2 < w_1, \epsilon_1 > 0$ and $\epsilon_2 > 0$; finally, if $1+a > 0$ and $c < 0$, then $w_2 < w_1 < w_3, \epsilon_1 > 0$ and $\epsilon_2 < 0$.

Observe that the straight lines $\bar{q} = w_j, j = 0, 1, 2$ are invariant algebraic curves of system (20). Since the straight line $\bar{q} = w_j$ corresponds to the straight line $v = w_j u$, the straight lines $v = w_j u$ are invariant algebraic curves of system (18), $j = 0, 1, 2$. Moreover in system (18) we have $\dot{u}|_{u=0} = cv^2$.

We summarize the blow-up in the case that $1+a < 0$ and $c > 0$ in Figure 2. If $1+a > 0, c < 0$, then the orientation of all orbits are reversed. In the case $1+a <$

$0, c > 0$, the blow-up is summarized in Figure 3 and, if $1 + a > 0, c > 0$, then the orientation of all orbits are reversed.

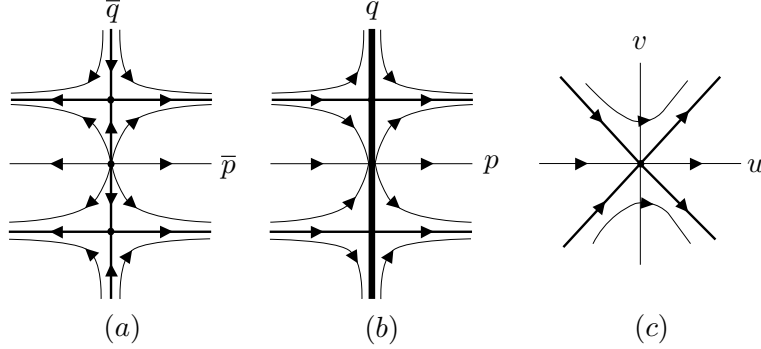


Figure 2. Phase portrait of system (18) at $(0,0)$ for the case that $1 + a < 0, b^2 > \theta$ and $c > 0$. (a) System (20), where $w_3 < w_1 < w_2$. (b) System (19). (c) System (18). If $1 + a > 0, b^2 > \theta, c > 0$, all the orbits are reversed.

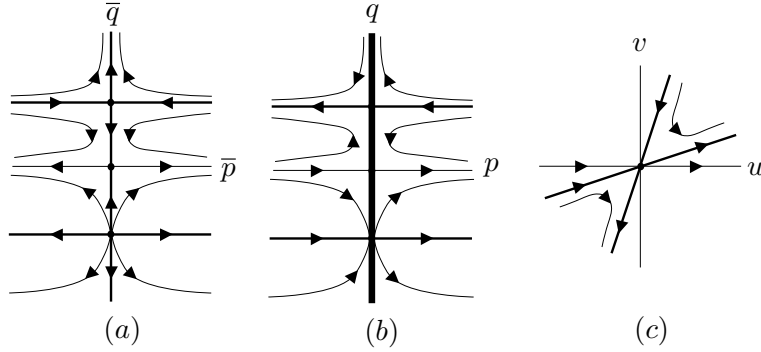


Figure 3. Phase portrait of system (18) at $(0,0)$ for the case that $1 + a < 0, b^2 > \theta$ and $c < 0$. (a) System (20), where $w_1 < w_2 < w_3$. (b) System (19). (c) System (18). If $1 + a > 0, b^2 > \theta, c > 0$, all the orbits are reversed.

Case 2. Suppose that $c = 0$. Since $b^2 > \theta$ it follows that $b > 0$, and the singular points (\bar{p}, \bar{q}) of system (20) with $\bar{p} = 0$ are $(0, w_j), j = 1, 2$, where $w_1 = 0$ and $w_2 = -(1+a)/b$. The Jacobian matrices of the vector field defined by system (20) evaluated at $(0, w_1)$ and $(0, w_2)$ are

$$\begin{pmatrix} -(1+a) & 0 \\ 0 & -(1+a) \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad \begin{pmatrix} -(1+a) & 0 \\ 0 & (1+a) \end{pmatrix},$$

respectively. Hence, w_1 is a hyperbolic node and w_2 is a hyperbolic saddle.

Observe that the straight lines $\bar{q} = w_j, j = 1, 2$ are invariant algebraic curves of system (20). Since the straight line $\bar{q} = w_j$ corresponds to the straight line $v = w_j u$, the straight lines $v = w_j u$ are invariant algebraic curves of system (18), $j = 1, 2$. Moreover in system (18) we have $\dot{u}|_{u=0} = 0, \dot{v}|_{u=0} = -bv^2$.

We summarize the blow-up in the case that $1 + a < 0$ in Figure 4.

Observe that the phase portrait of Figures 3-(c) and 4-(c) are topologically equivalent to the phase portrait presented in the Figure 2-(c). \square

Lemma 4.5. *If $a \neq -1$ and $b^2 < \theta$, then the local phase portrait of system (18) at the origin is presented in Figure 5-(c).*

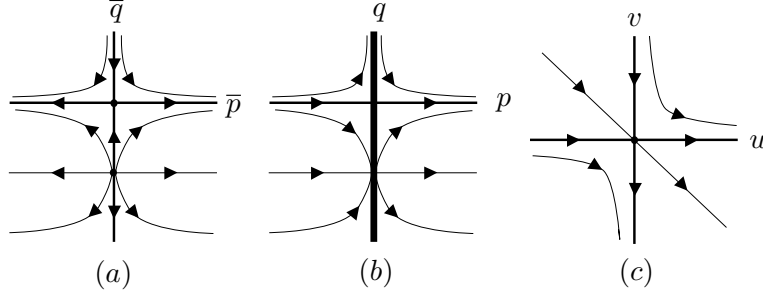


Figure 4. Phase portrait of system (18) at $(0,0)$ for the case that $1+a < 0, b^2 > \theta, c = 0$. (a) System (20), where $w_1 < w_2$. (b) System (19). (c) System (18). If $1+a > 0$, then $w_2 < w_1$ and the orientation of orbits in (c) are reversed.

Proof. From $b^2 < \theta$ it follows that $c \neq 0$. The unique singular point (\bar{p}, \bar{q}) of system (20) with $\bar{p} = 0$ is the origin. The Jacobian matrix of the vector field defined by system (20) evaluated at $(0,0)$ is

$$\begin{pmatrix} -(1+a) & 0 \\ 0 & -(1+a) \end{pmatrix},$$

and this point is a hyperbolic node.

In system (18) we have $\dot{u}|_{u=0} = cv^2$. We summarize the blow-up in the case that $1+a < 0, c < 0$ in Figure 5.

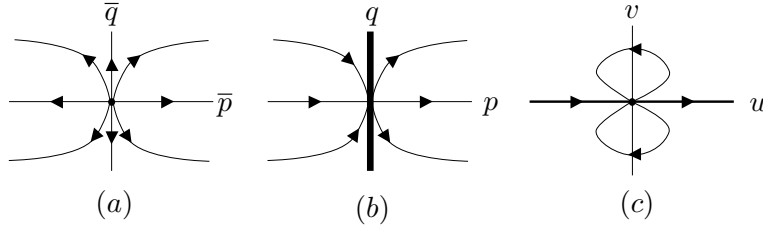


Figure 5. Phase portrait of system (18) at $(0,0)$ for the case that $1+a < 0, b^2 < \theta, c < 0$. (a) System (20). (b) System (19). (c) System (18). If $1+a > 0$, then $c > 0$ and the orientation of the orbits are reversed.

□

Lemma 4.6. *If $a = -1$ and $b > 0$ then the local phase portrait of system (18) at the origin is presented in Figure 7-(c).*

Proof. If $c \neq 0$ then $(0, w_j), j = 1, 2$, are the singular points (\bar{p}, \bar{q}) of system (20) with $\bar{p} = 0$, where $w_1 = 0$ and $w_2 = -b/c$. If $c = 0$ then $(0, w_1)$ is the unique singular point (\bar{p}, \bar{q}) of system (20) with $\bar{p} = 0$. In both cases, the origin of system (20) is a linearly null singular point.

In order to determine the sectorial decomposition of the origin of system (20), we use the blow-up in the \bar{q} -direction given by $\bar{p} = zw, \bar{q} = w$. Under this change of coordinates system (20) becomes

$$z' = zw(2cw - bz - 2zw + b), \quad w' = -w^2(b + cw). \quad (21)$$

This blow-up maps the region $\bar{p} < 0, \bar{q} < 0$ into the region $z > 0, w < 0$ and the region $\bar{p} > 0, \bar{q} < 0$ into the region $z < 0, w < 0$. Taking the rescaling defined by

$d\bar{s} = wds$, system (21) becomes

$$\bar{z}' = \bar{z}(2c\bar{w} - b\bar{z} - 2c\bar{z}\bar{w} + b), \quad \bar{w}' = -\bar{w}(b + c\bar{w}). \quad (22)$$

The singular points (\bar{z}, \bar{w}) of system (22) with $\bar{w} = 0$ are $y_1 = (0, 0)$ and $y_2 = (1, 0)$. The Jacobian matrix of the vector field defined by system (22) evaluated at y_1 and y_2 are

$$\begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & -b \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad \begin{pmatrix} -b & 0 \\ 0 & -b \end{pmatrix},$$

respectively. Therefore, y_1 is a hyperbolic saddle and y_2 is a hyperbolic attracting node.

Observe that in system (20) we have $\bar{p}'|_{\bar{p}=0} = 0$ and $\bar{q}' = -\bar{q}^2(b + c\bar{q})$. We summarize the blow-up in Figure (6).

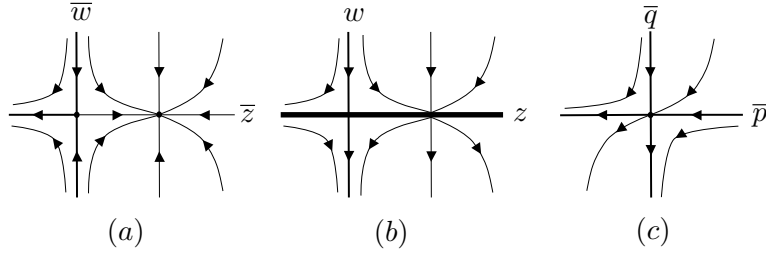


Figure 6. Phase portrait of system (20) at $(0,0)$ for $a = -1$ and $b > 0$. (a) System (22). (b) System (21). (c) Phase portrait of system (20) at the origin.

Now that we know the local phase portrait in a neighborhood of the origin of system (20) we can determine the behavior of system (18) at the point $(0, 0)$.

Case 1. $c \neq 0$. The singular points (\bar{p}, \bar{q}) of system (20) with $\bar{p} = 0$ are $(0, w_j), j = 1, 2$, where $w_1 = 0$ and $w_2 = -b/c$. The Jacobian matrix of the vector field defined by system (20) evaluated at the singular point $(0, w_2)$ is

$$\begin{pmatrix} b^2/c & 0 \\ 0 & -b^2/c \end{pmatrix},$$

then $(0, w_2)$ is a hyperbolic saddle of system (20).

Observe that the straight lines $\bar{q} = w_j, j = 1, 2$ are invariant algebraic curves of system (20). Since the straight line $\bar{q} = w_j$ corresponds to the straight line $v = w_j u$, the straight lines $v = w_j u$ are invariant algebraic curves of system (18), $j = 1, 2$. In system (18) we have $\dot{u}|_{u=0} = cv^2$ and $\dot{u}|_{v=0} = -bu^3$.

We summarize this blow-up for the case $c > 0$ in Figure (7). If $c < 0$, the singular point $(0, -b/c)$ is in the positive axis y and the separatrix with $y < 0$ is in the third quadrant.

Case 2. $c = 0$. The unique singular point (\bar{p}, \bar{q}) of system (20) with $\bar{p} = 0$ is $(0, 0)$.

In system (18) we have $\dot{u}|_{u=0} = 0, \dot{v}|_{u=0} = -bv^2$. We summarize the blow-up in Figure 8. Observe that the phase portraits of figures 7-(c) and 8-(c) are topologically equivalent.

□

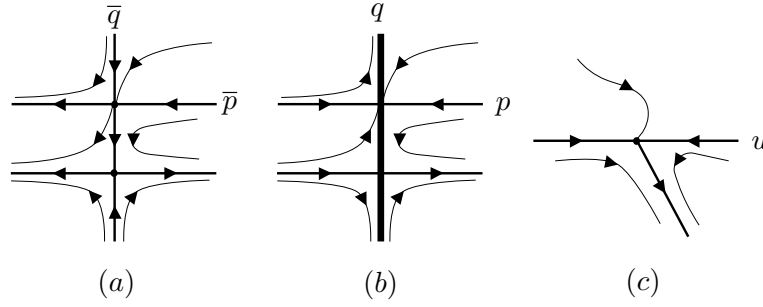


Figure 7. Phase portrait of system (18) at $(0,0)$ for $a = -1$, $b > 0$ and $c \neq 0$. (a) System (20) with $c > 0$. (b) System (19) with $c > 0$. (c) Phase portrait of system (18) at the origin with $c \in \mathbb{R}$.

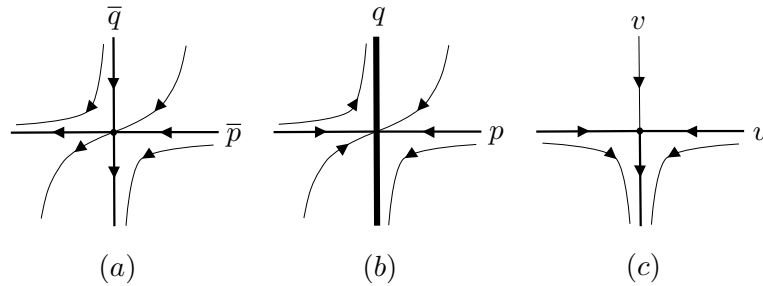


Figure 8. Phase portrait of system (18) at $(0,0)$ for $a = -1$, $b > 0$ and $c = 0$. (a) System (20). (b) System (19). (c) Phase portrait of system (18) at the origin.

5. Proof of Theorem 1.3

Using the information obtained in the subsections 4.1 and 4.2 we presented the neighborhoods of the singular points of system (6) in the Poincaré disc in Figure 9. Using Remarks 1-4, the Theorem of Poincaré-Bendixson and the Markus-Neuman-Peixoto Theorem we obtain the phase portraits (i) – (k) in Figure 1. The phase portraits (a) – (h) in Figure 1 was presented in Lemma 3.1, Lemma 3.2 and Remark 8.

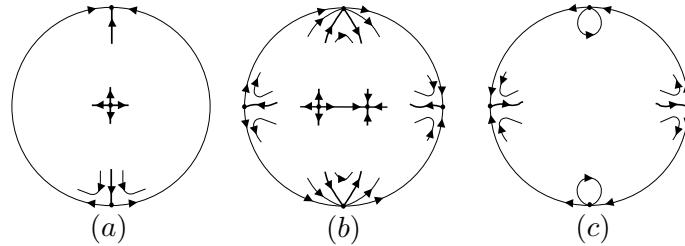


Figure 9. Phase portraits in the Poincaré disc. (a) System (6) with $a = -1, b > 0$. (b) System (6) with $1 + a < 0, b^2 > \theta$. If $1 + a > 0$, the orientation of all orbits are reversed. (c) System (6) with $1 + a < 0, b^2 < \theta$. If $1 + a > 0$, the orientation of all orbits are reversed.

Acknowledgements

The authors would like to thank Professor J. Llibre for interesting suggestions on the subject of this work. The first author was supported by CAPES.

References

- [1] Christopher C. Quadratic systems having a parabola as an invariant curve. Proceedings of the Royal Society of Edinburgh; 1989. n. 112A, p. 113–134.
- [2] Oliveira R, Rezende A, Sclomiuk D, Vulpe N. Geometric and algebraic classification of quadratic differential systems with invariant hyperbolas. Electronic Journal of Differential Equations; 2017. v. 2017, n. 295, p. 1–122.
- [3] Sclomiuk D, Vulpe N. Global topological classification of Lotka-Volterra quadratic differential systems. Electronic Journal of Differential Equations, 2012. v. 2012, n. 64, p. 1–69.
- [4] Llibre J, Messias M, Reinol A. Normal forms and global phase portraits of quadratic and cubic integrable vector fields having two nonconcentric circles as invariant algebraic curves. Dynamical Systems, 2017. n. 3, 374–390.
- [5] Llibre J, Yu J. Phase portraits of quadratic systems with an ellipse and a straight line as invariant algebraic curves. Electronic Journal of Differential Equations, 2015. v. 2015, n. 314, p. 1–14.
- [6] Llibre J, da Silva MF. Phase portraits of integrable quadratic systems with an invariant parabola and an invariant straight line. C. R. Acad. Sci. Paris, 2019. ser. I, n. 357, p. 143–166.
- [7] Sáez E, Szántó I. A cubic system with a limit cycle bounded by two invariant parabolas. Differential Equations and Dynamical Systems, 2009. v. 17, n. 1&2, p. 163–168.
- [8] Dumortier F, Llibre J, Artés JC. Qualitative theory of planar differential systems. Universitext: Springer–Verlag, 2006.
- [9] Neumann DA. Classification of continuous flows on 2-manifold. Preceedings of the American Mathematical Society, 1975. v. 48, n. 1, p. 73-81.

Appendix A. Proof of propositions 1.1 and 1.2

The proofs presented in this appendix follow from polynomial identities. Here we use the software WxMaxima to compute the coefficients of the polynomials.

Proof of Proposition 1.1.

Proof. Suppose that the invariant parabolas are given by $F_1 = 0, F_2 = 0$, where

$$F_1(x, y) = \tilde{A}x^2 + \tilde{B}xy + \tilde{C}y^2 + \tilde{D}x + \tilde{E}y + \tilde{F}$$

and

$$F_2(x, y) = \bar{A}x^2 + \bar{B}xy + \bar{C}y^2 + \bar{D}x + \bar{E}y + \bar{F},$$

$\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, \tilde{D}, \tilde{E}, \tilde{F}, \bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, \bar{D}, \bar{E}, \bar{F}$ are real parameters satisfying $\tilde{A}^2 + \tilde{B}^2 + \tilde{C}^2 \neq 0, \bar{A}^2 + \bar{B}^2 + \bar{C}^2 \neq 0$ and $\tilde{B}^2 = 4\tilde{A}\tilde{C}, \bar{B}^2 = 4\bar{A}\bar{C}$. We also consider the conditions $\tilde{A}\tilde{E}^2 - \tilde{B}\tilde{D}\tilde{E} + \tilde{C}\tilde{D}^2 \neq 0, \bar{A}\bar{E}^2 - \bar{B}\bar{D}\bar{E} + \bar{C}\bar{D}^2 \neq 0$ to avoid degenerate conics. Suppose that F_1 and F_2 are polynomials relatively prime.

First, we do an appropriate transformation to rotate the parabolas so that the straight line $x = 0$ is the axis of symmetry of $F_1 = 0$, and it is concave upward. Second, we translate the vertex of $F_1 = 0$ to the origin and then, we rescale the coordinates such that $F_1 = 0$ takes the form $y - x^2 = 0$. Therefore, from now on we

assume that the invariant parabolas are defined by $f_1 = 0, f_2 = 0$, where

$$f_1(x, y) = y - x^2 \text{ and } f_2(x, y) = \overline{A}x^2 + \overline{B}xy + \overline{C}y^2 + \overline{D}x + \overline{E}y + \overline{F}, \quad (\text{A1})$$

with $\overline{A}^2 + \overline{B}^2 + \overline{C}^2 \neq 0, \overline{B}^2 = 4\overline{A}\overline{C}$ and

$$\overline{A}\overline{E}^2 - \overline{B}\overline{D}\overline{E} + \overline{C}\overline{D}^2 \neq 0. \quad (\text{A2})$$

From [1, pp. 115] it follows that the general form of a polynomial planar system with degree ≤ 2 having $f_1 = 0$ as an invariant parabola is

$$\begin{aligned} \dot{x} &= C(y - x^2) + (A + Bx + Gy) + Exy, \\ \dot{y} &= D(y - x^2) + 2x(A + Bx + Gy) + 2Ey^2, \end{aligned} \quad (\text{A3})$$

where A, B, C, D, E and G are real parameters. Let X be the vector field defined by system (A3). The cofactor k_1 is given by $k_1 = 2Ey - 2Cx + D$.

From the Darboux Method (see Theorem 8.7 of [8]) it follows that there exists a first integral of X of the form $H = f_1^\alpha f_2^\beta$, with $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha^2 + \beta^2 \neq 0$, if and only if, $\alpha k_1 + \beta k_2 = 0$, where k_1, k_2 are the cofactors of f_1, f_2 , respectively.

Then, the curve $f_2 = 0$ is an invariant parabola and there exists a first integral of X of the form $H = f_1^\alpha f_2^\beta$, with $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha^2 + \beta^2 \neq 0$, if and only if, $X(f_2) = \lambda k_1 f_2$ for some $\lambda \in \mathbb{R}$.

To prove the statement of Proposition 1.1 we consider the following cases: **Case 1.** $\overline{B} \neq 0$; **Case 2.** $\overline{B} = \overline{A} = 0$ and **Case 3.** $\overline{B} = \overline{C} = 0$. We will prove that, under the conditions of Case 1 or Case 2, if there exist $\lambda \in \mathbb{R}$ such that $X(f_2) = \lambda k_1 f_2$, then $X = 0$ or the condition (A2) is not satisfied. In the third case, we will use a change of coordinates to put $f_2 = 0$ into the form given by (3). To avoid polynomials of higher degree in several variables, we will divide cases 1 and 2 in appropriated subcases.

Case 1. Suppose $\overline{B} \neq 0$. Since $\overline{B}^2 = 4\overline{A}\overline{C}$ we obtain $\overline{A}\overline{C} \neq 0$. After a division of $f_2 = 0$ by \overline{C} we may suppose that $\overline{C} = 1$ and $\overline{A} = \overline{B}^2/4$.

Computing the coefficients of the polynomials $X(f_2)$ and $\lambda k_1 f_2$, it follows that $X(f_2) = \lambda k_1 f_2$ if, and only if, A, B, C, D, E, G and λ satisfy the following nonlinear system with ten equations

$$\begin{aligned} \overline{B}C(\lambda - 1) - 2D + 4B &= 0 \\ 2\overline{B}C(3\lambda - 2) - \overline{B}^2E + 4\overline{B}G - 8D + 16B &= 0 \\ \overline{B}E(2\lambda - 3) - 2C\lambda - 4G &= 0 \\ E(\lambda - 2) &= 0 \\ 4\overline{D}C(2\lambda - 1) - \overline{B}^2D\lambda - 4\overline{E}D + 2(4\overline{E} + \overline{B}^2)B + 8\overline{B}A &= 0 \\ 4\lambda\overline{E}C - 2\overline{D}E(2\lambda - 1) - 2\overline{B}D(\lambda - 1) + 4\overline{E}G + \overline{B}^2G + \overline{B}^2C \\ &\quad + 2\overline{B}B + 8A = 0 \\ 2\overline{E}E(\lambda - 1) + D(\lambda - 2) - \overline{B}G - \overline{B}C &= 0 \\ 4\overline{F}C\lambda - 2\overline{D}D\lambda + 4\overline{E}A + 2\overline{D}B + \overline{B}^2A &= 0 \\ 2\overline{F}E\lambda + \overline{E}D(\lambda - 1) - \overline{D}G - \overline{D}C - \overline{B}A &= 0 \\ \overline{F}D\lambda - \overline{D}A &= 0. \end{aligned} \quad (\text{A4})$$

In order to solve system (A4) we consider the following subcases.

Case 1.1. Suppose $C = 0$.

From the fourth equation of system (A4) it follows that $\lambda = 2$ or $E = 0$. A straightforward computation proves that $X = 0$ in both cases.

Case 1.2. Suppose $C \neq 0$.

After the division by C , and the change of variables given by $A \mapsto A/C, B \mapsto B/C, D \mapsto D/C, E \mapsto E/C, G \mapsto G/C$ and $\lambda \mapsto \lambda$, system (A4) becomes

$$\begin{aligned}
\overline{B}(\lambda - 1) - 2D + 4B &= 0 \\
2\overline{B}(3\lambda - 2) - \overline{B}^2 E + 4\overline{B}G - 8D + 16B &= 0 \\
\overline{B}E(2\lambda - 3) - 2\lambda - 4G &= 0 \\
E(\lambda - 2) &= 0 \\
4\overline{D}(2\lambda - 1) - \overline{B}^2 D\lambda - 4\overline{E}D + 8\overline{E}B + 2\overline{B}^2 E + 8\overline{B}A &= 0 \\
4\overline{E}\lambda - 2\overline{D}E(2\lambda - 1) - 2\overline{B}D(\lambda - 1) + 4\overline{E}G + \overline{B}^2 G &= 0 \\
+\overline{B}^2 + 2\overline{B}B + 8A &= 0 \\
2\overline{E}E(\lambda - 1) + D(\lambda - 2) - \overline{B}G - \overline{B} &= 0 \\
4\overline{F}\lambda - 2\overline{D}D\lambda + 4\overline{E}A + 2\overline{D}B + \overline{B}^2 A &= 0 \\
2\overline{F}E\lambda + \overline{E}D(\lambda - 1) - \overline{D}G - \overline{D} - \overline{B}A &= 0 \\
\overline{F}D\lambda - \overline{D}A &= 0.
\end{aligned} \tag{A5}$$

From the fourth equation of system (A5) it follows that $\lambda = 2$ or $\lambda \neq 2, E = 0$.

If $\lambda = 2$, from the third and seventh equation we obtain $E = 0, G = -1$. Using the first and ninth equation we have $B = (2D - b)/4$ and $A = De/b$. Using sixth equation $b + 2D = 0$ or $8e - b^2 = 0$; in both cases there is a contradiction with (A2).

If $\lambda \neq 2, E = 0$ we obtain $G = -\lambda/2, D = -b/2, B = -b\lambda/4, A = -e\lambda/4$. From the ninth equation we obtain $be - 2d = 0$ and this is a contradiction with (A2).

Case 2. Suppose $\overline{B} = \overline{A} = 0$. From (A2) we obtain $\overline{D} \neq 0$. Computing the coefficients of the polynomials $X(f_2)$ and $\lambda k_1 f_2$, it follows that $X(f_2) = \lambda k_1 f_2$ if, and only if, A, B, C, D, E, G and λ satisfy $D = 2B, G = -C\lambda/2$ and the following nonlinear system with seven equations

$$\begin{aligned}
E(\lambda - 2) &= 0 \\
C(2\lambda - 1) &= 0 \\
C\overline{E}\lambda - 2E\overline{D}\lambda + E\overline{D} + 4A\overline{C} &= 0 \\
E\overline{E}\lambda + B\overline{C}\lambda - E\overline{E} - 2B\overline{C} &= 0 \\
2C\overline{E}\lambda - 2B\overline{D}\lambda + 2A\overline{E} + B\overline{D} &= 0 \\
4E\overline{E}\lambda + 4B\overline{E}\lambda + C\overline{D}\lambda - 4B\overline{E} - 2C\overline{D} &= 0 \\
2B\overline{F}\lambda - A\overline{D} &= 0.
\end{aligned} \tag{A6}$$

From the first equation of system (A6) it follows that $\lambda = 2$ or $\lambda \neq 2, E = 0$.

If $\lambda = 2$ second, seventh and third equation we obtain $C = 0, A = 4Bf/d, E = (16Bcf)/(3d^2)$, respectively. Using fourth equation we have $Bef = 0$. From fifth equation it follows that $B = 0$. Then $X = 0$.

If $\lambda \neq 2, E = 0$ then from fourth, seventh and sixth equation it follows that $B = 0, A = 0, C = 0$ respectively. Then $X = 0$.

Case 3. Suppose $\overline{B} = \overline{C} = 0$. From (A2) it follows that $\overline{E} \neq 0$. Using (A1), after the division of equation $f_2 = 0$ by \overline{E} we may suppose that $\overline{E} = 1$. We rename the coefficients of f_2 and write $f_2(x, y) = ax^2 + bx + c + y$. To avoid the parabolas coincide we consider the condition $(a + 1)^2 + b^2 + c^2 \neq 0$. \square

Proof of Proposition 1.2. As in the proof of Proposition 1.1, the general form of

a polynomial system with degree ≤ 2 having $f_1 = 0$ as an invariant parabola is given by (A3). Let X the vector field defined by system (A3). There exists $\lambda \in \mathbb{R}$ such that $X(f_2) = \lambda k_1 f_2$ if, and only if, A, B, C, D, E, G and λ satisfy the following nonlinear system with seven equations

$$\begin{aligned}
C(\lambda - 1) &= 0, \\
E(\lambda - 1) &= 0 \\
-2bC\lambda + aD\lambda + bC - 2aB + D - 2B &= 0 \\
2bE\lambda - 2C\lambda - bE - 2aG - 2aC - 2G &= 0 \\
-2cC\lambda + bD\lambda - bB - 2aA - 2A &= 0 \\
2cE\lambda + D\lambda - bG - bC - D &= 0 \\
cD\lambda - bA &= 0.
\end{aligned} \tag{A7}$$

From the first and second equations we know that $\lambda = 1$ or, if $\lambda \neq 1$, then $C = E = 0$. We shall study both cases separately.

Case 1. Suppose $\lambda = 1$.

Case 1.1 Suppose $b = c = 0$. Since $f_1 \neq f_2$ we obtain $a \neq -1$. Then $A = 0, D = 2B$ and $G = -C$ and X is topologically equivalent to the vector field given by system (5).

Case 1.2 Suppose $b = 0$ and $c \neq 0$. Then $D = E = 0$ and we consider the cases $a = -1$ and $a \neq -1, B = 0, G = -C$.

If $a = -1$ then $C = 0$ and X is given by system (4).

If $a \neq -1, B = 0, G = -C$ then $A = -C/(a + 1)$ and X is topologically equivalent to the vector field defined by system (6).

Case 1.3. Suppose $b \neq 0$ and $b^2 - 4(a + 1)c \neq 0$. In this case $A = Dc/b, E = 0, G = -C, D = B, C = -B(a + 1)/b$ and X is topologically equivalent to the vector field defined by system (6).

Case 1.4. Suppose $b \neq 0$ and $b^2 - 4(a + 1)c = 0$. Then $c = b^2/(4(a + 1)), A = Dc/b, C = ((D - 2B)(a + 1))/b, G = (2Ec - Cb)/b$ and X is topologically equivalent to the vector field defined by system (5), but with

$$k(x, y) = b^2Cy + 2(a + 1)(bB - 2(1 + a)A)x + 2(a + 1)bA.$$

After the change of variables $A \mapsto A/(2(a + 1)b), B \mapsto (B + 4(a + 1)^2A)/(2b(a + 1)), C \mapsto C/b^2$, we obtain the expression of k given by (5).

Case 2. Suppose $\lambda \neq 1$ and $C = E = 0$. From the fourth equation it follows that $a = -1$ or $a \neq -1$ and $G = 0$.

Case 2.1. Suppose $a = -1$. From the third equation of system (A7) it follows that $D = 0$ and system (A7) becomes

$$Bb = 0, Gb = 0, Ab = 0.$$

Suppose $b = 0$. Since $f_1 = 0$ is different from $f_2 = 0$ it follows that $c \neq 0$. In this case X is given by system (4).

Suppose $b \neq 0$. Then $A = B = G = 0$ and $X = 0$.

Case 2.2. Suppose $a \neq -1$ and $G = 0$. From the third, fifth and sixth equation it follows that $B = 0, A = 0$ and $D = 0$, respectively. Then $X = 0$. \square

6 Conclusão

Ao longo desse trabalho demonstramos o Teorema de Grobman-Hartman e o Teorema da Variedade Estável Local, resultados essenciais no estudo do comportamento local de pontos singulares hiperbólicos de sistemas diferenciais de classe C^1 . Apesar de terem demonstrações longas e que dependem de resultados preliminares, os teoremas provados nos Capítulos 3 e 4 são de fácil aplicação, como pôde ser visto na análise realizado no Capítulo 5.

O estudo das formas normais dos sistemas que definem uma subfamília dos sistemas quadráticos planares integráveis que possuem duas parábolas invariantes nos permitiu descrever os onze possíveis retratos de fase globais dessa subfamília, além de verificarmos que todos os pontos singulares isolados, quando existem, estão sobre a interseção das parábolas $f_1 = 0$ e $f_2 = 0$.

A técnica do Blow-up teve papel essencial no estudo de pontos singulares linearmente nulos, aqueles cuja matriz Jacobiana da função aplicada no ponto singular é nula. Além disso, por meio da Compactificação de Poincaré, pudemos compreender o comportamento global das trajetórias dos sistemas analisados, não nos restringindo apenas a seu comportamento local.

Esse trabalho teve como intenção descrever uma subfamília de sistemas diferenciais que, até onde sabemos, ainda não havia sido estudada, com o intuito de contribuir para o estudo dos sistemas diferenciais quadráticos planares integráveis, estudo este bastante amplo no qual ainda há muito a ser investigado para que possamos descrevê-los em termos de comportamento global. As técnicas aqui empregadas podem ser utilizadas para o estudo de outras subfamílias cujo retrato de fase e formas normais ainda não foram descritos.

Referências

- BARROS-NETO, J. **An Introduction to the Theory of Distributions**. New York: Marcel Dekker, 1973.
- CHICONE, C. **Ordinary Differential Equations with Applications**. Second edition. New York: Springer-Verlag, 2006.
- CHRISTOPHER, C. **Quadratic systems having a parabola as an invariant curve**. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh*, n. 112A, p. 113–134, 1989.
- DOERING, C. I.; LOPES, A. O. **Equações Diferenciais Ordinárias**. Sixth edition. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 2016.
- DRIVER, B. K. **Analysis Tools with Applications**. New York: Springer-Verlag, 2003.
- DUMORTIER, F.; LLIBRE, J.; ARTÉS, J. C. **Qualitative Theory of Planar Differential Systems**. New York: Springer-Verlag, 2006.
- FOLLAND, G. B. **Real analysis: modern techniques and their applications**. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2013.
- JÚNIOR, M. B.; MELLO, A. A. H. de. **Equações Diferenciais: Uma introdução aos Sistemas Dinâmicos**. São Paulo: Instituto de Matemática e Estatística da USP, 1979.
- LIMA, E. L. **Curso de análise**, vol. 2. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 2018.
- LLIBRE, J.; SILVA, M. F. d. **Phase portraits of integrable quadratic systems with an invariant parabola and an invariant straight line**. *C. R. Acad. Sci. Paris*, n. 357, p. 143–166, 2019.
- LLIBRE, J.; YU, J. **Phase portraits of quadratic systems with an ellipse and a straight line as invariant algebraic curves**. *Electronic Journal of Differential Equations*, v. 2015, n. 314, p. 1–14, 2015.
- LLIBRE JAUME; MESSIAS, M.; REINOL, A. **Normal forms and global phase portraits of quadratic and cubic integrable vector fields having two nonconcentric circles as invariant algebraic curves**. *Dynamical Systems*, n. 3, p. 374–390, 2017.
- MUNKRES, J. R. **Topology: A First Course**. New Jersey: Prentice-Hall, 1974.
- MUNKRES, J. R. **Elements of Algebraic Topology**. Menlo Park: The Benjamin/Cummings Publishing Company, 1984.
- NEUMANN, D. **Classification of continuous flows on 2-manifold**. *Preceedings of the American Mathematical Society*, v. 48, n. 1, p. 73–81, 1975.

- OLIVEIRA, R. et al. **Geometric and algebraic classification of quadratic differential systems with invariant hyperbolas.** *Electronic Journal of Differential Equations*, v. 2017, n. 295, p. 1–122, 2017.
- PERKO, L. **Differential Equations and Dynamical Systems.** Third edition. [S.l.]: Springer-Verlag, 2001.
- SÁEZ, E.; SÁNTÓ, I. **A cubic system with a limit cycle bounded by two invariant parabolas.** *Differential Equations and Dynamical Systems*, v. 17, n. 1&2, p. 163–168, 2009.
- SCHLOMIUK, D.; VULPE, N. **Global topological classification of lotka-volterra quadratic differential systems.** *Electronic Journal of Differential Equations*, v. 2012, n. 64, p. 1–69, 2012.
- SOTOMAYOR, J. **Lições de equações diferenciais ordinárias.** Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1979.
- VIANA, M.; ESPINAR, J. **Equações Diferenciais: Uma abordagem de Sistemas Dinâmicos.** Rio de Janeiro: Notas de aula, 2020.