UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA MARIA
CENTRO DE CIÊNCIAS NATURAIS E EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA E ENSINO DE FÍSICA

Iasmim Martins Noro

DO APRENDER AO ENSINAR ÁLGEBRA: FORMAÇÃO DE FUTUROS PROFESSORES QUE ENSINAM MATEMÁTICA

SANTA MARIA, RS
2020

Iasmim Martins Noro

DO APRENDER AO ENSINAR ÁLGEBRA: FORMAÇÃO DE FUTUROS PROFESSORES QUE ENSINAM MATEMÁTICA

Dissertação apresentada ao Curso de Pós-Graduação em Educação Matemática e Ensino de Física, da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM, RS), como requisito parcial para obtenção do título de **Mestre em Educação Matemática.**

Orientadora: Profa. Dra. Anemari Roesler Luersen Vieira Lopes
Coorientadora: Profa. Dra. Regina Ehlers Bathelt

SANTA MARIA, RS
2020

This study was financied in part by the Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) – Finance Code 001

Noro, Iasmim Martins
Do aprender ao ensinar álgebra: formação de futuros professores que ensinam matemática / Iasmim Martins Noro.- 2020.
243 p.; 30 cm

Orientadora: Anemari Roesler Luersen Vieira Lopes
Coorientadora: Regina Ehlers Bathelt
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Santa Maria, Centro de Ciências Naturais e Exatas, Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Ensino de Física, RS, 2020

1. Formação inicial de professores 2. Álgebra 3. Anos iniciais 4. Nexos conceituais algébricos 5. Teoria Histórico-Cultural I. Lopes, Anemari Roesler Luersen Vieira II. Bathelt, Regina Ehlers III. Título.

Sistema de geração automática de ficha catalográfica da UFSM. Dados fornecidos pelo autor(a). Sob supervisão da Direção da Divisão de Processos Técnicos da Biblioteca Central. Bibliotecária responsável Paula Schoenfeldt Patta CRB 10/1728.

Declaro, IASMIM MARTINS NORO, para os devidos fins e sob as penas da lei, que a pesquisa constante neste trabalho de conclusão de curso (Dissertação) foi por mim elaborada e que as informações necessárias objeto de consulta em literatura e outras fontes estão devidamente referenciadas. Declaro, ainda, que este trabalho ou parte dele não foi apresentado anteriormente para obtenção de qualquer outro grau acadêmico, estando ciente de que a inveracidade da presente declaração poderá resultar na anulação da titulação pela Universidade, entre outras consequências legais.

Iasmim Martins Noro

DO APRENDER AO ENSINAR ÁLGEBRA: FORMAÇÃO DE FUTUROS PROFESSORES QUE ENSINAM MATEMÁTICA

Dissertação apresentada ao Curso de Pós-Graduação em Educação Matemática e Ensino de Física, da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM, RS), como requisito parcial para obtenção do título de **Mestre em Educação Matemática.**

Aprovado em 02 de dezembro de 2020:

Anemari RLV Lopes

Anemari Roesler Luersen Vieira Lopes, Dra. (UFSM)
(Presidente/Orientadora)

Regina Ehlers Bathelt, Dra. (UFSM)
(Coorientadora)

Rozane da Silveira Alves, Dra. (UFPel) - Videoconferência

Laura P. Fraga.

Laura Pippi Fraga, Dra. (EMEF Pão dos Pobres Santo Antônio) - Videoconferência

Santa Maria, RS
2020

DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho aos meus pais Diná e Rodrigo, pelo amor incondicional e por todos os momentos que se fazem presentes ao meu lado!

AGRADECIMENTOS

Agradeço
Primeiramente a Deus, Nossa Senhora Medianeira, Iemanjá, Oxum e os orixás por sempre me protegerem e direcionarem meu caminho. Que nunca me falte fé!
Aos meus pais Diná e Rodrigo e meus irmãos Igor e Iuri por sempre me apoiarem em busca dos meus objetivos. Eu amo vocês!
Aos meus familiares, que mesmo longe torcem por mim.
A minha orientadora, professora Anemari Roesler Luersen Vieira Lopes por toda sua paciência, carinho e zelo comigo durante todos esses anos que estamos juntas. Obrigada por todos os teus ensinamentos, és um exemplo de professora e pesquisadora. Serei tua orientanda para sempre "Profe Ane"!
A minha coorientadora, professora Regina Ehlers Bathelt por me auxiliar em todos os momentos que precisei de sua ajuda e por seus preciosos ensinamentos. Gratidão!
Aos membros da banca, as professoras Rozane da Silveira Aires e Laura Pippi Fraga pela leitura cuidadosa e por suas contribuições, por aceitarem dividir suas experiências ao avaliar este trabalho.
Aos acadêmicos da disciplina de Educação Matemática B, sujeitos desta pesquisa. Com vocês eu aprendi muito.
Ao GEPEMat por contribuir na minha formação durante todos esses anos.
A minha dupla de mestrado e de vida, Maiara, és um presente que a matemática meu deu. Mesmo longe tu sempre será minha dupla! "Da matemática para toda vida"!
A minha amiga Maiara Moraes pela amizade de longos anos e por toda alegria compartilhada.
A minha amiga Andriele por sempre estar presente em minha vida. Saiba que nunca estará sozinha, principalmente neste momento difícil!
A Juliana por ser esse encanto de amiga e estar ao meu lado sempre!
Ao Rodrigo, pela amizade que fizemos desde a graduação e que mesmo longe se faz especial.
A Paloma por me ouvir e compartilhar comigo vários momentos.
As minhas queridas Varti e Maiéli por serem companheiras incríveis e por todos os momentos que compartilhamos desde a graduação até esta reta final do mestrado. Agradeço também pela colaboração de vocês em me ajudarem na coleta dos dados da pesquisa.
A minha amiga Carine por seu jeito meigo e brilho no olhar que encanta a todos. Obrigada por ser essa pessoa tão incrível!
A Ana Luiza por ser essa pessoa iluminada e doce, e por toda parceria desde a graduação até esse momento!
As queridas Luana e Thanize, por estarem dispostas a me ajudar na coleta de dados e pelos momentos de alegrias compartilhados.
A Camila por contagiar com a sua alegria e pelas trocas de experiências (inclusive sobre os "cachos").
A Manu, por compartilharmos os momentos de angústia e também de progresso durante a pesquisa.
Às queridas Ana Luiza, Andressa, Camila, Carine, Cintia, Cris, Gabriela, Luana, Maiara, Tanira e Thanize por me mostrarem a importância do coletivo.
Ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Ensino de Física por todas as aprendizagens adquiridas.
A Universidade Federal de Santa Maria por ter sido minha segunda casa durante todos esses anos.
A CAPES pela concessão de bolsa para o desenvolvimento da pesquisa.

A todos que de algum modo contribuíram para o desenvolvimento desta pesquisa, meu muito obrigada!

RESUMO

DO APRENDER AO ENSINAR ÁLGEBRA: FORMAÇÃO DE FUTUROS PROFESSORES QUE ENSINAM MATEMÁTICA

AUTORA: Iasmim Martins Noro
ORIENTADORA: Anemari Roesler Luersen Vieira Lopes
COORIENTADORA: Regina Ehlers Bathelt

A presente dissertação de Mestrado em Educação Matemática, do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Ensino de Física da Universidade Federal de Santa Maria – UFSM, tem como tema o ensino e aprendizagem da álgebra na formação de professores que ensinam matemática nos anos iniciais. A partir de inquietações da pesquisadora acerca dessa temática, esta pesquisa tem como objetivo principal: investigar possibilidades formativas para futuros professores que ensinam Matemática no que se refere ao ensino e aprendizagem de álgebra nos anos iniciais do Ensino Fundamental. Pautado nos pressupostos de que o ser humano desenvolve-se por meio da socialização e interação com os outros sujeitos e assim vai produzindo cultura, este estudo embasa-se teoricamente na Teoria Histórico-Cultural – THC, de Vigotski; na Teoria da Atividade – TA, de Leontiev; e na Atividade de Orientadora de Ensino – AOE, de Moura. Entendendo que os conceitos algébricos básicos, presentes nos anos iniciais, quando trabalhados de forma eficiente, contribuem para a aprendizagem e para o desenvolvimento dos estudantes, faz-se primordial pensar nas formas de organização deste ensino nesta fase escolar, com vista a capacitar o professor que ensina matemática a enfrentar desafios. Para o desenvolvimento desta investigação, foram desenvolvidas ações na perspectiva de um experimento formativo, relacionado aos nexos conceituais algébricos, com acadêmicos da disciplina Educação Matemática B do curso de Pedagogia Diurno da Universidade Federal de Santa Maria, contexto de formação do futuro professor que ensina matemática nos anos iniciais. Com base no movimento lógico-histórico da álgebra, as ações foram planejadas e baseadas nos seguintes nexos: sequência, padrão, regularidade, fluência, interdependência, variável, campo de variação e relação de igualdade. As ações constituíram uma unidade didática composta por seis situações de ensino pautadas na perspectiva de Situações Desencadeadoras de Aprendizagem - SDA. A produção de dados se deu por meio de gravações de vídeo e áudio, fotografias, registros e diário de bordo da pesquisadora. Foi possível identificar que, ao planejar as ações baseadas no movimento lógico-histórico da álgebra e, mais especificamente, ao explorar os nexos conceituais algébricos por meio das situações, houve uma aproximação com a essência da álgebra, uma vez que os acadêmicos conseguiram atribuir sentido a tais ações, coincidentes com seu significado histórica e culturalmente produzido. Os resultados ratificam a importância de possibilidades formativas que direcionem os futuros professores a aprendizagem do conhecimento matemático, desde que seu organizador domine o conhecimento matemático, e, mais especificamente, neste caso, os conhecimentos algébricos e possa planejar e organizar um ensino que vise desenvolver o pensamento teórico dos estudantes da Educação Básica. Dessa forma, os futuros professores se colocam em movimento de organizar ações embasados nos modos como aprenderam determinados conhecimentos.

Palavras –chave: Formação inicial de professores. Álgebra. Anos iniciais. Nexos conceituais algébricos. Teoria Histórico-Cultural.

ABSTRACT

FROM LEARNING TO TEACHING ALGEBRA: TRAINING PROSPECTIVE TEACHERS WHO TEACH MATHEMATICS

AUTHOR: Iasmim Martins Noro
ADVISOR: Anemari Roesler Luersen Vieira Lopes
CO-ADVISOR: Regina Ehlers Bathelt

This Master's dissertation in Mathematics Education, from the Graduate Program in Mathematics Education and Physics Teaching at the Federal University of Santa Maria - UFSM, has as its theme the teaching and learning of algebra in the training of teachers who teach mathematics in the early years. Based on the researcher's concerns about this subject, this research has as main objective: to investigate training possibilities for prospective teachers who teach mathematics with regard to teaching and learning algebra in the early years of elementary school. Based on the assumptions that the human being develops through socialization and interaction with other subjects and thus produces culture, this study is theoretically based on Vigotski's Historical-Cultural Theory - HCT; in Leontiev's Activity Theory - AT; and in the Moura's Teaching Guiding Activity - TGA. Understanding that the basic algebraic concepts, present in the early years, when worked efficiently, contribute to students' learning and development, it is essential to think about the forms of organization of this teaching in this school phase, in order to training the teacher that teaches mathematics to face challenges. For the development of this investigation, actions were developed in the perspective of a formative experiment, related to the algebraic conceptual nexuses, with students of the Mathematics Education B class of the Daytime Pedagogy course at the Federal University of Santa Maria, context of the formation of the prospective teacher who teaches mathematics in the early years. Based on the logical-historical movement of algebra, the actions were planned and based on the following nexuses: sequence, pattern, regularity, fluency, interdependence, variable, field of variation and relation of equality. The actions constituted a didactic unit composed of six teaching situations based on the perspective of Triggering Situations of Learning - TLS. The production of data took place through video and audio recordings, photographs, records and the researcher's logbook. It was possible to identify that, when planning actions based on the logical-historical movement of algebra and, more specifically, when exploring the conceptual algebraic nexuses through situations, there was an approximation with the essence of algebra, since academics were able to attribute meaning to such actions, coinciding with their historically and culturally produced meaning. The results confirm the importance of formative possibilities that guide prospective teachers to the learning of mathematical knowledge, as long as their organizer dominates mathematical knowledge and, more specifically, in this case, the algebraic knowledge, and can plan and organize teaching that aims to develop the theoretical thinking of Basic Education students. Thus, future teachers are set in motion to organize actions based on the ways in which they have learned certain knowledge.

Keywords: Initial teacher training. Algebra. Early years. Algebraic conceptual nexuses. Historical-Cultural Theory.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

LISTA DE SIGLAS

UFSM	Universidade Federal de Santa Maria
PIBID	Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência
InterdEM	Interdisciplinar Educação Matemática
RS	Rio Grande do Sul
GEPEMat	Grupo de Estudos e Pesquisa em Educação Matemática
CluMat	Clube de Matemática
SDA	Situação Desencadeadora de Aprendizagem
AOE	Atividade Orientadora de Ensino
THC	Teoria Histórico – Cultural
TA	Teoria da Atividade

SUMÁRIO

1 CONSIDERAÇÕES INICIAIS: DA TRAJETÓRIA À QUESTÃO INVESTIGATIVA

> O profissional da Educação Matemática é, para nós, aquele que toma o conhecimento matemático como um projeto humano e procura todos os meios de fazer com que os seus educandos adquiram este conhecimento por meio de situações de ensino onde quer que a Matemática possa estar (MOURA, 2000, p. 18).

Ao pensar na minha[1] trajetória pessoal e acadêmica em relação à Matemática, vem-me o questionamento inicial: será que fui eu quem escolhi a Matemática, ou foi ela quem me escolheu e atraiu-me com seus encantos? Seriam os números, as fórmulas, as aplicações e os conceitos que me cativaram? Ou seriam as contribuições dela no desenvolvimento humano que me fazem refletir o quanto ela é importante no nosso crescimento? Pensando em respostas para esse questionamento inicial, posso dizer que o conjunto dessas indagações se objetivou na paixão que tenho pela Matemática.

Como estudante da Educação Básica sempre tive muita facilidade com a Matemática. Lembro-me dos elogios dos professores ao desenvolver as atividades, das boas notas, da dedicação em fazer as tarefas matemáticas e, sobretudo, sentia-me feliz ao ajudar os colegas que tinham dificuldades na aprendizagem dessa disciplina. Também sempre busquei conhecer além do que era visto em sala de aula, principalmente em relação aos problemas matemáticos relacionados ao raciocínio lógico. Recordo-me que algumas vezes meu pai me propunha alguns e eu não descansava enquanto não os solucionasse.

Para mim, os professores de Matemática durante meu caminho de escolarização no Ensino Fundamental e no Ensino Médio, dentre os das demais disciplinas, eram os preferidos. Eu os considerava os melhores, pois ensinavam com prazer e transmitiam o amor que sentiam por ela. Isso talvez tenha sido um dos fatores que me fez gostar cada vez mais dela. Hoje, ao me lembrar do meu contato com a Matemática escolar nos tempos da Educação Básica, da influência boa dos professores desta disciplina na minha vida e do quanto sempre me interessei em aprender os seus conteúdos, entendo o meu ingresso no curso de licenciatura em Matemática.

Em 2012, fiz vestibular e, no segundo semestre de 2013, ingressei no Curso de licenciatura em Matemática – Noturno da Universidade Federal de Santa Maria – UFSM. A escolha pelo noturno se deu pela necessidade que eu tinha de trabalhar enquanto estudava e, em

---

[1] Neste primeiro momento da escrita serão utilizados os verbos na primeira pessoa do singular, por enfatizar a trajetória pessoal e acadêmica da pesquisadora. A partir do primeiro capítulo, serão utilizados os verbos na primeira pessoa do plural por entender que a realização desta pesquisa se dá de forma conjunta com as orientadoras e colaboradores da pesquisa.

função disso, não tive muitas oportunidades de participar e de me inserir na escola durante mais ou menos até a metade da graduação. Porém, quando estava no 5.º semestre do curso, consegui fazer parte do projeto de ensino intitulado *Investigação da aprendizagem significativa em demonstrações matemáticas abordadas no Ensino Médio*[2].

Nesse projeto, investigamos como ocorre o processo de aprendizagem dos alunos, ou seja, se a aprendizagem deles é de forma significativa ou não, quando as demonstrações matemáticas são abordadas a partir de situações – problemas reais. A minha participação durante dois semestres no projeto permitiu-me entrar em contato com professoras da Educação Básica e entender um pouco sobre como elas planejavam os conteúdos advindos de demonstrações matemáticas e que resultavam em suas famosas fórmulas de aplicação, como por exemplo, o Teorema de Pitágoras.

Quando eu estava no 6.º semestre do curso de graduação, fui selecionada e ingressei como bolsista do Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência no subprojeto Interdisciplinar Educação Matemática – PIBID InterdEM[3]. O subprojeto possuía aspecto interdisciplinar por ser composto de acadêmicos oriundos de três cursos de graduação: Pedagogia, Educação Especial e Matemática. Além disso, contava com o apoio de colaboradoras da graduação e pós-graduação e professores da Educação Básica sob a orientação de uma professora do Ensino Superior. O subprojeto atuava em três escolas da rede pública de Santa Maria/RS.

O subprojeto PIBID InterdEM tinha como foco o ensino e a aprendizagem da Matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental, bem como a preocupação com o professor e futuro professor e os alunos da Educação Básica. Esse subprojeto desenvolvia suas ações em parceria com o Grupo de Estudos e Pesquisa em Educação Matemática – GEPEMat[4] da UFSM, no âmbito do Clube de Matemática (CluMat). O GEPEMat desenvolve ações de pesquisa, ensino e extensão através da relação entre a universidade e a escola, tendo a atenção voltada para o ensino e a aprendizagem da Matemática na Educação Básica.

Durante minha participação no PIBID InterdEM e como integrante do GEPEMat, compreendi a importância de se pensar na organização do ensino de Matemática e o quanto trabalhar em um coletivo faz a diferença na nossa formação pessoal. Pensar no ensino e na aprendizagem da Matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental foi algo totalmente novo

[2] Projeto de Ensino coordenado pela Profa. Dra. Maria Cecilia Pereira Santarosa
[3] Projeto coordenado pela Profa. Dra. Anemari Roesler Luersen Vieira, e desenvolvido de 2014 a 2018.
[4] O grupo teve sua criação no ano de 2009 e é organizado pelos professores: Profa. Dra. Anemari Roesler Luersen Vieira Lopes; Profa. Dra. Liane Teresinha Wendling Roos; Profa. Dra. Regina Ehlers Bathelt e Prof. Dr. Ricardo Fajardo.

para mim, visto que, na graduação em licenciatura em Matemática, temos apenas oportunidade de inserção nos anos finais do Ensino Fundamental e no Ensino Médio. Eu sempre gostei de crianças, e a oportunidade de trabalhar com elas foi o que me cativou a participar do subprojeto InterdEM.

Percebi o quanto minha participação no subprojeto me transformou. Foi muito além das minhas expectativas. Como já mencionado, o que me fez ingressar no curso de licenciatura em Matemática foi mesmo a paixão por essa disciplina, foi cursar uma graduação em que eu aprendesse muito mais daquilo que a escola proporcionava. Porém, o que me fez permanecer em um curso de licenciatura, e me entender o quanto se faz importante pensar no ensino e na aprendizagem desta disciplina na escola, foi a participação no subprojeto PIBID. As leituras feitas no grupo, as aprendizagens que compartilhamos, me mostraram que muito mais que saber Matemática, é preciso saber ensiná-la.

Ao pensar na organização do ensino de Matemática para os anos iniciais e depois desenvolver as ações planejadas, fui constituindo o meu processo de formação. À medida que fui me envolvendo nesta dimensão dos anos iniciais, com o retorno das crianças em relação ao que planejamos e desenvolvemos com elas, me encantei. Hoje posso dizer que não me preocupo apenas com a Matemática, mas muito mais com o ensino e a aprendizagem dela, com a importância do papel do professor em organizar esse ensino e o quanto podemos nos aprimorar no trabalho coletivo. Carrego, hoje, comigo não só o amor pela Matemática, mas o amor pela profissão de professor e a paixão pelos anos iniciais.

Durante a graduação, além da participação nos projetos já mencionados, também tive a oportunidade de, durante dois semestres, ser monitora do programa Novo Mais Educação. Essa experiência foi muito gratificante, pois retornei à escola em que estudara desde a pré-escola até o nono 9.º ano. Eu fui monitora das turmas de 5.º e 6.º ano do Ensino Fundamental, dando aula de “reforço” de Matemática no turno inverso de suas aulas regulares. Não foram os alunos apenas que aprenderam Matemática comigo, eu também aprendi sobre o que é ser professora com eles.

Tanto a inserção na escola durante o PIBID InterdEM quanto a monitoria no programa Mais Educação me ampararam significativamente na hora de desenvolver os estágios supervisionados propostos pelo curso. As maneiras de atuar na sala de aula durante o estágio e o planejamento das aulas muito refletiam as aprendizagens que tivera durante a participação destes. Como na organização das ações desenvolvidas no subprojeto InterdEM buscávamos contemplar a síntese histórica do conceito, lembro que, cada vez que ia ensinar aos alunos um novo conceito, procurava sempre saber a história e necessidade de seu surgimento, o que, geralmente, pareceu ser interessante aos alunos.

Durante o mestrado, fui bolsista CAPES por um período de aproximadamente um ano. Atualmente sou professora de Laboratório de Matemática do 1.º ao 4.º ano em uma escola privada da cidade de Santa Maria. Relembrando minha trajetória na Educação Básica, sempre gostei dos conceitos relacionados à álgebra. Deste modo, minha pesquisa de Trabalho de Conclusão de Curso – TCC foi em torno desse ramo da Matemática, mais especificamente em relação ao conceito de função. Ao desenvolver as ações planejadas sobre o conceito de função em uma turma de 1.º do Ensino Médio, observei que os alunos ainda não tinham internalizado os conceitos algébricos básicos. Isso pareceu um indício de que, provavelmente, as formas de desenvolvimento das ações propostas a eles tenderam para resoluções mecânicas, não conseguindo generalizar os conceitos algébricos.

Em assim sendo, verifiquei que os sentidos que os alunos haviam atribuído aos conceitos algébricos básicos não lhes permitiam compreender os conceitos algébricos presentes nos anos finais do Ensino Fundamental e no Ensino Médio. Diante disso, brotaram algumas inquietações: por que será que os conceitos algébricos básicos ainda não estão consolidados nos alunos desde os anos iniciais? É possível ensinar os conceitos algébricos básicos nos anos iniciais? Como é possível organizar o ensino de álgebra nesta etapa da Educação Básica?

A Base Nacional Comum Curricular – BNCC determina que os conceitos algébricos devem ser incorporados desde os anos iniciais, ou seja, é

> [...] imprescindível que algumas dimensões do trabalho com a álgebra estejam presentes nos processos de ensino e aprendizagem desde o Ensino Fundamental – Anos Iniciais, como as ideias de regularidade, generalização de padrões e propriedades de igualdade. (BRASIL, 2017, 270)

Esse documento orienta que os alunos deverão ser capazes de compreender diferentes ideias vinculadas a esta unidade, principalmente quanto ao desenvolvimento de uma linguagem e formas de generalizações. A unidade álgebra da BNCC,

> [...] tem como finalidade o desenvolvimento de um tipo especial de pensamento – pensamento algébrico – que é essencial para utilizar modelos matemáticos na compreensão, representação e análise de relações quantitativas de grandezas e, também, de situações e estruturas matemáticas, fazendo uso de letras e outros símbolos. (BRASIL, 2017, p. 270)

Indica ainda o documento que a referência à álgebra nos anos iniciais deve acontecer por meio dos nexos conceituais de regularidade, padrão e propriedades de igualdade, não sendo necessário introduzir letras para expressar regularidades (BRASIL, 2017). Verificar a dificuldade dos alunos em relação aos conceitos básicos da álgebra presente nos anos iniciais, descobrir a maneira como se ensina e o encanto por este ciclo de escolarização motivaram-me a desenvolver esta pesquisa de dissertação de mestrado que se propõe a oferecer respostas às minhas inquietações sobre as possibilidades formativas da organização do ensino e aprendizagem da álgebra nos anos iniciais do Ensino Fundamental.

Olhar para a importância da álgebra dentre as grandes áreas da matemática e constatar como o processo de ensino e aprendizagem desse conteúdo algumas vezes não se faz relevante para os alunos nos faz pensar que eles não atribuem sentido aos conceitos algébricos e não sentem necessidade de sua aprendizagem, talvez por conta dos métodos de memorização e aplicação mecânica dos conceitos que lhes foram oferecidos. Diante da perspectiva de que o processo de apropriação dos conceitos algébricos pode ser iniciado já nos anos iniciais, cabe organizar esse ensino nesta fase escolar e, do mesmo modo, pensar nos desafios do professor que ensina matemática neste período de escolarização.

O professor vai se constituindo professor ao longo de sua trajetória, com suas experiências, sua história e sua formação. A base da ação docente do professor começa a ser construída desde a sua formação inicial, daí a importância de mecanismos que possam contribuir para a qualidade da formação inicial do professor que ensina matemática. Ao gerar ações que promovam o desenvolvimento da ação docente do professor desde a sua formação inicial, consequentemente se estará aprimorando o processo de ensino e aprendizagem dos estudantes que estarão na sala de aula desses futuros docentes. Em vista disso, intencionamos colocar futuros professores, sujeitos de nossa pesquisa, no movimento de desenvolver ações que promovam a aprendizagem dos conceitos algébricos presentes nos anos iniciais, bem como o desenvolvimento do pensamento algébrico.

Assim, partindo da importância da álgebra no desenvolvimento psicológico dos estudantes (SOUSA; PANOSSIAN; CEDRO, 2014), da maneira como o ensino desta tem sido consolidado nos estudantes; da presença dos conceitos algébricos desde os anos iniciais do Ensino Fundamental nas orientações curriculares (BRASIL, 2017); e das possibilidades de organização deste ensino neste ciclo, esta pesquisa de dissertação de mestrado tem como tema o ensino e a aprendizagem da álgebra na formação de professores que ensinam matemática nos anos iniciais. Para tanto seu objetivo principal é *investigar possibilidades formativas para futuros professores que ensinam matemática no que se refere ao ensino e à aprendizagem de álgebra nos anos iniciais do Ensino Fundamental*.

Portanto, esta pesquisa busca elementos para compreender como ocorre a aprendizagem desses futuros professores, inserindo-se num contexto mais amplo sobre o ensino e a aprendizagem da álgebra nos anos iniciais. Embora, como já explicitado, os motivos iniciais de desenvolvê-la estavam relacionadas a sentidos pessoais, muitos outros pesquisadores no âmbito da Educação Matemática também compactuam com essa preocupação e têm se debruçado a estudar esse tema. Assim, no próximo tópico dirigiremos nosso olhar para pesquisas voltadas à álgebra nos anos iniciais e, mais especificamente, no contexto da formação de professores.

1.1 UM OLHAR SOBRE AS PESQUISAS

Com a finalidade de conhecermos melhor o campo de investigação relacionado ao tema Álgebra nos anos iniciais, localizamos na Biblioteca Digital de Dissertações e Teses – BDTD[5] algumas pesquisas de mestrado e doutorado dos últimos dez anos, datadas de 2008 a 2018. O objetivo era identificar aquelas relacionadas à álgebra nos anos iniciais, encontrando aproximações e distanciamentos entre elas. Os campos de busca dessas pesquisas se deram pelo resumo, palavras-chave e título de pesquisas que envolvessem os seguintes descritores: *álgebra, Ensino Fundamental, anos iniciais, nexos conceituais algébricos, formação de professores, Atividade Orientadora de Ensino* e *pensamento algébrico.* Para a busca, o descritor *álgebra* foi fixado, e os demais foram variando conforme a demanda da pesquisa.

Quadro 1: Descritores e quantidades das pesquisas encontradas

DESCRITORES	QUANTIDADE DE PESQUISAS
Álgebra - Ensino Fundamental	18
Álgebra - Anos Iniciais	2
Álgebra - Nexos Conceituais Algébricos	1
Álgebra - Formação de Professores	4
Álgebra - Aritmética	9
Álgebra – Atividade Orientadora de Ensino	1
Álgebra – Pensamento Algébrico	16
TOTAL[6]	48

[5] Disponível no *link* http://bdtd.ibict.br/vufind/
[6] Com os descritores escolhidos foram encontrados 51 resultados, porém, como três das pesquisas já haviam sido contabilizadas por estarem presentes na busca com outros descritores, nosso total é de 48 trabalhos.

Fonte: Sistematização da autora baseado nos dados presentes na BDTD no mês de agosto de 2019

Assim, com os descritores *álgebra* e *Ensino Fundamental* foram encontradas 18 pesquisas. Destas, 12 tinham como foco analisar e desenvolver o pensamento algébrico dos alunos dos anos finais do Ensino Fundamental, bem como verificar as suas estratégias de resolução de problemas algébricos. Relacionadas à formação de professores, mais especificamente à formação continuada de professores de matemática, foram identificadas duas pesquisas, as quais tinham o objetivo de identificar os conhecimentos matemáticos dos professores em relação aos conteúdos algébricos e, ainda, propor para o professor atividades que contribuíssem para a melhoria do ensino e da aprendizagem da matemática em relação aos conceitos algébricos.

Deste total, uma pesquisa era direcionada a alunos tanto dos anos iniciais quanto dos anos finais do Ensino Fundamental e tinha como propósito analisar uma sequência pedagógica com atividades relativas ao desenvolvimento algébrico dos alunos, sendo que eram exploradas questões acerca dos conceitos de igualdade, regularidade e padrões. Por mais que no momento da busca pelos trabalhos nos campos já mencionados objetivássemos por aqueles que envolvessem álgebra e Ensino Fundamental, uma dentre as 18 pesquisas com esses descritores abordava o uso de Tecnologias de Informação e Comunicação (TIC) no ensino do Teorema Fundamental da Álgebra no Ensino Médio.

Ainda, outras duas pesquisas foram encontradas em contextos diferentes ao de alunos e professores. Uma delas tinha a intenção de investigar os significados da noção de equação no ensino de matemática, fazendo assim uma metanálise de nove dissertações relacionadas a área de Educação Matemática. E outra buscava averiguar, nos livros didáticos de 8.º ano, como são introduzidos os conceitos algébricos.

Com os descritores *álgebra* e *anos iniciais* foram encontradas apenas duas pesquisas. Em uma dessas pesquisas foi desenvolvido um curso de extensão voltado para professores dos anos iniciais, com o objetivo de investigar o conhecimento matemático desses professores em relação ao ensino que desenvolva o pensamento algébrico presente nos anos iniciais. A outra referia-se a uma oficina realizada com professoras de uma escola pública e, a partir de atividades manipulativas e recursos digitais, procurava investigar o desenvolvimento do pensamento algébrico dessas professoras.

Essas duas pesquisas se aproximam mais do nosso tema de pesquisa aqui proposto, uma vez que ambas voltam seu olhar para a álgebra nos anos iniciais e para a formação de professores deste ciclo. São elas: a pesquisa de Freire (2011), intitulada *Desenvolvimento de* *conceitos algébricos por professores dos anos iniciais do Ensino Fundamental* e a pesquisa de Ferreira (2017), denominada *Álgebra nos anos iniciais do Ensino Fundamental: uma análise do conhecimento matemático acerca do pensamento algébrico.* As duas serão comentadas aqui neste estudo.

Com os descritores *álgebra* e *nexos conceituais algébricos*, encontramos apenas uma pesquisa, a qual investigou os indícios de apropriação dos nexos conceituais algébricos de 12 estudantes de uma turma de 5.º ano participantes do Clube de Matemática. Assim, desenvolveu ações relacionadas aos conceitos algébricos presentes nos anos iniciais.

Com os descritores *álgebra* e *formação de professores*, encontramos um total de quatro pesquisas, porém duas delas já haviam aparecido em nossa busca. Das outras duas, uma delas tinha como objetivo estudar as concepções referentes a ensino e aprendizagem de professores de Álgebra dos cursos de licenciatura em matemática. A outra, desenvolvida com acadêmicos do curso de licenciatura em matemática, estudou as correlações que podem ser feitas entre a álgebra moderna e a educação básica, com o propósito de contribuir para a formação inicial de professores de matemática.

Com os descritores *álgebra* e *aritmética* foram encontradas nove pesquisas, porém, uma delas já está constituída no nosso *corpus* de análise, visto que já havia sido encontrada anteriormente com outros descritores. Das oito pesquisas restantes, uma delas tinha como sujeitos alunos dos anos finais do Ensino Fundamental e alunos do Ensino Médio, e buscava obter um diagnóstico relativo aos erros e às dificuldades desses alunos no que se refere à simplificação de frações aritméticas e algébricas. Uma delas tinha como foco evidenciar as potencialidades de se trabalhar com atividades relacionadas a pré-álgebra com alunos dos anos finais. Duas pesquisas estavam no contexto da formação continuada de professores, uma mais especificamente aos professores que ensinam matemática nos anos iniciais, objetivando assim, identificar os modos de concepção dos professores em relação à transição entre os conceitos aritméticos para a introdução de conceitos algébricos presentes nos anos iniciais.

A outra pesquisa relativa ao contexto da formação de professores tinha como objetivo investigar como o estudo da aritmética modular, através de situações-problemas, contribui para o desenvolvimento do pensamento aritmético e algébrico de professores de matemática que participaram de um curso de formação continuada. Ainda desse total de oito pesquisas, três delas tinham como público-alvo alunos do Ensino Fundamental. No geral, tais pesquisas procuravam identificar as dificuldades dos alunos em compreender os conceitos algébricos, as suas estratégias de resolução de problemas que envolvam esses conceitos. Uma delas, mais especificamente, estudou as concepções dos alunos sobre o significado do símbolo de igualdade. Por fim, uma das pesquisas teve como foco investigar, em dois cursos de engenharia, a natureza dos erros apresentados por estudantes do Ensino Superior na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I.

Portanto, em síntese, desse total de oito trabalhos, um deles – *Estudos das concepções e competências dos professores: a passagem da aritmética à introdução da representação algébrica nas séries iniciais do Ensino Fundamental* (YAMANAKA, 2009) – se aproxima mais do nosso foco, pois volta-se para a formação de professores dos anos iniciais do Ensino Fundamental e suas concepções a respeito dos conceitos aritméticos e algébricos presentes neste ciclo. Com os descritores *álgebra* e *atividade orientadora de ensino* apenas um trabalho foi encontrado. Essa pesquisa, desenvolvida com alunos da 6.ª série do Ensino Fundamental, analisou as falas desses alunos, durante a realização de atividades de ensino de álgebra mediadas por um jogo pedagógico, para averiguar a interação alunos-professor e compreender as manifestações dos alunos, enquanto desenvolvem os seus possíveis conhecimentos. Com os descritores *álgebra* e *pensamento algébrico* foram encontradas 16 pesquisas. Destas, seis tratavam dos indícios e dos aspectos de um currículo que proporcione o desenvolvimento do pensamento algébrico, da análise de livros didáticos nos temas relacionados a conteúdos algébricos, e da visão de ensino de álgebra presente nesses livros e, ainda, do estudo dos documentos oficiais no que concerne à álgebra e ao desenvolvimento do pensamento algébrico. Do total de pesquisas encontradas com esses descritores, identificamos quatro voltadas ao ensino e à aprendizagem da álgebra de alunos dos anos finais.

No geral, essas pesquisas que tinham como sujeitos alunos dos anos finais do Ensino Fundamental, objetivavam compreender as dificuldades dos estudantes em relação à álgebra, as manifestações do pensamento e linguagem algébrica, formas de resolução de problemas, bem como averiguar contribuições de propostas de ensino pautadas em conteúdos algébricos que culminassem no desenvolvimento do pensamento algébrico dos estudantes participantes das pesquisas. Tendo como sujeitos das pesquisas alunos do ensino superior, encontramos três trabalhos. Desses, dois eram direcionados a aspectos que identificassem o pensamento algébrico de acadêmicos do curso de licenciatura em Matemática e o outro, além disso, também era voltado analisar as estratégias usadas por professores- estudantes em Educação Matemática.

Com os descritores *álgebra* e *pensamento algébrico*, achamos dois trabalhos e ambos relacionados à formação continuada de professores. Enquanto o primeiro se ocupou com elementos constituintes do desenvolvimento do pensamento algébrico de professores de matemática que atuam no Ensino Fundamental – anos finais de uma escola estadual através de entrevistas e do desenvolvimento de atividades de cunho algébrico –, o outro tinha como sujeitos professores que lecionavam matemática nos anos iniciais e professores dos anos finais. Essa pesquisa, desenvolvida por Pinheiro (2018) e denominado *O ensino de álgebra e crença de autoeficácia docente no desenvolvimento do pensamento algébrico,* analisou as crenças de autoeficácia dos professores em relação ao desenvolvimento do pensamento algébrico dos alunos. Por trabalhar com atividades que visam ao desenvolvimento do pensamento algébrico no contexto da formação de professores que ensinam matemática e, neste sentido, abrangendo também os professores que lecionam matemática nos anos iniciais, ela foi selecionada para integrar o nosso *corpus* de análise.

Em síntese, tomando as pesquisas que contivessem os descritores apresentados anteriormente nos campos selecionados, foram encontradas 48 delas, todavia apenas 6 estavam no contexto da álgebra nos anos iniciais. Esse panorama geral nos leva a observar que, quando se trata do ensino e aprendizagem dos estudantes em relação aos conceitos algébricos, pensa-se prioritariamente nos anos finais do Ensino Fundamental, com ênfase em conteúdos relacionados a expressões e equação do primeiro grau, buscando, nesse sentido, analisar as formas de resolução das atividades propostas e, assim, observar os fatores predominantes no desenvolvimento do pensamento algébrico dos alunos.

Pudemos perceber, inclusive, que muitos estudos priorizam o ensino e a aprendizagem dos estudantes em detrimentos da formação de professores que ensinam matemática, especialmente no quesito álgebra. Dos 11 trabalhos relacionados à formação de professores, tão somente 4 se ocuparam dos professores que ensinam matemática nos anos iniciais. Nesta perspectiva, há um olhar mais centrado na formação dos professores de matemática no que se refere à álgebra.

As pesquisas que tinham como foco a análise de documentos oficiais, caderno do professor, currículo ou metanálise de dissertações ou teses preocupavam-se em averiguar como a álgebra estava presente nesse contexto e como estavam expostos os conceitos algébricos no que se refere ao favorecimento da promoção do pensamento algébrico dos estudantes. Principalmente as pesquisas mais atuais, direcionadas à análise de documentos oficiais, salientam, cada vez mais, a relevância de se trabalhar com os conceitos algébricos desde os anos iniciais e não apenas nos anos finais como era proposto em alguns documentos anteriores.

Em suma, a partir dos trabalhos encontrados com essa busca na Biblioteca Digital de Dissertações e Teses, percebemos que, como ainda são pouco discutidos e pesquisados o ensino e a aprendizagem dos conceitos algébricos, presentes nos anos iniciais do Ensino Fundamental, justifica-se o desenvolvimento desta pesquisa, que visa contribuir para as discussões sobre formação dos futuros professores que atuarão nos anos iniciais, na expectativa de que seus resultados contribuam com a aprendizagem dos estudantes da Educação Básica. Assim, do total de 48 trabalhos, refinamos a busca e selecionamos aqueles 6 que se debruçaram sobrea temática a Álgebra nos anos iniciais, conforme ilustra o Quadro 2. Desses seis trabalhos, cinco deles são dissertações de mestrado e um é uma tese de doutorado. Três deles foram desenvolvidos em universidades localizadas no estado de São Paulo, e os outros desenvolvidos no Ceará, em Goiás e em Santa Catarina.

Quadro 2: Pesquisas voltadas para a temática álgebra nos anos iniciais

AUTOR	TIPO DE PESQUISA	TÍTULO	IES	ANO
YAMANAKA, O. Y.	Dissertação	Estudos das concepções e competências dos professores: a passagem da aritmética à introdução da representação algébrica nas séries iniciais do Ensino Fundamental	PUC - SP	2009
FREIRE, R. S.	Tese	Desenvolvimento de conceitos algébricos por professores dos anos iniciais do ensino fundamental	UFC	2011
OLIVEIRA, D. C.	Dissertação	Indícios de apropriação dos nexos conceituais da álgebra simbólica por estudantes do clube de matemática	UFG	2014
CIVINSKI, D. D.	Dissertação	Introdução ao estudo da aritmética e da álgebra no ensino fundamental	FURB	2015
FERREIRA, M. C. N.	Dissertação	Álgebra nos anos iniciais do ensino fundamental: uma análise do conhecimento matemático acerca do pensamento algébrico	UFABC	2017
PINHEIRO, A. G.	Dissertação	O ensino de álgebra e a crença de autoeficácia docente no desenvolvimento do pensamento algébrico	UNESP	2018

Fonte: Sistematização da autora

Destas seis pesquisas relacionadas à álgebra nos anos iniciais, escolhemos direcionar um olhar mais refinado a quatro delas por estarem voltadas à formação de professores, o que tem mais afinidade com a nossa temática. Desta forma, analisaremos as contribuições das pesquisas de Yamanaka (2009), Freire (2011), Ferreira (2017) e Pinheiro (2018).

A pesquisa de dissertação de Yamanaka (2009) apresenta uma abordagem quanti-qualitativa, pois usou instrumentos estatísticos para representar os dados. Este trabalho teve como objetivo investigar as compreensões de professores em relação à transição entre os conceitos aritméticos para a introdução da representação algébrica nas séries[7] iniciais do Ensino Fundamental e também quais ações seriam desencadeadas em função dessa transição. A coleta

[7] No ano de publicação da dissertação, o Ensino Fundamental estava dividido em séries.

de dados se deu em encontros acontecidos em uma unidade escolar com professores da rede pública estadual de São Paulo que ministram aulas nas séries iniciais e com os acadêmicos do último semestre do curso de licenciatura em Pedagogia, no qual foram disponibilizadas algumas aulas para o desenvolvimento da pesquisa.

Nesta perspectiva, Yamanaka (2009) pesquisou as concepções dos professores em relação à elaboração de problemas de estruturas aditivas e multiplicativas, averiguando o perfil dos sujeitos envolvidos na pesquisa, os modos empregados na elaboração dos problemas e o estabelecimento de algumas competências dos professores nos momentos de resolver os problemas. Como desenvolvimento das ações e, posteriormente, análise dos dados, para apreender as competências dos professores, também foram solicitados aos sujeitos das pesquisas que resolvessem alguns problemas de maneira convencional (aritmeticamente) e também com o enfoque algébrico (utilizando uma incógnita).

A fundamentação teórica utilizada nesta pesquisa foi a Teoria dos Campos Conceituais, de Gegard Vergnaud, com ênfase nos Campos Conceituais e Aditivos e Multiplicativos, nas ideias de Ponte (1992) e de Tall Vinner (1981). Metodologicamente, a pesquisa é descritiva, fazendo um delineamento diagnóstico a partir de dois questionários, os quais abrangeram três diferentes partes: perfil, concepções e competências. Assim, os dados foram analisados de maneira quantitativa e qualitativamente. Em relação à estrutura do trabalho, primeiramente o autor traz a apresentação da pesquisa, refletindo sobre aspectos relativos à concepção, competência, aritmética e atividade algébrica. Após, traz na introdução a motivação, a relevância, a justificativa, o objetivo e a questão de pesquisa.

No capítulo um, o autor destaca os aspectos teóricos da pesquisa, discorrendo sobre a Teoria dos Campos Conceituais, apresentando o conceito de esquema, invariantes operatórios, campo conceitual aditivo (estruturas aditivas), campo conceitual multiplicativo (estruturas multiplicativas) e sobre álgebra e as estruturas aditivas e multiplicativas, alguns estudos relacionados à introdução da álgebra segundo a ideia de alguns autores. Pontua ainda algumas pesquisas que envolvem o desenvolvimento algébrico e aritmético e, por fim, algumas ideias sobre concepções, competências e conceitos, baseadas nas ideias da fundamentação teórica que utiliza.

Os procedimentos metodológicos estão presentes no capítulo dois, no qual é feita a discussão teórico-metodológica do trabalho e elementos da pesquisa de campo, como o universo de estudo e sujeitos da pesquisa, a coleta de dados, os instrumentos diagnósticos, perfil, concepções e competências. A análise dos resultados da pesquisa foram discorridas no capítulo três, trazendo dados sobre o perfil dos sujeitos, as concepções deles em relação às estruturas aditivas e multiplicativas, assim como as competências evidenciadas quanto estes itens. Por fim, no capítulo quatro, o autor tece algumas considerações finais acerca do desenvolvimento do trabalho.

Como resultados da pesquisa no tange às concepções, quando solicitado aos sujeitos que elaborassem três problemas de estruturas aditivas e três problemas de estruturas multiplicativas, Yamanaka (2009) constatou que tanto os professores quanto os acadêmicos não estavam acostumados a criar problemas de estruturas aditivas e, sim, aplicar os que já estão propostos. Outro dado que o autor destaca, no grupo dos professores, é a "quantidade de situações problemas classificada como inconsistente" (YAMANAKA, 2009, p. 127) por possuírem erros como escrita, conjugação verbal e ausência de dados. Quanto aos problemas de estruturas multiplicativas, os professores e os acadêmicos lembraram-se das situações mais comuns em relação à multiplicação, como por exemplo, a multiplicação pela soma de parcelas.

No que concerne às competências dos professores e acadêmicos nos problemas de estruturas aditivas, constatou-se que todos conseguiram resolver os problemas de forma aritmética sem dificuldades. Sendo assim, em relação ao enfoque aritmético, "pode-se afirmar que os sujeitos desta pesquisa elaboram problemas de estruturas aditivas mais simples e conseguem resolver os de outras estruturas mais complexas em relação as situações prototípicas" (YAMANAKA, 2009, p. 134). Verificou-se também que tantos os professores como os acadêmicos não estão acostumados a resolver problemas baseados no enfoque algébrico, porém houve uma diferença entre o rendimento de ambos os grupos. Observou-se que "os professores possuem certa familiaridade quanto ao trato das questões algébricas" (YAMANAKA, 2009, p. 134).

No que diz respeito ás competências dos professores e acadêmicos nos problemas de estruturas multiplicativas, os dados mostraram que os professores foram melhor que os acadêmicos na resolução dos problemas e que houve uma diferença entre o desempenho deles nos enfoques aritméticos e algébricos, no qual se saíram melhor nos problemas aritméticos. Ainda, Yamanaka (2009, p. 140) constatou que os sujeitos "possuem uma competência elementar, quanto a representação algébrica de problemas com estruturas aditivas e multiplicativas", ou seja, usam mais dos processos de memorização e execução do que a significação do enfoque algébrico.

Ao observarmos os dados da pesquisa de Yamanaka (2009) podemos refletir que, mesmo os professores possuindo mais familiaridade com as questões algébricas do que os acadêmicos, ambos os grupos ainda fazem uso de processos mecânicos ao resolver as questões que fazem uso desses conceitos. Entendendo a importância desses resultados, e no sentido de avançar a partir deles, nossa pesquisa busca desenvolver ações relacionadas ao movimento lógico-histórico dos conceitos algébricos, objetivando que os sujeitos consigam entender a essência do conceito algébrico trabalhado e não apenas a sua aplicação, o que implicará posteriormente nas formas de organização deste ensino em sala de aula.

A pesquisa de Freire (2011) buscou investigar o desenvolvimento dos conceitos algébricos de professores dos anos iniciais através de atividades manipulativas e recursos digitais, na perspectiva de abranger os conceitos algébricos na prática pedagógica dos professores. A autora também enfatiza que as pesquisas voltadas para a álgebra nos anos iniciais têm dado mais destaque a atividades relacionadas ao desenvolvimento dos conceitos de equação, incógnita e equivalência, mas ainda há precariedade no que diz respeito às formas de incorporação desses conceitos na organização do ensino feita pelos professores desta etapa.

Neste sentido, no contexto da formação continuada, foi realizada uma oficina com 11 professoras de uma escola pública, quando foram desenvolvidas atividades, que contemplaram os conceitos de equações, inequações, relações entre quantidades desconhecidas, equivalência, pensamento relacional e o uso de incógnita, voltados para os anos iniciais. Após este encaminhamento, uma professora foi selecionada para planejar e utilizar as atividades na sua prática. Os dados da pesquisa foram colhidos com base nas observações durante a oficina, no desenvolvimento das ações elaboradas pela professora participante em sua prática, nas entrevistas e nos registros das atividades, realizadas durante a oficina.

A estrutura desta pesquisa está disposta em cinco capítulos. Após a introdução, a autora indica alguns apontamentos no primeiro capítulo sobre aritmética e álgebra em relação a pesquisas, conceitos e concepções, estudos voltados as atividades algébricas e um olhar sobre a álgebra nos anos iniciais. O capítulo dois apresenta o conhecimento do professor, segundo Shulman, bem como o conhecimento do professor de matemática e o conhecimento matemático de professores nos anos iniciais do Ensino Fundamental. Os procedimentos metodológicos da pesquisa estão presentes no capítulo três, no qual a autora faz um paradigma da pesquisa, traz o local e os sujeitos, as atividades que foram desenvolvidas, as etapas e instrumentos da pesquisa e as definições para análise dos dados.

Os dados da pesquisa foram analisados em três etapas: resultados das participações das professoras durante a oficina, o planejamento das atividades de uma professora e a prática dessa professora em sala de aula. Como a pesquisa buscou identificar o conhecimento matemático dessas professoras, foram organizadas categorias dentro de cada etapa da pesquisa. A descrição dos conhecimentos foi baseada nas concepções de ensino de Shulman (1986), nas abordagens de ensino da álgebra de Lins, Gimenez (1997) e Usiskin (1995), nas características do desenvolvimento da linguagem algébrica de Vergnaud (1997) e na formação de conceitos de Vergnaud (1990). Os resultados da oficina de formação, planejamento das atividades e prática em sala de aula fazem parte do capítulo quatro. Do capítulo cinco constam as considerações finais da autora sobre a pesquisa desenvolvida.

A pesquisa nos indica que as professoras participantes do estudo tiveram dificuldades em definir o que seria álgebra ou como poderiam trabalhar com os conceitos algébricos presentes nos anos iniciais. Freire (2011) aponta que, durante o a resolução dos problemas propostos, nem sempre as professoras explicavam o motivo das suas escolhas de resolução, que no começo das ações desenvolvidas por elas tiveram algumas dificuldades relacionadas à aprendizagem algébrica, além de não conhecerem as possibilidades do ensino dos conceitos algébricos nos anos iniciais.

Durante a oficina, Freire (2011) pontua que as professoras tinham dificuldades iniciais em entender as noções básicas do pensamento algébrico, como resolver equações do 1.º grau e argumentar sobre as diferenças entre atividades algébricas e aritméticas. Na etapa do planejamento e a utilização das atividades em sala de aula pela professora participante, constatou ter a ela uma maior compreensão sobre o sentido de equações, igualdade, incógnita e expressões numéricas e algébricas. A autora conclui, ainda, que as dificuldades das professoras em relação aos conceitos algébricos também se dão por elas não terem tido contato com esses conceitos durante a sua formação inicial. Deste modo,

> [...] é preciso investir na formação inicial e continuada de professores de séries iniciais para a compreensão do ensino de Matemática a partir de uma articulação entre os conteúdos. Não se pode mais pensar em um currículo sem conexão da aritmética com os conceitos algébricos. (FREIRE, 2011, p. 152)

Ao observarmos as contribuições desta pesquisa e pensando em como favorecer uma melhor qualidade da formação inicial dos professores que ensinam matemática nos anos iniciais, nossa pesquisa volta-se às possibilidades de trabalhar o ensino e a aprendizagem dos conceitos algébricos nos anos iniciais através do desenvolvimento de um experimento formativo. Como a pesquisa de Freire (2011) aponta que as professoras não tiveram contato com a álgebra durante a sua formação inicial, pensamos que, ao propor ações de ensino e aprendizagem dos conceitos algébricos com estudantes do curso de Pedagogia, estaremos contribuindo não só para a formação docente dos futuros professores, mas também posteriormente para o ensino dos estudantes dos anos iniciais.

Ainda sobre a pesquisa de Freire (2011), após a oficina desenvolvida com as professoras, a autora propôs investigar como foram levadas as concepções algébricas apreendidas durante a oficina para a sala de aula de uma das professoras.

A pesquisa de mestrado de Ferreira (2017) buscou investigar o conhecimento matemático para o ensino do pensamento algébrico e, em especial, para esse conhecimento voltado aos anos iniciais. Esta pesquisa se baseou na análise das determinações dos documentos curriculares nacionais sobre o pensamento algébrico e no contexto de um curso de extensão em relação a formação continuada de professores dos anos iniciais. Esta pesquisa tem um cunho metodológico qualitativo, num panorama interpretativista e no formato multipaper e, dessa forma, é composta por três artigos.

Este trabalho tem seis capítulos. No capítulo um, a autora traz a problemática, os objetivos e o problema da pesquisa, a revisão de literatura, os fundamentos teóricos, um pouco sobre a álgebra nos anos iniciais, alguns limites de diferenciação entre álgebra e aritmética, pensamento algébrico, conhecimentos matemáticos e formação do professor dos anos iniciais. A fundamentação teórica pauta-se nos conhecimento de professores fundamentado nos estudos de Ball e colaboradores.

Os dados metodológicos da pesquisa integram o capítulo dois, quando a autora apresenta a natureza da pesquisa, os procedimentos da coleta e análise dos dados, a análise documental, uma caracterização e alguns aspectos relativos às etapas da coleta de dados do curso de extensão proposto no contexto da formação continuada, o formato e organização da dissertação. A primeira etapa da coleta de dados da pesquisa ocorreu por meio de um questionário respondido pelas professoras acerca de questões que envolviam as formas de explicação aos alunos sobre o que é pensamento algébrico, sobre as tarefas implementadas pelas professoras, e os principais aspectos que elas consideravam essenciais quanto ao pensamento algébrico.

O capítulo três é composto de um artigo que analisa como a álgebra nos anos iniciais do Ensino Fundamental está presente nos documentos curriculares nacionais, que tratam dos conteúdos matemáticos os números, operações e suas propriedades. Portanto, este artigo discute os aspectos constituintes do pensamento algébrico nos documentos curriculares nacionais vigentes.

O capítulo quatro apresenta um artigo que se propõe, a partir de um processo de formação desenvolvido por ela, a identificar como os professores dos anos iniciais compreendem o significado do pensamento algébrico e como reconhecem os elementos constituintes desse pensamento. O capítulo cinco abrange um artigo que trata da relevância do conhecimento matemático para ensinar álgebra nos anos iniciais do Ensino Fundamental, enfatizando a aprendizagem da álgebra pelos estudantes. Para tanto é essencial que o trabalho desenvolvido pelos professores em relação ao desenvolvimento do pensamento algébrico seja potencialmente favorável à aprendizagem dos alunos. Nesta perspectiva, este artigo teve como objetivo debater o conhecimento matemático de um grupo de professores dos anos iniciais, ao discutir tarefas com potencial algébrico.

Como resultados, a pesquisa de Ferreira (2017) indica que, apesar de os documentos curriculares nacionais não fazerem muita referência à álgebra nos anos iniciais, pois "algumas poucas subcategorias do Pensamento Algébrico estão dispostas nos currículos oficiais" (FERREIRA, 2017, p. 79), há um crescimento na importância desse conteúdo nessa fase de escolarização. A relevância do ensino da álgebra nos anos iniciais não somente nos anos finais vem crescendo no olhar dos documentos.

O público-alvo dessa pesquisa foram professores que lecionavam nos anos iniciais do Ensino Fundamental. A coleta de dados se deu pela resolução de questões algébricas pelos professores e também pela criação de uma situação de aprendizagem que envolvesse alguns aspectos do pensamento algébrico dos seus alunos. Como resultados, a autora aponta que, do ponto de vista do conhecimento pedagógico dos professores, eles demonstraram uma certa compreensão quanto aos elementos metodológicos que podem colaborar para o desenvolvimento do pensamento algébrico, porém outros aspectos relacionados ao pensamento algébrico nos anos iniciais não foram contemplados nos dados, concluindo que os professores "possuem um conhecimento mais voltado para o saber fazer, em detrimento do conteúdo a ser ensinado [...]" (FERREIRA, 2017, p. 109)

Embora os professores conseguissem demonstrar alguns conhecimentos acerca dos conceitos algébricos, ainda havia uma pouca compreensão acerca do significado do pensamento algébrico. A pesquisa de Ferreira (2017) contribui para a nossa, no sentido de pensarmos em maneiras de propor ações que impulsionem as necessidades da formalização do seu pensamento algébrico e, consequentemente, promovam um ensino pautado nos elementos constituintes desse pensamento.

A pesquisa de Pinheiro (2018) tinha como objetivo analisar as crenças de autoeficácia docente para o desenvolvimento do pensamento algébrico em estudantes do Ensino Fundamental. Os participantes dessa pesquisa foram 9 professores que ensinam matemática nos anos iniciais e 39 professores de matemática dos anos finais. Os dados foram coletados por intermédio de um questionário composto por várias afirmações, das quais os professores participantes podiam discordar totalmente, discordar, concordar ou concordar totalmente. Assim, os dados foram analisados e interpretados através da metodologia mista.

Este trabalho está estruturado em seis capítulos. No primeiro, o autor discorre sobre álgebra, caracterizações, vertentes, elementos e caracterização do pensamento algébrico, algumas concepções da álgebra, a relação de equivalência e linguagem, e ainda algumas considerações acerca do ensino de álgebra, bem como o desenvolvimento desta e do pensamento algébrico nos documentos oficiais. A fundamentação teórica da pesquisa se faz presente no capítulo dois. Nesse capítulo, o autor traz apontamentos acerca da Teoria Social Cognitiva, de Bandura, Azzi e Polydoro e a Teoria da Autoeficácia, idealizada por Albert Bandura. O autor também apresenta nesse capítulo as fontes de autoeficácia e as crenças de autoeficácias e outros constructos mentais.

A metodologia do trabalho engloba o capítulo três, que é constituído pelo problema, pelo contexto, pelos participantes, pelos instrumentos da pesquisa e por alguns elementos constituintes da metodologia mista (quali-quanti / quanti-quali) da que faz uso nessa pesquisa. No capítulo quatro, o autor indica os resultados e discute acerca das crenças de autoeficácia dos professores no desenvolvimento do pensamento algébrico dos alunos. Finalizando, no capítulo seis, faz as considerações finais. Como resultados, Pinheiro (2018) constatou que, por mais que os professores demonstrassem possuir crenças de autoeficácia positivas, essas crenças não eram fortes. A autoeficácia requer além de habilidades, uma força propulsora que desperte no indivíduo a capacidade de exercer algum determinado ato, ou seja, refere-se às crenças que o indivíduo possui quanto às suas potencialidades. Algumas variáveis foram identificadas pelo autor como possíveis influências sobre as crenças dos professores: idade, concepções de álgebra, autoconceito, formação inicial, pós-graduação, persuasão social, materiais curriculares e o interesse dos alunos na percepção dos professores.

Ao analisar as crenças de autoeficácia dos professores dos anos iniciais e dos professores dos anos finais, viu-se que "as crenças de autoeficácia docente dos professores dos anos iniciais foram mais baixas do que a dos professores dos anos finais do Ensino Fundamental para a tarefa de desenvolver o pensamento algébrico nos alunos" (PINHEIRO, 2018, p. 115). Assim sendo, podemos entender que os professores dos anos iniciais do Ensino Fundamental algumas vezes não estão preparados para trabalhar o ensino de forma que desperte o desenvolvimento do pensamento algébrico de seus alunos.

Pensar na formação dos professores que ensinam matemática nos anos iniciais, principalmente na formação inicial se faz fundamental para incrementar a prática pedagógica desses professores e, consequentemente, no ensino e aprendizagem de seus alunos. Em assim sendo, nossa pesquisa tem a intenção de desenvolver ações que viabilizem compreender o conhecimento matemático referente aos conceitos algébricos desses futuros professores.

Ainda, segundo Pinheiro (2018, p. 117), "os professores dos anos iniciais manifestaram maior segurança em ações relacionadas ás suas práticas de ensino do que em objetivos de aprendizagem". Em vista disso, notamos que os professores dos anos iniciais deram indícios de serem mais capazes de desenvolver com seus alunos formas mais lúdicas de ensino, utilizando assim diferentes metodologias e maneiras de ensinar, como o uso de materiais manipulativos por exemplo, do que desenvolver de modo justificado para os alunos o conceito de equivalência (PINHEIRO, 2018).

Já os professores dos anos finais "manifestaram maior segurança em atingir objetivos de aprendizagem do que em suas práticas de ensino" (PINHEIRO, 2018, p. 117). Os professores dos anos finais dessa pesquisa, ao manifestarem maior confiança em alcançar os objetivos de aprendizagem, dão indícios de que por mais que soubessem o conteúdo matemático que seria ensinado, algumas vezes não conseguiam aliar isso a uma didática pedagógica nas suas práticas de ensino.

Esses resultados do trabalho de Pinheiro (2018) nos permitem pensar em alguns aspectos falhos na formação dos professores e em algumas contradições entre os professores dos anos iniciais e os professores dos anos finais. Enquanto, ao mesmo tempo que para os professores dos anos iniciais falta um pouco mais de domínio do conteúdo e há diversificadas formas de ensino, para os professores de matemática faltam essas formas e maneiras de ensinar um conteúdo, a despeito do domínio deste. Portanto, cabe, assim, repensar como está sendo feita a formação inicial desses professores que ensinam matemática. A ênfase da nossa pesquisa volta-se para a formação inicial do futuro professor dos anos iniciais em relação aos conceitos algébricos presentes neste período e, para tanto, propomos desenvolver ações que abordem os conceitos algébricos presentes nos anos iniciais do Ensino Fundamental.

Ao nos atentarmos sobre o total de pesquisas encontradas com os descritores utilizados (48 pesquisas), das quais apenas 6 se aproximavam da álgebra nos anos iniciais, pudemos observar que esses dados nos mostram que as pesquisas relacionadas à álgebra são bem mais difundidas no contexto dos anos finais do Ensino Fundamental e no Ensino Médio. Esse baixo índice de pesquisas sobre conceitos algébricos básicos serem trabalhados desde os anos iniciais do Ensino Fundamental, as determinações da Base Nacional Comum Curricular (BRASIL,2017) da relevância do desenvolvimento do pensamento algébrico nos alunos dessa etapa escola nos incentivaram a direcionar nossa pesquisa para investigar a álgebra nesse ciclo de escolarização, com vistas a alavancar o ensino e a aprendizagem de conceitos algébricos. É sobre isso que trata o próximo item.

1.2 ÁLGEBRA NOS ANOS INICIAIS: O QUE ENTENDEMOS?

A matemática é composta por várias áreas, dentre elas, a álgebra. Muitas vezes os alunos não atribuem significado a esse conteúdo, talvez pela forma como ele lhes foi ensinado, fragmentado, através de métodos de memorização e sem contexto com as outras áreas da matemática. Com isso, as abordagens que envolvem os conhecimentos algébricos refletem na compreensão dos conceitos estudados e na aprendizagem ou não destes conceitos. Uma das dificuldades dos estudantes surge quando começam a aparecer as letras para a representação dos valores desconhecidos ou como relação funcional.

A álgebra escolar é vista como forma de generalizações, ou seja, por meio do uso de variáveis, que representam números ou grandezas, desenvolvem-se métodos de generalizar os problemas e/ou descobrir o desconhecido, e assim encontrar um padrão geral que servirá para todos os valores propostos. Os números e as operações são trabalhados dentro do campo da aritmética, ou seja, na aritmética são estudados os casos particulares que envolvem os números, diferentemente da álgebra. Assim, entendemos que, a partir dos casos particulares da aritmética e dos casos gerais trabalhados pela álgebra, ambas se complementam. Consideramos, assim, que os elementos algébricos devem ser trabalhados conjuntamente com os elementos aritméticos. Lins e Gimenez (1997), no que diz respeito a relação da aritmética com a álgebra, dizem que “a diferença entre álgebra e aritmética era de tratamento, de foco, estávamos sugerindo não apenas que uma se beneficia da outra, como também que uma depende da outra” (p. 113).

Mais recentemente o ensino e a aprendizagem da álgebra nos anos iniciais tem despertado uma preocupação maior dos pesquisadores e dos documentos oficiais, uma vez que a álgebra no contexto escolar possuía seus pressupostos voltados apenas para os anos finais e Ensino Médio. Portanto são poucas as pesquisas relacionadas a essa temática, mas o número vem crescendo, diante da importância que se tem dado a abordagem dos conceitos algébricos desde os anos iniciais, pois “*é preciso começar mais cedo o trabalho com álgebra, e de modo que esta e a aritmética desenvolvam-se juntas, uma implicando no desenvolvimento da outra*” (LINS; GIMENEZ, 1997, p. 10, grifo no original).

Sendo assim, os aspectos sintáticos da álgebra podem ser construídos a partir da estrutura da aritmética (CANAVARRO, 2007) e, assim, há uma associação entre álgebra e aritmética que, ao serem trabalhadas de forma que favoreçam a aprendizagem do estudante, colaboram para o desenvolvimento do seu pensamento algébrico. Logo, é necessário propor situações cotidianas que aprimorem o pensamento algébrico do estudante, contudo

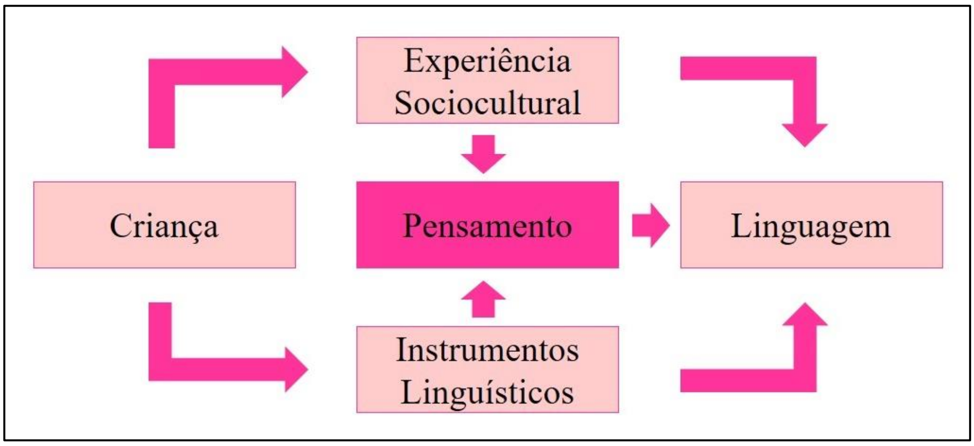
> A ideia não é simplesmente fazer com que o aluno trabalhe com atividades mais cedo, isto é, ao considera-las já algébricas. Os conteúdos precisam ser sutilmente transformados para um caráter algébrico. Em certa medida, essa transformação exige o simbolismo algébrico. Mesmo nos primeiros anos, a notação algébrica pode desempenhar um papel de suporte na aprendizagem da matemática. Notação simbólica, funções, tabelas e gráficos são ferramentas poderosas para as crianças compreender e expressar relações funcionais entre uma ampla variedade de situações problema. (CARRAHER; SCHLIEMANN; BRIZUELA; EARNEST, 2006, p. 4, apud, FREIRE, 2011, p. 39)

Um ensino que promova os estudos relacionados aos conceitos algébricos desde os anos iniciais favorece a aprendizagem de álgebra dos estudantes nos seus anos seguintes de escolarização. Ponte (2005) destaca que os estudantes apresentam dificuldades, quando começam seus estudos com a álgebra, diferentemente de quando começam a estudar aritmética. Eles mostram um melhor desempenho quando se trata do trabalho com os números e operações numéricas. O autor ainda ressalta que, na aritmética, tem-se um significado aditivo (23 pode ser definido como 20 + 3), enquanto na álgebra o seu significado é multiplicativo (2*x* pode ser definido como 2 *x x*).

As dificuldades enfrentadas pelos estudantes em relação à abordagem da aritmética e da álgebra marcam uma certa ruptura em seu desenvolvimento escolar, visto que este não consegue perceber algumas vezes a relação entre as duas, e a introdução ao uso de letras para representar os números. A letra ou o símbolo podem ser utilizados como uma ferramenta nas tarefas algébricas que consolidam o pensamento algébrico dos estudantes nos anos iniciais e, assim, envolvendo formas de pensar dentro dessas atividades (KIERAN, 2004)

Vigotski (1998) diz que a experiência sociocultural da criança e os instrumentos linguísticos do pensamento são elementos que determinam o desenvolvimento do pensamento por meio da linguagem, conforme observamos na Figura 1.

Figura 1: Pensamento determinado pela linguagem



Fonte: Sistematização da autora baseado em Vigotski (1998)

À medida que o aluno reflete sobre os elementos da álgebra, a sua linguagem vai sendo constituída e, assim, desencadeia o seu pensamento algébrico. Sendo assim, o estudante vai se apropriando do pensamento algébrico, a partir das experiências cotidianas e dos conhecimentos científicos aprendidos na escola, sendo que

> Ao se enfatizar o pensamento algébrico ao invés de apenas se restringir a questões técnicas e operacionais, o ensino de Álgebra poderia contribuir não só no aprendizado da Matemática como também auxiliar no desenvolvimento do pensamento lógico-abstrato do estudante, pensamento essencial para o desenvolvimento de um cidadão capaz de viver na sociedade atual. (COELHO; AGUIAR, 2018, p. 1)

Considerando as relações entre pensamento e linguagem, Fiorentini, Fernandes e Cristóvão (2005) defendem a ideia de que, mesmo sem fazer uso de uma álgebra simbólica, o desenvolvimento do pensamento algébrico deve ocorrer desde os anos iniciais do Ensino Fundamental, sendo que este é entendido pelos autores como pensamento algébrico quando o estudante

> ...estabelece relações/comparações entre expressões numéricas ou padrões geométricos; percebe e tenta expressar as estruturas aritméticas de uma situação-problema; produz mais de um modelo aritmético para uma mesma situação-problema; ou, reciprocamente, produz vários significados para uma mesma expressão numérica; interpreta uma igualdade como equivalência entre duas grandezas ou entre duas expressões numéricas; transforma uma expressão aritmética em outra mais simples; desenvolve algum tipo de processo de generalização; percebe e tenta expressar regularidades ou invariâncias; desenvolve/cria uma linguagem mais concisa ou sincopada ao expressar-se matematicamente ... (FIORENTINI; FERNANDES; CRISTÓVÃO, 2005, p. 5)

Por meio de materiais manipulativos e atividades diversas é possível desenvolver ações relacionadas às formas de classificações, sequências, padrões, regularidades, relação de igualdade entre outros, estimulando, assim, desde o ingresso nos anos iniciais, o desenvolvimento do pensamento algébrico dos estudantes, ou seja, os conceitos algébricos devem estar presentes em várias etapas da Educação Básica e podem ser trabalhados em todos os ciclos.

> Os alunos do 1.º ciclo desenvolvem o pensamento algébrico, quando por exemplo, investigam sequências numéricas e padrões geométricos. No 2.º ciclo, ampliam e aprofundam esse trabalho, explorando padrões, determinando termos de uma sequência a partir de sua lei de formação pelo estudo da relação entre os termos de uma sequência a partir da sua lei de formação e uma lei de formação pelo estudo da relação entre os termos. Os alunos desenvolvem igualmente a capacidade de identificar relações e de usar a linguagem simbólica para as descrever, e começam a expressar relações matemáticas através de igualdades e desigualdades. (PONTE et al., 2007, p. 40)

A partir da resolução de problemas e situações particulares e da descoberta de modos gerais de resolução de uma situação, é possível compreendermos que as formas de generalizações estão ligadas ao pensamento algébrico do sujeito. Sendo assim, dentre as semelhanças entre a aritmética e a álgebra "está o entendimento do pensamento algébrico como forma de estruturação do pensamento, que pressupõe a generalização de situações particulares a ideias gerais" (FERREIRA, 2017, p. 31). Uma das formas de desenvolver o pensamento algébrico é pela generalização, cuja habilidade só se concretiza, se não se enfatizar tão somente a competência matemática e, sim, a solução de diferentes problemas e situações (PONTE, 2005).

Segundo Blanton e Kaput (2005, p. 413 apud Ferreira, 2017, p, 29), define-se raciocínio algébrico nos estudantes dos anos iniciais como "um processo no qual os alunos generalizam ideias matemáticas de um conjunto particular de exemplos, estabelecem generalizações por meio do discurso de argumentação, e expressam-nas, cada vez mais, em caminhos formais e apropriados à sua idade". Ferreira (2017) ainda aponta que estes autores categorizam o pensamento algébrico de quatro formas:

> O uso da Aritmética como o domínio da expressão e formalização da generalização (Aritmética Generalizada); a generalização de padrões numéricos para descrever as relações funcionais (Pensamento Funcional); a modelação como um domínio para a expressão e formalização das generalizações; e a generalização sobre sistemas matemáticos abstratos do cálculo e das relações. Nesta categorização, as duas primeiras, a Aritmética Generalizada e o Pensamento Funcional, são segundos os autores, as formas mais comuns do Pensamento Algébrico nos Anos Iniciais. (FERREIRA, 2017, p. 30)

Sendo assim, entendemos a relevância de desenvolver nos estudantes dos anos iniciais a compreensão dos símbolos matemáticos, a relação entre quantidades e a linguagem matemática. O pensamento algébrico da criança começa a se desenvolver por meio de ações que contemplem estes elementos, que estimulem o desenvolvimento do estudante para uma aprendizagem mais eficaz e não dada de forma mecanizada ou baseada em regras. Daí a importância do desempenho do professor em planejar e mediar as ações desenvolvidas com os estudantes, dando sentido aos conceitos algébricos e buscando a sua essência na organização do ensino, entrelaçando os conceitos aritméticos e algébricos e, assim, compreendendo a influência da aritmética na álgebra e vice-versa. Disto, temos a extrema relevância da atuação do professor em todo esse processo de ensino e aprendizagem desde os anos iniciais.

Em assim sendo, esperamos que, por meio de nossas ações, os sujeitos de nossa pesquisa reflitam acerca da álgebra presente nos anos iniciais e isso alavanque a organização de um ensino que promova também o desenvolvimento do pensamento algébrico de seus alunos, quando atuarem na Educação Básica.

1.3 QUESTÃO INVESTIGATIVA E OBJETIVOS DA PESQUISA

Olhar para a formação do professor que ensina matemática nos anos iniciais é fundamental para o ensino e aprendizagem da álgebra. Para desencadear a aprendizagem dos estudantes da Educação Básica, cabe pensar na organização de um ensino que tenha isso como meta. Assim, ao nos referirmos ao planejamento e à estruturação de um ensino que promova o desenvolvimento do pensamento algébrico dos estudantes, estamos nos remetendo à boa qualidade da formação do professor, visto que este atua como mediador dos conhecimentos.

Desta forma, esta dissertação relaciona-se ao ensino e à aprendizagem da álgebra nos anos iniciais do Ensino Fundamental e, mais especificamente, à formação do futuro professor que ensina matemática. Com isso, e também ao partir do olhar sobre as pesquisas que já foram desenvolvidas nesse contexto, buscamos responder à seguinte questão investigativa: *de que forma acontece a aprendizagem de futuros professores que ensinam matemática no que se refere ao ensino e à aprendizagem de álgebra nos anos iniciais do Ensino Fundamental?*

No intuito de contemplar essa questão, elencamos como **objetivo principal**: *investigar possibilidades formativas para futuros professores que ensinam matemática no que se refere ao ensino e à aprendizagem de álgebra nos anos iniciais do Ensino Fundamental.* E para atingir a esse objetivo, foram determinadas seguintes **ações investigativas**:

- Compreender o movimento lógico-histórico da álgebra.
- Identificar os sentidos que futuros professores atribuem a nexos conceituais algébricos.

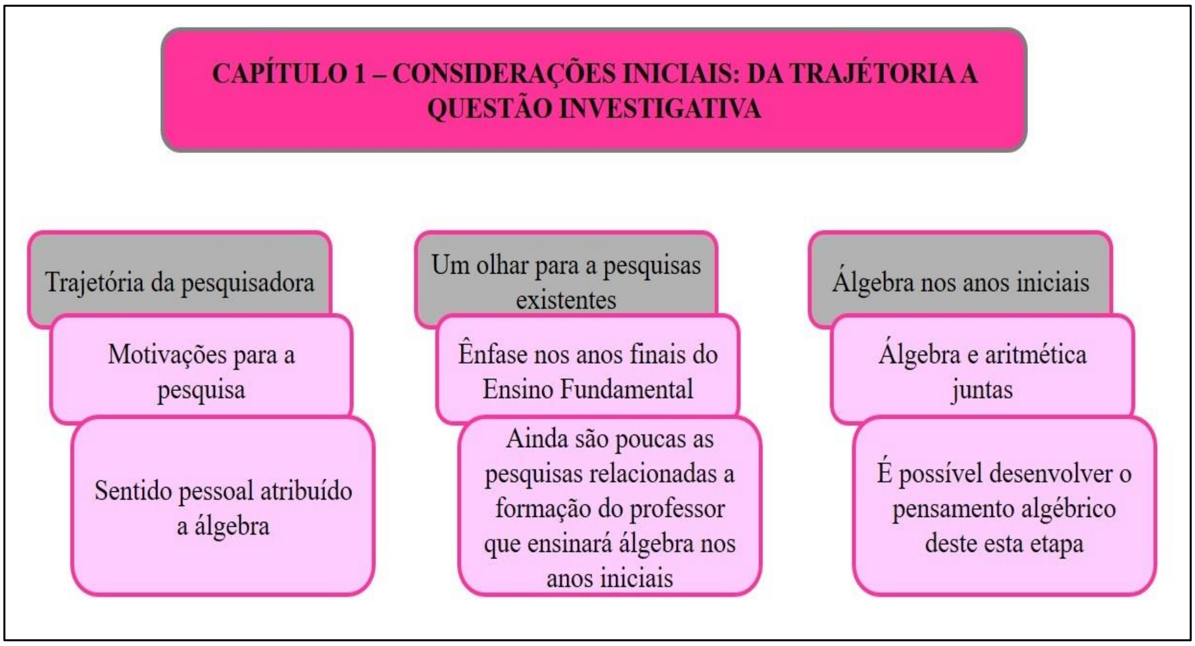
- Verificar como futuros professores se organizam para resolver situações de ensino que envolvem conceitos algébricos.

Partindo do suposto de que nossa pesquisa busca desenvolver ações em um espaço de formação docente que contemplem os objetivos propostos, e visando à aprendizagem dos conceitos algébricos dos futuros professores, delimitamos o seguinte **objetivo formativo**:

- Organizar uma unidade didática referente à álgebra, constituída de situações de ensino para futuros professores dos anos iniciais.

Para o desenvolvimento da pesquisa, realizamos, no segundo semestre de 2019, um experimento formativo, com os acadêmicos da disciplina Educação Matemática B do curso de Pedagogia Diurno da Universidade Federal de Santa Maria, abordando os nexos conceituais algébricos presentes nos anos iniciais.

Figura 2: Síntese do Capítulo 1



Fonte: Sistematização da autora

Esta pesquisa de dissertação de mestrado está organizada em seis capítulos. Neste primeiro capítulo, foram apresentadas: a trajetória acadêmica da pesquisadora até a escolha do tema para o desenvolvimento dessa pesquisa, a busca na Biblioteca Digital de Teses e Dissertações das pesquisas relacionadas a álgebra nos anos iniciais, alguns pressupostos sobre o que entendemos de álgebra neste ciclo de escolarização, a justificativa e os objetivos da pesquisa.

No capítulo dois, intitulado "*Percurso da álgebra: o movimento lógico-histórico do conceito",* discorreremos sobre o movimento lógico-histórico do desenvolvimento da álgebra, quando serão tratados: a origem da álgebra, desde o seu surgimento até os dias atuais, e as contribuições dos antigos povos no desenvolvimento das suas fases.

O capítulo três, denominado "*Pressupostos teóricos e metodológicos da pesquisa",* apresentará o embasamento teórico basilar da pesquisa, qual seja, alguns pressupostos da Teoria Histórico-Cultural, Teoria da Atividade e Atividade Orientadora de Ensino, que juntos orientam o movimento de nossa pesquisa.

O capítulo quatro, *"Orientação metodológica: os caminhos da pesquisa"*, indicará a metodologia da pesquisa, quando serão expostos os pressupostos teórico-metodológicos, a análise dos dados obtidos, e a organização em episódios que permeiam a totalidade da pesquisa e das cenas que os compõem.

No capítulo cinco, intitulado *"Um olhar para os dados: o movimento de aprender e ensinar álgebra"*, mostraremos os resultados da análise das seis situações de ensino, desenvolvidas nos encontros com a turma e dos planejamentos referentes a álgebra organizados pelos acadêmicos.

No último capítulo, denominado *"A busca por uma síntese: considerações finais"*, a partir dos episódios e das cenas, será feita uma síntese de nossa investigação, bem como uma sistematização das aprendizagens dos acadêmicos que se colocaram no movimento de aprender tanto os conhecimentos algébricos quanto como ensinar estes conhecimentos.

2 PERCURSO DA ÁLGEBRA: O MOVIMENTO LÓGICO-HISTÓRICO DO CONCEITO

> Houve a necessidade da construção de uma linguagem simbólica apropriada às questões tratadas aliada à consequente emersão de conceitos algébricos cada vez mais abstratos. Só assim a Álgebra se consolidou como área de conhecimento, área essa que é, portanto, fruto de um desenvolvimento histórico e não inata ao ser humano. Dito de outra forma, o conhecimento da Álgebra precisa do meio social para ser aprendido e assimilado pelo indivíduo. (COELHO, AGUIAR, 2018, p. 171)

Ao percebermos as influências da matemática nos dias atuais e ao pensarmos nas grandes áreas que a compõem, nos remetemos a questionar sobre as origens do seu desenvolvimento. Daí advêm as interrogações: de onde vem a matemática? Quais foram os impulsos que culminaram no seu surgimento? Qual a essência histórica dos seus conceitos? Encontrar respostas para essas indagações nos levaram a querer conhecer o percurso histórico dos conceitos matemáticos e, neste trabalho, nos deteremos, especialmente, na origem da álgebra, visto que a partir desse estudo planejamos e organizamos as ações desenvolvidas nesta pesquisa.

Algumas noções primitivas dos conceitos matemáticos podem estar presentes no início da humanidade, nas origens do desenvolvimento do ser humano em épocas bem distantes das atuais, como os conceitos de números, grandeza e forma (BOYER, 1974). Estes conceitos podem ter sido desencadeados baseados nas experiências do homem[8] com a natureza, como por exemplo, ao observar as semelhanças, as diferenças e a desproporção entres os animais; as diferentes formas presentes ao seu redor; as relações entre quantidades; a dimensão de um pássaro e de um bando de aves; os aspectos comuns presentes nos animais e também na natureza, foi percebendo, assim, a noção de singularidade. As necessidades impulsionadas pela agricultura, pela caça e pela pesca e os instintos de sobrevivência e limitações do homem provocaram formas de pensar e saciar as suas necessidades, suas vontades e seus desejos. Desta forma,

> É claro que a matemática originalmente surgiu como parte diária do homem, e se há validade no princípio biológico da "sobrevivência do mais apto" a persistência da raça humana provavelmente tem relação com o desenvolvimento no homem de conceitos matemáticos. (BOYER, 1974, p. 1)

[8] Nesta pesquisa, utilizaremos o termo "homem" para nos referirmos ao ser humano de maneira geral, seja ele homem ou mulher.

Portanto, o princípio biológico de sobrevivência do homem, as suas necessidades, foram aos poucos sendo resolvidos, à medida que se desenvolviam os conceitos matemáticos, ou seja, os problemas diários de sobrevivência do homem propiciaram o surgimento e a essência dos conceitos matemáticos que hoje conhecemos. Como por exemplo, precisando saber a quantidade de animais que possuíam, ou até mesmo controlar a divisão das caçadas entre os grupos, era preciso fazer uma contagem e assim a matemática começava a fazer parte da vida do homem para solucionar seus primeiros esforços. Para controlar a contagem, o homem começou a associar os objetos e os animais que possuía. Para saber, ao final do dia, quantos animais haviam retornado da pastagem, ele criou um método: associar uma pedra a cada animal, o que lhe possibilitava, verificar quantos haviam voltado para o rebanho. Assim, foi determinado, então, o conceito de correspondência um a um, presente na vida cotidiana do ser humano daquela época.

Além do uso da correspondência com objetos, a linguagem de sinais usada pelo homem e a ideia de número se tornaram amplas e vívidas (BOYER, 1974). Ao observar os dedos das mãos e dos pés, ele percebeu que poderiam ser formados conjuntos, pois “usando os dedos das mãos podem ser representadas coleções até dez elementos; combinando dedos das mãos e dos pés pode-se ir até vinte” (BOYER, 1974, p. 2). Assim sendo, ao observar os fenômenos da natureza ao seu redor, os objetos com que tinha contato, os membros do seu próprio corpo, o homem entendeu que poderia se valer deles para ajudá-lo a solucionar seus problemas cotidianos. Brotava, então, o processo de desenvolvimento dos conceitos matemáticos.

A necessidade da contagem foi, ao longo do processo lógico-histórico do desenvolvimento humano, se tornando cada vez mais imperiosa. As maneiras mais básicas de o homem contar desencadeou a necessidade de fazer registros, como forma de saber as quantidades que possuía. Assim, aos poucos, ele começou, de maneira verbal, a registrar o número de objetos que tinha. Entendendo as necessidades do homem que impulsionaram suas ações para melhores condições de vida, o desenvolvimento da linguagem tornou-se um instrumento poderoso (MOURA, 2007), uma vez que “acredita-se, em geral, que o desenvolvimento da linguagem foi essencial para que surgisse o pensamento matemático abstrato” (BOYER, 2012, p. 25). Com base no desenvolvimento da contagem de maneira oral e no aperfeiçoamento da escrita para representar os números, foram surgindo os conjuntos de símbolos.

As origens primitivas que culminaram no surgimento da matemática e as fontes encontradas pelos arqueólogos há anos nos dão indícios dos estudos matemáticos feitos pelos primeiros povos que habitaram principalmente a região da Mesopotâmia. Foram encontradas tábulas de argila que continham escrituras acerca da vida cotidiana dos povos e também lista de problemas matemáticos. Essas tábulas eram produzidas em barro mole e depois cozidas ao sol ou em fornos. Algumas tábulas serviam como documentos, contratos e escrituras dos negócios financeiros dos povos e outras traziam textos que tratavam da organização dos produtos agrícolas e de cálculos aritméticos usados para calcular essas transações.

Desta forma, as tábulas ajudavam também nos processos aritméticos, pois nelas havia operações matemáticas como multiplicação e divisão. Além dos registros das tábulas, o calendário babilônico, por exemplo, mostra que o ano começava no equinócio vernal, e o primeiro mês recebia o nome de Touro (EVES, 1995).

Dentre as fontes encontradas dos povos antigos, têm-se no Egito o papiro Rhind (ou Ahmes), um dos mais famosos, que é um documento composto por 85 problemas, copiados em escrita hierática, feito pelo escriba Ahmes, e se constitui um fonte primária sobre a matemática egípcia antiga e, também, é o mais extenso, com cerca de 0,3 metros de altura e 5 metros de comprimento. Há ainda o papiro Moscou que possui 25 problemas antigos. Nele havia formas abordando multiplicação, divisão, uso das frações unitárias, regra de falsa posição, aritmética, álgebra e aplicações da matemática em problemas cotidianos. Para escrever nas folhas de papiro, conhecidas como hieráticas, utilizava-se uma pena, e a letra era escrita de maneira cursiva. Segundo Eves (1995), dos 110 problemas matemáticos que fazem parte desses papiros, todos são numéricos e, em sua maioria, têm origem prática, porém há os que são de natureza teórica.

Compreendendo as origens, o percurso inicial da matemática e a importância dela na história do desenvolvimento do homem, iremos neste capítulo explicitarmos o estudo do movimento lógico-histórico da álgebra e seus conceitos. A álgebra escolar é um ramo da matemática que objetiva principalmente estudar e resolver problemas que envolvem o uso de variáveis para descrever os valores desconhecidos como no caso das equações, bem como padrões, regularidades, sequências, dentre outros. Assim, buscaremos compreender quais foram as necessidades do homem que o levaram a produzir os conceitos algébricos, para o seu crescimento e entendimento do mundo; qual o percurso da álgebra a partir dos trabalhos desenvolvidos pelos estudiosos dessa área; e como se desenvolveram os estágios da álgebra.

2.1 AS ORIGENS DA ÁLGEBRA

Ao nos reportarmos ao surgimento da matemática e à importância dela no desenvolvimento humano, mais especificamente sobre as necessidades do homem que foram em grande parte solucionadas pelos conceitos matemáticos, objetivamos agora apresentar e entender como se deu o processo histórico do desenvolvimento primário da álgebra até os conceitos presentes nos dias atuais.

Como já exposto, as necessidades cotidianas do homem e as fontes encontradas dos registros dos povos primitivos indicam que a essência inicial da matemática aconteceu pelo desenvolvimento da aritmética e pela necessidade de medir as coisas práticas. Alguns dos problemas presentes nos papiros egípcios de Moscou e de Rhind mostram que os problemas matemáticos se originaram dos problemas cotidianos enfrentados pelos povos, como por exemplo, saber a proporção de ração a ser dada ao gado e as aves e a distribuição e a conservação dos grãos utilizados na agricultura. Situações como essas desencadearam se pensar em formas de generalização, ou seja,

> Neste contexto, todavia, desenvolveram-se tendências no sentido da abstração e, até certo ponto, passou-se então a estudar a ciência por si mesma. Foi dessa maneira que a álgebra evolveu ao fim da aritmética e a geometria teórica originou-se da mensuração. (EVES, 1995, p. 57)

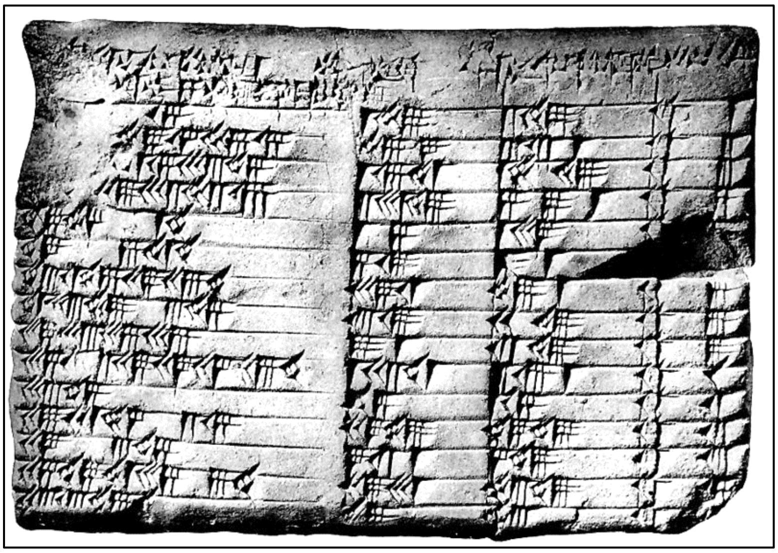
Com o aumento da população, as demandas referentes às transações comerciais e agrárias, aos problemas enfrentados com a caça e pesca também cresceram. Assim, o uso da matemática auxiliou os povos primitivos a resolver esses problemas. Evoluindo suas formas de contagem e já fazendo uso de certo tipo de aritmética, foi-se preciso pensar em formas de abstrações, surgindo assim a essência da álgebra. Além disso, o caráter algébrico não se deu apenas nesses problemas, como também teve sua marca no desenvolvimento da geometria babilônica, por exemplo, que estava relativamente ligada às mensurações práticas.

2.1.1 Álgebra babilônica

Os povos habitantes da Mesopotâmia, região situada no Oriente Médio, no vale dos rios Tigre e Eufrates, naquela época, eram comumente chamados de babilônicos. Segundo Baumgart (1992), a álgebra provavelmente originou-se da Babilônia. A escrita cuneiforme, desenvolvida por esses povos, pode ser a mais antiga de todas as civilizações. A numeração utilizada por eles tinha por base o sessenta. Os números eram escritos, repetindo os símbolos que representavam os algarismos correspondentes a unidades e dezenas, no entanto esses povos também tinham noção do valor posicional dos seus símbolos em cada número escrito. Os babilônios usavam uma notação decimal moderna em relação a outros povos, o que acarretou na sua habilidade de resolver os processos algorítmicos e, também, mais tarde, de desenvolver um método de extração da raiz quadrada.

As tábulas de argila desenvolvidas pelos povos babilônicos eram compostas de tópicos matemáticos como, por exemplo, o teorema de Pitágoras, frações, álgebra e equações quadráticas e cúbicas. Uma das tábulas mais famosas é a de Plimpton 322, cujo nome refere-se à coleção G.A Plimpton, da Universidade de Colúmbia, sendo cadastrada com o número 322. Segundo Eves (1995), essa tábula deve ter sido escrita por volta de 1900 e 1600 a. C no Período Babilônico Antigo.

Figura 3: Tábula de Plimpton 322



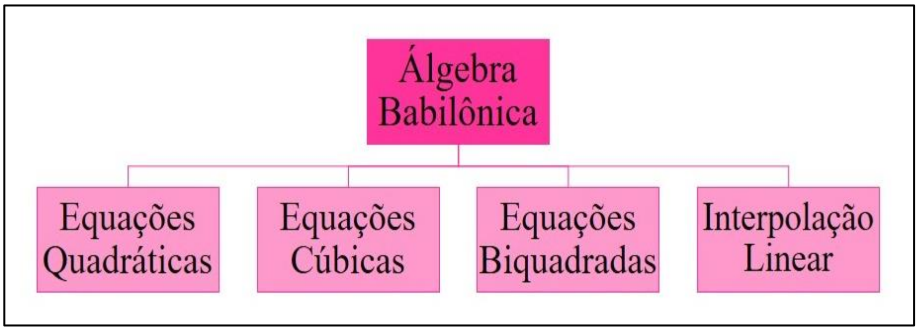
Fonte: EVES, 1995, p. 65

Dessa forma, pelas tábulas relacionadas à álgebra encontradas e escritas por eles e a gama de diversidade dos problemas matemáticos considerados, se tem ideia de que realizavam cálculos de formas habilidosas, e seus métodos de desenvolvimento das operações aritméticas não eram muito diferentes dos usados hoje em dia, avançando ainda mais no que diz respeito à álgebra. Além de resolver equações quadráticas pelo método semelhante ao da substituição ou de completar quadrados, também debatiam sobre as equações de grau três e as biquadradas. Ademais, algumas vezes eles preferiam usar o método paramétrico para resolver as equações (BAUMGART, 1992) e, valendo-se de uma notação moderna, adotavam x e y em função de uma nova incógnita, ou seja, um parâmetro.

Segundo Boyer (1974), os babilônios achavam muito útil a tabulação dos valores de $n^3 + n^2$ para valores inteiros de n, sendo essa tabela essencial na álgebra babilônica. Ainda segundo esse autor, nos problemas presentes nos textos do período babilônio, o processo de resolução das equações quadráticas não era difícil, pois haviam desenvolvido operações algébricas flexíveis. Como o alfabeto ainda não havia sido criado, eles ainda não usavam letras para representar os valores ou quantidades que não conheciam.

Por volta do ano de 2000 a.C., a aritmética usada pelos povos babilônicos já havia evoluído para uma álgebra retórica bem desenvolvida (EVES, 1995). Devido ao alto grau de agilidade em resolver e desenvolver métodos de solução para as equações quadráticas e cúbicas, a interpolação linear usada para encontrarem os valores desconhecidos, o reconhecimento das equações quadráticas em equações de grau quatro e oito, faziam a sua álgebra atingir um notável nível de abstração.

Figura 4: Principais contribuições da Álgebra Babilônica



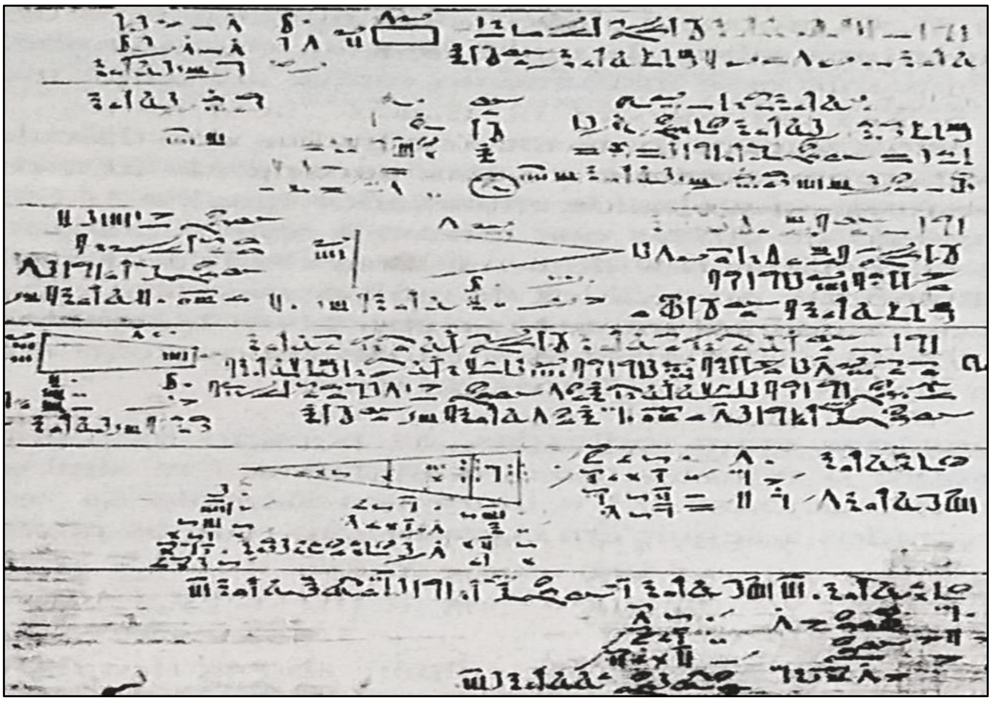
Fonte: Sistematização da autora

2.1.2 Álgebra egípcia

Da mesma maneira que os povos babilônios possuíam a escrita cuneiforme, os egípcios tinham a escrita hieroglífica egípcia. O surgimento da álgebra nesses povos aconteceu quase ao mesmo tempo que na Babilônia, porém, de maneira menos desenvolvida. O sistema de numeração egípcio era um pouco diferente do sistema de numeração dos babilônios, pois também usavam símbolos para representar a primeira dúzia de potências de dez. Alguns símbolos foram adotados para representar os números maiores, como por exemplo: a unidade representada por um traço vertical; o número 10 representado por um osso de calcanhar invertido; o número 100, por um laço; o 1 000, por uma flor de lótus; 10 000, por um dedo dobrado; 100 000, por um peixe; e 1 000 000, por uma figura ajoelhada. Não eram raros os números menores serem colocados à esquerda ou dispostos verticalmente.

A escrita da numeração decimal no papiro de Rhind foi substituída por símbolos que representavam os números, ou seja, não faziam mais as repetições dos algarismos para formar um número e, sim, atribuíam, um símbolo que representasse aquele número como um todo. Assim, o "o princípio de ciferização, introduzido pelos egípcios há cerca de 4 000 anos e usado no Papiro de Rhind, representou uma importante contribuição à numeração, e é um dos fatores que faz do sistema um uso hoje o instrumento eficaz que é". (BOYER, 1974)

Figura 5: Papiro de Rhind



Fonte: Fonte: EVES, 1995, p. 75

O sistema de numeração egípcio fazia uso de uma aritmética de caráter aditivo, como por exemplo, a multiplicação, que era realizada a partir de duplicações, ou seja, a partir da soma. , Na notação hieroglífica egípcia, as frações unitárias eram indicadas por um símbolo elíptico sobre o número do denominador (EVES, 1995). Os egípcios possuíam para a ampliação da matemática, os métodos de percepção e regras de estabelecer operações com algumas frações. O uso de um símbolo para representar as frações unitárias dão indícios da necessidade de se facilitar a representação destas através de uma simbologia, o que nos remete, assim, ao começo do desenvolvimento da álgebra nestes povos.

Os problemas matemáticos mais relacionados à aritmética estavam presentes nos papiros de Rhind e Moscou e tratavam dos problemas práticos que enfrentavam. Mas, nem sempre os problemas algébricos se referiam a coisas concretas, como pães e cerveja, ou encontrar os valores a partir de operações aritméticas, no qual “a resolução não exigia mais do que uma equação linear simples” (EVES, 1995, p. 73) e, nesse sentido, o método de resolução ficou conhecido na Europa como regra da falsa posição. Os problemas algébricos desses povos exigiam um pouco mais do que as operações entre os números, procuravam descobrir o valor da incógnita, que era chamada de “aha”.

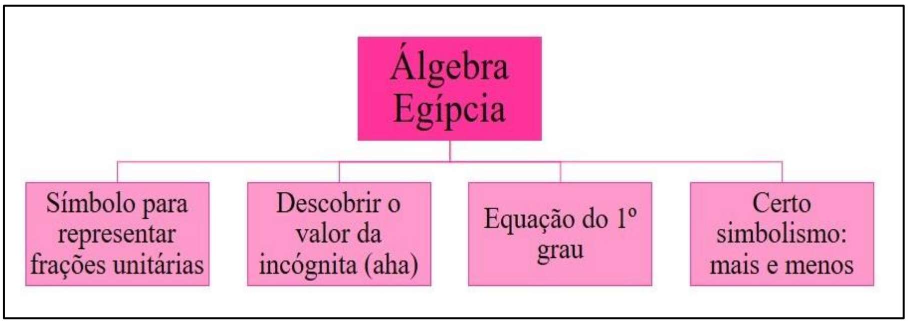
O método da falsa posição utilizado pelos egípcios era basicamente resolver uma equação de primeiro grau a partir de tentativas e erros ou estimativas de valores que pudessem corresponder ao valor da incógnita ou “aha” na equação. Neste, o método consistia em encontrar um número arbitrário para a incógnita e, assim, conseguir resolver o problema. Dando um valor para a incógnita e, ao efetuarem-se as contas do lado esquerdo da equação, era verificado se o resultado era o mesmo esperado. Ainda, além de encontrar o suposto valor esperado, os egípcios faziam a verificação desse valor encontrado, substituindo novamente na equação e verificando se havia dado certo. Boyer (1974, p. 12) aponta que isso foi uma importante contribuição para a matemática, pois “a verificação é exemplo simples de prova”.

Nesta perspectiva, ao entendermos sobre o que se tratavam e como se resolviam os problemas matemáticos egípcios, pode-se dizer que

> Há um certo simbolismo na álgebra egípcia. No papiro Rhind encontram-se símbolos para *mais* e *menos*. O primeiro deles representa um par de pernas caminhando da esquerda para a direita, o sentido normal da escrita egípcia, e o outro representa um par de pernas caminhando da direita para a esquerda, em sentido contrário a escrita egípcia. Empregavam-se também símbolos, ou ideogramas, para *igual* e para a *incógnita*. (EVES, 1995, p. 74)

Embora não tenha sido fácil interpretar e decifrar os problemas presentes nos papiros, o uso do simbolismo na álgebra egípcia foi sendo constatado, à medida que era tentado entender os problemas e também o seu contexto. Em alguns foi possível observar, com base nos dados, uma terminologia simbólica adotada que representava a incógnita. Contudo, podemos perceber, por meio das fontes encontradas dos babilônios e dos egípcios, que a álgebra estava mais desenvolvida nos povos babilônios, por conta dos estudos sobre equações quadráticas, cúbicas e biquadradas, enquanto os egípcios se detiveram na resolução de equações lineares, porém nesses dois povos a álgebra utilizada ainda era retórica.

Figura 6: Principais contribuições da Álgebra Egípcia



Fonte: Sistematização da autora

2.1.3 Álgebra grega

Ao se referir à álgebra grega antiga, G. H. F. Nesselmann caracterizou o desenvolvimento da notação algébrica em três estágios: *álgebra retórica*, *álgebra sincopada* e *álgebra simbólica* (EVES, 1995). Na álgebra retórica, os dados do problema são escritos em discurso direto, ou seja, sem abreviações ou uso de simbolismo. No segundo estágio, caso da álgebra sincopada, começa-se a serem adotadas algumas abreviações para algumas das quantidades, e as operações se repetem com mais facilidade. Por fim, no terceiro estágio tem-se a álgebra simbólica, expressa através de representações ou símbolos, como nos dias atuais.

Os problemas algébricos gregos antigos estão presentes na coleção conhecida como *Palatine* ou *Antologia Grega* e, segundo alguns, eles podem ter sido idealizados para recreação mental e lembram, ainda, os tipos de problemas que constam do papiro de Rhind (EVES, 1995). Estes problemas abordavam equações simples de uma incógnita, sistemas de equações simples de duas incógnitas, equações em três e quatro incógnitas e equações indeterminadas do primeiro grau. A álgebra grega foi formulada pelos pitagóricos e por Euclides e era geométrica, pois teriam dificuldades em trabalhar com os números irracionais e fracionários (BAUMGART, 1992), uma vez que o método de resolução das equações pelos gregos seguia os padrões de resolução dos babilônios.

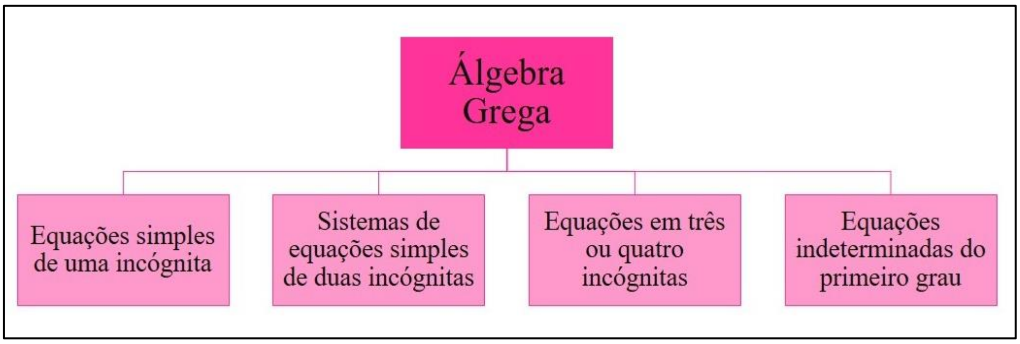
O grego Diofanto de Alexandria teve sua importância no desenvolvimento da álgebra, principalmente no que concerne à sincopação da álgebra grega. Ele escreveu três trabalhos, e o mais importante deles, intitulado *Arithmetica*, é uma coleção de problemas de aplicação de álgebra composta por 13 livros, dos quais apenas os primeiros 6 se preservaram. Neste trabalho, é feita uma abordagem sobre a teoria dos números e dedica-se à resolução de problemas, abrangendo equações do primeiro grau e do segundo grau, e principalmente destaca-se pela resolução exata de equações tanto determinadas como indeterminadas, embora não tenha sido o primeiro a resolver esses tipos de equações.

Este trabalho de Diofanto sobressaiu-se na solução de problemas indeterminados, tornando-se conhecida como análise diofantina (BOYER, 2012). Esses problemas eram resolvidos, envolvendo números desconhecidos e encontrando-se apenas uma resposta, por mais que pudesse haver várias respostas para o mesmo problema e, embora sua abordagem fosse inteligente, ele não conseguiu desenvolver um método sistemático para encontrar soluções gerais (BAUMGART, 1992) e sua abordagem seguia os padrões babilônios em relação ao uso de um parâmetro para expressar todas as incógnitas.

A diferença entre Diofanto e os algebristas babilônicos está na abstração dos números e não no uso de grandezas como grãos e unidades monetárias por exemplo, usadas na álgebra egípcia e mesopotâmica, porém se assemelhava, em alguns aspectos, à álgebra babilônica por tratar da resolução de problemas de aplicação da álgebra. Contudo, Eves (1995) diz que, mesmo com a contribuição de Diofanto na sincopação da álgebra grega, a álgebra retórica continuou se perpetuando pelo resto do mundo, com exceção da Índia, permanecendo assim até o século XV na Europa Ocidental. A álgebra simbólica surgiu na Europa Ocidental por volta do século XVI, mas se solidificou somente no século XVII.

Segundo Boyer (1974), Diofanto era considerado o pai da álgebra por seus estudos apresentados no trabalho *Arithmetica*, porém esse trabalho é mais voltado à teoria dos números e não à álgebra elementar. Portanto, esse título dado a ele teria sido um tanto precipitado. Contudo, vendo por outro lado, essa "paternidade" da álgebra dada a Diofanto pode ser justificada pelo fato de que a "álgebra hoje se baseia quase exclusivamente em formas simbólicas de enunciados, em lugar da linguagem escrita usual da comunicação ordinária em que a matemática grega anterior, bem como a literatura grega, se expressavam" (BOYER, 1974, p. 132). Em resumo, na álgebra de Diofanto havia a falta de símbolos e uma notação que representasse as relações dadas.

Figura 7: Principais contribuições da Álgebra Grega



Fonte: Sistematização da autora

2.1.4 Álgebra hindu

Os povos hindus também deram suas contribuições significativas no desenvolvimento da álgebra. Eles resolviam os problemas aritméticos por falsa posição, assim como os egípcios, e também pelo método da inversão, ou seja, realizavam as operações de trás para frente, substituindo as operações dadas pela sua inversa. Além disso, seus problemas giravam em torno das transações financeiras, como por exemplo, juros e descontos. A concepção de zero como número para os hindus (IFRAH, 1994) deu caminho para esses povos aperfeiçoarem a sua escrita e, assim, favoreceram o desenvolvimento da álgebra.

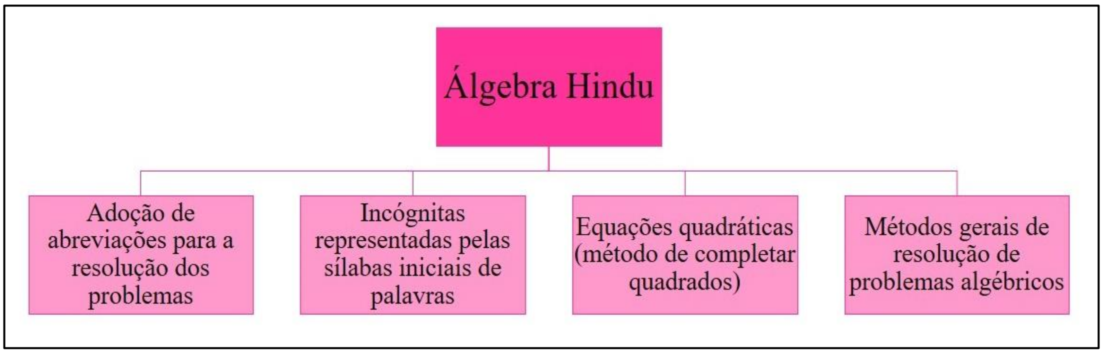
Os hindus começaram a adotar abreviações para a resolução dos problemas e partiram, então, para o uso da álgebra sincopada. Em relação às operações, os hindus indicavam a adição por justaposição; a subtração era representada por um ponto sobre o subtraendo; a multiplicação era escrita por *bha* (primeira sílaba da palavra *bhavita*, “produto”) depois dos fatores; na divisão escreviam o divisor debaixo do dividendo (EVES, 1995). Já as incógnitas, eram representadas pelas sílabas iniciais de palavras que denotavam cores diferentes.

As notações numéricas utilizadas pelos hindus se manifestavam por conjuntos de traços verticais. Aos poucos essa notação foi sendo substituída por símbolos para ordens maiores que quatro, dez, vinte e cem, porém ainda se usava a repetição para expressar os números. Todavia, essa outra notação perdeu espaço para a notação brahmi, no qual os símbolos expressos para as primeiras nove unidades também poderiam ser usados para os múltiplos condizentes de dez. Os hindus resolviam equações quadráticas pelo método de completar quadrados, aceitavam os números negativos e raízes irracionais (BAUMGART, 1992). Em relação às raízes reais de uma equação quadrática, eles também tinham noção da existência de duas raízes. Os principais algebristas hindus foram Brahmagupta e Bhaskara, os quais desenvolveram um trabalho com as equações diofantinas quadráticas, chamadas equações de Pell, as quais mostram como obter várias soluções a partir de uma dada solução x, y.

Como exemplo da notação usada por Brahmagupta, ao tentar encontrar uma das raízes positivas de uma equação quadrática, ele representava a incógnita por *ya*, o "quadrado" por *v*, e um número negativo era representado por um ponto sobre esse número. Ademais, em uma linha era escrito o primeiro membro da equação e, na linha abaixo, era escrito o segundo membro dessa equação (BAUMGART, 1992). Ainda segundo este autor, o estudo desenvolvido pelos hindus acerca das equações indeterminadas era superior ao trabalho desenvolvido por Diofanto, pois eles tentavam encontrar todas as soluções inteiras possíveis e, portanto, podem ter sido os primeiros a encontrar maneiras gerais de solução.

Os povos hindus demonstraram altas habilidades na resolução dos problemas algébricos, encontrando métodos gerais na resolução destes e contribuindo não somente para o desenvolvimento da álgebra, mas também para a matemática, pois buscavam, através de seus métodos, encontrar todas as possíveis respostas inteiras para um problema, ao contrário do que propunha Diofanto na álgebra grega. Isso revela um avanço no percurso da álgebra, que cada vez ia ganhando mais contribuições e culminando no seu desenvolvimento.

Figura 8: Principais contribuições da Álgebra Hindu



Fonte: Sistematização da autora

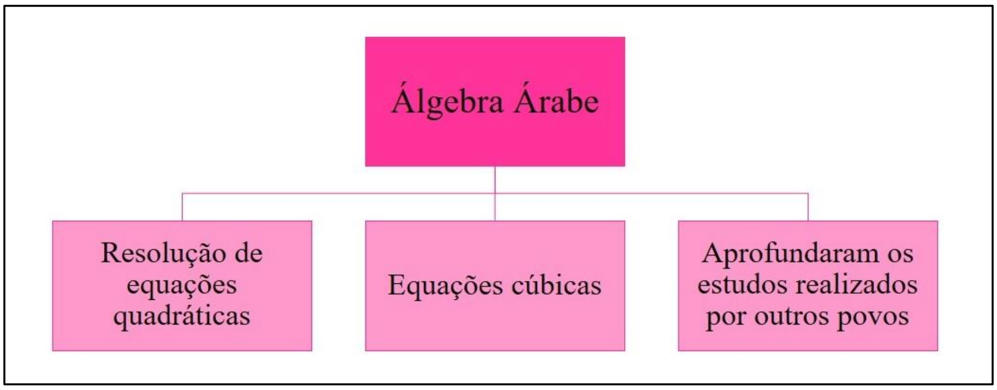
2.1.5 Álgebra árabe

Os povos árabes antes do profeta Maomé escreviam todos os números em palavras. A partir das conquistas árabes e domínio e expansão dos territórios islâmicos, a introdução do simbolismo abreviado foi sendo considerado, porém tempos depois foi deixado de lado. Por volta da metade do século VIII, alguns estudiosos foram chamados a Bagdá. Al – Mamum foi um desses estudiosos, o qual, em seguida, estabeleceu em Bagdá uma Casa da Sabedoria (BOYER, 2012). Entre os matemáticos e astrônomos de lá, Mohamemed ibn Musa al-Khwarizmi destacou-se por seus estudos e, principalmente, por seus dois livros escritos sobre aritmética e álgebra, que deram importantes contribuições para esse conhecimento. Em uma de suas obras, ele escreveu sobre os numerais hindus e admitiu a origem dos numerais, porém, mais tarde, por conta desse seu trabalho e das traduções latinas feitas e descuidadas, os numerais hindus vieram a ser chamados de algoritmo, sendo esta palavra derivada de seu nome.

O título *o Al- jabr*, de um importante livro de al-Khwarizmi, deu origem ao nome *álgebra*, que se perpetua até hoje como um dos ramos da matemática (BOYER, 2012). Este livro trazia estudos elementares de resolução de equações, dando ênfase às equações do segundo grau e também se assemelha com a álgebra básica de hoje. Porém, a obra de al-Khwarizmi mostrava pouca originalidade, principalmente no que tange ao sistema de numeração hindu. Analisando alguns problemas presentes nesta obra e os elementos da geometria grega, podemos perceber que a álgebra árabe tinha alguns pontos em comum com a geometria grega. Mesmo que a álgebra de al-Khwarizmi fosse um dos melhores textos da época, algumas vezes ele ignorou os resultados já obtidos por outros povos. Esta obra "tinha uma deficiência séria que precisava ser removida antes de poder servir eficazmente aos seus fins nos tempos modernos: precisava ser desenvolvida uma notação simbólica para substituir a retórica" (BOYER, 2012, p. 169).

Em suma, ainda faltava na álgebra árabe o uso da notação simbólica, pois desenvolviam seus estudos usando da forma retórica. Porém, baseados nas contribuições dos gregos, hindus e babilônicos, os árabes aprofundaram os estudos já realizados e desenvolveram novas formas de entendimento da álgebra. Outras contribuições vieram também de Omar Khayyam, que indo além de al-Khwarizmi escreveu uma álgebra, incluindo equações de terceiro grau, principalmente no que diz respeito à generalização do método de complementar todas as equações do terceiro grau que tivessem raízes positivas. Omar, inclusive, demonstrou seus estudos fazendo uso da geometria, usando as seções cônicas para a resolução das equações cúbicas por exemplo, não encontrando métodos geométricos que pudessem resolver equações com grau acima de três.

Figura 9: Principais contribuições da Álgebra Árabe



Fonte: Sistematização da autora

2.1.6 Álgebra europeia

Ao voltar nosso olhar para o desenvolvimento da álgebra dos europeus que se baseou na álgebra arábica, têm-se alguns fatores que culminaram nesse florescimento, como: a facilidade em manejar trabalhos numéricos através do sistema de numeração indo-arábico; a invenção da imprensa com tipos móveis, o que agilizou a padronização do simbolismo através de melhorias das comunicações; e o ressurgimento da economia, do comércio e das viagens (BAUMGART, 1992). Alguns trabalhos contribuíram com esse florescimento da álgebra na Europa, como o publicado por Leonardo Fibonacci, do qual constavam alguns aspectos elementares da aritmética e da álgebra e também foi influenciado pelas contribuições das obras de al-Khwarizmi.

Neste livro, composto por 15 capítulos, Fibonacci preservou a notação indo-arábica, pois constatou, em suas viagens e contato com os matemáticos orientais, como era elevado o conhecimento de calcular dos indo-arábicos. Segundo Eves (1995), sua obra também trazia formas de calcular inteiros e frações, leitura e escrita dos novos numerais, cálculo de raízes quadradas e cúbicas, resolução de equações lineares e quadráticas, seja pelo método da falsa posição seja pelos procedimentos algébricos. Além disso, não eram admitidas as raízes negativas e imaginárias, e sua álgebra era retórica. Como exemplos de aplicação, havia problemas, abrangendo troca de mercadorias e geometria mensurativa.

Outro matemático europeu que deu contribuições á álgebra foi o francês Nicolas Chuquet (1945-1488), em cuja obra fazia o uso da álgebra sincopada, inclusive de abreviações. Além disso, Chuquet também desenvolveu seu trabalho acerca das equações quadráticas e indicou algumas problemáticas que levavam até essas equações. Sendo assim, com o uso das abreviações utilizadas por ele, podemos perceber o começo do avanço no desenvolvimento da álgebra em relação à sua sincopação. Porém, segundo Eves (1995), o primeiro registro dos símbolos aritméticos de + e – apareceu na obra do matemático alemão Johann Widman (1460-1498), que usava esses símbolos como representação do excesso e da deficiência.

O italiano Girolamo Cardano, no seu livro intitulado *Ars Magna*, apontava resoluções de equações de terceiro e quarto grau e enfatizava as raízes negativas e cálculos com números complexos. Neste livro Cardano publicou resultados de outros estudiosos relacionados à álgebra, contendo assim as soluções para as cúbicas de Spicione del Ferro, que resolveu a equação cúbica $x^3 + mx = n$, e as soluções para as equações de grau quatro de Ludovico Ferrari. Segundo Baumgart (1992), Cardamo foi o primeiro a exibir três raízes de uma cúbica particular; reconheceu e então chamou de "fictícias" as raízes negativas; operou com números complexos; removeu o termo x^2 de uma equação cúbica; admitiu o caso irredutível nessas equações; e declarou que o oposto do coeficiente x^2 é a soma das três raízes de uma cúbica.

O também italiano Nicolo Fontana de Brescia, mais popularmente conhecido por Tartaglia, foi um matemático muito habilidoso. Ele teve um importante papel no desenvolvimento das equações cúbicas, bem como na equação cúbica desprovida do termo quadrático (EVES, 1995). É atribuída a ela a competência de ter sido o primeiro a usar a matemática na ciência dos tiros de artilharia. Outro estudioso italiano que publicou um trabalho sobre a resolução das equações cúbicas foi Rafael Bombelli, que introduziu os números complexos no contexto das equações cúbicas, e também as soluções algébricas destas equações estão auxiliadas por demonstrações geométricas em termos do compartimento do cubo. Estes estudos relacionados a equações cúbicas e ainda os símbolos italianos utilizados para indicar adição e subtração (*p* e *m* respectivamente) estão presentes em sua obra *Algebra*.

O matemático francês, François Viète, escreveu uma obra composta de trabalhos que envolviam trigonometria, álgebra e geometria. Suas contribuições mais significativas estavam na obra *De aequationum recognitione et emendatione*, que significa "as equações de revisão e alteração" e foi publicada em 1615. Nesta obra ele concedeu transformações para aumentar ou multiplicar raízes por uma constante; atestou entender as relações entre raízes e coeficientes de uma equação polinomial; e formulou uma transformação que descomplica um polinômio de seu termo vizinho ao de maior grau (BAUMGART, 1992). Porém, a sua não aceitação dos números negativos atrapalhou-o na busca pela generalização que pretendia desenvolver. O desenvolvimento do simbolismo algébrico de Viète está presente no seu trabalho *In artem* que significa "na arte". Neste trabalho ele incorporou o ato de representar incógnitas por vogais, e as constantes serem representadas por consoantes. Em relação ao simbolismo proposto por Viète, o mesmo "[...] possibilitou a escrita de expressões de equações e suas propriedades, a partir de fórmulas gerais. Os objetos das operações matemáticas passaram a ser não problemas numéricos e sim as próprias expressões algébricas" (MOURA; SOUSA, 2009b, p. 22).

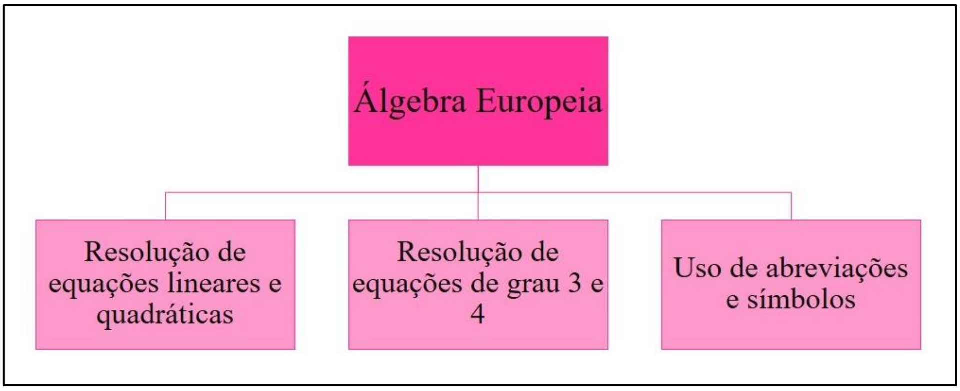
As potências de uma quantidade antes de Viète eram representadas pelo uso de letras ou símbolos diferentes, sendo que o que hoje se manifesta por x, x^2, x^3 ele expressava por "A, A quadratum, A cubum; mais tarde alguns escritores abreviaram essa notação para A, A q, A c" (EVES, 1995, p. 309). Ele usava o símbolo "=" para indicar a diferença entre as quantidades, e não a igualdade como fazemos hoje em dia. Sua álgebra foi incorporada também à geometria e à trigonometria, o que demonstra ter sido um dos grandes algebristas daquela época. No entanto, o símbolo de igualdade, como conhecemos hoje, apareceu na Inglaterra, em 1557, na obra *Whetstone of Writte* que significa "pedra do amolar", de Robert Recorde (BOYER, 2012).

O francês René Descartes favoreceu o desenvolvimento da álgebra, ao introduzir, em 1637, as últimas letras do alfabeto para expressar as incógnitas, como por exemplo, *x, y* e *z,* e as primeiras para indicar as constantes, como *a, b, c*. (EVES, 1995). Suas contribuições também vêm de seus trabalhos relacionados à geometria e á articulação entre geometria e álgebra. Neste intuito, ele aperfeiçoou o simbolismo da álgebra e inseriu o corrente sistema de expoentes inteiros positivos.

O algebrista inglês Thomas Harriot foi fundador da escola inglesa de álgebra e incorporou os símbolos e as notações algébricas hoje utilizadas. Em sua obra *Artis analyticae práxis* ou "prática da arte analítica", ele tratou em sua maioria da teoria das equações. Neste trabalho de Harriot estão presentes: um pouco das equações de primeiro a quarto grau, a constituição das raízes, as relações entre os coeficientes e raízes de uma equação entre outros estudos. Seus estudos eram mais organizados e sistematizados, nos quais podem ser encontradas informações presentes nos trabalhos de Viète.

Da mesma maneira que Viète, Harriot usava as vogais para indicar as incógnitas e as consoantes para expressar as constantes, porém, de forma diferente, ele as utilizava indicando por letras minúsculas. Desta forma, Harriot "melhorou a notação de Viète para potências, representando a^2 por aa, a^3 por aaa e assim por diante. São dele também os símbolos > e <" [...] (EVES, 1995, p. 348). O matemático inglês William Oughtred (1574 – 1660) escreveu um trabalho sobre aritmética e álgebra, intitulado *Clavis mathematicae*, que significa "matemática chave". Ele contribuiu com mais de 150 símbolos matemáticos, porém apenas 3 deles atingiram os tempos atuais: o de multiplicação (x), os quatro pontos das proporções (::) e o de diferença (~) (EVES, 1995). Ainda segundo este autor, o símbolo de divisão (÷), de origem anglo-americano, apareceu pela primeira vez em 1659 na álgebra do suíço Johann Heirich Rahn (1622 – 1676) e foi usado por um grande período pelos europeus para indicar subtração.

Figura 10: Principais contribuições da Álgebra Europeia



Fonte: Sistematização da autora

Em sendo assim, ao expor brevemente as origens da álgebra nos diferentes povos da antiguidade e as contribuições de alguns estudiosos algebristas da época, pois foram vários e alguns não chegaram a ser citados neste trabalho, podemos compreender o longo percurso da álgebra até os dias de hoje. Desde o surgimento primitivo da álgebra nos povos babilônios e dos problemas matemáticos algébricos encontrados nas fontes primárias dos antigos, os conceitos algébricos tiveram sua essência baseada em fatos escritos pelos escribas, tais como: situações de seu dia a dia problemas, envolvendo a criação do gado, a pesca, a agricultura, a caça, o comércio e outros, dessa forma foram evoluindo através da linguagem comum dos povos e também alienado primeiramente ao número.

Assim, algumas situações desenvolvidas nesta pesquisa buscam trabalhar alguns conceitos algébricos, embasados nos problemas cotidianos enfrentados pelo homem de antigamente. No próximo tópico com base no movimento lógico-histórico, abordaremos sobre os estágios de desenvolvimento da álgebra durante seu processo de evolução.

2.2 OS ESTÁGIOS DE DESENVOLVIMENTO DA ÁLGEBRA

Conforme podemos perceber na história das origens da evolução da álgebra, este processo foi acontecendo de maneira gradual e precisou de muito tempo para a sua consolidação. O trabalho desenvolvido pelos povos antigos nos leva a pensar que este grande campo da matemática foi influenciado por várias contribuições, visto que, conforme os estudos eram ainda mais aprofundados por diferentes pessoas, maior era a expansão deste campo. Portanto, percebemos que a álgebra de hoje precisou, ao longo dos anos, de várias modificações e também de várias tentativas de provar a validade de seus resultados, como encontrar todas as raízes de uma equação cúbica por exemplo.

Estudando como se culminou o percurso algébrico desde sua origem até seu modo formal e direcionando o nosso olhar para todo esse percurso da álgebra, principalmente no que diz respeito às suas origens até o desenvolvimento de um simbolismo, conseguimos compreender como ocorreram seus estágios de desenvolvimento, começando com uma álgebra retórica com os povos babilônios, egípcios e árabes. A álgebra retórica era usada de maneira “verbalizada” e escrita e descrita com palavras, e dessa forma, “a linguagem matemática através de Palavras é o primeiro passo da criação da linguagem especificamente matemática para o qual são escolhidas as palavras que mais direta e claramente expressam os movimentos numéricos (LIMA; MOISÉs, 2000, p. 28, apud SOUSA, 2004, p. 205).

O desempenho dos problemas algébricos de forma retórica certamente demandava tempo, habilidade e paciência para resolvê-los, o que pode ter resultado no surgimento do simbolismo. No intuito de conhecer como eram resolvidos os problemas algébricos antigos de forma retórica, vamos analisar o seguinte problema encontrado nas tábulas de argila babilônias, o qual foi descrito em escrita cuneiforme, porém aqui será descrito em português. No Quadro 3, a coluna da esquerda representa a escrita do problema pelos povos, e a coluna da direita fornece as passagens dele na notação moderna:

Quadro 3: Problema típico encontrado nas tábulas de argila dos povos babilônios

(continua)

[1] Comprimento, largura. Multipliquei comprimento por largura, obtendo assim área: 252. Somei comprimento e largura: 32. Pede-se: comprimento e largura.	
[2] [Dado] 32 soma, 252 área **[3] [Resposta]** 18 comprimento, 14 largura **[4] Segue-se esse método:** tome metade de 32 que é 16]. 16 × 16 = 256 256 – 252 = 4 A raiz quadrada de 4 é 2. 16 + 2 = 18 comprimento. 16 – 2 = 14 largura.	$x + y = k$ $x.y = P$ $\left(\frac{k}{2}\right)$ $\left(\frac{k}{2}\right)^2$ $\left(\frac{k}{2}\right)^2 - P = t^2$

Quadro 3: Problema típico encontrado nas tábulas de argila dos povos babilônios

(conclusão)

[5] [Prova] Multipliquei por 18 comprimento por 14 largura 14 × 18 = 252	$\sqrt{\left(\frac{k}{2}\right)^2 - P =}$ t $\left(\frac{k}{2}+t\right)\left(\frac{k}{2}-t\right) = \frac{k^2}{4} - t^2 = P = xy$

Fonte: BAUMGART (1992, p. 4 e 5)

Observando desde o enunciado do problema até a resolução, verificamos a maneira verbalizada de desenvolver esse problema, pois cada passo dado é comentado e escrito com palavras por extenso, em que: apresenta-se o problema [1], registram-se os dados [2], explicita-se a resposta [3], comenta-se sobre o método utilizado [4] e, por fim, dá-se a prova [5]. Este problema nos parece como uma prescrição da solução encontrada, já que cada passo orienta o como fazer. Vários foram os problemas desse tipo encontrados nas fontes primárias dos povos babilônios e resolvidos de maneira semelhante a essa.

Imaginemos se, nos dias atuais, tivéssemos que solucionar, dessa maneira, os problemas desse tipo e ainda outros. Seria um processo longo e demorado. Pensando nisso, brota o seguinte questionamento: como seria resolvida a equação $x + 3 = 5$ de maneira retórica? Uma resposta para esse questionamento poderia ser a seguinte expresso conforme no Quadro 4.

Quadro 4: Resolução de maneira retórica da equação x + 3 = 5

(continua)

[1] [Dado]	x + 3 = 5
[2] Segue o método: • Usando o princípio aditivo, soma-se o número simétrico de mais três em ambos os membros da equação. • No primeiro membro, mais três e menos três são simétricos, sendo que o resultado da soma desses números será zero, portanto resultará neste primeiro membro da equação x mais zero. No segundo membro da equação cinco menos três resulta em mais dois.	$x + 3 + (-3) = 5 + (-3)$ $x + 0 = 2$ $x = 2$

Quadro 4: Resolução de maneira retórica da equação x + 3 = 5

(conclusão)

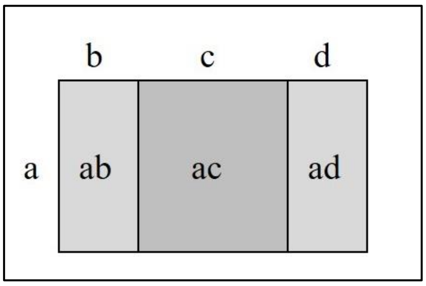
• Pela propriedade do elemento neutro da adição, x mais zero é igual a x. • Logo, temos no primeiro membro da equação apenas x e no segundo membro da equação mais dois. Portanto, a solução da equação é x igual a dois.	
[3] Resposta	$x = 2$

Fonte: Sistematização da autora

Resolver essa equação de maneira retórica demandaria tempo e habilidade em verbalizar os passos a serem desenvolvidos. Na coluna da direita foi desenvolvida essa equação com a notação moderna e atual, onde podemos perceber a agilidade que se tem em resolver uma equação, usando o simbolismo algébrico e também aritmético. Refletindo sobre esse processo retórico de desenvolver a equação, é fácil perceber a sua inviabilidade na sala de aula, por conta do tempo despendido e da exaustão causada. Daí a se entender a importância da existência do simbolismo.

Partindo da álgebra retórica e indo ao encontro da álgebra geométrica antiga, realizada pelos gregos, principalmente os pitagóricos e Euclides, vemos uma algebrização da geometria, pois, por terem dificuldade em operar certos tipos de números, os gregos preferiam fazer uso da geometria para sanar seus estudos relacionados à álgebra. Os gregos buscavam retratar os objetos e as operações geométricas por meio de objetos e operações. Como exemplo envolvendo o uso da álgebra geométrica grega, podemos pensar na lei distributiva $a(b + c + d) = ab + ac + ad$ que representava para um estudioso grego as áreas dos retângulos, em que a soma dos retângulos em relação a a e a soma dos segmentos b, c, d é igual a soma dos retângulos sobre a e cada um dos segmentos b, c, d tomados separadamente (BOYER, 2012), como mostra a Figura 11.

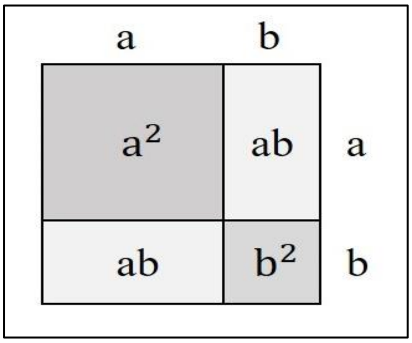
Figura 11: Lei distributiva $a(b + c + d) = ab + ac + ad$



Fonte: BOYER (2012, p. 74)

A identidade $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ era vista principalmente por pitagóricos e Euclides, em termos do diagrama relativo, a três quadrados e dois retângulos (BOYER, 2012), sendo que os gregos da época de Euclides consideravam a^2 como um quadrado. Como exemplo geométrico dessa identidade, observemos a Figura 12.

Figura 12: Identidade $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$



Fonte: BOYER (2012, p. 74)

Ao observarmos os exemplos da álgebra geométrica grega, podemos constatar que os pitagóricos conheciam os métodos de resolução de equações, bem como as técnicas de resolução dos povos babilônios. Foram hábeis em resolver os problemas algébricos de forma geométrica e também em considerar a área de um quadrado como a multiplicação de seus lados e, então, chegando à conclusão que um retângulo de comprimento a e largura b tem sua área expressa por $a \times b$, e que a área de um quadrado de lado a é expressa por a^2. Portanto, acabaram desenvolvendo técnicas de solução de problemas algébricos por meio da influência da geometria.

A álgebra sincopada tem suas origens nos estudos de Diofanto e alguns outros estudiosos. Como característica, a “simbologia” da álgebra sincopada fazia uso de abreviações para as quantidades que, de certa forma, se repetiam, ou melhor, eram utilizadas abreviações de palavras na solução dos problemas algébricos. Nicolas Chuquet, do mesmo modo, contribuiu para o desenvolvimento da álgebra e também fazia uso da álgebra sincopada em seus estudos. No Quadro 5 podemos observar as abreviações utilizadas por Chuquet.

Quadro 5: Abreviações utilizadas por Nicolas Chuquet

ABREVIAÇÃO	SIGNIFICADO
p (de *piu*, "mais")	Adição
m (de *meno*, "menos")	Subtração
co (de *cosa*, "coisa")	Incógnita
ce (de *censo*)	x^2
cu (de *cuba*)	x^3
cece (de *censo-censo*)	x^4
ae (de *aequalis*)	Igualdade

Fonte: Baseado em EVES (1995, p. 298)

Diofanto, em seus livros da obra *Arithmetica*, usava abreviações nas potências de números, operações e relações. Um exemplo da sincopação de Diofanto pode ser observada no Quadro 6:

Quadro 6: Exemplos da álgebra sincopada de Diofanto

(continua)

COMO REPRESENTAR	REPRESENTAÇÃO	SIGNIFICADO
Número desconhecido (incógnita)	ς	Última letra de *αριθμός* – que significa número em grego
O quadrado do número desconhecido	Δ^{γ}	Abreviação de *δύναμη* – que significa potência em grego
O cubo do número desconhecido	K^{γ}	Abreviação de κύβος – que significa cubo em grego
A quarta potência do número desconhecido	$\Delta^{\gamma}\Delta$	Também chamada de quadrado-quadrado
A quinta potência do número desconhecido	ΔK^{γ}	Também chamada de quadrado-cubo

Quadro 6: Exemplos da álgebra sincopada de Diofanto

(conclusão)

A sexta potência do número desconhecido	**K^γK**	Também chamada de cubo-cubo
Igualdade	ι^{σ}	Abreviação de <u>*ίσως*</u> – que significa igual
Subtração	**⋔**	-
Soma		Não havia um símbolo definido, sendo representada pela justaposição das parcelas
Termos independentes	$\overset{\circ}{\mu}$	Abreviação de μοναδεί – que significa unidade/único em grego

Fonte: Dados retirados de BOYER (2012, p. 134) e SANTOS; BORGES (2011)

As formas de abreviação de Diofanto representam como eram utilizados alguns símbolos que representavam a abreviação das operações ou as potências de um número desconhecido ou incógnita. Ao nos atentarmos ao significado das abreviações, podemos perceber que a lógica utilizada por ele, ao se referir à operação ou à potência utilizada no que se refere às palavras que eram abreviadas, dizia respeito ao significado do que iria ser representado, e dessa forma eram escolhidos símbolos que representavam essas abreviações. Temos como exemplo da álgebra de Diofanto (BAUMGART, 1992, p. 10) a seguinte equação:

$$K^{\gamma}ß \quad ςη⋔Δ^{\gamma}\epsilon \quad \dot{M}\delta \quad \epsilon\text{'}\sigma\tau\acute{\iota} \quad \mu\delta \qquad (1)$$

$$x^3 2 \qquad x8 - x^2 5 \qquad 1 \,.\, 4 = 44 \qquad (2)$$

$$2x^3 + 8x - (5x^2 + 4) = 44 \qquad (3)$$

Neste exemplo conseguimos ter ideia de como era representada uma equação por Diofanto, assim como comparar os símbolos das abreviações e operações utilizados (2) e também analisar as diferenças com a representação atual algébrica (3). Alguns outros povos também fizeram uso da álgebra sincopada em alguns momentos. A maioria utilizava essa álgebra da mesma forma que Diofanto, ou seja, encontrando representações para as abreviações, ou simplesmente, abreviando a palavra que seria escrita de forma convencional.

Nesta perspectiva, podemos verificar que o uso constante da álgebra retórica pelos povos antigos e estudiosos foi resultando na demanda por algumas formas de facilitar o longo processo de utilização da escrita através da utilização das abreviações, dando origem à álgebra sincopada. A sincopação de Diofanto até o surgimento de um simbolismo a partir de Vietè, Descartes e Harriot foi acontecendo de maneira gradual. À medida que os estudos algébricos iam avançando, foi-se necessário construir uma notação que facilitasse o entendimento e também diminuísse o trabalho de escrever por extenso ou fazer uso de abreviações cada vez que fosse preciso, introduzindo-se, assim, por exemplo, o conceito de variável, presente nos dias atuais. Assim,

> [...] o conteúdo da álgebra havia deixado para trás sua forma. Mas a forma era indispensável: a abstração dos números concretos e a formulação de regras gerais necessitavam do correspondente método de expressão; era essencial ter algum meio de denotar números arbitrários e operações com eles. O simbolismo algébrico é a forma adequada ao conteúdo da álgebra. (ALEKSANDROV, 1998, apud PANOSSIAN 2008)

Compreendendo que para atingir o nível atual do simbolismo algébrico, bem como sua padronização, ele passou por várias etapas e diferentes construções por alguns estudiosos, observemos um exemplo do simbolismo algébrico utilizado em suas formas antigas, no qual, abaixo de cada notação antiga é dada a forma utilizada nos dias atuais:

Quadro 7: Exemplo do simbolismo algébrico utilizado em suas formas antigas

Cardano (1545):	cubus $\overline{p}$ 6 rebus aequalis 20 $x^3 + 6x = 20$
Bombelli (1572):	Ĭ^6 . p . 8^3 . Eguale à 20. $x^6 + 8x^3 = 20$
Viète (1591):	I QC – 15 QQ + 85 C – 225 Q + 274 N aequatur 120. $x^5 - 15x^4 + 85x^3 - 225x^2 + 274x = 120$
Harriot (1631):	aaa – 3bba ===== + 2 . ccc $x^3 - 3b^2x = 2c^3$
Descartes (1637):	$x^3 - 6xx + 13x - 10 \infty 0.$
Wallis (1693):	$x^4 + bx^3 + cxx + dx + e = 0$

Fonte: BAUMGART, 1992, p. 13

A partir desses estudos, formas mais aprimoradas de um simbolismo prático, rápido, mais econômico de se raciocinar e uniforme foram surgindo ao longo do tempo. Segundo Aleksandrov (1988), o conteúdo da álgebra havia deixado para trás a sua forma, pois era essencial haver algum meio de denotar números arbitrários e operações, em que a forma adequada à álgebra era o seu simbolismo algébrico. Com isto, tornou-se fundamental a utilização de uma representação simbólica que pudesse suprir as necessidades do uso de um símbolo padrão, ou seja, havia a necessidade de um símbolo que sintetizasse as abstrações e as generalidades, indo além das representações de casos particulares. Desta forma,

> essa representação simbólica consegue-se introduzindo o conceito de variável, o que se faz da forma seguinte: Seja (E) um conjunto qualquer de números, conjunto finito ou infinito, e convencionaremos representar qualquer dos seus elementos por um símbolo, por ex.: x. A esse símbolo representativo de qualquer dos elementos do conjunto (E), chamaremos de variável. (CARAÇA, 1951, p. 127)

A ideia do conceito de variável se fundamenta nos valores que podem ser assumidos ao longo de um determinado intervalo. Referindo-se às álgebras não simbólicas, segundo Lima e Moisés (2000, apud SOUSA, 2004), temos a variável, palavra atrelada à álgebra retórica; a variável figura, à álgebra geométrica; e a variável numeral associada à álgebra sincopada. Contudo, ao nos referirmos à álgebra simbólica, temos a que está ligada à variável letra. Assim, a variável é representada geralmente por um símbolo ou uma letra, e é utilizada na substituição de um número desconhecido, ou seja,

> Quando dizemos, por exemplo: seja (E) o conjunto dos números reais do intervalo (0,1), e seja x a sua variável, que queremos significar? Que o símbolo x, sem coincidir individualmente com nenhum dos números reais desse intervalo, é susceptível de os representar a todos; é afinal, o símbolo da vida colectiva do conjunto, vida essa que se nutre da vida individual de cada um dos seus membros, mas não se reduz a ela. (CARAÇA, 1951, p. 127)

O uso da variável aparece quando queremos representar um valor não fixo, e assim conseguir retratar todos os números possíveis em cada ocasião, quer dizer, o conceito de variável traz em si a fluência do ser ou não ser parte do conjunto que está designado. A manifestação do pensamento algébrico, além de envolver as capacidades algébricas em diversas circunstâncias, também se dá através do conhecimento, da compreensão e da generalização das formas e do uso da variável em diversos problemas, situações e relações matemáticas, bem como expressões algébricas, equações e sistemas, função, entre outros.

A variável algumas vezes é considerada apenas como um símbolo ou uma letra que representa algum número ou elemento. Porém, não é apenas esse o sentido da variável, visto que

> [...] os valores assumidos por uma variável nem sempre são números, mesmo na matemática do segundo grau. Na geometria, as variáveis muitas vezes representam pontos, como se vê no uso de A, B e C, quando escrevemos "se AB = BC, então ΔABC é isósceles. Na lógica, as variáveis *p* e *q* muitas vezes representam proposições; na análise, a variável *f* muitas vezes representa uma função; na álgebra linear, a variável A pode representar uma matriz, ou a variável **v**, um vetor; e em álgebra superior a variável * pode representar as variáveis por letras (USISKIN, 1995, p. 11)

A variável pode ser compreendida por várias formas. Diferentes usos dela foram propostos por Ursini et al. (2005), nos quais se destacam: usos da variável como incógnita, número geral e relação funcional, sendo denominado modelo 3UV (Três Usos da Variável). Segundo Panossian (2008, p. 63), essencial "é que nenhuma dessas compreensões da variável (como incógnita, número geral e relação funcional) seja privilegiada, mas que aproximem os estudantes de tais usos das variáveis ora diferenciando-as, ora integrando-as em situações distintas ou na mesma situação".

Portanto, ao nos depararmos com a história do desenvolvimento da álgebra, podemos constatar o grande percurso necessário para a sistematização dos conceitos algébricos. Os povos primitivos partiram de problemas aritméticos relacionados ao cotidiano, ampliaram seus estudos a partir de problemas que envolvessem generalizações. À medida que os estudos relacionados á álgebra de alguns povos foram sendo ampliados, novas formas de resolução dos problemas e principalmente das equações foram sendo criadas. Os estágios da álgebra foram se sucedendo até o surgimento de um simbolismo e da variável, e, assim, a álgebra foi modernizando-se até chegar aos dias atuais. Os nexos conceituais que fazem parte da constituição dos conceitos da álgebra serão abordados no próximo item.

2.3 NEXOS CONCEITUAIS ALGÉBRICOS

O ser humano, necessitando dominar as coisas ao seu redor, observar e estudar os fenômenos da natureza, foi elaborando os conceitos matemáticos, culminando, assim, no desenvolvimento de uma nova ciência. Ao conhecermos a essência das origens do surgimento da álgebra e dos conceitos algébricos, podemos verificar que, conforme os trabalhos desenvolvidos pelos estudiosos avançavam, buscava-se cada vez mais a formalidade e o rigor matemático. Sendo assim, "existe um movimento do pensamento algébrico que, aliado à maneira como se estrutura e se reflete na linguagem, separa-o de conexões diretas com os problemas do cotidiano” (PANOSSIAN, 2008, p. 49).

A partir dos casos particulares com o uso dos números e operações (aritmética), a álgebra foi expandindo-se e indo além do uso das letras, representações e generalizações nas relações matemáticas, mas também como a relação entre grandezas ou variáveis abstratas. O uso da variável podia dizer respeito a uma representação de uma quantidade não fixa ou desconhecida, assim como também eram chamadas de variável grandezas, como velocidade, tempo, comprimento, denominadas grandezas variáveis. Porém, essas constatações que culminaram no desenvolvimento de uma álgebra formal, por conta de algumas necessidades humanas, não se deram de maneira isolada.

Segundo Caraça (1951), a capacidade de inteligência do homem, ao compreender o mundo de uma maneira geral, se manifestava com base em duas características: a interdependência e a fluência. A interdependência para esse autor, significa quando as coisas estão relacionadas entre si, ou seja, uma coisa relacionada com a outra, pois “o Mundo, toda essa Realidade em que estamos mergulhados, é um organismo vivo, uno, cujos compartimentos comunicam e participam, todos, da vida uns dos outros (CARAÇA, 1951, p. 109). Como exemplo da interdependência entre as coisas, podemos pensar no desenvolvimento de uma planta, que depende de vários fatores internos e externos determinantes para o seu crescimento, como a germinação, água, luz, gases, temperatura, oxigênio, etc.

A fluência, segundo Caraça (1951), diz respeito às constantes transformações do mundo que ocorrem a todo momento, ou seja, a sua permanente evolução, isto é, tudo flui. Neste sentido, ao observar as coisas ao nosso redor, podemos constatar a fluência a todo instante. Por exemplo, se pensarmos em nossa casa depois que saímos dela, não conseguiremos afirmar com absoluta certeza quantas pessoas estarão nela nesse exato momento, pois, como saímos de casa, muitas coisas podem ter acontecido, como pessoas terem saído para dar um passeio ou trabalhar, alguém voltar para casa repentinamente por algum imprevisto, ou ainda ter chegado alguma visita inesperada. Assim, a interdependência e a fluência são elementos constituintes do conhecimento humano adquirido ao longo do tempo, visto que esses dois nexos conceituais se fazem essenciais no pensar matemático. Ainda, cabe ressaltar que o pensamento matemático e o conhecimento se promoveram com base nas necessidades práticas do homem.

A formalização de um conceito se dá pelo entrelaçamento de nexos conceituais que auxiliam na sua formação. Como exemplo disso, podemos pensar no conceito de função, que, a partir de seu movimento lógico-histórico e seu processo de estudo e desenvolvimento, se fez necessário que, para a sua concretização, a essência do conceito de variável esteja presente, visto que o conceito de função, segundo Caraça (1951), é o instrumento próprio para o estudo das leis quantitativas. Para Davydov (1982), o saber teórico que surge por conta das transformações dos objetos tem relação com os nexos internos pertencentes a esse objeto, portanto cumpre conhecer os nexos internos que fazem parte de um conceito para organizar um ensino que vise ao ensino e à aprendizagem dos estudantes.

Didaticamente, como forma de propulsionar aos estudantes a formação do pensamento teórico, Davydov (1982) salienta a importância de se pensar nos nexos conceituais internos de um conceito e, assim, entender os elementos que fazem parte do movimento lógico-histórico do conceito. Desta forma, os "nexos conceituais que fundamentam os conceitos, contém a lógica, a história, as abstrações, as formalizações do pensar humano no processo de constituir-se humano pelo conhecimento" (SOUSA, 2004, p. 62). A conexão entre as diferentes maneiras de se pensar em um conceito a partir de suas dependências, linguagens e história constitui o que chamamos de nexo conceitual.

O conceito de álgebra e a história de seu desenvolvimento constituem a conexão entre alguns nexos conceituais algébricos. Sousa (2004) evidencia os seguintes nexos conceituais algébricos: fluência, interdependência, campo de variação e variável. A partir dos nexos algébricos já mencionados e o estudo do movimento lógico-histórico da álgebra, identificamos outros nexos que também integram a essência histórica da álgebra e seu percurso de desenvolvimento: sequência, padrão, regularidade e relação de igualdade.

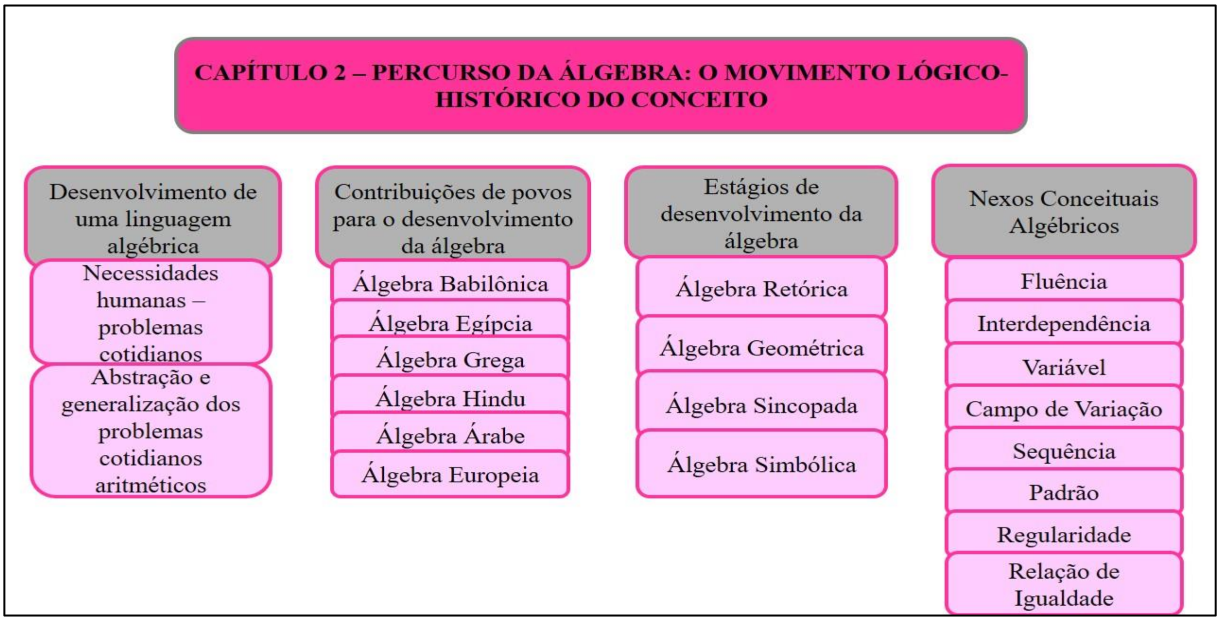
Sendo assim, entendemos que os nexos conceituais fazem parte da estrutura da constituição do conceito álgebra, visto que esses foram essenciais na sua formalização. Ao compreender o significado dos nexos conceituais na constituição do conceito álgebra e ao voltarmos nosso olhar para o ensino e a aprendizagem dos conceitos algébricos, percebemos que o estudo desses nexos nas propostas de disposição do ensino influenciará no entendimento dos estudantes sobre a álgebra. De acordo com Sousa,

> Queremos enfatizar que essa abordagem se manifesta do ensino tradicional de álgebra, que se fundamenta na aprendizagem das formas analíticas das expressões algébricas, por considerar, durante a construção do pensamento pelos alunos, as conexões internas ou ainda os nexos conceituais do pensamento algébrico (SOUSA, 2004, p. 166)

Em sendo assim, as ações, desenvolvidas nesta pesquisa, têm o propósito de compreender o movimento lógico-histórico dos nexos conceituais algébricos, em relação aos aspectos das álgebras não simbólica e simbólica, bem como o estudo do movimento, fluência e campo de variação.

No próximo capítulo será apresentado o embasamento teórico e metodológico da pesquisa, pautado nos pressupostos da Teoria Histórico-Cultural que tem seu maior expoente em Vigotski[9], da Teoria da Atividade, de Leontiev e da Atividade Orientadora de Ensino, proposta por Moura.

Figura 13: Síntese do Capítulo 2



Fonte: Sistematização da autora

[9] De acordo com as traduções da obra de Vygotsky, há uma variação na forma de escrever seu nome. Assim, iremos utilizar Vigotski ao nos referirmos ao conjunto de sua obra e, ao fazer citação, utilizaremos a forma apresentada no livro.

3 PRESSUPOSTOS TEÓRICOS E METODOLÓGICOS DA PESQUISA

> [...] proporcionando uma visão mais livre, abstrata e generalizada e, com ela, mais profunda e rica em operações com quantidades concretas. [...] a álgebra liberta o pensamento da criança do cativeiro de dependências numéricas concretas e eleva-o ao nível de um pensamento mais generalizado [...]. (VIGOTSKI, 1993, p. 197)

Ao longo da história da humanidade, a matemática se faz presente nos problemas cotidianos enfrentados pelo sujeito. A partir das necessidades humanas relacionadas ao seu dia a dia, o homem precisou buscar subsídios que fossem capazes de satisfazer essas necessidades. Desta forma, a matemática possibilita a apropriação e a construção de novos conhecimentos, por meio dos quais o homem vai se constituindo humano através da interação e da troca de experiência com os outros ao seu redor. Várias ciências como psicologia, antropologia, filosofia e educação, pautam suas discussões em torno das maneiras como nos tornamos humanos. A presente pesquisa tem como objetivo investigar possibilidades formativas para futuros professores que ensinam matemática no que se refere ao ensino e à aprendizagem de álgebra nos anos iniciais do Ensino Fundamental.

Neste capítulo, buscamos discorrer sobre as formas de constituição do desenvolvimento humano com base nos princípios da Teoria Histórico-Cultural (THC), proposta por Lev Semionovitch Vigotski (1896 – 1934), a qual possui subsídios das concepções de Marx (2013) sobre o homem, compreendendo, assim, que o desenvolvimento do ser humano é produto da relação dialética entre o biológico e o cultural. Já a Teoria da Atividade (TA), elaborada por Alexei Nikolaievich Leontiev (1903 – 1979), tem seu olhar voltado para o estudo da transformação do homem, influenciado pelo meio em que vive, entendendo que o homem se humaniza a partir das atividades e das aprendizagens que manifesta ao longo de seu desenvolvimento e sua trajetória.

Á partir dos pressupostos da THC e TA, objetivamos compreender a aprendizagem de futuros professores que ensinam matemática no que diz respeito aos conceitos algébricos presentes nos anos iniciais. Nossa proposta teórica e metodológica baseia-se, ainda, na Atividade Orientadora de Ensino (AOE), criada por Manoel Oriosvaldo de Moura. Sendo assim, intencionamos analisar alguns aspectos do homem como ser social e as implicações disso nos processos educacionais com base nos teóricos mencionados.

3.1 TEORIA HISTÓRICO-CULTURAL

Visando à constituição de uma psicologia com base no materialismo histórico-dialético, Lev Semionovitch Vigotski em companhia de Alexander Romanovich Luria (1902 – 1977) e Alexei Nikolaievich Leontiev fizeram parte de um grupo, que buscava a constituição de uma psicologia embasada nos pressupostos da teoria marxista. Assim, ao nos referirmos à Teoria Histórico- Cultural - THC, temos em Vigotski seu maior expoente, sendo que, após a sua morte, seus companheiros do grupo seguiram seus estudos.

A natureza biológica do ser humano pode ser definida por características que o tornam humano, ou seja, é a essência de um conjunto de elementos que fazem o ser humano pertencer à espécie homem. Já a natureza social do homem diz respeito às suas relações com os outros ao seu redor, quando as relações sociais colaboram no desenvolvimento social. Essas duas naturezas do ser humano foram compreendidas por Vigotski (2000), ao respaldar-se nas contribuições do materialismo histórico-dialético de Karl Marx.

Ao nos referirmos às naturezas biológica e social do ser humano, compreendemos que, para o sujeito tornar-se humano, é necessário ir além dos seus aspectos meramente biológicos. Para que sejamos humanos apenas o aspecto biológico não é o suficiente, pois o que a natureza oferece, quando do nascimento, não basta para se viver em sociedade. Assim, é preciso que cada indivíduo aprenda a ser homem (LEONTIEV, 1978). Neste processo de humanização, cabe conhecer outros sujeitos e inteirar-se nessa relação, bem como compreender a cultura em que está inserido e apropriar-se dela. Nesta perspectiva, entendemos que o ser humano é resultado do tecimento dessas duas bases (biológica e social).

O aspecto cultural, segundo Pino (2005, p. 47) refere-se ao desenvolvimento do ser humano como um novo nascimento. Pensando na relação biológica e cultural do ser humano, tal autor destaca que esse novo nascimento acontece pelo fato de o homem, ao nascer, pertencer a um mundo estranho, no qual “as funções biológicas ainda estariam sob o comando único das ‘leis’ da natureza” e, assim, aos poucos a origem ancestral do homem vai sendo conduzida do estado de natureza ao estado de cultura, mesmo que

> [...] embora não haja ainda evidências a respeito da maneira como a experiência cultural da humanidade afeta sua evolução genética e neurológica, a ideia e que o curso que segue essa evolução tem muito a ver com a experiência cultural dos povos parece ser uma hipótese científica cada vez mais plausível (PINO, 2005, p. 47)

Diante disso, ao pensarmos no desenvolvimento histórico do homem ancestral desde o seu nascimento, percebemos que ele precisou desenvolver e criar artifícios para a sua própria sobrevivência, além de pensar em novos métodos de sanar suas dificuldades e, com isso, a sua espécie foi cada vez mais evoluindo. Ainda, as marcas da cultura instituídas no patrimônio genético que o homem herdou de seus antepassados (PINO, 2005) se fazem presentes nesse processo de desenvolvimento da espécie, que a partir dos ensinamentos e das orientações dos mais experientes aos mais novos, das descobertas oportunizadas pelas gerações anteriores e passadas às próximas, culminaram no engrandecimento de conhecimentos adquiridos, dando sentido ao desenvolvimento sócio-histórico que, ao longo de sua vida, vai sendo adquirido pelo sujeito, dando capacidades que são essencialmente dos homens e assim produzindo cultura. Em virtude de um longo processo de hominização, que é característica da evolução de primatas a homem, o que garante condições para um desenvolvimento histórico e cultural ilimitado é a estrutura biológico- humana (POZEBON, 2017). Neste intuito, em relação a desigualdade entre animais e o ser humano

> Vigotski defendeu a necessidade de se distinguir entre funções psíquicas elementares, comuns a homens e animais, e funções psíquicas superiores, exclusivamente humanas. Determinadas capacidades do nosso psiquismo, segundo a argumentação do autor, desenvolvem-se como produto da vida social, e não biológica. Isso porque a apropriação de signos da cultura vai dando direção ao próprio desenvolvimento biológico da criança, determinado, em última instância, a própria construção cerebral e a formação de sistemas funcionais (PASQUALINI, 2016, p. 71)

Assim, a diferença entre o homem e o animal está nas ações que ambos conseguem realizar, ou seja, nas maneiras de produção de sobrevivência que o homem é capaz de desempenhar na sociedade. O ser humano, ao apropriar-se dos conhecimentos adquiridos em sociedade, tem domínio de suas ações e, dessa forma, produz cultura, o que o diferencia dos animais. Além disso, as funções psíquicas superiores são apenas humanas e, como as funções psíquicas elementares estão presentes no homem e nos animais, há necessidade de diferenciá-las.

> Para Vygotsky, o que diferencia, essencialmente, o psiquismo humano do animal, é que a conduta animal é determinada pela estimulação do ambiente (externo e interno), enquanto o homem tornou-se, historicamente, capaz de superar essa determinação, conquistando a capacidade de dominar o próprio comportamento. (PASQUALINI, 2016, p. 71)

Ademais, a realização do trabalho se torna um fator importante na diferenciação entre o ser humano e o animal, pois a satisfação das necessidades do homem também ocorre por meio do trabalho, e o desenvolvimento deste é característico apenas da espécie humana. . Desta forma,

> Por considerar que a mais importante forma de ação (fazer) exercida pelo homem era o “trabalho” e por não distinguir entre trabalho e labor, as diferentes aptidões humanas correspondentes às atividades da ação, do trabalho e do labor não se constituíram em problema para Marx. Esse foi o motivo pelo qual ele aceitou, sem questionar, a crença da sociedade moderna no “trabalho” com a atividade mais elevada que o homem pode realizar, bem como na capacidade produtiva como a mais alta aptidão humana- aquela capaz de diferenciar os homens dos animais. (WAGNER, 2002, p. 92-93)

Os modos de comunicação, as condições de satisfação das necessidades criadas pelos sujeitos ao longo de sua vida e a interação em sociedade possibilitam ao ser humano constituir uma cultura, quer dizer, ao estar inserido em uma cultura, ele cria novas possibilidades de aprender, ensinar e desenvolver-se. Assim, as características da personalidade humana podem ser entendidas como produto do desenvolvimento cultural do comportamento humano. Segundo Leontiev (1978), a criança se relaciona com os fenômenos do mundo ao seu redor através dos outros homens, pois, por ter menos conhecimento, precisa de apoio dos mais experientes e, com isso, vai construindo um processo de comunicação com eles.

Quando o homem, através dos conhecimentos adquiridos por meio das gerações anteriores, apropria-se da cultura, isso acontece por intermédio das funções psicológicas superiores de que é dotado e que são motivadas nas relações históricas e interpessoais com a cultura. De acordo com isso, buscando entender as funções psicológicas instituídas nas relações sociais do homem com o mundo, Vigotski compreende em seus estudos sobre o ser humano que a cultura é o elemento primordial no que tange à transformação do biológico em social. Assim, Vigotski (1991) assegura que organizadas em nosso cérebro, a unidade entre os processos psíquicos e fisiológicos está ligada às funções da matéria. Na proposta psicológica de Vigotski, o homem é consolidado, ao mesmo tempo, segundo corpo e mente; biológico e social; membro da espécie humana e participante de um processo histórico (PERLIN, 2018)

As ações desenvolvidas pelo ser humano expressam a apropriação da cultura e as trocas de conhecimentos estabelecidas por meio da interação entre os sujeitos, em que são condições essenciais para o desenvolvimento do ser humano. Ao pensarmos nisso, e que o espaço de aprendizagem responsável por organizar propositalmente o ensino e aprendizagem de conhecimentos é a escola, planejamos e desenvolvemos situações de ensino, relacionadas a alguns conceitos algébricos com acadêmicos do curso de Pedagogia da UFSM, no intuito de investigar possibilidades formativas para futuros professores que ensinam matemática no que tange ao ensino e à aprendizagem de álgebra nos anos iniciais do Ensino Fundamental. Portanto, para o desenvolvimento das funções psicológicas superiores nos estudantes, cumpre organizar um ensino que corrobore esta perspectiva e que siga na direção da qualidade do pensamento teórico. Nesta perspectiva, temos que

> *Todas as funções psicointelectuais superiores aparecem duas vezes no decurso do desenvolvimento intelectual da criança: a primeira vez, nas atividades coletivas, nas atividades sociais, ou seja, como funções interpsíquicas: a segunda, nas atividades individuais, como propriedades internas do pensamento da criança, ou seja, como funções intrapsíquicas* (VIGOTSKI, 2014, p. 114, grifo no original)

Exclusivamente humanas, as funções psicológicas superiores são estruturadas na trajetória do desenvolvimento histórico da humanidade, perpassando do social para o individual, ou seja, passando do interpsíquico para o intrapsíquico. Sendo assim, as funções psicológicas superiores partem das ações advindas do coletivo para as ações pessoais. Os conhecimentos elaborados pela humanidade, ao longo de sua história, poderão ser aprendidos através da interação do sujeito com o mundo ao seu redor e, dessa forma, gerar o desenvolvimento. Porém, para que ocorra a aprendizagem, é necessário o contato de forma ágil com o meio onde o sujeito está inserido, e, nesse caso, as funções psicológicas auxiliam na relação entre o ser humano e o social através de um processo de mediatização. Diante deste entendimento,

> A aprendizagem como atividade humana tem caráter social. Acontece em um meio social em ativa interação com outras pessoas, por meio de colaboração e de comunicação. O caráter social da aprendizagem significa que, na etapa inicial, existe um caráter interpsicológico como atividade conjunta. E no próprio processo de assimilação internaliza, passando ao plano intrapsicológico (NÚÑES, 2009, p. 26)

O princípio do psiquismo humano se dá a partir da história social, pois é, com base nela, que o homem começa a compreender as coisas à sua volta e também acaba por desenvolver-se. Ancorados nos estudos de Vigotski sobre o psiquismo humano, percebemos que sua proposta "é, portanto, compreender os fenômenos psicológicos enquanto mediações entre a história social e a vida concreta dos indivíduos" (ASBHAR, 2011, p. 25)

Vigotski entende a aprendizagem como mudanças qualitativas existentes no processo de apropriação dos conhecimentos. Ainda, a relação entre sujeito e mundo não ocorre naturalmente, mas é mediada por signos e instrumentos, e, assim, o comportamento humano é orientado por signos e instrumentos (VIGOTSKI, 1998). Conforme Moura et al. (2017), o processo de apropriação de signos elaborados pelo homem nas várias atividades humanas produzidas ao longo da história é resultado das funções psicológicas superiores.

Carregado de características da criação humana, o instrumento é um objeto social, produto de uma cultura material, o qual, segundo Oliveira (2010, p.29) "carrega consigo a função para a qual foi criado e o modo de utilização desenvolvido durante a história do trabalho coletivo".

> A função do instrumento é de servir como condutor da influência humana sobre o objeto da atividade; ele é orientado externamente; deve necessariamente levar a mudanças nos objetos. Constitui um meio pela qual a atividade externa é dirigida para o controle e domínio da natureza. O signo, por outro lado, não modifica em nada o objeto da operação psicológica. Constitui um meio da atividade interna dirigido para o controle do próprio indivíduo; o signo é orientado internamente (VIGOTSKI, 2002, p. 72 – 73)

Os instrumentos foram sendo criados pelo homem satisfazer seus problemas cotidianos e, ao longo do tempo, foram sendo aperfeiçoados no movimento de suprir as necessidades encontradas. As necessidades se formam em contato com a cultura humana e "com a ajuda de instrumentos, o homem tem a capacidade de modificar objetos, adaptando-os para a satisfação de suas próprias necessidades, as quais são produto do desenvolvimento histórico" (PETROVSKI, 1986, p. 95). O instrumento é um objeto destinado aos modos de ação e operações de trabalho, organizados de maneira social (LEONTIEV, 1978). Por exemplo, na escola cabe ao professor idealizar e definir seus instrumentos para desenvolver ações que desencadeiem o seu ensino. Assim podemos pensar, que

> Ao ensinar, o professor como parceiro mais capaz, na perspectiva vygotskyana, e com uma responsabilidade outorgada por uma comunidade, deverá ter como intencionalidade proporcionar àqueles que chegam ao grupo a apropriação de instrumentos simbólicos que lhes permitam interagir e produzir nessa comunidade. (MOURA, 2013, p. 110)

Partimos do princípio de que o homem, quando desenvolve algo, inicialmente atribui-lhe um sentido e este, ao ser compartilhado com os demais membros de uma comunidade, assume um significado, assim "o significado é produzido por meio da palavra e compartilhado com o grupo" (BINSFELD, 2019, p. 73). Com isso, o instrumento se torna social por ter sido dado um significado a ele, e ele tem como função dirigir sobre o objeto a influência humana.

Em assim sendo, o desenvolvimento psicológico é auxiliado por signos, melhor dizendo, no psiquismo humano se desenvolve a ação de elaborar e utilizar signos, e as relações sociais dos sujeitos tornam-se signos, quando são internalizadas em funções psicológicas. Segundo Oliveira (2010),

> Os signos por sua vez, também chamados por Vygotsky de "instrumentos psicológicos", são orientados para o próprio sujeito, para dentro do indivíduo; dirigem-se ao controle de ações psicológicas, seja do próprio indivíduo, seja de outras

> pessoas. São ferramentas que auxiliam nos processos psicológicos e não nas ações concretas, como os instrumentos. (p. 30)

As relações entre os sujeitos e a comunicação entre eles e o mundo ao seu redor auxiliam, através dos signos, no desenlace das tarefas psicológicas. Os signos podem representar alguma coisa, pode "ser um gesto, uma imagem, um som, um objeto, uma forma, uma posição, etc." (PASQUALINI, 2016, p. 73). Assim, ao compreender os signos como uma forma de comunicação entre os sujeitos e como "produto de determinados modos de produção e organização da vida em sociedade (MOURA et al., 2017, p. 65), percebemos que o principal sistema de signos de que usufruímos é a linguagem. Ainda, para Vigotski (2004), a linguagem em geral e o sistema simbólico algébrico são instrumentos psicológicos que se interpõem na relação do sujeito com a realidade objetiva, dispostos ao controle dos processos psíquicos.

Quanto à linguagem escrita e oral, Vigotski (1993) diz que a escrita é uma linguagem sem interlocutor e, assim, é mais abstrata que a linguagem oral, que exige uma dupla abstração da criança: o aspecto sonoro e o interlocutor. Essa linguagem sem som real é aquela que a criança imagina e elabora, exigindo dos símbolos sonoros uma simbolização. Vendo por esse ângulo, a dificuldade da criança em simbolizar a linguagem oral, ao ser comparada com a álgebra e aritmética, assemelha-se com a dificuldade que ela tem em generalizar a sua aritmética, e, nesta comparação, a linguagem escrita acaba sendo a álgebra da linguagem. Sendo assim,

> a álgebra é mais difícil do que a aritmética para a criança. A linguagem escrita é a álgebra da escrita. Entretanto, da mesma forma que a apreensão da álgebra não repete o estudo da aritmética mas representa um plano novo e superior de desenvolvimento do pensamento matemático abstrato, que reconstrói e projeta para o nível superior o pensamento aritmético anteriormente constituído [...] (VIGOTSKI, 2000, p. 338)

Portanto, o domínio da álgebra pela criança constitui um pensamento matemático abstrato novo e com maior nível de desenvolvimento, reestruturando o sistema psíquico. Para Vigotski (1993), assim como a língua estrangeira eleva em um nível superior a língua materna da criança, permitindo assim que se use a palavra de maneira mais consciente e voluntária como instrumento do pensamento e expressão do conceito, a assimilação da álgebra eleva o pensamento aritmético em um nível superior. Portanto, para o referido autor, podemos entender uma operação aritmética qualquer como um caso particular da álgebra.

Fornecer aos estudantes uma visão mais generalizada da álgebra e assim contribuir na constituição do seu pensamento algébrico implica que o professor organize seu ensino de tal forma que promova o desenvolvimento das funções psíquicas dos estudantes. Ressaltando que as mudanças ocorrem nas funções psíquicas e que o conhecimento do sujeito se dá do coletivo para o individual (do interpsíquico para o intrapsíquico), temos nessas mudanças a criação de novos significados, pois, antes de ser interiorizada, a função psicológica superior é decorrente da relação interpessoal e, após interiorizada pelo sujeito, ela é resultado da ação individual.

Assim, "o signo que a princípio é introduzido por meio de processos interpsíquicos, é internalizado e converte-se em instrumento psicológico no plano intrapsíquico" (PASQUALINI, 2016, p. 76). Ao pensarmos no desenvolvimento da criança, vemos que ela é capaz de regularizar as características que um objeto possui e assim argumentar por meio de signos que consistem em instrumentos capazes de apoiar o sujeito a aprender e se desenvolver (FRAGA, 2017).

O sujeito desenvolve-se por conta do movimento de internalização de um conceito, e, assim, vai apropriando-se de novos conhecimentos. Logo, o sujeito, ao assegurar-se de conhecimentos e também de conceitos que ainda não possuía, por intermédio da interação e da troca de experiências com outros sujeitos, acaba por se desenvolver de maneira individual e também coletivamente. Referindo-se ao conceito, Vigotski diz que,

> Um conceito se forma não pela interação de associações, e sim mediante operações intelectuais em que todas as funções mentais elementares participam em uma combinação específica, cuja operação é dirigida pelo uso das palavras, que, por sua vez, constituem o meio de centralizar ativamente a atenção, abstrair determinados traços, sintetizá-los e simbolizá-los por meio de um signo (VIGOTSKI, 2007, p. 37-38)

Para Vigotski (2007), há os conceitos espontâneos e os conceitos científicos. Os conceitos espontâneos são aqueles que o estudante já possui antes mesmo de vivenciar a realidade da escola, sendo apreendidos por meio de experiências com os sujeitos ao seu redor. Estes conceitos, mediados pelo ensino proposto pelo professor, podem se tornar científicos, apoiando o estudante em um pensamento teórico. Segundo Vigotski (2009, p. 349) o "desenvolvimento dos conceitos científicos e espontâneos seguem caminhos diferentes em sentindo contrário, ambos os processos estão internamente e da maneira mais profunda inter-relacionados".

Davydov (1982) entende que o processo de formação de conceitos, unido aos processos de generalização e abstração, caracteriza o pensamento. Para este autor, o pensamento pode ser tanto empírico e como teórico. No pensamento empírico, a generalização pode ser feita através da comparação entre objetos, isto é, enfatizam-se as propriedades comuns. Já no pensamento teórico, busca-se a essência do objeto, e assim procura-se "[...] elaborar dados da contemplação e da representação em forma de conceitos e com eles reproduzir o sistema de conexões que geram o conceito dado, por descoberto, a sua essência" (DAVÍDOV, 1988, p. 142).

Em vista disso, o professor tem a responsabilidade de organizar um ensino que busque a apropriação de conhecimentos científicos e, assim, desenvolver o pensamento teórico dos estudantes. Nossa intenção com as situações de ensino desenvolvidas nesta pesquisa é oportunizar uma aproximação de conceitos científicos algébricos que os futuros professores irão ensinar na Educação Básica.

Apenas quando imersos na atividade humana, os conhecimentos que o homem produz podem ser concretizados e, dessa forma, são atribuídos os sentidos pessoais e os significados sociais. A partir de análises quanto à aprendizagem e ao desenvolvimento dos sujeitos, à relação do indivíduo com o ambiente e à interação deste com os outros, Vigotski idealizou o conceito de zona de desenvolvimento proximal [10]-ZDP. O indivíduo tem a capacidade de aprender e de apropriar-se de conceitos, por conta das funções psicológicas que acabam estando em movimento de desenvolvimento. Assim, a distância entre o nível de desenvolvimento real e o nível de desenvolvimento potencial é o que chamamos de ZDP. Com isso, Vigotski definiu três níveis: Zona de Desenvolvimento Real, Zona de Desenvolvimento Potencial e a Zona de Desenvolvimento proximal.

As tarefas que a criança consegue realizar sozinha estão ligadas à zona de desenvolvimento real, ou seja, neste nível as capacidades intelectuais da criança já estão consolidadas, pois o desenvolvimento da criança já foi desempenhado, e assim, as funções psicológicas superiores do sujeito já foram alcançadas. Segundo Vigotski,

> Se ingenuamente perguntamos o que é nível de desenvolvimento real, ou formulando de forma mais simples, o que revela a solução de problemas pela criança de forma mais independente, a resposta mais comum seria que o nível de desenvolvimento real de uma criança define funções que já amadureceram, ou seja, os produtos finais do desenvolvimento. (VIGOTSKI, 1998, p. 97)

A zona de desenvolvimento proximal diz respeito às tarefas que a criança consegue desenvolver com a ajuda de outra pessoa, podendo ser alguém mais velho, o professor ou alguma criança mais experiente. Esse nível de desenvolvimento abrange as tarefas que a criança consegue realizar com a orientação de alguma pessoa ou até mesmo com a facilitação de algum instrumento. Há tarefas que a criança consegue desenvolver apenas por meio de alguma

---

[10] Em algumas traduções, também podemos encontrar a nomenclatura das seguintes maneiras: Zona de Desenvolvimento Proximal, Zona de Desenvolvimento Iminente, Zona do Próximo Desenvolvimento, Zona de Desenvolvimento Imediato.

mediação, alguma instrução que lhe seja dada durante esse processo de desenvolvimento. Desta forma,

> A zona de desenvolvimento proximal define aquelas funções que ainda não amadureceram, mas que estão em processo de maturação, funções que amadurecerão, mas que estão presentemente em estado embrionário. Essas funções poderiam ser chamadas de “brotos” ou “flores” do desenvolvimento, ao invés de “frutos” do desenvolvimento. O nível de desenvolvimento real caracteriza o desenvolvimento mental retrospectivamente, enquanto a zona de desenvolvimento proximal caracteriza o desenvolvimento mental prospectivamente (VIGOTSKI, 2007, p. 98)

Ao ter a ajuda de um adulto para realizar as tarefas, a criança é capaz de desenvolver modos de se apropriar de um novo conhecimento. Vigotski (2001) entende que deveria ser avaliado na criança não somente o que ela é capaz de realizar sozinha, mas também as funções que estão em desenvolvimento, pois a criança acaba utilizando as capacidades e as funções psíquicas já estabilizadas. Portanto, essas funções que vão surgindo no desenvolvimento da criança, “são justamente as funções que constituem a zona de desenvolvimento próximo da criança” (PASQUALINI, 2016, p. 91).

Uma estruturação da aprendizagem gera consequentemente desenvolvimento, quando organizada de maneira intencional, com a finalidade de motivar o desenvolvimento. Vigotski (2007) diz que aprendizado e desenvolvimento não são similares, pois

> [...] aprendizado adequadamente organizado resulta em desenvolvimento mental e põe em movimento vários processos de desenvolvimento que, de outra forma, seriam impossíveis de acontecer. Assim, o aprendizado é um aspecto necessário e universal do processo de desenvolvimento das funções psicológicas culturalmente organizadas e especificamente humanas (VIGOTSKI, 2007, p. 118)

Os processos de desenvolvimento da criança são dirigidos pelo ensino e a pela aprendizagem. Com isso, a ZDP refere-se ao desenvolvimento do sujeito, e se torna relevante quando o professor, como mediador ou facilitador, favorece o processo de aprendizagem dos estudantes. Neste intuito, o movimento de construção dos conceitos se dará nos alunos na ZDP, que, conforme Oliveira (1997, p. 60) “diz ser o caminho que o indivíduo irá percorrer para desenvolver as funções consolidadas, estabelecidas no seu nível de desenvolvimento real”.

O desenvolvimento das capacidades psíquicas da criança pode ser motivado pelo ensino, pois é necessário fazer com essas funções psíquicas avancem e, assim, progridam. É necessário que a criança consiga aprimorar o seu pensamento, aproximando-se dos significados dos conceitos. Ao se referir ao nível superior do pensamento da criança e ao domínio dos conceitos algébricos, segundo Vigotski (2000, p. 267), este nível superior é incrementado pelo domínio da álgebra, visto que "[...] permitindo entender qualquer operação matemática como caso particular de operação da álgebra, facultando uma visão mais livre, mais abstrata e generalizada e, assim, mais profunda e rica das operações com números concretos".

Portanto, cabe ao professor despertar nos estudantes as capacidades e as funções psíquicas que estão se constituindo e reconhecer aquilo que já está gerado. Para isso, é necessário o professor "estruturar, organizar e mediar sua atividade, de forma que, ao se relacionar com o conteúdo de ensino e dele se apropriar, novas capacidades e funções psíquicas possam se formar" (PASQUALINI, 2010, p. 92). Nesta perspectiva, a presente pesquisa busca desenvolver as capacidades e as funções psíquicas de futuros professores no que concerne aos conceitos algébricos, para que, a partir do entendimento desses sujeitos, consigam pensar em um ensino que promova o desenvolvimento dessas capacidades nos estudantes dos anos iniciais, bem como a elevação do nível do pensamento algébrico desses estudantes.

Com base nas compreensões acerca da relação entre o homem e o mundo, apresentaremos os pressupostos da Teoria da Atividade, de Leontiev, que é vista como um desdobramento dos estudos relacionados a THC, e por meio da qual podemos entender o conceito de atividade, essencial para o desenvolvimento do homem.

3.2 TEORIA DA ATIVIDADE

Colaborador de pesquisa de Vigotski, Alexei Nikolaevich Leontiev (1903 – 1979) é um dos principais representantes da Teoria da Atividade (TA). Ele afirma que o homem, ao adquirir seus conhecimentos a partir da cultura que o cerca, acaba se transformando e também transformando o mundo ao seu redor. Dessa forma, a TA centra-se na transformação do homem no meio que vive, já que o desenvolvimento das funções psíquicas está relacionada com a cultura e com experiência humana. Seus subsídios basilares baseiam-se na estruturação de atividades, que tem como pressupostos os estudos relacionados a personalidade, consciência e pensamento.

Considerando que o desenvolvimento humano se dá por meio da relação com outros sujeitos, pela influência de seu meio, e das características que o constituem ao longo de seu processo de desenvolvimento, o homem desde seu nascimento evolui biológica e também socialmente. Isso decorre do,

> [...] duplo movimento apropriação-objetivação da cultura: ao apropriar-se do que a humanidade já produziu culturalmente, o homem internaliza a cultura e se humaniza. Da mesma forma, ao agir sobre e em determinado contexto, objetiva-se culturalmente

> na realidade e assim a constitui, num movimento dialético (LONGAREZI, FRANCO, 2013, p. 82)

O homem, quando adquire conhecimento, por conta da cultura que o cerca, está sendo movido por necessidades que fazem com que ele se aproprie de instrumentos/conhecimentos para supri-las. Essas necessidades são preenchidas através das atividades que ele executa, o que acarreta no desenvolvimento das funções psicológicas superiores. Segundo Petrovski (1986), o processo de satisfação das necessidades se manifesta no homem como um processo ativo e, assim, como um processo específico tem uma forma de atividade que é socialmente desenvolvida. Em relação a essa busca pela satisfação das necessidades, Leontiev (1983) diz que,

> [...] a necessidade primeiro manifesta-se apenas como uma condição, como premissa para a atividade, mas, assim que o sujeito começa a agir, é imediatamente operado em transformação e a necessidade deixa de ser o que era virtualmente "em si". Quanto mais a atividade progride, mais sua premissa se torna seu resultado. (p. 156, tradução nossa)

Leontiev (1983) compreende que a atividade que cada pessoa desempenha também está relacionada com a sua posição na sociedade, com as condições objetivas e com as maneiras com que se formam as condições individuais. Assim, a relação entre o homem e a realidade e também com o objeto que acaba sendo transformado, está associada à atividade realizada pelo sujeito. Com isso, as maneiras de organização dos indivíduos e o desenvolvimento de seu meio estão concernentes às suas atividades. Assim sendo,

> Por atividade designamos os processos psicologicamente caracterizados por aquilo a que o processo, como um todo, se dirige (seu objeto), coincidindo sempre com o objetivo que estimula o sujeito a executar esta atividade, isto é, o motivo. (LEONTIEV, 1978, p. 68)

Neste intuito, uma necessidade humana que encontre num objeto a finalidade de saciar essa necessidade, e coincidindo, dessa maneira, com o objeto e com o motivo, torna-se assim uma atividade. A necessidade, segundo Petrovski (1986) é um estado da pessoa que manifesta dependência das suas condições de existência e a estimula para a sua atividade. Assim, o desenvolvimento das necessidades está sujeito à atividade humana. Ainda conforme o autor, quando o homem está em contato com a cultura humana, suas necessidades são desencadeadas no desenvolvimento de sua educação. No homem, "o processo de satisfação das necessidades se manifesta como um processo ativo, com um fim determinado e com um processo que possui uma forma de atividade desenvolvida socialmente" (PETROVSKI, 1986, p. 95)

Segundo Leontiev (2001), é a atividade que determina o que o homem é, bem como seu desenvolvimento. Após a manifestação de uma necessidade surge a atividade, a qual se desencadeia por meio de um objeto que coincide com o motivo. Para explicar melhor esse processo de atividade ou não, tomemos como exemplo um estudante que, para se organizar para fazer um exame, deve realizar a leitura de um livro.

> Admitamos que um colega de nosso estudante lhe diga que o livro que está lendo não é absolutamente necessário para o exame. Poderá então ocorrer o seguinte: o estudante poderá então ocorrer o seguinte: o estudante poderá imediatamente pôr o livro de lado, poderá continuar sua leitura ou talvez desistir da leitura com relutância, com pena. Nos dois últimos casos é óbvio que aquilo que dirigiu o processo de leitura, isto é, o conteúdo do livro, estimulou por si mesmo o processo, em outras palavras o conteúdo do livro foi o motivo. Dizendo de outra forma, alguma necessidade especial do estudante obteve satisfação no domínio do conteúdo do livro – uma necessidade de conhecer, de entender, de compreender aquilo de que tratava o livro. (LEONTIEV, 2014, p. 68)

Então, se o estudante estudar, decorando o conteúdo, tão somente com a finalidade de ir bem no exame, seu motivo não irá coincidir com o objeto, que, nesse caso, seria apropriar-se do conhecimento expresso no texto e, assim, a leitura não será uma atividade. Mas, se ele estudar, almejando aprender o conteúdo e assim ir bem no exame, o motivo coincidirá com o objeto. Nessa situação, para Leontiev, a preparação para o exame é a atividade, e a leitura do livro, de maneira isolada, trata-se de uma ação referente à atividade. Contudo, as maneiras como os sujeitos se apropriam de sua experiência resultam em um processo de transformação do objeto e também do sujeito. O sujeito, quando realiza uma atividade, atribui sentido para as ações que desenvolve e, assim, o desenvolvimento do sujeito é promovido pelos sentidos pessoais quando correspondem aos motivos e aos significados sociais da atividade. (LEONTIEV, 1978)

Leontiev (1983) diz que estamos sempre na presença de atividades específicas, e que cada atividade corresponde a uma determinada necessidade que o sujeito possui. Para satisfazer essa necessidade, o sujeito acaba buscando um objeto para supri-la. Há, ainda, segundo o referido autor, uma diferença entre a necessidade como uma condição interna e a necessidade que impulsiona e regula a atividade. A necessidade como uma condição interna é quando ela acontece de maneira isolada, a necessidade demonstra não ser capaz de provocar nenhuma atividade sozinha.

Já a necessidade que impulsiona e regula a atividade promove isso no sujeito em relação ao mundo dos objetos, pois o sujeito se torna apto a conduzir e a regular a atividade, ao descobrir o objeto. Assim, as necessidades são capazes de conduzir e estimular a atividade, mas elas apenas estão habilitadas a realizar essas funções de acordo com as condições objetivas do sujeito. As necessidades são condições essenciais para que o homem possa agir e, assim, propulsionar o seu desenvolvimento.

> Os homens não fazem senão adaptar-se à natureza. Eles modificam-se em função do desenvolvimento das suas necessidades. Criam os objetos que devem satisfazer as suas necessidades e igualmente os meios de produção destes objetos, dos instrumentos às máquinas mais complexas. Constroem habitações, produzem as suas roupas e outros bens materiais. Os progressos realizados na produção de bens materiais são acompanhados pelo desenvolvimento da cultura dos homens; o seu conhecimento do mundo circundante e deles mesmos enriquece-se desenvolvem-se a ciência e a arte. (LEONTIEV, 1978, p. 265)

A característica essencial para que ocorra a atividade é o objeto. Há duas formas, segundo Leontiev (1983) do objeto se manifestar: modificando a atividade do sujeito através de sua existência e como sua imagem, tal como produto de seu reflexo psíquico. Sendo assim, o objeto é capaz de discernir uma atividade de outra, "o objetivo da atividade é motivo real" (LEONTIEV, 1983, p. 83). A partir desse exposto, podemos entender que o conceito de atividade está associado ao conceito de motivo, pois sem um motivo não há atividade. Tal como, "se as necessidades são a essência, o 'mecanismo' de todos os tipos de atividades humana, os motivos atuam como manifestações concretas da essência" (PETROVSKI, 1986, p. 100). Portanto, existe a atividade se existir um objeto, uma necessidade, e também um motivo. O termo "motivo" segundo Leontiev (1978) foi usado para indicar fenômenos diferentes, como os impulsos instintivos, os apetites biológicos, as vivências emotivas, interesses e desejos.

> A primeira condição de toda a atividade é uma necessidade. Todavia, em si, a necessidade não pode determinar a orientação concreta de uma atividade, pois é apenas no objeto da atividade que ela encontra sua determinação: deve, por assim dizer, encontrar-se nele. Uma vez que a necessidade encontra a sua determinação no objeto (se "objetiva" nele), o dito objeto torna-se motivo da atividade, aquilo que o estimula. (LEONTIEV, 1978, p. 105 – 106)

A atividade é gerada por necessidades, e os motivos são quem fomenta essa atividade, sendo que são as condições objetivas e sociais do indivíduo que determinam os meios para a satisfação das necessidades. Leontiev (1978, p. 97) diz que o termo "motivo" deve ser utilizado "para designar o sentimento de uma necessidade, ele designa aquilo que a necessidade se concretiza de objetivo nas condições consideradas e para as quais a atividade se orienta, o que estimula". Porém, na atividade, existem diferentes motivos, denominados por Leontiev (2014, p. 70) como motivos compreensíveis e motivos eficazes. Os motivos compreensíveis ou motivos-estímulo são aqueles motivos impulsionantes; e os motivos eficazes ou geradores de sentido são aqueles que dão um sentido pessoal à atividade.

Algumas vezes, os motivos que, primordialmente, são compreensíveis podem converter-se em motivos eficazes. Binsfeld (2019) exemplifica com o caso de um estudante que precisa fazer um texto para a sua instituição de ensino. O estudante começa fazendo o texto porque é sua obrigação com a instituição onde estuda, porém, ao passar o tempo, ele passa a fazer o texto por conta própria, o que revela que ele tem um motivo eficaz para escrever o seu texto.

No início da situação o motivo que era compreensível passou a ser um motivo eficaz e, assim, impulsionou o aprendizado do estudante. Leontiev (1983, p. 167) diz que "dentro da estrutura de certa atividade um motivo dado pode assumir a função de conferir sentido; e dentro de outra, a função de uma estimulação complementaria". A atividade está ligada e direcionada por motivos e necessidades. Será uma atividade quando o objeto coincidir com o motivo, mas quando acontece o contrário, ou seja, o objeto não coincidir com o motivo, este processo será intitulado ação.

Assim, Perlin (2018, p. 93) diz que "para cumprir as metas oriundas do motivo, é necessário estabelecer objetivos que permitirão a criação de uma estratégia, ou seja, um plano de ação para alcançá-los". Portanto, nem toda ação realizada pelo sujeito poderá se transformar em atividade. A diferença entre ação e atividade é que "um ato ou ação é um processo cujo motivo não coincide com seu objetivo, (isto é, com aquilo para o qual ele se dirige), mas reside na atividade da qual ele faz parte" (LEONTIEV, 2014, p. 69). Com isso, o objetivo de uma ação de maneira isolada não incentiva o sujeito a agir. As ações são elementos fundamentais da atividade, pois elas estão subordinadas a um objetivo consciente, subordinadas à representação do resultado que deverá ser alcançado (BOROWSKY, 2017).

Fundamenta a TA a ideia de que o homem, para produzir meios de sobrevivência, percebe a necessidade de designar um contato com o mundo exterior, no qual essas necessidades são supridas por meio das atividades em que realiza, e dessa forma ocorre o desenvolvimento das funções psíquicas. Portanto, o desenvolvimento do indivíduo é determinado pelas atividades que realiza (LOPES, 2009). Por meio da atividade em que realiza, Leontiev (1978) destaca que durante o seu desenvolvimento o sujeito passa por alguns estágios, que vão da fase antes da escola até depois da escola. Segundo o referido autor, os estágios de desenvolvimento do psiquismo da criança são: infância pré-escolar, período escolar e adolescência.

A criança, quando entende as relações humanas presente no mundo, está na sua infância pré-escolar. O período escolar está atrelado ao fato de ela entrar no mundo da escola e, assim, começar a sentir as obrigações impostas pela escola e pela sociedade. A adolescência refere-se aos novos interesses do sujeito e a sua inserção nas formas de vida social. Estes estágios são etapas que designam a transformação do desenvolvimento da criança em um membro da sociedade (LEONTIEV, 2012), contudo esses estágios de desenvolvimento são determinados por seu conteúdo, e não pela idade da criança. Deste modo,

> O que determina diretamente o desenvolvimento da psique de uma criança é a sua própria vida e o desenvolvimento dos processos reais desta vida – em outras palavras: o desenvolvimento da atividade da criança, quer a atividade aparente, quer a atividade inteira. Mas seu desenvolvimento, por sua vez, depende de duas condições reais de vida. (LEONTIEV, 2012, p. 63)

O estágio de desenvolvimento do psiquismo da criança é determinado pelas distintas atividades realizadas pelo ser humano, ou seja, quando a criança passa para outro estágio de desenvolvimento, a atividade dela também muda. Essas diferentes atividades determinam aquela que é principal ou dominante (FRAGA, 2017). Assim, em cada fase da vida da criança, existirá uma atividade principal ou dominante, que orienta o sujeito em seu desenvolvimento e "configura o lugar social ocupado pelo sujeito na atividade humana, esta compreendida segundo o desenvolvimento sócio-histórico" (MOURA et al., 2017, p. 192). Aos poucos, o sujeito em atividade vai se apoderando dos conhecimentos humanos por meio da conexão existente em cada estágio de desenvolvimento, e seus processos psíquicos também são transformados por meio das suas relações com o mundo.

> [...] cada estágio do desenvolvimento psíquico caracteriza-se por uma relação explícita entre a criança e a realidade principal naquele estágio e por um tipo preciso e dominante de atividade. O critério da transição de um estágio para outro é precisamente a mudança do tipo principal de atividade na relação dominante da criança com a realidade (LEONTIEV, 2014, p. 64)

Segundo Leontiev (1978), as mais relevantes mudanças nos processos psíquicos do ser humano e suas peculiaridades relativas a um determinado estágio de desenvolvimento são condicionadas pela atividade principal ou dominante. Por meio da atividade principal, o sujeito vai apossando-se de fenômenos e objetos, transformando-se ainda mais sociável e assim, vai fazendo conexões entre o conhecimento e sua vida social. "A atividade principal é então a atividade cujo desenvolvimento governa as mudanças mais importantes nos processos psíquicos e nos traços psicológicos da personalidade da criança, em um certo estágio de seu desenvolvimento" (LEONTIEV, 2001, p. 65).

> A atividade principal é então a atividade cujo desenvolvimento governa as mudanças mais importantes nos processos psíquicos e nos traços psicológicos da personalidade da criança, em um certo estágio de seu desenvolvimento. (LEONTIEV, 2001, p. 65)

Para que realmente no desenvolvimento da criança a atividade seja principal, é necessário elencar alguns atributos necessários neste processo. O primeiro diz respeito à sua forma de surgir no interior do psiquismo, ou seja, dentro desta atividade podem surgir outras atividades, como por exemplo, quando a criança se desenvolve porque aprendeu algo que é novo para ela. O segundo atributo refere-se à formação de novos processos psíquicos, como quando o sujeito começa a ser ensinado de maneira formal, em que por outra atividade ele consegue apropriar-se de conhecimentos (FRAGA, 2017). Já o terceiro concerne a um certo momento do estágio de desenvolvimento da criança, quando são compreendidas as elementares mudanças psicológicas da personalidade, como por exemplo, uma criança que usa de sua imaginação e consegue captar funções sociais de outras pessoas ou personagens em seu enredo.

Desse modo, a atividade principal ou dominante em cada estágio desencadeia no sujeito importantes mudanças nas fases do desenvolvimento psíquico e, assim, algumas vezes são dominantes ou principais, porque em certo momento tem mais importância para o desenvolvimento das funções psíquicas, em outro momentos menos importância. A atividade principal não pode ser vista como a soma de atividades (LEONTIEV, 1983), pois ela tem como função o papel de organizar o desenvolvimento da personalidade. Por meio de sua atividade principal que está presente nos estágios de desenvolvimento, o sujeito consegue apoderar-se dos fatos ao seu redor, e a mudança de atividade principal do sujeito acarreta na transição do mundo escolar para o mundo do trabalho. Segundo Leontiev (1978), em cada fase da vida existem algumas atividades que promovem o desenvolvimento do sujeito, e ele menciona as três principais atividades que corroboram com essa ideia: o jogo, o estudo, e o trabalho.

O período da infância da criança tem como atividade principal o jogo. Neste ciclo, a criança começa a perceber as coisas e as pessoas que estão à sua volta. O brincar neste ciclo da criança também é essencial, pois nesta fase ocorrem fundamentais mudanças em seu desenvolvimento, desencadeando curiosidades, compreensões e novos saberes. Por intermédio da brincadeira, é possível desencadear a imaginação, portanto é muito importante propor um ensino que tenha o lúdico como parâmetro para promover o as funções psicológicas superiores da criança.

Quando a criança ingressa na escola, a sua atividade principal é o estudo. Nesta fase, a criança começa a perceber as tarefas que precisa desenvolver com a família e também com a escola. Assim, nessa fase, cabe favorecer o desenvolvimento e a aprendizagem dos conceitos científicos no sujeito, que fazem parte da atividade de estudo do ambiente escolar. A partir do nível dos conceitos espontâneos da criança, os conceitos específicos começam a se desenvolver, sendo que

> O desenvolvimento dos conceitos científicos começa justamente pelo que ainda não foi plenamente desenvolvido nos conceitos espontâneos ao longo de toda a idade escolar. Começa pelo trabalho com o próprio conceito como tal, pela definição verbal do conceito, por operações que pressupõem a aplicação não espontânea desse conceito (VIGOTSKI, 2009, p. 345)

O sujeito, ao inserir-se na sociedade e ter como sua atividade principal, o trabalho, ele começa a ser percebido como adulto. Ao pensarmos no trabalho, mais especificamente ao do professor, temos que o trabalho do professor está relacionado à sua atividade, a qual, quando voltada ao objeto-ensino e movida por necessidades e motivos, a aprendizagem da docência alcança o caráter de atividade (RIBEIRO, 2011).

Sendo que o aprendizado propicia novos conhecimentos ao estudante e, assim acaba proporcionando o desenvolvimento de coisas novas, a tarefa do professor é dar condições e intencionalidade ao ensino proposto, pois

> A aprendizagem dota a pessoa de conhecimentos, hábitos e destrezas necessários para os distintos tipos de atividade socialmente útil. Forma também na pessoa a destreza para dirigir seus próprios processos psíquicos, de selecionar, organizar e dirigir suas ações e operações, hábitos e experiências em correspondência com a tarefa de resolver. De tal maneira que a aprendizagem prepara a pessoa para o trabalho. (PETROVSKI, 1980, p. 167)

Entendendo o trabalho do professor como propulsor da aprendizagem dos estudantes e que sua atividade principal está atrelada à sua atividade de ensino, um dos focos de nosso trabalho é desencadear, a partir da formação inicial dos futuros professores que ensinam matemática nos anos iniciais, ações que incentivem o seu trabalho docente. Deste modo,

> A atividade de ensino, como materialização dos objetivos e conteúdos, define uma estrutura interativa em que os objetos determinam conteúdos, e estes por sua vez concretizam esses mesmos objetivos na planificação e desenvolvimento de atividades educativas. [...] Foi portanto, a vida quotidiana que definiu este objetivo como significativo. Daí até a definição de um conjunto de estratégias para possibilitar o acesso ao novo conhecimento não precisou muito. (MOURA, 1996, p. 30)

Segundo Davídov (1982), o conhecimento teórico, ao ser adquirido pela criança, acaba estruturando a construção do seu pensamento teórico e então acarretando o seu desenvolvimento psíquico, portanto a atividade de ensino deve ter seu principal objetivo integrado ao conhecimento teórico, para que a escola proporcione a constituição do pensamento teórico. Mais especificamente ao ensino de álgebra, ênfase de nossa pesquisa, em relação ao conhecimento algébrico “há de se considerar que é essencialmente um conhecimento científico e que, portanto, com ele se pode trabalhar prioritariamente o pensamento teórico” (SOUSA; PANOSSIAN; CEDRO, 2014, p. 64).

A álgebra, ao ser compreendida pelo estudante, passa a dar a ele um olhar mais geral e abstrato das relações numéricas, eleva o raciocínio e generalizações, bem como é “necessária dos conhecimentos gerais que os sujeitos necessitam para viver em sociedade” (MACGREGOR, 2004 apud SOUSA; PANOSSIAN; CEDRO, 2014, p. 64). A álgebra se faz necessária no desenvolvimento psicológico dos estudantes, assim, se faz essencial pensar em ações que efetivem nos estudantes a compreensão dos conceitos da álgebra e a formação de seu pensamento algébrico, para que este seja visto como um pensamento teórico.

> Uma operação é o conteúdo necessário de qualquer ação, mas não é idêntico a ela. Uma mesma ação pode ser efetuada por diferentes operações e, inversamente, numa mesma operação podem-se, ás vezes, realizar diferentes ações: isso ocorre porque uma operação depende das condições em que o alvo da ação é dado, enquanto uma ação é determinada pelo alvo (LEONTIEV, 2014, p. 74)

Essas ações referentes à organização do ensino que devem ser elaboradas pelo professor fazem parte da sua atividade. Um dos elementos da atividade é a operação, podendo ser definida como o ato do sujeito executar a ação. As operações são os modos de execução de uma ação. Por exemplo, em relação aos valores do seno, cosseno e tangente dos ângulos notáveis de 30.º, 45.º e 90.º. Como minha ação será a memorização desses valores, então posso proceder de algumas formas: em um primeiro caso, posso memorizar a partir de algum certo macete (música por exemplo) em que eu consiga relacionar esse macete com os valores dos ângulos, ou, em um segundo caso, poderia escolher escrever todos esses valores em uma folha. Nesses dois casos apresentados, a ação proposta era a memorização dos valores do seno, cosseno e tangente dos ângulos notáveis, porém, para realizar essa ação, as duas maneiras poderiam ser escolhidas, ou seja, as operações seriam diferentes.

A atividade pode ser entendida como o movimento entre objeto e objetivo, ou seja, o objeto deve coincidir com o motivo. A estrutura da atividade é orientada por motivos e por necessidades e, assim, são os motivos que induzem a atividade. Ainda, os objetivos orientam as ações, nas quais estas materializam a atividade por meio das ações e das condições objetivas e subjetivas. Para que a aprendizagem se consolide como atividade para os alunos, é responsabilidade do professor orientar e organizar o ensino de modo que isso seja concretizado. Assim,

> [...] a intencionalidade do professor acerca da objetivação de sua atividade – o ensino-, aliada às ações e operações para propiciar a aprendizagem de um conceito, desencadeia os processos de reflexão, análise e síntese por parte do professor ao interagir com os estudantes, o que poderá dar nova qualidade ao seu modo geral de organizar sua Atividade Pedagógica. (MOURA et al, 2017, p. 72)

Em síntese, as ações do professor devem desencadear nos alunos a necessidade da apropriação dos conceitos e, dessa forma, os motivos devem coincidir com o objeto de estudo. Com relação ao ensino e à aprendizagem da matemática, um dos caminhos para isso é a Atividade Orientadora de Ensino, proposta por Moura, cujos alguns pressupostos traremos a seguir.

3.3 ATIVIDADE ORIENTADORA DE ENSINO

Com o enfoque voltado ao ensino e à aprendizagem e pautada nos pressupostos da Teoria Histórico-Cultural - THC e Teoria da Atividade - TA, a Atividade Orientadora de Ensino – AOE, proposta por Manoel Oriosvaldo de Moura (1996, 2010), se caracteriza como um processo educativo que procura estabelecer a relação entre a atividade do professor e a atividade do estudante, bem como a estruturação do ensino e o compartilhamento das ações. As possibilidades de uma organização do ensino que desenvolva no professor e no aluno a aprendizagem e, que promova no aluno a atividade de estudo e no professor a atividade de ensino, também são pressupostos basilares da AOE, considerada uma proposta teórica e metodológica.

Por ter seus pressupostos, pautados na THC, e assim se preocupar com o desenvolvimento tanto do professor e como do estudante, a AOE caracteriza-se como uma proposta teórica e metodológica, por discorrer sobre uma maneira de organizar o ensino. A estrutura da AOE se assemelha à estrutura de Leontiev, a qual, aponta uma necessidade que está atrelada à apropriação da cultura; um motivo que compreende a necessidade como apropriação de conhecimentos; o objetivo que envolve o ensinar e o aprender; e as operações, que indicam as maneiras de produzir as ações. Assim,

> Chamamos de *atividade orientadora de ensino* aquela que se estrutura de modo a permitir que os sujeitos interajam, mediados por um conteúdo negociando significados, com o objetivo de solucionar coletivamente uma situação problema. [...] A *atividade orientadora de ensino* tem uma necessidade: ensinar; tem ações: define o modo ou procedimentos de como colocar os conhecimentos em jogo no espaço educativo; e elege instrumentos auxiliares de ensino: os recursos metodológicos adequados a cada objetivo e ação (livro, giz, computador, ábaco etc). E por fim, os processos de análise e síntese, ao longo da atividade, são momentos de avaliação permanente para quem ensina e aprende. (MOURA, 2001, p. 155)

A definição do nome Atividade Orientadora de Ensino vem do fato de ela partir de uma necessidade que orienta as ações do professor e do estudante por meio da apropriação dos conhecimentos científicos na condução ao desenvolvimento do pensamento teórico. A partir dos conhecimentos produzidos historicamente, "fica muito difícil se referir ao conhecimento humano, sem considerar o desenvolvimento lógico-histórico que se apresenta nos conceitos lógicos – formais que ensinamos e aprendemos diariamente" (LANNER de MOURA; SOUSA, 2004, p. 2). Sendo assim, o principal objetivo do ensino organizado, tendo como base a AOE, é promover a aprendizagem dos estudantes a partir do desenvolvimento das funções psíquicas e da humanização do sujeito. Assim, a AOE

> [..] respeita os diferentes níveis dos indivíduos e que define um objetivo de formação como problema coletivo é o que chamamos de atividade orientadora de ensino. Ela orienta um conjunto de ações em sala de aula a partir de objetivos, conteúdos e estratégias de ensino negociado e definido por um projeto pedagógico. Contém elementos que permitem à criança apropriar-se do conhecimento como um problema. E isto significa assumir o ato de aprender como significativo tanto do ponto de vista psicológico, quanto de sua utilidade. (MOURA, 1996, p. 32)

Para gerar a aprendizagem de um novo conceito, o ensino, embasado na AOE, busca desencadear de forma coletiva, por meio da resolução de uma situação-problema ou problema desencadeador de aprendizagem, a apropriação do conceito. Com isso, pelo ensino intencional do professor, ao organizar suas ações docentes em relação ao novo conceito que busca ensinar, a escola é o lugar em que o estudante converterá seus conhecimentos espontâneos em conhecimentos específicos, ou seja, aqueles conhecimentos que o sujeito aprendeu por meio da interação com outras pessoas passará a ser de superior qualidade.

Deste modo, a organização do ensino

> [...] é uma atividade em que os conhecimentos teóricos constituem seu conteúdo principal. A atividade orientadora de ensino, por sua vez, torna-se o modo geral de organização que contempla a situação coletiva e a gênese do conceito, as quais são objetivadas na situação desencadeadora de aprendizagem. Seu objeto é a transformação dos indivíduos no processo de apropriação dos conhecimentos teóricos. (CEDRO et al, 2010, p. 440)

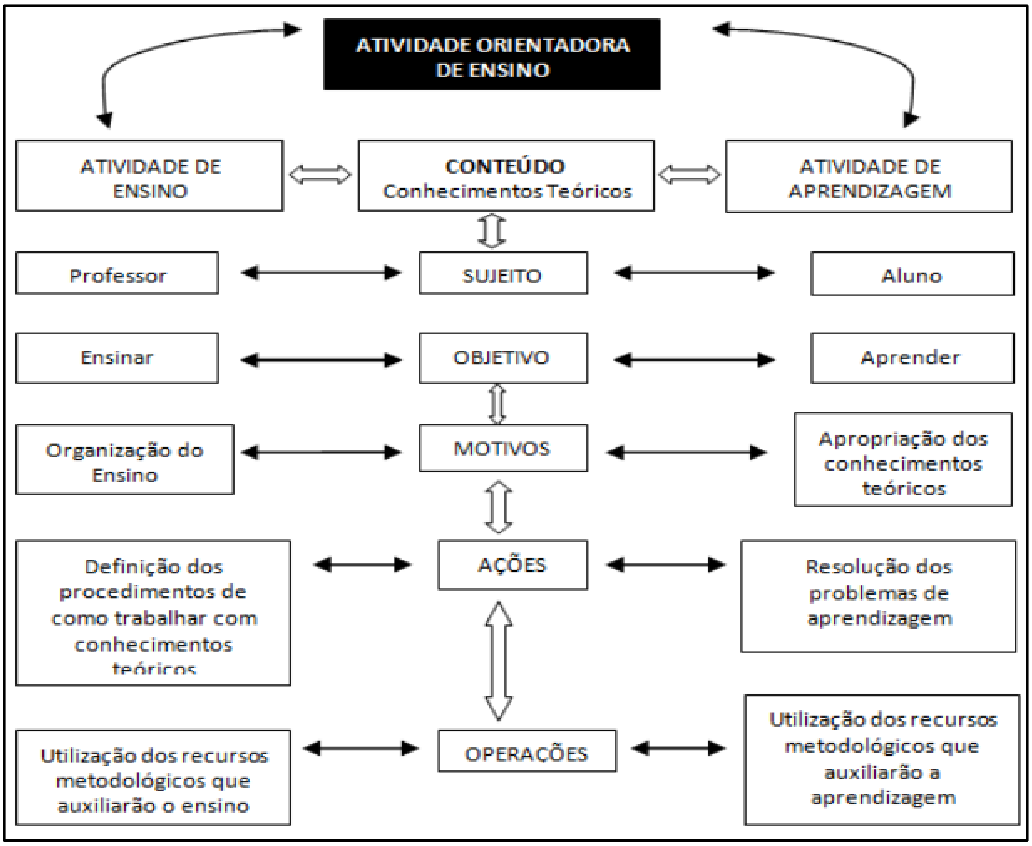
A partir do movimento lógico-histórico do conceito, o professor organiza o ensino, procurando contemplar a essência desse conceito em situações-problema que mobilizem os estudantes a solucioná-las e, assim, chegar ao conceito, desencadeando, portanto, a aprendizagem. Ao encaminhar as ações tencionando a aprendizagem dos estudantes, o professor lhes possibilitará desenvolver suas funções psicológicas superiores. Por essa razão, a atividade de ensino e a atividade de estudo fazem parte da atividade pedagógica, visto que o professor pode levar aos estudantes a apropriação das criações construídas pela humanidade, bem como a apropriação dos conhecimentos científicos. Assim, para que a aprendizagem se efetive "e se constitua como atividade, a atuação do professor é fundamental na relação do estudante com o objeto de conhecimento, orientando e organizando o ensino" (MOURA et al., 2010, p. 94). Nesta perspectiva,

> A intencionalidade do professor para realizar o ensino é o seu ponto de partida como trabalhador que estabelece seu plano de ação mediante seu conhecimento sobre o objeto idealizado: tem os pressupostos teóricos, define ações sustentadas por esses pressupostos, elege instrumentos mediadores dessas ações e, ao agir, em processo de análise e síntese, objetiva a sua atividade (MOURA et al, 2017, p. 84)

O ponto de partida para a realização do ensino decorre da intencionalidade do trabalho do professor, de modo que suas ações, de forma intencional na organização do conteúdo, visem orientar o processo de desenvolvimento que ele constitui. Dessa forma, segundo Moura (2001, p. 144) "ter a profissão de professor é organizar situações cujos resultados são as modificações dos sujeitos a quem intencionalmente visamos modificar" e, para isso, a ação docente é primordial nesse movimento de ensino e aprendizagem.

Neste processo de mobilização do professor e do aluno em razão do conhecimento, seja na atividade do professor seja na do estudante, ambos "são sujeitos em atividade e como sujeitos se constituem indivíduos portadores de conhecimentos, valores e afetividade, que estarão presentes no modo como realizarão as ações que têm por objetivo um conhecimento de qualidade nova" (MOURA et al., 2010, p. 97). Logo professor e estudante, ao estarem em atividade, desenvolverão suas funções psicológicas ao produzirem novos conhecimentos. Em assim sendo, a AOE visa orientar o professor na organização dos conteúdos do ensino, tendo como finalidade desencadear a aprendizagem dos estudantes. A partir da necessidade do professor em consolidar condições para a aprendizagem, a AOE busca concretizar formas de realização do ensino e aprendizagem dos estudantes, tomando a dimensão de mediação, no qual os sujeitos, ao agirem em um espaço de aprendizagem, se constituirão sujeitos de qualidade nova e, assim, acabam se modificando (MOURA, 2016). Logo, a AOE tem em sua proposta a ação mediadora entre ensino e aprendizagem, como mostra a Figura 14.

Figura 14: AOE como mediadora entre o ensino e aprendizagem



Fonte: Moura et al, 2010, p. 98

Para que a aprendizagem seja uma atividade para os estudantes, o papel do professor como mediador é essencial. Sendo assim, para que a aprendizagem ocorra, o ensino deve ser planejado de forma sistemática e intencional (MOURA et al., 2010). Cumpre aos professores definir suas ações em relação ao ensino proposto por ele e às operações que escolherá para realizar essas ações.

Sobre o processo de ensinar e aprender do professor, Moura (1996) diz que a partir do momento em que o professor se constituir como sujeito da atividade, isto é, como aprendente, a atividade orientadora de ensino se converterá em atividade de aprendizagem para o professor. O estudo contínuo do professor, do mesmo modo, faz parte do processo da atividade de aprendizagem dele, visto que cada vez que ele se apropria de novos conhecimentos, além de se modificar, consegue por meio do planejamento e do desenvolvimento de suas ações, modificar também a personalidade dos estudantes.

> [...] o professor em atividade de ensino é parte de um processo de concretização de seu motivo e, ao agir de forma reflexiva, por meio da avaliação que realiza, poderá produzir sínteses sobre modos de ação potencialmente de melhor qualidade do que aqueles antes realizados. Nesse processo, conteúdos de ensino também poderão ser redimensionados, bem como poderão ser buscadas novas maneiras de interação entre professor e estudante. (MOURA, et al., 2017, p. 90)

Por meio da educação escolar e dos conhecimentos propostos, o professor, ao criar condições de ofertar aos estudantes um ensino que lhes possibilite a apropriação dos conceitos, acaba dando sentido ao seu próprio conhecimento científico, acarretando no aprimoramento de sua ação docente. Uma maneira geral de auxiliar o professor a organizar o ensino por meio da AOE, para que aconteçam a atividade de ensino do professor e a atividade de aprendizagem do aluno, é apropriar-se dos seus três elementos principais: a Síntese Histórica, a Situação Desencadeadora de Aprendizagem – SDA e a Síntese da Solução Coletiva.

A Síntese Histórica trata do processo de estudo do professor sobre o movimento lógico-histórico do conceito a ser trabalhado. Entendendo que o conceito teve um percurso histórico de desenvolvimento, e que, as necessidades e os problemas cotidianos do homem foram sanados por meio da criação de formas que facilitassem os seus modos de vida, concluímos que os conceitos matemáticos impulsionaram a história da humanidade. Dentro da AOE, a dimensão histórica do conceito é apontada como uma das formas de perceber o processo sociocultural do conceito (CEDRO, 2004). O conceito é considerado como algo cultural, inserido na história do desenvolvimento humano. Sendo assim, o aspecto pedagógico e a contribuição social do conceito devem abranger a síntese histórica.

O professor, para planejar e organizar o ensino por meio da AOE, precisa buscar a síntese do conceito, ou melhor, tendo o professor compreendido a essência desse conceito, tendo conhecidas as motivações para a sua construção e seu desenvolvimento, ele estará apto para organizar a Situação Desencadeadora de Aprendizagem, já que, “ao organizar o processo de ensinar, também qualifica seus conhecimentos, por isso, a base de organização dessas ações (AOE) constitui a unidade de formação do professor e do estudante”(CEDRO et al., 2010, p. 440). Nessa ótica, o professor tem em sua atividade docente a função de preparar o ensino, mas para tanto ele precisa não só estudar o conceito a ser trabalhado, mas também selecionar e organizar as ações a serem desenvolvidas.

O problema desencadeador da SDA deve proporcionar ao estudante a apropriação do conceito, mobilizá-los a solucionar a situação de forma interativa e coletiva, para que a solução provoque, assim, a aprendizagem. Este problema, ao ser apresentado aos estudantes, deve conter o movimento lógico-histórico do conceito, deve propor ao estudante que ele compreenda a história e as necessidades do surgimento do conceito, para que assim consiga apropriar-se do conceito estudado.

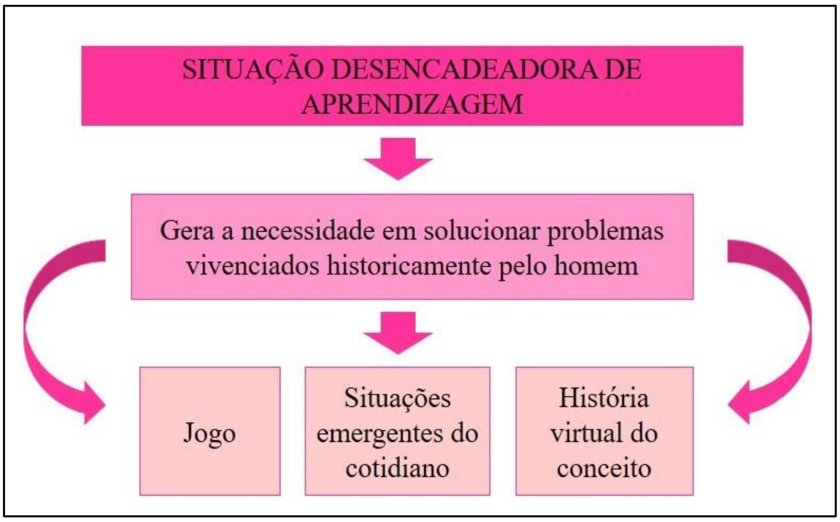
> A situação desencadeadora de aprendizagem deve contemplar a gênese do conceito, ou seja, a sua essência; ela deve explicar a necessidade que levou a humanidade á construção do referido conceito, como foram aparecendo os problemas e as necessidades humanas em determinada atividade e como os homens foram elaborando as soluções ou sínteses no seu movimento lógico-histórico. (MOURA, 2010, p. 223)

Alguns instrumentos metodológicos auxiliam organizar um estudo com base nas SDA, tais como o jogo, as situações emergentes do cotidiano e a história virtual do conceito, como pontuam Moura e Lanner de Moura (1998).

> O jogo com propósito pedagógico pode ser importante aliado no ensino, já que preserva o caráter de problema. [...] o que devemos considerar é a possibilidade de colocar a criança diante de uma situação-problema semelhante a vivenciada pelo homem ao lidar com conceitos matemáticos.
> [...]
> A problematização de situações emergentes do cotidiano possibilita à prática educativa oportunidade de colocar a criança diante da necessidade de vivenciar solução de problemas significativos para ela.
> [...]
> É a história virtual do conceito porque coloca a criança diante de uma situação problema semelhante áquela vivida pelo homem (sentido genérico). (MOURA; LANNER DE MOURA, 1998 apud MOURA, 2010, p. 224)

Sendo assim, a SDA, mantendo a essência do conceito, pode ser proposta de várias formas que mobilizem o estudante a apreender o conceito estudado, conforme podemos ver na Figura 15.

Figura 15: Formas de serem propostas as SDA



Fonte: Sistematização da autora

Conforme os pressupostos da Atividade Orientadora de Ensino, o jogo deve ser utilizado de maneira que proporcione aos alunos a sua aprendizagem em relação a algum conceito, e não seja apenas como forma de recreação. Neste caso, o jogo é um promotor do processo de aprendizagem do estudante, mas para tanto é preciso desencadear a necessidade do estudante de apreender um determinado conceito. As situações emergentes do cotidiano são aquelas que se fazem presente no dia a dia das pessoas, mais especificamente no dia a dia dos estudantes, professores, escola e outros. São aquelas que surgem de problemas cotidianos e são solucionadas por meio de conceitos matemáticos ou relacionadas com a matemática. Esta situação deve ser pensada de modo que "contribua para que o estudante possa compreender sua origem como decorrentes das necessidades humanas, o seu desenvolvimento histórico e lógico" (MOURA et al, 2017, p. 94).

A história virtual deve proporcionar aos estudantes um envolvimento ao solucionar a situação proposta, de tal modo que eles sintam uma necessidade, ao resolver o problema. Segundo Moura et al. (2017), a SDA deve ter o potencial para promover o surgimento do motivo da aprendizagem, – escrever uma carta, fazer uma dramatização, uma peça de teatro, um vídeos, entre outros – para que, ao desencadear a aprendizagem do sujeito, ele consiga se apropriar do conceito estudado. Contudo, a história virtual não diz respeito apenas aos meios digitais e assim

> [...] constitui-se de situações problema colocadas por personagens de histórias infantis, de lendas, ou da própria história da matemática como desencadeadoras do pensamento da criança, de maneira a envolvê-la na construção da solução de um problema, que faz parte do contexto da história, suscitando nela uma necessidade real, mesmo não sendo uma situação imaginária. A história é denominada virtual por não

> estar diretamente relacionada à realidade, embora ela represente uma situação problema real vivenciado pela humanidade (LOPES, VAZ, 2014, p. 1009)

O terceiro procedimento metodológico da AOE é a Síntese da Solução Coletiva. A partir da SDA, proposta pelo professor, a turma, no coletivo, deverá encontrar uma solução para o problema proposto, ou seja, em conjunto os estudantes procurarão uma resposta “matematicamente correta” para o problema desencadeador, mediados pelo professor. Neste momento da síntese, os estudantes darão suas ideias de como solucionar o problema, mas é pela interação e pelo compartilhamento de ideias que a turma, em geral, solucionará, conjuntamente, o problema. Portanto, ao elaborar o problema desencadeador, o professor deve ter em mente que ele deve ser planejado para que possa haver a interação entre os estudantes. Sendo assim, “a elaboração coletiva das atividades dará condições aos professores de utilizarem a teoria de modo apropriado, visando à busca da melhoria das condições de aprendizagem” (LOPES, 2009, p. 95).

Logo, a solução coletiva dos estudantes se dá pela síntese da resolução da Situação Desencadeadora de Aprendizagem proposta, pois “quando aos indivíduos são proporcionadas situações que exigem o compartilhamento das ações para a resolução de uma determinada situação que surgem em certo contexto” (MOURA et al., 2010, p. 106), promove-se, por meio das relações entre eles e entre eles e o professor, a aprendizagem do conceito trabalhado. Em suma, os três elementos principais constituintes da AOE tem como objetivo propiciar a interação entre o professor e o estudante, e assim colocá-los em atividade.

Em assim sendo, podemos perceber que os fundamentos teóricos e metodológicos da AOE contribuem tanto para a aprendizagem do estudante, quanto para a formação do professor. Acreditamos que AOE pode contribuir na formação do futuro professor de matemática – contexto desta pesquisa – e, consequentemente, na qualidade do ensino e da aprendizagem dos estudantes da Educação Básica, pois as ações propostas favorecem o desenvolvimento da aprendizagem dele em sala de aula e a mudança na forma de pensar a organização do ensino. No próximo item, trazemos algumas considerações sobre o trabalho do professor e a importância de sua formação inicial.

3.4 A ATIVIDADE DO PROFESSOR

No contexto educacional e social, cumpre ao professor, por meio de suas atividades desenvolvidas, objetivar e organizar ações que busquem contribuir no processo de formação do sujeito a quem ensina. Portanto seu papel se faz essencial tanto na escola como na sociedade, pois muito além de promover o ensino de conceitos científicos, o professor prepara o cidadão para a vida.

> Assim, além da formação como indivíduo e como sujeito social, a constituição do ser professor demanda o suprimento de especificidades características da função que lhe cabe desenvolver na composição da estrutura social. Sua essência consiste em possibilitar aos estudantes meios para a apropriação das objetivações das esferas não cotidianas. (MOURA et al, 2017, p. 185)

De acordo com as condições reais em que o ensino será realizado, o professor acaba se desenvolvendo, pois se coloca em um movimento de aprendizagem (MOURA et al., 2017). Ele orienta os estudantes e promove conhecimentos que acarretam no o desenvolvimento das funções psíquicas deles. Enfim, o professor em seu trabalho planeja suas ações, com base na sua necessidade de ensinar. Sendo assim, ao se referir ao trabalho, temos que este é

> [...] é a atividade orientada a um fim para produzir valores de uso, apropriação do natural para satisfazer as necessidades humanas, condição universal do metabolismo do homem e da Natureza, condição natural eterna da vida humana e, portanto, independente de qualquer forma dessa vida, sendo antes igualmente comum a todas as suas formas sociais (MARX, 2013, p. 153)

O trabalho do professor também é movido por ações que tencionam alcançar seu objetivo planejado, e as atividades são conduzidas por uma finalidade dentro do processo de constituição do trabalho. Desse modo, ao pensarmos no trabalho do professor, a sua atividade de ensino está relacionada à sua necessidade de planejar e organizar o ensino de maneira intencional, a qual “deve levar a uma metodologia de formação do professor que assegure a apreensão de vários elementos que a constituem como ação educativa: aspectos psicológicos, sociológicos, curriculares, didáticos e pedagógicos” (MOURA, 1996, p. 29).

O professor exerce o seu trabalho e assim configura-se como um trabalhador, por meio da sua atividade de ensino, pois “assumir que o professor é um trabalhador poderá nos fornecer os elementos necessários para entender sua atividade como resultado de ações de sujeitos que agem com algum objetivo” (MOURA et al., 2017, p. 74). A atividade de ensino do professor alcança o seu propósito através da atividade de aprendizagem do estudante, o qual, tendo como objeto coincidir a sua necessidade de organizar o ensino; e como objetivo, promover a aprendizagem dos estudantes, seu objeto coincide com o objetivo e assim configura-se em atividade. Ao pensar no trabalho do professor a partir dos pressupostos da THC,

> O homem se constitui pelo seu trabalho, entendendo este como uma atividade humana adequada a um fim e orientada por objetivos – ou seja, o professor constitui-se

> professor na atividade de ensino. Em particular, ao objetivar a sua necessidade e, consequentemente, de organizar para favorecer a aprendizagem. (MORETTI, 2007, p. 101)

A atividade de ensino viabiliza, no contexto escolar, a apropriação dos conceitos que foram desenvolvidos durante a história da humanidade de forma significativa, e assim, busca estimular no estudante a necessidade de aprender, o que decorre do desenvolvimento do pensamento teórico do estudante por meio da sua atividade de aprendizagem. Moura (2012) destaca que a atividade de ensino do professor implica uma intencionalidade da ação educativa, apropriando-se de ferramentas simbólicas que são capazes de permitir aos sujeitos viver em sociedade. Portanto, o professor trabalha em benefício de uma educação que propicie a apropriação dos conceitos teóricos dos estudantes e do desenvolvimento social deles. Referindo-se ao professor, para Gatti (1987)

> é sobre esses profissionais que repousa a responsabilidade de iniciar e encaminhar os cidadãos nas aquisições e construções de nossa cultura, de ajuda-los a adquirir as condições básicas de ter acesso a um conjunto de conhecimentos que lhes permitiria participar das sociedades humanas nas formas por elas assumidas neste final de século (p. 11)

Fazendo parte de um processo de humanização, o professor por meio do compartilhamento com os outros sujeitos vai apropriando-se do real significado de seu trabalho docente e, assim, vai se constituindo professor ao longo desse processo. Em um processo que se torna coletivo, através da interação com outros pares, o professor vai construindo sua atividade docente através do seu trabalho. Moura (2000) compreende que, ao considerar o professor como um trabalhador, ele é concebido como integrante de determinada cultura de trabalho, sendo dele exigida a mesma formação do trabalhador de outros setores da sociedade.

Portanto, pensar na formação do professor implica aspectos amplos, pois o sujeito não se torna professor apenas realizando as disciplinas de um curso de graduação. Ser professor é estar em um permanente processo de aprendizado, o qual vai se desdobrando ao longo de sua trajetória docente e de vida. Deste modo,

> [...] qualquer proposta de formação deve partir do pressuposto de que o aprender a ser professor é contínuo e necessita que o sujeito se aproprie de instrumentos que lhe permitam ir construindo e reconstruindo a sua aprendizagem ao longo do exercício de sua profissão [...] (LOPES, 2009, p. 44)

Reconhecendo a universidade como um dos espaços destinados à aprendizagem dos conhecimentos teóricos e também práticos, nossa pesquisa tem a intenção de desenvolver com acadêmicos de uma disciplina do curso de Pedagogia uma unidade didática na perspectiva de um experimento formativo referente à álgebra, para investigar possibilidades formativas para futuros professores que ensinam matemática nos anos iniciais. Sendo assim, nosso contexto é o da formação inicial de professores, uma vez que é nessa etapa que lhes deve ser ofertada a apropriação dos conhecimentos teóricos e práticos para saber ensinar, aprimorando, assim, o desempenho de sua ação docente. Segundo Ponte (2002)

> Se a formação não preparar o jovem professor para se inserir nas escolas que existem, com os seus alunos e suas culturas profissionais, corre o risco sério de formar inadaptados, professores que, ao assumirem funções e sentem completamente deslocados e inaptos para desempenhar o seu papel. Muitos deles podem mesmo abandonar o ensino. Se a formação não prepara os novos docentes para a mudança educativa e social, assume-se como mais uma força conservadora e, no fundo, complacente com os problemas existentes. (p. 3)

A formação inicial do professor é de extrema importância na qualidade do ensino e aprendizagem, seja na aprendizagem do futuro professor como estudante de um curso de graduação, seja no ensino que será proposto por esse futuro professor e que, posteriormente, reverberará na sua ação docente na escola. Estudando as ementas dos cursos de Pedagogia, Gatti (2010) percebeu que há uma desproporção entre a teoria e a prática, havendo, nas disciplinas voltadas à formação específica, pouca preocupação em relacionar teorias com as práticas e, inclusive no caso da matemática, há apenas uma breve associação com as práticas docentes. Assim, buscando a unidade entre a teoria e prática,

> Há uma intencionalidade – formar professores -, mas é possível ir adiante. É preciso ampliar e tomar a realidade do exercício profissional como prática social (como totalidade determinada e determinante da práxis). Tomar dialeticamente o campo de atuação enquanto totalidade, em todas as suas determinações, evidenciando as contradições presentes nessa realidade. O que implica ir para essa realidade que se quer instaurar (que o ensino é necessário e por quê; que o professor é necessário e com quais conhecimentos e habilidades). Implica dar suporte aos instrumentos de captação e análise do real (existente), para conhece-lo nas suas determinações, para identificar as possibilidades do novo, resultante do confronto entre o ideal (a realidade de que se quer) e o real (existente). Ou, como dissemos anteriormente, para adquirir novos conhecimentos é preciso agir conscientemente, de acordo com finalidades, sobre a realidade, prefigurando em ideias os resultados proveitosos esperados. (PIMENTA, 1995, p. 72)

O movimento entre teoria e prática que se estabelece na atividade pedagógica do professor pode ser entendido a partir do desenvolvimento de suas ações relacionadas à educação em seu trabalho docente, pois, por meio da sua atividade pedagógica, é possível concretizar a necessidade humana de apossar-se dos bens culturais, e assim, “o objeto da atividade pedagógica é a transformação dos indivíduos no processo de apropriação dos conhecimentos e saberes” (RIGON; ASBAHR; MORETI, 2010, p. 24).

Assim, entendendo que cabe ao professor gerar em seus alunos uma necessidade, um motivo de aprender, suas ações devem ser planejadas de maneira intencional, que corrobore o seu objetivo de gerar a aprendizagem, e assim, favorecer o desenvolvimento do estudante. Os modos de ação do professor, ao ter como sua necessidade o ensinar, caracterizam o social, pois “fazem uso dos resultados adquiridos por meio do trabalho de outras pessoas” (FRAGA, 2017, p. 38) que, desse modo, passam de geração em geração seus conhecimento e modos de ações, tornando eficazes os procedimentos que satisfazem as suas necessidades.

O trabalho do professor e o processo de escolarização se fazem fundamentais para a designação do sujeito no seu processo de apropriação de conhecimentos, em que a condução dos processos teóricos são desencadeados pelo processo educacional. Portanto, a educação escolar tem seu objetivo principal na transformação das pessoas em direção a um ideal humano superior (MARTINS, 2007). Nesta perspectiva de apropriação de conhecimentos, primeiramente se constituiu um processo que faz parte da formação do professor, e mais especificamente na formação inicial, sendo que

> [...] se a atividade principal do futuro professor é a de promover a atividade de aprendizagem de seus futuros alunos, nada mais oportuno que o professor aprenda sua profissão na perspectiva que irá ensinar aos seus alunos. Além disso, sendo correto entender que a base do ensino desenvolvimental é a estrutura psicológica da atividade, com base na qual são criadas tarefas para melhor promover a aprendizagem, será importante estabelecer as características da atividade profissional do professor, de modo que isso se constitua como referência para o currículo. (LIBÂNEO, 2004, p. 136)

A aprendizagem docente corrobora a ideia de que as mudanças na prática do professor são resultantes do movimento de apropriação dos conceitos e de suas ações pedagógicas, pois nos “processos de formação acadêmico-científicos, a chamada formação inicial, constituem a base para a apropriação de conteúdo inerente à atividade docente” (CEDRO, 2004, p. 67).

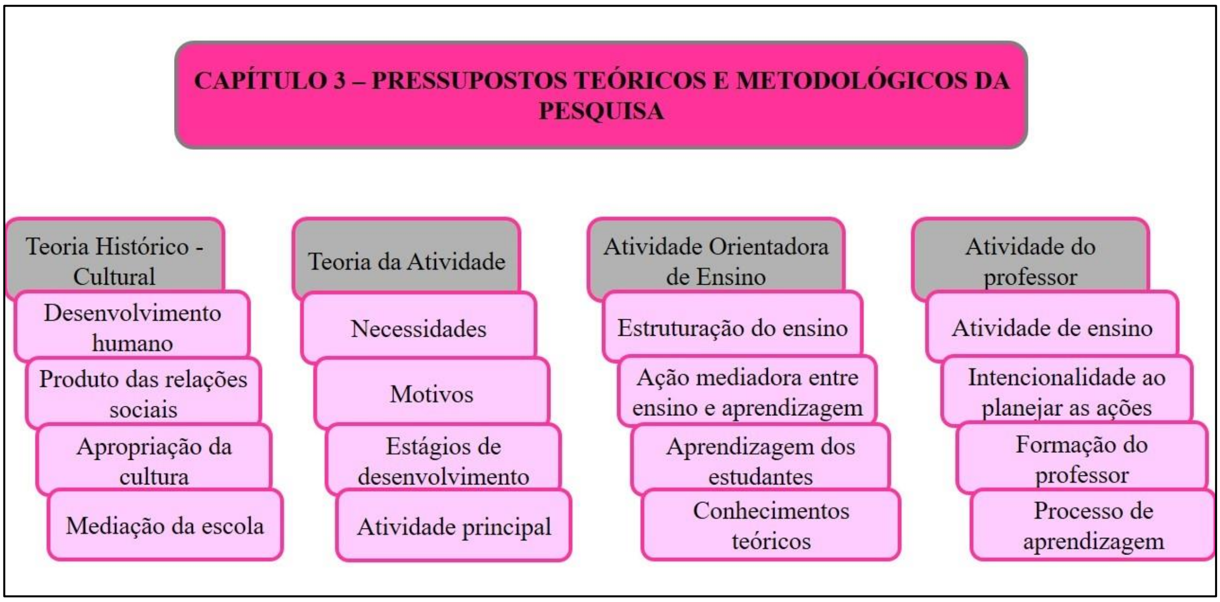
Ainda segundo Cedro (2004, p. 55), a formação do professor é vista como um processo de aprendizagem “que é realizado por meio de uma atividade que pressupõe a apropriação de todo o saber universal inerente ao ser humano”. Sendo assim, os elementos aliados á prática do professor articulam-se com os pressupostos da THC. A escola é o lugar de apropriação dos conhecimentos teóricos, e um dos lugares de mediação cultural para a escolarização (LIBÂNEO, 2004), onde deve ser desencadeado o processo de ensino e aprendizagem intencionalmente orientado pelo professor, Tendo em mente a importância da escola no processo educacional, bem como no desenvolvimento da formação do professor, Borowsky (2017) destaca que, quando constituídos pelos e com os professores, os momentos de reflexão na escola favorecem o desenvolvimento das ações educativas no trabalho docente, e assim representa um espaço de formação profissional e pessoal. Portanto, a função da escola vai muito além do ensino e da aprendizagem dos conhecimentos científicos, é também por meio dela que os sujeitos assimilam a cultura.

Em sendo assim, ao pensar nas ações docentes do professor, sua formação tem grande relevância no ensino e na aprendizagem de seus alunos, pois cabe a ele organizar o trabalho educativo para promover novos conhecimentos, pois o bom ensino garante nova aprendizagem e impulsiona desenvolvimento (VIGOTSKI, 1987).

Partindo da premissa de que a formação inicial do futuro professor é primordial para uma educação de qualidade e para alavancar a sua necessidade de aprender a organizar o ensino e alicerçados no embasamento teórico pautado na THC, buscamos com as ações de nossa pesquisa contribuir para o ensino e a aprendizagem dos conceitos algébricos de futuros professores e também para mostrar por meio de nossas situações desencadeadoras de aprendizagem, propostas que, ao serem planejadas e organizadas, podem ser desenvolvidas com os estudantes da Educação Básica.

O próximo capítulo será voltado para aspectos relacionados à metodologia da pesquisa, seus modos de desenvolvimento, ao contexto e aos sujeitos, bem como as situações de ensino propostas na disciplina de desenvolvimento da pesquisa.

Figura 16: Síntese do Capítulo 3



Fonte: Sistematização da autora

4 ORIENTAÇÃO METODOLÓGICA: OS CAMINHOS DA PESQUISA

> O método materialista histórico-dialético caracteriza-se pelo movimento do pensamento através da materialidade histórica da vida dos homens em sociedade, isto é, trata-se de descobrir (pelo movimento do pensamento) as leis fundamentais que definem a forma organizativa dos homens em sociedade através da história (PIRES, 1997, p. 83)

Pesquisar, segundo Bicudo (1993, p. 18) "configura-se como buscar compreensões e interpretações significativas do ponto de vista da interrogação formulada". Neste intuito, por meio da pesquisa, procuramos entender e compreender melhor alguma coisa ou circunstância, averiguar dimensões e sentidos ao que está sendo pesquisado. Este trabalho tem seu ponto de partida em inquietações voltadas ao ensino e à aprendizagem da álgebra nos anos iniciais do Ensino Fundamental, a partir de questionamentos como: é possível ensinar os conceitos algébricos básicos nos anos iniciais? Como é possível organizar o ensino de álgebra nesta etapa da Educação Básica?

Entendendo que por meio de sua atividade, de constante procura pela satisfação de suas necessidades, e de suas relações sociais e mediadas, o homem se constituiu, é pelo trabalho que "o indivíduo torna-se humano e ao longo de sua vida em sociedade, ao apropriar-se da essência humana, que é produto histórico-cultural" (RIGON; ASBAHR; MORETTI, 2010, p. 19). Deste modo, o processo de desenvolvimento do homem entrelaça-se à introdução dele nos meios sociais e, assim, na cultura, apropriando-se de seus valores e crenças. Sendo assim, a luz da THC o sujeito desenvolve-se por meio de relações sociais e culturais, e nesta perspectiva,

> [...] pesquisar em Educação significa investigar questões relacionadas aos seres humanos em seu próprio processo de humanização. Isso faz com que a pesquisa educacional compreenda uma diversidade de questionamentos de variadas conotações que tem em comum a relação com o desenvolvimento humano, das comunidades e da sociedade (CEDRO; NASCIMENTO, 2017, p. 13).

Tendo em mente que o ensino, quando organizado de maneira intencional promove o desenvolvimento das funções psicológicas superiores e que ele é um todo, produto de conhecimentos produzidos histórica e socialmente pelo sujeito, compreendemos a relevância de capacitar o professor para desempenhar a atividade de ensino. Neste âmbito, com a preocupação em torno do ensino e da aprendizagem de álgebra nos anos iniciais do Ensino Fundamental, tencionamos responder à seguinte questão investigativa: *de que forma acontece a aprendizagem de futuros professores que ensinam matemática no que se refere ao ensino e à aprendizagem de álgebra nos anos iniciais do Ensino Fundamental?*

As disciplinas que compõem o currículo dos cursos de graduação têm a função de dar subsídios aos estudantes em relação ao conhecimento e à prática. Mais especificamente no curso de Pedagogia, contexto desta pesquisa, a composição matemática das disciplinas relacionadas a essa área tem grande relevância para os acadêmicos, e, assim, no que se refere a formação matemática, " [...] as futuras professoras polivalentes têm tido poucas oportunidades para uma formação matemática que possa fazer frente as atuais exigências da sociedade e, quando ela ocorre na formação inicial, vem se pautando nos aspectos metodológicos" (NACARATO et.al, 2009, p. 22).

A pesquisa qualitativa envolve dados descritivos, em que o sujeito se apropria de conhecimentos por intermédio da cultura em que está inserido. Assim, a Teoria Histórico-Cultural tem o seu método de investigação, "que apresenta como seu fundamento o método filosófico materialista histórico e dialético" (CEDRO; NASCIMENTO, 2017, p. 25). Assim, diante da problemática apresentada, nossa pesquisa não tem como propósito um fim quantitativo, mas a intenção de compreender como ocorre a aprendizagem de álgebra de futuros professores do curso de Pedagogia (diurno) da UFSM, ofertando possibilidades de ações formativas que beneficiem as maneiras de organização do ensino. Deste modo, aproxima-se do caráter qualitativo, pois

> Os estudos qualitativos com o olhar na perspectiva sócio-histórica, ao valorizarem os aspectos descritivos e as percepções pessoais, devem focalizar o particular como instância da totalidade social, procurando compreender os sujeitos envolvidos e, por seu intermédio, compreender também o contexto. (FREITAS, 2002, p. 26)

Torna-se essencial que o professor se aproprie da ideia de que o processo de constituição dos conceitos surge a partir das necessidades humanas para propiciar a seus alunos os verdadeiros significados dos conceitos ensinados, mostrando-lhes a sua essência, em lugar de um ensino pautado na memorização ou na aplicação de formas mecanizadas. Proporcionar ao futuro professor esse entendimento e dar possibilidades de ensinar os conceitos algébricos, buscando a essência do conceito por meio de situações que provoquem no estudante motivos para a sua aprendizagem, possibilita ao professor agregar novas formas de pensar um ensino que promova a aprendizagem.

Nesta perspectiva, elencamos como nosso objetivo principal *investigar possibilidades formativas para futuros professores que ensinam matemática no que se refere ao ensino e à aprendizagem de álgebra nos anos iniciais do Ensino Fundamental.* A fim de contemplar este objetivo, foram determinadas as seguintes ações investigativas:

- Compreender o movimento lógico-histórico da álgebra.
- Identificar os sentidos que futuros professores atribuem a nexos conceituais algébricos.
- Verificar como os futuros professores se organizam para resolver situações de ensino que envolvem conceitos algébricos.

Como nossa pesquisa tem a intenção de desenvolver ações em um espaço de formação que contemplem os objetivos propostos e visando à aprendizagem dos conceitos algébricos dos futuros professores, delimitamos o seguinte objetivo formativo:

- Organizar uma unidade didática, constituída de situações de ensino para futuros professores dos anos iniciais referente à álgebra.

Para atingir nossos objetivos, neste estudo, inicialmente foi apresentado o movimento lógico-histórico da álgebra que compõe o capítulo dois, pois, partindo do pressuposto que a essência dos conceitos matemáticos surgiu de necessidades humanas, ao compreender a gênese do conceito o estudante será capaz de atribuir sentidos e significados a esse conceito estudado. Os pressupostos teóricos e metodológicos baseados na Teoria Histórico – Cultural, na Teoria da Atividade e Atividade Orientadora de Ensino estão dispostos no capítulo três.

Segundo Araujo e Moraes (2017), a pesquisa em Educação insere-se como produto do movimento de explicar e investigar o objeto geral, de modo que, partindo dos princípios da THC, consolida-se como uma atividade. Assim constituída, tem como uma de suas características "conter a síntese de um projeto coletivo; ter uma necessidade coletiva; ter um plano de ação coordenado; coincidir motivo com objeto e, sobretudo ser dos sujeitos" (ARAUJO; MORAES, 2017, p. 56). Sendo assim, a pesquisa como atividade possui duas dimensões: dimensão orientadora e dimensão executora. Nossa investigação tem como pressuposto as idealizações das autoras no que se refere aos princípios da Educação, cujo objeto geral é a Atividade Pedagógica. Portanto, ao ter como objeto geral de pesquisa a Atividade Pedagógica, almejamos, mais especificamente, investigar as aprendizagens de futuros professores em relação aos conceitos algébricos no contexto dos anos iniciais.

Na dimensão orientadora, o problema de pesquisa estuda o objeto que tem seu pressuposto em uma necessidade social, considerando que ele "converte-se em um motivo a qualidade motor, como aquele que mobiliza toda a realização da atividade de pesquisa, portanto o motivo encontra-se orientado a um determinado objeto" (ARAUJO; MORAES, 2017, p. 57). Nossa pesquisa tem como princípio orientador os pressupostos teóricos baseados na THC, na TA e na AOE.

Já o princípio executor procura compreender o fenômeno em sua totalidade, definindo assim os procedimentos e os modos como a pesquisa será desenvolvida. Desta forma, nossa pesquisa aproxima-se da concepção de experimento formativo de Davídov (1988), episódios de Moura (2000) e unidades de análise de Vigotski (2009).

A partir da dimensão orientadora, a dimensão executora, segundo Araujo e Moraes (2017, p. 57), tem as ações consideradas como as condições objetivas, a "identificação com e do objeto particular; identificação de fenômenos formativos (sociais) e investigativos (científicos); definição de operações de investigação". Assim sendo, a dimensão executora mobiliza as ações investigativas e formativas da pesquisa, ou seja, expõe os procedimentos que farão parte de nossa investigação, bem como propõe ações de apreensão da realidade, análise do material empírico e a sistematização e a apresentação dos resultados. A apreensão da realidade em nossa investigação se dá, como já esclarecemos, a partir da organização de um experimento formativo, desenvolvido em uma disciplina do curso de Pedagogia (diurno) da UFSM.

Entendendo a intervenção ativa do pesquisador nos processos psíquicos estudados por ele, Davídov (1988, p. 196) comenta que o experimento formativo "se pode chamar experimento genético modelador, o que traduz a unidade entre a investigação do desenvolvimento psíquico das crianças e a sua educação de ensino". Nessa ótica, nossas ações foram desenvolvidas na perspectiva de um experimento formativo, acontecidas no segundo semestre de 2019, na disciplina de Educação Matemática B do curso de Pedagogia (diurno), visando atingir os objetivos elencados anteriormente.

As ações desenvolvidas com a turma contemplaram conhecer a ementa da disciplina, no que diz respeito ao tópico de álgebra, e desenvolver situações de ensino que desencadeasse uma aprendizagem, envolvendo os seguintes nexos conceituais algébricos: *fluência*, *interdependência*, *variável*, *campo de variação*, *sequência*, *padrão*, *regularidade* e *relação de igualdade*. A pesquisadora participava da disciplina no contexto da docência orientada, no qual a professora regente da turma é a coorientadora da pesquisa. Antes de começar o desenvolvimento do planejamento proposto, a pesquisadora observou a turma quando comentou brevemente sobre as ações da pesquisa e convidou os estudantes a participar. A partir da aceitação de todos, pediu que respondessem a um questionário, a fim de conhecê-los melhor e identificar o que entendiam por álgebra, relacionada aos anos iniciais.

Cabe ressaltar que foi esclarecido aos acadêmicos como seriam desenvolvidas as ações na turma e foi lhes pedido autorização para gravar as ações realizadas. Todos preencheram e assinaram o termo de consentimento livre esclarecido (apêndice A). As ações foram desencadeadas em quatro encontros de quatro horas/aula cada, sistematizados conforme o Quadro 8.

Quadro 8: Sistematização das ações desenvolvidas

Encontro	**Data:**	**Proposta de ações a serem desenvolvidas no Experimento Formativo**	**Temas abordados:**	**Principais ações no movimento de produção de dados**
1	04/10/2019	▪ Retomado aos acadêmicos a participação da pós-graduanda como docente orientada e de que as ações desenvolvidas com a turma faziam parte de uma pesquisa no âmbito do mestrado. ▪ Esclarecimentos sobre as ações que seriam desenvolvidas e como seria feita a coleta dos dados. Entregue um termo de esclarecimento onde todos concordaram em participar e autorizaram a coleta dos dados. ▪ Desenvolvimento da Situação 1 – Matemática da Floresta. ▪ Registro da atividade.	▪ Apresentação inicial. ▪ Sequência. ▪ Padrão. ▪ Regularidade.	▪ Apropriação dos nexos conceituais algébricos *sequência*, *padrão* e *regularidade*, bem como o movimento lógico-histórico desses nexos.
2	11/10/2019	▪ Desenvolvimento da Situação 3 – Problema do caminho. ▪ Registro da atividade.	▪ Introdução de um simbolismo.	▪ Apropriação de um modo geral das diferentes formas de representação, no qual, com o uso de um símbolo facilitaria esse processo.
3	18/10/2019	▪ Desenvolvimento da Situação 2 – Sequentopéia. ▪ Registro da atividade. ▪ Desenvolvimento da Situação 4 – Movimentos da vida. ▪ Registro da atividade.	▪ Fluência. ▪ Interdependência ▪ Sequência ▪ Padrão ▪ Variável	▪ Apropriação dos nexos conceituais algébricos *sequência*, *padrão*, *regularidade*, *fluência* e *variável*.
4	25/10/2019	▪ Desenvolvimento da Situação 5 – Problema da altura da pirâmide. ▪ Registro da atividade. ▪ Desenvolvimento da Situação 6 – Problema das quantidades. ▪ Registro da atividade. ▪ Elaboração em grupo dos planejamentos.	▪ Campo de variação. ▪ Variável. ▪ Relação de igualdade.	▪ Apropriação dos nexos *variável*, *campo de variação* e *relação de igualdade*. ▪ Refletir acerca dos nexos algébricos trabalhados durante as aulas para fazer um planejamento que poderia ser desenvolvido em alguma turma dos anos iniciais.

Fonte: Sistematização da autora

Os recursos utilizados para a produção dos dados da pesquisa foram: gravações em áudio, filmagem, fotografias, diário de bordo e registros escritos pelos acadêmicos. A turma onde foram realizadas as ações era composta por 44 alunos matriculados, porém, em média nas aulas havia em torno de 34 estudantes. Em cada um dos encontros, a pesquisadora recebia a ajuda para a coleta dos dados de duas colaboradoras da pesquisa, participantes do GEPEMat. Em todas as ações propostas, foi-lhes requisitado fazer registros escritos individualmente ou em grupos, pois não seria possível observar as falas e os pensamentos de todos apenas pela filmagem em áudio em função do grande número de acadêmicos. Para a análise dos dados, foram elencados episódios (MOURA, 2000), que visam trazer o que foi mais significativo na ação desenvolvida. Os episódios são constituídos de cenas que apresentam algum recorte, sendo estas definidas como ações que podem ser escritas ou faladas, no qual,

> Por meio dos episódios, temos não apenas a organização dos dados mas, sobretudo, um modo de exposição que recompõem o fenômeno na sua totalidade, em uma nova síntese, explicitando o movimento lógico-histórico da pesquisa e os modos de ação para a compreensão teórica do objeto, de forma que a exposição se constitui como um produto do segundo movimento de análise, como firmado anteriormente. (ARAUJO; MORAES; 2017, p. 68)

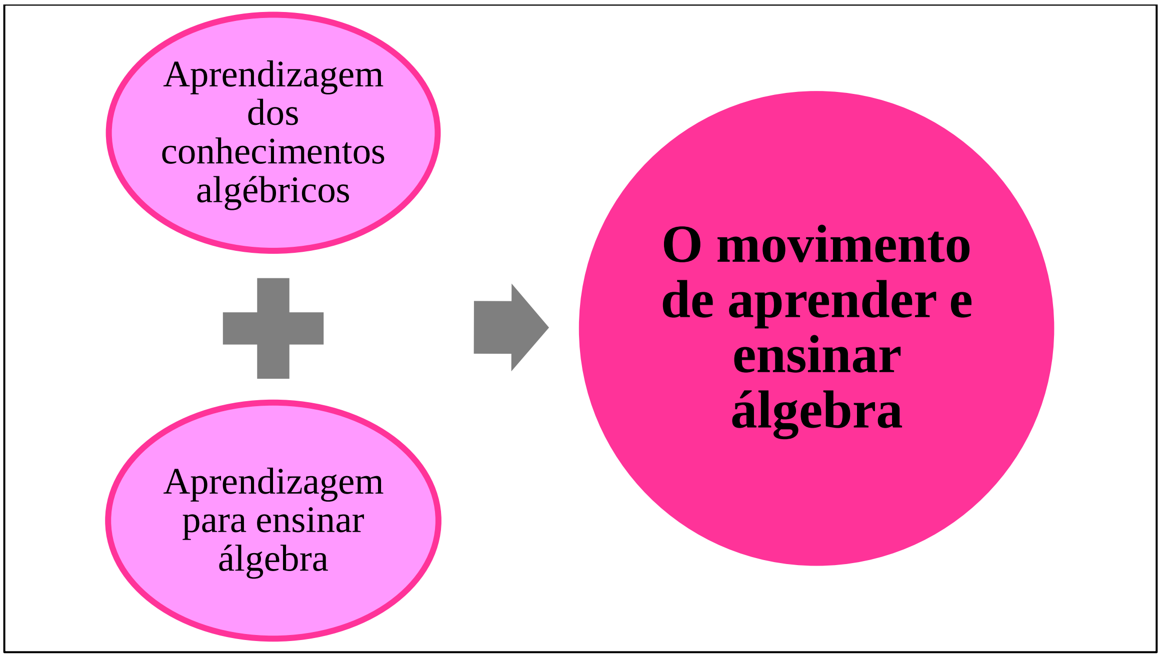
Para compreender o todo da pesquisa, as unidades de análise são porções que juntas fazem o todo,

> [...] momentos primários constituintes em relação a todo o fenômeno estudado, mas apenas a alguns dos seus elementos e propriedades concretas, os quais, também diferentemente dos elementos, não perdem propriedades inerentes à totalidade e são suscetíveis de explicação, mas contém, em sua forma primária e simples, aquelas propriedades do todo em função das quais se empreende a análise (VIGOTSKI, 2009, p. 397-398).

A partir da definição das unidades de análise, são definidos os episódios e, então, será feito o recorte das principais cenas que se destacaram durante o desenvolvimento de cada ação. Com a intenção de pesquisar sobre a aprendizagem algébrica dos acadêmicos a partir das ações propostas, mais especificamente identificar os sentidos que futuros professores atribuem a nexos conceituais algébricos e como aprendem a organizar o ensino de álgebra nos anos iniciais, delimitamos, inicialmente, duas unidades de análise: aprendizagem dos conhecimentos algébricos e aprendizagem para ensinar álgebra.

A unidade “Aprendizagem dos conhecimentos algébricos” trata da à aprendizagem dos futuros professores a partir das situações desencadeadoras de aprendizagem desenvolvidas. A unidade “Aprendizagem para ensinar álgebra” expressa-se, em especial, nas reflexões das ações realizadas referentes às possibilidades de aprendizagem dos estudantes dos anos iniciais. Entendendo a interdependência entre essas duas unidades, optamos por não separá-las no processo de análise dos episódios.

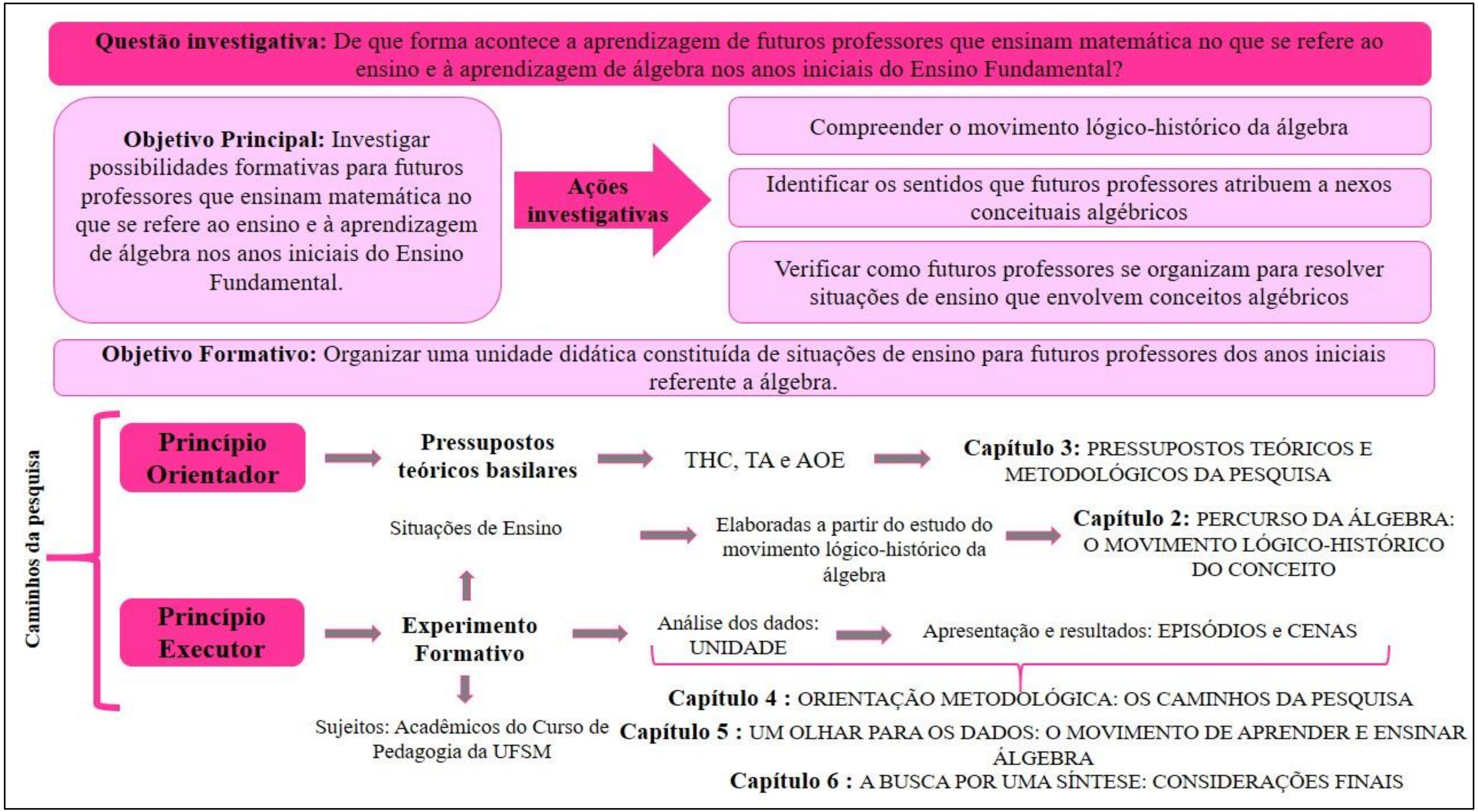
Figura 17: Estrutura da unidade de análise



Fonte: Sistematização da autora

Portanto, na unificação dessas duas unidades, passamos a denominá-la como *“O movimento de aprender e ensinar álgebra”*, na qual traremos a análise das situações desencadeadoras desenvolvidas com os futuros professores, e os reflexos destas no movimento de planejar ações referentes à álgebra presente nos anos iniciais. Na Figura 18 trazemos o desenho da pesquisa.

Figura 18: Panorama geral da pesquisa



Fonte: Sistematização da autora

4.1 CONHECENDO O CENÁRIO E OS SUJEITOS DA PESQUISA

O cenário da pesquisa é a UFSM, mais especificamente, o curso de graduação em Pedagogia – Licenciatura Plena Diurno. O curso possui atualmente duas disciplinas relacionadas à matemática: Educação Matemática A no 5.º semestre e Educação Matemática B no 6.º semestre, ambas com carga horária de 60 horas. Ambas as disciplinas trazem em suas ementas aspectos algébricos a serem trabalhados, conforme podemos observar no Quadro 9.

Quadro 9: Álgebra nas disciplinas de Educação Matemática A e Educação Matemática B da UFSM

EDUCAÇÃO MATEMÁTICA A		**EDUCAÇÃO MATEMÁTICA B**	
Objetivos	Conteúdo Programático	Objetivos	Conteúdo Programático
Compreender aspectos teóricos e metodológicos relacionados ao processo de ensino e aprendizagem da matemática, entendendo a importância da alfabetização matemática para o desenvolvimento da criança nos primeiros anos e escolarização.	UNIDADE 6 - ÁLGEBRA: PADRÕES FIGURAIS E NUMÉRICOS 6.1 - O desenvolvimento do pensamento algébrico nos primeiros anos de escolarização 6.2 - Regularidades e padrões de sequências numéricas e não numéricas	Conhecer a natureza do conhecimento lógico-matemático, dos estudos psicogenéticos e do ensino de matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental. Compreender e aprofundar o campo de conhecimentos teórico-metodológicos de Matemática a partir das seguintes unidades temáticas: números; álgebra, geometria, grandezas e medidas e probabilidade e estatísticas.	UNIDADE 3 ÁLGEBRA 3.1 - Regularidades, Padrões e Sequências. 3.2 - Relações de igualdade. 3.3 - Resolução de problemas.

Fonte: Dados obtidos da estrutura curricular do Curso de Pedagogia Diurno da UFSM[11]

Escolhemos desenvolver a nossa pesquisa na disciplina de Educação Matemática B, pelo fato de nesta ser trabalhado o nexo conceitual *relação de igualdade* e também porque seria esse o último contato dos acadêmicos com a matemática em uma disciplina da graduação. Então, desenvolvemos nosso planejamento nesta disciplina durante o mês de outubro/novembro de 2019, distribuído em quatro encontros.

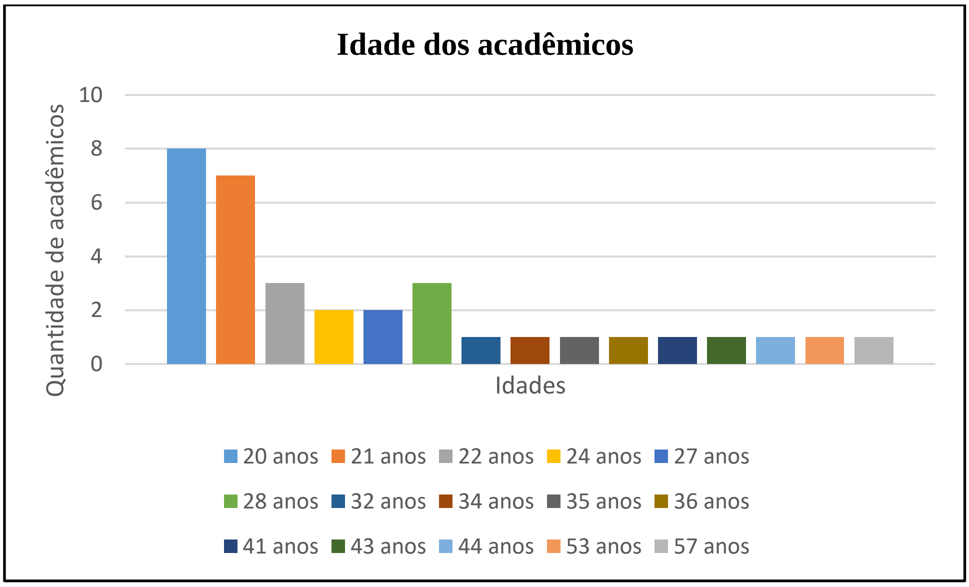
Os sujeitos da pesquisa são acadêmicos matriculados nessa disciplina no referente semestre de desenvolvimento das ações, e, como forma de conhecê-los melhor, em uma aula anterior ao início do experimento, a pesquisadora foi observar a turma e entregou um questionário impresso para que respondessem dez perguntas. O questionário respondido pelos

[11] Disponível em: https://www.ufsm.br/cursos/graduacao/santa-maria/pedagogia/informacoes-do-curriculo

acadêmicos da pesquisa encontra-se nos apêndices deste trabalho. Tanto no questionário como nas transcrições das falas no desenvolvimento das situações de ensino, os acadêmicos foram apresentados pela pesquisadora de forma fictícia por letras no momento da exposição dos dados, como por exemplo: Aluno A. Cabe ressaltar que a identificação de cada um em ambas as ações refere-se sempre ao mesmo acadêmico.

Na aula em que foi entregue o questionário e pedido que preenchessem, haviam 34 estudantes presentes. As respostas da Pergunta 1 nos mostram que os acadêmicos da disciplina possuem entre 20 e 57 anos, dos quais 18 têm entre 20 e 22 anos, sendo a média de idade da turma de 24 anos, conforme observamos no Gráfico 1. Quinze são da cidade de Santa Maria e 19 estudantes vieram de outros lugares do País, embora a maioria seja do Rio Grande do Sul.

Figura 19: Idade dos acadêmicos participantes da pesquisa



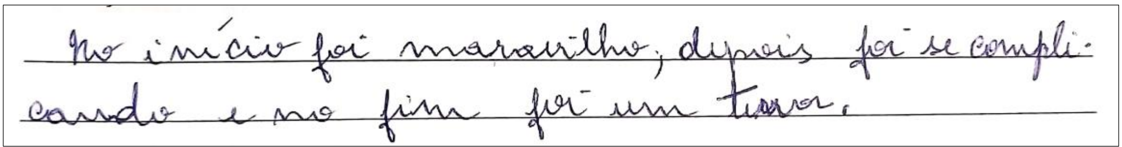
Fonte: Dados da pesquisa

Na perspectiva de entender se foi o curso normal que os motivara a cursar Pedagogia, verificamos que oito dos acadêmicos haviam feito este curso no Ensino Médio. A Pergunta 4 tinha como intenção compreender brevemente acerca das experiências deles com a matemática ao longo da trajetória na Educação Básica. Nesta questão, tentamos aproximar as respostas dos acadêmicos para observar as semelhanças entre elas. Das 34 respostas, 15 descreveram ter tido experiências negativas com a matemática. Dentre essas respostas, os aspectos semelhantes entre elas dizem respeito a não aprendizagem da matemática em razão dos conteúdos serem dissociados da realidade e, consequentemente, não fazerem sentido durante sua trajetória escolar.

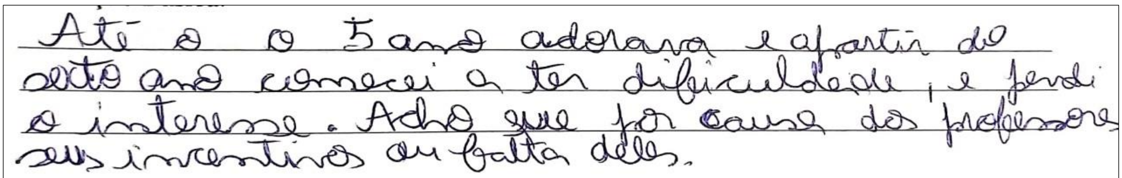
Alguns responderam que suas experiências não foram agradáveis pelo fato de não conseguirem entender a disciplina em razão da didática e da metodologia do professor ou por não serem incentivados pelos professores. Também foi considerável o número de respostas que afirmavam que, em relação à matemática vista nos anos iniciais e depois nos anos finais do Ensino Fundamental e Ensino Médio, houve uma mudança. Ela era maravilhosa no início ou até o 5.º ano e, depois deste período, virava algo sem sentido e sem entendimento. Com base nessas colocações, percebemos o quanto a influência do professor, seus métodos de ensino, conteúdos que não produziam sentidos e a transição da matemática dos anos iniciais para os anos finais despertaram em alguns acadêmicos experiências negativas e, até mesmo, desestimulantes com a matemática.

Estes aspectos observáveis nas respostas dos futuros professores nos remetem a alguns questionamentos: o que acarretaria as diferenças negativas, percebidas pelos estudantes, quando saem dos anos iniciais e passam para os anos finais? Seria em relação ao modo de o pedagogo e o professor de matemática organizarem seu ensino? Por que as experiências negativas estão associadas diretamente aos professores de matemática? Cabe-nos pensar se seria esse aspecto resultado da formação inicial do professor de matemática. É difícil, neste momento, responder a essas perguntas, mas, sem dúvida cumpre refletir muito a respeito, como podemos ver na Figura 20.

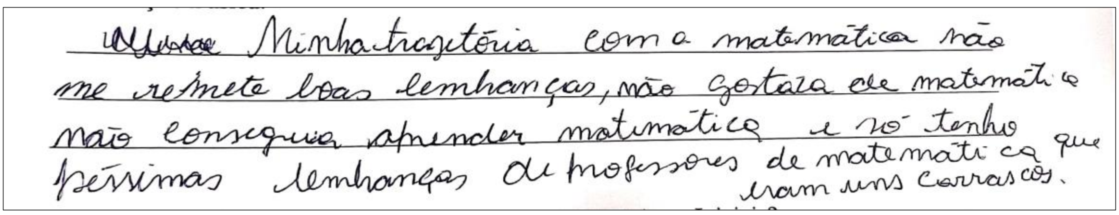
Figura 20: Respostas da Pergunta 4 – experiências negativas


No início foi maravilho, depois foi se complicando e no fim foi um terror.

Aluna V


Até o o 5 ano adorava e apartir do sexto ano comecei a ter dificuldade, e perdi o interesse. Acho que foi por causa dos professores seus incentivos ou falta deles.

Aluna W


Minha trajetória com a matemática não me remete boas lembranças, não gostava de matemática não conseguia aprender matimatica e só tenho pessimas lembranças de professores de matematica que eram uns carrascos.

Aluna DD

Fonte: Dados do questionário

No que tange às experiências positivas com a matemática, oito estudantes manifestaram seu gosto pela disciplina e também pela influência boa de algum professor que tiveram em algum momento de sua escolarização ou até mesmo por conta da influência recebida em casa, como mostra a Figura 21.

Figura 21: Respostas da Pergunta 4 – experiências positivas

Sempre gostei de brincar com os nºs, meu pai fazia brincadeiras com a gente sobre adições, divisões e subtrações. ♡♡♡

Aluna J

Retomando minhas memórias, tive uma experiência boa. As dinâmicas eram flexíveis e a maioria dos professores eram pácientes.

Aluna BB

Fonte: Dados do questionário

Das 34 respostas, temos que 6 acadêmicos se remeteram à sua trajetória marcada por dificuldades de compreender a disciplina, o que acarretava em notas baixas, exame e também reprovações. Ainda, 3 respostas deram indícios de terem tido tanto experiências positivas quanto negativas, e uma delas nos chamou a atenção pelo fato de que tudo era tranquilo até a introdução da álgebra, e a partir daí começou a não ser mais significativo, como vimos na Figura 22.

Figura 22: Resposta da Pergunta 4 - dificuldade com a álgebra

Tudo era tranquilo na matematica até que misturavam as letras com os números, por não ter sido significativo não me recordo de muita coisa.

Aluna CC

Fonte: Dado do questionário

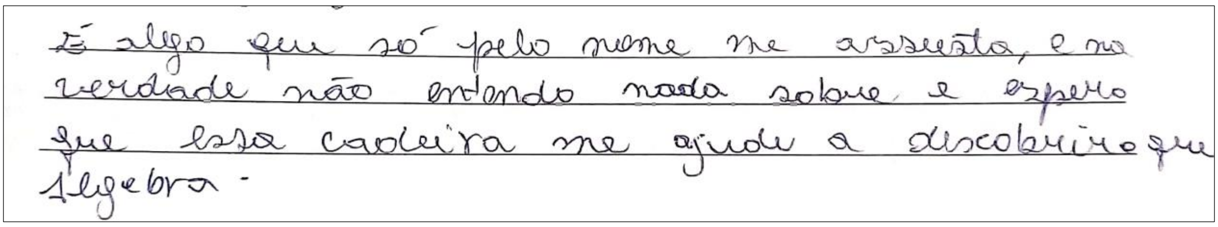
Essa resposta nos revela a dificuldade que os estudantes têm quando é introduzida a variável na matemática. A álgebra é ensinada muitas vezes de forma sem sentido, sem explicações e de forma mecanizada. O estudante se depara com os números e as operações, que já estava acostumado, e a introdução das “letras” o deixa sem entender um porquê desse novo processo matemático. Por fim, do total de respostas da pergunta quatro, temos que dois deles disseram não se lembrar de como havia sido a matemática durante sua trajetória, e, ainda comentaram que o fato de não lembrar pode ser por não ter sido significativo.

Como a disciplina de Educação Matemática B está presente no mesmo semestre que o Estágio Supervisionado nos anos iniciais, tínhamos interesse na pergunta cinco, ou seja, saber se cursavam as duas disciplinas. Desta maneira, 30 acadêmicos também realizavam o estágio. A Pergunta 6 referia-se às atividades desenvolvidas pelos sujeitos fora do curso de graduação, no sentido de conhecer a ocupação deles além de estudar. Dos 34 acadêmicos que responderam ao questionário, 14 deles também trabalhavam, 9 apenas estudavam, 8 possuíam algum tipo de bolsa e 3 deles realizavam estágio do tipo CIEE (Centro de Integração Empresa - Escola).

O objetivo da Pergunta 7 era saber se os acadêmicos que, em sua maioria estavam no 6.º semestre, tinham certeza se queriam ser professor. Dos 34, 30 disseram que queriam, sim, ser professores, e 4 deles responderam que ainda não sabiam sobre isso. Como esta era uma pergunta fechada, não conseguimos identificar os motivos de eles ainda terem dúvida quanto a ser ou não professores.

A Pergunta 8 era em uma das principais, pois gostaríamos de saber sobre o que pensavam os alunos acerca da álgebra. Essa pergunta poderia nos dar a noção do entendimento ou não dos futuros professores sobre o que seria a álgebra. Dos 34, 20 deles responderam que não sabiam o que seria ou do que se tratava, alguns até comentaram já ter ouvido falar, porém não lembravam o que era. A resposta destacada na Figura 23 nos chamou atenção pelo fato de o acadêmico atribuir ao nome álgebra um certo receio do que seria.

Figura 23: Pergunta 8 - receio do nome álgebra


É algo que só pelo nome me assusta, e na verdade não entendo nada sobre e espero que essa cadeira me ajude a descobrir o que Álgebra.

Aluna Z

Fonte: Dado do questionário

Os que tinham alguma noção do que seria a álgebra, responderam em relação ao uso da variável (no caso eles identificavam como letras), e sobre o uso de símbolos foram contabilizadas dez respostas, como mostra a Figura 24.

Figura 24: Pergunta 8 - noção de álgebra identificada nos acadêmicos

Para mim, são basicamente contas envolven-
do letras, espécie de equação.

Aluna T

É o estudo de operações numéricas e letras.

Aluna BB

Sim,
Álgebra pode utilizar letras, números, sinais
como parênteses, colchete, chaves e as quatro ope-
rações :→ −, +, ÷, ×

Aluna V

Fonte: Dados do questionário

Ainda em relação a essa pergunta, quatro acadêmicos deram algumas hipóteses do que seria álgebra, não deixando explícito se tinham certeza do que estavam falando, associando a álgebra apenas com as operações numéricas, o que fica mais próximo da aritmética. Nesta pergunta, pudemos perceber que os que tinham alguma noção do que seria álgebra responderam apenas em relação ao uso de "letras", porém nenhum deixou claro entender a álgebra como uma forma de generalização. Talvez a álgebra para eles se refira apenas ao uso de letras por ter sido assim introduzida em sua escolarização, sendo definida como usar letras e números, sem o sentido de generalização e sem explicações de por que utilizar as letras na matemática.

A identificação da presença dos conteúdos da álgebra nos anos iniciais se deu na Pergunta 9. Temos que 16 acadêmicos responderam que não sabiam se a álgebra estava presente nesta etapa da Educação Básica e 15 acadêmicos responderam que a álgebra estava presente nesta etapa de escolarização. Ainda, 3 deles responderam que a álgebra não estava presente, mas que deveria estar ou que teoricamente estava presente, porém, segundo eles, na prática não era vista na escola nos anos iniciais. A Pergunta 10 dizia respeito ao que eles entendiam sobre pensamento algébrico. Do total de 34 respostas, 29 acadêmicos deixaram claro que nunca ouviram falar ou que não sabiam a respeito. Nas outras 5 respostas dessa pergunta, o pensamento algébrico foi entendido por eles como uma forma de pensamento e raciocínio lógico.

Sendo assim, esse questionário foi um caminho para tentarmos conhecer um pouco mais sobre os sujeitos participantes de nossa pesquisa, principalmente no que diz respeito às suas experiências com a matemática durante a sua trajetória na Educação Básica e também sobre o que entendiam por álgebra. As respostas, principalmente dessas duas últimas perguntas nos levaram a alguns questionamentos que devem ser pensados e repensados em prol de contribuir na formação dos futuros professores que ensinam matemática, bem como da transição da matemática vista nos anos iniciais para os anos finais. No próximo item, mostraremos as situações de ensino desenvolvidas com os acadêmicos, bem como o objetivo de cada uma delas em relação à abordagem dos nexos conceituais algébricos.

4.2 AS SITUAÇÕES DE ENSINO

Por meio das situações desenvolvidas nesta pesquisa, na perspectiva da AOE, esperávamos desencadear nos acadêmicos manifestações que dessem indícios de aprendizagem dos nexos conceituais algébricos. Assim, o objetivo principal das situações era: proporcionar aos acadêmicos a apropriação do conceito (MOURA, 2010) por meio das ações desencadeadas, pois, para resolver os problemas propostos, almejávamos que eles conseguissem compreender os nexos abordados.

O ensino organizado com base na AOE tem como um de seus propósitos colocar o sujeito a interagir com o objeto, levando-o a solucionar coletivamente uma situação- problema (MOURA, 2001). Então, as situações planejadas e propostas para a turma foram sempre resolvidas de maneira coletiva pelos acadêmicos. Primeiramente, após a explanação do problema ou situação, em grupos (geralmente trios) eles pensavam em formas de resolver esse problema, e recebiam um registro para anotarem as ideias do grupo e como pensaram na solução. A seguir, de forma coletiva com a turma toda, apresentavam suas hipóteses de resolução e, por meio da interação com todos, era escolhida uma solução única.

Neste intuito, as situações de ensino foram planejadas na perspectiva de situações desencadeadoras de aprendizagem, desenvolvidas de forma que pudessem ser solucionadas no coletivo, visando à interação e ao compartilhamento com os colegas e, também, em certos momentos com a mediação da pesquisadora. Tais encaminhamentos pautam-se na compreensão de que a apropriação de um novo conceito, quando compartilhado, desencadeia significados que comprovam a aprendizagem nos estudantes. Mais especificamente no nosso contexto de formação inicial e sendo

> [...] a educação um processo coletivo, é no compartilhar que o docente tem a oportunidade de apropriar-se de novos conhecimentos, pois, embora as ações possam ser de cada um daqueles que concretizam uma determinada atividade, a aprendizagem não acontece no que cada um deles faz de forma isolada, mas na interação entre sujeitos e objetos. (LOPES; ARAUJO; CEDRO, MOURA, 2016, p. 25)

As situações planejadas tinham o propósito também de, a partir de um problema, conter o movimento lógico-histórico da álgebra produzido por meio das situações cotidianas do sujeito pré-histórico, dos nexos conceituais algébricos *fluência, interdependência, variável*, *campo de variação*, *sequência*, *padrão*, *regularidade* e *relação de igualdade* e de algumas fases de desenvolvimento da álgebra: retórica, sincopada e simbólica. Desta forma, apresentamos no Quadro 10 uma síntese das situações desenvolvidas durante os encontros.

Quadro 10: Sistematização das Situações de Ensino

Encontro	**Situação**	**Nexos abordados**
1º	Matemática da floresta	Sequência Padrão Regularidades
2º	Problema do caminho	Simbolismo
3º	Movimentos da vida	Fluência Interdependência
	Sequentopéia	Sequência Padrão Regularidades
4º	Problema da altura da pirâmide	Variável Campo de variação
	Problema das quantidades	Relação de igualdade

Fonte: Sistematização da autora

A seguir, detalharemos cada uma das situações, bem como seus objetivos.

4.2.1 Matemática da floresta

Esta situação tem como temática a natureza, com animais, plantas, árvores, etc. Partindo do estudo do movimento lógico-histórico da álgebra, bem como da história humana, ao observar as coisas ao seu redor e a natureza, encontrando regularidades entre elas, elaboramos esta situação, com o objetivo de levar os estudantes a compreender os nexos conceituais algébricos *regularidade, sequência* e *padrão* e a perceber a presença destes nexos nos elementos da natureza. Portanto, a situação intitulada *Matemática da floresta* envolve esta temática e os conceitos mencionados.

O ano letivo acabara de começar na escola Aprender é Legal. A turma do 2.º ano do Ensino Fundamental chega a sua nova sala de aula ansiosos por conhecer seus novos coleguinhas. A professora Joana recepciona todos os alunos de forma muito carinhosa e diz que nessa aula eles irão aprender um pouco mais de matemática. Após apresentar-se para os alunos, pede que cada um fale seu nome e comente sobre alguma coisa que achou super divertido fazer nas férias. Ramon, um menino esperto, quis logo comentar sobre suas férias:

— Oi coleguinhas, meu nome é Ramon, eu fiz um passeio super legal nas férias! Meus pais me levaram para conhecer a floresta; existem vários animais, flores, plantas ... foi bem divertido!

— Ah muito interessante esse seu passeio Ramon, disse a professora. Você sabia que há muitos anos o homem vivia cercado de animais, árvores e plantas? Nos tempos primitivos as coisas não eram como hoje!

— Sabia sim, professora. Ah, então, naquele tempo não precisava estudar matemática? Porque eu não percebi nada de matemática na floresta! (risos)

— Tem certeza, Ramon? ***Será que não há nada de matemática na floresta?*** *Pessoal, e vocês o que pensam disso? Podemos ajudar o Ramon responder a essa pergunta?*

Como o problema desencadeador dizia respeito à natureza, levamos uma sequência composta de quatro imagens identificadas por números e relacionadas a animais, plantas, árvores e flores para que fosse respondida a seguinte pergunta: *Será que não há nada de matemática na floresta?*

Figura 25: Imagens do Problema Matemática na Floresta

Fonte: Imagens retiradas da internet, sendo que algumas sofreram modificações

Este problema pretendia mobilizar os acadêmicos a encontrarem uma solução, ao observarem as imagens, e preencherem um registro com as seguintes perguntas:

a) O que vocês observam na imagem 1? E matematicamente, o que pode ser observado?
b) O que vocês observam na imagem 2? E matematicamente, o que pode ser observado?
c) O que vocês observam na imagem 3? E matematicamente, o que pode ser observado?
d) O que vocês observam na imagem 4? E matematicamente, o que pode ser observado?

Com a palavra "matematicamente", esperávamos que os acadêmicos, em grupos, conseguissem perceber os conceitos de sequência, padrão e regularidades nas imagens que lhes foram dadas e depois, no coletivo, construíssem uma solução para a pergunta do problema desencadeador. Do mesmo modo, que fosse entendido por eles o movimento lógico-histórico da álgebra no cenário criado para o problema.

4.2.2 Problema do Caminho

Esta situação teve como objetivo que os acadêmicos percebessem a dificuldade de descrever o caminho proposto no problema desencadeador sem nenhum parâmetro, pois dependendo de como for escrito este caminho, pode ser que quem faça a representação não entenda a forma como o outro pensou. Ainda, que eles compreendesem a necessidade de usar alguns símbolos para facilitar a descrição do caminho de maneira precisa, que todos pudessem entender de maneira rápida e eficaz.

Esta situação foi pensada com o propósito de percorrer algumas fases do desenvolvimento da álgebra (retórica, sincopada e simbólica), fazendo-os perceber a evolução dela até os dias atuais com o uso de simbolismo. Em vista disso, pensamos em um problema que pudesse motivar os alunos a descrever um caminho, baseados nas fases do desenvolvimento da álgebra, e a perceber a importância do uso de uma representação, e então pensassem em alguma forma rápida e eficiente de solucionar o problema a seguir.

Oi pessoal, tudo bem? Lembram de mim, sou o Ramon. A professora Joana e a minha turminha a cada semana fazem um lanchinho coletivo na casa de cada um dos alunos da turma para conhecer onde moramos. Nesta sexta feira, iremos nos reunir na minha casa, então eu fiz um mapa do caminho da escola até a minha casa. Porém, alguns dos meus coleguinhas não entenderam como chegar até minha casa. Vocês podem me ajudar a explicar o caminho? **Que forma será mais eficiente e rápida para descrevermos o caminho de modo a que todos consigam compreender?**

Nosso personagem Ramon se fez presente em todas as situações propostas por nós, e neste problema ele pede ajuda da turma para descrever o caminho, em palavras, da escola até a sua casa, que foi representada na Figura 26.

Figura 26: Caminho da escola até a casa de Ramon

Fonte: Sistematização da autora em imagens retiradas da internet

Neste problema desencadeador, a turma teria que, primeiro, descrever o mesmo caminho da casa do Ramon até a escola, somente usando palavras, a seguir, descrevê-lo não somente com palavras e, por fim, descrever o caminho de alguma forma rápida e que fosse compreendida por todos. Até a solução final do problema, seriam desenvolvidas algumas etapas para auxiliar os acadêmicos a representar o caminho final.

ETAPA 1: Cada trio deverá descrever o caminho apenas usando palavras.

ETAPA 2: No coletivo, a turma deverá propor a melhor maneira de representar por meio de palavras o caminho e registrar no quadro.

ETAPA 3: Individualmente, cada um irá criar um caminho na malha quadriculada e deverá descrever esse caminho em outro papel.

ETAPA 4: Cada acadêmico receberá o caminho escrito por um colega, o qual deverá ser desenhado na malha quadriculada.

ETAPA 5: Serão escolhidos alguns caminhos para verificar se o registro por meio de palavras foi eficaz no momento de representar na malha quadriculada, na qual será feito um caminho descrito por algum colega com a turma no coletivo.

ETAPA 6: Voltando ao caminho inicial do problema, cada trio deverá encontrar uma maneira de descrever esse caminho não apenas com palavras.

ETAPA 7: No coletivo a turma deverá propor a melhor maneira de representar o caminho não apenas com palavras e registrar no quadro.

ETAPA 8: Fazer o seguinte questionamento:

Que forma será mais eficiente e rápida para descrevermos o caminho, de modo que todos consigam compreender?

Com o desenvolvimento das etapas propostas, esperávamos que os acadêmicos conseguissem responder a essa pergunta, ao averiguarem que descrever o caminho por meio de símbolos se torna mais rápido e eficaz.

4.2.3 Movimentos da vida[12]

Esta situação teve o intuito de levar os acadêmicos a entender sobre os movimentos da vida e a sua interdependência, que tudo está em constante evolução, tudo flui e não permanece sempre a mesma coisa. Desta forma, foram entregues as perguntas, para serem respondidas,

[12] Adaptada de Sousa (2004).

inicialmente, em grupo e depois coletivamente e, por fim, seria elaborada uma síntese de todas as perguntas.

1) Você é o(a) mesmo(a) de um ano atrás? De um mês atrás? De uma semana atrás? Por quê?
2) Quantas pessoas estão agora na sua casa?
3) O mundo é o mesmo enquanto falamos a palavra "mundo"? Por quê?
4) A escola continua a mesma depois que você vai embora? Por quê?

4.2.4 Sequentopeia

Esta situação de ensino teve como objetivo descobrir, por meio de uma Sequentopeia com tampinhas coloridas, termos bem distantes da sequência sem contar de tampinha em tampinha, identificando um padrão para saber as cores dos termos distantes. Desta forma, cada trio recebeu dez tampinhas de três cores diferentes. Os grupos deveriam fazer uma espécie de "centopeia", mas com apenas dez elementos. Deveria ser colocado no fio primeiramente a tampinha verde, depois a tampinha vermelha (ou rosa) e logo a azul, e assim sucessivamente. Após isso, seriam respondidas as seguintes perguntas em um registro.

- *Qual o padrão dessa sequência?*
- *Qual o 18.º termo dessa sequência? Como você descobriu?*
- *Qual o 85.º termo dessa sequência? Como você descobriu?*

Após essas perguntas serem respondidas, seria explanado o seguinte diálogo do nosso personagem Ramon, pedindo novamente a ajuda da turma:

— Professora, que legal quando conseguimos descobrir a cor da posição da tampinha que queremos, mesmo possuindo poucas tampinhas disponíveis, disse Ramon.
— É verdade, não precisamos ter muitas tampinhas para descobrir quais serão as próximas cores, disse a professora.
— Professora, já que conseguimos descobrir quais serão as próximas cores das tampinhas, ***será que existe alguma maneira rápida e sem contar de um em um, de sabermos a cor de uma tampinha qualquer?***

Com a pergunta do personagem Ramon neste diálogo, objetivávamos que os acadêmicos descobrisse alguma maneira de encontrar um termo qualquer desta sequência sem contar de um em um e, portanto, que pensassem em alguma maneira geral de descobrir esse termo qualquer.

4.2.5 Problema da altura da pirâmide[13]

Com esta situação desejávamos que os acadêmicos percebessem, a partir do problema desencadeador, o uso da variável e seu campo de variação, ou seja, compreendessem que neste problema a variável não pode assumir qualquer valor, pois tem um máximo e um mínimo. Para tanto, foi entregue a cada trio uma folha com o problema reproduzido a seguir, para ser respondido primeiramente em grupos e após de maneira coletiva com a turma.

Estamos há quatro mil anos. Os escravos estão trabalhando, carregando pedras para a construção da pirâmide do faraó. Na tenda do arquiteto Amon Toado, encarregado geral da obra, chega o chefe do depósito de pedras.
— Mandou-me chamar, senhor?
— Sim, mandei, Tuc Amon. Preciso saber quantas pedras temos no depósito para levantar a coluna mestra da pirâmide.
— Temos 60, senhor.
— Quantas pedras os escravos já colocaram até hoje?
— 12, senhor.
— Tudo bem, Tuc Amon, pode ir embora.
Amon Toaldo virou-se para os seus papiros e pensou:
"Pois é, colocamos já 12 pedras na coluna mestra. Temos no depósito 60 pedras que podem ser usadas nessa coluna. Acontece que o faraó ainda não se decidiu qual a altura de sua pirâmide. Dessa forma, não posso indicar quantas pedras no total terá a coluna mestra. No entanto, eu preciso deixar escrito aqui no projeto a altura da pirâmide para que os encarregados da obra fiquem com os dados registrados e não se confundam. Esse é o meu problema: como vou escrever a altura da coluna, considerando as 12 pedras já colocadas, as 60 pedras do depósito, que podem ser usadas todas ou não, e a altura que eu ainda desconheço?"
Como escrever isso em linguagem matemática?

4.2.6 Problema das quantidades

Esta situação teve como objetivo desencadear a percepção da relação de igualdade. Então, elaboramos um problema no contexto das antigas trocas de mercadoria que eram feitas há tempos. Com o auxílio de um quadro retangular dividido ao meio, foi-lhes perguntado quais trocas poderiam ser realizadas e suas respectivas quantidades, expostas em um slide.

[13] Extraído de Sousa (2004)

Queridos acadêmicos da disciplina de Educação Matemática B, mais uma vez venho pedir a ajuda de vocês. Desde quando contei à professora e à minha turma sobre o meu passeio na floresta, e descobri que há conceitos da matemática em tudo ao nosso redor, fiquei curioso e decidi estudar um pouquinho sobre a história. Descobri que há muitos anos as pessoas plantavam para comer, e como cada família plantava certos tipos de alimentos, no final eles acabavam trocando o que tinham, e assim todo mundo tinha um pouco de cada coisa. Como meus pais possuem um armazém, fiquei curioso para saber como poderíamos trocar arroz, feijão, sal e açúcar de modo que usemos como critério de troca a quantidade, e desse modo, resolvi testar essas trocas com alguns alimentos. ***Como podemos saber os produtos que podemos trocar? Com quais produtos poderão ser feitas as trocas?***
Pessoal, vocês podem me ajudar nessa missão?

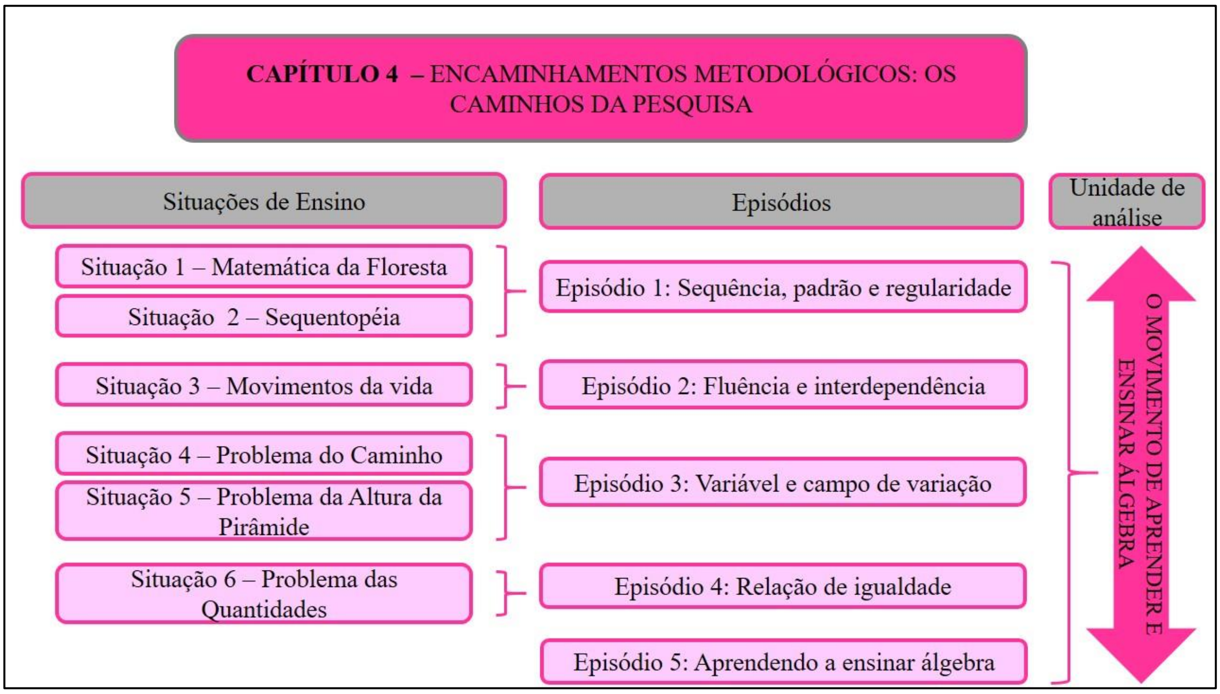
Após a leitura do problema para a turma, foi disponibilizado em um slide os produtos e as quantidades, conforme podemos ilustra a Figura 27.

Figura 27: Produtos do problema

Fonte: Imagens retiradas da internet

Desta forma, esperávamos que eles percebessem a igualdade que pode ser proposta com as trocas entre os produtos, bem como as relações que podem existir nessa igualdade, à medida que adicionamos ou subtraímos uma quantidade em apenas um termo. Apresentadas as situações-problema desenvolvidas com os acadêmicos do curso de Pedagogia, no próximo capítulo traremos a explanação e a análise dos dados obtidos durante o desenvolvimento das ações.

Figura 28: Síntese do Capítulo 4



Fonte: Sistematização da autora

5 UM OLHAR PARA OS DADOS: O MOVIMENTO DE APRENDER E ENSINAR ÁLGEBRA

> O processo de trabalho do professor no seu nível mais aparente é o ensino de conteúdos curriculares para o aluno. Esse é o seu trabalho ao ter de se assumir professor. Assim, a tríade da atividade é professor – conteúdo – aluno. Por analogia, dizemos que o professor é o sujeito, o conteúdo é o instrumento mediador e o aluno é o objeto. Ao agir voluntariamente com a intencionalidade de tornar o aluno – objeto da atividade de ensino – sujeito de sua atividade de aprendizagem, o professor coloca-se no movimento que possibilita uma mudança qualitativa em sua atividade de ensinar. É a compreensão do verdadeiro alvo da atividade que poderá fazer com que o professor tenha o ensino como uma atividade. (MOURA, SFORNI, LOPES, 2017, p. 85)

Com o objetivo principal de investigar possibilidades formativas para futuros professores que ensinam matemática no que se refere ao ensino e à aprendizagem de álgebra nos anos iniciais do Ensino Fundamental, apresentamos neste capítulo os dados produzidos, por meio das ações desenvolvidas.

Para isso, organizamos uma unidade didática composta por seis situações de ensino, organizadas na perspectiva de situações desencadeadoras de aprendizagem, desenvolvidas na concepção de um experimento formativo com acadêmicos do curso de Pedagogia – diurno da UFSM, mais especificamente na disciplina de Educação Matemática B. Por meio das situações desenvolvidas, intencionalizamos analisar o movimento de busca pela síntese de cada problema desencadeador à luz dos elementos da Teoria Histórico-Cultural de Vigotski, formas de pensamento de Kopnin e pensamento empírico e teórico de Davídov.

As ações foram desenvolvidas em quatro encontros de quatros horas/aula e os dados produzidos, a partir de nossas ações, serão expostos por meio de episódios e cenas. A produção de dados se deu por gravações em vídeo/áudio, fotografias, diário de bordo da pesquisadora e registros feitos pelos acadêmicos. Assim, elencamos provisoriamente, como já explicitado, duas unidades de análise: aprendizagem dos conhecimentos algébricos e aprendizagem para ensinar álgebra. Compreendendo a interpendência entre essas duas unidades, na expectativa de abranger a totalidade do fenômeno investigado, optamos por analisá-las não de forma separada, mas num único movimento que intitulamos *o movimento de aprender e ensinar álgebra*.

A análise está estruturada em cinco episódios, oriundos dos momentos de encontro com a turma. A organização dos episódios não possui uma sequência temporal, visto que as situações que compõem cada um dos episódios expressam os mesmos nexos conceituais algébricos.

> Por meio dos episódios, temos não apenas a organização dos dados mas, sobretudo, um modo de exposição que recompõem o fenômeno na sua totalidade, em uma nova síntese, explicitando o movimento lógico-histórico da pesquisa e os modos de ação

> para a compreensão teórica do objeto, de forma que a exposição se constitui como um produto do segundo movimento de análise, como firmado anteriormente. (ARAUJO, MORAES, 2017, p. 68)

Portanto, buscamos compreender a aprendizagem dos futuros professores de nossa pesquisa no que tange aos conceitos algébricos presentes nos anos iniciais por meio de um experimento formativo composto por algumas situações, e ao modo como pensaram em organizar o ensino da álgebra. Para isso, foram elencados cinco episódios:

- Episódio 1: Sequência, padrão e regularidades
- Episódio 2: Fluência e interdependência
- Episódio 3: Introdução de um simbolismo, variável e campo de variação
- Episódio 4: Relação de igualdade
- Episódio 5: Aprendendo a ensinar álgebra

No Quadro 11 serão apresentadas as cenas que compõem cada episódio.

Quadro 11: Episódios e cenas da análise

(continua)

O movimento de aprender e ensinar álgebra		
Episódio 1: **Sequência, padrão e regularidade**	Situação 1 – Matemática da Floresta	Cena 1.1: O olhar coletivo dos acadêmicos sobre a imagem 1
		Cena 1.2: O olhar coletivo dos acadêmicos sobre a imagem 2
		Cena 1.3: O olhar coletivo dos acadêmicos sobre a imagem 3
		Cena 1.4: O olhar coletivo dos acadêmicos sobre a imagem 4
		Cena 1.5: A busca da síntese coletiva da Situação de ensino 1
	Situação 2 - Sequentopéia	Cena 2.1: A busca da síntese coletiva da Situação de ensino 2
Episódio 2: **Fluência e interdependência**	Situação 3 – Movimentos da Vida	Cena 3.1: A busca da síntese coletiva da Situação de ensino 3
Episódio 3:	Situação 4 – Problema do Caminho	Cena 4.1: A busca da síntese coletiva da Situação de ensino 4

Quadro 11: Episódios e cenas da análise

(conclusão)

Variável e campo de variação	Situação 5 – Problema da altura da pirâmide	Cena 5.1: A busca da síntese coletiva da Situação de ensino 5
Episódio 4: **Relação de igualdade**	Situação 6 – Problema das quantidades	Cena 6.1: A busca da síntese coletiva da Situação de ensino 6
Episódio 5: **Aprendendo a ensinar álgebra**	--	Cena 7.1: Síntese dos planejamentos dos acadêmicos

Fonte: Sistematização da autora

5.1 EPISÓDIO 1: SEQUÊNCIA, PADRÃO E REGULARIDADE

Neste episódio será apresentado o desenvolvimento de algumas ações realizadas nesta pesquisa com o olhar para a aprendizagem dos nossos sujeitos no que diz respeito à álgebra presente nos anos iniciais. mais especificamente, o desenvolvimento e a análise dos dados referentes a duas situações de ensino que envolvem os nexos conceituais algébricos *sequência*, *padrão* e *regularidade*.

Quadro 12: Situações de Ensino do Episódio 1

(continua)

Situações de Ensino	**Problema Desencadeador**	**Objetivo**
Situação 1: ***Matemática da Floresta***	Será que não há nada de matemática na floresta?	Compreender os nexos conceituais algébricos *regularidade*, *sequência* e *padrão* a partir da percepção da presença destes nexos nos elementos da natureza.

Quadro 12: Situações de Ensino do Episódio 1

(conclusão)

Situação 2: ***Sequentopeia***	Será que existe alguma maneira rápida e sem contar de um em um, de sabermos a cor de uma tampinha qualquer?	Descobrir, por meio de uma Sequentopeia com tampinhas coloridas, termos bem distantes da sequência sem contar de tampinha em tampinha, identificando um padrão para saber as cores dos termos distantes.

Fonte: Sistematização da autora

5.1.1 Situação 1 - Matemática da floresta

A primeira situação desenvolvida foi denominada *Matemática da Floresta.* Para a sua realização foram entregues quatro imagens, contendo elementos da natureza. Esperávamos que os sujeitos conseguissem perceber nessas imagens semelhanças entre os nexos conceituais *sequência*, *padrão* e *regularidade*, ao responder ao seguinte problema desencadeador: *será que não há nada de matemática na floresta?* A seguir, relataremos o desenvolvimento desta situação apresentada, por meio das transcrições das falas dos estudantes e seus registros escritos.

Figura 29: Desenvolvimento da Situação 1 - Matemática da floresta

Fonte: Acervo da pesquisadora

5.1.1.1 Cena 1.1: O olhar coletivo dos acadêmicos sobre a imagem 1

Após os acadêmicos discutirem suas soluções em seus grupos, foi feita uma socialização das respostas, antes da síntese da solução coletiva do problema. As falas, trazidas no Quadro 13, foram desencadeadas com a turma sobre a imagem 1- Pássaros voando.

Quadro 13: Transcrição da Cena 1.1 - O olhar coletivo dos acadêmicos sobre a imagem 1

1. Pesquisadora: Em relação a imagem 1 (Pássaros voando), o que podemos dizer sobre ela? **2. Aluna E**: a gente pensou sobre a contagem dos pássaros, na contagem da asa dos pássaros, na identificação de um conjunto de pássaros, na forma geométrica porque se passar uma reta daquele canto até aquele canto é uma forma geométrica e na identificação de um plano, de uma ponta da asa até a outra, formando um reta. **3. Pesquisadora**: Quem é o próximo grupo que responde? **4. Aluna KK:** Nós identificamos um conjunto de pássaros, mais especificamente um conjunto com 16 pássaros. **5. Aluna B:** Bando de aves com 16 pássaros, as nuvens que foram formas geométricas e juntando as aves e nuvens formando um trapézio, um pássaro formando duas retas e sempre tem uma ponta que puxa os outros, a soma, formas geométricas, a subtração, multiplicação, divisão e conjunto. **6. Aluna P:** Os fenômenos da natureza, ai vai vendo a velocidade e as formas deles se comunicarem, também uma flecha, alguma coisa assim. **7. Aluna NN**: Nós observamos pássaros voando, e matematicamente seria o número de pássaros, tanto número natural, como ordinal. **8. Aluna KK:** Na número 1 (Pássaros voando) podemos observar um bando de pássaros voando no céu em mesma direção, matematicamente pode-se fazer uma contagem em pares. **9. Pesquisadora:** O que vocês identificaram de diferente que os colegas ainda não comentaram? **10. Aluna R:** Pra gente seria uma associação de pássaros que formam uma curva. **11. Aluno D:** Nós ficamos aqui pensando no que os colegas falaram, e o primeiro pássaro tá liderando ali, e é um ângulo de 90º graus das asas, e aí faz outros ângulos que a gente pode observar nos outros a curvatura tem mais de 90º graus. **12. Aluna M:** A gente colocou a lei da quantidade e a escala. **13. Pesquisadora:** Mais alguém colocou alguma coisa diferente dos colegas? **14. Aluna J:** Pode contar assim: do lado esquerdo tem 5 pássaros, do lado direito tem maior quantidade. **15. Aluna J:** Segmento da reta ... **16. Aluno Y**: Um conjunto de segmentos **17. Pesquisadora**: Algo mais pessoal nessa imagem 1(Pássaros voando)? [Silêncio]

Fonte: Dados da pesquisa – realizado no dia 04/10/2019

Ao atentarmos para a matemática que os acadêmicos conseguiram perceber nesta imagem, o número foi o que prevaleceu entre todos, ele foi comentado por mais de um dos grupos, como podemos perceber nas falas reproduzidas. Matematicamente, fizeram observações a respeito da quantidade de elementos, contando quantos pássaros havia naquela imagem. Ao pensar na ideia expressa pelos grupos, contando primeiramente os elementos que apareciam na imagem, podemos fazer associações com o modo como a matemática foi se constituindo historicamente, pois como observa Vargas (1996, p. 249)

> Simultaneamente, com o aparecimento do conhecimento teórico grego aparece um processo que veio a moldar a forma das ciências da natureza. É o que se poderia chamar de matematização da natureza. Com Pitágoras e seus seguidores surgiu a fecunda idéia de que a arché da natureza, ou seja, o princípio do qual brotam todas as coisas e a ele revertem, é o número. Isto é, o que é permanente, unitário, verdadeiro e, portanto, inteligível sob as aparências enganosas dos fenômenos, são suas proporções harmoniosas, expressas em números.

Uma das primeiras formas primitivas do surgimento da matemática ocorreu pela necessidade de o homem fazer contagem, pois

> Nos primórdios, o ser humano criou o número por necessidade de conhecer os movimentos quantitativos com os quais lidava ao armazenar alimentos e fazer trocas de bens de uso que produzia. O número surge como forma de pensamento e como instrumento de conhecimento deste aspecto da realidade. Como forma de pensamento, mobiliza o controle e previsão dos movimentos quantitativos e, como linguagem fixa, dinamiza a memória e a comunicação das ações numéricas. Uma vez criado o movimento numérico, o homem tende a aperfeiçoá-lo de forma a destituir-se de todo e qualquer desconhecimento dos movimentos quantitativos inesperados, ou seja, dos novos desafios quantitativos que venham a surgir. (MOURA, 2005, p. 21)

Ao observarem a imagem como parte da natureza e refletirem sobre o que havia de matemática nela, a ideia de contar os elementos do conjunto que observaram foi determinante para quase todos os grupos. Mesmo com sua ampla gama de estudos e sua utilização em muitas áreas do conhecimento, a matemática escolar, muitas vezes, é associada somente ao estudo dos números, e isso acarreta na dificuldade de alguns alunos em relacioná-la a outros aspectos.

Apesar de alguns estudantes terem observados outros elementos matemáticos naquela imagem, para outros, apenas identificar quantidades pareceu-lhes suficiente. Essa situação nos leva a refletir que assim como os números referentes a quantidades foram uma das primeiras descobertas da matemática se fazendo essenciais no desenvolvimento dela, e no seu surgimento a partir de necessidades práticas do homem, também, atualmente, são eles predominantes no cotidiano das pessoas. Por exemplo, diariamente temos que lidar com a quantidade de um item para ser comprado no supermercado, o valor a ser pago pela compra, o número da nossa casa, do nosso telefone, do nosso celular, das nossas identificações (CPF, RG). Com isso, ao pensar em matemática, muitos atribuem ao número o seu único significado. Mesmo que muitas vezes a álgebra seja entendida como a manipulação de letras, o número faz parte de seu desenvolvimento. O número também foi um ponto de partida para a constituição de teorias mais elaboradas pelas civilizações egípcias e por alguns pensadores, sendo que, para raciocinar algebricamente, buscaram seu nexo conceitual no concreto do conceito de número (SOUSA; PANOSSIAN; CEDRO, 2014).

Além do número, aspectos relativos à geometria, como por exemplo forma geométrica, ângulo, retas e segmentos, bem como as operações aritméticas de soma, subtração, multiplicação e divisão estiveram presentes nas falas dos acadêmicos. Pensando na exclusão da álgebra no cotidiano, o caráter formalista e fora de contextos reais que muitas vezes é dado ao ensino dela dificulta ao aluno aproximar-se dos significados dos conceitos algébricos.

> Não se trata aqui de lidar com o ensino do conceito de uma forma utilitarista, no sentido de que se hoje o estudante não 'usa' tal conceito ele não é mais necessário, mas sim de reconhecer na necessidade histórica do conceito sua totalidade e ter a preocupação de gerar essa necessidade em atividades de ensino. (SOUSA, PANOSSIAN, CEDRO, 2014, p. 139)

Podemos observar, a partir das falas dos acadêmicos seja no momento em que os grupos discutiam as questões entre eles seja depois no grande grupo, que não ficou claro o nexo conceitual algébrico sequência presente na imagem, uma vez que isso não foi comentado por nenhum dos grupos. Porém, no registro do grupo 7 foi mencionada "uma sucessão de pássaros" (Registro Situação 1- Imagem 1- Grupo 7), e também na fala da aluna NN (fala 7) "[...] *matematicamente seria o número de pássaros, tanto número natural como ordinal",* ambos apontamentos têm relação com o pressuposto de ordem, o que pode estar associado à sequência.

Além disso, essa relação pode ser vista no registro do grupo 4, quando os sujeitos observaram o "pássaro número 1" (Registro Situação 1 - Imagem 1 - Grupo 4), bem como na fala (fala 11) do aluno D, integrante do grupo 14 "[...] *e o primeiro pássaro tá liderando ali* [...]". Percebemos aí indícios da noção intuitiva de sequência. Segundo Stewart (2009, p. 640) "uma sequência pode ser pensada com uma lista de números escritos em uma ordem definida: a_1, a_2, a_3, a_4, ..., a_n, ...". Neste caso, a_1 representa o primeiro termo; a_2, o segundo termo e assim sucessivamente. A referência ao pássaro número 1 indica a percepção do grupo, quanto a um primeiro termo, no qual podemos fazer menção ao termo a_1 de uma sequência.

Em síntese, quando discutiram a matemática presente na imagem, os grupos não identificaram que aquele conjunto de animais poderia ser uma sequência de pássaros, todavia, no registro (como apontado anteriormente) de alguns, essa noção apareceu ainda em sua essência.

5.1.1.2 Cena 1.2: O olhar coletivo dos acadêmicos sobre a imagem 2

Os conhecimentos matemáticos observados pelos acadêmicos na imagem 2 - Animais, podem ser compreendidos na transcrição das falas a seguir.

Quadro 14: Transcrição da Cena 1.2 - O olhar coletivo dos acadêmicos sobre a imagem 2

1. Pesquisadora: Já que todos comentaram a respeito da imagem 1 (Pássaros voando), vamos ver o que podemos pensar em relação a imagem 2 (Animais).
2. Aluna J: Pares e unidades
3. Aluna Q: conjuntos
4. Aluno C: A gente observou um conjunto de animais que dentro dela [imagem] há diversos pares de espécies distintas.
5. Aluna M: Diferentes grandezas.
6. Pesquisadora: O que mais vocês identificaram?
7. Aluno C: A unidade de medida maior e menor que ...
8. Aluna N: Agrupamento.
9. Aluna KK: (áudio não compreensível) [...] diferentes espécies e etc, questão de grandezas, medidas, sistema de numeração decimal, unidade, dezena, centena, noção espacial e distância.
10. Pesquisadora: O que mais pessoal, alguém pensou em alguma coisa diferente aqui nesta imagem 2 (Animais)?
11. Aluno C: Se pertence ou não pertence a conjuntos, por exemplo o conjunto dos mamíferos, o conjunto dos ovíparos, das aves.
12. Pesquisadora: Humm... pertence ou não pertence. Alguém mais conseguiu observar outra coisa?
13. Aluna Y: Escala, profundidade... agrupamento de 2 em 2.
14. Aluno D: Perspectiva, diagonal, vertical.
15. Pesquisadora: Alguém mais pensou em outra coisa?
[Silêncio]

Fonte: Dados da pesquisa – realizado no dia 04/10/2019

Não houve muita divergência entre as respostas dos grupos. Alguns observaram apenas o fato de os animais estarem em pares ou duplas como eles mencionaram, outros já disseram que, além disso, os animais que formavam duplas eram de mesma espécie e divergiam em seus tamanhos, ou seja, um animal grande e um pequeno, ambos de mesma espécie, como podemos ver na fala do Aluno C (fala 7) "*a unidade de medida maior e menor que ...*" Assim, além da regularidade observada por quase todos os grupos, dois deles identificaram, ainda, outra regularidade na imagem: maior e menor em relação ao tamanho dos animais, que foi citado por um acadêmico integrante de um dos grupos na socialização coletiva das respostas.

Um dos grupos em seu registro (Registro Situação 1 -Imagem 2 -Grupo 14) e também na fala de um de seus componentes (fala 11) fez um apontamento para a relação de pertinência de um elemento a um conjunto, ao mencionar os termos "pertencem" ou "não pertencem" nesta imagem. A noção de conjunto estava bastante evidente e definida nas falas e nos registros de alguns grupos (Registro Situação 1- Imagem 2 - Grupos 3, 6, 8, 9 e 10), entendendo este como uma relação de pertinência de um objeto de certa natureza a um grupo, ou uma coleção qualquer de elementos.

Comparando as percepções expostas quanto às imagens 1 e 2, percebemos que, na imagem 1, nem todos os grupos conseguiram aproximar-se dos nexos conceituais trabalhados, apenas alguns deram indícios de identificação destes. Já na imagem 2, quase todos grupos identificaram a regularidade presente na imagem, o que era esperado por nós. É possível que isso tenha acontecido como decorrência da socialização da primeira imagem, pois, ao compartilharem as ideias com os colegas, foram ampliando suas hipóteses, desencadeando novas formas de pensar sobre as imagens.

> Nessa ótica, é imprescindível, no processo de formação do professor, criar situações em que haja a necessidade do compartilhamento das ações. Com esses momentos propiciaremos aos indivíduos a oportunidade do desenvolvimento das primeiras formas específicas de cooperação, que permitirão a ele atingir um nível adequado nas ações cognitivas por meio da apropriação e da conscientização do processo significativo da produção coletiva do conhecimento científico (LOPES et al, 2016, p. 25)

Portanto, podemos observar, por meio das falas e dos registros (Registro Situação 1 - Imagem 2 - Grupos 2, 4, 7, 9, 10, 11, 12, 13 e 14), que a maioria dos grupos conseguiu captar a característica comum daquele conjunto: o número dois ou pares, mas poucos identificaram que os animais de mesma espécie estavam dispostos em dois tamanhos, ou seja, um maior e outro menor. Contudo, ainda que não tenham se referido a esta imagem como uma sequência de animais, conseguiram encontrar regularidades nela.

5.1.1.3 Cena 1.3: O olhar coletivo dos acadêmicos sobre a imagem 3

A matemática, evidenciada pelos grupos sobre a imagem 3 - Flores e socializada com a turma toda, pode ser acompanhada na transcrição a seguir.

Quadro 15: Transcrição da Cena 1.3 - O olhar coletivo dos acadêmicos sobre a imagem 3

(continua)

1. Pesquisadora: Agora, em relação a imagem 3 (Flores), o que os grupos perceberam? **2. Aluno C:** A adição, adição de mais uma flor que não estava na imagem. [Risos] **3. Aluna E:** A questão da ordem crescente e decrescente, a forma geométrica também. **4. Aluno D:** E de um padrão nas flores... **5. Pesquisadora:** O que mais pessoal? **6. Aluna G:** Tem um termo médio que é a flor roxa. **7. Aluna Z:** Ângulo, círculo, reta, quantidade de pétalas, a contagem... **8. Aluna A:** Flores inteiras, seria números inteiros e números quebrados. **9. Aluna MM:** Maior e menor **10. Aluna T:** Aberto, longe. **11. Pesquisadora:** Alguém observou outra coisa além do que não foi dito? **12. Aluna R:**As cores se repetem de 3 em sequência numérica. **13. Pesquisadora:** Humm, o que mais? **14.Aluna BB:** Propriedade e códigos **15. Aluna L:** Igualdade e diferença, cores diferentes. **16. Pesquisadora:** O que mais pessoal, alguém pensou em outra coisa?

Quadro 15: Transcrição da Cena 1.3 - O olhar coletivo dos acadêmicos sobre a imagem 3

(conclusão)

17. Aluno C: Dá para pensar em gráfico, colocar uma tabela... **18. Pesquisadora:** Foi isso que todo mundo identificou, mais alguma coisa diferente pessoal? [Silêncio]

Fonte: Dados da pesquisa – realizado no dia 04/10/2019

Assim como na imagem 1 - Pássaros, observamos, pela fala da Aluna E (fala 3), "*a questão da ordem crescente e decrescente"* que o conceito de ordem também estava presente nesta imagem, o que nos dá indícios da aproximação ao conceito de sequência.

A palavra *padrão* logo surgiu, quando perguntado aos acadêmicos sobre o que viam de matemática na imagem, como notamos na fala do Aluno D (fala 4) *"e de um padrão nas flores…*" Podemos verificar que ele apenas mencionou que estava presente ali, mas não se referiu a qual *padrão* estava acontecendo naquela imagem, o que foi feito posteriormente por outra acadêmica. A fala da aluna R (fala 12) "*As cores se repetem de 3 em sequência numérica"* demonstra a percepção dela em relação à ordem de repetição das cores e a associação a uma sequência numérica, como se fosse, por exemplo, uma sequência composta por: flor 1, flor 2, flor 3, flor 1, flor 2, flor 3, o que nada mais é que um *padrão* como comentado por uma colega anteriormente.

Vale et al. (2006) entendem que, genericamente, o termo padrão é utilizado quando mencionamos sobre uma disposição ou um arranjo de números, formas, cores ou sons, nos quais se consegue perceber regularidades. Na transcrição anterior, observamos que apenas uma acadêmica mencionou o *padrão* existente na imagem, mas nos registros dos grupos (Registro SDA 1 - Imagem 3 - Grupos 6 e 14), outros também deram indícios de entender que, na imagem, havia uma regra: a repetição de três cores.

No entanto, mesmo com essa percepção dos grupos, a palavra *padrão* não apareceu em sua resposta, de forma clara, neste momento, demonstrando um modo empírico de aproximação a este nexo conceitual. Ao buscar identificar como os acadêmicos foram elaborando seus pensamentos, reportamo-nos a Davídov (1982, p. 120), que explica:

> Se este objeto for examinado por si mesmo, fora de um certo sistema e conexão com outros objetos, revelará conteúdo do pensamento empírico. Quando esse mesmo objeto for analisado dentro de uma certa entidade concreta, só aqui revelará suas genuínas peculiaridades, e então aparecerá como fator no conteúdo do pensamento teórico.

O nexo conceitual *padrão,* objetivado por nós no planejamento e no desenvolvimento desta situação não aparece de forma clara, mas intuitivamente, ao analisarem as particularidades da imagem. A disposição das cores das flores e seu motivo de repetição, como mencionado por alguns grupos, foram os fatores perceptíveis que deram indícios de sua aproximação, mas não ainda a sua formalização. Porém, assim como nas outras imagens, o nexo conceitual sequência também não apareceu de forma explícita.

5.1.1.4 Cena 1.4: O olhar coletivo dos acadêmicos sobre a imagem 4

Nesta cena, traremos o que os acadêmicos expressaram sobre a imagem 4 – Diferentes pássaros.

Quadro 16: Transcrição da Cena 1.4 - O olhar coletivo dos acadêmicos sobre a imagem 4

1. Pesquisadora: Então a última imagem, o que vocês observaram nesta imagem ai (se referindo a imagem 4 - Diferentes pássaros)?
2. Aluno C: Multiplicação, sequência.
3. Pesquisadora: Hummm, sequência
4. Aluna E: Padrão.
5. Pesquisadora: Que padrão tem ai?
6. Aluna E: É três grupos do menor, do maior para o menor ... tem três conjuntos semelhantes, sendo que é um maior, outro menor, um maior outro menor.
7. Pesquisadora: Ahh,
8. Aluna Y: Ordem decrescente espacialmente ordenada a ótica ocidental.
9. Turma: Uau ...
[Risos]
10. Aluna Y: Ordem decrescente espacialmente ordenada a ótica ocidental.
11.Turma: O que significa isso?
12. Aluna Y: Resumindo: os ocidentais olham da esquerda para direita, de cima para baixo. Se olharmos assim ele está decrescente, se olharmos da direita para esquerda está em ordem crescente.
13. Turma: Óh
[Palmas]
14.. Pesquisadora: Quem ainda não falou e conseguiu identificar outra coisa?
[Silêncio]

Fonte: Dados da pesquisa – realizado no dia 04/10/2019

A primeira consideração acerca do questionamento sobre a matemática presente na imagem 4, foi dada pelo Aluno C (fala 2) "*multiplicação, sequência*". Nesta imagem, formamos uma *sequência* de pássaros em que o *padrão* era repetido por três vezes, o que nos leva a pensar sobre a relação que o grupo fez com multiplicação. O termo *sequência* foi expresso pelos acadêmicos pela primeira vez em todo o desenvolvimento da situação nesta imagem.

Seguido do termo *sequência*, como comentado por um colega, outra aluna mencionou a palavra *padrão*. Mesmo que, durante o desenvolvimento das ações individuais dos grupos, foi observado pela pesquisadora que estes termos haviam sido referidos pelos acadêmicos nesta imagem, o que nos chamou a atenção foi o fato de outros vários tópicos que apareceram nos registros escritos não terem aparecido nas falas dos acadêmicos durante a socialização das respostas.

Vejamos que as falas do Aluno D (fala 2), ao mencionar "*sequência"*, e da Aluna E (fala 4) relacionando com o "*padrã*o", ambos se complementam. Ao se trabalhar com sequências pictóricas, é necessário buscar regularidades e estabelecer generalizações (PONTE; BRANCO; MATOS, 2009). Assim, o grupo encontrou como *regularidade* as características dos pássaros e o fato de estarem interligados, e consequentemente, ao identificarem que essa *regularidade* se repetia, conseguiram fazer generalizações para um padrão naquela sequência, o que fica evidenciado na próxima fala da Aluna E (fala 6), quando perguntada qual o *padrão* existente: "*é três grupos do menor, do maior para o menor ... tem três conjuntos semelhantes, sendo que é um maior, outro menor, um maior outro menor".*

Os acadêmicos se aproximaram do que podemos considerar como generalização. Ao generalizar, o pensamento procura explorar como certa base se apresenta diante de suas diversas propriedades e fragmentos, as quais exprimem esse objeto e suas relações que compõem a sua essência por meio do conceito. Davídov (1988, p. 126) diz que o conceito surge "como forma de atividade mental por meio da qual se reproduz o objeto idealizado e o sistema de suas relações, em que a unidade reflete a universalidade ou a essência do movimento do objeto material".

Portanto, as falas e os registros escritos sobre esta imagem, diferentemente do que acontecera nas outras, quando se referiram a outros termos matemáticos, trazem indícios de aproximação aos conceitos algébricos, relativos a *sequência*, *padrão* e *regularidade*.

5.1.1.5 Cena 1.5: A busca da síntese coletiva da Situação de Ensino 1

Nesta cena, trazemos a busca da solução coletiva do problema desencadeador: *será que não há nada de matemática na floresta?* Nosso objetivo era que os acadêmicos percebessem os nexos *sequência*, *padrão* e *regularidade,* ao observar fenômenos que compõem a natureza, da mesma forma que antigamente o homem fazia suas percepções e relações entre os elementos do meio em que vivia. A seguir a transcrição do momento da síntese coletiva das imagens feita pela turma.

Quadro 17: Transcrição da Cena 1.5 - A busca da síntese coletiva da Situação de Ensino 1

(continua)

1. Pesquisadora: Pessoal, agora vamos todo mundo fazer uma síntese em relação a todas as imagens. O que podemos identificar?
2. Vários alunos: conjuntos
3. Pesquisadora: Quais conjuntos?
4. Aluna BB: Vários conjuntos.
5. Aluna E: Padrões
6. Pesquisadora: Ahh padrões ... o que seriam padrões nessas imagens? Tem algum padrão nessa imagem aqui (referente a imagem 1 – Pássaros voando)
7. Aluno H: Sim.
8. Pesquisadora: O que seria ter um padrão nessa imagem?
9. Aluno C: Padrão seria tipo uma característica comum.
10. Pesquisadora: Tá, uma característica comum. E nessa imagem, vamos conseguir identificar um padrão nela?
[Alguns respondem que sim, outros que não]
11. Aluno C: Sim, os pássaros são os mesmos
12. Aluna U: Existe um pássaro e um pássaro, um pássaro e um pássaro
13. Pesquisadora: E em relação a segunda imagem (se refere a imagem 2 – Animais), o que mais todo mundo observou?
14. Vários alunos: Conjuntos
15. Pesquisadora: E é um conjunto de que?
16. Vários alunos: De pares
17. Aluna B: Ah mas tem animais sozinhos
18. Aluna V: É um conjunto de unidades, porque a cobra tá sozinha.
19. Pesquisadora: E se a gente tirar os animais que estão sozinhos.
20. Aluna R: Ai seria um agrupamento de pares.
21. Alguns alunos: Duplas.
22. Pesquisadora: E o que representa duplas?
23. Vários alunos: Dois
24. Pesquisadora: Ah então temos que a característica desse conjunto aí é dois.
25. Pesquisadora: E aqui, nessa imagem (referente a imagem 3 - Flores) o que a gente consegue observar em relação a característica comum que os grupos já comentaram.
26. Aluna L: Tem duas espécies de flores iguais, a rosa e a pink, e uma que é de espécie diferente.
27. Aluna E: É uma sequência de três.
28. Pesquisadora: Por que é uma sequência de três?
29. Aluna KK: Por conta das cores, elas se repetem.
30. Pesquisadora: Tá, se meu último elemento é essa flor lilás aqui, qual vai ser a próxima flor se seguisse o mesmo padrão que vocês me falaram.
31. Vários alunos: a rosa pink
32. Pesquisadora: Então esse padrão que vocês estão me dizendo é porque tem alguma coisa se repetindo?
33. Alunos: Sim
34. Aluna B: Seria uma sequência numérica, um, dois, três, um dois, três.
35. Pesquisadora: E nesta imagem (referente a imagem 4 – Diferentes pássaros), acontece a mesma coisa?
36. Alunos: Sim
37. Pesquisadora: Existe um padrão segundo vocês nesta imagem aqui?
38. Aluna U: De três em três
39. Aluna A: Uma ordem
40. Aluno L: Um grande e um pequeno
41. Pesquisadora: Qual é a ordem?
42. Vários alunos: Maior e menor ... grande e pequeno
[Conversa sobre as observações do homem em relação aos elementos da natureza]
43. Pesquisadora: Então, o que vocês identificaram no geral de todas as imagens? Que tem na maioria das imagens:
44. Alguns alunos: Padrão.
45. Pesquisadora: Vocês já me disseram várias vezes sobre padrão, mas então o que é o padrão para vocês?

Quadro 17: Transcrição da Cena 1.5 - A busca da síntese coletiva da Situação de Ensino 1

(conclusão)

46. Aluna E: Algo que se repete. **47. Pesquisadora:** E em relação a esse conjunto que aparece nas imagens, como podemos chamar? Vocês já falaram várias vezes a palavrinha certa. **48. Alunos**: Sequência. **49. Pesquisadora:** Ah, uma sequência. [Começa uma explicação sobre sequência, regularidade e padrão]

Fonte: Dados da pesquisa – realizado no dia 04/10/2019

Entendemos que, valendo-se das imagens que lhes foram entregues, os acadêmicos conseguiram relacionar com vários conteúdos matemáticos. De um modo geral, inicialmente identificaram vários tópicos não relacionados à álgebra, porém, percebemos o quanto surgiram elementos de outros aspectos que poderiam estar implícitos ou explícitos nas imagens. Isso nos possibilita pensar que, mesmo que nosso objetivo se relacionasse ao trabalho com álgebra, ao darmos possibilidades de interagir e discutir sobre matemática, os acadêmicos se expressaram mais livremente, fazendo associações que, possivelmente não fariam em outro meio, pois quando

> [...] o indivíduo que tem a possibilidade de interagir com o mundo matematicamente, utilizando esses conhecimentos como ferramenta do seu pensamento, terá a oportunidade de atingir os princípios gerais que proporcionam o seu desenvolvimento. (CEDRO; MORAES; ROSA, 2010, p. 432)

Identificamos nas falas dos acadêmicos, no momento inicial da síntese, que, ao observarem uma característica comum nas imagens, vários mencionaram inicialmente, conjuntos, ainda não se referindo que em algumas imagens o conjunto identificado por eles poderia ser chamado de *sequência*. A diferença entre conjunto e *sequência* na matemática, refere-se à ordem dos elementos. Desta forma "um conjunto pode ser entendido como uma coleção bem definida de objetos, conhecidos como os elementos ou membros do conjunto" (LIPSCHUTZ; LIPSON, 2013, p. 1), já a *sequência* deve ter seus elementos escritos em uma ordem definida (STEWART, 2009), ou seja, seus elementos precisam seguir uma lei de formação.

Como vimos nas falas anteriores, uma das respostas esperadas nessa situação, ao serem vistas as imagens em sua forma coletiva, foi dada inicialmente pela Aluna E (fala 5) "*padrões"*. Ao fazer relação com as falas anteriores dos acadêmicos, vistas nas outras cenas dessa situação, a palavra *padrão* foi citada inicialmente na imagem 3 pelo Aluno D. Já em nossa síntese coletiva, foi explicitada por outra acadêmica de outro grupo, logo no começo da discussão da turma com a pesquisadora, quando se tratava de olhar as imagens coletivamente.

Disto, temos que o compartilhamento da ideia do colega em um dos momentos da situação - problema desencadeou em outra colega, na síntese coletiva, a percepção de algo que ela ainda não tinha apreendido na imagem. A interação entre os sujeitos envolvidos proporciona a troca de ideias sobre os conhecimentos abordados no problema desencadeador e culmina no desenvolvimento intelectual dos sujeitos em aprendizagem. Nesta perspectiva, salientando a importância do coletivo, ao se referir a aprendizagem, Rubtsov (1996, p. 134) afirma que:

> [...] as pesquisas dos psicólogos mostraram que a aptidão para a aprendizagem é, na verdade, resultado de uma determinada interiorização, de maneira que a atividade de aprendizagem se apresenta, essencialmente, sob a forma de uma atividade realizada em comum.

Após a ênfase dada por uma das acadêmicas sobre o *padrão* ser algo em comum nas imagens, direcionamos os encaminhamentos da situação para os conceitos algébricos que queríamos trabalhar. Ao questionarmos o que seria ter um *padrão* na imagem 1 (Pássaros voando), o Aluno C (fala 9) respondeu *"que padrão seria tipo uma característica comum"* e depois disse que nesta imagem o padrão seriam os pássaros, porque são os mesmos. Observemos que, nessa fala, a palavra padrão pode ser associada como equivalente à regularidade, porém, há diferenças entre elas.

> Ao passo que "padrão" aponta sobretudo para a unidade de base que eventualmente se replica, de forma exatamente igual ou de acordo com alguma lei de formação, "regularidade" remete sobretudo para a relação que existe entre os diversos objetos, aquilo que é comum a todos eles ou que de algum modo os liga. (PONTE, 2009, p. 170)

Quando a Aluna U (fala 12) expressou haver um *padrão,* porque "*existe um pássaro e um pássaro, um pássaro e um pássaro",* isso nos indica que ela pensou em uma ordem dada aos elementos da imagem, e que, de um pássaro para o outro, ocorria um mesmo fato, o que podemos caracterizar como uma *sequência* e sua lei de formação.

Sobre a imagem 2 (Animais), mencionaram que havia animais sozinhos, e talvez isso tenha dificultado a percepção sobre a regularidade. Como a pesquisadora percebeu este fato no momento da síntese coletiva, foi necessária a sua mediação. A fim de propiciar a interação entre os estudantes na construção dos saberes escolares e nas diferentes formas de colaborar na busca do conhecimento desejado, o professor é "mediador entre o conhecimento e o aluno, atuando no momento de auxiliar os estudantes a se apropriarem de novos conhecimentos e atingirem níveis mais altos de desenvolvimento" (POZEBON, 2014, p. 31).

Em vista disso, após a intervenção da pesquisadora sobre a dúvida entre os animais pares e únicos, os acadêmicos voltaram o olhar para os animais de mesma espécie e fizeram observação sobre as duplas de animais, conseguindo perceber a *regularidade* presente nesta imagem. Ao relacionar a fala dos acadêmicos sobre esta com suas considerações dadas no momento anterior à síntese, podemos notar que, quando estávamos com nosso olhar voltado aos *padrões* ou as *regularidades* de cada imagem, como na síntese coletiva, surgiram dúvidas quanto à presença dos animais sozinhos, o que não tinha acontecido antes.

Quando perguntado anteriormente sobre a imagem 3 (Flores), o *padrão* presente nas flores da imagem apareceu como resposta, na fala da Aluna R (fala 6 – imagem 3) *"as cores se repetem de 3 em sequência numérica"*. No momento da síntese, a Aluna E (fala 27) comentou: "*é uma sequência de três"* e a Aluna KK (fala 29) ressaltou: "*por conta das cores, elas se repetem"*. Vejamos que ambas as falas se complementam nos dois momentos do desenvolvimento da situação por acadêmicos diferentes, sendo identificados nas duas os nexos algébricos que intencionalmente propúnhamos para esta situação nesta imagem: uma sequência formada pelo padrão das cores.

Podemos verificar que, anteriormente ao momento da síntese, a Aluna E (fala 46) se referiu à matemática presente na imagem, comentando a "*questão da ordem crescente e decrescente* [...]" sem mencionar que, como a ordem das flores se mantinha, e que existiam flores de cores diferentes que se repetiam, aquele poderia ser um padrão na imagem. A formulação por ela dada a uma sequência de três cores ocorreu apenas no momento da síntese coletiva da situação juntamente com as considerações dos outros colegas acerca da imagem. Portanto, torna-se evidente a importância de a solução do problema desencadeador ser desenvolvida, por meio de uma interação entre os envolvidos, pois

> Isso se dá quando aos indivíduos são proporcionadas situações que exijam o compartilhamento das ações na resolução de uma determinada situação que surge em certo contexto. Garantir que a atividade de estudo dos educandos se dê prioritariamente dentro de um coletivo, busca concretizar o princípio ou lei de formação das funções psíquicas [...] (MOURA et al., 2010, p. 225)

Os acadêmicos também deram indícios de terem entendido o que é um *padrão* quando questionamos sobre qual a próxima flor que estaria presente na imagem. Da mesma forma, quando arguídos sobre a imagem 4 (Diferentes pássaros), a maioria diz ter identificado matematicamente um *padrão*, como podemos observar nas falas anteriores.

Na discussão sobre a imagem 4 (Diferentes pássaros), os termos *padrão* e *sequência* foram mais evidentes do que nas observações das outras imagens. Os acadêmicos, ao analisarem esta, demonstraram aproximação aos nexos conceituais trabalhados, o que ficou mais evidenciado na síntese coletiva das quatro imagens, quando perguntados o que eles entendiam por *padrão*, como podemos identificar na fala da aluna E (fala 46) "*algo que se repete".* Ao explorarem todas as imagens juntas, os conjuntos a quem eles se referiam a cada imagem foram denominados de *sequência* na síntese feita pela turma, sendo mencionado sobre o *padrã*o ou *regularidade* que estava presente. Acreditamos que a discussão sobre *sequência* facultou a compreensão dos nexos *regularidade* e *padrão*.

Assim, para nosso problema desencadeador: *será que não há nada de matemática na floresta?* houvera muitas respostas, mas nosso foco estava nos nexos conceituais algébricos ali nas figuras. Algumas das respostas matemáticas manifestadas por eles, durante o olhar da turma em cada uma das imagens, dão evidências de terem partido de conceitos espontâneos, pois se expressavam usando palavras matemáticas, não necessariamente relacionadas ao conceito teórico a que se referiam. Eram conceitos cotidianos, usuais nas suas experiências. Segundo Vigotski (1989, p. 93-94), os conceitos científicos fornecem estruturas para a elevação do desenvolvimento dos conceitos espontâneos, sendo que

> Ao forçar sua lenta trajetória para cima, um conceito cotidiano abre o caminho para um conceito científico e o seu desenvolvimento descendente. Cria uma série de estruturas necessárias para a evolução dos aspectos mais primitivos e elementares de um conceito, que lhe dão corpo e vitalidade. [...] Os conceitos científicos desenvolvem-se para baixo por meio dos conceitos espontâneos; os conceitos espontâneos desenvolvem-se para cima por meio dos conceitos científicos.

Mesmo tendo estudado esses conceitos em seu ensino formal, durante sua trajetória na Educação Básica, os acadêmicos demonstraram não ter ainda conhecimentos sistematizados, pois algumas vezes identificavam certo termo matemático presente na imagem, mas este não condizia com o seu conceito. No que concerne aos nexos algébricos, notamos que os sujeitos de nossa pesquisa, inicialmente, identificaram os conceitos presentes em cada uma das imagens e depois foram questionados pela pesquisadora o que haveria de matemática na floresta como um todo. Deste modo, identificamos que se aproximaram da essência dos nexos conceituais *sequência, padrão* e *regularidades,* percebendo o era comum a todas as imagens, caracterizando a Situação 1 como uma situação generalizada.

> A situação 'generalizada' emerge quando os alunos passam a falar do que é comum a um conjunto de casos particulares ..., ao passo que a situação 'genérica' emerge

> quando tratamos diretamente daquilo que é geral numa situação, sem a intermediação de casos particulares. (LINS, GIMEZES, 1997, p. 114)

Sendo assim, os nexos conceituais algébricos, presentes na Situação 1, deram indícios de terem desencadeado nos acadêmicos, a partir dos conceitos espontâneos evidenciados em suas ideias matemáticas, ideias que se aproximaram dos nexos algébricos, por meio da generalização. Para Vigotski (1991, p. 99), os conceitos cotidianos e científicos envolvem experiências e distintas atitudes que se desenvolvem por diferentes trajetórias. Para o autor, "a ausência de um sistema é a diferença psicológica principal que distingue os conceitos espontâneos dos conceitos científicos".

Os conceitos espontâneos dos acadêmicos foram sendo explorados, à medida que a interação com os colegas e a pesquisadora caminhava rumo à formalização dos conceitos científicos algébricos. Martins (1997), apoiado nas ideias de Vigotski, diz que, pela mediação cultural, a aprendizagem dos conceitos científicos se dá pela interação com os professores e colegas, amparada pelos conhecimentos oriundos das experiências diárias dos estudantes. Deste modo, este "[...] conhecimento, espontaneamente adquirido, passa a ser o mediador da aprendizagem de novos saberes" (MARTINS, 1997, p. 119).

A partir das falas e dos registros escritos, os sujeitos de nossa pesquisa deram indícios de terem compreendido o que seria uma *sequência* e qual o *padrão* dela, visto que perceberam nas imagens quando acontecia uma repetição da característica comum, bem como a ordenação necessária na *sequência*, o que ocorreu com base na generalização feita, com base no conjunto de todas as imagens.

Nosso problema desencadeador tinha a intenção de evidenciar os nexos conceituais algébricos por meio da observação de imagens que representavam o movimento de percepção da natureza, vivido pelo homem antigamente. Em sendo assim, ao propormos um problema desencadeador, ele deve dar condições

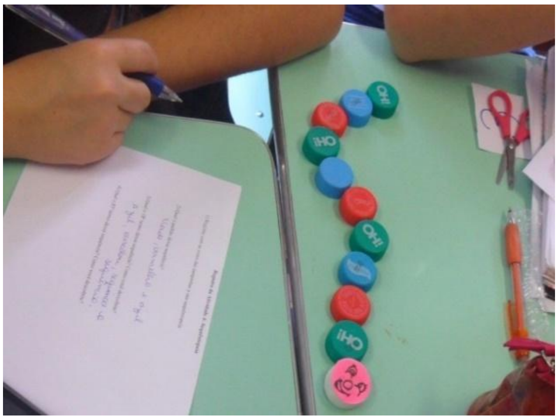
> [...] para que o estudante possa compreender sua origem como decorrente das necessidades humanas, o seu desenvolvimento histórico-lógico, que, ao ser solucionado, produz ferramentas simbólicas aplicáveis em outras situações semelhantes. (MOURA; SFORNI; LOPES, 2017, p. 94)

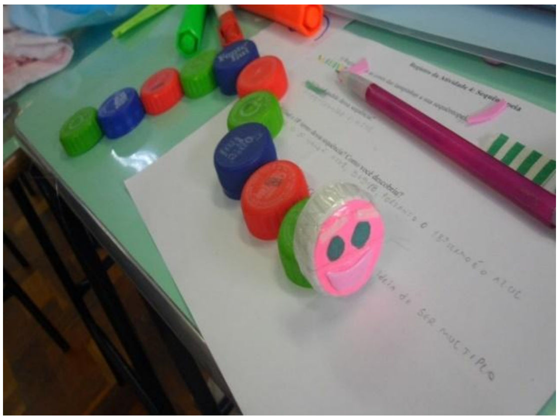
Analisando todo o processo acontecido durante o desenrolar dessa ação, fica cada vez mais evidente a relevância de o professor instigar os estudantes para buscar os conceitos intencionados, não dando respostas prontas, mas sim, encaminhando o raciocínio, direcionando o pensar para aproximar da resposta esperada. O próximo item, volta-se ao desenvolvimento e à análise da Situação de Ensino 2.

5.1.2 Situação 2 – Sequentopeia

A Situação 2, denominada *Sequentopeia*, foi desenvolvida como a turma no terceiro encontro. Nesta, objetivamos conhecer quais estratégias os acadêmicos utilizariam para saber a cor dos termos que não tinham em mãos e como solucionariam, coletivamente, o problema desencadeador: *será que existe alguma maneira rápida e sem contar de um em um, de sabermos a cor de uma tampinha qualquer?* A seguir, relataremos, valendo-nos das transcrições das falas e dos relatos escritos dos estudantes, do desenvolvimento desta situação e os dados obtidos.

Figura 30: Desenvolvimento da Situação de Ensino 2 – Sequentopeia





Fonte: Acervo da pesquisadora

5.1.2.1 Cena 2.1: A busca da síntese coletiva da Situação de Ensino 2

Nesta cena, mostramos a busca da solução coletiva do problema desencadeador: *será que existe alguma maneira rápida e sem contar de um em um, de sabermos a cor de uma tampinha qualquer?* Nosso propósito era que os acadêmicos encontrassem uma maneira de descobrir um termo qualquer da sequência de cores da Sequentopeia, sem contar de um em um. Veremos, a seguir, a transcrição do momento da síntese coletiva do problema feita pela turma.

Quadro 18: Transcrição da Cena 2.1 - A busca da síntese coletiva da Situação de Ensino 2

(continua)

1. Pesquisadora: Grupos, vamos ver como vocês fizeram. Qual é o padrão da sequência?
2. Aluna B: Verde, vermelho e azul
3. Aluno C: Verde, cor de rosa e azul. Aqui é cor de rosa (lembrando que a rosa e vermelha estavam na mesma posição do padrão).
4. Pesquisadora: Todos conseguiram encontrar esse padrão?
5. Alunos: Sim.
6. Pesquisadora: Agora temos uma pergunta: qual é o 18º termo? Como vocês fizeram para descobrir?
7. Alunos: Azul.
8. Pesquisadora: Todo mundo encontrou que vai ser azul?
9. Alunos: Sim.
10. Pesquisadora: Então, como vocês encontraram que o 18º termo é o azul?
11. Aluno C: Contando.
(Áudio não compreensível)
12. Aluna V: Contando.
13. Aluna II: Se o nove é azul, o dez é verde, o onze é vermelho ...
14. Aluna MM: Ou até dá pra fazer 9 x 9, opa 2 x 9.
15. Pesquisadora: Então vocês foram contando?
[Alguns manifestaram com a cabeça que sim e outros que não]
16. Pesquisadora: Tá, ... e o 85º termo, vocês foram contando até o 85?
17. Alunos: Não!
18. Aluna MM: Para tirar a prova real, sim.
19. Pesquisadora: Então vocês contaram?
20. Aluna MM: Só para tirar a prova real.
21. Pesquisadora: Mas qual a outra maneira de eu encontrar qual é a cor desse termo?
22. Aluno C: A gente foi pela tabuada do três, pensando que 28 x 3 dá 84, ou seja, 84 é múltiplo de 3, então ele é o primeiro termo. Ai somamos mais um, e percebemos que era o 2º termo.
23. Pesquisadora: Então, qual é a cor que vocês encontraram?
24. Aluno C: Rosa
25. Aluna F: O nosso deu verde.
26. Aluna Q: O nosso também deu verde.
27. Pesquisadora: Quem encontrou verde, então me explica como fez.
[Vários alunos levantaram a mão para indicar que haviam encontrado o verde]
28. Aluna S: A gente fez 9 x 9 que dá 81, ai a gente contou mais 4 que deu 85 e descobriu.
29. Pesquisadora: Qual a cor que vocês descobriram mesmo?
30. Aluna S: Verde.
31. Aluna U: O múltiplo de 3 é o verde.
32. Pesquisadora: Quem mais descobriu de uma maneira diferente e que deu verde.
33. Aluna KK: Eu.
34. Aluna J: Aqui ó, eu coloquei 85 divido por 3, que é a sequência padrão que são 3 números, deu 28 e sobrou 1. Desse 1 eu diminui de 85 e daí deu 84 e a sequência seria o 84 que seria o azul e azul mais 1 seria o verde.
Pesquisadora: E vocês aqui, como fizeram?
35. Aluna KK: A gente considerou 9 termos, como 3 vezes o padrão, ou seja, o último termo seria azul, então 9 x 10 é 90 e a gente voltou 5 cores, e ai deu verde.
36. Pesquisadora: Alguém encontrou de outra maneira?
37. Aluna T: Nós encontramos vermelho.
38. Pesquisadora: Como vocês fizeram?
39. Aluna T: A gente tem 11 tampinhas aqui, então fomos até o 10º termo e contando: 10,20,30 ... até o 80 e depois somamos mais 5 cores, e deu o vermelho.
40. Aluna P: Mas como vocês tem 11 tampinhas?
41. Aluna T: A gente tem 11 tampinhas aqui.
42. Aluna P: Não ... vocês contaram a branca, e ela não faz parte.
43. Aluna T: Ahh
44. Aluna O: Era isso que eu não tava entendo (diz a integrante do mesmo grupo).
45. Pesquisadora: Alguém encontrou a cor de outra forma?
46. Alunos: Não
47. Pesquisadora: Então, se vocês fossem o professor da turma, e fizessem essa atividade com os alunos, e se eles perguntasse: professor qual será a 1000ª tampinha? Como vocês iriam explicar para eles a forma de descobrirem qual seria a tampinha? Como vocês explicariam isso?

Quadro 18: Transcrição da Cena 2.1 - A busca da síntese coletiva da Situação de Ensino 2 (conclusão)

[Alunos ficam pensativos e não respondem]
48. Pesquisadora: Como vocês explicariam qual a 1000º cor de tampinha? Sem contar de um em um.
49. Aluna Z: Eu acho que ia multiplicar o padrão, depois do resultado do padrão tu ia contar o que falta. No caso aqui deu 81, e a gente queria 85, então contaria mais 4.
50. Pesquisadora: Todos concordam que essa poderia ser uma maneira?
51. Aluna J: Eu tenho outra maneira: é o 1000º, descobrindo o padrão, tu pega o número que tu quer descobrir e divide pelo padrão, se der exata, você já tem o número que seria a última peça do padrão, se sobrar você pega os 1000 diminui com o resto da divisão, daí você vai descobrir a última cor da sequência, a partir dela tu soma e vai chegar no 1000, daí tu conta.
[Neste momento a pesquisadora pede para a acadêmica que resolva no quadro para os colegas o que ela acabou de explicar. A acadêmica explica no quadro resolvendo como fez, e então volta a discussão do grande grupo]
52. Pesquisadora: Todos concordam com a ideia da colega?
53. Aluna Z: Eu acho essa mais acessível.
54. Aluna J: Ela é bem básica
55. Aluna II: Eu ainda não cheguei nesse nível da matemática, valeu "Aluna J".
56. Aluna S: É, eu também não.
57. Aluna KK: Eu pensei mais ou menos nisso, só que pensei mais de cabeça, como o 999 é múltiplo de 3, então a próxima cor seria o verde.
58. Pesquisadora: Vocês estão vendo que além de usar o padrão utilizaram múltiplo, divisão ,... Então, como que eu posso descobrir um termo geral dessa sequência? Se eu digo geral, como eu posso representar esse termo, pode ser um termo qualquer.
59. Aluna E: O x.
60. Pesquisadora: E por que podemos usar o x?
61. Aluna E: Porque a gente não sabe qual termo é.
62. Pesquisadora: Então o x é o que?
63. Aluna E: Uma coisa desconhecida, um número desconhecido.
64. Pesquisadora: Então, vamos fazer de uma maneira coletiva, um jeito de descobrir qualquer termo. Como podemos fazer?
[Alunos não respondem, e a pesquisadora retoma como foi encontrado o 1000º termo pelos acadêmicos]
65. Pesquisadora: Então como podemos encontrar o termo x?
66. Aluna J: A gente divide o x pelo padrão.
67. Aluna B: Usa o resto
68. Aluna J: Olha quem é o termo na sequência, e depois subtrai.
69. Pesquisadora: Vocês compreenderam como foi feito para descobrir o termo x?
70. Alunos: Sim.

Fonte: Dados da pesquisa – realizado no dia 18/10/2019

A maioria dos grupos encontrou o 18.º termo, por meio da contagem, partindo do termo final da sequência, contando até o 18. Fazendo uso da contagem de um em um, os acadêmicos examinaram o objeto por si mesmo, sem fazer conexão com outros aspectos, o que pode ser caracterizado, segundo Davídov (1982), como uma forma de pensamento empírico. O pensamento empírico é baseado na observação das propriedades comuns dos objetos e na comparação das coisas. É aquele embasado pelos atributos particulares, e depois se pensa de forma análoga no geral.

Ao contarem de um em um, apoiaram-se em aspectos sensoriais que, baseados em experiências anteriores com a contagem, integraram essa maneira de resolver o problema, e deste modo, estes aspectos são representados na forma de ideias. O conhecimento sensorial associa-se ao pensamento empírico, que "derivado direto da atividade sensorial do homem sobre os objetos da realidade é, indiscutivelmente, a forma primária de pensamento, levando ao conhecimento do imediato da realidade" (ABRANTES; MARTINS, 2007, p. 316).

A Aluna MM, em sua fala (fala 14) "*ou até dá para fazer [...] 2 x 9",* supôs um outro jeito de descobrir a cor do termo. No registro escrito dela (Registro da Situação 2 - Grupo 1) não consta essa forma de solução, apenas diz que contou os elementos. Esse outro modo de descobrir o termo pode ter sido uma ideia desencadeada no momento da discussão. Enfatizamos novamente a significância da interação entre os sujeitos, uma vez que ela desenvolve conhecimentos que a pessoa ainda não consegue concretizar sozinha. A interação "entre os pares ou com os sujeitos mais experientes é importante porque representa uma relação democrática em sala de aula, mediante a qual valores como 'aprender a viver juntos' são desenvolvidos" (SFORNI, 2010, p. 1, grifo do autor).

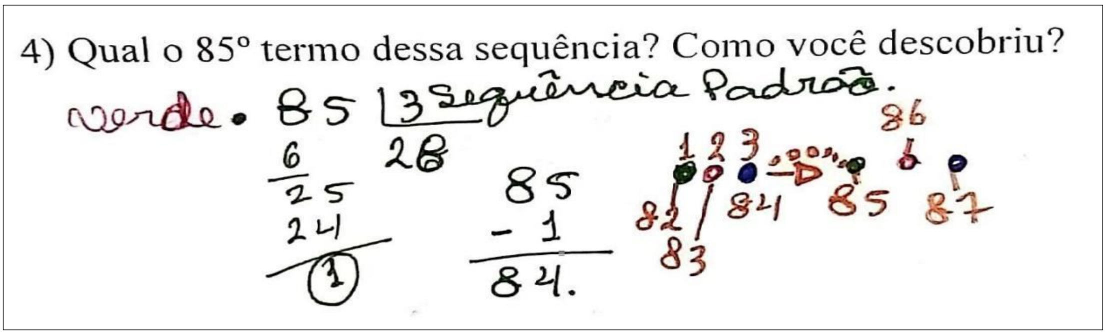
Podemos perceber nas falas e nos registros escritos dos acadêmicos em geral, que, para encontrar a cor do 18.º termo na sequência, o processo de contagem não iria ser muito demorado, visto que possuíam tampinhas suficientes para formar a Sequentopeia até o 9.º termo. Sendo assim, não sentiram necessidade de pensar em formas diferentes além de contar de um em um. Já para descobrir o 85.º termo, alguns grupos acabaram mudando a estratégia inicial de contar de um em um, o que revela terem eles sentido a necessidade de pensar uma forma matemática, que os auxiliasse, de modo mais rápido e eficaz, encontrar o termo pedido, portanto, usando outros conhecimentos matemáticos para solucionar o problema. Lembramos que conhecimentos matemáticos surgiram para a satisfazer as necessidades do homem (Moura et al., 2017), sejam elas básicas ou intelectuais, assim como a álgebra, que surgiu como uma forma de generalização dos problemas cotidianos ou matemáticos.

Inquiridos sobre qual a outra maneira de encontrar este termo, o Aluno C (fala 22) iniciou a discussão: "*a gente foi pela tabuada do três, pensando que 28 x 3 da 84, ou seja, 84 é múltiplo de 3, então ele é o primeiro termo. Ai somamos mais um, e percebemos que era o 2.º termo"*. A estratégia utilizada pelo grupo buscou encontrar um múltiplo de três (padrão) próximo ao 85.º termo, o que daria certo, se eles não tivessem se confundido com o raciocínio final. O grupo não pensou que o 84.º termo correspondia ao último termo do padrão de cor azul e, assim, o 85.º seria a próxima cor, que neste caso era o verde.

Depois da exposição do grupo sobre a cor do termo, outras acadêmicas se manifestaram, indicando terem encontrado uma cor diferente da que o Aluno C mencionou. A Aluna S (fala 28) mostrou para a turma e para a pesquisadora qual a forma de resolução que seu grupo havia encontrado: "*a gente fez 9 x 9 que dá 81, ai a gente colocou mais 4 que deu 85 e descobriu*". Conforme a fala e o registro do grupo (Registro da Situação 2 - Grupo 5), eles pensaram na quantidade total de tampinhas que formavam a Sequentopeia com nove termos e um múltiplo de nove que se aproximasse do 85. Como encontraram um múltiplo menor que o termo que buscavam, contaram mais quatro números, chegando que o 85.º seria da cor verde, seguindo a mesma linha de raciocínio seguida para encontrar o 18.º termo.

De maneira diferente da dos colegas, a Aluna J relatou como foi que seu grupo tinha encontrado a cor do que foi pedido: "[...] *eu coloquei 85 dividido por 3, que é a sequência padrão que são 3 números, deu 28 e sobrou 1. Esse 1 eu diminui de 85 e daí deu 84 e a sequência seria o 84 que seria o azul e azul mais 1 seria o verde*". Podemos ver no registro a seguir (Registro da Situação 2 - Grupo 14), o modo como esse grupo solucionou o problema, ou seja, fizeram uso dos conhecimentos aritméticos para encontrar a cor do termo pedido, pois, neste, objetivávamos encontrar um elemento único.

Figura 31: Registro do Grupo 14



Fonte: Dados da pesquisa

Semelhantemente a ideia de outro grupo, a Aluna KK (fala 36) explicou que "[...] *considerou 9 termos, como 3 vezes o padrão, ou seja, o último termo seria azul, então 9 x 10 é 90 e a gente voltou 5 cores, e ai deu verde*". De maneira geral, os grupos pensaram em formas semelhantes de encontrar o 85.º. Utilizaram os múltiplos de três, que é o padrão, somando, diminuindo termos ou vendo o total deles da sequência e seus múltiplos.

Desta forma, ao buscarem encontrar qual seria o 85.º termo, as estratégias utilizadas pelos estudantes foram baseadas em métodos aritméticos, não sentindo ainda neste momento a necessidade de um conhecimento algébrico. A necessidade do conhecimento algébrico pode ser desencadeada quando o uso da aritmética não é o suficiente para se resolver a situação ou tarefa proposta e, assim, é preciso pensar em uma de solução que exija um nível de pensamento mais elaborado.

Durante o desenvolvimento da situação nos grupos individuais, a pesquisadora, ao conversar com os acadêmicos pôde perceber o quanto gostaram da realização daquela tarefa com o uso de um material manipulável, tornando-a mais lúdica. Alguns mencionaram que seria interessante desenvolver ações desse tipo com as crianças em sala de aula, pois, além de contribuir para o desenvolvimento dos conhecimentos na criança, “o lúdico, em muitas propostas pedagógicas, apresenta-se como sinônimo de prazer, como uma forma de exercício da máxima liberdade pela criança, como um momento de ‘livre expressão’, desvinculado das ‘coerções’ da sociedade” (NASCIMENTO; ARAÚJO; MIGUÉIS, 2009, p. 299, grifos dos autores).

Antes da síntese coletiva, a pesquisadora sugeriu aos acadêmicos que se colocassem no lugar de professor da turma e pensassem em como poderiam explicar a um aluno, como descobrir a cor do 1.000.º termo daquela sequência formada pelas tampinhas. Diante dessa proposta, ninguém se manifestou, dizendo como poderia ser explicado a um aluno essa situação. Quando perguntados novamente como fariam isso, a Aluna Z (fala 50) comentou: “*eu acho que ia multiplicar o padrão, depois do resultado do padrão tu ia contar o que falta. No caso aqui deu 81, e a gente queria 85, então contaria mais 4”.* Essa fala mostra que ela pensou na forma como tinha resolvido com seu grupo e depois tentou generalizar para a suposição do termo a ser encontrado feito pela pesquisadora. Isso também aconteceu com os outros acadêmicos: eles partiram da forma como haviam solucionado o problema, para então indicar como poderia ser explicado a um aluno. Portanto, houve aí novamente uma generalização, de modo que

> Pode-se assinalar a seguinte função principal da generalização conceitual: no processo de estudo e de atividade prática, o homem utiliza diversas regras de ação. A condição para a aplicação da regra à situação concreta ou ao objeto único é sua referência prévia a uma determinada classe comum. Por isso é necessário saber "ver" este comum em cada caso concreto e único. O meio mais eficaz, que está na base de dita aptidão, são os sistemas de generalizações conceituais que possibilitam separar os traços identificadores precisos e unívocos de umas ou outras classes gerais de situações ou objetos. (DAVIDOV, 1988, p. 102)

Com base no exposto, vemos que o processo de generalização feito pelos acadêmicos neste momento e também mais tarde na síntese coletiva, foi de modo empírico, pois olharam o que foi comum aos casos particulares para então concluir em um caso geral. Para Leontiev (1975, p. 36) “[...] é precisamente o uso da linguagem que determina o pensamento teórico do homem”. A despeito de os acadêmicos conseguirem compreender uma forma de generalizar o problema, eles ainda não conseguiram se expressar em linguagem algébrica. Logo, não atingiram o pensamento teórico.

Uma outra maneira para ser explicado ao aluno, que também partiu da resolução dos casos particulares, foi dada pela Aluna J (fala 52): "[...] *é o 1000.º, descobrindo o padrão, tu pega o número que tu quer descobrir e divide pelo padrão, se der exata, você já tem o número que seria a última peça do padrão, se sobrar você pega os 1000 diminui com o resto da divisão, daí você vai descobrir a última cor da sequência, a partir dela tu soma e vai chegar no 1000, daí tu conta".* Como alguns colegas pareceram não entender o que ela explicou, foi pedido pela pesquisadora que ela fosse até o quadro e explicasse, resolvendo como pensou. Isso fez com que, no geral, a turma entendesse ser essa uma estratégia mais fácil de explicar ao aluno.

Como nosso problema desencadeador queria uma resposta para a seguinte pergunta: *será que existe alguma maneira rápida e sem contar de um em um, de sabermos a cor de uma tampinha qualquer?* e como os acadêmicos já haviam dado várias hipóteses para a solução do problema, buscaram uma forma de generalização da hipótese da colega, que foi aceita por todos. A aluna E mencionou (fala 60) que o termo a ser generalizado poderia ser representado pelo *x*, e justificou-se dizendo que o uso deste se dá *"porque a gente não sabe qual termo é",* refletindo seu pensamento por meio da atribuição da linguagem escolhida. Tanto o pensamento como a linguagem, no processo de ensino e aprendizagem, promovem um o desenvolvimento do outro, sendo interdependentes (VYGOTSKY, 1993).

A palavra "xis", quando mencionada pela acadêmica, remete ao significado desta palavra. Segundo Vigotski (2000), a palavra possui dois aspectos: o aspecto externo que se refere ao olhar voltado para nós e o aspecto interno que traz o seu significado. O uso da variável, representado pela palavra "xis", nesta situação, aconteceu, após a pesquisadora ter sugerido à turma que encontrassem uma forma de descobrir a cor de um termo qualquer da sequência. Sendo assim, a generalização está atrelada ao significado da palavra, sendo que

> Generalização e significado da palavra são sinônimos. Toda generalização, toda formação de conceitos é o ato mais específico, mais autêntico e mais indiscutível de pensamento. Consequentemente estamos autorizados a considerar o significado da palavra como um fenômeno do pensamento. (VIGOTSKI, 2001, p. 398)

De acordo com a fala da Aluna E (fala 63), podemos entender que para ela a variável representa "*uma coisa desconhecida, um número desconhecido",* o que se aproxima de seu significado social. Nesta situação, nosso objetivo era que os acadêmicos fizessem uso da variável para construírem uma forma geral de solução, ou seja, fizessem uso dela apenas para se aproximarem de uma generalização. Cabe ressaltar, que, em um encontro anterior, havia sido desenvolvida uma situação, que envolveu o conceito de variável e seu percurso no movimento lógico-histórico da álgebra (esta situação será apresentada no episódio 3).

A Situação 2 também tinha como objetivo promover o desenvolvimento do pensamento algébrico dos acadêmicos, visto que "A capacidade de manipulação de símbolos é um dos elementos do pensamento algébrico, que inclui a capacidade de interpretar e usar de forma criativa os símbolos matemáticos, na descrição de situações e na resolução de problemas" (PONTE; BRANCO; MATOS, 2009, p. 10).

A forma coletiva encontrada pela turma em saber um termo qualquer da *sequência* se deu, ao generalizar a ideia de resolução do grupo da Aluna J e representá-lo com um símbolo, que para eles seria o x. Ou seja, conseguiriam encontrar a cor do termo desconhecido, ao dividirem x pelo *padrão*, ao olharem o resto e ao subtraírem de x e virem qual seria o termo na *sequência* e adicionaram. Esta forma geral foi escrita no quadro por uma das acadêmicas com a ajuda da turma.

A partir da socialização das hipóteses dos grupos para uma possível resposta do problema desencadeador e das condições da situação na busca da aquisição de conhecimentos, temos que

> Nesta transformação do objeto está forçosamente latente o elemento criativo, o caráter educativo-atuante constituidor da aprendizagem daqueles conhecimentos, que se referem ao objeto da experimentação. Lá onde o mestre cria sistematicamente na sala de aula condições que exijam dos alunos obtenção de conhecimentos sobre o objeto por meio da experimentação com este, é onde as crianças deparam com as tarefas que exigem delas a realização da atividade de estudo. (DAVIDOV, 1999, p. 2)

Pelo percurso do desenvolvimento da situação até sua síntese final, podemos identificar algumas fases do desenvolvimento do pensamento algébrico mencionadas por Fiorentini, Fernandes e Cristóvão (2005). A fase de transição que vai do aritmético ao algébrico, no qual o estudante compreende a existência de um número qualquer e consegue designar alguns processos e, por fim, ao expressar a sua capacidade de pensar genericamente, tendo capacidade de expressar as variáveis por escrito, bem como operá-las, atinge um pensamento algébrico mais desenvolvido.

5.1.3 Síntese do Episódio 1

O ensino dos conceitos algébricos muitas vezes está relacionado apenas com a manipulação sem sentido de símbolos e com a resolução de equações e sistemas lineares, contudo, a álgebra vai além disso. Historicamente, alguns problemas cotidianos do homem giravam em torno da busca por *regularidades* e *padrões* na natureza. Necessidades como saber o período de enchente ou seca dos rios, adotar os *padrões* aos acontecimentos de seu cotidiano podem hoje ser atrelados ao estudo das progressões aritméticas e geométricas (PANOSSIAN; MOURA, 2012, p. 1).

Essas questões, inicialmente práticas, em que o homem fez uso das *sequências* para a compreensão e registro das *regularidades* dos fenômenos que ocorriam ao seu redor, culminaram em problemas que foram se desenvolvendo com maior rigor de abstração e generalização. O desenvolvimento do pensamento algébrico, do mesmo modo, está ligado ao estudos dos *padrões,* que podem ser explorados em vários contextos (PIRES; SILVA, 2011). Segundo Vale et al. (2006), vários investigadores e organizações defendem que as capacidades do raciocínio algébrico podem ser desenvolvidas com a contribuição da exploração dos *padrões*.

Por meio das duas situações de ensino desse episódio buscamos explorar com nossos sujeitos os nexos *sequência*, suas *regularidades* e *padrões*. Na Situação 1, objetivamos que os acadêmicos percebessem a essência do conceito em fenômenos relacionados à natureza. Já na Situação 2, nossa intenção era que conseguissem fazer uma generalização da sequência por meio do padrão encontrado nela, ao formular uma maneira de encontrar a cor de um termo qualquer da Sequentopeia.

> Quando apelamos aos padrões no ensino da matemática é normalmente porque queremos ajudar os alunos a aprender uma matemática significativa e/ou envolver-se na sua aprendizagem facultando-lhes um ambiente de aprendizagem que tenha algo a ver com a sua realidade e experiências. O estudo dos padrões vai ao encontro a este aspecto, apoiando a aprendizagem dos estudantes para descobrirem relações, encontrarem conexões, fazerem generalizações e também previsões. (Vale et al., 2006, p. 6)

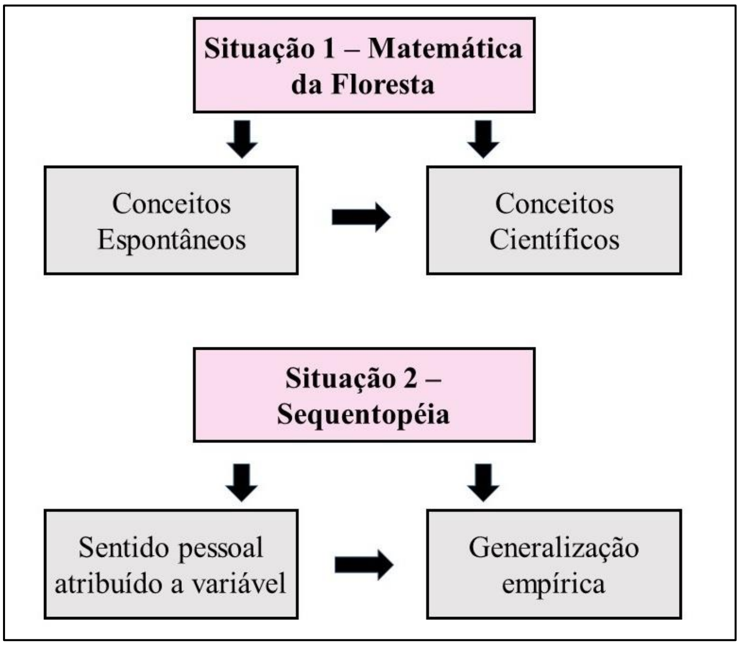
Podemos perceber que em ambas as situações os acadêmicos se mostraram envolvidos em resolver o problema desencadeador. Colocaram-se em um movimento de pensar em uma forma mais geral e menos específica, relacionaram a alguns conceitos já estudados anteriormente. Assim sendo,

> a atividade de ensino de matemática coloca o sujeito diante de situações desafiadoras que o farão organizar um conjunto de conhecimento que possui, com o propósito de solucionar o conflito causado pela necessidade de resolver o problema para o qual não dispõe, de forma imediata de conhecimentos já prontos para solucionar. (MOURA; LANNER DE MOURA, 1998, p. 12)

Segundo Sousa (2004), o ensino pode ser compreendido como atividade quando for capaz de satisfazer as necessidades dos estudantes na busca pelo conceito, e nesta perspectiva, suas necessidades devem estar em sintonia com as necessidades de sua comunidade de aprendizagem. Acreditamos que as situações deste episódio podem ter despertado nos estudantes (embora não todos) o movimento de estarem em atividade, pois conseguimos elencar elementos da atividade de Leontiev (1983), durante o desenvolvimento do problema desencadeador até a síntese coletiva.

Tendo o propósito, neste episódio, de verificar a aprendizagem dos acadêmicos em duas situações de ensino referentes aos nexos conceituais *sequência*, *regularidade* e *padrão,* podemos concluir que, na Situação 1, a síntese partiu dos conceitos espontâneos dos acadêmicos até uma aproximação aos conceitos científicos. Já na Situação 2, a síntese se deu a partir de uma generalização empírica, através dos sentidos que alguns acadêmicos atribuíram à variável. O episódio 2 que traz desenvolvimento e análise da Situação 3 encontra-se no próximo item.

Figura 32: Síntese do Episódio 1



Fonte: Sistematização da autora

5.2 EPISÓDIO 2: FLUÊNCIA E INTERDEPENDÊNCIA

Este episódio se volta para o desenvolvimento e a análise de uma das ações realizadas nesta pesquisa, direcionadas ao entendimento dos nexos fluência e interdependência.

Quadro 19: Situação de Ensino do Episódio 2

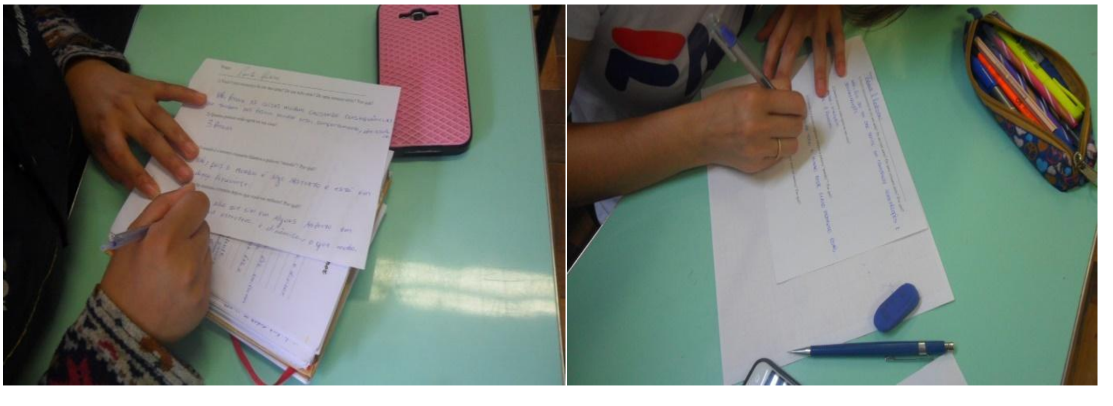
Situação de Ensino	Objetivo
Situação 3: ***Movimentos da Vida***	Entender sobre os movimentos da vida e a sua interdependência, que tudo está em constante evolução, tudo flui e não permanece sempre a mesma coisa.

Fonte: Sistematização da autora

5.2.1 Situação 3 – Movimentos da vida

No terceiro encontro com a turma foi desenvolvida a Situação de Ensino 3, intitulada como *Movimentos da Vida*. Para tanto, foi entregue a cada um dos acadêmicos uma folha de registro com quatro perguntas. Esperávamos que eles conseguissem perceber as constantes mudanças de fenômenos. A seguir, relataremos o desenvolvimento desta situação e os dados obtidos por meio das transcrições das falas dos estudantes e seus registros escritos.

Figura 33: Desenvolvimento da Situação 3 – Movimentos da Vida



Fonte: Acervo da pesquisadora

5.2.1.1 Cena 3.1: A busca da síntese coletiva da Situação de Ensino 3

Nesta cena, mostraremos a busca da solução coletiva da Situação de Ensino 3. Nosso objetivo era que os acadêmicos entendessem sobre a fluência e a interdependência existente em diversos fenômenos da vida. A seguir a transcrição do momento da síntese coletiva feita pela turma.

Quadro 20: Transcrição da Cena 3.1 - A busca da síntese coletiva da Situação 3

(continua)

1. Pesquisadora: A pergunta número um era: Você é o mesmo de um ano atrás? De um mês atrás? De uma semana atrás? Por quê? O que vocês responderam ai? **2. Aluna II:** Não, não, não. **3. Pesquisadora:** Vocês são os mesmos? **4. Alunos:** Não. **5. Pesquisadora:** Por quê? **6. Aluna I:** Porque não, a gente tá em constante evolução sempre. **7. Pesquisadora:** Humm, estamos em constante evolução ... o que mais vocês colocaram? **8. Aluna K**: Eu coloquei que to sempre aprendendo alguma coisa diferente. **9. Aluna LL:** Eu coloquei que as coisas mudam porque causam consequências que nos fazem mudar, tipo comportamento, decisões. **10. Pesquisadora:** Muito bom! Alguém quer comentar mais alguma coisa? **11. Aluna AA:** Eu coloquei que não, porque tudo muda o tempo todo, eu to sempre aprendendo coisas novas e isso faz parte do processo evolutivo. **12. Aluno C:** Eu coloquei que de fato eu não sou o mesmo nem de um segundo atrás, a cada momento interagimos com o mundo e mudamos quem somos, o que pensamos e o que sentimos. **13. Pesquisadora:** Exatamente! Pessoal e na número dois o que vocês colocaram? Quantas pessoas estão agora na casa de vocês? **14. Aluna KK:** Eu respondi que espero que não tenha nenhuma pessoa na minha casa [risos]. **15. Aluna F:** Eu coloquei que tem uma. **16. Aluna K:** Eu coloquei que tem duas. **17. Pesquisadora:** Alguém colocou alguma coisa diferente em relação ao número de pessoas que estão em casa? **18. Aluna P:** Eu coloquei o número de pessoas das minhas três casas. **19. Aluna F:** Mas tem que ser o número de agora? Nesse momento? **20. Pesquisadora:** Sim **21. Aluna F:** Ah, daí eu não sei, porque eu moro com uma colega, e não sei se ela tem aula. E na minha casa de Santa Catarina, eu também não sei, porque a minha irmã pode estar em casa ou não. **22. Pesquisadora:** Então pessoal, quem respondeu quantas pessoas estão em casa nesse momento, vocês tem certeza que essas pessoas estão em casa mesmo? **23. Alunos:** Sim. **24. Aluna II:** Eu recém falei com a minha irmã e ela tava em casa. **25. Pesquisadora:** Mas não pode ter acontecido alguma coisa que em algum momento alguém teve que sair, ou de repente chegar alguém? **26. Alunos:** Não! **27. Aluna L:** Só se estiverem assaltando a minha casa. **28. Aluna CC:** Só se meu marido tiver com outra. [Risos e conversa sobre a resposta de colega] **29.Aluno C:** Eu tenho três casas, uma é lá em Venâncio onde eu morava que é a casa da minha família, outra que é a casa do estudante que tem oito pessoas e eu não sei quem tá em casa e quem não tá e a outra é a casa que eu passo mais tempo que é a casa da namorada. **30. Aluna Q:** Mas, tem uma pessoa lá, viu. **31. Aluno C:** É, tem um pessoal lá que deve estar em casa. **32. Pesquisadora:** Olhem só, na número um (se refere a pergunta anterior) vocês falaram que estão em constante mudança, transformação ... em relação a casa de vocês, vocês podem afirmar com toda certeza que em algum momento tem um número de pessoas em casa? **33. Alguns alunos:** Sim. **34. Alguns alunos:** Não

Quadro 20: Transcrição da Cena 3.1 - A busca da síntese coletiva da Situação 3

(conclusão)

[Alguns continuaram afirmando que sabiam e outros afirmando que não sabiam] **35. Pesquisadora:** Como vocês ainda estão pensativos sobre essa questão, vamos retornar no final a ela e tentar refletir sobre todas as questões. Na número três, o que vocês colocaram? O mundo é o mesmo enquanto falamos a palavra mundo? **36. Alunos:** Não! **37. Pesquisadora:** E por que não é o mesmo? **38. Aluno D:** Eu respondi que não, porque acontecem coisas a todo momento. **39. Aluna A:** Eu coloquei assim, tudo se modifica e a cada respirar o mundo está girando e as pessoas se transformando. **40. Aluna K:** Eu coloquei que tá sempre surgindo coisas novas, coisas boas e coisas ruins. **41. Aluna GG:** Eu coloquei não porque enquanto falamos muitas coisas estão acontecendo ao mesmo tempo, se modificando. **42. Pesquisadora:** Alguém respondeu alguma coisa diferente dos colegas? [Alunos respondem que não] **43. Pesquisadora:** Pessoal, na número quatro a escola continua a mesma depois que você vai embora? Por quê? **44. Aluna M:** Eu coloquei não. **45. Aluna K:** Depende, o prédio continua no mesmo lugar, mas quando eu estou e quando eu saio tento fazer a diferença. **46. Aluna A:** Eu coloquei assim, depende, a escola é algo material, a não ser que alguém a modifique, porque ela não se modificará sozinha. **47. Aluno D:** Eu já coloquei diferente, a escola quanto aspecto físico e aspecto pedagógico elas mudam, mas o aspecto físico o tempo vai fazendo a sua própria mudança **48. Aluno C:** Eu não consigo entender a escola como prédio, porque a partir do momento que a gente pensa aquele prédio como uma organização, com professores, com crianças para que se tenha sentido, senão não tem sentido. Então, partindo disso, a escola passa a ser tudo que acontece lá, com todas as pessoas, e aí aquilo lá é só um prédio, onde a gente se reúne pra fazer isso. [Vários alunos concordam com a colocação feita pelo Aluno D] **49. Aluna L:** Seria igual a qualquer outro lugar, paredes. Posso ler o meu? **50. Pesquisadora:** Sim **51. Aluna L:** Não, porque naquele momento eu dei minha contribuição, tudo é um processo, uns vão e outros vem e cada tempo é diferente. Ela (se refere a escola) é só parede, o que envolve é o plano aqui dentro. **52. Pesquisadora:** Agora, vamos encontrar um sentido geral para essas quatro perguntas. O que elas tem de semelhança? **53. Aluna E:** A questão do tempo. **54. Pesquisadora:** O que mais? **55. Aluna KK:** Mudanças **56. Pesquisadora:** E por que ocorrem mudanças? **57. Aluna E:** Por causa das pessoas **58. Aluna L:** Como eu falei que tudo muda o tempo todo, e a gente não manda nesse processo, porque uma coisa que ficou pode ser que não esteja mais lá. Porque é constante movimento. **59. Pesquisadora:** Exatamente. O que mais? **60. Aluno C:** Eu acho que é isso, as mudanças que acontecem a toda hora. **61. Pesquisadora:** E o que isso tem a ver com a matemática? [Alunos não respondem] **62. Pesquisadora:** Será que na matemática também existem essas mudanças? **63. Aluna L:** Eu acho que sim [Alguns continuam quietos, então pesquisadora comenta sobre o nexo fluência na matemática]

Fonte: Dados da pesquisa – realizado no dia 11/10/2019

Percebemos que aspectos relacionados ao movimento e à transformação das coisas estiveram presentes em muitas respostas dos acadêmicos durante a busca da síntese coletiva do problema desencadeador. A fala da Aluna I (fala 6) "... *a gente tá em constante evolução sempre*", da Aluna AA (fala 11) "... *tudo muda o tempo todo, eu to sempre aprendendo coisas novas e isso faz parte do processo evolutivo"* e do Aluno C (fala 12) "... *de fato eu não sou o mesmo nem de um segundo atrás, a cada momento interagimos com o mundo e mudamos quem somos, o que pensamos e o que sentimos"* nos dão indícios da compreensão deles sobre as mudanças pessoais que ocorrem a todo instante. Referindo-se a si mesmos, perceberam que os conhecimentos e as aprendizagens adquiridas nas diversas situações que vivem influenciam em sua evolução como ser humano. Corroborando a ideia de Heráclito, o ser não é estático, [...] "é mudança constante, eterno fluxo no qual tudo muda, tudo nega o dado anterior, sem contudo, deixar de retornar a sua fonte" (MENEGHETTI et al., 2009, p. 1655)

As mudanças ocorridas, quando interagimos com o mundo ao nosso redor, como foi destacado pelo Aluno C (fala 12), nos faz pensar na importância das relações sociais. Segundo Leontiev (1978), cada indivíduo aprende a ser um homem, ao adquirir o que foi obtido no desenvolvimento histórico da sociedade humana. Seu desenvolvimento, seu comportamento e seus processos psíquicos são de natureza social. O homem humaniza-se a partir das relações sociais com outros sujeitos, transformando o meio em que vive e também a si mesmo por meio de aprendizagens e trocas de conhecimentos. Sendo assim, a humanização do homem também está em constante movimento.

A pergunta dois foi a que demandou mais questionamentos dos acadêmicos quando deram suas respostas. Os estudantes, inicialmente, responderam a essa questão, relatando quantitativamente o número de pessoas que havia em sua casa, ainda não percebendo a imprecisão de uma possível resposta para essa pergunta. Questionados novamente pela pesquisadora, alguns continuaram respondendo o número de pessoas, mas a Aluna F (fala 19) refletiu novamente e perguntou "*mas tem que ser o número de agora? Nesse momento?"* o que nos faz pensar que a questão do tempo estar relacionada ao que ocorria naquele exato momento levou a acadêmica a levantar hipóteses quanto aos possíveis compromissos das pessoas que ela achava que estariam em sua casa, como vemos em sua próxima fala (fala 21) "*ah daí eu não sei, porque eu moro com uma colega, e não sei se ela tem aula. E na minha casa de Santa Catarina, eu também não sei, porque a minha irmã pode tá em casa ou não".*

Esta percepção da aluna F, em relação às respostas quanto às pessoas que estariam em cada uma de suas casas, associa-se ao nexo interdependência, ou seja, a sua resposta também dizia respeito ao local ao qual se referia. Vemos, ainda, em sua fala, indícios da presença do nexo fluência, pois, ao se questionar sobre os fatores externos que poderiam mudar o rumo das pessoas naquele exato momento, a acadêmica demonstrou perceber que não poderia estimar com certeza um número para esta resposta, como havia feito anteriormente.

Ao se atentar para os aspectos relacionados a essa pergunta, a acadêmica demonstrou evidenciar seu pensamento sobre os possíveis motivos que influenciaram sua resposta, demonstrando ter compreendido as mudanças que poderiam, de fato, ocorrer na rotina das pessoas. Essa ideia ratifica o que diz Caraça (1951) sobre o fato de qualquer um conseguir verificar a presença do conceito de fluência, ao fixar sua atenção seja qual for o objeto.

Ao ser novamente discutida essa questão, uns levantaram algumas hipóteses que poderiam ocorrer, como disse a Aluna L (fala 27): "*Só se estiverem assaltando a minha casa"* e da Aluna CC (fala 28): *"Só se meu marido tiver com outra".* Mas, mesmo assim, nem todos ainda não estavam convencidos de que uma possível resposta para essa pergunta dependeria de vários fatores, sobre os quais eles não tinham como ter controle.

Corroborando as evidências dadas nas respostas da pergunta número um sobre a questão do movimento e a permanente transformação das coisas ao nosso redor, os acadêmicos, em suas respostas às perguntas três e quatro, também perceberam esses aspectos de modo mais acessível. Nas respostas relacionadas à pergunta três, relataram sobre os eventos que ocorrem a todo tempo e das coisas que se modificam a todo instante, enquanto falamos a palavra mundo, como observou a Aluna A (fala 39) "*... tudo se modifica e a cada respirar o mundo está girando e as pessoas se transformando"*. Podemos perceber que as respostas foram parecidas, visto que associaram o mundo à transformação das pessoas que nele habitam, demonstrando fácil entendimento acerca de uma possível resposta para essa questão.

Nas falas da Aluna K (fala 45) "*depende, o prédio continua no mesmo lugar, mas quando eu estou e quando eu saio tento fazer a diferença"* e da Aluna A (fala 46) "*... depende, a escola é algo material, a não ser que alguém a modifique, porque ela não se modificará sozinha*", percebemos a dúvida delas, ao considerar a escola apenas como o espaço físico ou como espaço de aprendizagem e interação entre as pessoas. Ao se referirem à escola como um espaço físico, as acadêmicas não demonstraram que haveria alguma mudança depois que fossem embora, o que nos leva a pensar que para elas o espaço físico não sofreria transformações.

Evidenciando que, em ambos os aspectos dado a escola, esta sofreria alterações o Aluno D (fala 47) comentou que "*... a escola quanto aspecto físico e aspecto pedagógico elas mudam, mas o aspecto físico o tempo vai fazendo a sua própria mudança"*. Ao pensar sobre o lugar físico ocupado pela escola, vemos que este também sofre alterações, visto que uma estrutura, ao longo de um período, se modifica, seja pelo desgaste do tempo, seja, até mesmo, pelas minuciosas partículas que se depositam na estrutura todos os dias, como a poeira.

O ambiente escolar, para a maioria dos acadêmicos, apenas tem coerência quando relacionado à comunidade que dele faz parte, como vemos na menção do Aluno C (fala 48) "*eu não consigo entender a escola como prédio, porque a partir do momento que a gente pensa aquele prédio como uma organização, com professores, com crianças para que se tenha sentido, senão não tem sentido. Então partindo disso, a escola passa a ser tudo que acontece lá, com todas as pessoas, e aí aquilo lá é só um prédio, onde a gente se reúne pra fazer isso".* Deste modo, para o Aluno C, as pessoas fazem a escola e, assim, há uma interdependência entre a comunidade escolar e este espaço de desenvolvimento humano. A escola não existe sem as pessoas que dela fazem parte.

Apesar de não ser o objetivo desta situação, durante o seu desenvolvimento, surgiram questões quanto ao conceito de escola. Suas manifestações levam a entender que o sentido pessoal atribuído por eles coincide com seu significado social. Indo além de sua estrutura física, a escola é um espaço formado por vários sujeitos envolvidos no processo educativo, "é o local por excelência para o desenvolvimento do processo de transmissão – assimilação do conhecimento elaborado" (OLIVEIRA, 1992, p. 92). Ela é a instituição responsável pela formação e pelo desenvolvimento dos sujeitos para que sejam capazes de compreender o mundo ao seu redor de forma crítica e sensata.

Ao buscarem uma síntese coletiva sobre a semelhança entre as perguntas, foram destacados aspectos como o tempo e as mudanças ocorridas a todo momento. A ideia da Aluna L (fala 58) "*como eu falei que tudo muda o tempo todo, e a gente não manda nesse processo, porque uma coisa que ficou pode ser que não esteja mais lá. Porque é constante movimento*" confirma a de seus colegas, ao serem questionados sobre a semelhança entre as perguntas e até mesmo quando responderam cada uma delas de forma separada. Acerca deste constante movimento destacado pela acadêmica e seus colegas, podemos relembrar o filósofo Heráclito, que começou a olhar o mundo e procurar entender a existência, a questão do movimento e assim a mudança constante das coisas ao nosso redor. Heráclito "[...] não vê no mundo nada permanente. Mais bem lhe parece que a mudança contínua de todas as coisas é verdadeiramente essencial e característico: "Tudo flui, nada permanece" (CAPELLE, 1981, p. 73 apud MARTINS, 2007, p. 58).

Sendo assim, percebemos indícios de relação com o nexo fluência nas reflexões dos estudantes, ao responderem às perguntas envolvidas na situação, quando mencionaram sobre as mudanças que acontecem a todo instante, as transformações de algo que era e deixou de ser, o constante movimento dos fenômenos da vida. Caraça (1951) chama de fluência essa constante evolução do mundo. O sentido pessoal atribuído por cada um a essas questões também constituíram a síntese coletiva da Situação 3, visto que em suas hipóteses relacionaram suas visões pessoais do mundo às possíveis respostas das questões.

5.2.2 Síntese do episódio 2

Para Caraça (1951), a compreensão da realidade feita pelo homem apresenta duas características essenciais: a interdependência e a fluência. A primeira refere-se à relação existente entre as coisas, que não acontecem de forma isolada. Já a segunda, diz respeito às mudanças, à permanente evolução das coisas e ao seu movimento natural de transformação.

Ao pensar na fluência dos fenômenos da vida e desta ser geralmente relacionada aos aspectos ligados à filosofia, o que isso tem a ver com a matemática? E mais especificamente com a álgebra? Muitos estudiosos que começaram a pensar em compreender a realidade a partir da observação da natureza e que ao longo do tempo foram aprofundando seus estudos que culminaram no desenvolvimento da matemática eram filósofos. O pensamento dos filósofos se fez essencial na construção dos conhecimentos científicos matemáticos.

A realidade da qual fazemos parte é constituída de vários movimentos da vida. Bohm (1980) entende que, ao analisar esses movimentos e as distintas teorias existentes, também é essencial refletir sobre as diversas álgebras. Para este autor, as diversas álgebras não são teorias prontas e acabadas, que, ao serem compreendidas, admitem discorrer sobre os diversos movimentos da vida. Ao tentar compreender como se deu o lógico-histórico da álgebra, notamos que os problemas cotidianos que, inicialmente resultaram em seu surgimento, eram problemas relacionados ao movimento e, assim, essas diversas álgebras buscaram compreender os movimentos da realidade.

Segundo Sousa, Panossian e Cedro (2014, p. 98), o movimento lógico-histórico da álgebra deriva de diversas teorias, "é o que a conecta ao movimento do seu vir a ser". Entender o nexo fluência e sua importância na apropriação dos conceitos algébricos nos faz pensar que organizar um ensino que viabilize ao estudante compreender não só os movimentos da vida, mas também aqueles que constituem a sua essência se faz essencial no desenvolvimento de seu pensamento algébrico.

Com o objetivo de identificar os indícios de aprendizagem de nossos sujeitos no desenvolvimento da Situação 3, observamos, por meio dos registros e do diálogo da turma na busca da solução coletiva, que as perguntas que compuseram nossa situação desencadearam um olhar mais específico dos acadêmicos para questões simples que envolvem o movimento e a evolução dos fenômenos relacionados a nossa realidade. Em suas respostas demonstraram, em sua grande maioria, compreender as modificações existentes nas coisas ao seu redor e em si próprios. Das quatro perguntas do registro, em pelo menos três delas a grande maioria entendeu a essência do movimento presente nas situações referidas.

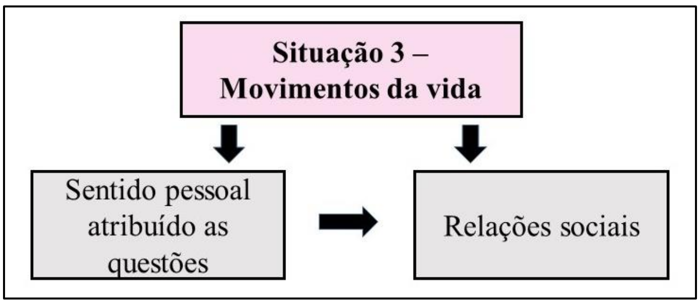
Na pergunta dois, sobre o número de pessoas em sua casa naquele momento, inicialmente nem todos se convencerem de que uma possível resposta para essa pergunta seria um pouco complexa. A partir das hipóteses dos acadêmicos que perceberam a fluência existente nessa questão, alguns reformularam suas respostas.

Reiteramos a significância das relações sociais na formação do sujeito. Vigotski (2014) diz que as funções psicológicas superiores surgem duas vezes no desenvolvimento intelectual: a primeira nas atividades sociais – interpsíquico, e a segunda nas atividades individuais – intrapsíquico. Assim, os estudantes ao terem a oportunidade de interagir com seus colegas e professor acabam apropriando-se de novas formas de pensar e promover o seu desenvolvimento psíquico.

Compreender sobre os movimentos dos fenômenos da vida e da nossa realidade nos faz refletir que a fluência é uma característica necessária do movimento do pensamento humano. Ela está presente durante todo o processo da evolução da humanidade até os dias atuais e, consequentemente, no desenvolvimento dos conceitos matemáticos, mais especificamente algébricos.

Assim, pensando no futuro professor, vemos que seu processo de formação também é constituído de movimentos, principalmente, no movimento de aprender ensinar. Nossa pesquisa teve como foco o aprender e o ensinar na formação dos nossos sujeitos participantes de nosso estudo. No episódio, a seguir, traremos o desenvolvimento e a análise das situações referentes aos nexos variável e campo de variação.

Figura 34: Síntese do Episódio 2



Fonte: Sistematização da autora

5.3 EPISÓDIO 3: VARIÁVEL E CAMPO DE VARIAÇÃO

Duas Situações de Ensino que envolvem os nexos conceituais algébricos variável e campo de variação serão discutidas neste episódio.

Quadro 21: Situações de Ensino do Episódio 3

Situação de Ensino	**Problema Desencadeador**	**Objetivo**
Situação 4: ***Problema do caminho***	**Que forma será mais eficiente e rápida para descrevermos o caminho, de modo a que todos consigam compreender?**	Levar os acadêmicos a percepção da dificuldade de descrever o caminho proposto na Situação 4 sem nenhum parâmetro e, assim, compreender a necessidade de usar alguns símbolos para facilitar a descrição do caminho de forma precisa, de maneira rápida e eficaz.
Situação 5: ***Problema da altura da pirâmide***	**Como vou escrever a altura da coluna, considerando as 12 pedras já colocadas, as 60 pedras do depósito, que podem ser usadas todas ou não, e a altura que eu ainda desconheço? Como escrever isso em linguagem matemática?**	Compreender o uso da variável e seu campo de variação, e por meio desta Situação 5 entender que a variável não pode assumir qualquer valor, pois possui um máximo e um mínimo.

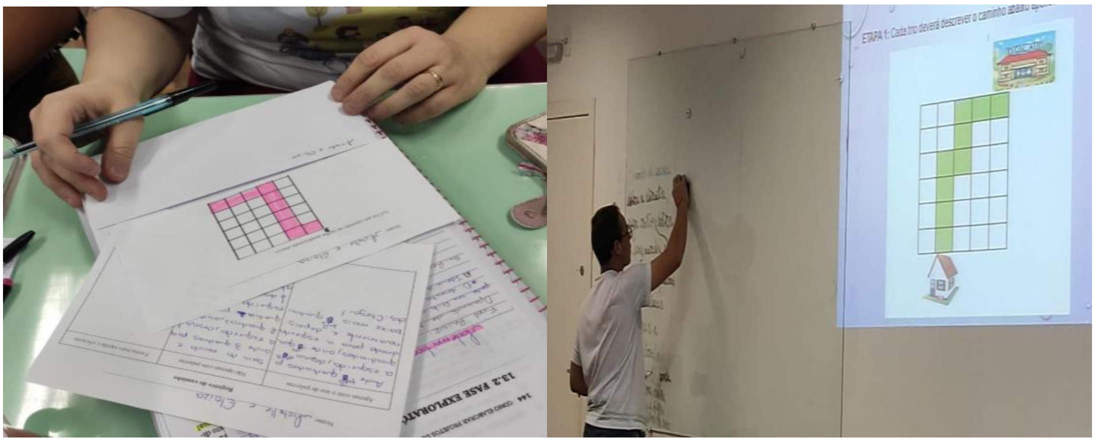
Fonte: Sistematização da autora

5.3.1 Situação 4 – Problema do Caminho

A situação 4, denominada *Problema do Caminho,* foi desenvolvida no segundo encontro com a turma. Para sua execução, os acadêmicos, individualmente ou nos grupos, deveriam expor as suas táticas para solucionar o seguinte problema desencadeador: *que forma será mais eficiente e rápida para descrevermos o caminho, de modo que todos consigam compreender?*

A seguir, relataremos o desenvolvimento desta situação e os dados obtidos por meio das transcrições das falas dos estudantes e seus registros escritos.

Figura 35: Desenvolvimento da Situação 4 – Problema do Caminho



Fonte: Acervo da pesquisadora

5.3.1.1 Cena 3.1: A busca da síntese coletiva da Situação de Ensino 4

Esta cena apresenta a busca da solução coletiva da Situação de Ensino 4. Nosso objetivo era que os acadêmicos percebessem a dificuldade de descrever o caminho proposto na situação sem ter nenhum parâmetro e, assim, compreender a necessidade de usar alguns símbolos para facilitar a descrição do caminho de forma precisa, de maneira rápida e eficaz.

Quadro 22: Transcrição da Cena 3.1 - A busca da síntese coletiva da Situação de Ensino 4

(continua)

1. Pesquisadora: Como que nós podemos agora descrever esse caminho em **palavras**? **2. Aluna BB:** Saindo da escola pela direita ... **3. Aluno C:** Mas daí é considerando que ele está olhando pela frente da escola **4. Pesquisadora:** E depois pessoal? **5. Aluna Z:** É melhor ali colocar que dobra a direita **6. Aluna S:** Ai segue reto **7. Aluna B:** Dobra a esquerda **8. Pesquisadora:** Então vamos ver como está ficando a descrição do nosso caminho até agora: Saindo da escola, dobre a direita, siga reto, dobre a esquerda. E agora, como continuamos? **9. Aluna K:** Mas acho que está meio estranho **10. Pesquisadora:** Estou escrevendo o que vocês estão falando. **11. Aluna BB:** Eu só falei a parte inicial ... **12. Aluna BB:** Eu acho que está faltando colocar a quantidade de quadrinhos ... tipo tu anda reto três quadrinhos **13. Aluna II:** Ou siga reto por três quadras... **14. Pesquisadora:** O que vocês preferem, quadrinhos ou quadras? **15. Alunos:** Quadras. **16. Pesquisadora:** Mas por que quadras?

Quadro 22: Transcrição da Cena 3.1 - A busca da síntese coletiva da Situação de Ensino 4 (continuação)

17. Aluna B: Eu acho que fica mais normal, porque se a gente anda na rua não vai dizer pra uma pessoa pra ela andar por dois quadrinhos né...
18. Aluna BB: Então, no dobra a esquerda tem que colocar que é duas quadras.
19. Aluno C: Siga por duas quadras ...
20. Pesquisadora: E está pronto o caminho ou tem mais alguma coisa para acrescentar?
21. Aluna AA: Tem que colocar dobre a direita novamente.
22. Aluna BB: Ande uma quadra e dobre a esquerda siga reto até o final da rua.
23. Pesquisadora: Então vamos ver agora como que ficou a descrição do caminho: Saindo da escola, dobre a direita, siga reto por três quadras, dobre a esquerda e siga por duas quadras, dobre a direita novamente, ande uma quadra, dobre a esquerda e siga reto até o final da rua. Esse é o caminho de vocês?
24. Alunos: Sim.
25. Pesquisadora: O que vocês acharam em descrever esse caminho apenas com palavras?
26. Aluna R: Não é difícil, mas precisa prestar bastante atenção para não errar.
27. Aluna AA: É ... mas é meio estranho, porque é difícil usar só palavras pra escrever alguma coisa, tipo sem número nem nada.
28. Aluna Z: Falando nisso, a gente aqui no grupo achou que só com palavras queria dizer que não dava pra escrever o número, assim, escrever o número de quadrinhos sabe. Por isso no nosso aqui não tem número, só tem pra onde deve andar.
29. Aluna AA: Tá, mas e como que a pessoa iria saber quantas quadras que anda se não tem número?
30. Aluna Z: Pois é, não sei [risos]. A gente devia ter perguntado pra professora se tava certo isso.
31. Pesquisadora: Tudo bem, mas a representação escrita do número podia ser usada, por exemplo, se queriam escrever que andou três quadras, era só escrever o número três por extenso.
32. Aluna Z: Ah, tá.
33. Pesquisadora: Agora, depois desse caminho que vocês descreveram, observem na segunda coluna da folhinha de vocês que temos que descrever esse mesmo caminho mas não usando apenas as palavras como fizemos.
34. Aluna S: Podemos usar números?
35. Pesquisadora: Sim, podem usar a representação numeral. O que mais podemos usar que não seja apenas palavras?
36. Aluna II: Desenho, setas ...
37. Pesquisadora: Isso, descrevam esse caminho não apenas com palavras. Como podemos fazer? O que será que vai mudar de um caminho para o outro?
38. Aluna I: Eu usei sinal de + e números [menciona como ela fez o caminho na folhinha]
39. Pesquisadora: Muito bom! O que mais vocês utilizaram?
40. Aluno C: A gente usou setas e a indicação de quantas quadras deveriam andar naquela direção.
41. Aluno H: Nós usamos números, desenho de uma pessoa, indicação para onde ele vai.
42. Aluna Z: A gente fez igual ao primeiro caminho, mas daí colocamos neste os números.
43. Pesquisadora: Então, como podemos fazer o mesmo caminho que fizemos aqui no quadro não usando apenas palavras?
44. Aluna P: Faz umas setas...
45. Pesquisadora: Então vem aqui no quadro e vamos fazer juntos essa nova descrição do caminho. Pessoal, vamos ajudar a colega a descrever de uma maneira mais fácil esse caminho que está aqui. [Acadêmica vai no quadro e segue as instruções dadas pelos colegas]
46. Pesquisadora: Então, saindo da escola dobra a direita ... como podemos mudar isso?
47. Aluna OO: Três a direita.
48. Aluno C: Mas três o que? Três quadras?
49. Aluna K: Coloca assim: Siga em frente, dobre a esquerda, ande duas quadras.
50. Aluna P: Vamos ver a primeira coisa para escrever.
51. Aluno C: Ele saiu da escola e andou a direita
52. Aluna NN: Não, peraí, primeiro a gente tem que saber onde a casa está, se está no meio da quadra, se está na esquina...
[Alunos concordam com a fala da colega]
53. Aluno C: A gente partiu do pressuposto que como a escola está acima do quadro, isto significa que ela está com o portão no contorno da quadra.
54. Aluna NN: Ah sim, entendi.

Quadro 22: Transcrição da Cena 3.1 - A busca da síntese coletiva da Situação de Ensino 4 (continuação)

55. Aluno P: Então vem me ajudar a escrever aqui. [Colega vai no quadro escrever]
56. Pesquisadora: Pessoal, então vamos ajudar o colega a terminar.
57. Aluno C: Pessoal, então a gente percebeu que a criança ta saindo da escola e dobrando a direita, pode ser? [Ele desenha o que descreve com o uso de setas].
58. Alunos: Pode
59. Pesquisadora: E vocês fizeram com este caminho com flechas no momento anterior de cada grupo?
60. Aluna P: Nós não.
61. Aluna K: A gente também não.
62. Pesquisadora: Mas e por que vocês escolheram agora com a turma representar com flechas?
63. Aluna P: Eu acho que olhando melhor agora, usar as setas vai ficar melhor mesmo, porque dá pra entender mais.
64. Aluna BB: E como não precisa ser só palavras que nem era antes, com as setas é mais fácil.
65. Pesquisadora: Humm, podem continuar.
66. Aluna K: Por que a direita? Eu coloquei a esquerda!
67. Aluna P: Mas é a direita!
68. Aluna NN: Também acho que é a direita.
69. Aluno C: Então fazemos o seguinte, quem colocou a direita levanta a mão.
70. Aluna P: Mas é pra ser esse caminho aí, não o caminho de cada um ... e ai é a direita.
71. Pesquisadora: Isso pessoal, é pra descrever esse caminho que fizemos juntos.
72. Aluno C: Então, vamos seguir.
73. Aluna E: E por que a gente não chama de "q" essas quadras que ele anda?
74. Pesquisadora: E porque a letra "q"?
75. Aluna E: Pode ser "q" porque a gente tá falando de quadras, e quadras começa com "q".
76. Aluno C: Ah verdade! Então vai ser assim, aqui três quadras é 3Q. Pode ser assim gente?
77. Alunos: Pode.
78. Aluna E: Agora, pra baixo tu coloca dois, e pro lado um. [Orienta a direção das setas e o número de quadras]
79. Aluno C: Mas que lado?
80. Aluna E: Pro lado da esquerda, e depois pra baixo três.
81. Aluna P: Então você chegou em sua casa [risos]
82. Aluno C: Então tá pronto pessoal?
83. Alunos: Sim.
[Alunos batem palmas pela ajuda do colega em escrever no quadro]
84. Pesquisadora: Então pessoal, qual a diferenças que vocês veem entre as duas formas com que vocês descreveram esse caminho ai?
85. Aluna NN: Eu achei que com as palavras foi mais difícil da gente descrever.
86. Aluno C: Eu também achei, porque quando a gente descreveu ali com as setas e colocando o número de quadras e o "q" ficou mais fácil de entender.
87. Pesquisadora: Vocês concordam com isso?
89. Aluna P: Eu acho que sim.
90. Alunos: Sim.
91. Pesquisadora: E vocês sabiam que há muito tempo atrás os estudiosos usavam só as palavras para escrever problemas matemáticos?
92. Aluna P: Que difícil [risos]
93. Aluna AA: Na verdade acho que deveria demorar muito pra escrever tudo que se queria só com palavras, fora que pra outra pessoa entender é bem complicado, olha àquela hora que a gente fez o nosso caminho ... (se refere a etapa anterior a síntese coletiva)
94. Pesquisadora: É verdade, isso foi se modificando ao longo do tempo. Então agora, será que teria alguma outra forma rápida e eficiente para descrever esse caminho?
95. Aluna K: Eu achei legal dessa maneira que a gente fez agora (se refere ao uso das setas), acho que ficou bem fácil e foi rápido também
96. Aluno H: Aqui no meu grupo, a gente tinha feito antes essa maneira rápida tipo batalha naval sabe? A gente pensou que poderia dar certo aqui também...
97. Aluna E: Nós numeramos as linhas e colocamos letras nas colunas.
98. Aluna KK: A gente também fez assim.
99. Pesquisadora: E por que vocês pensaram em fazer dessa forma?

Quadro 22: Transcrição da Cena 3.1 - A busca da síntese coletiva da Situação de Ensino 4

(conclusão)

100. Aluno C: Nós aqui pensamos que desse jeito fica bem mais fácil de se localizar de maneira certa por onde deve andar para chegar na casa do menino.
101. Aluno H: A gente lembrou de fazer isso porque o caminho tá que nem no jogo, em quadradinhos.
102. Pesquisadora: Então vamos usar qual maneira para representar este caminho de forma rápida e eficiente?
103. Aluno C: Eu acho que a gente podia fazer colocando os números e letras.
104. Aluna P: Pode ser.
105. Pesquisadora: Vocês concordam?
106. Alunos: Sim.
107. Pesquisadora: Alguém faz no quadro para todos ajudarem?
108. Aluno C: Eu faço [levantou-se e foi no quadro]. Eu vou desenhar aqui os quadrinhos e colocar os números e letras e vocês me ajudam a ver o caminho [ele desenha a malha no quadro].
109. Pesquisadora: Agora já podemos representar esse caminho.
110. Aluna E: É 1E, 1D, 1C, 2C, 3C, 3B, 4B, 5B e 6B.
111. Pesquisadora: Pronto o caminho?
112. Aluna E: Sim.
113. Aluna P: Acho que esse jeito é o mais rápido mesmo, demorou menos que os outros dois caminhos [risos]
114. Aluno H: Sim, e ficou bem certinho.
115. Pesquisadora: Muito bom pessoal!

Fonte: Dados da pesquisa – Realizado no dia 18/10/2019

Dentre quadrinhos ou quadras, a turma optou por usar como parâmetro a quadra, por ser mais próximo ao cotidiano deles, como observou a Aluna B (fala 17) "*eu acho que fica mais normal, porque se a gente anda na rua não vai dizer pra uma pessoa pra ela andar por dois quadrinhos né...".* A nossa intenção, ao propor essa situação-problema, era bem esta: desencadear a aprendizagem, tendo como contexto a realidade cotidiana dos alunos, ou fatos comuns e naturais, que os motivassem a se sentirem protagonistas do problema, Portanto a elaboração de uma situação-problema requer que seja dada a "oportunidade de colocar a criança diante da necessidade de vivenciar a solução de problemas significativos para ela" (MOURA; LANNER DE MOURA, 1998, p. 14)

Ainda na etapa anterior à síntese coletiva, verificamos que os acadêmicos perceberam que representar apenas com palavras o caminho descrito pelo colega seria mais complexo em alguns casos, visto que nem todos conseguiram transmitir a ideia proposta de seu caminho. Durante o desenvolvimento da descrição desse caminho, a fala da Aluna R (fala 26) "*não é difícil, mas precisa prestar bastante atenção para não errar"* também nos revela que se for usar apenas palavras sem os símbolos ou numeral é necessário se ter mais cautela, o que pode ter relação com as mudanças de estágios da linguagem matemática e mais, especificamente, da linguagem algébrica ao longo do tempo.

Esta rigorosidade da Aluna R em ter cuidado para não errar, nos mostra a preocupação evidenciada em resolver o problema de maneira correta, por mais que este não fosse um problema difícil. Percebemos que essa atitude era bem pessoal da acadêmica: ela queria resolver a situação de forma correta, para não ocorrer possíveis erros. Leontiev (1978, p. 98) diz que "o sentido pessoal traduz precisamente a relação do sujeito com os fenômenos objetivos conscientizados", e, assim, entendemos que este sentido pessoal tem relação com a realidade em que o sujeito está inserido.

A Aluna AA fez menção à estranheza de se usar apenas as palavras para alguma representação, pois segundo ela (fala 27) "[...] *é difícil usar só palavras pra escrever alguma coisa, tipo sem número nem nada".* A linguagem matemática que aprendemos hoje em dia e que se é trabalhada na escola perpassou por várias mudanças, e, por conta disso, atualmente podemos fazer uso de várias sínteses matemáticas. As criações dos estudiosos e dos povos que culminaram na evolução da linguagem partiram do uso inicialmente apenas de palavras e, graças a isso, a matemática foi desenvolvendo uma linguagem própria.

> A criação egípcia marca o ponto de partida do desenvolvimento da linguagem matemática. Com ela, o pensamento matemático começa a desenvolver uma linguagem própria, diferente da linguagem usual das palavras. É, portanto, com a matemática egípcia, que a linguagem matemática através de palavras, apesar de ser um pequeno passo, quase despercebido por ainda usar palavras, foi importante no sentido de criar um vocabulário próprio – a língua da matemática (LIMA & MOISÉS, 2000, p. 27-28)

As marcas dessa evolução da linguagem matemática e, mais especificamente algébrica, partem da retórica (com o uso de palavras) até a simbólica. Neste percurso, entre estes dois estágios de desenvolvimento, se fez presente a álgebra sincopada. Avançando em nossa situação, foi pedido aos acadêmicos que descrevessem então o mesmo caminho, mas dessa vez não utilizando apenas as palavras, como haviam feito anteriormente. Para eles, não usar apenas as palavras queria dizer que poderiam usar o numeral como representação, desenhos, setas e sinais aritméticos, além das palavras.

Nesse caso, percebemos que alguns apenas acrescentaram número ou sinais à descrição feita do caminho, como contou a Aluna Z (fala 42) *"a gente fez igual ao primeiro caminho, mas daí colocamos neste os números* e a Aluna I *"eu usei sinal de + e números"*. Nesta última fala, podemos ver que o sinal de "+", já conhecido pelos acadêmicos, foi utilizado para representar no caminho quando teriam de andar mais quadras até chegar ao destino final.

Portanto, partiram dos conhecimentos que já possuíam – nossa intenção ao propor a situação – para pensar em uma estratégia de descrever o caminho não apenas com palavras.

Assim, “os conhecimentos prévios dos alunos são aproveitados na medida em que é na interação, estabelecida a partir da proposta de solução comum do problema” (MOURA; LANNER DE MOURA, 1998, p. 14). Por isso, cada estudante, como base no que já sabe, proporá a sua forma de resolver a situação com a turma.

Este modo escolhido pelos acadêmicos em seus registros e mencionado por alguns no momento da síntese pode ser associado ao estágio da álgebra sincopada. A álgebra sincopada, bem próxima da linguagem simbólica (MOURA; SOUSA, 2009), faz uso de abreviações e sinais. É uma evolução da álgebra retórica.

Contemplando parte do movimento lógico-histórico, as três fases que envolvem a construção da Álgebra se fazem presente nesse processo. A álgebra sincopada por ainda não ser totalmente simbólica, e também conter em sua essência os nexos conceituais algébricos, pode embasar ações que promovam o desenvolvimento do pensamento algébrico do estudante desde os anos iniciais. Sendo assim,

> [...] nas séries iniciais envolve o desenvolvimento de formas de pensar em atividades para as quais a álgebra sincopada pode ser usada como uma ferramenta, mas que não é exclusiva da álgebra e poderia ser resolvida sem o uso de símbolos, tal como analisar relações entre quantidades, perceber mudanças, observar estruturas, resolver problemas, generalizar, modelar, justificar, provar e prever. (KIERAN, 2004, p.12)

Mesmo que, em seus registros, a maioria dos acadêmicos havia pensado de maneira diferente, aceitaram a ideia de um dos colegas em usar setas para representar esse caminho. Compreendemos a razão dessa escolha, através das falas da Aluna P (fala 63) *“eu acho que olhando melhor agora, usar as setas vai ficar melhor mesmo, porque dá pra entender mais.”* e da Aluna BB (fala 64) *“e como não precisa ser só palavras que nem era antes, com as setas é mais fácil”*. A facilidade em representar com um símbolo e a melhor compreensão de todos, foi o que determinou aos acadêmicos usá-lo para descrever o caminho. Vemos, nisso, indícios da essência da álgebra, ao tentarem encontrar um símbolo padrão para que todos entendessem o caminho descrito. Remetendo-nos ao desenvolvimento da álgebra, o simbolismo algébrico “criou uma espécie de ‘língua internacional’ compreendida sem equívoco pelos matemáticos do mundo inteiro” (IFRAH, 1998, p. 337-8, grifo do autor). Sendo assim, os acadêmicos deram sinais de terem apreendido essa ideia, ao fazer uso de um símbolo que fosse compreendido por todos.

Ao observar as falas mencionadas, podemos identificar que os acadêmicos tinham como intenção solucionar o problema proposto, escolhendo um símbolo que pudesse satisfazer a ideia do problema. Durante a discussão coletiva, a turma utilizou o símbolo como um artefato que pudesse contentar a necessidade daquele momento: encontrar uma forma de descrever o caminho não apenas com palavras. Considerando que, para Vygotsky, os signos são ferramentas externas que auxiliam nos processos psicológicos (OLIVEIRA, 1997) e são ligados à memória, os acadêmicos desenvolveram o movimento da busca de um signo. Lembramos que "[...] ao longo da história, o homem tem utilizado signos como instrumentos psicológicos em diversas situações [...] Na sua forma mais elementar o signo é uma marca externa, que auxilia o homem em tarefas ou exigem memória ou atenção" (OLIVEIRA, 1997, p. 30).

Enquanto os acadêmicos resolviam qual a direção das setas colocar e como fazer, o Aluno C que escrevia no quadro esta representação, também, escrevia o numeral e a palavra quadras, para mostrar quantas quadras haveria de andar naquela direção e sentido. Com a intenção de facilitar a escrita, a Aluna E (fala 73) sugeriu "*e por que a gente não chama de "q" essas quadras que ele anda?*" e o Aluno C (fala 76) complementou "*ah verdade! Então vai ser assim, aqui três quadras é 3Q. Pode ser assim gente?*" Podemos identificar, nessas falas e no desenvolvimento da situação até este momento, um movimento semelhante á transição histórica da álgebra retórica até a simbólica: no início apenas escreveram com palavras, depois fizeram uso do símbolo (setas) e, por fim, complementaram com uma letra, que pudessem usar como padrão para evidenciar as quadras que deveriam ser percorridas até o ponto final do caminho.

Segundo Ifrah (1998), a letra torna o acesso ao abstrato mais fácil, pois permite que os raciocínios sejam abreviados e sistematizados. Aqui nesta situação, a letra "q" foi utilizada como um parâmetro para representar o caminho desvelado por nosso problema desencadeador. Desta forma, as letras não são como "um mero artifício da forma. O uso da letra alfabética para designar um parâmetro ou uma incógnita, liberou definitivamente a álgebra da escravidão do verbo" (IFRAH, 1998, p. 337).

Perguntado sobre o porquê da escolha da letra "q", a Aluna E (fala 75) mencionou que "*pode ser "q" porque a gente tá falando de quadras, e quadras começa com q"* . A escolha do símbolo (letra) teve como causa o fato de o signo ser a letra inicial da palavra que estava sendo utilizada pelos acadêmicos durante o desenvolvimento da situação. Os signos podem ser interpretados, a partir da necessidade que convém o seu uso. Vygotsky (1999, p.70) afirma sobre "a invenção e o uso de signos como meios auxiliares para solucionar um dado problema psicológico (lembrar, comparar coisas, relatar, escolher, etc.)".

Escrever apenas com palavras, inclusive a escrita dos números por extenso, se mostrou para eles algo diferente e mais difícil que o convencional, como vemos em algumas falas: Aluna NN (fala 85) disse **"***eu achei que com as palavras foi mais difícil da gente descrever*" e o Aluno C (fala 86) comentou "*eu também achei, porque quando a gente descreveu ali com as setas e*

colocando o número de quadras e o "q" ficou mais fácil de entender". Esse movimento de pensar sobre maneiras diferentes de representar o mesmo caminho, evoluindo
nos modos de pensar a cada etapa da situação, tinha como objetivo fazê-los "refletir sobre o papel das gerações passadas na criação de saberes que hoje usufruem comodamente" (MOURA; LANNER DE MOURA, 1998, p. 13), como por exemplo, a variável hoje utilizada, mas que teve um longo percurso que desencadeou o seu surgimento. Sendo assim, para compreender a essência do nexo conceitual variável, se faz essencial conhecer a sua estrutura, história e os caminhos de seu desenvolvimento.

> O estudo da história do desenvolvimento do objeto cria, por sua vez, as premissas indispensáveis para uma compreensão mais profunda de sua essência, razão porque, enriquecidos com o conhecimento da história do objeto, devemos retomar mais uma vez a definição de sua essência, corrigir, completar e desenvolver os conceitos que expressam (KOPNIN, 1978, p. 186)

Como uma maneira de padronizar o entendimento acerca do que se quer representar, assim como foi mencionado pelos acadêmicos, a álgebra retórica evoluiu à medida que se teve a necessidade de solucionar problemas de forma mais rápida e também eficiente. Neste processo, a álgebra simbólica se desenvolve como uma forma de generalizar os acontecimentos e problemas, contém os movimentos da vida, os traços do pensamento humano.

> Com a álgebra simbólica é possível elaborar as fórmulas. Há, nesse período, a necessidade de criar conceitos mais gerais que dêem conta de entender os movimentos da vida. A palavra e a figura vão para um segundo plano, porque são ambíguas. Imagine-se, em pleno período do Renascimento, ter que explicar todas as palavras particulares e figuras elaboradas, para representar determinados movimentos da vida. (MOURA & SOUSA, 2005, p. 28)

Buscando chegar com a turma em uma síntese para o seguinte problema desencadeador: *que forma será uma forma mais eficiente e rápida para descrevermos o caminho de modo a que todos consigam compreender?,* os acadêmicos mencionaram que, embora o caminho descrito anteriormente (por meio das setas) também poderia ser uma forma rápida e eficiente, escolheram representar, valendo-se da numeração das linhas e das letras para as colunas. Esta maneira escolhida pela turma elucida uma representação algébrica que procura descrever um caminho, atrelando o uso de números e letras como parâmetros para a localização da escola até a casa do menino Ramon, personagem de nossa situação.

A linguagem algébrica escolhida para a solução do problema faz uso de instrumentos psicológicos que objetivam modificar a estrutura das funções psíquicas. Para Vigotski (2004), a linguagem, em geral, e o sistema simbólico – algébrico, são os instrumentos psicológicos que têm como função intervir na relação do homem com a sua realidade, sendo criações artificiais dirigidas ao controle dos processos psíquicos.

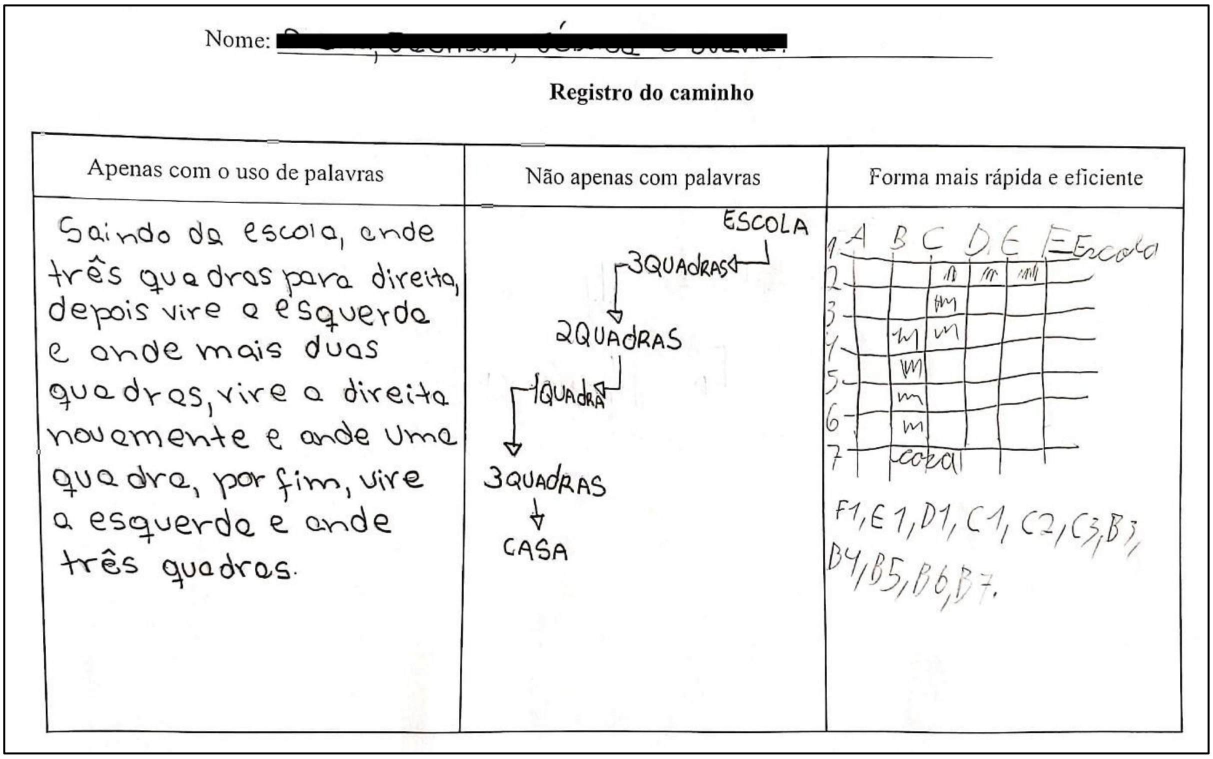
As falas do Aluno H (fala 96) *“aqui no meu grupo, a gente tinha feito antes essa maneira rápida tipo batalha naval sabe? A gente pensou que poderia dar certo aqui também...”* e (fala 101) “*a gente se lembrou de fazer isso porque o caminho tá que nem no jogo, em quadradinhos”* trouxeram à lembrança dos estudantes a configuração em forma de uma malha quadriculada do jogo Batalha Naval. Isso fez com que o grupo deste aluno pensasse em representar da mesma forma este caminho, por atribuírem um sentido pessoal ao jogo e, consequentemente, á situação proposta, o que os levou a estabelecer uma relação entre ambos: o caminho e o jogo.

Pudemos observar que os acadêmicos do grupo 6 – Aluno H e Aluna E –, mesmo sendo participativos em outros momentos da situação, foram mais ativos na construção da síntese nessa parte final da discussão, depois mencionarem a lembrança relacionada ao jogo. Os motivos atrelados a um sentido pessoal, que neste caso auxiliou o grupo a pensar em uma forma de solucionar o problema e desencadeou maior participação, são denominados por Leontiev (1978) de motivos eficazes, ou seja, são aqueles que geram um sentido, “incitam realmente o sujeito a agir” (PERLIN, 2018, p. 102).

Representando igual, o Aluno C (fala 100) explicou como seu grupo havia pensado: *“nós aqui pensamos que desse jeito fica bem mais fácil de se localizar de maneira certa por onde deve andar para chegar na casa do menino”*. Por esta fala, é possível evidenciar que este grupo teve a preocupação em representar o caminho de maneira correta, e pensou que, nesta situação, utilizar a combinação das letras e dos números iria satisfazer a ideia da descrição do caminho de maneira rápida e eficiente, solução esta que foi aceita pela turma. Nossa intenção com esta situação era mobilizar os acadêmicos a pensarem em formas de solucionar o nosso problema desencadeador de modo que conseguissem perceber maior dificuldade em representar o caminho sem o uso de símbolos.

Ao longo do desenvolvimento da situação, vários citaram a dificuldade e também a demora em escrever. Não lhes foi fácil descrever o caminho apenas fazendo uso das palavras. Isso denota terem eles percebido que o uso dos símbolos seria uma maneira mais rápida e eficiente de solucionar o problema. Podemos ver, nos registros, que nenhum deles teve as três formas de representação juntas, idênticas à escolhida pela turma durante a síntese coletiva. O registro do grupo 10 foi o que mais se aproximou da síntese coletiva, principalmente no que se refere ao caminho descrito em palavras e também à forma mais rápida e eficiente. O registro feito por esse grupo difere-se da síntese coletiva por não utilizar a variável “q” como parâmetro para representar as quadras.

Figura 36: Registro do Grupo 10



Nome: [redacted]

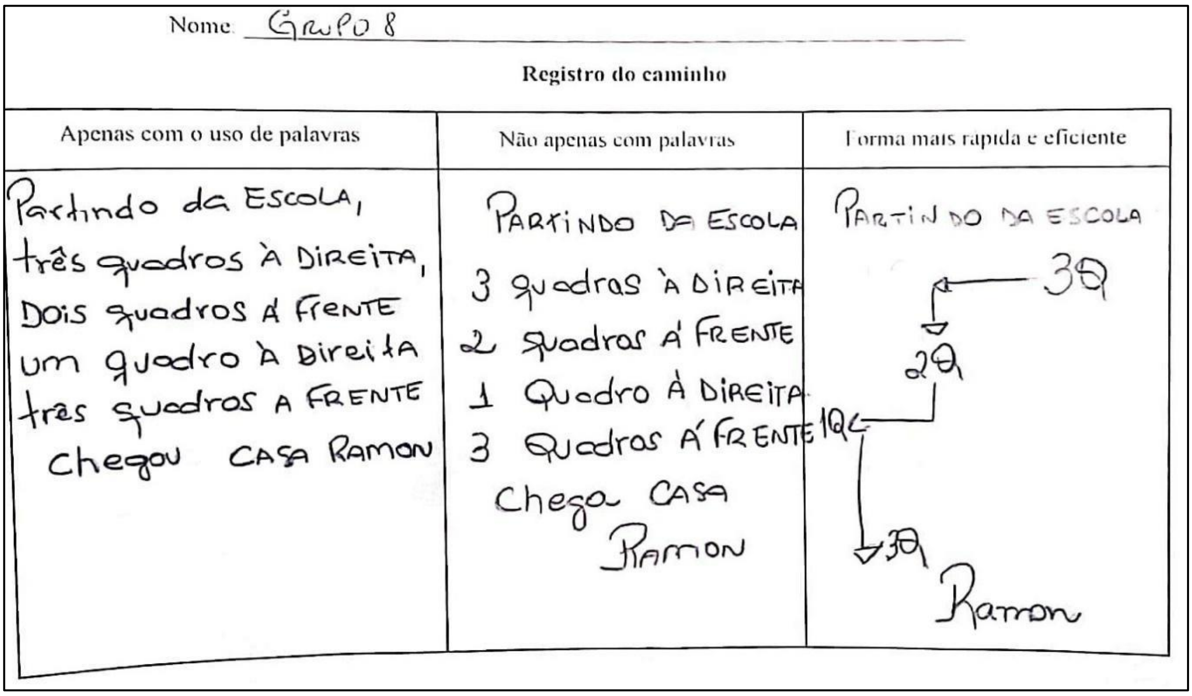
Registro do caminho

Apenas com o uso de palavras	Não apenas com palavras	Forma mais rápida e eficiente
Saindo da escola, ande três quadras para direita, depois vire a esquerda e ande mais duas quadras, vire a direita novamente e ande uma quadra, por fim, vire a esquerda e ande três quadras.	ESCOLA 3QUADRAS 2QUADRAS 1QUADRA 3QUADRAS CASA	A B C D E F Escola 1 2 3 4 5 6 7 casa F1, E1, D1, C1, C2, C3, B3, B4, B5, B6, B7.

Fonte: Dados da pesquisa

Já no registro do grupo 8, podemos observar que os acadêmicos utilizaram a variável “q” como parâmetro para descrever o caminho de forma mais rápida e eficiente, assim como foi ideia de alguns antes do momento de decidir qual seria a solução escolhida por todos. Porém, na solução coletiva, a turma optou por essa como uma maneira de descrever o caminho não apenas com palavras.

Figura 37: Registro do Grupo 8



Nome: GRUPO 8

Registro do caminho

Apenas com o uso de palavras	Não apenas com palavras	Forma mais rápida e eficiente
Partindo da ESCOLA, três quadros À DIREITA, DOIS quadros A FRENTE um quadro À Direita três quadros A FRENTE Chegou CASA Ramon	PARTINDO DA ESCOLA 3 quadros À DIREITA 2 quadros Á FRENTE 1 Quadro À DIREITA 3 Quadros Á FRENTE Chega CASA RAMON	PARTINDO DA ESCOLA 3Q 2Q 1Q 3Q Ramon

Fonte: Dados da pesquisa

Portanto, os acadêmicos deram indícios de aproximação à formalização do conceito científico variável, que constitui o pensamento teórico. Ao perpassar por aproximações aos estágios de desenvolvimento da álgebra e conseguirem registrar o mesmo caminho das três formas, desencadearam como solução uma linguagem algébrica simbólica. Durante o desenvolvimento desta situação mencionaram o uso da variável como um parâmetro de representação, identificando o movimento de fluência das relações entre a variável palavra e a variável letra, o que é característica do nexo conceitual variável. Apresentaremos no próximo item o desenvolvimento e análise da Situação 5.

5.3.2 Situação 5 – Problema da Altura da Pirâmide

A Situação de Ensino 5 denominada *Problema da Altura da Pirâmide* foi desenvolvida no último encontro com a turma. Para sua realização, foi entregue o problema em uma folha com espaço para as anotações e possíveis respostas de cada grupo para, então, responder ao seguinte problema desencadeador: *Como vou escrever a altura da coluna, considerando as 12 pedras já colocadas, as 60 pedras do depósito, que podem ser usadas todas ou não, e a altura que eu ainda desconheço? Como escrever isso em linguagem matemática?* A seguir, relataremos o desenvolvimento desta situação e os dados obtidos por meio das transcrições das falas dos estudantes e seus registros escritos.

Figura 38: Desenvolvimento da Situação 5 – Problema da Altura da Pirâmide

Fonte: Acervo da pesquisadora

5.3.2.1 Cena 5.1: A busca da síntese coletiva da Situação de Ensino 5

Nesta cena, apontamos a busca da solução coletiva da Situação 5. Nosso objetivo era que os acadêmicos compreendessem o uso da variável e seu campo de variação, bem como entendessem que a variável não pode assumir qualquer valor, pois possui um máximo e um mínimo.

Quadro 23: Transcrição da Cena 5.1 - A busca da síntese coletiva da Situação 5

(continua)

1. Pesquisadora: Turma, agora vamos encontrar um modo de chegar a solução para esse problema. Como vocês pensaram? Quais são os dados que nós temos?
2. Aluna OO: Nós temos doze pedras na coluna mestra.
3. Pesquisadora: Isso, temos doze pedras na coluna mestra. E o que mais?
4. Aluna P: Tem mais sessenta no depósito.
5. Pesquisadora: Muito bom! Então, o problema quer saber qual pode ser a altura dessa pirâmide, como podemos resolver isso?
6. Aluna BB: Pode ser o nosso grupo para falar?
7. Pesquisadora: Pode.
8. Aluna BB: A gente atribuiu uma variável prá altura, sendo o “a” e então a altura seria as doze pedras que a gente supôs que estivessem empilhadas né, as doze pedras já colocadas lá, mais a variável do quanto falta, porque a gente atribuiu a variável “x”, podendo ela ser menor ou igual a sessenta.
9. Aluna M: Ficou bem parecido com o nosso.
10. Pesquisadora: E como os outros grupos pensaram?
11. Aluna P: Nós pensamos igual, primeiro a gente leu o problema de novo pra entender melhor, depois começamos a anotar o que já dizia sobre a altura e a quantidade de pedras e aí pensamos parecido com o grupo da Aluna BB, a gente viu que isso tinha relação ...
12. Pesquisadora: E por que vocês usaram o “a” e o “x” nesse problema?
13. Aluna P: Porque o “a” é pra saber a altura, que é o que o problema pede, e o “x” é a quantidade de pedras, que a gente também não sabe qual é.
14. Aluna KK: A gente usou as variáveis porque não temos os valores certo de cada coisa.
15. Aluna P: Isso.
16. Pesquisadora: Vocês falaram em variável agora, será que isso tem também alguma relação com o problema do caminho que a gente fez na aula passada?

Quadro 23: Transcrição da Cena 5.1 - A busca da síntese coletiva da Situação 5
(continuação)

17. Aluno C: Eu acho que sim, porque pelo que me lembro a gente usou um símbolo para representar o caminho naquela aula, e a variável também é um símbolo né?
18. Aluna BB: Eu acho que é, e também a gente fez o caminho de várias maneiras até chegar no símbolo, e lembram que a professora disse que foi assim que fizeram para chegar até um símbolo para variável.
19. Pesquisadora: Entendi. E sobre a quantidade de pedras, por que todos pensaram dessa maneira?
20. Aluna P: Porque é bem simples, pode usar todas as sessenta pedras, ou não.
21. Aluno C: Porque a gente também tem que cuidar que ali falava que já tinha doze pedras na coluna mestra, e também cuidar a quantidade de pedras que tinha no depósito.
22. Pesquisadora: Ah, então isso significa que tem um limite?
23. Aluna P: Sim.
24. Pesquisadora: Então olhem só, o grupo lá disse que tem que ser menor ou igual a sessenta, mas por que tem que ser menor ou igual a sessenta?
25. Aluna KK: Porque é o que tem no depósito.
26. Pesquisadora: E se eu perguntar para vocês por exemplo, podemos colocar cem pedras no lugar do "x"?
27. Alunos: Não.
28. Aluno D: Não, porque tá limitado com o valor de sessenta.
29. Pesquisadora: Isto, está limitado. Então temos um mínimo e um máximo de pedras que podem ser utilizadas?
30. Alunos: Sim.
31. Pesquisadora: Então, qual pode ser a altura mínima da pirâmide do faraó?
32. Alunos: Doze.
33. Pesquisadora: E qual o máximo para a altura da pirâmide?
34. Aluna P: Setenta e duas.
35. Pesquisadora: Então vamos anotar isso aqui no quadro. [Pesquisadora escreve no quadro os valores máximos e mínimos para a altura da pirâmide]. Então, com esses valores o que a gente pode observar?
36. Aluno D: Que o valor de "x" não pode passar de sessenta.
37. Pesquisadora: Vocês concordam com isso?
38. Alunos: Sim.
39. Pesquisadora: Muito bem! E o que foi mais difícil em resolver esse problema?
40. Aluno C: Encontrar aquele sinal lá que é o menor ou igual que...
41. Aluna AA: Pra nós foi saber se as pedras estavam empilhadas ou não, porque doze pedras empilhadas uma em cima da outra podiam balançar, a gente ficou em dúvida se elas estavam mesmo bonitinhas uma em cima da outra.
42. Pesquisadora: E foi fácil resolver o problema?
43. Alunos: Não.
44. Pesquisadora: E por que não?
45. Aluna BB: Eu acho que o difícil foi assimilar que pode ter duas variáveis na fórmula, e também tem todo o passo a passo de extrair os dados, de ver o que já tem no problema.
46. Pesquisadora: E essas duas variáveis tem relação?
47. Aluna BB: Sim.
48. Aluno C: Eu acho que tem, porque se a gente não souber o valor do "x" a gente não descobre o valor do "a" que é a altura.
49. Pesquisadora: Ótimo!
50. Aluna F: Eu achei essa umas das atividades mais difíceis que a gente fez, teve que pensar mais.
51. Pesquisadora: Pensar mais?
52. Aluna F: É, a gente no começo não tinha entendido direito o problema, mais ai depois que tu veio nos ajudar ficou mais fácil.
53. Aluna B: A gente até entendeu, mas como pediu para escrever em linguagem matemática, a gente não sabia muito como escrever isso...
54. Aluna BB: A gente escreveu assim, $a = 12 + x$, e embaixo colocou que o x tem que ser menor ou igual a sessenta.
55. Aluno C: A gente fez parecido, mas colocou o x menor ou igual que sessenta entre parênteses.
56. Aluna M: A gente nem conseguiu chegar nessa parte (risos)
57. Pesquisadora: Então, vamos achar uma forma de registrar isso com a turma toda. Como podemos fazer?

Quadro 23: Transcrição da Cena 5.1 - A busca da síntese coletiva da Situação 5
(conclusão)

58. Aluna M: Eu entendi a ideia da Aluna BB, acho que podia ser assim. **59. Aluna Y:** A gente também entendeu como tudo do problema, mas ali, na hora de escrever, não conseguimos, agora eu entendi o que o grupo da Aluna BB fez. **60. Aluno C:** Eu também acho que a ideia delas foi boa, porque aqui ficou meio estranho esse parênteses. **61. Pesquisadora:** Vocês concordam pessoal em registrar assim a solução do problema? **62. Alunos:** sim [...]

Fonte: Dados da pesquisa – realizado no dia 25/10/2019

Nesta situação, esperávamos que os acadêmicos percebessem a limitação no registro da linguagem matemática em relação à quantidade de pedras para a altura da pirâmide. Como mencionado pela Aluna BB, a maioria dos acadêmicos atribuiu uma variável para representar a altura e outra variável para representar a quantidade de pedras, de modo semelhante à fala dela (fala 8) "*a gente atribuiu uma variável prá altura, sendo o "a" e então a altura seria as doze pedras que a gente supôs que estivessem empilhadas né, as doze pedras já colocadas lá, mais a variável do quanto falta, porque a gente atribuiu a variável "x", podendo ela ser menor ou igual a sessenta"*.

Questionados pela pesquisadora, a maioria dos acadêmicos relatou pensar de forma parecida com a do grupo da Aluna BB. Para a resolução desta situação, os acadêmicos, inicialmente, identificaram alguns aspectos que faziam parte do processo da constituição da solução coletiva, como podemos ver na fala da Aluna P (fala 11) "*[...] primeiro a gente leu o problema de novo pra entender melhor, depois começamos a anotar o que já dizia sobre a altura e a quantidade de pedras e aí pensamos parecido com o grupo da Aluna BB, vimos que isso tinha relação".* Na fala do Aluno C (fala 21) "*porque a gente também tem que cuidar que ali falava que já tinha doze pedras na coluna mestra, e também cuidar a quantidade de pedras que tinha no depósito"*, são emitidos juízos acerca do problema que buscavam solucionar, evidenciando diferentes aspectos que impulsionaram a pensar em uma forma de resolução, compreendendo inicialmente as informações do problema e as relações entre elas.

Para Kopnin (1978), os juízos, os conceitos e as deduções são formas de pensamento, que identificam os aspectos gerais em toda a abstração, são a forma mais simples do processo de apropriação da realidade. Os juízos emitidos pelos acadêmicos, durante a situação, elucidam o pensamento deles no processo de constituição da síntese do problema. Kopnin (1978) diz que os juízos fazem parte da constituição do todo, revelando algum resultado no movimento do pensamento.

A Aluna P, quando questionada pela pesquisadora sobre a razão de ter escolhido as variáveis "a" e "x" para solucionar o problema, explicou que (fala 13) *o ""a" é pra saber a altura, que é o que o problema pede, e o "x" é a quantidade de pedras, que a gente também não sabe qual é",* o que demonstra ter utilizado a variável para representar os valores desconhecidos em busca de uma possível solução do problema. Isso também fica claro na fala da Aluna KK (fala 14): "*a gente usou as variáveis porque não temos os valores certo de cada coisa".* Essas justificativas das acadêmicas corroboram a definição de variável, dada por Lejeune Dirichlet, no século XIX, citado por Eves (1997, p. 661): variável é "um símbolo que representa um qualquer dos elementos de um conjunto de números".

Nas falas podemos perceber que parte dos acadêmicos entendeu a variável não como uma manipulação simbólica ou substituição de valores particulares nas letras adotadas, mas como uma forma de generalizar os dados que possuíam na linguagem matemática pedida pelo problema. Segundo Kaput (1999), o pensamento algébrico surge por meio de generalizações sobre os dados e as relações matemáticas que são manifestadas através de linguagens cada vez mais formais.

Mesmo que o foco desta situação de ensino fosse a apropriação do nexo conceitual campo de variação, aqui também notamos, nas falas dos acadêmicos, os sentidos atribuídos ao nexo conceitual variável e à formalização deste conceito. Como podemos ver na fala do Aluno C (fala 17) "*pelo que me lembro a gente usou um símbolo para representar o caminho naquela aula, e a variável também é um símbolo, né?"* e da Aluna BB (fala 18) "*eu acho que é, e também a gente fez o caminho de várias maneiras até chegar no símbolo, e lembram que a professora disse que foi assim que fizeram para chegar até um símbolo para variável".* O sentido atribuído à variável por esses estudantes, nesta situação e na anterior (problema do caminho), elucida a variável como um símbolo que generaliza o que ainda não se tem como concreto, representa o desconhecido. Pode ser apresentada de várias formas e diferentes perspectivas, assim como perpassou por vários estágios de desenvolvimento e pensamentos até a sua concretização.

Estas formas de ver a variável, destacadas pelos acadêmicos durante a síntese, aproxima-se da ideia de Caraça (1998), principalmente por perceberem que nas duas Situações de Ensino desenvolvidas, a variável estava presente de forma diferente, ou seja, compreenderam a fluência da variável.

> A variável é, portanto, uma entidade que, dizendo respeito a um nível de isolado – o conjunto – superior ao do número, é, ela própria, de uma natureza superior. No entanto, o caráter contraditório do conceito – a variável é e não é cada um dos elementos do conjunto – deu origem a que a sua introdução na Ciência seja relativamente recente. Pelo seu caráter essencial – síntese do ser e não ser – ela sai

> fora daquele quadro de idéias que quer ver na realidade uma permanência e irrompe ligada à corrente de pensamento, que expressa ou tacitamente vê, na fluência, a primeira das suas características. Uma variável é o que for determinado pelo conjunto numérico que ela representa – a sua substância, o seu domínio (CARAÇA, 1998, p. 120).

Assim, a variável - letra tem em sua essência um processo de desenvolvimento que vai muito além do apenas entendimento da evolução de notações como nos estágios retórico, sincopado e simbólico, traz em si a trajetória do movimento do pensamento humano ao longo de seu desenvolvimento. Isto "configura que as diversas elaborações sobre os conceitos de número, movimento e variável, que permitiram a elaboração do conceito de variável" (MOURA, SOUSA, 2005, p. 14).

Nosso problema desencadeador almejava que os acadêmicos compreendessem os possíveis valores que poderiam ser adotados para a variável e o campo de variação do problema. Perguntados sobre como pensaram em relação à quantidade de pedras, a Aluna P (fala 20) comentou: "*[...] pode usar todas as sessenta pedras ou não*, o Aluno C diz: *porque a gente também tem que cuidar que ali falava que já tinha doze pedras na coluna mestra, e também cuidar a quantidade de pedras que tinha no depósito"* e o Aluno D (fala 28) "*[...] porque ta limitado com o valor de sessenta".* Essas respostas trazem indícios da compreensão deles acerca do campo de valores que a variável poderia percorrer.

A reunião dos juízos atribuídos pelos acadêmicos quanto ao pensamento de como estabelecer a linguagem matemática do problema evidenciando o fato de que no depósito havia 60 pedras e na coluna mestra havia 12, e que desta forma a variável possuía valor mínimo e máximo, condizem com a essência do nexo conceitual algébrico campo de variação. Estes juízos particulares assinalados pelos acadêmicos demonstram a ideia do universal no fenômeno descrito, e assim são considerados por Kopnin (1978) como conceito.

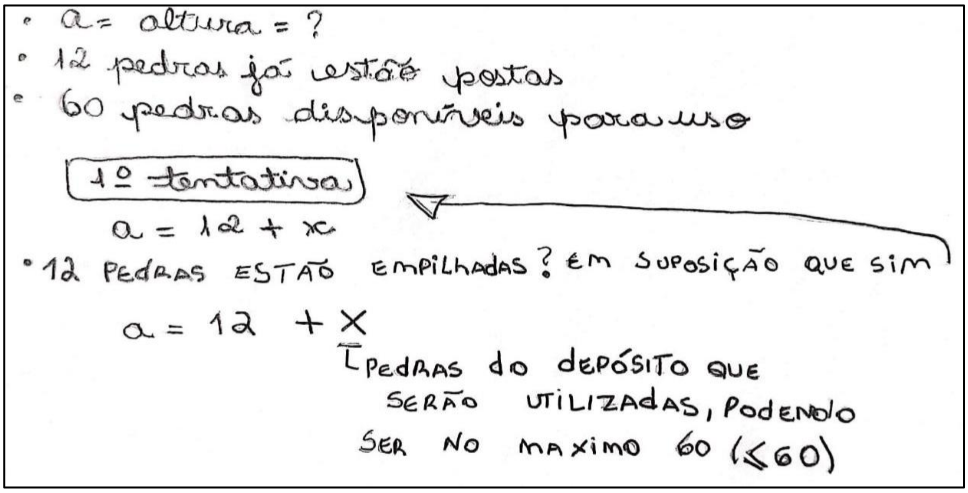
> Os conceitos, juízos e deduções são diversos pelas funções que exercem no movimento do pensamento. O juízo serve para fixar rigorosamente certo resultado no movimento do pensamento, enquanto o conceito resume todo o conhecimento antecedente do objeto mediante a reunião de inúmeros juízos num todo único. Neste sentido o conceito atua como uma redução original do juízo, conservando todo o essencial no conteúdo destes; ao fixar o já obtido, ele se constitui num degrau de sucessivo movimento do pensamento. A dedução é uma forma de movimento do pensamento de uns juízos e conceitos a outros, traduz o processo de obtenção de novos resultados no pensamento. (KOPIN, 1978, p. 193)

Nesta perspectiva, ao buscar compreender as relações e as diferenças entre os juízos, conceitos e deduções como forma de pensamento, Bernardes (2011) baseada nos estudos de Kopnin (1978, p. 528), diz que "[...] na dialética evidencia-se o juízo na relação entre o singular e o universal e o conceito na atenção principal centraliza-se no universal, ao passo que a dedução se verifica no como, no porquê e em que base o singular se relaciona com o universal".

As deduções identificadas nas falas dos acadêmicos, durante a síntese coletiva e no momento singular de cada grupo, nos mostram a transição e a interligação entre os juízos expressos quanto à variável e ao campo de variação na mobilidade do pensamento em busca da síntese coletiva do problema. Bernardes (2011, p. 528) diz que as deduções "constituem-se como uma forma de mediação entre os juízos e conceitos". Portanto, ao identificarem aspectos relacionados ao todo do problema, no caso juízos (singular) e; a partir da reunião deles sintetizar todo o conhecimento na forma de conceito (universal), expressando a relação existente entre a variável, no que tange à quantidade de pedras da pirâmide e à limitação existente nesta, os acadêmicos deram movimento à sua forma de pensar e chegar em uma solução para o problema.

O nexo conceitual campo de variação se demonstrou presente durante a situação, quando os acadêmicos evidenciaram que, para fazer o registro, era necessário atentar ao valor máximo de pedras, e assim compreenderam que a altura também teria um máximo ou um mínimo, ou seja, este era o campo de variação que a variável poderia percorrer.

Figura 39: Registro do grupo 8



• a = altura = ?
• 12 pedras já estão postas
• 60 pedras disponíveis para uso

1º tentativa

a = 12 + x

• 12 PEDRAS ESTÃO EMPILHADAS? EM SUPOSIÇÃO QUE SIM

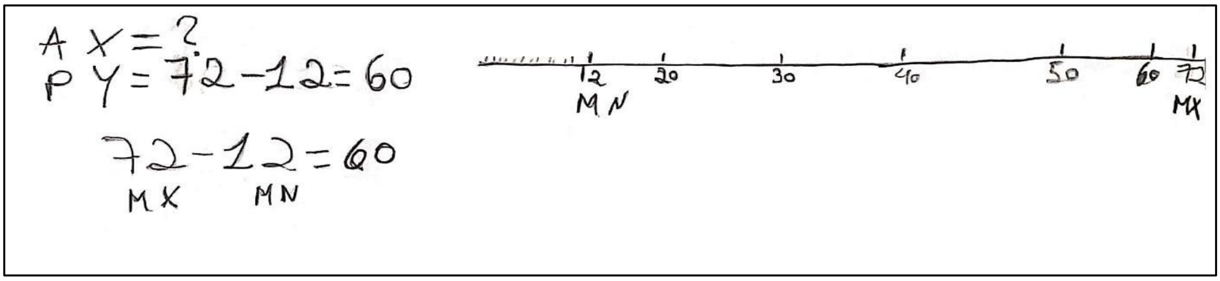
a = 12 + X

PEDRAS DO DEPÓSITO QUE SERÃO UTILIZADAS, PODENDO SER NO MAXIMO 60 (≤60)

Fonte: Dados da pesquisa

No registro do Grupo 8, as acadêmicas foram capazes de expressar em linguagem matemática os dados do problema e a altura da pirâmide em função das variáveis "a" e "x" atribuídas por elas. Podemos notar a preocupação em deixar claro que a variável "x" possuía um valor máximo, e usaram as palavras para expressar esse fato, bem como o símbolo que representa a desigualdade menor ou igual.

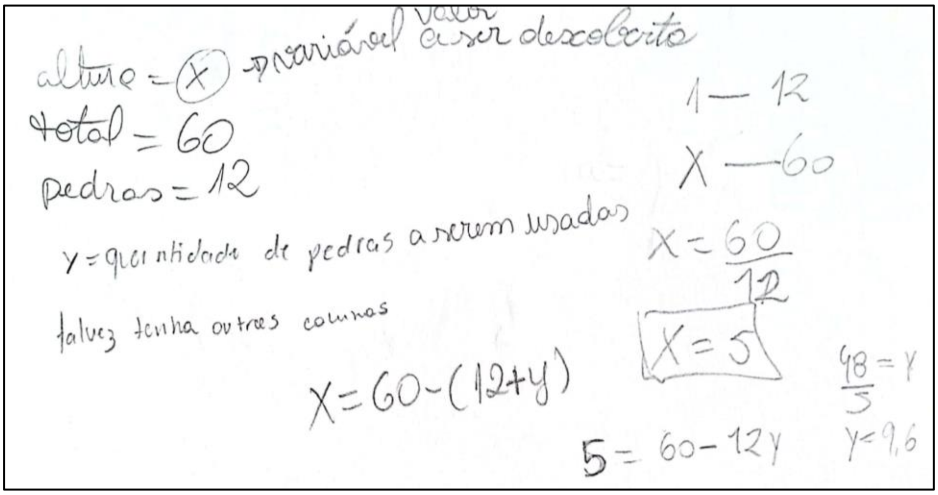
Figura 40: Registro do Grupo 11



Fonte: Dados da pesquisa

Já no Grupo 11, as acadêmicas encontraram em seu registro o valor máximo e mínimo da altura da pirâmide de forma aritmética, não conseguindo expressar em uma linguagem algébrica o que era pedido no problema. Neste grupo, podemos perceber que a essência do conceito de variável ainda não estava presente, visto que mencionaram as variáveis “x” e “y” para representar a altura e a quantidade de pedras, mas não fizeram uso delas na solução do problema. As acadêmicas encontraram a altura máxima de 72 pedras, pois consideraram que as 12 pedras já colocadas na coluna mestra da pirâmide subtraídas de um valor deveriam resultar em 60 pedras, sendo esta a quantidade de pedras disponíveis no depósito.

Figura 41: Registro do Grupo 4



Fonte: Dados da pesquisa

O Grupo 4, em seu registro, não conseguiu expressar a solução em uma linguagem algébrica. A ideia do grupo foi encontrar a altura da pirâmide, fazendo o total de pedras que para eles era 60 e subtrair disso as pedras que já haviam sido colocadas na coluna mestra mais as pedras que poderiam ser usadas. Observamos que o grupo não compreendeu que as 60 pedras não eram o total, o que os levou a não chegar na solução esperada. Neste registro, também identificamos que o grupo buscou encontrar a altura da pirâmide não levando em consideração as limitações da quantidade de pedras, e assim, fizeram uso da variável como uma incógnita, ao tentarem busca um valor fixo da altura.

Assim como visto nos registros, algumas falas dos acadêmicos também denotaram as dificuldades deles no momento de solucionar o problema. Para Aluno C – integrante do Grupo 12, nesta SDA, (fala 40) "*encontrar aquele sinal la que é o menor ou igual que...*" foi a dificuldade encontrada pelo seu grupo. No registro do grupo deste aluno, observamos que eles conseguiram representar em uma linguagem algébrica a altura da pirâmide. O sinal de desigualdade mencionado por eles se fazia importante no registro, e isso foi compreendido. Podemos observar que, apesar das dúvidas quanto ao sinal da desigualdade expressa nas rasuras do registro (que ora foi escrito menor ou igual que, ora foi escrito maior ou igual que), conseguiram identificar a desigualdade correta.

Em vista disso, a síntese da solução coletiva nesta Situação 5 foi essencial para a compreensão dos alunos sobre uma forma de registrar a altura da pirâmide através de uma linguagem algébrica, visto que alguns mostraram em suas falas não conseguirem escrever como haviam pensado. Ao analisar os registros, podemos perceber que o pensamento teórico ainda não estava concretizado em alguns grupos. Porém, em outros grupos, não encontraram a solução do problema de modo empírico, pois fizeram relações e conexões entre as variáveis do problema, bem como levaram em consideração o fato de a limitação da variável relacionada à quantidade de pedras ter valor máximo.

A função do pensamento teórico é "[...] elaborar os dados da contemplação e da representação em forma de conceitos e com eles reproduzir o sistema de conexões que geram o conceito dado, por descoberto, a sua essência" (DAVÍDOV, 1988, p. 142). Assim, a partir da hipótese de uma das colegas, a turma chegou à síntese coletiva do problema desencadeador, que colocou em movimento o seu objeto a partir de um olhar geral dos dados, idealizando os aspectos da atividade e a reprodução nela das formas universais das coisas, o que pode ter caracterizado uma aproximação ao pensamento teórico (DAVÍDOV, 1988).

5.3.2 Síntese do episódio 3

Como já vimos, o conceito de variável passou por várias modificações. A variável está associada à álgebra retórica, sincopada e simbólica, porém é vista, muitas vezes, na Educação Básica apenas em sua forma simbólica. Sendo estágios de desenvolvimento da álgebra, a forma retórica, sincopada e simbólica possuem como elo o movimento, a fluência (MOURA; SOUSA, 2005).

Como vimos na Situação 4, os acadêmicos, à medida que o problema ia exigindo uma linguagem algébrica, foram perpassando por um movimento que se aproxima dos estágios de desenvolvimento da álgebra, e assim constituindo novos modos de perceber a variável, o que ficou ainda mais evidente quando mencionaram isso durante o desenvolvimento da Situação 5. A transição da retórica para a simbólica vai além de apenas reproduzir em símbolos as palavras descritas, ela eleva o pensamento do sujeito atribuindo significados para a linguagem matemática, e mais especificamente para a linguagem algébrica. Moura e Sousa (2005) entendem essa transição essencial para se aprender matemática.

> Não há como aprender matemática sem aprender a fazer a transição da álgebra retórica para a álgebra simbólica. Ao resolvermos equações, estamos efetuando essa transição, de forma que o significado da equação venha a se tornar evidente para nós. Aqui se defende a idéia de que a matemática é compreensível se compreendermos a transição da álgebra retórica para a álgebra simbólica. (MOURA; SOUSA, 2005, p. 16)

Tendo como intuito levar os acadêmicos a percepção da dificuldade de descrever o caminho proposto na Situação 4 sem nenhum parâmetro e, assim, compreender a necessidade de usar alguns símbolos para facilitar a descrição do caminho de forma precisa, de maneira rápida e eficaz, os acadêmicos deram indícios de ter compreendido e atingido o objetivo proposto. Ao identificarem que usar um simbolismo seria mais prático do que usar as palavras, encontraram uma forma de representar o caminho através da algebrização das palavras.

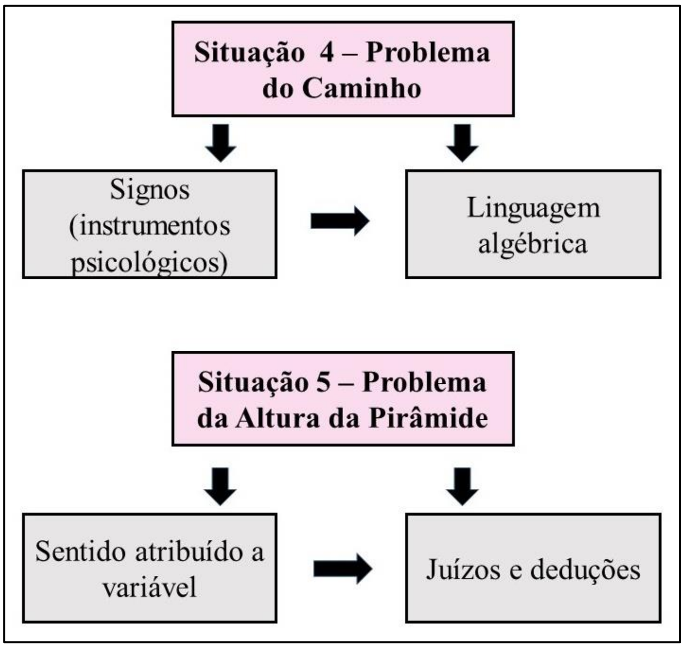
Segundo Ifrah (1985, p. 338), Leibniz entendia que algebrizar as letras "[...] poupa o espírito e a imaginação, cujo é preciso economizar." Deste modo, a síntese coletiva da Situação 4 se deu pelos estudantes por meio da busca por signos (instrumentos psicológicos) para formularem uma linguagem algébrica que satisfizesse o problema desencadeador. A variável nesta situação foi pensada como uma forma de parâmetro, de simbolizar o que dizia respeito às quadras na descrição do caminho, diferente da forma como foi utilizada na Situação 5. Sendo assim, percebemos a fluência nos modos de utilizar a variável nas diferentes situações.

Identificamos também o sentido pessoal atribuído pelos estudantes durante o desenvolvimento da situação, principalmente no que se refere às relações que fizeram com a lembrança do jogo Batalha Naval e que culminaram em uma forma de pensar sobre a solução do problema. Nesta situação e, principalmente na Situação 5, também conseguimos perceber os motivos dos acadêmicos quanto ao objeto da atividade. Na Situação 5, no momento anterior a síntese coletiva, os motivos que conduziam os acadêmicos durante o desenvolvimento da situação eram distintos. Para alguns, esses motivos eram compreensíveis, não eram dirigidos ao objetivo do problema; para outros, esses motivos foram se tornando eficazes à medida que buscavam compreender os conceitos algébricos que estavam sendo trabalhados, coincidindo com o objetivo da atividade.

A síntese da Situação 5 se deu a partir da emissão de juízos atrelados aos aspectos gerais atribuído pelos acadêmicos à situação. A reunião desses juízos desencadeou na formalização do conceito na síntese coletiva, a qual foi mediada pelas deduções. A partir da hipótese de uma das colegas em atribuir variáveis para os dados do problema e evidenciar o limite da quantidade de pedras, a turma escolheu esta hipótese para ser a solução do problema. Contudo, nem todos os grupos em seu momento individual conseguiram chegar a esta solução, pois mesmo compreendendo os dados, tiveram dificuldades em registrar a altura da pirâmide em uma linguagem algébrica.

Aqui, a interação dos acadêmicos com os colegas e a pesquisadora foi essencial. Os grupos que conseguiram registrar de maneira algébrica demonstraram em suas falas e registros elevar o pensamento de maneira teórica, baseados na essência da variável já inicialmente vista na situação anterior e pelo entendimento do campo de variação desta. Esta compreensão deles resultou no esclarecimento da forma de pensar dos colegas, clareando o que eles ainda não haviam compreendido anteriormente. No próximo item discorreremos a Situação de Ensino 6 que envolve o nexo relação de igualdade.

Figura 42: Síntese do Episódio 3



Fonte: Sistematização da autora

5.4 EPISÓDIO 4 – RELAÇÃO DE IGUALDADE

Neste episódio traremos o desenvolvimento e análise dos dados referentes a uma Situação de Ensino referente à relação de igualdade.

Quadro 24: Situação de Ensino do Episódio 4

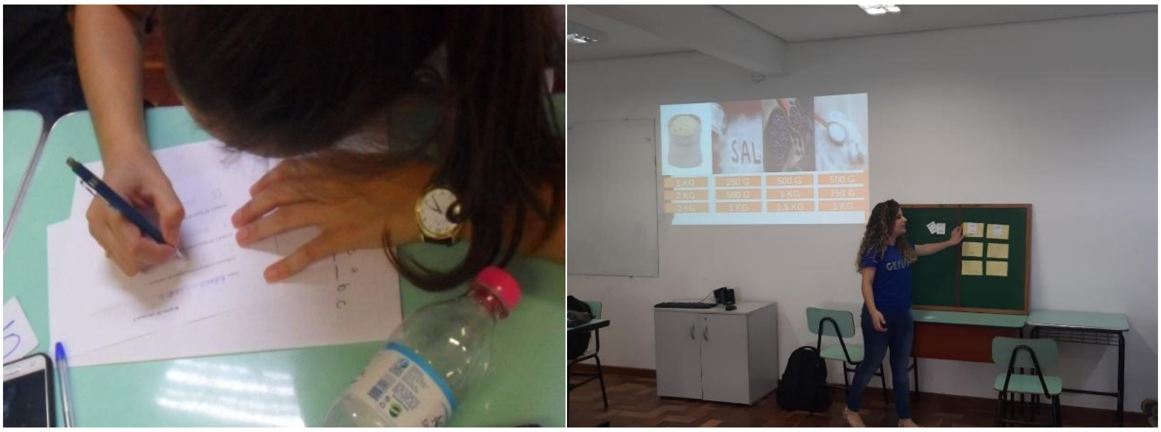
Situação de Ensino	Problema Desencadeador	Objetivo
Situação 6: ***Problema das Quantidades***	**Como podemos saber sobre os produtos que podemos trocar? Quais produtos que poderão ser trocados?**	Compreender a relação de igualdade, por meio das trocas dos produtos, bem como algumas de suas propriedades.

Fonte: Sistematização da autora

5.4.1 Situação 6 – Problema das Quantidades

A Situação 6, denominada *Problema das Quantidades*, foi desenvolvida no último encontro com a turma. Nela, foi entregue aos grupos uma folha de registro, para que respondessem ao seguinte problema desencadeador: *Como podemos saber sobre os produtos que podemos trocar? Quais produtos que poderão ser trocados?* A seguir, relataremos o desenvolvimento desta situação e os dados obtidos por meio das transcrições das falas dos estudantes e seus registros escritos.

Figura 43: Desenvolvimento da Situação 6 – Problema das Quantidades



Fonte: Acervo da pesquisadora

5.4.1.1 Cena 6.1: A busca da síntese coletiva da Situação 6

Nesta cena, apresentamos a busca da solução coletiva da Situação 6. Nossa intenção era que os acadêmicos percebessem que poderiam usar o sinal de igualdade para representar uma forma de fazer as trocas das quantidades do problema desencadeador.

Quadro 25: Transcrição da Cena 6.1 - A busca da síntese coletiva da Situação 6

(continua)

1. Pesquisadora: Pessoal, vamos ajudar o Ramon nesse último problema que eu trouxe para vocês? **2. Alunos:** Sim. **3. Pesquisadora:** Então, o problema é o seguinte: Como podemos saber os produtos que podemos trocar? Quais produtos que poderão ser feitas as trocas? **4. Pesquisadora:** Nós temos esses alimentos [mostra no slide] e tais quantidades. Como base nesses alimentos e quantidades nós vamos tentar responder as duas perguntinhas do Ramon nesse problema. **5. Aluno H:** Nós começamos vendo o que a gente podia trocar, aí escolhemos trocar 1 quilo de arroz com 500 gramas de sal e 500 gramas de feijão. **6. Pesquisadora:** Ok [e coloca as fichinhas representativas no quadro das quantidades]. Olhem como o grupo pensou em realizar a troca, todos concordam com isso? **7. Alunos:** Sim. **8. Pesquisadora:** Por quê?

Quadro 25: Transcrição da Cena 6.1 - A busca da síntese coletiva da Situação 6 (continuação)

9. Aluna II: Mas pode ser alimentos de linhas diferentes ou tem que trocar pelo mesmo?
10. Pesquisadora: Pode ser qualquer alimento, é apenas uma troca.
11. Aluna II: Ah tá, então dá pra trocar sim, é a mesma quantidade.
Aluna B: É mas só dá pra trocar por causa da quantidade mesmo, porque se fosse em relação aos valores acho que não daria.
12. Aluna II: Mas no problema não fala em valor, só em quantidade.
13. Aluna B: Sim, eu sei. Até porque o problema fala que o menino tava estudando sobre a história né, quando vê antigamente era assim que fazia, se trocavam por trocar ...
14. Pesquisadora: Mas olhem só, a ordem que o grupo me disse e eu coloquei aqui foi 500 gramas de sal e 500 gramas de feijão. E se eu disser assim: eu quero trocar 500 gramas de feijão e 500 gramas de sal, vai ser a mesma coisa?
15. Alunos: É
16. Pesquisadora: E por que é a mesma coisa?
17. Aluno D: A ordem não vai alterar nada.
18. Aluna B: Porque o peso é o mesmo, mesmo invertendo a ordem a gente continua trocando por 1 quilo.
19. Pesquisadora: Muito bom! Agora se eu disser assim: eu quero trocar juntamente com aquele arroz que acabamos de fazer a troca, eu vou colocar mais 1 quilo de arroz. Este de 1quilo de arroz que já possuía aqui no nosso quadro mais esse 1 quilo de arroz que coloquei, vai ser justo trocar pelos 500 gramas de sal e 500 gramas de feijão que estão ali?
20. Aluno D: Não, porque vai ta faltando 1 quilo ali.
21. Pesquisadora: Ali aonde?
22. Aluno D: Ali daquele lado que tá o sal e o feijão.
23. Pesquisadora: Então para ficar justa essa troca, o que podemos fazer?
24. Aluna B: Coloca ali junto com o sal e feijão, mais 500 gramas de sal e 500 gramas de feijão, porque daí vai ter aumentado 1 quilo também deste lado.
25. Aluna F: Ou também a gente pode arrumar mais 1 quilo de alguma outra coisa e colocar ali.
26. Pesquisadora: Então, resumindo o que vocês falaram: se eu acrescentei 1 quilo de arroz aqui [mostra no quadro das quantidades], para dar certo essa troca eu tenho que acrescentar mais 1 quilo de algum alimento ali?
27. Aluno D: Isto
28. Pesquisadora: Ah... então posso acrescentar 1 quilo de arroz junto com o sal e feijão?
29. Aluna II: Poder até pode...
30. Aluno D: Mas qual o sentido de trocarmos arroz por arroz? Vamos escolher outro produto.
31. Aluna BB: Mas tu não sabe que tipo de arroz vai ser.
32. Aluno D: Ah... verdade, só se tu tem arroz branco e quer trocar por parborizado ou vice-versa.
33. Aluna II: Claro, vai saber que tipo de arroz as pessoas têm.
[Comentam sobre os tipos de arroz que poderiam ser trocados no problema]
34. Pesquisadora: Tá, então qual produto vocês escolhem para dar certo essa troca?
35. Aluno D: Tu pode colocar 1 quilo de açúcar.
36. Aluno C: Na verdade acho até que ao invés do sal que tem ali, a gente podia trocar ele por galinha, porque daí fazemos uma galinhada.
[Risos]
37. Pesquisadora: E se escolhemos tirar o sal, qual vai ser a quantidade de galinha se a gente fizer essa troca?
38. Alunos: 500 gramas.
39. Aluno C: Mesma quantidade do sal, aí vamos ter 500 gramas de galinha.
40. Pesquisadora: E voltando aqui no nosso problema, se eu acrescentar 1 quilo do açúcar junto com o arroz, e 1 quilo de açúcar junto com o sal e feijão, isso vai ser justo?
41. Alunos: Vai.
42. Pesquisadora: E se eu novamente inverter a ordem e colocar: açúcar, feijão e sal, a troca continua justa?
43. Alunos: Sim
44. Aluna J: O "peso[14]" é todo o mesmo
45. Aluno D: Porque vai ser tudo equivalente.

[14] Ao usar o termo "peso" os acadêmicos estavam se referindo a massa de cada produto. Mesmo sabendo que do ponto de vista científico os conceitos de massa e peso diferem-se e muitas vezes no senso comum são mencionados como sinônimos, neste momento durante o desenvolvimento da situação-problema não discutimos a diferença entre ambos.

Quadro 25: Transcrição da Cena 6.1 - A busca da síntese coletiva da Situação 6
(conclusão)

46. Pesquisadora: E o que seria equivalente para vocês? **47. Aluno D:** Tem a mesma medida ou o mesmo "peso" nesse caso. **48. Pesquisadora:** Ah, então quer dizer que a mesma quantidade de produtos em gramas que estiver nesse lado do quadro, deve estar também aqui neste outro lado? **49. Aluno D:** Sim **50. Pesquisadora:** E todos concordam com isso que o colega falou? **51. Alunos:** Sim [...] [Alunos continuam dando sugestão de trocas e a pesquisadora coloca no quadro] [...] **52. Pesquisadora:** Pessoal e por que está dando certo todas essas trocas que vocês falaram? **53. Aluna BB:** Porque se a gente somar os produtos que tem de um lado, vai ter igual do outro lado. **54. Pesquisadora:** E como que eu posso chamar quando essa quantidade aqui tem a mesma que aquela lá? [Mostra no quadro das quantidades] **55. Aluna B:** São equivalentes. **56. Pesquisadora:** E se fossemos escrever isso que vocês estão me dizendo em uma linguagem matemática, como faríamos? Por exemplo, queremos dizer que o peso desse açúcar aqui é equivalente ao peso do sal e açúcar juntos. **57. Aluno H:** É só escrever que é igual. **58. Aluno D:** Isso, escreve que o açúcar é igual ao arroz mais o feijão. **59. Pesquisadora:** Isto, podemos usar o sinal de igual para representar a nossa troca. Mas o que seria a igualdade de um modo geral? **60. Aluno C:** Bom, neste caso são as quantidades iguais [risos] **61. Aluna II:** Tipo ali neste quadro tem essa linha vermelha né? Essa linha aí podia ser trocada pelo sinal de igual, porque quando a gente tem uma quantidade de produtos de um lado, também precisa ter do outro. **62. Pesquisadora:** Exatamente! Mas pensem na igualdade de um modo geral, ou melhor, já sabendo o que é a igualdade, me digam um exemplo de aplicação desse conceito. [Alunos não respondem] **63. Aluno C:** Que difícil! **64. Pesquisadora:** Por quê? **65. Aluno C:** Porque por mais que a gente saiba o que é, não é tão fácil assim pensar. **66. Aluna BB:** Eu pensei naqueles probleminha sabe, que tem tipo os números, o sinal de igual e quer saber qual número que falta. Isso é um exemplo? **67.Pesquisadora:** É sim! **68. Aluno C:** Ah é mesmo, não foi tão difícil assim agora que a Aluna BB falou. [...]

Fonte: Dados da pesquisa – realizado no dia 25/10/2019

O Aluno H iniciou o desenvolvimento da síntese coletiva, colocando sua hipótese de quais produtos poderiam ser trocados (fala 5): "*nós começamos vendo o que a gente podia trocar, aí escolhemos trocar 1 quilo de arroz com 500 gramas de sal e 500 gramas de feijão*". Como o problema buscava formas de trocas pelas quantidades, para a partir desta noção conseguirem associar isso a relação de igualdade, procuramos identificar como eles entenderam a maneira de fazer as trocas. A Aluna II (fala 11), ao mencionar que "*[...] então dá pra trocar sim, é a mesma quantidade*", nos faz pensar que, assim como ela e os colegas que deram a sugestão, todos identificaram que, para fazer a troca, seria necessário ter a mesma quantidade do alimento “original”, ou seja, deveriam buscar uma forma de reunir 1kg com quaisquer alimentos, explorando a relação entre as quantidades em gramas.

A essência desse pensamento evidenciado pelos acadêmicos nos remete à noção de igualdade, mencionada por eles mais tarde durante a síntese. Segundo Ponte, Branco e Matos (2009, p.19, grifo do autor):

> Em Matemática, a noção de igualdade desempenha um papel fundamental, tendo um significado muito mais próximo de “equivalência” do que de “identidade”. Na identidade matemática existe uma coincidência total entre dois objectos – um objecto só é idêntico a si mesmo. Em contrapartida, a igualdade ou equivalência matemática é sempre relativa apenas a uma certa propriedade.

Tanto na síntese como durante o desenvolvimento da situação, os acadêmicos identificaram que as trocas só poderiam ser feitas, porque o problema desencadeador buscava formas de trocar os produtos por meio da quantidade em relação a uma determinada propriedade, no caso a massa em gramas, e não pelo valor monetário de cada item. Neste intuito, a Aluna B (fala 13) associou o problema à história da humanidade, explicando: *“porque o problema fala que o menino tava estudando sobre a história né, quando vê antigamente era assim que fazia, se trocavam por trocar ...”.*

Assim como destacado por ela, ao observarmos o movimento histórico da relação com as grandezas e medidas, é possível rememorar que, no comércio, as trocas dos produtos eram designadas por critérios adotados por cada vendedor, diferentemente de hoje que as trocas são feitas por dinheiro. Segundo Silva (2011), baseado nos estudos de Marx (2013), essas formas de relações entre as mercadorias são características de uma sociedade baseada no escambo, em que os produtos eram trocados de forma direta. Assim, estes aspectos constituem a história da humanidade e a transformação da sociedade.

Buscando explorar a relação entre as quantidades, e assim intuitivamente algumas propriedades da relação de igualdade, a pesquisadora questionou os acadêmicos sobre o que aconteceria se fosse acrescentado mais 1 kg de arroz à quantidade original e se mantivesse a troca feita. Como percebemos nas falas, o Aluno D (fala 20) comentou que essa troca não seria justa, “*porque vai tá faltando 1 quilo ali”,* se referindo que, à medida que aumentou 1kg de arroz na quantidade original, deveria ter aumentado 1kg na quantidade que seria trocada.

Ao se referir à comutatividade entre as parcelas, que neste caso eram as quantidades das massas dos itens em gramas, a pesquisadora supôs uma troca na ordem dita por um dos grupos. Como mencionado pela Aluna B (fala 18): *“porque o peso é o mesmo, mesmo invertendo a ordem a gente continua trocando por 1 quilo”* isso nos dá indícios da compreensão deles acerca da igualdade em que estavam tentando estabelecer entre os produtos, identificando que a ordem dos produtos não iria alterar a quantidade final em gramas que estavam formando. Do mesmo modo, manifestaram perceber o que ocorreria se acrescentássemos certa quantidade a um total de produtos e não acrescentássemos no outro total de produtos que antes representavam a mesma quantidade.

A fala da Aluna B (fala 24) *"coloca ali junto com o sal e feijão, mais 500 gramas de sal e 500 gramas de feijão, porque daí vai ter aumentado 1 quilo também deste lado"* nos faz perceber que, mesmo o sinal de igual ainda não aparecendo em nosso quadro das quantidades, eles já tinham noção de como manter a igualdade em ambos os membros. Assim, algumas propriedades da relação de igualdade foram sendo trabalhadas e entendidas pelos acadêmicos ao longo de suas manifestações acerca do acréscimo ou decréscimo de quantidades em ambos os membros da igualdade, mesmo que esta ainda não estivesse formalizada neste momento com o sinal de igualdade.

Percebemos que o que, inicialmente, foi sendo discutido de modo empírico, ao apenas identificarem quais produtos poderiam trocar, a partir das interações entre os acadêmicos e a pesquisadora foi se manifestando de forma mais elaborada, se aproximando do pensamento teórico acerca das propriedades da relação de igualdade.

> O conteúdo do pensamento teórico é a existência mediatizada, refletida, essencial. O pensamento teórico é o processo de idealização de um dos aspectos da atividade objetivo-prática, a reprodução, nela, das formas universais das coisas. Tal reprodução tem lugar na atividade laboral das pessoas como peculiar experimento objetivo-sensorial. Logo, este experimento adquire, cada vez mais, um caráter cognoscitivo, permitindo às pessoas passarem, com o tempo, a realizar os experimentos mentalmente. (DAVIDOV, 1988, p. 125)

Os sentidos atribuídos à relação de igualdade pelos acadêmicos em discussão com os colegas e a pesquisadora foram aos poucos se formalizando na relação de igualdade. Mesmo que esta relação ainda estivesse implícita na situação - problema, foi utilizado um quadro, dividido em duas partes, sendo que em cada parte havia fichas com os produtos que eles identificavam para a troca. Deste modo, à medida que a turma e a pesquisadora iam discutindo sobre o problema, eles iam percebendo que a quantidade adicionada aos produtos em uma parte do quadro deveria ser adicionada na outra também, demonstrando que

> [...] os sujeitos, mobilizados a partir do movimento de desenvolvimento da situação desencadeadora, interagem com os outros segundo as suas potencialidades e visam chegar a outro nível de compreensão do conceito em movimento. Além disso, o modo de ir se aproximando do conceito também vai dotando o sujeito de uma qualidade nova, ao ter que resolver problemas, pois, além de ter apreendido um conteúdo novo,

> também adquiriu um modo de se apropriar de conteúdos de um modo geral. (MOURA et al., 2010, p. 103)

Mesmo os acadêmicos tendo compreendido as possíveis trocas que poderiam ser feitas, demonstraram respostas a partir dos sentidos que estavam atribuindo a situação, o que pôde ser percebido, quando o Aluno D (fala 30) indagou "*mas qual o sentido de trocarmos arroz por arroz? Vamos escolher outro produto".* Assim, pensaram em várias formas de solução do problema para os produtos que poderiam ser trocados.

Direcionando os acadêmicos a pensaram no sinal de igualdade, em relação as trocas que haviam sido feitas, o Aluno D (fala 45) comentou sobre a equivalência entre os produtos *"[...] vai ser tudo equivalente"* e *"tem a mesma medida ou o mesmo peso nesse caso",* se referindo à massa em gramas dos produtos. A Aluna BB (fala 53) complementou dizendo que *"[...] se a gente somar os produtos que tem de um lado, vai ter igual do outro lado"*, dando indícios de ambos terem compreendido a igualdade como representação do resultado de uma operação aritmética, sendo este um dos objetivos da noção de igualdade (PONTE; BRANCO; MATOS, 2009). Essas colocações dos acadêmicos nos levam a induzir que que a noção de equivalência era algo claro para eles, pois, mesmo ainda não evidenciando o sinal de igualdade neste momento, possuíam conhecimentos prévios que auxiliaram no desenvolvimento da situação de ensino.

Assim sendo, a partir da exploração dos conhecimentos prévios dos acadêmicos sobre equivalência, por meio de questionamentos durante o desenvolvimento da situação, o conhecimento formal da relação de igualdade foi aos poucos sendo desencadeado. Para Vigotski (2001), os conhecimentos prévios são ponto de partida, para, posteriormente, ocorrer a formalização de conceitos científicos. Tendo em conta os conhecimentos que os acadêmicos já possuíam e o quanto isso pareceu direcionar o pensamento deles para a busca da solução do problema, podemos caracterizar este desenvolvimento como uma etapa que já haviam alcançado sozinhos, e isto é denominado por Vigotski (2007) como zona de desenvolvimento real.

Quando questionados pela pesquisadora em como representar essa equivalência a que se referiam em uma linguagem matemática, conseguiram aprimorar a ideia da relação de igualdade e as suas propriedades. Fazendo uso de instrumentos mediadores que foram levados para a dinâmica de desenvolvimento da situação, como o quadro que foi dividido ao meio e as fichas com os produtos e suas quantidades, os acadêmicos identificaram que a divisão do quadro poderia ser representada pelo sinal de igualdade, como percebemos nas falas do Aluno H (fala 57) *"é só escrever que é igual"* e da Aluna II (fala 61) *"tipo ali neste quadro tem essa linha* *vermelha né? Essa linha ai podia ser trocada pelo sinal de igual, porque quando a gente tem uma quantidade de produtos de um lado, também precisa ter do outro".*

Ponte, Branco e Matos (2009) identificam dois modos de entendimento do sinal de igual: o processual e o estrutural, que podem distinguir o pensamento aritmético do algébrico (KIERAN, 1992). O pensamento algébrico (concepção estrutural) é desencadeado a partir das estruturas e das relações da igualdade, e o pensamento aritmético (concepção processual) pelo cálculo. Ao perceberam a igualdade como uma equivalência entre as quantidades, bem como as propriedades desta relação, os acadêmicos deram indícios de entender a igualdade em uma perspectiva estrutural, visto que

> Um aspecto fundamental desta passagem da concepção processual para a concepção estrutural tem a ver com o entendimento do sinal de igual. Este sinal, numa perspectiva processual, indica a realização de uma operação, e, numa perspectiva estrutural, remete para uma relação de equivalência. (PONTE; BRANCO; MATOS, 2009, p. 21)

O caminho percorrido pelos acadêmicos para desenvolver as funções psicológicas que ainda estavam sendo desencadeadas durante o problema, colocou-os no que Vigotski (2007) chama de zona de desenvolvimento proximal (distância entre o nível de desenvolvimento real e o nível de desenvolvimento potencial).

> Para elaborar as dimensões do aprendizado escolar, descreveremos um conceito novo e de excepcional importância, sem o qual esse assunto não pode ser resolvido: a zona de desenvolvimento proximal (...) define aquelas funções que ainda não amadureceram, mas que estão em processo de amadurecimento, funções que amadurecerão, mas que estão presentemente em estado embrionário. Essas funções poderiam ser chamadas de "brotos" ou "flores" do desenvolvimento, em vez de "frutos" do desenvolvimento (VIGOTSKI, 2007, p. 97-98).

Assim, o desenvolvimento dos conhecimentos matemáticos dos acadêmicos acerca da relação de igualdade estavam em constante movimento, seja para fazer uma síntese para o problema desencadeador, seja para pensar em um exemplo de como explorar a relação de igualdade com os estudantes da Educação Básica. Isso ficou claro nas falas do Aluno C (fala 65) *"por que por mais que a gente saiba o que é, não é tão fácil assim pensar"*, da Aluna BB (fala 66) "*eu pensei naqueles probleminha sabe, que tem tipo os números, o sinal de igual e quer saber qual número que falta. Isso é um exemplo?"* e do Aluno C (fala 68) *"ah é mesmo, não foi tão difícil assim agora que a Aluna BB falou"*.

A partir da interação com a pesquisadora e os colegas que já haviam dado indícios da compreensão do conceito trabalhado e como pensar nesse conceito, ficou evidente a importância do sujeito mais experiente ao longo do desenvolvimento da situação, uma vez que "[...] aquilo que é zona de desenvolvimento proximal hoje será o nível de desenvolvimento real amanhã" (VIGOTSKI, 1998, p. 113).

5.4.2 Síntese do Episódio 4

A relação de igualdade pode ser trabalhada com os estudantes desde os anos iniciais de sua escolaridade, e nos anos finais será dada durante o estudo das equações. Tencionamos, na situação apresentada neste episódio, explorar o significado da relação de igualdade e as suas propriedades por meio de um problema desencadeador que almejava esmiuçar a igualdade como uma equivalência entre as quantidades de massa em gramas, compreendendo a importância da apropriação do professor (ou futuro professor como em nosso caso) no que se refere a esse conhecimento matemático.

> O sentido do sinal de igual como resultado de uma operação é largamente usado nos primeiros anos. No entanto, é fundamental que não se perca o sentido mais geral deste sinal como estabelecendo uma equivalência entre duas expressões numéricas. Os alunos devem, por isso, ser capazes de começar por reconhecer igualdades muito simples. (PONTE, MATOS, BRANCO, 2009, p. 20)

As dificuldades com o uso do sinal de igualdade entre os estudantes da Educação Básica podem ser desencadeadas pelo fato de não serem exploradas as propriedades e as relações da igualdade, dando-se ênfase à mecanização de operações aritméticas que envolvem apenas um resultado, dificultando a formação do pensamento matemático e, mais especificamente, o algébrico. Neste intuito, os estudantes, quando colocados diante de situações que busquem utilizar o sinal de igual como relação de equilíbrio entre as partes do problema e não como um resultado de uma operação, demoram a compreender e se apropriar desse conceito (SÁ; FOSSA, 2008).

Para Sá e Fossa (2008, p. 269), a distinção entre um problema aritmético e um problema algébrico no que se refere à igualdade se dá pelo fato de que no primeiro "em sua resolução operacional, não são usadas de maneira implícita ou explícita as propriedades aditivas ou multiplicativas da igualdade". Já o problema algébrico traz o sinal de igual como equilíbrio entre as partes do problema desenvolvido, é "aquele em que, na sua resolução operacional, são usadas de maneira explícita ou implícita as propriedades aditivas ou multiplicativas da igualdade" (p. 270).

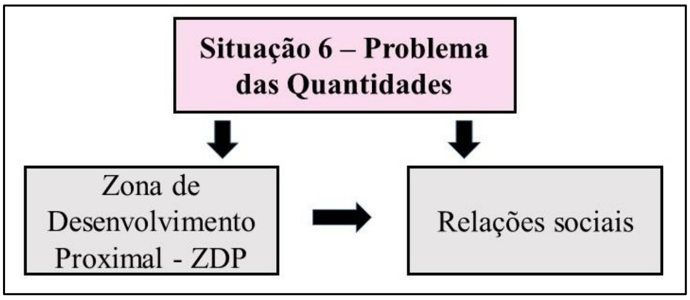
Na Situação 6, a partir dos conhecimentos prévios dos acadêmicos e dos sentido que atribuíam a relação de igualdade, conseguimos explorar a noção de igualdade e algumas propriedades que dela decorrem. Percebemos que os acadêmicos deram indícios de compreender a relação de igualdade como uma equivalência entre os elementos do problema, formulando a síntese de maneira algébrica, ao buscarem evidenciar como seria possível realizar as trocas dos itens, sem recorrer a igualdade como uma mera operação que resultaria em um número. Desta forma,

> Se não se introduzir a álgebra de maneira significativa, conectando os novos conhecimentos aos conhecimentos prévios que os alunos já possuem, se aos objetos algébricos não se associar nenhum sentido, se a aprendizagem da álgebra for centrada na manipulação de expressões simbólicas a partir de regras que se referem a objetos abstratos, muito cedo os alunos encontrarão dificuldades nos cálculos algébricos e passarão a apresentar uma atitude negativa em relação à aprendizagem matemática, que para muitos fica desprovida de significação. (ARAÚJO, 2008, p. 6)

As relações entre o processo de desenvolvimento e a aprendizagem podem ser compreendidas pelo que Vigotski (2009) denomina de zona de desenvolvimento proximal – ZDP. Nesta situação, os acadêmicos demonstraram estar nesta zona quando, a partir das ideias e noções que já possuíam sobre a relação de igualdade, avançaram por meio da interação com os colegas e a pesquisadora. Isto ressaltou o possível desenvolvimento das suas capacidades intelectuais durante a situação de ensino.

Em vista disso, podemos compreender que o aprendizado e o desenvolvimento andam juntos. Na ZDP, a aprendizagem pode ser desencadeada por aquilo que o estudante já sabe, ou seja, certas aprendizagens que podem mobilizar o que já está formado. A aprendizagem, como decorrência do ensino, conduz ao desenvolvimento. O episódio a seguir se volta para mostrar os planejamentos feitos pelos grupos de acadêmicos.

Figura 44: Síntese do Episódio 4



Fonte: Sistematização da autora

5.5 EPISÓDIO 5: APRENDENDO A ENSINAR ÁLGEBRA

No último encontro com a turma, foi pedido que os acadêmicos elaborassem um planejamento, tendo a álgebra como foco. Eles puderam escolher o que gostariam de trabalhar e também o ano a que seria proposto este planejamento. Nesta ação proposta pela pesquisadora, foram constituídos dez planejamentos.

5.5.1 Cena 7.1: Síntese dos planejamentos dos acadêmicos

Esta cena traz a síntese da ideia geral de cada grupo em seu planejamento, bem como os nexos conceituais escolhidos para serem trabalhados, como observamos no Quadro 26.

Quadro 26: Síntese dos planejamentos

(continua)

Grupo	**Ano**	**Nexos conceituais abordados**	**Síntese do planejamento**
Grupo 1	3.º ano	Sequência, padrão e regularidades	• Apresentar sequências de figuras para os estudantes e promover uma discussão acerca do padrão de cada sequência. • Dividir os alunos em grupos para que utilizem material manipulativo e objetos reais, formando novas sequências com padrão estabelecido por eles.
		Relação de igualdade	• Descobrir com uso de palitos de picolé as quantidades desconhecidas para que ambas (quantidades) sejam equivalentes.
Grupo 2	5.º ano	Sequência, padrão e regularidades	• Apresentar sequências e questionar os estudantes sobre o padrão de cada uma delas. • Disponibilizar objetos e pedir que os estudantes criem sequências. • Pedir aos estudantes, a partir de uma sequência dada pela professora, que descubram o padrão e termos mais distantes dessa sequência. • Identificar o padrão que expressa a relação entre os números ditos e os números respondidos, a partir de um quadro com duas linhas: a do número dito e a do número respondido.
Grupo 3	3.º ano	Sequência, padrão e regularidades	• Dividir a turma em dois grupos. Cada grupo irá elaborar no quadro da sala de aula um padrão de sequência numérica, no qual o outro grupo irá descobrir qual o padrão da sequência e assim sucessivamente.
		Relação de igualdade	• Realizar um jogo: dividir os estudantes em trio e entregar a cada grupo um baralho. Neste baralho terão números de 1 a 10. O objetivo do jogo é explorar a relação de igualdade, em que uma dupla de estudantes colocará seu número na testa e o terceiro irá dizer a soma dos números. Sabendo a soma e o número do colega, cada um terá que descobrir qual o seu número em cada rodada.

Quadro 26: Síntese dos planejamentos

(continuação)

			• Utilizar uma balança e alimentos de diferentes quantidades. Cada estudante terá que pesar dois alimentos que escolher e elaborar um problema matemático. • Entregar folha de registro.
Grupo 4	3.º ano	Sequência, padrão e regularidades	• Pedir aos estudantes que completem a sequência que foi desenhada no quadro.
		Relação de igualdade	• Realizar uma tarefa que parta da questão: Quanto vale cada triângulo? O objetivo desta atividade é descobrir o valor de cada triângulo, sendo que existem três triângulos em um lado de uma balança e no outro lado há um peso de 45 kg (balança em equilíbrio). • Disponibilizar aos estudantes três itens (alimentos) com certas quantidades e pedir que formem quais as possibilidades de terem 1 kg de alimentos.
Grupo 5	2.º ano	Sequência, padrão e regularidades	• Explicar o que é um sequência e seu padrão a partir de exemplos cotidianos: fila da entrada da sala de aula, ordem das classes, ... • Entregar uma folha de registro e outras tarefas.
Grupo 6	2.º ano	Relação de igualdade	• Realizar um jogo em que os estudantes terão que escolher uma das sete caixas disponibilizadas pela professora e retirar um número. A professora diz um total e o estudante terá que descobrir qual o número que somado ao que ele retirou terá como resultado o total dito pela professora.
		Sequência, padrão e regularidades	• Pedir aos estudantes que organizem as varetas (jogo pega varetas) em determinada ordem de cores. Não havendo mais cores, terão que repetir a ordem já estabelecida e assim descobrir qual o padrão de cores das varetas.

Quadro 26: Síntese dos planejamentos

(continuação)

Grupo 7	4.º ano	Variável	• Realizar o jogo Batalha Naval – a partir da ideia deste jogo, desenhar no chão uma malha quadriculada (com letras nas colunas e números nas linhas). Depois deixar dois objetos sobre a malha e pedir que os estudantes descubram qual o menor caminho entre eles. • Após esta etapa, pedir aos estudantes que fiquem de costas um para o outro na malha quadriculada e a turma terá que guiá-los até um certo objeto que estará disposto na malha.
		Relação de igualdade	• Levar uma balança e desenvolver um jogo. Neste jogo os estudantes terão que comparar as massas e descobrir as equivalências entre elas, bem como as diferenças. • Entregar folha de registro.
Grupo 8	1.º ano	Sequência, padrão e regularidades	• Desenvolver sequências com os próprios estudantes, sendo que a professora irá escolher a sequência que irá formar, como por exemplo: um menino, uma menina, um menino, uma menina, ... • Pedir que os estudantes completem as sequências (atividades)
		Variável	• Utilizar imagens como variável (estrela, quadrado, coração, ...) e desenvolver tarefas para estimular a noção de variável, como por exemplo: ♡ + 1 = 5
		Relação de igualdade	• Desenvolver a tarefa – quais são iguais? De modo semelhante à atividade anterior, explorar a noção de igualdade, utilizando imagens como variáveis. ♡ + △ = 8 □ + ♡ = 8

Quadro 26: Síntese dos planejamentos

(conclusão)

Grupo 9	3.º ano	Sequência, padrão e regularidades	• Mostrar algumas sequências aos estudantes e pedir que descubram o padrão, bem como termos distantes.
		Relação de igualdade	• Levar uma situação-problema que envolva a relação de igualdade entre certas quantidades.
Grupo 10	4.º ano	Relação de igualdade	• Levar uma balança e pedir aos estudantes que descubram quais produtos são necessários para manter a balança em equilíbrio. • Entregar folha de registro. • Entregar uma folhinha com problemas matemáticos que explorem a noção de igualdade (problemas que envolvem balança)

Fonte: Sistematização da autora com base nos planejamentos dos grupos

Percebemos nos planejamentos referentes aos nexos *sequência*, *padrão* e *regularidades* que os acadêmicos tinham como objetivo explorar a noção de *padrão* em uma *sequência*. Os grupos escolheram diferentes instrumentos para a realização das atividades que pensaram, como vimos, alguns mencionaram utilizar objetos, material manipulável, jogo e dinâmicas interativas entre os estudantes, e este movimento demonstra a intencionalidade deles em planejar as ações. Neste intuito, o ensino, quando intencionalmente organizado, se faz essencial para o desenvolvimento das funções psicológicas superiores dos estudantes, neste caso, as das crianças. Desta forma, estar em atividade de ensino implica ser consciente na ação de ensinar (MOURA, 2001).

Os nexos *sequência*, *padrão* e *regularidades* foram os mais escolhidos pelos grupos para serem abordados em seus planejamentos. Em grande maioria, a essência destes nexos estava presente nas ações propostas por eles. Foram além do que foi desenvolvido nas duas Situações de Ensino referentes a estes, objetivando, geralmente, envolver os estudantes na construção de sequências com eles próprios ou com objetos reais. Nesta perspectiva,

> Por tratar-se de ação educativa, ao professor cabe organizá-la de forma que se torne atividade que estimule auto-estruturação do aluno. Desta maneira, é que a atividade possibilitará tanto a formação do aluno com a do professor que, atento, aos "erros" e "acertos" dos alunos, poderá buscar o aprimoramento do seu trabalho pedagógico. (MOURA, 1997, p. 85, grifos do autor)

Conseguimos identificar em alguns planejamentos o uso da folha de registro, o que denota que eles tinham a intenção de saber como tinham sido entendidas as ações desenvolvidas com os estudantes, bem como a resolução de novas situações que seriam propostas, partindo do que já haviam feito. Segundo Nacaratto, Mengali e Passos (2009, p. 63), "o registro, muitas vezes, sinaliza para a professora conhecimentos matemáticos escolares que foram apropriados de forma equivocada pelos alunos e que necessitam de intervenção para ser superados". Cabe ressaltar, que em todas as ações propostas nesta pesquisa foi feito o uso de registro, e isso pode ter colaborado para os acadêmicos pensarem em propostas que fizessem uso dele.

O nexo conceitual *variável* foi explorado em dois planejamentos. Um dos grupos que abordou este nexo propôs trabalhar de forma lúdica, através de jogos que estimulassem os estudantes a pensar em representações com letras e números. Por meio da organização de jogos, "as crianças estarão construindo seu pensamento teórico, desenvolvendo suas funções psicológicas superiores através do contato com o conhecimento científico, por meio de sua atividade principal" (BINSFELD, 2019, p. 123).

Percebemos que, mesmo algumas situações não tendo sido desenvolvidas por meio de jogos, vários grupos fizeram em seus planejamentos ideias de jogos que poderiam ser utilizados para abordar os nexos conceituais que aprenderam durante o desenvolvimento das ações da pesquisa. Portanto, temos indícios de que, ao se apropriarem dos nexos conceituais trabalhados, se colocaram no movimento de pensar em ações criativas que pudessem ser significativas na aprendizagem dos estudantes.

Um outro grupo buscou trazer em suas ações a essência da *variável*, como forma de representação de algo desconhecido. Ao pensarmos no ensino da variável nos anos iniciais, temos que esta deve ser explorada ainda de forma lúdica, para que os estudantes atribuam sentido à proposta desenvolvida. Mesmo trabalhada de forma intuitiva nos anos iniciais, através da representação de imagens ou símbolos ainda desconectados das letras que usualmente são utilizadas, esta forma de explorar a *variável* também traz a sua essência. Sendo assim, se desencadeada nos estudantes desde os primeiros anos de sua escolarização, solidificará uma base algébrica que irá ser concretizada mais tarde.

A relação de igualdade foi desenvolvida por quase todos os grupos nas ações propostas em seus planejamentos. Podemos identificar que vários grupos propuseram o uso da balança, o que nos remete a pensar no sentido que atribuíram ao sinal de igualdade, ou seja, à equivalência em ambos os membros. Assim, buscaram em seus planejamentos aproximações com a situação desenvolvida anteriormente com a turma. Neste intuito, os planejamentos sobre igualdade trouxeram jogos e também ações que se assemelhavam a que foi proposta nesta pesquisa. Contudo, mesmo alguns mantendo a mesma ideia da Situação 6 - Problema das quantidades, elaboraram outros modos de desenvolvê-la.

A observação dos planejamentos nos levou a identificar a relação do que foi aprendido em sala de aula e o movimento de pensar modos de como organizar o ensino, ou seja, a necessidade de ter que planejar pode também ter oportunizado aprendizagem para esses futuros professores. Assim,

> [...] a aprendizagem docente, por meio do pensamento teórico, compreende a apropriação dos conceitos e, também, a assimilação das capacidades humanas surgidas historicamente no ato de ensinar. Ou seja, o professor ao organizar o ensino de modo a favorecer o desenvolvimento teórico dos seus estudantes, o desenvolve também para si. O pesquisador ao organizar a pesquisa visando a promoção do pensamento teórico do professor, também o desenvolve para si. (ARAÚJO, 2013, p. 90)

Enfim, a organização proposta pelos acadêmicos em seus planejamentos dão indícios de manifestarem os modos como se apropriaram dos nexos conceituais algébricos. Percebemos reflexos das situações desenvolvidas na maneira de planejar o ensino da álgebra nos anos iniciais. Identificamos, durante o desenvolvimento das ações, o movimento de aprendizagem dos acadêmicos em relação aos nexos abordados, e o movimento de aprender a planejar ações que busquem satisfazer as necessidades de aprendizagem das crianças.

5.5.2 Síntese do Episódio 5

O propósito deste episódio era perceber como os acadêmicos participantes de nossa pesquisa organizariam um planejamento tendo a álgebra nos anos iniciais. Entendendo a importância de articular a aprendizagem dos nexos conceituais algébricos e os aspectos relacionados aos modos de ensinar, nossa intenção com este momento era identificar como os grupos pensaram em abordar os nexos e suas intencionalidades para com o ensino da álgebra.

Para o professor organizar o ensino de modo intencional, é necessário criar situações que possam oportunizar a aproximação aos conceitos científicos e, em nosso caso, mais especificamente os algébricos, intencionando a aprendizagem dos estudantes, pois

> o sujeito que é fruto de nossa ação educativa, vai adquirir um certo conhecimento que vai lhe capacitar a agir de uma determinada forma no meio que vive. A sua aprendizagem vai lhe capacitar a compreender algum fenômeno de alguma forma. E isto vai lhe permitir usar desse novo saber para impactar a realidade. (MOURA, 2006, p. 144)

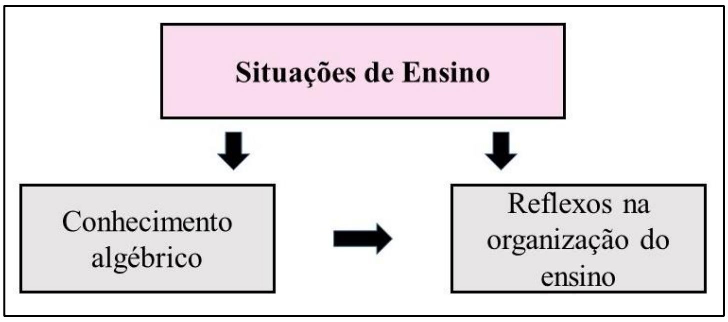
O processo de formação inicial se constitui como uma possibilidade aos futuros professores de significar a atividade docente e de se apropriar de conhecimentos. Portanto, o modo como esses futuros professores se apropriam do conhecimento vai refletir no movimento de desenvolver “uma unidade entre a atividade e o desenvolvimento das ações para aprimorar a atividade” (MOURA; LOPES; SFORNI, 2017, p. 76)”, dando novo sentido à atividade da docência. Em nossa investigação, buscamos oportunizar, a partir das Situações de Ensino desenvolvidas, a apropriação dos nexos conceituais algébricos e o compartilhamento de ideias para o ensino destes nexos na Educação Básica no momento da organização do planejamento feito por cada grupo.

Os planejamentos elaborados pelos grupos nos permitiram perceber indícios da apropriação dos nexos conceituais algébricos por meio das ações propostas, já que buscaram envolver a essência de cada nexo na tarefa que objetivaram desenvolver. Vários fizeram menção ao uso de material concreto e atividades lúdicas. Propor utilizar jogos na organização das ações foi o que mais prevaleu dentre os dez planejamentos. Segundo Nascimento, Araujo e Migueis

(2009, p. 300) “[...] o jogo é a forma principal de a criança vivenciar seu processo de humanização, uma vez que é a atividade que melhor permite ela apropriar-se das atividades (motivos, ações e operações) culturalmente elaboradas”.

Nosso desejo nesta investigação era colocar os futuros professores de nossa pesquisa no movimento de aprender sobre os conhecimentos algébricos e compartilhar com seus grupos modos de planejar e organizar este ensino. Tendo em conta a importância do conhecimento matemático para o futuro professor que ensinará matemática e a intencionalidade na organização do ensino, é necessário que os professores possam ter oportunidade de vivenciar ações que os coloquem no movimento de aprender e ensinar.

Figura 45: Síntese do Episódio 5



Fonte: Sistematização da autora

5.6 REFLEXÕES A PARTIR DOS EPISÓDIOS

Com base nas situações desenvolvidas e nos planejamentos organizados pelos acadêmicos, conseguimos chegar a algumas sínteses.

Os conceitos algébricos não se mostraram tão evidentes para os acadêmicos como os conceitos dos outros campos matemáticos.

Na busca por identificar o que haveria de matemática nas imagens da Situação 1 – Matemática da Floresta, os acadêmicos reconheceram diversos conceitos ligados a vários campos da matemática, porém houve inicialmente uma fragilidade em identificar os conceitos algébricos presentes em todas as imagens. Muitas vezes vista pelos estudantes como uma mera manipulação de letras, a álgebra e seu caráter apenas formal dificultam ao estudante compreender a essência de seus conceitos, não atribuindo sentidos fora do "contexto das letras". Lins e Gimenez (1997) identificam que a ênfase dada ao ensino da álgebra ora privilegia a manipulação e a transformação algébrica, e ora privilegia a generalização, e isso contribui para o fracasso do ensino da álgebra. Além disso, há de se considerar que,

> [...] a álgebra tem se tornado, quase que a fonte principal do processo de alienação dos estudantes em relação a aprendizagem dos conhecimentos matemáticos. Ao ser entendida somente como uma forma de manipulação de símbolos, perde totalmente sua relevância na vida deles, dissociando-se de suas práticas sociais. (SOUSA; PANOSSIAN; CEDRO, 2014, p. 46)

Ademais, a maneira como se ensina álgebra não atrai os estudantes, o que resulta na não compreensão dos conceitos algébricos de forma interessante e pertinente. E desse modo, o papel importante da álgebra na formação dos sujeitos acaba não favorecendo o seu desenvolvimento.

A partir de conceitos espontâneos, por meio das Situações de Ensino, da mediação da pesquisadora e da interação da turma, os acadêmicos conseguiram aproximar-se dos conceitos científicos abordados.

Na Situação 1, os acadêmicos participantes de nossa pesquisa, partiram dos conceitos espontâneos que já possuíam anteriormente e que foram vistos em outros momentos de sua formação para aproximar-se dos conceitos científicos algébricos presentes na situação de ensino. Poderíamos inferir que esse movimento assemelha-se ao que acontece com a criança em seu processo de aprendizagem na escola.

> A aprendizagem dos conceitos científicos adquiridos via mediação cultural, que se dá na e pela interação com professores e colegas, apóia-se em um conjunto previamente desenvolvido de conhecimentos originários das experiências diárias da criança. Esse conhecimento, espontaneamente adquirido, passa a ser o mediador da aprendizagem de novos saberes. (MARTINS, 2011, p. 119)

Mesmo que a formação dos conceitos espontâneos e científicos seja divergentes (VIGOTSKI, 2001), ambos estão relacionados. Em sendo assim, cabe ao professor mediar o desenvolvimento das situações propostas aos estudantes para alcançar a formação destes conceitos científicos.

A transição dos conceitos espontâneos para os conceitos científicos predominou em nossa Situação 1 e desencadeou a aproximação à essência dos nexos conceituais *sequência*, *padrão* e *regularidade*.

A busca de uma estratégia de resolução e, posteriormente, uma generalização ou utilização de símbolos se deu a partir de uma necessidade desencadeada pela situação-problema.

Na Situação 2 – Sequentopeia, os acadêmicos em sua maioria, quando tiveram que encontrar o 18.º termo, fizeram uso da contagem. Mesmo que contar até o 18.º demandaria atenção para não se confundir e até certo tempo, esta foi a escolha comum a quase todos os sujeitos de nossa pesquisa.

Já no caso do 85.º termo foi necessário pensar em alguma estratégia para encontrá-lo, pois não seria viável contar até 85. Para Kopnin (1978, p. 170) "o pensamento nasce de necessidades práticas para satisfazer as necessidades da prática, é um processo dirigido a um fim". Portanto, precisar encontrar o 85.º termo da Sequentopeia desencadeou neles uma nova forma de pensar, gerou procurar uma estratégia de resolução que culminasse em uma generalização.

Na Situação 4, os acadêmicos, ao precisarem encontrar uma maneira de registrar o caminho de forma rápida e eficaz, escolheram a representação simbólica. Ou seja, quando tiveram a necessidade de fazer um registro que fosse além das palavras, se valeram de uma estratégia que fosse mais rápida.

Compreender uma situação-problema como modo de desenvolver o pensamento, para Rubstov (1996, p. 133) acontece quando a

> [...] resolução pede que um dado modelo de ação seja transformado em uma base, que constitui a orientação comum para completar as ações concretas relativas a uma classe de problemas; procedimento que resulta na transformação do aluno em si, através de uma autotransformação, uma vez que ele modifica, então, os modos de funcionamento e regulagem das suas próprias ações e adquire novos modos de orientação das suas ações no interior do sistema de situações que o cerca..

As ações desenvolvidas por si só não desencadeariam nos estudantes a necessidade em resolvê-las ou pensar em métodos e estratégias para encontrar sua solução, foi preciso, então, criar situações que despertassem neles tais necessidades e que desenvolvessem o seu pensamento em busca de novos modos de resolução.

A relação entre os signos e os sentidos pessoais e significados estavam presentes na essência da síntese coletiva.

Na Situação 4, os acadêmicos encontraram, como forma de representar o indicativo das quadras, na descrição do caminho, a variável "q", visto que em momento anterior estavam escrevendo a palavra "quadras". A ideia de uma das acadêmicas em utilizar esta representação pode ter se dado por um sentido pessoal, expresso como uma forma de representar o número de quadras através da letra. Leontiev (1983) diz que o sentido pessoal é algo do sujeito, é algo que nasce da sua necessidade de atingir seus objetivos. Na Situação 6, os sentidos que atribuíram à noção de equivalência, ao serem aprimorados e discutidos com a turma e com a pesquisadora, foram se desencadeando na formalização da relação de igualdade.

Entretanto, nem sempre o sentido pessoal está em conformidade com o significado, pois o sentido pode ser manifestado através dos significados, mas o significado não pode ser manifestado apenas por um sentido. Os sentidos para Leontiev (1983) não são puros, estão relacionados com as significações.

> Os significados são mais estáveis, já os sentidos modificam-se de acordo com a vida do sujeito e traduzem a relação do sujeito com os fenômenos objetivos conscientizados. Além disso, é o sentido que se exprime na significação, e não ao contrário; é o sentido que se concretiza nas significações [...] (ASBHAR, 2014, p. 268)

Em algumas situações, percebemos a preocupação dos acadêmicos em não errar, prestar atenção, ter cautela ao resolver as situações-problema. Estes aspectos podem estar relacionados ao sentido pessoal de cada um para a situação e não estando atrelado a algum significado social. Na Situação 4, a solução do problema para um dos grupos decorreu do sentido pessoal, pois, ao se lembrarem do jogo que brincavam na infância, encontraram nele uma possível forma de resolver o problema. Essa associação do jogo à situação-problema pode estar atrelada ao significado que o jogo possui socialmente, visto que ambos, na sua essência, demandam uma forma de localização. Já na Situação 5, os acadêmicos escolheram uma variável para registrar em linguagem matemática a solução do problema, por atribuírem um sentido a ela: representar um valor desconhecido, sentido este que também condiz com seu significado cultural.

Identificando as características que emergiram do problema desencadeador, os acadêmicos, a partir de suas necessidades, conseguiram encontrar uma solução para a Situação 4 e aproximaram-se do conceito de variável por meio de processos psicológicos, ou seja, os signos.

> O conteúdo matemático é constituído de signos articulados por regras que, operadas de forma lógica, produzem um resultado que tem suporte na realidade objetiva. Isto é, ao serem aplicados na solução de problemas concretos, os conceitos deverão permitir uma intervenção objetiva na realidade. Com isto queremos dizer que os conhecimentos que vingam são aqueles que têm uma prova concreta quando testados na solução de problemas objetivos. (MOURA, 2007, p. 48-49)

Então, a partir da necessidade do seu uso, valer-se de um signo que auxiliasse nas ações desencadeadas, deu indícios de que os estudantes entenderam a fluência da variável, o que ficou ainda mais claro na Situação 5.

As formas de agir, durante o desenvolvimento das ações propostas, manifestaram os motivos que conduziram os estudantes na resolução das situações propostas.

Em vários momentos durante o desenvolvimento das ações, identificamos motivos tanto apenas compreensíveis quanto motivos eficazes. Durante a Situação 4, alguns acadêmicos, ao atribuírem um sentido pessoal durante a síntese da solução coletiva, participaram mais ativamente das interações. Isso evidencia que, ao atribuírem um novo sentido para as suas ações, possivelmente seus motivos, que, antes eram apenas compreensíveis, passaram a ser eficazes. Nesse caso, o sentido está ligado ao motivo.

> E assim, aquilo que eu realmente conscientizo, a forma com que conscientizo e o sentido que tenha para mim conscientizado é determinado pelo motivo da atividade dentro da qual está incorporada minha ação em questão. 'Por isso a questão acerca do sentido é sempre uma questão acerca do motivo'. (LEONTIEV, 1983, p. 230)

Mais predominantemente na Situação 5, conseguimos perceber os motivos relacionados ao entendimento dessa situação. A dificuldade que os acadêmicos encontraram em solucionar o problema desencadeador gerou em alguns motivos apenas compreensíveis e em outros motivos eficazes. A partir da dificuldade em solucionarem o problema, alguns demonstraram desinteresse em refletir sobre este ou ir em busca de uma nova forma de resolver, o que denota que os motivos deles eram tão somente compreensíveis.

Em outros, os motivos tornaram-se eficazes, quando eles se mobilizaram para solucionar as situações, quando empreenderam novas formas de pensar. São os motivos que impulsionam o sujeito a resolver a situação proposta pelo professor e que levam a apropriação do conhecimento nela envolvidos. Os motivos eficazes são premissas para o domínio das operações do pensamento teórico.

Mediados pelas deduções, os juízos emitidos pelos acadêmicos, durante a síntese coletiva, contribuíram para a formalização do conceito.

Os acadêmicos já possuíam uma aproximação com o nexo conceitual variável visto na Situação 4. Porém, na Situação 5 conseguiram perceber a variável além de um parâmetro como na situação anterior. Nesta, eles identificaram que em ambas as situações se tratavam de variáveis (Situação 4 e Situação 5), mesmo que, em alguns momentos, ela estivesse disposta como símbolo, parâmetro, representação e relação funcional, e desta forma compreender o ser e não ser da variável (CARAÇA, 1998).

Para escrever em linguagem algébrica no problema desencadeador da Situação 5 na síntese coletiva, alguns acadêmicos mencionaram a utilização da variável por identificar que seria necessário encontrar uma forma de representar o que havia de desconhecido no problema. Então, as deduções feitas, a partir dos juízos que emitiram durante o desenvolvimento da síntese coletiva, indicam uma formalização da essência do conceito de variável. Além disso, os juízos atribuídos às limitações da variável nos levam a notar a compreensão do nexo conceitual campo de variação.

Ao serem identificados aspectos gerais de uma situação problema, os estudantes são capazes de emitir juízos. Portanto, as atividades que não dão oportunidades aos estudantes em emitir juízos e deduções “fazem com que muitas tarefas escolares sejam realizadas sem que a aprendizagem efetivamente ocorra” (SFORNI, 2004, p. 133).

Mesmo que os acadêmicos manifestassem indícios de terem compreendido o problema proposto, nem todos conseguiram expressar em linguagem algébrica os dados que possuíam.

A Situação 5 foi considerada pelos acadêmicos como a mais difícil das seis situações desencadeadoras. A dificuldade encontradas por alguns deles foi quando o problema pedia que a altura da pirâmide fosse registrada em uma linguagem algébrica. Mesmo entendendo a ideia do problema, e que poderiam utilizar a variável para representar os valores desconhecidos, nem todos conseguiram encontrar uma forma de registrar isso em uma linguagem algébrica que fosse compreendida por todos.

No momento de socializar as respostas, os acadêmicos em suas falas, entenderam a ideia de cada grandeza do problema para encontrar a altura da pirâmide, porém isso não foi o suficiente para que conseguissem fazer o registro. A linguagem escrita, como diz Vigotski (2001), necessita de uma maior abstração do que a linguagem falada.

> [...] a linguagem escrita requer para o seu transcurso pelo menos um desenvolvimento mínimo de um alto grau de abstração. Trata-se de uma linguagem sem o seu aspecto musical, entonacional, expressivo, em suma, sonoro. É uma linguagem de pensamento, de representação, mas uma linguagem desprovida do traço mais substancial da fala – o som material. (p. 313)

Em suma, mesmo fazendo uso da oralidade para expressar a solução para o problema, fazer o registro não foi algo fácil. Expressar em linguagem algébrica é necessário muito mais do que atribuir variável aos dados do problema, é necessário compreender o movimento dela na situação proposta.

O sinal de igualdade foi utilizado para representar as mesmas quantidades, ou seja, o mesmo valor em ambos os membros.

Ao buscarem identificar as transformações que poderiam fazer para ter a igualdade entre os membros, o uso do sinal de igual, como equivalência, foi a estratégia da turma para conseguir chegar à síntese do problema desencadeador da Situação 6. As propriedades exploradas a partir das quantidades da massa em gramas que estavam dispostas no problema também evidenciaram indícios da formalização da relação de igualdade de modo algébrico.

> [...] se o plano de resolução prever, de forma retórica ou simbólica, operações com quantidades incógnitas e o emprego de leis Aritméticas que legitimem as transformações entre os membros de uma igualdade, então, seguramente, os elementos do pensamento algébrico deverão aí se manifestar. (FIORENTINI; MIORIM; MIGUEL, 1993, p. 88)

Atribuir ao sinal de igualdade um significado de equivalência estimula o estudante a elevar o pensamento em situações que a noção e a propriedades de igualdade sejam primordiais. Do mesmo modo, o pensamento algébrico também é desenvolvido quando o estudante é capaz de interpretar uma igualdade como equivalência entre duas grandezas ou expressões numéricas (FIORENTINI; FERNANDES; CRISTÓVÃO, 2005).

O papel do coletivo foi promotor da aprendizagem dos conhecimentos algébricos.

Nas seis Situações de Ensino propostas nesta pesquisa, a interação entre os acadêmicos e pesquisadora se fizeram fundamentais para sintetizar a síntese coletiva. Os conhecimentos já apropriados por alguns, à medida que eram socializados com os colegas da turma, despertavam nos outros novas formas de pensar atribuídas aos problemas desencadeadores.

Para Moura (2000, p. 46), “a interação entre os sujeitos é que vai desencadear o processo de negociação dos valores em jogo e que chegará na busca da concretização do projeto pedagógico” . A interação entre os acadêmicos participantes da pesquisa proporcionou o compartilhamento tanto de sentidos atribuídos ao conhecimentos algébricos que se aproximaram dos significados sociais quanto dos modo de ensinar esses conhecimentos aos estudantes da Educação Básica. Assim,

> Sendo a educação um processo coletivo, é no compartilhar que o docente tem a oportunidade de apropriar-se de novos conhecimentos, pois, embora as ações possam ser de cada um daqueles que concretizam uma determinada atividade, a aprendizagem não acontece de forma isolada, mas na interação entre sujeitos ou entre sujeitos e objetos. Assim, faz-se necessário que as ações sejam desenvolvidas por todos, mas que cada um tenha não só a oportunidade, mas o comprometimento de participar. (LOPES et al., 2016, p. 25)

A sala de aula aos poucos foi se consolidando com um espaço de diálogo, de partilha e de interação entre os acadêmicos e a pesquisadora. As ações desencadeadas por cada um durante os momentos de desenvolvimento das situações contribuíram na síntese coletiva dos problemas desencadeadores propostos e, assim, auxiliou atingir um pensamento teórico compartilhado por todos.

Foi possível constatar que o compartilhamento das ações e dos sentidos atribuídos aos nexos conceituais algébricos promoveram mudanças qualitativas na aprendizagem dos acadêmicos durante o desenvolvimento das situações. Estas mudanças não ocorreram apenas durante as sínteses coletivas dos problemas desencadeadores, mas também no momento de pensarem juntos em como ensinar álgebra. Afinal, quando se oferece ao futuro professor momentos de interação e compartilhamento, está se incrementado seu processo de formação, pois se está dando mais significância à sua própria aprendizagem e à organização do ensino.

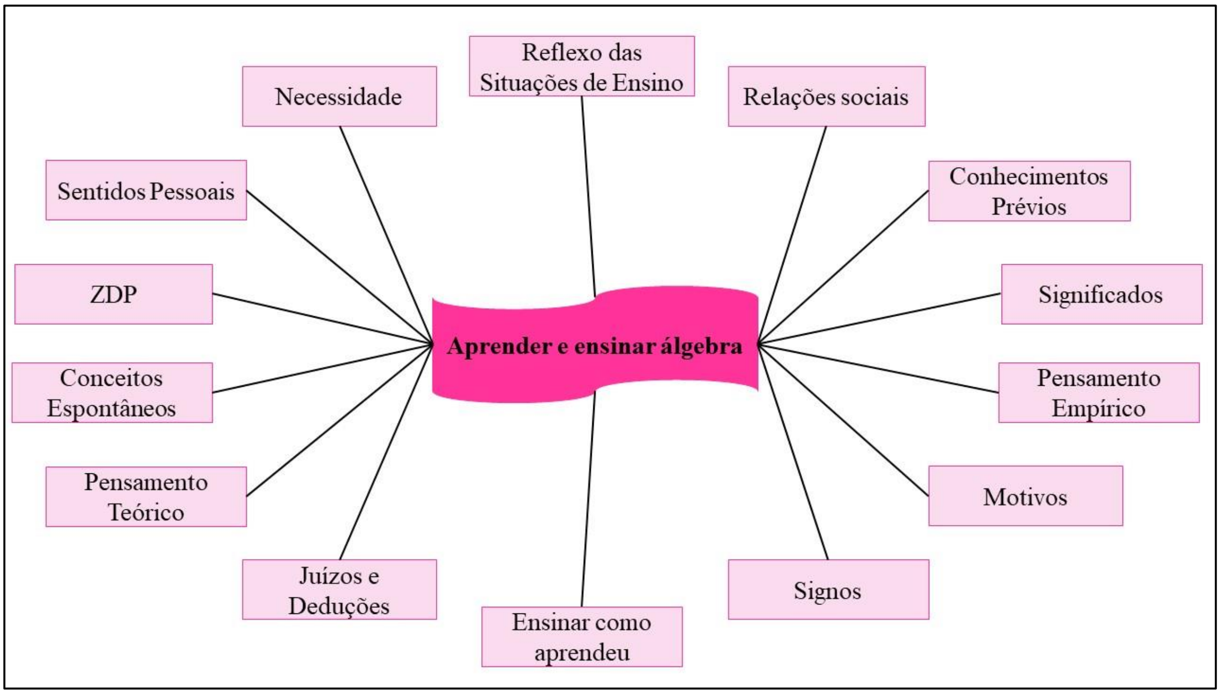
As Situações de Ensino desenvolvidas na perspectiva de Situações Desencadeadoras de Aprendizagem – SDA tiveram reflexos nos planejamentos dos futuros professores

Percebemos que os acadêmicos se valeram das aprendizagens obtidas nas Situações de Ensino desenvolvidas na perspectiva de SDA para desenvolver seus planejamentos, principalmente no que tange à essência dos nexos que foram trabalhados e na utilização de material manipulável e objetos. Eles pensaram em ações que fariam sentido aos seus alunos estudantes e possibilitariam a apropriação dos nexos conceituais algébricos que abordaram. Assim,

> O professor que se coloca, assim, em atividade de ensino continua se apropriando de conhecimentos teóricos que permitem organizar ações que possibilitem ao estudante a apropriação de conhecimentos teóricos explicativos da realidade e o desenvolvimento do seu pensamento teórico, ou seja, ações que promovam atividade de aprendizagem em seus estudantes (MOURA et al., 2010, p.90)

Em suma, foi possível constatar que os nexos algébricos explorados se refletiram no modo de eles organizarem seu ensino, tendo em vista o estudante da Educação Básica. Eles se preocuparam em propor situações que desencadeassem um motivo para aprender. Afinal, a forma como aprendemos novos conceitos repercutem no modo como iremos ensiná-los.

Figura 46: Síntese do Capítulo 5



Fonte: Dados da pesquisa

6 A BUSCA POR UMA SÍNTESE: CONSIDERAÇÕES FINAIS

> [...] a essência do fenômeno na sua forma mais desenvolvida não se apresenta ao pesquisador de forma imediata, mas sim de maneira mediatizada e essa mediação é realizada pelo processo de análise [...] A análise seria um processo de conhecimento, necessário a compreensão da realidade investigada em seu todo concreto. (DUARTE, 2000, p. 4)

As inquietações referentes ao ensino e à aprendizagem da álgebra e, mais especificamente, voltadas àquele professor em formação que irá ensinar álgebra nos anos iniciais, levaram à necessidade da pesquisadora de aprofundar os seus estudos. Assim sendo, foi elaborada uma pesquisa como o objetivo de investigar possibilidades formativas para futuros professores que ensinam matemática no tange ao ensino da álgebra nos anos iniciais do Ensino Fundamental. Para sua execução, organizamos uma unidade didática, constituída de Situações de Ensino desenvolvidas na concepção de Situações Desencadeadoras de Aprendizagem para futuros professores dos anos iniciais na perspectiva de um experimento formativo. As ações foram desenvolvidas no segundo semestre de 2019 em uma turma da disciplina de Educação Matemática B, do curso de Pedagogia Diurno da UFSM. Nos quatro encontros com a turma foram realizadas seis Situações de Ensino, organizadas intencionalmente pela pesquisadora a partir dos estudos referentes ao movimento lógico-histórico da álgebra, mais especificamente sobre os nexos conceituais algébricos e também estudos pautados no referencial teórico e metodológico utilizado.

Os resultados obtidos foram sistematizados em cinco episódios, os quatro primeiros relacionados às situações referentes aos nexos conceituais algébricos, e o último composto pela síntese dos planejamentos elaborados pelos acadêmicos, tendo o ensino da álgebra para os anos iniciais como meta. Por meio das situações desenvolvidas, intencionalizamos analisar o movimento de busca pela síntese de cada problema desencadeador à luz dos elementos da Teoria Histórico-Cultural de Vigotski, formas de pensamento de Kopnin e pensamento empírico e teórico de Davídov.

Antes da produção dos dados, tínhamos como intenção analisá-los sob o olhar de duas unidades de análise: aprendizagem dos conhecimentos algébricos e aprendizagem para ensinar álgebra. Contudo, ao longo do desenvolvimento das ações, e diante da interdependência entre as duas unidades, unificamos estas duas em uma única: o movimento de aprender e ensinar álgebra, visando envolver nessa unidade os indícios de aprendizagem dos acadêmicos e a síntese da organização do ensino proposta por eles.

A Situação 1 – *Matemática da floresta* teve como objetivo compreender os nexos conceituais *regularidade*, *sequência* e *padrão* a partir da percepção da presença destes nexos nos elementos da natureza. Nesta, a aprendizagem dos acadêmicos seu deu com base nos conceitos espontâneos que expressaram ao longo do desenvolvimento da situação e que, por meio da interação entre os colegas e a pesquisadora, conseguiram aproximar-se dos conceitos científicos abordados.

A Situação 2 – *Sequentopeia* teve como objetivo descobrir por meio de uma Sequentopeia feita com tampinhas coloridas, termos bem distantes da sequência, sem contar de tampinha em tampinha, identificando um padrão para saber as cores dos termos distantes. O sentido pessoal que atribuíram à variável foi o que levou os estudantes a chegarem na síntese coletiva da situação, contudo a generalização que conseguiram fazer foi empírica.

Entender sobre os movimentos da vida e a sua interdependência, que tudo está em constante evolução, tudo flui e não permanece sempre a mesma coisa, foi a intenção da Situação 3 – *Movimentos da vida*. Nesta, os sentidos pessoais atribuídos às questões da situação e a interação com a turma e pesquisadora foram essenciais para o entendimento dos movimentos da vida e, mais especificamente, a fluência e a interdependência entre as coisas.

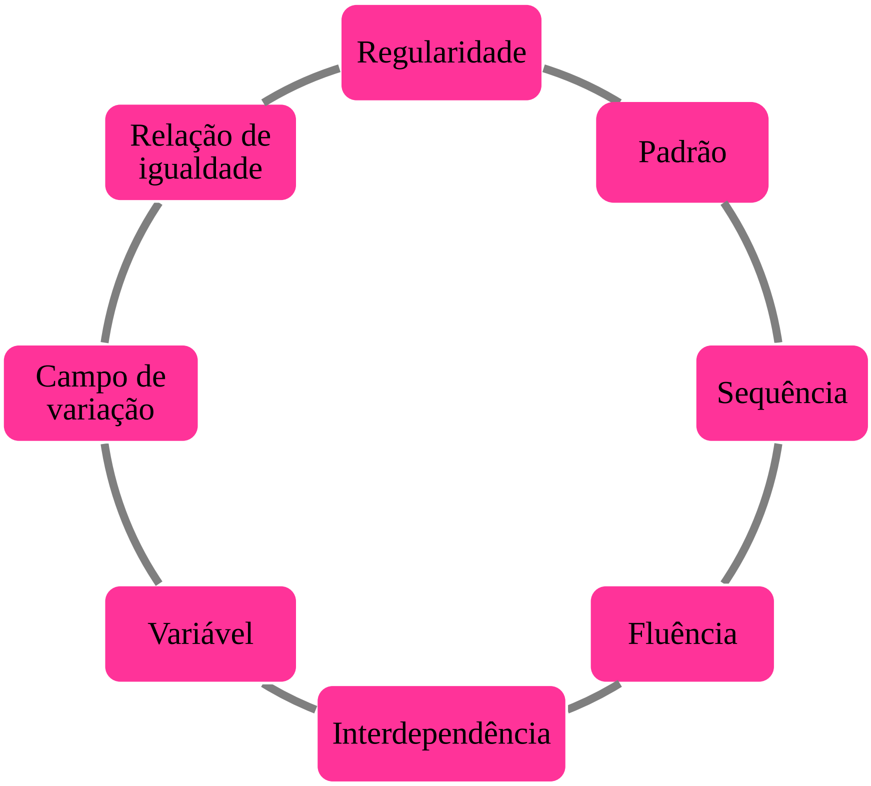
Já a Situação 4 – *Problema do caminho* teve como objetivo a percepção da dificuldade de descrever sem nenhum parâmetro o caminho proposto, assim, compreender a necessidade de usar alguns símbolos para facilitar a descrição do caminho de forma precisa, de maneira rápida e eficaz. A aprendizagem manifestada pelos acadêmicos aconteceu a partir de signos (instrumentos psicológicos) que culminaram em uma linguagem algébrica.

A Situação 5 – *Problema da altura da pirâmide* teve como objetivo compreender o uso da variável e seu campo de variação, entendendo que a variável nesta situação não pode assumir qualquer valor, pois possui um máximo e um mínimo. Nesta situação, a partir do sentido atribuído à variável, os acadêmicos emitiram juízos que mediados pelas deduções contribuíram para a formalização do conceito.

Compreender a relação de igualdade, por meio das trocas dos produtos, bem como algumas de suas propriedades, foi o objetivo da Situação 6 – *Problema das quantidades.* A síntese da solução coletiva desta situação aconteceu ancorada nos conhecimentos prévios dos acadêmicos, que os colocavam na zona de desenvolvimento proximal. Por conta da interação com os outros sujeitos, conseguiram compreender o nexo relação de igualdade como a equivalência entre ambos os membros da igualdade.

Na intenção de contemplar o objetivo proposto nesta pesquisa, foram elencadas três ações investigativas. A ação investigativa *compreender o movimento lógico-histórico da* *álgebra*, o que se fez essencial na organização das situações propostas. Ao contemplar estudos relacionados ao movimento lógico-histórico da álgebra, e a importância dos nexos conceituais que embasam o conceito, foi possível identificar outros nexos conceituais algébricos que ainda não haviam sido referidos. Deste modo, entendemos que os nexos *sequência*, *padrão*, *regularidade* e *relação de igualdade* também compreendem a essência da álgebra e o seu percurso histórico de desenvolvimento.

Figura 47: Nexos conceituais algébricos



Fonte: Sistematização da autora com base no movimento lógico-histórico da álgebra

Este estudo também teve como intenção, ao planejar algumas das ações, colocar os acadêmicos em um movimento que os aproximasse de situações vivenciadas ao longo do desenvolvimento da álgebra. Constatamos que, ao planejar as ações baseadas no movimento lógico-histórico da álgebra e, mais especificamente, explorando os nexos conceituais algébricos em situações cotidianas e lúdicas, conseguimos abordar a essência da álgebra de modo que os sentidos atribuídos pelos acadêmicos se aproximaram dos significados.

Na ação investigativa *identificar os sentidos que futuros professores atribuem a nexos conceituais algébricos*, mesmo entendendo que identificar os sentidos atribuídos não seja algo tão direto, conseguimos destacar algumas evidências que foram manifestadas no desenvolvimento das situações e nos dados obtidos e analisados na unidade de análise *o movimento de aprender e ensinar álgebra*. Os sentidos atribuídos aos nexos conceituais algébricos puderam ser compreendidos por meio das hipóteses mencionadas por eles durante a socialização para a busca a síntese coletiva dos problemas desencadeadores, de modo que "o movimento de internalização dos significados e a atribuição dos sentidos dos objetos pelo homem é decorrente da vida em sociedade, pelas relações interpessoais" (MOURA, 2016, p. 65).

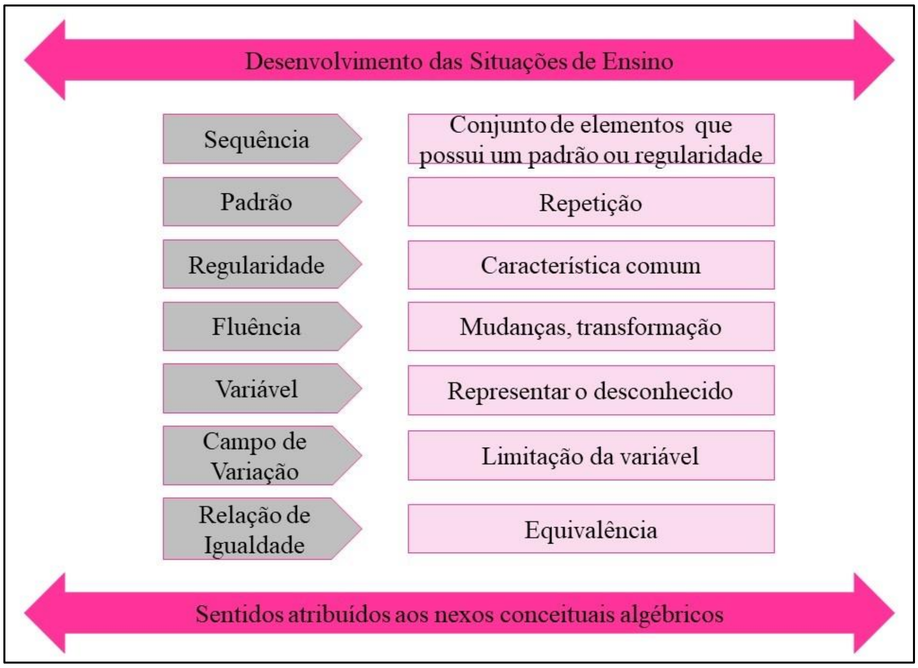
Os sentidos expressos pelos acadêmicos demonstraram, em geral, como os nexos estavam sendo significados por eles no decorrer da discussão. Identificamos, durante o desenvolvimento das ações, que os motivos dos acadêmicos (embora não todos), ao se colocarem no movimento de buscar solucionar as situações, partiam da necessidade em aprender álgebra, pois aos poucos foram desmistificando a ideia da álgebra como meramente manipulação de letras como haviam comentado em um questionário, respondido no primeiro contato com a pesquisadora.

Nas Situação 1 e na Situação 2 e também na forma como planejaram desenvolver tarefas acerca dos nexos *sequência*, *padrão* e *regularidade* em seus planejamentos, conseguimos identificar que o sentido atribuído ao nexo *sequência* foi um conjunto de elementos constituído por um *padrão* ou *regularidade*. Assim, para eles, o nexo *padrão* foi expresso como algo que se repete. O nexo *regularidade* prevaleceu quando observaram a imagem 2 – Animais na Situação 1 e atribuíram a ele o sentido de característica comum. Na Situação 3, conseguimos verificar que o nexo *fluência* não foi manifestado de maneira tão direta como os outros. Nesta, foi necessário muita discussão para conseguirem expressar algum sentido sobre o nexo. No entanto, conseguimos notar que o nexo fluência estava atrelado ao sentido de mudança, transformação, incerteza.

Nas Situação 4 e na Situação 5 foi possível observar os sentidos atribuídos aos nexos *variável* e *campo de variação*. O uso da variável foi mencionado por eles no desenvolvimento das situações, ao buscarem um símbolo geral que pudesse satisfazer as necessidades do problema. Assim, o sentido atribuído à *variável* foi expresso, quando intencionaram representar o desconhecido, ou seja, um modo de representar o que não seria possível com apenas números. O sentido ao nexo *campo de variação* foi expresso quando demonstraram perceber os limites da *variável*, ou seja, identificaram os valores máximos e mínimos que poderiam ser concedidos à *variável* do problema.

Quanto ao nexo *relação de igualdade*, percebemos que, na Situação 6, os acadêmicos atribuíram a este nexo sentidos de equivalência. Assim, estes sentidos manifestados por eles acerca destes nexos foram sendo expressos ao longo do desenvolvimento das situações, na interação com os demais colegas e pesquisadora, sendo que suas hipóteses se aproximaram do seu significado.

Figura 48: Sentidos atribuídos aos nexos conceituais algébricos

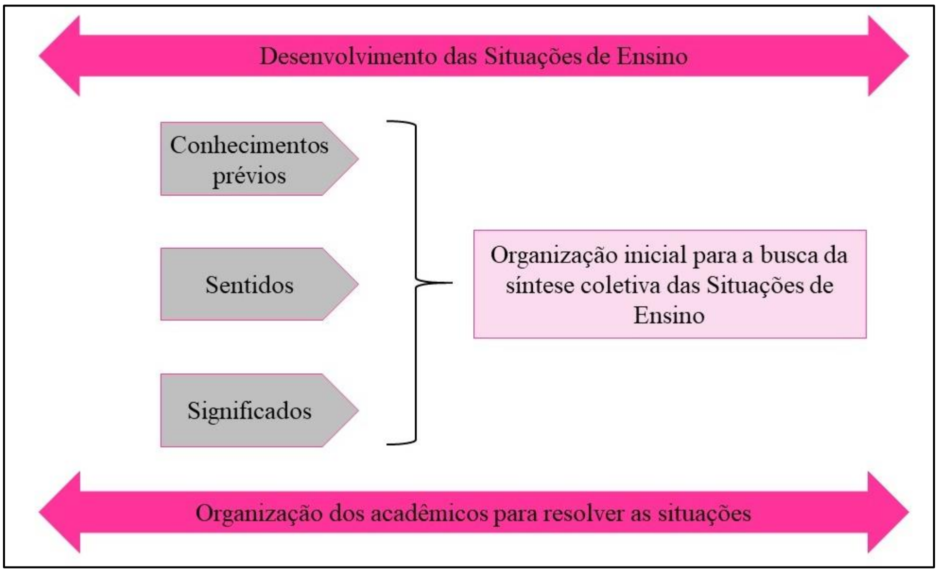


Fonte: Dados da pesquisa

Na ação investigativa *verificar como futuros professores se organizam para resolver situações de ensino que envolvem conceitos algébricos,* constatamos que os acadêmicos procuraram estratégias para solucionar os problemas desencadeadores. Durante o desenvolvimento das ações, os grupos socializaram com a turma suas hipóteses e assim chegaram a uma síntese coletiva de cada situação. Percebemos que até a síntese final de cada situação, os acadêmicos organizavam o seu pensamento a partir dos conhecimentos prévios que possuíam e dos sentidos pessoais que atribuíam aos nexos abordados. Estes sentidos foram se manifestando ao longo da situação e se desencadeando em significados que se aproximaram da formalização dos nexos conceituais algébricos.

Ancorados nesta organização inicial comum a todos, os dados da pesquisa, à luz de nosso referencial teórico, nos mostram que os modos como chegaram à síntese coletiva emergiram de vários elementos, como signos, necessidades, motivos, conceitos espontâneos, juízos, deduções, zona de desenvolvimento proximal entre outros. A aproximação aos nexos conceituais algébricos aconteceu em algumas situações, por meio de um pensamento empírico, quando buscavam características comuns e chegavam a uma generalização empírica. Em outras situações, buscaram uma generalização, por meio de um pensamento mais elaborado e geral, desencadeando um pensamento teórico.

Figura 49: Organização dos acadêmicos para resolver as situações



Fonte: Dados da pesquisa

Diante das ações que desenvolvemos e dos dados obtidos, conseguimos evidenciar que os acadêmicos do curso de Pedagogia da UFSM matriculados na disciplina Educação Matemática B demonstraram indícios de aprendizagem sobre a álgebra a partir das situações propostas. Verificamos que eles, na maioria das vezes se colocavam mais como estudantes, durante o desenvolvimento das ações, do que como futuros professores.

Salientamos que, para que a aprendizagem ocorra, é necessário a intencionalidade de um espaço organizado para esta finalidade. As aprendizagens evidenciadas pelos acadêmicos em nossa pesquisa são oriundas da organização das Situações de Ensino, desenvolvidas na perspectiva de Situações Desencadeadoras de Aprendizagem, referentes à álgebra. Pautadas pelos pressupostos teóricos da AOE, planejamos e organizamos ações que tinham como premissa a essência do movimento lógico-histórico da álgebra, mais especificamente em nosso estudos, dos nexos conceituais algébricos. Com isso, apontamos a AOE como uma possibilidade formativa no desenvolvimento de ações que buscam a apropriação dos conceitos, dando ao sujeitos oportunidades de vivenciar situações que possibilitem expressar sentidos e significados por meio da interação com outros sujeitos e assim os coloque no movimento de aprendizagem.

Partindo deste pressuposto, destacamos a importância de possibilidades formativas que direcionem os futuros professores a aprendizagem do conhecimento matemático. Deste modo, é necessário que, no momento de planejar e organizar um ensino que vise desenvolver o pensamento teórico dos estudantes da Educação Básica, o professor tenha apropriação do conhecimento matemático e, mais especificamente em nosso caso, dos conhecimentos algébricos.

Os planejamentos organizados pelos acadêmicos no último encontro do experimento formativo nos permitiram averiguar que os modos de planejar e organizar as ações referentes à álgebra estavam atrelados à forma como se apropriaram dos conhecimentos algébricos. Portanto, os futuros professores se colocaram em movimento de organizar ações embasados nas maneiras como aprenderam determinados conhecimentos. Assim, para que o futuro professor aprenda a ser professor que ensina matemática, é preciso que ele se coloque no movimento de aprender os conhecimentos matemáticos e de aprender a ensinar esses conhecimentos.

Em suma, tendo como objetivo em nossa pesquisa investigar possibilidades formativas para futuros professores que ensinam matemática no que se refere ao ensino e à aprendizagem de álgebra nos anos iniciais do Ensino Fundamental, podemos concluir, embasados nos resultados obtidos em nossa investigação, que estas possibilidades formativas de futuros professores que ensinarão álgebra envolvem alguns aspectos, tais como os elencados a seguir.

- Os conceitos algébricos não são tão evidentes como os conceitos dos outros campos matemáticos.
- Os conceitos espontâneos podem se aproximar dos conceitos científicos, desde que mediados por uma organização intencional de ensino.
- A busca por uma estratégia de resolução e, posteriormente, por uma generalização ou utilização de símbolos acontece a partir de uma necessidade desencadeada pela situação problema.
- A interação entre signos, sentidos pessoais e significados constitui o movimento de busca por uma síntese para as situações desenvolvidas.
- As formas de agir, durante o desenvolvimento das ações, manifestam os motivos que conduzem os estudantes para resolver as situações propostas.

- Os juízos contribuem para a formalização do conceito, mediados pelas deduções.
- A manifestação da compreensão de um problema não implica na possibilidade direta de expressá-lo em linguagem algébrica.
- A compreensão do sinal de igualdade para representar as mesmas quantidades é essencial na aprendizagem algébrica.
- O papel do coletivo é promotor da aprendizagem dos conhecimentos algébricos.
- A organização do ensino visando à aprendizagem de futuros professores traz reflexos nas ações intencionalmente planejadas por eles.

Esses aspectos também podem ser oportunizados em disciplinas dos cursos de licenciatura, ou seja, em sua formação inicial. Por fim, baseados nos dados obtidos durante o desenvolvimento das situações no que se refere a aprendizagem dos futuros professores, percebemos que as hipóteses por eles apresentadas, acerca do movimento de apropriação dos nexos conceituais algébricos durante a socialização da síntese coletiva dos problemas desencadeadores foram semelhantes ao movimento de aprendizagem das crianças, conforme os pressupostos de Vigotski (2014).

O autor entende a aprendizagem como mudanças qualitativas existentes no processo de apropriação dos conhecimentos. Nesta perspectiva, ao buscar solucionar um problema desencadeador e assim apropriar-se dos conceitos nele abordados, o desenvolvimento das funções psicológicas dos futuros professores também se constitui do interpsíquico para o intrapsíquico (VIGOTSKI, 2014), indo em direção de um pensamento que busque a apropriação dos conhecimentos. Deste modo, em vários momentos durante a nossa análise baseada nos pressupostos teóricos da Teoria Histórico-Cultural ao buscar identificar como os acadêmicos chegaram a uma síntese coletiva das situações, podemos compreender que o movimento de aprendizagem dos futuros professores é semelhante ao movimento de aprendizagem das crianças.

A investigação desta dissertação é resultado de uma caminhada acadêmica da pesquisadora e suas inquietações sobre o ensino e aprendizagem da álgebra. Ao pesquisar, buscamos compreender nossos anseios acerca de uma temática que nos afeta. Refletindo sobre o processo vivenciado durante esta pesquisa, deparo-me[15] com um olhar diferenciado para o ensino da álgebra nos anos iniciais, cada vez mais convicta da possibilidade deste ensino nesta etapa de escolarização e das possibilidades que podem ser desenvolvidas com os futuros

[15] Neste momento final a escrita está em 1.º pessoa do singular pelo fato da pesquisadora expressar sobre o processo vivenciado por ela na e pela pesquisa.

professores que serão responsáveis por este ensino. Vivenciar na prática a intencionalidade de ações que promovam a apropriação dos conceitos algébricos me fez repensar a importância do professor em gerar no estudante a necessidade de aprender o conceito. Este movimento de pesquisa também constitui quem sou, tanto como pesquisadora, como agora professora de matemática que atua nos anos iniciais. Encerrando esta dissertação – fase esta que também possui um sentido tão lindo em minha vida – fica a expectativa de ter contribuído em algum modo para as discussões acerca da formação de futuros professores no que diz respeito a álgebra nos anos iniciais. Apenas não sentirei saudade de quando comecei esse processo, porque não pretendo parar de pesquisar acerca do ensino e aprendizagem da álgebra ...

Figura 50: Síntese do capítulo 6

Fonte: Dados da pesquisa

REFERÊNCIAS

ABRANTES, A.A.; MARTINS, L.M. A produção do conhecimento científico: A produção do conhecimento científico: relação sujeito-objeto e desenvolvimento do pensamento. **Interface - Comunic., Saúde, Educ.** v.11, n.22, p.313-25, maio/ago. 2007.

ALEKSANDROV, A. D. *et al*. **La matemática:** su contenido, métodos y significado. 7 ed. Madrid: Alianza Universidad, 1988.

ARAUJO, E. A. Ensino de álgebra e formação de professores. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v. 10, n. 2, p. 331-346, 2008.

ARAÚJO, E. S. Contribuições da teoria histórico-cultural à pesquisa em educação matemática: a atividade orientadora de pesquisa. **Horizontes**, v.31, n.1, p.81-90, 2013.

ARAUJO, E. S.; MORAES, S. P. G. Dos princípios da pesquisa em educação como atividade. *In*: MOURA, M. O. de. (org.). **Educação escolar e pesquisa na teoria histórico-cultural.** São Paulo: Layola, 2017. p. 47-70.

ASBAHR, F. S. F. **"Porque aprender isso professora?" Sentido pessoal e atividade de estudo na psicologia histórico-cultural.** 2011. Tese (Doutorado em Psicologia) - Universidade Federal de São Paulo, São Paulo, 2011.

BAUMGART, J. K. **História da álgebra. Trad.** Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1992.

BERNARDES, M. E. M. O pensamento na atividade prática: implicações no processo pedagógico. **Psicologia em Estudo**, Maringá, v. 16, n. 4, p. 521-530, out/ dez. 2011.

BICUDO, M. A. V. Pesquisa em Educação Matemática. **Pro-Posições**. Campinas, SP, v. 4, n. 1, 1993.

BINSFELD, C. D. **Matemática, infância e formação inicial:** os jogos orientadores para a organização do ensino na educação infantil. Dissertação (Mestrado) - Centro de Educação. Programa de Pós-Graduação em Educação, Universidade Federal de Santa Maria. Santa Maria, 2019.

BLANTON, M.; KAPUT, J. Characterizing a classroom practice that promotes algebraic reasoning. **Journal for Research in Mathematics Education**, v.36, n.5, p. 412-446, 2005.

BOHM, D. **A totalidade e a ordem implicada.** São Paulo: Cultrix, 1980.

BOROWSKY, H. G. **Os movimentos de formação docente no projeto orientador da atividade.** 2017. Tese (Doutorado em Educação) - Centro de Educação. Programa de Pós-Graduação em Educação, Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria, 2017.

BOYER, C. B. **História da matemática.** Trad**.** Elza F. Gomide. São Paulo, Edgard Blucher, 1974.

____________**História da matemática.** Trad. Helena Castro. São Paulo: Blucher, 2012.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica**. Base Nacional Comum Curricular (Ensino Fundamental)**. Brasília: MEC, 2017.

CANAVARRO, A. P. O pensamento algébrico na aprendizagem da Matemática nos primeiros anos. **Quadrante**, Lisboa – PT, v.16, n.2, p. 81-118, 2007.

CARAÇA, B. de J. **Conceitos Fundamentais da Matemática.** Lisboa: Liv. Sá da Costa Editora, 1951.

______________ **Conceitos fundamentais da Matemática**. Portugal: Gradiva, 1998.

CEDRO, W. L. **O espaço de aprendizagem e a atividade de ensino:** o clube de matemática. 2004. Dissertação (Mestrado) - Universidade de São Paulo, São Paulo, 2004.

CEDRO, W.L; NASCIMENTO, C.P. Dos métodos e das metodologias em pesquisas educacionais na teoria-histórico cultural. *In*: MOURA, M.O.(org.). **Educação escolar e pesquisa na teoria histórico-cultural.** São Paulo: Loyola, p. 13-45, 2017.

CEDRO, W. L.; MORAES, S. P. G. de; ROSA, J. E. da. A atividade de ensino e o desenvolvimento do pensamento teórico em matemática. **Ciênc. educ. (Bauru)**, Bauru , v. 16, n. 2, p. 427-445, 2010 . Disponível em <http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1516-73132010000200011&lng=pt&nrm=iso>. Acesso em: 20 set. 2020.

COELHO, F. U.; AGUIAR, M. A história da álgebra e o pensamento algébrico: correlações com o ensino. **Revista eletrônica SciElo. Estudos avançados**, v. 32, n. 34. São Paulo, 2018. Disponível em:< http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0103-40142018000300171>. Acesso em: 30 out.2019.

DAVYDOV, V. V. **Tipos de generalización en la enseñanza**. Ciudad de La Habana: Editorial Pueblo y Educación, 1982.

_______________ **La enseñanza escolar y el desarrollo psiquico**. Ciudad de Moscu: Editorial Progresso, 1988.

_______________ O que é atividade de estudo. Tradução do russo (para uso em sala de aula) de Emerlinda Prestes. Revista **Escola Inicial**, n. 07, p. 1-7, ano 1999.

DUARTE, N. A anatomia do homem é a chave da anatomia do macaco: a dialética em Vigotski e em Marx e a questão do saber objetivo na educação escolar. **Caderno CEDES**, v. 21, n 71, p. 79-115, 2000.

EVES, H. **Introdução à história da matemática.** Trad: Hygino H. Domingues. 1ª ed. Campinas, SP: Editora da Unicamp, 1995.

________. **Introdução à história da matemática.** Trad: Hygino H. Domingues. 2ª ed. Campinas, SP: Editora da Unicamp, 1997.

FERREIRA, M. C. N. **Álgebra nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental:** uma análise do conhecimento matemático acerca do Pensamento Algébrico. Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-Graduação em Ensino, História e Filosofia das Ciências e Matemática, Universidade Federal do ABC, Santo André, 2017.

FIORENTINI, D.; FERNANDES, F. L. P.; CRISTÓVÃO, E. M. Um estudo das Potencialidades pedagógicas das investigações Matemáticas no desenvolvimento do pensamento algébrico. *In*: **SEMINÁRIO LUSO-BRASILEIRO DE INVESTIGAÇÕES MATEMÁTICAS NO CURRÍCULO**, Portugal, 2005. Disponível em: < https://scholar.google.com.br/scholar?hl=pt-BR&as_sdt=0%2C5&q=Um+Estudo+das+Potencialidades+pedagógicas+das+investigações+Matemáticas+no+desenvolvimento+do+pensamento+algébrico.&btnG= > Acesso em: 31 out.2019.

FIORENTINI, D., MIORIM, M. A.; MIGUEL, A. Contribuição para um repensar... A educação algébrica elementar. **Pro-Posições**, Campinas, SP, v.4, n.1, p. 78-91, 1993.

FRAGA, L. P. **A organização do ensino como desencadeadora da atividade de iniciação à docência:** um estudo no âmbito do PIBID – Interdisciplinar Educação Matemática. Tese (Doutorado em Educação) - Programa de Pós-Graduação em Educação, Universidade Federal de Santa Maria, 2017.

FREIRE, R. S. **Desenvolvimento de conceitos algébricos por professores dos anos iniciais do ensino fundamental**. Tese (Doutorado) - Programa de Pós-Graduação em Educação Brasileira, Faculdade de Educação da Universidade Federal do Ceará. 2011.

FREITAS, M. T. de A. A abordagem sócio-histórica como orientadora da pesquisa qualitativa. **Cad. Pesqui.**, São Paulo, n. 116, p. 21-39, 2002.

GATTI, B. A. Sobre a formação de professores para o 1º e 2º graus. **Em aberto**. Brasília, ano 6, n. 34, p. 11-15, abr./jun.1987.

___________ Formação de professores no Brasil: características e problemas. **Educação & Sociedade**, v.31, n.113, p.1355-1379, 2010.

IFRAH, G. **Os números:** história de uma grande invenção. 3.ed. São Paulo: Globo, 1985.

________. **Os números**: a história de uma grande invenção. 7 ed. São Paulo: Globo, 1994.

________. **Os números:** a história de uma grande invenção. 9 ed. São Paulo: Globo, 1998.

KAPUT, J. J. Teaching and learning a new algebra. *In*: FENNEMA, E.; ROMBERG, T. (ed.). **Mathematics classrooms that promote understanding**. Mahwan, NJ: Erlbaum, p. 133 - 155, 1999.

KIERAN, C. The learning and teaching of school algebra. **Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning**, Université du Québec à Montréal, 1992.

__________ Algebraic thinking in the early grades: What is it? **The Mathematics Educator**, Georgia, v. 8, n.1, p. 33-56, 2004.

KOPNIN, P. V. **A dialética como lógica e teoria do conhecimento**. Rio de Janeiro: Civilização Brasileira, 1978. (Coleção Perspectivas do homem).

LANNER de MOURA, A. R.; SOUSA, M. C. **Lógico-histórico**: uma perspectiva para o ensino de álgebra. *In*: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 7, 2004. **Anais [...].** Disponível em: http://www.sbem.com.br/files/viii/pdf/01/CC06705545968.pdf. Acesso em: 30 out. 2019.

LEONTIEV, A. N. **Linguagem e razão humana**. Trad. Conceição Jardim, Eduardo Lúcio Nogueira. Lisboa: Presença, 1975.

______________ **O desenvolvimento do psiquismo**. Lisboa: Horizonte Universitário, 1978.

______________ **Actividad, consciência, personalidade**. 2. ed. Habana: Pueblo y Educación, 1983.

______________ Uma contribuição à teoria do desenvolvimento da psique infantil. *In*: VYGOTSKY, L. S.; LURIA, A. R.; LEONTIEV, A. N. **Linguagem, desenvolvimento e aprendizagem**. Trad. de Maria de Penha Villalobos. São Paulo: Ícone; Editora da Universidade de São Paulo, p. 15-19, 2001.

______________ Uma contribuição à teoria do desenvolvimento da psique infantil. *In*: VYGOTSKII, L. S.; LURIA, A. R.; LEONTIEV, A. N. **Linguagem, desenvolvimento e aprendizagem**. 12 ed. São Paulo: Ícone, 2012. p. 59 - 84. (Coleção Educação Crítica).

______________ Uma contribuição à teoria de desenvolvimento da psique infantil. *In*: VIGOSTKII, L. S. et al. **Linguagem, desenvolvimento e aprendizagem**. São Paulo: Ícone, p. 191, 214, 2014.

LIBÂNEO, J. C. A aprendizagem escolar e a formação de professores na perspectiva da psicologia histórico-cultural e da teoria da atividade. **Educar**, Curitiba, n. 24, p. 113 - 147, 2004.

LIMA, L.; MOISÉS, R. P. **A variável:** escrevendo o movimento. A linguagem algébrica 1. São Paulo/SP, CEVEC/CIARTE, 2000.

LINS, R. C.; GIMENEZ, J. **Perspectivas em aritmética e álgebra para o século XXI**. 7. ed. Campinas, SP: Papirus, 1997.

LIPSCHUTZ, S.; LIPSON, M. L. **Matemática discreta**. 3. ed. São Paulo: Bookman. 3. edição. Coleção Schaum. 2013.

LONGAREZI, A. M.; FRANCO, P. L. J. A. N. **Leontiev:** a vida e obra do psicólogo da atividade. *In*: LONGAREZI, A. M.; PUENTES, R. V. (org.). Ensino desenvolvimental: vida, pensamento e obra dos principais representantes russos. Uberlândia: EDUFU, 2013. p. 67-110.

LOPES, A. R. L. V. **Aprendizagem da docência em matemática**: o Clube de Matemática como espaço de formação inicial de professores. Passo Fundo: Ed. Universidade de Passo Fundo, 2009.

LOPES, A. R. L. V.; MOURA, M. O; ARAUJO, E. S.; CEDRO, W. L. . Trabalho coletivo e a organização do ensino de matemática: princípios e práticas. **Zetetike,** Campinas, SP, v. 24, n. 1, p. 13-28, 2016. Disponível em: https://periodicos.sbu.unicamp.br/ojs/index.php/zetetike/article/view/8646526. Acesso em: 03 nov.2019.

LOPES, A. R. L. V.; VAZ, H. G. B. O movimento de formação docente no ensino de geometria nos anos iniciais. **Educação & Realidade**, Porto Alegre, v. 39, n. 4, p. 1003-1025, out./dez. 2014. Disponível em: <http://www.ufrgs.br/edu_realidade>. Acesso em: 28 out. de 2019.

MACGREGOR, M. Goals and contente of na álgebra curriculum for the compulsory years of schooling . *In*: STACEY, K.; CHICK, H.; KENDAL, M. (eds.). **The future of teaching and learning of álgebra:** The 12 th ICMI Study. Boston: Kluwer. 2004.

MARTINS, J. C. Vygotsky e o papel das interações sociais na sala de aula: reconhecer e desvendar o mundo. **Série Idéias**, São Paulo, n. 28, p. 111 - 122, 1997. Disponível em: <http://www.ia.ufrrj.br/ppgea/conteudo/T2SF/Akiko/46-Vygotsky.pdf> Acesso em: 08 nov.2020.

MARTINS, L. M. **A formação social da personalidade do professor:** um enfoque vigotskiano. Campinas: Autores Associados, 2007.

MARTINS, M. V. S. **O pensamento de Heráclito:** uma aproximação com o pensamento de Parmênides. Dissertação (Mestrado em Filosofia) - Universidade Federal de Brasília, Brasília, 2007.

MARX, K. **O capital**: crítica da economia política. Livro I. São Paulo: Nova Cultural, 2013.

MENEGHETTI, T. V. *et al*. O logos de Heráclito e sua influência na concepção da dialética hegeliana. *In:* SALÃO DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA – PUCRS, 10., 2009. **Anais [...].** Disponível em: <https://www.pucrs.br/edipucrs/XSalaoIC/Ciencias_Humanas/Filosofia/71003-TARCISIOVILTONMENEGHETTI.pdf>. Acesso em: 12 ago.2020.

MORETTI, V. D. **Professores de matemática em Atividade de Ensino**. uma perspectiva histórico- cultural para a formação docente. 2007. Tese (Doutorado) - Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo.

MOURA, A. R. L. Conhecimento matemático de professores polivalentes. **Revista de educação** PUC – Campinas, n. 18, p. 17 - 23, junho 2005. Disponível em <http://periodicos.puccampinas.edu.br/seer/index.php/reveducacao/article/viewFile/243/2933 > Acesso em: 22 abr.2020.

MOURA, A. R. L. de; SOUSA, M. do C. de. Dando movimento ao pensamento algébrico. **Zetetike**, Campinas, SP, v. 16, n. 2, p. 63-76, 2009a.

MOURA, A. R. L. de; SOUSA, M. do C. de. O lógico-histórico da álgebra não simbólica e da álgebra simbólica: dois olhares diferentes. Zetetike, Campinas, SP, v. 13, n. 2, p. 11–46, 2009b.

MOURA, M. O. A atividade de ensino como unidade formadora**. Bolema,** Rio Claro, v.12, p. 29-43, 1996.

_____________ A séria busca no jogo: do lúdico na matemática. *In*: KHISHIMOTO, T. M. **Jogo, brinquedo, brincadeiras e a educação infantil**. São Paulo: Pioneira, p. 81-97, 1997.

_____________ **O educador matemático na coletividade de formação**: uma experiência com escola pública. 2000. Tese (Livre-Docência) - Universidade de São Paulo, São Paulo, SP, 2000.

_____________A atividade de ensino como ação formadora. *In*: CASTRO, A.; CARVALHO, A (orgs.). **Ensinar a ensinar:** didática para a escola fundamental e média. São Paulo: Pioneira, p. 143-162, 2001.

____________ Saberes pedagógicos e saberes específicos: desafios para o ensino de matemática. In: Encontro Nacional de Didática e Prática de Ensino, **Anais ...** Recife: UFPE, v. 13, p. 489 – 504, 2006.

____________ Matemática na infância. *In*: MIGUEIS, M. R.; AZEVEDO, M. G. (org.). **Educação Matemática na infância**: abordagens e desafios. Serzedo – Vila Nova de Gaia: Gailivro, p. 39-64, 2007.

____________ Didática e prática de ensino para educar com a matemática. *In*: ENCONTRO NACIONAL DE DIDÁTICA E PRÁTICAS DE ENSINO, Araraquara. **Anais [...].** Araraquara: Unicamp, 2012.

____________ A dimensão da alfabetização na educação matemática infantil. In: KISHIMOTO, T. M.; OLIVEIRA-FORMOSINHO, J. (org.). **Em busca da pedagogia da infância:** pertencer e participar. Porto Alegre: Penso, 2013. p. 110-135

MOURA, M. O (org.). **A Atividade pedagógica na teoria histórico-cultural.** 2. Ed. Campinas, São Paulo: Autores Associados, 2016.

MOURA, M. O. de *et al* Atividade Orientadora de Ensino: Unidade entre ensino e aprendizagem. **Diálogo Educ**., Curitiba, v.10, n. 29, p. 205-229, 2010.

MOURA, M. O. de; LANNER de MOURA, A. R. **Escola: um espaço cultural**. Matemática na Educação Infantil: conhecer, re(criar) – um modo de lidar com as dimensões do mundo. São Paulo: Diadema/ Secel, 1998.

MOURA, M. O. de; SFORNI, M. S. de F.; LOPES, A. R. L. V. A objetivação do ensino e o desenvolvimento do modo geral da aprendizagem da atividade pedagógica. *In*: MOURA, M. O. de. (org.). **Educação escolar e pesquisa na teoria histórico-cultural.** São Paulo: edições Layola, p. 71-100, 2017.

NACARATO, A. M.; MENGALI, B.L.S.; PASSOS, C.L.B. **A matemática nos anos iniciais do ensino fundamental: tecendo fios do ensinar e do aprender.** Belo Horizonte: Autêntica, 2009. (Tendências em Educação Matemática)

NASCIMENTO, C. P.; ARAUJO, E. S.; MIGUÉIS, M. R. O jogo como atividade: contribuições da teoria histórico-cultural. **Revista Semestral da Associação Brasileira de Psicologia Escolar e Educacional (ABRAPEE),** v. 13, n. 2, , p. 293-302, jul./dez.2009.

NÚÑEZ, I. B. **Vygotsky, Leontiev e Galperin:** formação de conceitos e princípios didáticos. Brasília: Líber Livro, 2009.

OLIVEIRA, B. A prática social global como ponto de partida e de chegada na prática educativa. *In*: OLIVEIRA B.; DUARTE N. (org.). **Socialização do saber escolar**. São Paulo: Cortez, p. 91-105, 1992.

OLIVEIRA, M. K. de. **Vygotsky:** aprendizado e desenvolvimento. Um processo sócio-histórico**.** 4. ed. São Paulo: Scipione,1997.

_______________. **Vygotsky:** aprendizado e desenvolvimento. Um processo sócio histórico. São Paulo: Scipione, 2010.

PANOSSIAN, M. L. **Manifestações do pensamento e da linguagem algébrica de estudantes**: indicadores para a organização do ensino. Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-Graduação em Educação, Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo, 2008.

PANOSSIAN, M. L; MOURA, M.O. **Entre o movimento lógico-histórico e o ensino da álgebra: o caso particular das sequências**. *In*: SIMPÓSIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 3. **Anais [...].** 2012. Disponível em http://proativa.virtual.ufc.br/sipemat2012/papers/208/submission/director/208.pdf. Acesso em: 20 abr.2020.

PASQUALINI, J. C. **O desenvolvimento do psiquismo e o ensino escolar**. *In*: PASQUALINI, J. C.; TSUHAKO, Y. N. (org.). **Proposta pedagógica para a Educação Infantil do Sistema Municipal de Ensino de Bauru/ SP**.(Recurso Eletrônico). Bauru: Secretaria Municipal de Educação, 2016.

PERLIN, P. **Constituindo-se professor de matemática:** relações estabelecidas no estágio curricular supervisionado determinantes da aprendizagem da docência. Tese (Doutorado em Educação) - Centro de Educação. Programa de Pós-Graduação em Educação, Universidade Federal de Santa Maria,, RS, 2018.

PETROVISKI, A. **Psicología general:** Manual didáctico para los Institutos de Pedagogía. Moscu: Editorial Progreso, 1980.

_____________. **Psicologia general:** Manual didáctico para los institutos de pedagogia. 3. Ed. Moscú: Progresso, 1986.

PIMENTA, S. G. O estágio na formação de professores: unidade entre teoria e prática? **Cadernos de Pesquisa**, São Paulo, n. 94, p. 58 - 73, 1995.

PINHEIRO, A. C. **O ensino de álgebra e a crença de autoeficácia docente no desenvolvimento do pensamento algébrico**. 2018. Dissertação (Mestrado) - Faculdade de Ciências, Universidade Estadual Paulista, Bauru, 2018.

PINO, A. **As marcas do humano**: às origens da constituição cultural da criança na perspectiva de Lev S. Vigotski. São Paulo, SP: Cortez, 2005.

PIRES, M. F. C. O materialismo histórico-dialético e a Educação. **Interface** - Comunicação, Saúde, Educação, v.1, n.1, p. 83-94, 1997.

PIRES, C. M. C.; SILVA, M. A. Desenvolvimento curricular em Matemática no Brasil: trajetórias e desafios. **Quadrante,** Lisboa, v. 20, p. 57-80, 2011.

PONTE, J. P. A vertente profissional da formação inicial de professores de matemática. **Educação Matemática em Revista**, n. 11 A, p. 3- 8, 2002.

__________ Álgebra no currículo escolar. Educação e Matemática – **Revista da Associação dos Professores de Matemática**. Lisboa n. 85, p. 54-60, nov./dez. 2005.

__________ Uma agenda para investigação sobre padrões e regularidades no ensino-aprendizagem da Matemática e na formação de professores. *In*: VALE, I., BARBOSA, A. (org.). **Padrões:** Múltiplas Perspectivas e Contextos em Educação Matemática. Projecto Padrões, 2009.

PONTE, J. P da, BRANCO, N., MATOS, A. **Álgebra no Ensino Básico**. Lisboa: Ministério da Educação, 2009.
PONTE, J. P.; SERRAZINA, L.; GUIMARÃES, H. M.; BREDA, A.; GUIMARÃES, F.; SOUSA, H.; MENEZES, L.; MARTINS, M. E.; OLIVEIRA, P**. Programa de Matemática do Ensino Básico. Lisboa.** Ministério da Educação/DGIDC, 2007.

POZEBON, S. **Formação de futuros professores na organização do ensino de matemática para os anos iniciais do Ensino Fundamental:** Aprendendo a ser professor em um contexto específico envolvendo medidas. 2014. Dissertação (Mestrado em Educação) - Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria, 2014.

___________ A formação de futuros professores de matemática: o movimento de aprendizagem da docência em um espaço formativo para o ensino de medidas. Tese (Doutorado) - Centro de Educação. Programa de Pós-Graduação em Educação, Universidade Federal de Santa Maria, RS, 2017.

RIBEIRO, F. D. **A aprendizagem da docência na prática de ensino e no estágio:** contribuições da teoria da atividade. Tese (Doutorado) - Faculdade de Educação, Universidade Federal de São Paulo, São Paulo – SP, 2011.

RIGON, A. J.; ASBAHR, F. da S. F.; MORETTI, V. D. Sobre o processo de humanização. *In*: MOURA, M. O. (org.). **A atividade pedagógica na teoria histórico – cultural.** Brasília: Líber, p. 13-44, 2010.

RUBTSOV, V. A atividade de aprendizado e os problemas referentes à formação do pensamento teórico dos escolares. *In*: GARNIER, C. et al. (org.). **Após Vygotsky e Piaget**:

perspectivas social e construtivista escolas russa e ocidental. Porto Alegre: Artes Médicas, p. 151-159, 1996.

SÁ, P. F. DE; FOSSA, J. A. Uma distinção entre problemas aritméticos e algébricos. **Revista Educação em Questão**, v. 33, n. 19, p. 253-278, 15 set. 2008.

SANTOS, C. A. O.; BORGES, M. F. **Evolução da simbologia algébrica:** Um passeio pela história evolutiva do pensar matemático humano, Ebrapem, 2011. Disponível em: http://editorarealize.com.br/revistas/ebrapem/trabalhos/0c3d4ab019fbd17a8287b8cffe8ae4ec.pdf . Acesso em: 10 set.2019.

SFORNI, M. S. F. **Aprendizagem e desenvolvimento**: o papel da mediação. Semana Pedagógica ocorrida no Paraná. Fevereiro de 2010. Disponível em: http://www.gestaoescolar.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/sem_pedagogica/jul_2009/aprendizagem_desenvolviemnto_sforni.pdf Acesso em: 22 abr./2020.

SILVA, A. M., PIRES, C. M. C. A riqueza nos currículos de Matemática do Ensino Médio: em busca de critérios para seleção e organização de conteúdos. **Zetetiké** – FE/Unicamp, v. 21, n. 39, p. 29-50, jan./jun. 2013.

SILVA, F. A. Do escambo ao dinheiro: Marx e a divindade visível. **Argumento**, v. 10, p. 13-25, 2011. Disponível em: < https://www.rbspa.ufba.br/index.php/argum/article/download/29824/17671>. Acesso em: 28 set.2020.

SOUSA, M. C. **O ensino de álgebra numa perspectiva lógico-histórica**: um estudo das elaborações correlatas de professores do ensino fundamental. 2004. Tese (Doutorado em Educação) - Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2004.

SOUSA, M. C. de; PANOSSIAN, M. L.; CEDRO, W. L. **Do movimento lógico e histórico á organização do ensino:** o percurso dos conceitos algébricos. Campinas, SP: Mercado de Letras, 2014.

STEWART, J. **Cálculo**: volume 2. Tradução técnica: Antonio Carlos Moretti, Antonio Carlos Gilli Martins; revisão técnica: Helena Maria Ávila de Castro. São Paulo: Cengage Lerning, 2009.

URSINI, S.: ESCARENO, F.; MONTES, D.; TRIGUEROS, M. **Ensenanza del álgebra elemental:** uma propuesta alternativa. Mexico: Trillas, 2005.

USISKIN, Z. Concepções sobre a álgebra da escola média e utilizações das variáveis. *In*: COXFORD, A. F.; SHULTE, A. P. (org). **As idéias da álgebra**; tradução: Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, p. 9-22, 1995.

VALE, I.; PALHARES P.; CABRITA, I.; BORRALHO, A. **Os padrões no ensino e aprendizagem da álgebra**, 2006. Disponível em: https://www.researchgate.net/publication/306031479_Os_padroes_no_ensino_e_aprendizagem_da_Algebra. Acesso em: 09 abr.2020.

VARGAS, M. História da matematização da natureza. **Estudos Avançados 10**, São Paulo, n. 28, p. 249-276, 1996.

VYGOTSKY, L. S. **Pensamento e linguagem**. São Paulo: Martins Fontes, 1989.

____________ **A formação social da mente:** o desenvolvimento dos processos psicológicos superiores. 4. ed. São Paulo: Martins Fontes, 1991.

____________ **Obras escogidas**. Tradução de José Maria Bravo. Madri: Visor Dist., 1993. Tomo II.

____________ **A formação social da mente**. São Paulo: Martins Fontes, 1998.

____________ **A construção do pensamento e da linguagem**. São Paulo: Martins Fontes, 2000.

____________ **A construção do pensamento e da linguagem**. Trad. Paulo Bezerra. São Paulo: Martins Fontes, 2001.

____________ **A formação social da mente.** 6. ed. São Paulo: Martins Fontes, 2002.

___________ **Teoria e método em Psicologia**. Trad. Claudia Berliner. 3. ed. São Paulo: Martins Fontes, 2004.

____________ **A formação social da mente:** o desenvolvimento dos processos psicológicos superiores. 7. ed. São Paulo: Martins Fontes, 2007.

____________ **A construção do pensamento e da linguagem.** Tradução de Paulo Bezerra. 2 ed. São Paulo: WMF Martins Fontes, 2009. (Biblioteca Pedagógica)

____________ **Imaginação e criatividade na infância.** Trad.: João Pedro Fróis. São Paulo: WMF Martins Fontes, 2014.

WAGNER, E. S. **Hannah Arendt e Karl Marx**: o mundo do trabalho. São Paulo: Ateliê Editorial, 2002.

YAMANAKA, O, Y. **Estudos das concepções e competências dos professores:** a passagem da aritmética à introdução da representação algébrica nas séries iniciais do Ensino Fundamental. Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2009.

APÊNDICE A – TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE ESCLARECIDO

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA MARIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA E ENSINO DE FÍSICA
TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Pesquisador responsável: Iasmim Martins Noro
Orientador da pesquisa: Anemari Roesler Luersen Vieira Lopes
Programa: Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Ensino de Física
Instituição: Universidade Federal de Santa Maria
Telefone para contato: (55) 984227127

Você está sendo convidado (a) para participar, como colaborador, de uma pesquisa vinculada ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Ensino de Física, Mestrado em Educação Matemática e Ensino de Física, da Universidade Federal de Santa Maria. Você pode decidir se quer participar ou não. Por favor, não se apresse em tomar a decisão. Leia cuidadosamente o que se segue e pergunte ao responsável pelo estudo qualquer dúvida que você tiver. Após ser esclarecido (a) sobre as informações a seguir, no caso de aceitar fazer parte do estudo, assine ao final deste documento, que está em duas vias. Uma delas é sua e a outra é do pesquisador responsável. Em caso de recusa você não será penalizado (a) de forma alguma.
♦ O objetivo principal desta pesquisa é compreender o ensino e aprendizagem da Álgebra nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental.
♦ Participação: Sua participação se dará por meio de ações desenvolvidas durante a docência orientada da pesquisadora na disciplina de Educação Matemática B no segundo semestre do ano de 2019. As ações serão gravadas em áudio e vídeo, e também fotografadas, desta maneira, tudo o que você falar ficará registrado. Cabe ressaltar que as discussões realizadas durante esses encontros podem acarretar em algum desconforto emocional, por isso, se julgar necessário pode solicitar a retirada destes registros. Apesar de sua participação não proporcionar qualquer benefício direto, proporcionará uma melhor compreensão no que diz respeito a formação inicial de professores, como também, para a Atividade Pedagógica na Educação Básica.
♦ Garantia de acesso: em qualquer etapa do estudo, você terá acesso aos profissionais responsáveis pela pesquisa para esclarecimento de eventuais dúvidas.
♦ Garantia de sigilo: Se você concordar em participar do estudo, seu nome e identidade serão mantidos em sigilo. A menos que requerido por lei ou por sua solicitação, somente o pesquisador e a equipe do estudo terão acesso a suas informações.
♦ Esclarecimento do período de participação: a previsão de realização das aulas é no mês de outubro de 2019, período que você participará dos encontros formativos. Você tem a liberdade de retirar o consentimento a qualquer momento, sem qualquer prejuízo em relação a sua participação nas ações desenvolvidas.

Consentimento da participação da pessoa como sujeito

Eu, ____, abaixo assinado, concordo em participar da pesquisa como colaborador e sujeito de pesquisa. Fui suficientemente informado a respeito das informações que li ou que foram lidas para mim. Ficaram claros para mim quais são os propósitos da pesquisa, os procedimentos a serem realizados, as garantias de confidencialidade e de esclarecimentos permanentes. Ficou claro também que minha participação é isenta de despesas. Concordo voluntariamente em participar deste estudo e poderei retirar o meu consentimento a qualquer momento, antes ou durante o mesmo, sem penalidades ou prejuízo ou perda de qualquer benefício que eu possa ter adquirido.

Local e data ____

Nome e Assinatura do sujeito ou responsável: _____________________________________

Declaro que obtive de forma apropriada e voluntária o Consentimento Livre e Esclarecido deste sujeito de pesquisa ou representante legal para a participação neste estudo.
Santa Maria/RS ____, de __________________ de 2019.

________________________________ ____________________________

Pesquisadora responsável
Iasmim Martins Noro

Orientadora da pesquisa
Anemari Roesler Luersen Vieira Lopes

APÊNDICE B - QUESTIONÁRIO RESPONDIDO PELOS ACADÊMICOS PARTICIPANTES DA PESQUISA

Número da pergunta	Pergunta
1	Qual o ano de seu nascimento?
2	Você é natural de Santa Maria? ☐ Sim ☐ Não, de _________________
3	Você fez o curso normal antes de ingressar no Curso de Pedagogia? ☐ Sim ☐ Não
4	Comente acerca de suas experiências com a Matemática ao longo de sua trajetória na Educação Básica.
5	Neste semestre você faz Estágio Supervisionado II: Anos Iniciais? ☐ Não ☐ Sim, com a professora Jane Schumacher ☐ Sim, com a professora Ana Carla Hollweg Powaczuk
6	Você neste semestre: ☐ Estuda e trabalha ☐ Estuda e é bolsista ☐ Estuda e faz estágio remunerado ☐ Apenas estuda
7	Você pretende ser professor (a)? ☐ Sim ☐ Não ☐ Ainda não sei
8	Para você, o que é Álgebra?
9	Você acha que os conteúdos da Álgebra estão presentes nos anos iniciais?
10	Você já ouviu falar em “pensamento algébrico”? O que entende?