Universidade Federal de Santa Maria
Centro de Ciências Naturais e Exatas
Departamento de Matemática

Ações Parciais de Grupos e Ações de Semigrupos Inversos

Daiana Aparecida da Silva Flôres†
Mestrado em Matemática - Santa Maria - RS

Orientador: Prof. Dr. Dirceu Bagio

†Este trabalho teve apoio financeiro da CAPES.

Ações Parciais de Grupos e Ações de Semigrupos Inversos

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação devidamente corrigida e defendida por **Daiana Aparecida da Silva Flôres** e aprovada pela comissão julgadora.

Santa Maria, 05 de outubro 2008.

Prof. Dr. **Dirceu Bagio**.
Orientador

Banca examinadora:

Prof. Dr. Dirceu Bagio (Orientador, CCNE - UFSM)
Prof. Dr. Antonio Paques (IM - UFRGS)
Prof. Dr. Maria de Lourdes Merlini Giuliani (CCNE - UFSM)
Prof. Dr. João Roberto Lazzarin (CCNE - UFSM)

Disssertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, UFSM, como requisito parcial para obtenção do título de **Mestre em Matemática**.

Aos meus pais.

Agradecimentos

A Deus, a quem devo tudo. À minha família que esteve ao meu lado em todos os momentos. Em particular, ao meu pai e ao meu namorado Rafael pelo carinho, compreensão e incentivo. Aos colegas de Pós-Graduação Paulo, Rodrigo, Rubens e, em especial, à Saradia por sua amizade e apoio. Ao curso de Pós-Graduação em Matemática da UFSM pela acolhida e aos professores que contribuiram na minha formação acadêmica. À CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior) pelo incentivo financeiro. Ao professor Dirceu meu profundo agradecimento pela dedicação, objetividade e amizade na condução da orientação.

Resumo

Iniciamos este trabalho apresentando alguns resultados bem conhecidos sobre semigrupos inversos e ações parciais de grupos sobre conjuntos que serão utilizados frequentemente nesta dissertação. Em seguida, dado um grupo G, construímos um semigrupo universal $S(G)$, via geradores e relações. Além disso, mostramos que as ações parciais de G em um conjunto X estão em correspondência uma a uma com as ações (globais) de $S(G)$ em X. Esses resultados foram obtidos por R. Exel em [9]. Em [14], J. Kellendonk e M. V. Lawson obtém uma descrição explícita de $S(G)$, mostrando que o semigrupo universal $S(G)$ nada mais é do que a expansão de Birget-Rhodes do grupo G, denotada por $\widetilde{G}$. Mais ainda, J. Kellendonk e M. V. Lawson reobtiveram o resultado da correspondência. Para finalizar, uma vez estabelecida uma correspondência uma a uma entre ações parciais de G em um anel R e ações (globais) de $\widetilde{G}$ em R, apresentamos resultados de [10] que relacionam o skew anel de grupo parcial $R \star_\alpha G$ e o respectivo skew anel de semigrupo associado $R \star_{\widetilde{\alpha}} \widetilde{G}$.

Abstract

In this work we present some well known results on inverse semigroups and partial actions of groups on sets which will be frequently utilized in this dissertation. Furthermore, given a group G, we construct the universal semigroup $S(G)$, via generators and relations. Besides, we show that the partial actions of G on a set X are in a one-to-one correspondence to the (global) actions of $S(G)$ on X. These results were obtained by R. Exel in [9]. In [14], J. Kellendonk and M. V. Lawson get a description of $S(G)$, showed that the universal semigroup $S(G)$ is nothing more than the Birget-Rhodes expansion of the group G, denoted as $\widetilde{G}$. Moreover, J. Kellendond and M. V. Lawson retrieved the correspondence result. Finally, once it was established a one-to-one correspondence between the partial actions of G on a ring R and global action of $\widetilde{G}$ on R, we present results from [10] which relate the partial skew group ring $R \star_{\alpha} G$ and the respective associated skew semigroup ring $R \star_{\widetilde{\alpha}} \widetilde{G}$.

Sumário

Introdução

O conceito de semigrupo inverso é bastante recente na história da matemática, data da década de 1950. Esse surgiu independentemente com V. V. Wagner [21] e com G. Preston [17, 18, 19], em 1952 e 1954, respectivamente, como uma das formas de solucionar o problema da caracterização abstrata dos pseudogrupos. O teorema de Wagner-Preston mostra que todo semigrupo inverso pode ser considerado um subsemigrupo do semigrupo das bijeções parciais de X em X, denotado por $I(X)$. Ou seja, todo semigrupo inverso pode ser fielmente representado por bijeções parciais. Esse teorema é o análogo ao teorema de Cayley para a teoria de grupos. O leitor interessado pode consultar [13, 15].

A noção de ação parcial é ainda mais recente. Essa noção apareceu independentemente em várias áreas da matemática na década de 1990. Na teoria de álgebra de operadores, esse conceito proporcionou o aparecimento de poderosas ferramentas, alavancando uma série de novas descobertas, como por exemplo [1, 6, 7, 8, 16].

Em [4] M. Dokuchaev e R. Exel introduzem o conceito de ação parcial de um grupo sobre um conjunto num contexto puramente algébrico. Mais ainda, eles caracterizam as ações parciais α de um grupo G sobre um anel R que possuem envolvente e constroem o skew anel de grupo parcial, denotado por $R \star_\alpha G$. Mostram também que $R \star_\alpha G$ nem sempre é associativo e encontram condições suficientes para a sua associatividade. Esse trabalho motivou muitos outros, como por exemplo [2, 5, 9, 10, 11, 12, 14].

Nesta dissertação, vamos estudar os resultados obtidos em [9, 10, 14] relacionando ações parciais de grupos com ações de semigrupos inversos e o skew anel de grupo parcial com o skew anel de semigrupo.

Nas seções 1 e 2 do primeiro capítulo relembramos definições, exemplos e resultados bem conhecidos na literatura sobre semigrupos inversos e ações parciais de grupos. Entre outras coisas, apresentamos as definições de duas importantes classes de semigrupos, os semigrupos inversos E-unitários e os semigrupos F-inversos e mostramos na Teorema 1.1.14 que todo semigrupo F-inverso é também E-unitário. Na seção 3 do capítulo 1, exploramos a globalização de uma ação parcial sobre um conjunto. É bem conhecido que uma ação parcial de um grupo sobre um anel, em geral, não pode ser globalizada (ver, [4]). No entanto, qualquer ação parcial de um grupo sobre um conjunto tem uma globalização, conforme [14, Proposição 3.3].

No segundo capítulo mostramos que para cada grupo G está associado um semigrupo universal $S(G)$. Além disso, prova-se que as ações parciais de G sobre um conjunto X estão em correspondência uma a uma com as ações (globais) de $S(G)$ sobre X. Esses resultados foram obtidos por R. Exel em [9]. Nesse trabalho R. Exel não encontrou nenhum grupo G tal que $S(G)$ fosse um semigrupo conhecido. A dificuldade em descrever $S(G)$ está no fato que este é definido por geradores e relações. No entanto, em [14] J. Kellendonk e M. V. Lawson mostraram que o semigrupo universal construído por R. Exel nada mais é do que a expansão de Birget-Rhodes do grupo G. Mais ainda, eles reobtiveram o resultado da correspondência, dado pelo Teorema 2.2.2. Nesse sentido, podemos dizer que o trabalho de J. Kellendonk e M. V. Lawson completa o de R. Exel.

No terceiro capítulo vamos explorar, entre outras coisas, alguns resultados obtidos em [14]. Na seção 3.1 apresentamos a definição de expansão de Birget-Rhodes de um semigrupo e demonstramos alguns resultados para o caso particular de grupos. Mostraremos, por exemplo, que a expansão de Birget-Rhodes de um grupo é um monóide F-inverso e, portanto E-unitário. Na seção seguinte, mostramos que $S(G) \simeq \widetilde{G}$ (onde $\widetilde{G}$ é a expansão de Birget-Rhodes de G, Proposição 3.1.1) e apontamos, explicitamente, qual é o isomorfismo. Para finalizar, na última seção exploramos a relação entre o skew anel de grupo parcial e o respectivo skew anel de semigrupo da ação global associada a ação parcial (resultados provados em [10]).

Capítulo 1

Semigrupos inversos e ações

Neste capítulo apresentamos algumas definições e resultados sobre semigrupos e ações parciais de grupos que serão utilizados nos capítulos posteriores. Tais resultados, apesar de serem clássicos, são apresentados para a comodidade do leitor.

O capítulo será dividido em três seções. Na primeira, exploramos conceitos e resultados sobre semigrupos inversos. As demonstrações omitidas nessa seção podem ser vistas em [15]. Na segunda, abordamos sobre ações parciais de grupos sobre conjuntos. Na última, mostramos que toda ação parcial de um grupo sobre um conjunto é restrição de uma ação global (denominada globalização). Provamos também uma propriedade universal da globalização construída.

1.1 Semigrupos Inversos

A noção de semigrupo é mais geral que o conceito de grupo, ou seja, todo grupo é um semigrupo. De qualquer forma, um semigrupo *inverso* aproxima-se, como estrutura, de um grupo. Nesta seção apresentamos alguns resultados sobre semigrupos inversos que usaremos frequentemente neste trabalho.

Definição 1.1.1. *Um conjunto não-vazio S é um semigrupo se S tem uma operação binária associativa. Se, além disso, existe $1_S \in S$ tal que $1_S s = s 1_S = s$, para todo $s \in S$, então dizemos que S é um monóide. Um semigrupo S é dito regular se para todo $a \in S$, existe $b \in S$ tal que $aba = a$ e $bab = b$. O elemento $b \in S$ é chamado um inverso de a. Um subsemigrupo de um semigrupo S é um subconjunto não vazio de S fechado com relação a operação de S.*

Exemplos: (1) O conjunto $\mathbb{N}$ com a soma é um semigrupo. Mais ainda, $\mathbb{N}$ é um monóide, com $1_{\mathbb{N}} = 0$.
(2) No conjunto $\mathbb{R}$ defina a operação max por $x(max)y := max\{x, y\}$. Com esta operação $\mathbb{R}$ é um semigrupo.
(3) Denote por $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ o conjunto de todas as matrizes $n \times n$ com entradas em $\mathbb{R}$. Então $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), +)$ e $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \cdot)$ são semigrupos.
(4) Seja H um conjunto não vazio. Defina $S = H \times H = \{(i, j); i, j \in H\}$ com a seguinte operação: $(i, j)(l, k) = (i, k)$. Facilmente mostra-se que com essa operação S é um semigrupo, isto é, que a operação definida acima é associativa. Além disso, dado $a = (i, j) \in S$ tome $b = (l, k) \in S$ qualquer, e note que $aba = (i, j)(l, k)(i, j) = (i, k)(i, j) = (i, j) = a$ e $bab = (l, k)(i, j)(l, k) = (l, j)(l, k) = (l, k) = b$. Portanto, S é um semigrupo regular.

De maneira natural, dados S e T semigrupos, dizemos que $h : S \longrightarrow T$ é um homomorfismo de semigrupos se satisfaz $h(s_1 s_2) = h(s_1)h(s_2)$, para quaisquer $s_1, s_2 \in S$.

Definição 1.1.2. *Sejam X um conjunto não vazio, S um semigrupo e $i : X \longrightarrow S$ uma função. Dizemos que o par (S, i) é um semigrupo universal sobre X se para qualquer semigrupo T e qualquer função $k : X \longrightarrow T$, existe único homomorfismo de semigrupos $\widetilde{k} : S \longrightarrow T$ tal que $\widetilde{k} \circ i = k$.*

Exemplo: Seja X um conjunto não vazio qualquer chamado, neste contexto, de alfabeto. O conjunto X^* consiste de todas as sequências finitas de elementos de X. A sequência vazia é denotada por 1. Um elemento não vazio padrão de X^* é da forma $x_1 x_2 .... x_n$ onde $x_i \in X$, para todo $i = 1, 2, .., n$. Esses elementos são chamados palavras de X. A operação binária é chamada concatenação e definida em X^* como segue: sejam $x = x_1 x_2 .... x_n$ e $y = y_1 y_2 .... y_m$ palavras em X^* então sua concatenação é $xy = x_1 x_2 .... x_n y_1 y_2 .... y_m$. Definindo $i : X \longrightarrow X^*$ por, $i(x) = x$, temos que o par (X^*, i) é um semigrupo universal de X.

Lembremos que, dado um semigrupo S, um elemento $s \in S$ é dito um idempotente de S se $s^2 = s$. Denotaremos por $E(S)$ o conjunto de todos os idempotentes de S.

Definição 1.1.3. *Um semigrupo regular S é chamado um semigrupo inverso se quaisquer dois idempotentes de S comutam. Se, além disso, existe $1_S \in S$ tal que $1_S s = s 1_S = s$, para todo $s \in S$, então dizemos que S é um monóide inverso.*

Exemplos: (1) Sejam X e Y conjuntos não vazios. Uma função parcial de X em Y é uma função $f : A \longrightarrow B$, onde A e B são subconjuntos de X e Y, respectivamente. Denotaremos A por $dom(f)$ e B por $im(f)$. Considere $f : X \longrightarrow Y$ e $g : Y \longrightarrow Z$ funções parciais. Definimos a composição dessas funções parciais por $gf : X \longrightarrow Z$ uma função parcial com $dom(gf) = f^{-1}(dom(g) \cap im(f))$, $im(gf) = g(dom(g) \cap im(f))$ e $(gf)(x) = g(f(x))$, para todo $x \in dom(gf)$. Com esta operação e restringindo-se as bijeções parciais de X em X, obtemos um monóide inverso, denotado por $I(X)$ e chamado o monóide inverso simétrico de X (ver [15, Proposições 1.1.1 e 1.1.2]).
(2) Sejam G um grupo com elemento identidade 1 e $\mathcal{P}_1(G)$ o conjunto de todos os subconjuntos finitos de G contendo 1. Tome $\widetilde{G} = \{(A, g) \in \mathcal{P}_1(G) \times G;\ g \in A\}$, com multiplicação dada por $(A, g)(B, h) = (A \cup gB, gh)$, onde $gB = \{gb;\ b \in B\}$. Mostremos que $\widetilde{G}$ com essa operação é um monóide inverso. Observe que a multiplicação está bem definida, pois $A \cup gB \in \mathcal{P}_1(G)$ e como $h \in B$ então $gh \in gB$. Daí, $gh \in A \cup gB$. Portanto, $(A, g)(B, h) \in \widetilde{G}$. Essa operação é claramente associativa. Assim, $\widetilde{G}$ é um semigrupo. Mais ainda, como $(\{1\}, 1) \in \widetilde{G}$ e $(A, g)(\{1\}, 1) = (\{1\}, 1)(A, g) = (A, g)$, para todo $(A, g) \in \widetilde{G}$ então $\widetilde{G}$ é um monóide. Temos também que $(A, g)(g^{-1}A, g^{-1})(A, g) = (A, g)$ e $(g^{-1}A, g^{-1})(A, g)(g^{-1}A, g^{-1}) = (g^{-1}A, g^{-1})$. Logo, $\widetilde{G}$ é um semigrupo regular. Vamos agora investigar como são os idempotentes de $\widetilde{G}$. Seja $(A, g) \in \widetilde{G}$ tal que $(A, g)(A, g) = (A, g)$. Então, $(A, g)(A, g) = (A \cup gA, gg) = (A, g)$. De $g^2 = g$ segue que $g = 1$. Portanto, os idempotentes de $\widetilde{G}$ são da forma $(A, 1)$. Considere $(A, 1)$ e $(B, 1)$ idempotentes de $\widetilde{G}$. Então, $(A, 1)(B, 1) = (A \cup 1B, 1) = (A \cup B, 1) = (B \cup A, 1) = (B, 1)(A, 1)$. Como os idempotentes de $\widetilde{G}$ comutam, temos que $\widetilde{G}$ é um monóide inverso.

Nem sempre é fácil calcular os idempotentes de um semigrupo e mostrar que esses comutam. O teorema a seguir fornece uma caracterização de semigrupos inversos.

Teorema 1.1.4. *Seja S um semigrupo regular. Então os idempotentes de S comutam se, e somente se, todo elemento de S tem um único inverso.*

Prova: ($\Rightarrow$) Seja $a \in S$ e suponha que u e v são inversos de a, isto é, $a = aua$, $u = uau$ e $a = ava$, $v = vav$. Então, $u = uau = u(ava)u = (ua)(va)u$. Mas, $(ua)(ua) = (uau)a = ua$, ou seja, $ua \in E(S)$. Analogamente, $va \in E(S)$. Por hipótese os idempotentes de S comutam. Daí, $u = (ua)(va)u = (va)(ua)u = va(uau) = vau =$

$(vav)au = v(av)(au)$. Porém, $av, au \in E(S)$. Assim, $u = v(av)(au) = v(au)(av) = v(aua)v = vav = v$. Logo, $u = v$ e portanto a tem um único inverso.

($\Leftarrow$) Dados $e, f \in E(S)$ mostremos que existe um inverso de ef que é idempotente. De fato, seja x um inverso de ef, isto é, $ef = (ef)x(ef)$ e $x = x(ef)x$. Tome $y = fxe$ e note que $yy = (fxe)(fxe) = f(xefx)e = fxe = y$. Assim, $y \in E(S)$. Além disso, $yefy = (fxe)ef(fxe) = fxe^2f^2xe = f(xefx)e = fxe = y$ e $efyef = ef(fxe)ef = ef^2xe^2f = efxef = ef$. Logo, y é um inverso de ef. Concluímos que y é o inverso de ef requerido. Continuemos com os idempotentes e, f. Como S é um semigrupo regular, tome x como sendo um inverso de ef. Pelo que foi feito acima, temos que fxe também é um inverso de ef e é idempotente. Por hipótese, o inverso de todo elemento de S é único. Assim, $x = fxe \in E(S)$. Logo, x é inverso de si mesmo. Por outro lado, ef é um inverso de x. Daí por hipótese, tem-se $x = ef \in E(S)$. Desta forma, $E(S)$ é fechado com relação a operação de S. Consequentemente, $fe \in E(S)$. Observe também que, $ef(fe)ef = ef^2e^2f = efef = ef$ e $fe(ef)fe = fe^2f^2e = fefe = fe$. Logo, fe é um inverso de ef e como $ef \in E(S)$ temos que $ef = fe$. Portanto, os idempotentes de S comutam. $\square$

Do teorema acima, segue que os semigrupos inversos são precisamente os semigrupos S nos quais para cada elemento $s \in S$ existe um único elemento $s^{-1} \in S$ tal que $s = ss^{-1}s$ e $s^{-1}ss^{-1} = s^{-1}$. O elemento s^{-1} é chamado o inverso de s em S. Um subsemigrupo inverso de um semigrupo é um subsemigrupo fechado em relação aos inversos.

Observação 1.1.5. *Claramente temos que todo grupo é um semigrupo inverso. Em [15, Proposição 1.4.4] mostra-se que os grupos são precisamente os semigrupos inversos com exatamente um idempotente.*

Proposição 1.1.6. *Seja S um semigrupo inverso. Então:*
(1) *Se $e \in E(S)$ então $e^{-1} = e$.*
(2) *Todo idempotente de S é da forma ss^{-1}, para algum $s \in S$.*
(3) $(s^{-1})^{-1} = s$.
(4) *Para qualquer $e \in E(S)$ e $s \in S$ temos que $s^{-1}es \in E(S)$.*
(5) $(s_1s_2\cdots s_n)^{-1} = s_n^{-1}\cdots s_2^{-1}s_1^{-1},\ n \geq 2$.

Prova: As demonstrações dos ítens (1), (3) e (4) são imediatas. Para a prova do item (2), note que $(ss^{-1})(ss^{-1}) = (ss^{-1}s)s^{-1} = ss^{-1}$. Portanto, $ss^{-1} \in E(S)$. Por outro lado, considere $e \in E(S)$ então, pelo item (1), temos $e = e^2 = ee = ee^{-1}$. No item (5), basta provar para $n = 2$. Dados $s_1, s_2 \in S$, temos $(s_1s_2)(s_2^{-1}s_1^{-1})(s_1s_2) = s_1(s_2s_2^{-1})(s_1^{-1}s_1)s_2$. Como os idempotentes de S comutam e pelo item (2), ss^{-1} é idempotente para todo $s \in S$ temos que $(s_1s_2)(s_2^{-1}s_1^{-1})(s_1s_2) = s_1(s_1^{-1}s_1)(s_2s_2^{-1})s_2 = (s_1s_1^{-1}s_1)(s_2s_2^{-1}s_2) = s_1s_2$. Analogamente mostra-se que $(s_2^{-1}s_1^{-1})(s_1s_2)(s_2^{-1}s_1^{-1}) = s_2^{-1}s_1^{-1}$. Portanto, $(s_1s_2)^{-1} = s_2^{-1}s_1^{-1}$. □

Seja X um conjunto, o monóide inverso simétrico $I(X)$ está ordenado parcialmente pela restrição, isto é, $f \subseteq g$ se, e somente se, $dom(f) \subseteq dom(g)$ e $g(x) = f(x)$, para todo $x \in dom(f)$. Neste caso, dizemos que f é a restrição de g. Em [15, Proposição 1.1.4], mostra-se que $f \subseteq g$ se, e somente se, existe $1_A \in I(X)$ tal que $f = g1_A$, onde $1_A : A \longrightarrow A$ é dada por $1_A(a) = a$ (chamamos 1_A de identidade parcial de $I(X)$). Observe que, $1_A1_A = 1_A$. Portanto 1_A é um idempotente de $I(X)$.

Inspirados nessa caracterização defini-se a relação $\leq$ em qualquer semigrupo inverso S por: $s \leq t$ se, e somente se, $s = te$, para algum $e \in E(S)$.

No que segue, mostramos que essa é realmente uma relação de ordem parcial em S e, dentre outras coisas, que o lado em que o idempotente aparece é irrelevante.

Lema 1.1.7. *Seja S um semigrupo inverso. São equivalentes:*

(1) $s \leq t$.

(2) $s = ft$, *para algum* $f \in E(S)$.

(3) $s^{-1} \leq t^{-1}$.

(4) $s = ss^{-1}t$.

(5) $s = ts^{-1}s$.

Prova: (1) $\Rightarrow$ (2) Sejam $s, t \in S$ tais que $s \leq t$. Então, por definição, existe $e \in E(S)$ tal que $s = te$. Por (3) da Proposição 1.1.6, $f = tet^{-1} \in E(S)$. Além disso, $ft = tet^{-1}t = tt^{-1}te = te = s$. Então, $s = ft$, com $f \in E(S)$.

(2) $\Rightarrow$ (3) Como $s = ft$ temos por (4) e (5) da Proposição 1.1.6 que $s^{-1} = (ft)^{-1} = t^{-1}f^{-1} = t^{-1}f$. Portanto, $s^{-1} \leq t^{-1}$.

(3) $\Rightarrow$ (4) De $s^{-1} \leq t^{-1}$, segue que $s^{-1} = t^{-1}e$, para algum $e \in E(S)$. Assim, $s = et$. Logo, $es = e(et) = e^2t = et = s$. Daí, $ess^{-1} = ss^{-1}$. Usando a comutatividade dos idempotentes e que $ess^{-1} = ss^{-1}$, temos que $s = ss^{-1}s = ss^{-1}(et) = ss^{-1}et = ess^{-1}t = ss^{-1}t$. Portanto, $s = ss^{-1}t$.

(4) $\Rightarrow$ (5) Por hipótese $s = ss^{-1}t$ e por (1) da Proposição 1.1.6 temos que $ss^{-1} = f \in E(S)$. Tomando $e = t^{-1}ft$, então $te = t(t^{-1}ft) = tt^{-1}ft = ftt^{-1}t = ft = s$. E pela Proposição 1.1.6 (3), $e \in E(S)$. Além disso, $se = tee = te = s$. Daí, $s^{-1} = es^{-1}$. Assim, $s = ss^{-1}s = (te)s^{-1}s = t(es^{-1})s = ts^{-1}s$. Portanto, $s = ts^{-1}s$.

(5) $\Rightarrow$ (1) Temos que $s = ts^{-1}s$ e, como $s^{-1}s \in E(S)$, então $s \leq t$. $\square$

As equivalências do lema anterior, apesar de serem de simples demonstração, são importantes e serão utilizadas várias vezes neste trabalho.

Proposição 1.1.8. *Seja S um semigrupo inverso. Então:*
(1) *A relação $\leq$ é uma ordem parcial em S.*
(2) *Para quaisquer $e, f \in E(S)$ temos que $e \leq f$ se, e somente se, $e = ef = fe$.*
(3) *Se $s \leq t$ e $u \leq v$ então $su \leq tv$.*

Prova: Os ítens (1) e (2) são imediatos. Já para mostrar o item (3) sejam $s, t, u, v \in S$ tais que $s \leq t$ e $u \leq v$. Então existem $e, f \in E(S)$ tais que $s = te$ e $u = vf$. Daí, $su = (te)vf = t(ev)f$. Mas, tomando $h = v^{-1}ev \in E(S)$ temos $vh = v(v^{-1}ev) = evv^{-1}v = ev$. Assim, $su = t(vh)f = tv(hf)$. Como $h, f \in E(S)$ então $hf \in E(S)$. Portanto, $su \leq tv$. $\square$

A ordem definida acima é chamada ordem parcial natural de S. No caso particular em que o semigrupo S é um grupo, a ordem parcial natural é a relação de igualdade, e vale a recíproca (ver [15, Proposição 1.4.10]). Assim, a ordem parcial natural nos permite mensurar o "quanto"um semigrupo inverso se afasta de ser um grupo. O item (3) da proposição anterior mostra que a ordem parcial natural é compatível com a multiplicação.

Dado um semigrupo S, uma congruência em S é uma relação de equivalência ρ em S tal que se $a \,\rho\, b$ e $c \,\rho\, d$ então $ac \,\rho\, bd$. Se S é um semigrupo inverso definimos a seguinte congruência em S: dados $s, t \in S$, $s \,\sigma\, t$ se, e somente se, existe $u \in S$ tal que $u \leq s$ e $u \leq t$. Denotemos por $\sigma(s)$ a σ-classe de um elemento $s \in S$.

Teorema 1.1.9. *Se S é um semigrupo inverso então S/σ é um grupo.*

Prova: Facilmente podemos ver que S/σ é um semigrupo inverso com a operação $\sigma(s)\sigma(t) = \sigma(st)$. Para mostrarmos que esse semigrupo inverso é um grupo basta verificarmos que S/σ tem somente um idempotente (ver Observação 1.1.5). Seja $e \in E(S)$ e considere $s \in S$ tal que $e \in \sigma(s)$. Para qualquer $f \in E(S)$ temos que

$f\,\sigma\, e$, pois $ef \leq e, f$. Como $f\,\sigma\, e$, $e\,\sigma\, s$ e σ é transitiva então $f\,\sigma\, s$ e assim, $f \in \sigma(s)$. Logo, os idempotentes de S estão todos na mesma σ-classe.

Seja $s \in S$ tal que $\sigma(s)^2 = \sigma(s)$ então $\sigma(s^2) = \sigma(s)$. Daí, $s^2 \sigma s$. Logo, existe $u \in S$ tal que $u \leq s^2$ e $u \leq s$. Assim, usando o Lema 1.1.7 e a Proposição 1.1.8, temos que $u^{-1}u \leq s^{-1}ss$. Então, existe $f \in E(S)$ tal que $u^{-1}u = fs^{-1}ss$. Como $f, s^{-1}s \in E(S)$ segue que $fs^{-1}s \in E(S)$ e assim $u^{-1}u \leq s$. Lembremos que $u^{-1}u \leq u^{-1}u$. Daí, $u^{-1}u\,\sigma\, s$. Ou seja, $\sigma(u^{-1}u) = \sigma(s)$ e $u^{-1}u \in E(S)$. Então, sejam $s, t \in S$ tais que $\sigma(s)^2 = \sigma(s)$ e $\sigma(t)^2 = \sigma(t)$. Assim, pelo que foi feito acima existem $e, f \in E(S)$ tais que $\sigma(s) = \sigma(e)$ e $\sigma(t) = \sigma(f)$. Mas, $\sigma(e) = \sigma(f)$. Então, $\sigma(s) = \sigma(t)$. Logo, S/σ tem um único idempotente e sendo assim S/σ é grupo. $\square$

Observação 1.1.10. (1) *Se S é um grupo e $s \in S$ então $\sigma(s) = \{s\}$.*
(2) *A congruência σ é chamada congruência de grupo minimal, visto que se ρ é uma congruência em S tal que S/ρ é grupo então $\sigma \subseteq \rho$ (ver [15, Teorema 2.4.1]).*

Definição 1.1.11. *Sejam S e T semigrupos inversos e $\varphi : S \longrightarrow T$ um homomorfismo de semigrupos. O núcleo de φ é definido por* $\mathrm{Ker}(\varphi) = \{(a, b) \in S \times S;\ \varphi(a) = \varphi(b)\}$ *e a imagem de φ é definida por $Im(\varphi) = \{\varphi(s) : s \in S\}$.*

Dado $\varphi : S \longrightarrow T$ um homomorfismo de semigrupos então verifica-se diretamente, a partir da definição, que $Ker(\varphi)$ é uma congruência em S e que $Im(\varphi)$ é um subsemigrupo de T. Mais ainda, se $\rho = Ker(\varphi)$ então S/ρ é um semigrupo com a operação $\rho(s)\rho(t) = \rho(st)$ e vale o teorema do homomorfismo, ou seja, $S/\rho \simeq Im(\varphi)$ (ver [15, Teorema 2.3.1]).

Exemplo: Pelo teorema anterior S/σ é grupo, onde S é um semigrupo inverso. No início dessa seção apresentamos o monóide inverso $\widetilde{G}$. Vamos investigar $\widetilde{G}/\sigma$. Iniciamos definindo a seguinte função: $\varphi : \widetilde{G} \longrightarrow G$ dada por $\varphi(A, g) = g$. Note que φ é homomorfismo de semigrupos, pois $\varphi((A, g)(B, h)) = \varphi(A \cup gB, gh) = gh = \varphi(A, g)\varphi(B, h)$, para todo $(A, g), (B, h) \in \widetilde{G}$. Além disso, temos que $\ker(\varphi) = \{((A, g), (B, h)) \in \widetilde{G} \times \widetilde{G};\ \varphi(A, g) = \varphi(B, h)\}$. Então, $((A, g), (B, h)) \in \ker(\varphi)$ se, e somente se, $g = h$. Mostremos que $\ker(\varphi) = \sigma$. De fato, seja $((A, g), (B, h)) \in \ker(\varphi)$. Então $g = h$. Vamos verificar que $(A, g)\,\sigma\,(B, g)$. Tome $(A \cup B, g)$ e note que: $(A \cup B, g) = (A, g)(g^{-1}B, 1)$ e $(A \cup B, g) = (B, g)(g^{-1}A, 1)$. Lembremos que, $(g^{-1}A, 1), (g^{-1}B, 1) \in E(\widetilde{G})$. Desse modo, temos que, $(A \cup B, g) \leq (A, g)$ e $(A \cup B, g) \leq (B, g)$. Logo, $(A, g)\,\sigma\,(B, g)$. Por outro lado, se $(A, g)\,\sigma\,(B, h)$ então existe

$(C, l) \in \widetilde{G}$ tal que $(C, l) \leq (A, g)$ e $(C, l) \leq (B, h)$. Daí, existem $(D, 1), (E, 1) \in E(\widetilde{G})$ tais que $(C, l) = (A, g)(D, 1) = (A \cup gD, g)$ e $(C, l) = (B, h)(E, 1) = (B \cup hE, h)$. Logo, $l = g = h$. Portanto, $\varphi(A, g) = g = h = \varphi(B, h)$. Assim, $((A, g), (B, g)) \in \ker(\varphi)$. Como $Im(\varphi) = G$ temos $G = Im(\varphi) \simeq \widetilde{G}/\ker(\varphi) = \widetilde{G}/\sigma$.

Definição 1.1.12. *Um semigrupo inverso S é dito F-inverso se cada σ-classe contém um elemento máximo (em relação a ordem parcial natural). Dizemos que S é E-unitário se $e \in E(S)$ e $e \leq s$ implicar que $s \in E(S)$.*

O teorema abaixo caracteriza os semigrupos inversos E-unitários, fazendo uma conexão entre esses e a congruência de grupo minimal.

Teorema 1.1.13. *Seja S um semigrupo inverso. Então S é E-unitário se, e somente se, $\sigma(e) = E(S)$, para todo $e \in E(S)$.*

Prova: $(\Rightarrow)$ Sejam $e, f \in E(S)$ e considere a σ-classe $\sigma(e)$. Então $f \in \sigma(e)$, pois $ef \leq e, f$. Logo, $E(S) \subseteq \sigma(e)$. Por outro lado, seja $s \in \sigma(e)$. Assim, existe $u \in S$ tal que $u \leq s$ e $u \leq e$. Então, existe $f \in E(S)$ tal que $u = ef \in E(S)$. Agora, como $u \leq s$, $u \in E(S)$ e S é E-unitário temos que $s \in E(S)$. Assim, $\sigma(e) \subseteq E(S)$. Portanto, $\sigma(e) = E(S)$, para todo $e \in E(S)$.
$(\Leftarrow)$ Sejam $e \in E(S)$ e $s \in S$ tais que $e \leq s$. Note que, $e \leq e$. Assim, $e \,\sigma\, s$ então $s \in \sigma(e)$. Por hipótese, $\sigma(e) = E(S)$, para todo $e \in E(S)$. Daí, $s \in E(S)$. Portanto, S é E-unitário. □

Do teorema anterior, segue que S é um semigrupo inverso E-unitário se a σ-classe dos idempotentes contém todos e somente idempotentes.

A seguir mostramos que semigrupos F-inversos são necessariamente E-unitários.

Teorema 1.1.14. *Se S é um semigrupo F-inverso então S é um monóide E-unitário.*

Prova: É fácil ver que $\sigma(e)$ é a identidade do grupo S/σ, onde $e \in E(S)$. Suponha que i é o elemento máximo de $\sigma(e)$. Como $E(S) \subseteq \sigma(e)$, então i é maior que todos os idempotentes de S. Mostremos que i é idempotente. De fato, $i^{-1}i \in E(S)$ e assim $i^{-1}i \leq i$. Então, $ii^{-1}i \leq ii$. Logo, $i \leq i^2$. Por outro lado, $e \leq i$. Desta forma, $e \leq i^2$. Como $e \leq e$ temos que $i^2 \in \sigma(e)$. Então, $i^2 \leq i$. Portanto, $i^2 = i$.
Mostremos agora que i é o elemento identidade de S. De fato, seja $s \in S$. Então, $is = i(ss^{-1}s) = i(ss^{-1})s$. Basta mostrar que $i(ss^{-1}) = ss^{-1}$. Observe que para todo

$e \in E(S)$ temos $e \leq i$. Assim, $e = e^2 \leq ie$. Além disso, como $i \in E(S)$ então $ie \leq e$. Portanto, $ie = e$. Pela Proposição 1.1.6 item (2) temos que $ss^{-1} \in E(S)$. Logo, $i(ss^{-1}) = ss^{-1}$. Então, $is = i(ss^{-1})s = (ss^{-1})s = ss^{-1}s = s$. Analogamente, $si = s$. Concluímos que S é um monóide inverso com identidade i.

Finalmente mostremos que todo elemento de $\sigma(e)$ é idempotente de S. Seja $s \in \sigma(e)$. Então, $s \leq i$. Pelo Lema 1.1.7, temos que $s = iss^{-1} \in E(S)$. Logo a σ-classe dos idempotentes contém todos e somente idempotentes. Portanto, pelo Teorema 1.1.13, S é um monóide E-unitário. □

1.2 Ações Parciais de Grupos

Dado um conjunto Y não vazio e um grupo G com elemento neutro 1, uma ação (global) de G sobre Y é um homomorfismo de grupos $\beta : G \longrightarrow Y_G$, onde Y_G é o grupo das permutações de Y. Então, $\beta(1) = Id_Y$ e $\beta(g)\beta(h) = \beta(gh)$, para quaisquer $g, h \in G$. Analogamente, dizemos que G age sobre um anel (associativo com unidade) R se $\beta : G \longrightarrow Aut(R)$ é um homomorfismo de grupos, onde $Aut(R)$ é o grupo dos automorfismos do anel R.

A noção algébrica de uma ação parcial de um grupo sobre um conjunto X aparece inicialmente em [4]. Em [14], defini-se ação parcial usando a noção de pré-morfismo. Mostraremos nesta seção que a definição dada em [14] é exatamente a definição dada em [4].

Sejam S e T semigrupos inversos. Uma função $\alpha : S \longrightarrow T$ é chamada de pré-morfismo se satisfaz:
(1) $\alpha(s^{-1}) = \alpha(s)^{-1}$, para todo $s \in S$,
(2) $\alpha(s)\alpha(t) \leq \alpha(st)$, para todo $s \in S$.
Se S e T são monóides então o pré-morfismo α é dito unitário se vale:
(3) $\alpha(1_S) = 1_T$.

No que segue, usaremos X para denotar um conjunto não vazio qualquer e G para denotar um grupo com unidade 1.

Definição 1.2.1. *Uma ação parcial de um grupo G num conjunto X é um pré-morfismo unitário de G para o monóide inverso $I(X)$.*

Seja α uma ação parcial de um grupo G num conjunto X. Assuma que a função $\alpha : G \longrightarrow I(X)$ é dada por $\alpha(g) := \alpha_g : X_{g^{-1}} \longrightarrow X_g$, onde para cada $g \in G$, X_g é

um subconjunto de X e a função α satisfaz:
(1) $\alpha_1 = Id_X$, onde Id_X é a função identidade do conjunto X,
(2) $\alpha_g^{-1} = \alpha_{g^{-1}}$,
(3) $\alpha_g \alpha_h \leq \alpha_{gh}$, para todo $g, h \in G$.

Vamos analisar melhor o que significa a condição (3) dada acima. Para todo $g, h \in G$ temos $\alpha_g \alpha_h \leq \alpha_{gh}$. Ou seja, $dom(\alpha_g \alpha_h) \subseteq dom(\alpha_{gh})$ e $\alpha_g \alpha_h(x) = \alpha_{gh}(x)$, para todo $x \in dom(\alpha_g \alpha_h)$. Agora vejamos: $dom(\alpha_g \alpha_h) = \alpha_h^{-1}(X_h \cap X_{g^{-1}})$. Portanto, $\alpha_h^{-1}(X_h \cap X_{g^{-1}}) \subseteq X_{(gh)^{-1}}$. Além disso, $\alpha_g \alpha_h(x) = \alpha_{gh}(x)$, para todo $x \in \alpha_h^{-1}(X_h \cap X_{g^{-1}})$.

Isso mostra que a definição de ação parcial de um grupo G num conjunto X dada por [14] (Definição 1.2.1) implica na definição dada por [4] e apresentada abaixo.

Definição 1.2.2. *Sejam G um grupo e X um conjunto. Uma ação parcial de G em X é um par $\alpha = (\{X_g\}_{g \in G}, \{\alpha_g\}_{g \in G})$ onde para cada $g \in G$, X_g é um subconjunto de X e a função $\alpha_g : X_{g^{-1}} \longrightarrow X_g$ é uma bijeção satisfazendo:*
(1) $X_1 = X$, $\alpha_1 = Id_X$,
(2) $\alpha_h^{-1}(X_h \cap X_{g^{-1}}) \subseteq X_{(gh)^{-1}}$,
(3) $\alpha_g \alpha_h(x) = \alpha_{gh}(x)$, *para todo* $x \in \alpha_h^{-1}(X_h \cap X_{g^{-1}})$ *e para quaisquer* $g, h \in G$.

Note que as condições (2) e (3) da definição acima estabelecem que a função α_{gh} é uma extensão da função $\alpha_g \alpha_h$ e que $\alpha_g^{-1} = \alpha_{g^{-1}}$, para todo $g \in G$. Logo, esta definição implica a Definição 1.2.1. A condição (2) pode ser substituída por uma condição "aparentemente"mais forte (ver [4]). Assim, podemos reescrever a definição de ação parcial.

Definição 1.2.3. *Com a notação da Definição 1.2.2, temos que α é uma ação parcial de G em X se para quaisquer $g, h \in G$ valem:*
(1) $X_1 = X$, $\alpha_1 = Id_X$,
(2′) $\alpha_g(X_{g^{-1}} \cap X_h) = X_g \cap X_{gh}$,
(3′) $\alpha_g \alpha_h(x) = \alpha_{gh}(x)$, *para todo* $x \in X_{h^{-1}} \cap X_{(gh)^{-1}}$.

Exemplo: Sejam $G = \langle g;\ g^3 = 1 \rangle = \{1, g, g^2\}$ e $Y = \{1, 2, 3, 4\}$. Considere $\beta : G \longrightarrow Y_G$, onde Y_G é o grupo das permutações de Y, que associa para cada $g \in G$ a função $\beta_g : Y \longrightarrow Y$, com $\beta_1 = Id_Y$ e $\beta_g = (234)$. Então β é uma ação global de G em Y. Seja $X = \{1, 2, 3\}$ e defina $X_g = X \cap \beta_g(X)$. Calculando os X_g's, obtemos:

$X_1 = X$, $X_g = \{1,3\}$ e $X_{g^2} = X_{g^{-1}} = \{1,2\}$. Assim, $\alpha : G \longrightarrow I(X)$, que a cada $g \in G$ associa $\alpha_g : X_{g^{-1}} \longrightarrow X_g$, com $\alpha_g = \beta_g|_{X_{g^{-1}}}$, é uma ação parcial de G em X.

Esse exemplo é um caso particular de uma forma geral de construir exemplos de ações parciais a partir de ações globais.

Exemplo: Sejam G um grupo, Y um conjunto e $X \subset Y$ um subconjunto de Y. Considere uma ação global $\beta : G \longrightarrow Y_G$ (onde Y_G é o grupo das permutações de Y), dada por $\beta(g) := \beta_g$. Defina, $X_g := X \cap \beta_g(X)$ e $\alpha_g : X_{g^{-1}} \longrightarrow X_g$, com $\alpha_g = \beta_g|_{X_{g^{-1}}}$, para cada $g \in G$. Assim, verifica-se facilmente que α é uma ação parcial de G em X.

No caso em que X é um anel R com unidade, exigimos na definição de ação parcial de G sobre R que D_g seja um ideal (bilateral) de R e que a função $\alpha_g : D_{g^{-1}} \longrightarrow D_g$ seja um isomorfismo de ideais satisfazendo as condições $(1)-(3)$ da Definição 1.2.2, para todo $g \in G$.

Exemplos: (1) Seja K um anel com unidade 1 e considere $T = K \times K \times K = Ke_1 \oplus Ke_2 \oplus Ke_3$, onde $e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1)$. Seja $G = \{1, g, g^2\}$ e seja $\beta : G \longrightarrow Aut(T)$ uma ação global de G em T dada por: $\beta_1 = Id_R$ e $\beta_g(e_1) = e_2, \beta_g(e_2) = e_3, \beta_g(e_3) = e_1$. Tome $e = e_1 + e_2 \in T$ e observe que e é um idempotente central de T. Seja $R = Te = K \times K \times \{0\} = Ke_1 \oplus Ke_2$ e defina $D_g := R \cap \beta_g(R)$ e $\alpha_g = \beta_g|_{D_{g^{-1}}}$, para todo $g \in G$. Calculando os $D_g's$ obtemos: $D_1 = R$, $D_g = Ke_2$ e $D_{g^2} = D_{g^{-1}} = Ke_1$. Então, $\alpha_1 = Id_R$, $\alpha_g : Ke_1 \longrightarrow Ke_2$ é dada por $\alpha_g(xe_1) = xe_2$ e $\alpha_{g^{-1}} : Ke_2 \longrightarrow Ke_1$ é dada por $\alpha_g^{-1}(xe_2) = xe_1$. Verifica-se facilmente que $\alpha : G \longrightarrow I(R)$ é um pré-morfismo unitário. Portanto, $\alpha = (\{D_g\}_{g\in G}, \{\alpha_g\}_{g\in G})$ é uma ação parcial de G em R.
(2) Sejam G um grupo, R um anel e $I < R$ um ideal bilateral de R. Considere $\beta : G \longrightarrow Aut(R)$, dada por $\beta(g) := \beta_g : R \longrightarrow R$ uma ação global de G em R. Defina, para cada $g \in G$, $D_g := I \cap \beta_g(I)$ e $\alpha_g : D_{g^{-1}} \longrightarrow D_g$, com $\alpha_g = \beta_g|_{D_{g^{-1}}}$. Assim, verifica-se facilmente que α é uma ação parcial de G em I.

1.3 Globalização

Na seção anterior apresentamos exemplos de ações parciais de grupos sobre conjuntos construídas a partir da restrição de ações globais. Surge então a seguinte questão: toda ação parcial de grupo é a restrição de uma ação global?

Nesta seção provaremos que toda ação parcial de grupo sobre um conjunto origina-se pela restrição de uma ação global de grupo. Os resultados apresentados nesta seção foram provados na seção 3 de [14]. Denotando por Y_G o grupo das permutações de Y, temos a seguinte definição

Definição 1.3.1. *Sejam G um grupo e $\alpha : G \longrightarrow I(X)$ ($g \longmapsto \alpha_g : X_{g^{-1}} \longrightarrow X_g$), um pré-morfismo unitário. Uma globalização de α é um par (ι, β), onde $\iota : X \longrightarrow Y$ é uma função injetora entre conjuntos e $\beta : G \longrightarrow Y_G$ ($g \longmapsto \beta_g : Y \longrightarrow Y$), é um homomorfismo de grupos tais que, para cada $g \in G$, temos:*
(1) *$x \in X_{g^{-1}}$ se, e somente se, $\beta_g(\iota(x)) \in \iota(X)$,*
(2) *$\alpha_g(x) = \iota^{-1}\beta_g\iota(x)$, para todo $x \in X_{g^{-1}}$.*

O conceito de globalização (ou envolvente) de uma ação parcial de um grupo sobre um anel foi considerado em [4, Definição 4.2]. A próxima observação mostra que a noção de globalização considerada acima, reflete exatamente a noção de globalização de [4] quando trabalhamos com ações sobre conjuntos.

Observação 1.3.2. *Para cada $g \in G$, são equivalentes:*
(a) $x \in X_{g^{-1}}$ se, e somente se, $\beta_g(\iota(x)) \in \iota(X)$,
(b) $\iota(X_{g^{-1}}) = \beta_{g^{-1}}(\iota(X)) \cap \iota(X)$.

Assuma que (a) é satisfeita e mostremos (b). Seja $y \in \iota(X_{g^{-1}})$. Então, $y = \iota(x)$, para algum $x \in X_{g^{-1}}$. Pelo item (1), segue que $\beta_g(\iota(x)) \in \iota(X)$. Logo, $\beta_g(\iota(x)) = \iota(z)$, para algum $z \in X$. Assim, $y = \iota(x) = \beta_{g^{-1}}(\iota(z)) \in \beta_{g^{-1}}(\iota(X)) \cap \iota(X)$. Reciprocamente, seja $y \in \beta_{g^{-1}}(\iota(X)) \cap \iota(X)$. Daí, $y = \beta_{g^{-1}}(\iota(a)) = \iota(b)$, com $a, b \in X$. Então, $\beta_g(\iota(b)) = \iota(a) \in \iota(X)$. Por (a), temos que $b \in X_{g^{-1}}$. Logo, $y = \iota(b) \in \iota(X_{g^{-1}})$. Portanto, $\iota(X_{g^{-1}}) = \beta_{g^{-1}}(\iota(X)) \cap \iota(X)$.
Assuma que (b) é satisfeita e mostremos que (a) também é satisfeita. Seja $x \in X_{g^{-1}}$. Então, $\iota(x) \in \beta_{g^{-1}}(\iota(X))$. Assim, $\iota(x) = \beta_{g^{-1}}(\iota(y))$, para algum $y \in X$. Logo, $\beta_g(\iota(x)) = \iota(y) \in \iota(X)$. Reciprocamente, seja $x \in X$ tal que $\beta_g(\iota(x)) \in \iota(X)$. Logo, $\beta_g(\iota(x)) = \iota(y)$, para algum $y \in X$. Então, $\iota(x) = \beta_{g^{-1}}(\iota(y)) \in \beta_{g^{-1}}(\iota(X)) \cap \iota(X)$. Por (b), segue que $\iota(x) \in \iota(X_{g^{-1}})$. Mas, ι é injetora. Assim, $x \in X_{g^{-1}}$. Portanto, $x \in X_{g^{-1}}$ se, e somente se, $\beta_g(\iota(x)) \in \iota(X)$.

Seja $\alpha : G \longrightarrow I(X)$ ($g \longmapsto \alpha_g : X_{g^{-1}} \longrightarrow X_g$) um pré-morfismo unitário. Agora contruiremos uma globalização para essa ação parcial de G em X. Sejam

$g_1, \cdots, g_n \in G$ e $x, x' \in X$. Escrevemos $(\alpha_{g_n}, \cdots, \alpha_{g_1})x = x'$ se existem elementos $x_1 = x, x_2, \cdots, x_{n+1} = x' \in X$ tais que $x_1 \in dom(\alpha_{g_1}) = X_{g_1^{-1}}$ e $\alpha_{g_1}(x_1) = x_2$, $x_2 \in dom(\alpha_{g_2}) = X_{g_2^{-1}}$ e $\alpha_{g_2}(x_2) = x_3, \cdots, x_n \in dom(\alpha_{g_n}) = X_{g_n^{-1}}$ e $\alpha_{g_n}(x_n) = x_{n+1}$.

Lema 1.3.3. *Defina a relação $\sim$ no conjunto $G \times X$ por $(g, x) \sim (g', x')$ se, e somente se, existem $g_1, \cdots, g_n \in G$ tais que $g = g'g_n \cdots g_1$ e $(\alpha_{g_n}, \cdots, \alpha_{g_1})x = x'$. Então $\sim$ é uma relação de equivalência em $G \times X$.*

Prova: Observe que dados $g \in G$ e $x \in X$, temos que $g = g1$ e $\alpha_1(x) = x$, pois α é pré-morfismo unitário. Portanto, $(g, x) \sim (g, x)$. Deste modo, $\sim$ é reflexiva. Mostremos que $\sim$ é simétrica. De fato, se $(g, x) \sim (g', x')$ então existem $g_1, \cdots, g_n \in G$ tais que $g = g'g_n \cdots g_1$ e $(\alpha_{g_n}, \cdots, \alpha_{g_1})x = x'$. Daí, pela definição, existem $x_1 = x, x_2, \cdots, x_{n+1} = x' \in X$ tais que $\alpha_{g_1}(x_1) = x_2, \alpha_{g_2}(x_2) = x_3, \cdots, \alpha_{g_n}(x_n) = x_{n+1}$. Note que, α é pré-morfismo unitário. Logo, $\alpha_{g^{-1}}\alpha_g \leq \alpha_{g^{-1}g} = \alpha_1 = Id_X$, para todo $g \in G$. Ou seja, $\alpha_{g^{-1}}\alpha_g(x) = x$, para todo $x \in dom(\alpha_{g^{-1}}\alpha_g) = X_{g^{-1}}$. Assim, temos que $x_1 \in X_{g_1^{-1}} = dom(\alpha_{g_1^{-1}}\alpha_{g_1})$ e $\alpha_{g_1}(x_1) = x_2$. Então, $x_1 = \alpha_{g_1^{-1}}(\alpha_{g_1}(x_1)) = \alpha_{g_1^{-1}}(x_2)$. Temos ainda que, $x_2 \in X_{g_2^{-1}} = dom(\alpha_{g_2^{-1}}\alpha_{g_2})$ e $\alpha_{g_2}(x_2) = x_3$. Então, $x_2 = \alpha_{g_2^{-1}}(\alpha_{g_2}(x_2)) = \alpha_{g_2^{-1}}(x_3)$. Continuando, obtemos $\alpha_{g_i^{-1}}(x_{i+1}) = x_i$, para todo $1 \leq i \leq n$. Portanto, $g' = gg_1^{-1} \cdots g_n^{-1}$ e $(\alpha_{g_1^{-1}}, \cdots, \alpha_{g_n^{-1}})x' = x$. Então, $(g', x') \sim (g, x)$.
Finalmente, mostremos que $\sim$ é transitiva. Suponha que $(g, x) \sim (g', x')$ e $(g', x') \sim (g'', x'')$. Assim, existem $g_1, \cdots, g_m \in G$ e $h_1, \cdots, h_n \in G$ tais que:
$g = g'g_m \cdots g_1$ e $(\alpha_{g_m}, \cdots, \alpha_{g_1})x = x'$, e $g' = g''h_n \cdots h_1$ e $(\alpha_{h_n}, \cdots, \alpha_{h_1})x' = x''$.
Daí, pela definição, existem $x_1 = x, x_2, \cdots, x_{m+1} = x' \in X$ e $y_1 = x', y_2, \cdots, y_{n+1} = x'' \in X$ tais que $\alpha_{g_i}(x_i) = x_{i+1}$ e $\alpha_{h_j}(y_j) = y_{j+1}$, para todo $1 \leq i \leq m$ e $1 \leq j \leq n$. Portanto, $(\alpha_{h_n}, \cdots, \alpha_{h_1}, \alpha_{g_m}, \cdots, \alpha_{g_1})x = x''$ e $g = g''h_n \cdots h_1 g_m \cdots g_1$. Logo, $(g, x) \sim (g'', x'')$. $\square$

Denote o conjunto das $\sim$-classes de equivalência de $G \times X$ por $X_{(G)}$ e denote a $\sim$-classe de equivalência contendo o elemento (g, x) por $[g, x]$. Além disso, $(X_{(G)})_G$ denota o grupo das permutações de $X_{(G)}$.

Lema 1.3.4. *Considere a função $\beta : G \longrightarrow (X_{(G)})_G$ que associa para cada $h \in G$ a função $\beta_g : X_{(G)} \longrightarrow X_{(G)}$ dada por $\beta_h([g, x]) = [hg, x]$. Então β é uma ação global de grupo bem definida.*

Prova: Suponha que $[g,x] = [g',x']$. Então, $(g,x) \sim (g',x')$. Portanto, existem $g_1, \cdots, g_n \in G$ tais que $g = g'g_n \cdots g_1$ e $(\alpha_{g_n}, \cdots, \alpha_{g_1})x = x'$. Logo, $hg = hg'g_n \cdots g_1$ e $(\alpha_{g_n}, \cdots, \alpha_{g_1})x = x'$. Daí, $(hg,x) \sim (hg',x')$ e $[hg,x] = [hg',x']$. Assim, $\beta_h([g,x]) = \beta_h([g',x'])$. Logo, β está bem definida. Mostremos que $\beta_{h_1}\beta_{h_2} = \beta_{h_1h_2}$, para quaisquer $h_1, h_2 \in G$. De fato, sejam $h_1, h_2 \in G$ e $[g,x] \in X_{(G)}$. Então, $\beta_{h_1}\beta_{h_2}([g,x]) = \beta_{h_1}(\beta_{h_2}([g,x])) = \beta_{h_1}([h_2g,x]) = [h_1(h_2g),x] = [(h_1h_2)g,x] = \beta_{h_1h_2}([g,x])$. Além disso, $\beta_1([g,x]) = [1g,x] = [g,x]$. Consequentemente, $\beta_h^{-1} = \beta_{h^{-1}}$ e portanto β é uma ação global de G em $X_{(G)}$. $\square$

Denotando por $\beta_G(\iota(X))$ a ação de G sobre $\iota(X)$, com $\iota : X \longrightarrow X_{(G)}$ dada por $\iota(x) = [1,x]$, temos o seguinte resultado

Proposição 1.3.5. *Considere a função $\iota : X \longrightarrow X_{(G)}$ dada por $\iota(x) = [1,x]$. Então $\beta_G(\iota(X)) = X_{(G)}$ e a função ι é injetiva. Além disso, para cada $g \in G$, temos:*
(1) $x \in X_{g^{-1}}$ se, e somente se, $\beta_g(\iota(x)) \in \iota(X)$,
(2) $\alpha_g(x) = \iota^{-1}\beta_g\iota(x)$, para todo $x \in X_{g^{-1}}$.
Assim, (ι,β) é uma globalização de α.

Prova: Mostremos primeiro que $\beta_G(\iota(X)) = X_{(G)}$. De fato, sejam $g \in G$ e $x \in X$. Então $\beta_g(\iota(x)) = \beta_g([1,x]) = [g1,x] = [g,x] \in X_{(G)}$. Logo, $\beta_G(\iota(X)) \subseteq X_{(G)}$. Seja $[g,x] \in X_{(G)}$ então $[g,x] = [g1,x] = \beta_g([1,x]) = \beta_g(\iota(x))$. Assim, $X_{(G)} \subseteq \beta_G(\iota(X))$. Portanto, $\beta_G(\iota(X)) = X_{(G)}$. Agora, mostremos que ι é injetiva. Com efeito, se $\iota(x) = \iota(y)$ então $[1,x] = [1,y]$. Daí, existem $g_1, \cdots, g_n \in G$ tais que $1 = 1g_n \cdots g_1$ e $(\alpha_{g_n}, \cdots, \alpha_{g_1})x = y$. Por definição, existem $x_1 = x, x_2, \cdots, x_{n+1} = y \in X$ tais que $\alpha_{g_1}(x_1) = x_2, \alpha_{g_2}(x_2) = x_3, \cdots, \alpha_{g_n}(x_n) = x_{n+1} = y$. Observe que, $\alpha_{g_1}(x_1) = x_2 \in X_{g_1} \cap X_{g_2^{-1}}$ e $dom(\alpha_{g_2}\alpha_{g_1}) = \alpha_{g_1^{-1}}(X_{g_1} \cap X_{g_2^{-1}})$. Assim, $x_1 \in dom(\alpha_{g_2}\alpha_{g_1})$. Como α é pré-morfismo então $\alpha_{g_2}\alpha_{g_1} \leq \alpha_{g_2g_1}$. Logo, $\alpha_{g_2}\alpha_{g_1}(x) = \alpha_{g_2g_1}(x)$, para todo $x \in dom(\alpha_{g_2}\alpha_{g_1})$. Desta forma, temos $\alpha_{g_2}\alpha_{g_1}(x_1) = \alpha_{g_2g_1}(x_1)$. Por outro lado, $\alpha_{g_2}\alpha_{g_1}(x_1) = \alpha_{g_2}(\alpha_{g_1}(x_1)) = \alpha_{g_2}(x_2) = x_3$. Portanto, $\alpha_{g_2g_1}(x_1) = x_3$. Temos ainda que $\alpha_{g_3}(x_3) = x_4 \in X_{g_3} \cap X_{g_4^{-1}}$. Usando raciocínio análogo ao anterior, obtemos $\alpha_{g_3g_2g_1}(x_1) = x_4$. Aplicando esse raciocínio sucessivas vezes, temos $\alpha_{g_n \cdots g_2g_1}(x_1) = x_{n+1}$. Como $x_1 = x$, $x_{n+1} = y$ e $1 = g_n \cdots g_2g_1$ então $\alpha_1(x) = y$. Sendo α um pré-morfismo unitário temos $\alpha_1(x) = x$. Logo, $x = y$. Portanto, ι é injetiva.
Mostremos que $x \in X_{g^{-1}}$ se, e somente se, $\beta_g(\iota(x)) \in \iota(X)$. De fato, seja $x \in X_{g^{-1}}$. Daí, $\iota(\alpha_g(x)) = [1, \alpha_g(x)]$. Por outro lado, $\beta_g(\iota(x)) = \beta_g([1,x]) = [g,x]$. Porém, $[g,x] = [1, \alpha_g(x)]$, pois $g = 1g$ e $\alpha_g(x) = \alpha_g(x)$. Logo, $\iota(\alpha_g(x)) = \beta_g(\iota(x))$, para cada

$g \in G$. Assim, $\beta_g(\iota(x)) \in \iota(X)$. Reciprocamente, seja $x \in X$ tal que $\beta_g(\iota(x)) \in \iota(X)$. Então, $\beta_g(\iota(x)) = \beta_g([1, x]) = [g, x] \in \iota(X)$. Assim, $[g, x] = [1, x']$, para algum $x' \in X$. Daí, existem $g_1, \cdots, g_n \in G$ tais que $g = 1g_n \cdots g_1$ e $(\alpha_{g_n}, \cdots, \alpha_{g_1})x = x'$. Por definição, existem $x_1 = x, x_2, \cdots, x_{n+1} = x' \in X$ tais que $\alpha_{g_i}(x_i) = x_{i+1}$, para todo $1 \leq i \leq n$. Por raciocínio análogo ao usado para mostrar a injetividade obtemos $\alpha_{g_n \cdots g_1}(x) = x'$. Mas, $g_n \cdots g_1 = g$. Então, $\alpha_g(x) = x'$. Logo, $x \in X_{g^{-1}}$.
Como vimos acima, para cada $g \in G$ e para qualquer $x \in X_{g^{-1}}$ temos $\iota(\alpha_g(x)) = \beta_g(\iota(x))$. Assim, $\alpha_g(x) = \iota^{-1}\beta_g\iota(x)$ e (ι, β) é uma globalização de α. $\square$

Para estabelecer uma propriedade universal da construção de (ι, β) definimos a categoria **Global** como segue: um objeto de **Global** é uma globalização de α. Se (k, ψ) e (k', ψ') são duas globalizações de α então um morfismo de (k, ψ) em (k', ψ') é uma função $\varphi : Y \longrightarrow Y'$ tal que $\varphi k = k'$ e $\varphi(\psi_g(y)) = \psi'_g(\varphi(y))$ (onde, $k : X \longrightarrow Y$ e $k' : X \longrightarrow Y'$). Mostremos que a composição de dois morfismos é um morfismo. De fato, sejam $\varphi_1 \in Mor((k, \psi), (k', \psi'))$ e $\varphi_2 \in Mor((k', \psi'), (k'', \psi''))$. Então, temos que a função $\varphi_1 : Y \longrightarrow Y'$ é tal que $\varphi_1 k = k'$ e $\varphi_1\psi_g(y) = \psi'_g\varphi_1(y)$ e a função $\varphi_2 : Y' \longrightarrow Y''$ é tal que $\varphi_2 k' = k''$ e $\varphi_2\psi'_g(y) = \psi''_g\varphi_2(y)$. Assim, temos que $\varphi_2\varphi_1 : Y \longrightarrow Y''$, $(\varphi_2\varphi_1)k = \varphi_2(\varphi_1 k) = \varphi_2(k') = k''$ e $(\varphi_2\varphi_1)\psi_g(y) = \varphi_2(\varphi_1\psi_g(y)) = \varphi_2(\psi'_g\varphi_1(y)) = (\varphi_2\psi'_g)(\varphi_1(y)) = \psi''_g\varphi_2(\varphi_1(y)) = \psi''_g(\varphi_2\varphi_1(y))$. Portanto, $\varphi_2\varphi_1 \in Mor((k, \psi), (k'', \psi''))$. Além disso, é fácil verificar que $Id_{(k,\psi)} \in Mor((k, \psi), (k, \psi))$, onde o morfismo φ é a Id_Y, e que a composição é associativa. Assim, **Global** é uma categoria.

Lembremos que numa categoria C, um objeto A_0 da categoria é dito *inicial* se, e somente se, para qualquer objeto A de C existe um único morfismo $f : A_0 \longrightarrow A$.

Teorema 1.3.6. *O par (ι, β) é um objeto inicial da categoria **Global**. Além disso, se (k, ψ) é uma globalização de α, com $k : X \longrightarrow Y$, então existe um mergulho de $X_{(G)}$ em Y.*

Prova: Seja (k, ψ) um objeto qualquer de **Global**, onde $k : X \longrightarrow Y$ e $\psi : G \longrightarrow Y_G$. Lembremos que (ι, β) é um objeto na categoria **Global** tal que $\iota : X \longrightarrow X_{(G)}$ é dada por $\iota(x) = [1, x]$ e $\beta : G \longrightarrow (X_{(G)})_G$ associa para cada $g \in G$ a função $\beta_g : X_{(G)} \longrightarrow X_{(G)}$ dada por $\beta_g([h, x]) = [gh, x]$. Defina $\varphi : X_{(G)} \longrightarrow Y$ por $\varphi([g, x]) = \psi_g(k(x))$. Mostremos que φ é o único morfismo de (ι, β) para (k, ψ). Mostremos primeiro que φ está bem definida. De fato, suponhamos que $[g, x] = [g', x']$. Então, existem $g_1, \cdots, g_n \in G$ tais que $g = g'g_n \cdots g_1$ e $(\alpha_{g_n}, \cdots, \alpha_{g_1})x = x'$.

Daí, existem $x_1 = x, x_2, \cdots, x_{n+1} = x' \in X$ tais que $\alpha_{g_i}(x_i) = x_{i+1}$, para todo $1 \leq i \leq n$. Pela nossa suposição, (k, ψ) é uma globalização de α. Então, para cada $1 \leq i \leq n$ temos que $\alpha_{g_i}(x) = k^{-1}\psi_{g_i}k(x)$, para cada $g_i \in G$ e para todo $x \in X_{g_i^{-1}}$. Assim, como $x_i \in X_{g_i^{-1}}$ segue que $\psi_{g_i}(k(x_i)) = k(\alpha_{g_i}(x_i)) = k(x_{i+1})$. Portanto, $\psi_{g_n} \cdots \psi_{g_1}(k(x_1)) = k(x_{n+1})$. Como ψ é homomorfismo temos que $\psi_{g_n \cdots g_1}(k(x_1)) = k(x_{n+1})$. Mas, $x_1 = x$ e $x_{n+1} = x'$. Então, $\psi_{g_n \cdots g_1}(k(x)) = k(x')$. Logo, $\varphi([g, x]) = \psi_g(k(x)) = \psi_{g' g_n \cdots g_1}(k(x)) = \psi_{g'}(\psi_{g_n \cdots g_1}(k(x))) = \psi_{g'}(k(x')) = \varphi([g', x'])$. Daí, φ está bem definida.

Agora mostremos que φ é um morfismo de (ι, β) para (k, ψ). Primeiro observe que $(\varphi\iota)(x) = \varphi(\iota(x)) = \varphi([1, x]) = \psi_1(k(x)) = k(x)$. Portanto, $\varphi\iota = k$. Temos também que $\varphi(\beta_g([h, x])) = \varphi([gh, x]) = \psi_{gh}(k(x)) = (\psi_g\psi_h)(k(x)) = \psi_g(\psi_h(k(x)) = \psi_g(\varphi([h, x]))$. Logo, φ é um morfismo de (ι, β) para (k, ψ). Resta mostrar a unicidade de φ. Suponhamos que ϕ é um morfismo de (ι, β) para (k, ψ). Então, $\phi\iota = k$ e $\phi(\beta_g(x)) = \psi_g(\phi(x))$, para cada $x \in X_{(G)}$. Sejam $x \in X$ e $[g, x] \in X_{(G)}$. Então, $\phi(\beta_g(\iota(x))) = \phi(\beta_g([1, x])) = \phi([g, x])$. Por outro lado, $\phi(\beta_g(\iota(x))) = \psi_g(\phi(\iota(x))) = \psi_g(k(x)) = \varphi([g, x])$. Portanto, $\phi = \varphi$.

Mostremos que φ é injetiva. Suponha que $\varphi([g, x]) = \varphi([h, y])$. Então temos que $\psi_g(k(x)) = \psi_h(k(y))$. Assim, $\psi_{h^{-1}}(\psi_g(k(x))) = k(y)$. Mas, ψ é homomorfismo. Portanto, $\psi_{h^{-1}}(\psi_g(k(x))) = \psi_{h^{-1}g}(k(x)) = k(y)$. Daí, como $\psi_{h^{-1}g}(k(x)) \in k(X)$ então $x \in X_{(h^{-1}g)^{-1}}$. Sendo (k, ψ) uma globalização de α, $(k^{-1}\psi_{h^{-1}g}k)(x) = y$, $x \in X_{(h^{-1}g)^{-1}}$ e $y \in X$, segue que $\alpha_{h^{-1}g}(x) = y$. Consequentemente, $(g, x) = (h(h^{-1}g), x) \sim (h, \alpha_{h^{-1}g}(x)) = (h, y)$. Portanto, $[g, x] = [h, y]$. $\square$

Exemplo: Sejam $G = \langle g;\ g^3 = 1 \rangle = \{1, g, g^2\}$, $X = \{1, 2, 3\}$, $X_g = \{1, 3\}$ e $X_{g^{-1}} = \{1, 2\}$. Considere $\alpha : G \longrightarrow I(X)$ dada por $\alpha_1 = Id_X$, $\alpha_g : X_{g^{-1}} \longrightarrow X_g$, com $\alpha_g(1) = 1$ e $\alpha_g(2) = 3$, e $\alpha_{g^{-1}} : X_g \longrightarrow X_{g^{-1}}$, com $\alpha_{g^{-1}}(1) = 1$ e $\alpha_{g^{-1}}(3) = 2$ ação parcial de G em X. Vamos construir a globalização de α. Primeiramente vamos calcular as $\sim$-classes de equivalência em $G \times X$. Então, como $(1, 1) \sim (g^{-1}, 1)$ (pois $1 = g^{-1}g$ e $\alpha_g(1) = 1$), $(1, 1) \sim (g, 1)$ (pois $1 = gg^{-1}$ e $\alpha_{g^{-1}}(1) = 1$), $(1, 2) \sim (g^{-1}, 3)$ (pois $1 = g^{-1}g$ e $\alpha_g(2) = 3$), $(1, 3) \sim (g, 2)$ (pois $1 = gg^{-1}$ e $\alpha_{g^{-1}}(3) = 2$) e $(g, 3) \sim (g^{-1}, 2)$ (pois $g = g^{-1}g^{-1}$ e $\alpha_{g^{-1}}(3) = 2$), as $\sim$-classes de equivalência distintas são: $[1, 1] = \{(1, 1), (g^{-1}, 1), (g, 1)\}$, $[1, 2] = \{(1, 2), (g^{-1}, 3)\}$, $[1, 3] = \{(1, 3), (g, 2)\}$ e $[g, 3] = \{(g, 3), (g^{-1}, 2)\}$.

Então, $X_{(G)} = \{[1, 1], [1, 2], [1, 3], [g, 3]\}$, $\iota : X \longrightarrow X_{(G)}$, dada por $\iota(x) = [1, x]$ e

$\beta : G \longrightarrow I(X_{(G)})$ que associa para cada $g \in G$ $\beta_g : X_{(G)} \longrightarrow X_{(G)}$ dada por $\beta_g([h,x]) = [gh,x]$. Portanto,
$\beta_1 = Id_{X_{(G)}}$,
$\beta_g([1,1]) = [g,1] = [1,1]$,
$\beta_g([1,2]) = [g,2] = [1,3]$,
$\beta_g([1,3]) = [g,3]$,
$\beta_g([g,3]) = [g^{-1},3] = [1,2]$,
$\beta_{g^{-1}}([1,1]) = [g^{-1},1] = [1,1]$,
$\beta_{g^{-1}}([1,2]) = [g^{-1},2] = [g,3]$,
$\beta_{g^{-1}}([1,3]) = [g^{-1},3] = [1,2]$,
$\beta_{g^{-1}}([g,3]) = [1,3]$.
Observe que sem levar em consideração os elementos de $X_{(G)}$ temos que β coincide com $\beta' : G \longrightarrow Y_G$, onde $Y = \{1,2,3,4\}$ e $\beta'_g = (234)$.

Capítulo 2

A Correspondência

O objetivo deste capítulo é provar que para cada grupo G está associado um semigrupo inverso $S(G)$ e que as ações parciais de G sobre um conjunto X estão em correspondência uma a uma com as ações do semigrupo $S(G)$ sobre X. Esses resultados foram provados por R. Exel e compreendem as quatro primeiras seções de [9].

2.1 O Semigrupo Universal $S(G)$

Nesta seção G denotará um grupo fixado com elemento identidade 1. Denotaremos os elementos do grupo com as letras $s, t, \cdots$, pois estará associado ao grupo um semigrupo universal $S(G)$ definido via geradores e relações como segue. Para cada elemento $t \in G$ tomamos um gerador $[t]$. Para cada par de elementos $s, t \in G$ consideramos as relações:
(1) $[s^{-1}][s][t] = [s^{-1}][st]$,
(2) $[s][t][t^{-1}] = [st][t^{-1}]$,
(3) $[s][1] = [s]$.

Note que como consequência imediata de (1) e (3) obtemos $[t][t^{-1}][t] = [t]$. Disso e de (2) segue que $[1][s] = [s]$. A relação anterior nos dá uma primeira indicação de que $S(G)$ é de fato um semigrupo inverso.

Exemplo: Seja $G = \langle s;\ s^2 = 1\rangle = \{1, s\}$. Então, $S(G) = \{[1], [s], [s][s]\}$, pois $[s][s][s] = [s][ss] = [s][1] = [s]$.

De maneira geral, dado um grupo finito G, não é fácil (ainda) calcular os elementos de $S(G)$, visto que, em $S(G)$ estão todas as sequências finitas da forma $[s_1][s_2]\cdots[s_n]$ com $s_j \in G$, para todo $1 \leq j \leq n$ e $n \in \mathbb{N}$. Veremos no decorrer deste capítulo, que cada elemento de $S(G)$ possui uma única decomposição padrão. Tal decomposição nos permitirá construir outros exemplos, o que faremos no final desta seção.

A proposição abaixo segue diretamente da propriedade universal de semigrupos definidos via geradores e relações.

Proposição 2.1.1. *Dados um semigrupo S e uma função $f : G \longrightarrow S$ satisfazendo*
(1) $f(s^{-1})f(s)f(t) = f(s^{-1})f(st)$,
(2) $f(s)f(t)f(t^{-1}) = f(st)f(t^{-1})$ *e*
(3) $f(s)f(1) = f(s)$,
existe um único homomorfismo $\widetilde{f} : S(G) \longrightarrow S$ tal que $\widetilde{f}([t]) = f(t)$.

Essa proposição será importante no decorrer deste capítulo, sendo usada sempre que precisarmos mostrar a existência de um homomorfismo de $S(G)$ em S. Dados S e T semigrupos inversos, dizemos que $\varphi : S \longrightarrow T$ é um anti-homomorfismo se $\varphi(st) = \varphi(t)\varphi(s)$ para quaisquer $s, t \in S$. Além disso, se $\varphi(\varphi(s)) = s$, para todo $s \in S$, então φ é chamado um anti-homomorfismo involutivo.

Proposição 2.1.2. *Existe um anti-homomorfismo involutivo $* : S(G) \longrightarrow S(G)$ tal que, para todo $t \in G$, $[t]^* = [t^{-1}]$.*

Prova: Seja $S(G)^{op}$ o semigrupo oposto, o qual coincide com $S(G)$ como conjunto e possui multiplicação dada por: $a \cdot b = ba$, para todo $a, b \in S(G)$, onde ba corresponde a multiplicação usual de $S(G)$. Definimos então, $f : G \longrightarrow S(G)^{op}$ dada por $f(t) = [t^{-1}]$. Sejam $s, t \in G$ assim $f(s^{-1}) \cdot f(s) \cdot f(t) = [(s^{-1})^{-1}] \cdot [s^{-1}] \cdot [t^{-1}] = [s] \cdot [s^{-1}] \cdot [t^{-1}] = ([s^{-1}][s]) \cdot [t^{-1}] = [t^{-1}][s^{-1}][s]$. Pelo item (2) da definição de $S(G)$, obtemos $f(s^{-1}) \cdot f(s) \cdot f(t) = [t^{-1}s^{-1}][s] = [(st)^{-1}][s] = f(st)f(s^{-1}) = f(s^{-1}) \cdot f(st)$. Usando raciocínio análogo mostra-se que $f(s) \cdot f(t) \cdot f(t^{-1}) = f(st) \cdot f(t^{-1})$ e $f(s) \cdot f(1) = f(s)$. Portanto, a função f satisfaz as condições $(1) - (3)$ da Proposição 2.1.1. Assim existe único homomorfismo $* : S(G) \longrightarrow S(G)^{op}$ tal que $(* \circ [\ ])(t) = f(t)$, ou equivalentemente $[t]^* = [t^{-1}]$. Vamos olhar o homomorfismo $*$ como função de $S(G)$ em si mesmo, e não no semigrupo oposto. Se $s, t \in G$ então $([s][t])^* = [s]^* \cdot [t]^* = f(s) \cdot f(t) = [s^{-1}] \cdot [t^{-1}] = [t^{-1}][s^{-1}] = [t]^*[s]^*$. Além disso, $([t]^*)^* = (f(t))^* = [t^{-1}]^* =$

$f(t^{-1}) = [(t^{-1})^{-1}] = [t]$. Assim, $* : S(G) \longrightarrow S(G)$ é um anti-homomorfismo involutivo. $\square$

A proposição que segue investigará os idempotentes de $S(G)$.

Proposição 2.1.3. *Dado $t \in G$ considere $\varepsilon_t = [t][t^{-1}]$. Então, para quaisquer $s, t \in G$ temos:*
(1) ε_t é um idempotente auto-adjunto, isto é, $\varepsilon_t^* = \varepsilon_t = \varepsilon_t^2$;
(2) $[t]\varepsilon_s = \varepsilon_{ts}[t]$;
(3) ε_t e ε_s comutam.

Prova: (1) Seja $t \in G$. Então $\varepsilon_t^2 = ([t][t^{-1}])([t][t^{-1}]) = ([t][t^{-1}][t])[t^{-1}] = [t][t^{-1}] = \varepsilon_t$ e $\varepsilon_t^* = ([t][t^{-1}])^* = [t^{-1}]^*[t]^* = [(t^{-1})^{-1}][t^{-1}] = [t][t^{-1}] = \varepsilon_t$. Logo, $\varepsilon_t^* = \varepsilon_t = \varepsilon_t^2$.
(2) Sejam $s, t \in G$. Então $\varepsilon_{ts}[t] = [ts][s^{-1}t^{-1}][t] = [ts][s^{-1}] = [t]\varepsilon_s$.
(3) Usando (2) obtemos $\varepsilon_t\varepsilon_s = [t][t^{-1}]\varepsilon_s = [t]\varepsilon_{t^{-1}s}[t^{-1}] = \varepsilon_{t(t^{-1}s)}[t][t^{-1}] = \varepsilon_s\varepsilon_t$. $\square$

Proposição 2.1.4. *Todo elemento $a \in S(G)$ admite uma decomposição na forma*

$$a = \varepsilon_{r_1}\varepsilon_{r_2}\cdots\varepsilon_{r_n}[s]$$

onde $n \geq 0$ e $r_1, r_2, \cdots, r_n$ são elementos de G. Além disso, podemos assumir que:
(1) $r_i \neq r_j$ para $i \neq j$;
(2) $r_i \neq s$ e $r_i \neq 1$, para todo $i = 1, 2, \cdots, n$.

Prova: Seja S um subconjunto de $S(G)$ composto dos elementos $a \in S(G)$ que admitem uma decomposição como acima. Como $n = 0$ é descartado, temos que cada $a = [s]$ pertence a S. Assim $S \neq \emptyset$. Para mostrarmos o resultado é suficiente verificar que S é um subsemigrupo de $S(G)$, pois os $[s]$'s são os geradores de $S(G)$. Sendo assim, sejam $a = \varepsilon_r[s]$ e $b = \varepsilon_u[t]$ em S. Mostremos que ab está em S. De fato, $ab = \varepsilon_r[s]\varepsilon_u[t] = \varepsilon_r\varepsilon_{su}[s][t]$. Note que: $[s][t] = [s][s^{-1}][s][t] = [s][s^{-1}][st] = \varepsilon_s[st]$. Assim, $ab = \varepsilon_r\varepsilon_{su}\varepsilon_s[st]$. Agora, se tomarmos $a = \varepsilon_{r_1}\varepsilon_{r_2}\cdots\varepsilon_{r_n}[s]$ e $b = \varepsilon_{u_1}\varepsilon_{u_2}\cdots\varepsilon_{u_m}[t]$. Então temos que,

$$ab = \varepsilon_{r_1}\varepsilon_{r_2}\cdots\varepsilon_{r_n}[s]\varepsilon_{u_1}\varepsilon_{u_2}\cdots\varepsilon_{u_m}[t] = \varepsilon_{r_1}\varepsilon_{r_2}\cdots\varepsilon_{r_n}\varepsilon_{su_1}[s]\varepsilon_{u_2}\cdots\varepsilon_{u_m}[t] =$$
$$\varepsilon_{r_1}\varepsilon_{r_2}\cdots\varepsilon_{r_n}\varepsilon_{su_1}\varepsilon_{su_2}[s]\cdots\varepsilon_{u_m}[t] = \varepsilon_{r_1}\varepsilon_{r_2}\cdots\varepsilon_{r_n}\varepsilon_{su_1}\varepsilon_{su_2}\cdots\varepsilon_{su_m}[s][t] =$$
$$\varepsilon_{r_1}\varepsilon_{r_2}\cdots\varepsilon_{r_n}\varepsilon_{su_1}\varepsilon_{su_2}\cdots\varepsilon_{su_m}\varepsilon_s[st].$$

Logo quaisquer que sejam $a, b \in S$ temos $ab \in S$ e portanto S é um subsemigrupo de $S(G)$. Então todo elemento de $S(G)$ admite a decomposição dada acima.

Resta mostrarmos a última parte da Proposição. Como os ε_{r_j} comutam entre si, se tivermos $r_i = r_j,\ i < j$, então

$$a = \varepsilon_{r_1} \cdots \varepsilon_{r_i} \cdots \varepsilon_{r_j} \cdots \varepsilon_{r_n}[s] = \varepsilon_{r_1} \cdots \varepsilon_{r_i}\varepsilon_{r_j} \cdots \widehat{\varepsilon_{r_j}} \cdots \varepsilon_{r_n}[s] =$$
$$\varepsilon_{r_1} \cdots \varepsilon_{r_i}^2 \cdots \widehat{\varepsilon_{r_j}} \cdots \varepsilon_{r_n}[s] = \varepsilon_{r_1} \cdots \varepsilon_{r_i} \cdots \widehat{\varepsilon_{r_j}} \cdots \varepsilon_{r_n}[s].$$

Além disso, note que: dado $s \in G$, temos $[s]\varepsilon_1 = [s][1][1] = [s][1] = [s]$. Analogamente, $\varepsilon_1[s] = [s]$. Finalmente, suponha $r_i = s$. Então, $\varepsilon_{r_i} = [s][s^{-1}]$ e, novamente usando a comutatividade dos ε_r's, temos

$$a = \varepsilon_{r_1} \cdots \varepsilon_{r_i} \cdots \varepsilon_{r_n}[s] = \varepsilon_{r_1} \cdots \widehat{\varepsilon_{r_i}} \cdots \varepsilon_{r_n}\varepsilon_{r_i}[s] = \varepsilon_{r_1} \cdots \widehat{\varepsilon_{r_i}} \cdots \varepsilon_{r_n}[s][s^{-1}][s] =$$
$$\varepsilon_{r_1} \cdots \widehat{\varepsilon_{r_i}} \cdots \varepsilon_{r_n}[s].$$

Desta forma, podemos supor $r_i \neq r_j$ para $i \neq j$, $r_i \neq 1$ e $r_i \neq s$, para todo $i = 1, 2, \cdots, n$. □

Definição 2.1.5. *Se $a \in S(G)$ está escrito na forma $a = \varepsilon_{r_1}\varepsilon_{r_2} \cdots \varepsilon_{r_n}[s]$ e satisfaz as condições* (1) *e* (2) *da proposição acima, dizemos que a está na forma padrão.*

A próxima proposição apresenta mais algumas evidências de que $S(G)$ é um semigrupo inverso.

Proposição 2.1.6. *Para qualquer $a \in S(G)$ existe $a^* \in S(G)$ tal que $aa^*a = a$ e $a^*aa^* = a^*$.*

Prova: Seja $a \in S(G)$ escrito na forma padrão por $a = \varepsilon_{r_1}\varepsilon_{r_2} \cdots \varepsilon_{r_n}[s]$. Lembremos que $*$ é um anti-homomorfismo involutivo. Então, $a^* = (\varepsilon_{r_1}\varepsilon_{r_2} \cdots \varepsilon_{r_n}[s])^* = [s]^*\varepsilon_{r_n}^* \cdots \varepsilon_{r_2}^*\varepsilon_{r_1}^* = [s^{-1}]\varepsilon_{r_1}\varepsilon_{r_2} \cdots \varepsilon_{r_n}$. Logo,

$$aa^*a = \varepsilon_{r_1}\varepsilon_{r_2} \cdots \varepsilon_{r_n}[s][s^{-1}]\varepsilon_{r_1}\varepsilon_{r_2} \cdots \varepsilon_{r_n}\varepsilon_{r_1}\varepsilon_{r_2} \cdots \varepsilon_{r_n}[s] = \varepsilon_{r_1}\varepsilon_{r_2} \cdots \varepsilon_{r_n}[s] = a.$$

Agora, como $*$ é um anti-homomorfismo involutivo de $S(G)$ em $S(G)$ temos que $(aa^*a)^* = a^*$. Assim, $a^*(a^*)^*a^* = a^*$. Portanto, $a^*aa^* = a^*$ □

A proposição acima mostra que $S(G)$ é um semigrupo regular. Para demonstrarmos que $S(G)$ é de fato um semigrupo inverso, resta mostrar que os idempotentes de $S(G)$ comutam. Nossa próxima proposição caracterizará os idempotentes de $S(G)$ a partir da decomposição padrão. Para tanto definimos o homomorfismo de semigrupos $\partial : S(G) \longrightarrow G$ dado por $\partial([t]) = t$. Observe que dado $a = \varepsilon_{r_1}\varepsilon_{r_2} \cdots \varepsilon_{r_n}[s] \in S(G)$ então, $\partial(a) = \partial(\varepsilon_{r_1}\varepsilon_{r_2} \cdots \varepsilon_{r_n}[s]) = r_1r_1^{-1}r_2r_2^{-1} \cdots r_nr_n^{-1}s = s$. Para cada $a \in S(G)$ dizemos que $\partial(a)$ é o grau de a.

Proposição 2.1.7. *Um elemento* $a = \varepsilon_{r_1}\varepsilon_{r_2}\cdots\varepsilon_{r_n}[s]$ *em* $S(G)$ *é idempotente se, e somente se,* $s = 1$*. Ou seja,* $E(S(G)) = \langle \varepsilon_{r_i}\,;\ r_i \in G,\ i \in \mathbb{N}\rangle$*.*

Prova: ($\Rightarrow$) Seja $a = \varepsilon_{r_1}\varepsilon_{r_2}\cdots\varepsilon_{r_n}[s]$ em $S(G)$ tal que $a^2 = a$. Assim, $\partial(a^2) = \partial(a)$. Mas, $a^2 = \varepsilon_{r_1}\varepsilon_{r_2}\cdots\varepsilon_{r_n}[s]\varepsilon_{r_1}\varepsilon_{r_2}\cdots\varepsilon_{r_n}[s] = \varepsilon_{r_1}\varepsilon_{r_2}\cdots\varepsilon_{r_n}\varepsilon_{sr_1}[s]\varepsilon_{r_2}\cdots\varepsilon_{r_n}[s] = \varepsilon_{r_1}\varepsilon_{r_2}\cdots\varepsilon_{r_n}\varepsilon_{sr_1}\varepsilon_{sr_2}\cdots\varepsilon_{sr_n}[s][s]$. Logo, $\partial(a^2) = \partial(\varepsilon_{r_1}\varepsilon_{r_2}\cdots\varepsilon_{r_n}\varepsilon_{sr_1}\varepsilon_{sr_2}\cdots\varepsilon_{sr_n}[s][s]) = ss = s^2 = \partial(a) = s$. Daí, $s^2 = s$ e como $s \in G$ temos que $s = 1$. Portanto, $a = \varepsilon_{r_1}\varepsilon_{r_2}\cdots\varepsilon_{r_n}$.
($\Leftarrow$) Se $a = \varepsilon_{r_1}\varepsilon_{r_2}\cdots\varepsilon_{r_n}$ então, $a^2 = \varepsilon_{r_1}\varepsilon_{r_2}\cdots\varepsilon_{r_n}\varepsilon_{r_1}\varepsilon_{r_2}\cdots\varepsilon_{r_n} = \varepsilon_{r_1}\varepsilon_{r_2}\cdots\varepsilon_{r_n} = a$. Assim, $a \in E(S(G))$.
Portanto, $E(S(G)) = \langle \varepsilon_{r_i}\,;\ r_i \in G,\ i \in \mathbb{N}\rangle$. □

Corolário 2.1.8. *Se* G *é um grupo então os idempotentes de* $S(G)$ *comutam.*

Prova: Segue diretamente da Proposição 2.1.3 item (3) e da Proposição 2.1.7. □

Usando a Proposição 2.1.6 e o Corolário 2.1.8 temos que para cada grupo G, $S(G)$ é um semigrupo inverso.

Observação 2.1.9. (1) *Se* e *é um idempotente de* $S(G)$ *e* $x \in S(G)$ *é tal que* xe *também é idempotente então* $x \in E(S(G))$*. De fato, como* $e, xe \in E(S(G))$ *então, pela Proposição 2.1.7,* $e = \varepsilon_{r_1}\varepsilon_{r_2}\cdots\varepsilon_{r_n}$ *e* $xe = \varepsilon_{t_1}\varepsilon_{t_2}\cdots\varepsilon_{t_m}$*. Suponha* $x = \varepsilon_{p_1}\varepsilon_{p_2}\cdots\varepsilon_{p_l}[s]$ *em* $S(G)$*. Assim,* $1 = \partial(xe) = \partial(x)\partial(e) = s1 = s$*. Portanto,* $s = 1$*. Daí,* $x = \varepsilon_{p_1}\varepsilon_{p_2}\cdots\varepsilon_{p_l}$ *e assim* $x \in E(S(G))$*.*
(2) *Sejam* $e \in E(S(G))$ *e* $x \in S(G)$ *tais que* $e \leq x$*. Logo, pelo Lema 1.1.7, temos que* $e = xe^{-1}e = xe^2 = xe$*. Assim,* $xe \in E(S(G))$ *e pelo que vimos acima* $x \in E(S(G))$*. Portanto,* $S(G)$ *é um semigrupo E-unitário.*

Num semigrupo inverso os idempotentes comutam entre si. No entanto, os idempotentes não são, necessariamente, centrais. Quando isso ocorre temos uma outra classe de semigrupos.

Definição 2.1.10. *Um semigrupo inverso* S *é chamado semigrupo de Clifford se* $E(S) \subset Z(S) = \{s \in S\,;\ st = ts \text{ para todo } t \in S\}$*.*

Exemplo: Seja S um semigrupo inverso. Observe que $E(S)$ é um subsemigrupo inverso de S e que $E(E(S)) = E(S) \subset Z(E(S))$. Portanto, $E(S)$ é um semigrupo de Clifford, para todo semigrupo inverso S.

Observe que a classe dos semigrupos inversos contém a classe dos semigrupos de Clifford. Mostraremos a seguir que apesar de $S(G)$ ser um semigrupo inverso, $S(G)$ não é um semigrupo de Clifford. Para tanto precisamos primeiro mostrar que a decomposição padrão de todo elemento $a \in S(G)$ é única. Porém, resultados de unicidade em estruturas algébricas originadas por geradores e relações são difíceis de serem estabelecidos, a menos que possamos encontrar uma separação em famílias de representação. Isso será discutido abaixo.

Para nós, uma representação de $S(G)$ significará qualquer homomorfismo de $S(G)$ em um semigrupo. Assim, a função $\partial : S(G) \longrightarrow G$ dada por $\partial([t]) = t$ definida anteriormente é uma representação de $S(G)$. Uma representação mais interessante de $S(G)$ será obtida na sequência, com o auxílio da Proposição 2.1.1. Sejam $\mathcal{P}_1(G)$ o conjunto de todos os subconjuntos finitos de G que contém o elemento identidade 1 e $\mathcal{F}(\mathcal{P}_1(G)) = \{\phi : \mathcal{P}_1(G) \longrightarrow \mathcal{P}_1(G);\ \phi \text{ é função}\}$. Note que, $\mathcal{F}(\mathcal{P}_1(G))$ com a operação de composição de funções é um semigrupo. Na próxima proposição obtemos um homomorfismo de $S(G)$ no semigrupo $\mathcal{F}(\mathcal{P}_1(G))$, ou seja, uma outra representação de $S(G)$. Assim, para cada $t \in G$, denotaremos por ϕ_t a função $\phi_t : \mathcal{P}_1(G) \longrightarrow \mathcal{P}_1(G)$ dada por $\phi_t(A) = tA \cup \{1\}$. Aqui, $tA = \{ta;\ a \in A\}$. Observe que, como $1 \in A$, podemos também escrever: $\phi_t(A) = tA \cup \{1, t\}$.

Proposição 2.1.11. *Seja $\phi : G \longrightarrow \mathcal{F}(\mathcal{P}_1(G))$ a função que para cada $t \in G$ associa $\phi_t : \mathcal{P}_1(G) \longrightarrow \mathcal{P}_1(G)$, dada por $\phi_t(A) = tA \cup \{1, t\}$. Então, existe único homomorfismo de semigrupos $\Lambda : S(G) \longrightarrow \mathcal{F}(\mathcal{P}_1(G))$ tal que $\Lambda([t]) = \phi_t$.*

Prova: Sejam $s, t \in G$ e $A \in \mathcal{P}_1(G)$. Então, $\phi_{s^{-1}}\phi_s\phi_t(A) = \phi_{s^{-1}}\phi_s(\phi_t(A)) = \phi_{s^{-1}}\phi_s(tA \cup \{1, t\}) = \phi_{s^{-1}}(\phi_s(tA \cup \{1, t\})) = \phi_{s^{-1}}(s(tA \cup \{1, t\}) \cup \{1, s\}) = \phi_{s^{-1}}(stA \cup \{1, s, st\}) = s^{-1}(stA \cup \{1, s, st\}) \cup \{1, s^{-1}\} = tA \cup \{1, s^{-1}, t\} \cup \{1, s^{-1}\} = tA \cup \{1, s^{-1}, t\}$. Por outro lado, $\phi_{s^{-1}}\phi_{st}(A) = \phi_{s^{-1}}(\phi_{st}(A)) = \phi_{s^{-1}}(stA \cup \{1, st\}) = s^{-1}(stA \cup \{1, st\}) \cup \{1, s^{-1}\} = tA \cup \{s^{-1}, t\} \cup \{1, s^{-1}\} = tA \cup \{1, s^{-1}, t\}$. Logo, $\phi_{s^{-1}}\phi_s\phi_t = \phi_{s^{-1}}\phi_{st}$. Usando raciocínio análogo, mostra-se que $\phi_s\phi_t\phi_{t^{-1}} = \phi_{st}\phi_{t^{-1}}$ e $\phi_s\phi_1 = \phi_s$. Assim, a função ϕ satisfaz as condições $(1) - (3)$ da Proposição 2.1.1. Desta forma, existe um único homomorfismo $\Lambda : S(G) \longrightarrow \mathcal{F}(\mathcal{P}_1(G))$ tal que $\Lambda([t]) = \phi_t$. $\square$

Pela proposição acima $\Lambda : S(G) \longrightarrow \mathcal{F}(\mathcal{P}_1(G))$ é uma representação de $S(G)$. Observe que, para quaisquer $r \in G$ e $A \in \mathcal{P}_1(G)$ temos: $\Lambda(\varepsilon_r)(A) = A \cup \{r\}$. De fato, $\Lambda(\varepsilon_r)(A) = \Lambda([r][r^{-1}])(A) = \Lambda([r])\Lambda([r^{-1}])(A) = \Lambda([r])(\Lambda([r^{-1}])(A)) =$

$\Lambda([r])(\phi_{r^{-1}}(A)) = \Lambda([r])(r^{-1}A \cup \{1, r^{-1}\}) = \phi_r(r^{-1}A \cup \{1, r^{-1}\}) = r(r^{-1}A \cup \{1, r^{-1}\}) \cup \{1, r\} = A \cup \{1, r\} \cup \{1, r\} = A \cup \{1, r\}$. Em particular, se $a = \varepsilon_{r_1}\varepsilon_{r_2}\cdots\varepsilon_{r_n}[s]$ então, $\Lambda(a)(\{1\}) = \Lambda(\varepsilon_{r_1}\varepsilon_{r_2}\cdots\varepsilon_{r_n}[s])(\{1\}) = \Lambda(\varepsilon_{r_1})\Lambda(\varepsilon_{r_2})\cdots\Lambda(\varepsilon_{r_n})\Lambda([s])(\{1\}) =$
$(\Lambda(\varepsilon_{r_1})\Lambda(\varepsilon_{r_2})\cdots\Lambda(\varepsilon_{r_n}))(\Lambda([s])(\{1\})) = (\Lambda(\varepsilon_{r_1})\Lambda(\varepsilon_{r_2})\cdots\Lambda(\varepsilon_{r_n}))(\phi_s(\{1\})) =$
$(\Lambda(\varepsilon_{r_1})\Lambda(\varepsilon_{r_2})\cdots\Lambda(\varepsilon_{r_n}))(\{s, 1\}) = (\Lambda(\varepsilon_{r_1})\Lambda(\varepsilon_{r_2})\cdots\Lambda(\varepsilon_{r_n-1}))(\Lambda(\varepsilon_{r_n})(\{s, 1\})) =$
$(\Lambda(\varepsilon_{r_1})\Lambda(\varepsilon_{r_2})\cdots\Lambda(\varepsilon_{r_n-1}))(\{r_n, s, 1\}) = \{r_1, r_2, \cdots, r_n, s, 1\}$.

Baseada na existência dessas duas representações podemos provar a unicidade da decomposição padrão.

Proposição 2.1.12. *Qualquer que seja $a \in S(G)$ admite uma única decomposição padrão $a = \varepsilon_{r_1}\varepsilon_{r_2}\cdots\varepsilon_{r_n}[s]$ a menos da ordem dos ε_r's.*

Prova: Como observamos acima, $\Lambda(a)(\{1\}) = \{r_1, r_2, \cdots, r_n, s, 1\}$ e temos também que $\partial(a) = s$. Portanto, se tivermos outra decomposição padrão, $a = \varepsilon_{t_1}\varepsilon_{t_2}\cdots\varepsilon_{t_m}[u]$ então, temos: $\partial(a) = s$ e $\partial(a) = u$. Daí, $s = u$. Além disso, $\Lambda(a)(\{1\}) = \{r_1, r_2, \cdots, r_n, s, 1\}$ e $\Lambda(a)(\{1\}) = \{t_1, t_2, \cdots, t_m, u, 1\}$. Assim, $\{r_1, r_2, \cdots, r_n, s, 1\} = \{t_1, t_2, \cdots, t_m, u, 1\}$. Logo, $\{r_1, r_2, \cdots, r_n\} \backslash \{s, 1\} = \{t_1, t_2, \cdots, t_m\} \backslash \{u, 1\}$. Portanto, $\{r_1, r_2, \cdots, r_n\} = \{t_1, t_2, \cdots, t_m\}$. $\square$

Agora vamos verificar que $S(G)$ não é um semigrupo de Clifford. De fato, tome $a = \varepsilon_r[s] \in S(G)$ e $b = \varepsilon_t \in E(S(G))$, com $s \neq 1$. Então, $ab = \varepsilon_r[s]\varepsilon_t = \varepsilon_r\varepsilon_{st}[s]$ e $ba = \varepsilon_t\varepsilon_r[s]$. Assim, pela unicidade da decomposição padrão, segue que $ab = ba$ se, e somente se, $s = 1$(Absurdo!). Logo, $b \notin Z(S(G))$. Portanto, $S(G)$ não é um semigrupo de Clifford.

Exemplos: (1) Seja $G = \langle s;\ s^3 = 1\rangle = \{1, s, s^2\}$. Vamos construir o semigrupo inverso $S(G)$. Sabemos que todo elemento de $S(G)$ admite uma única decomposição padrão (ver Proposição 2.1.12). Daí, as possibilidades de elementos para $S(G)$ são:
$[1],\ [s],\ [s^2] = [s^{-1}]$,
$\varepsilon_s = [s][s^{-1}]$,
$\varepsilon_{s^{-1}} = [s^{-1}][s]$,
$\varepsilon_s[s^{-1}] = [s][s^{-1}][s^{-1}] = [s][s]$,
$\varepsilon_{s^{-1}}[s] = [s^{-1}][s][s] = [s^{-1}][s^{-1}]$,
$\varepsilon_s\varepsilon_{s^{-1}} = [s][s^{-1}][s^{-1}][s] = [s][s][s]$.
Logo, $S(G) = \{[1], [s], [s^{-1}], \varepsilon_s, \varepsilon_{s^{-1}}, \varepsilon_s[s^{-1}], \varepsilon_{s^{-1}}[s], \varepsilon_s\varepsilon_{s^{-1}}\}$.

(2) Seja G o grupo de Klein, cuja tábua é a seguinte:

	1	s	t	st
1	1	s	t	st
s	s	1	st	t
t	t	st	1	s
st	st	t	s	1

Vamos construir o semigrupo inverso $S(G)$. Como todo elemento de $S(G)$ admite uma única decomposição padrão e além disso $\varepsilon_s\varepsilon_t = \varepsilon_t\varepsilon_s$, para todo $s, t \in G$, então os elementos de $S(G)$ são:

$[1],\ [s],\ [t],\ [st]$,
$\varepsilon_s = [s][s]$,
$\varepsilon_t = [t][t]$,
$\varepsilon_{st} = [st][st]$,
$\varepsilon_s[t] = [s][s][t] = [s][st]$,
$\varepsilon_s[st] = [s][s][st] = [s][t]$,
$\varepsilon_t[s] = [t][t][s] = [t][st]$,
$\varepsilon_t[st] = [t][t][st] = [t][s]$,
$\varepsilon_{st}[s] = [st][st][s] = [st][t]$,
$\varepsilon_{st}[t] = [st][st][t] = [st][s]$,
$\varepsilon_s\varepsilon_t = [s][s][t][t] = [s][st][t]$,
$\varepsilon_s\varepsilon_t[st] = [s][s][t][t][st] = [s][s][t][s] = [s][st][s]$,
$\varepsilon_s\varepsilon_{st} = [s][s][st][st] = [s][t][st]$,
$\varepsilon_s\varepsilon_{st}[t] = [s][s][st][st][t] = [s][s][st][s] = [s][t][s]$,
$\varepsilon_t\varepsilon_{st} = [t][t][st][st] = [t][s][st]$,
$\varepsilon_t\varepsilon_{st}[s] = [t][t][st][st][s] = [t][t][st][t] = [t][s][t]$,
$\varepsilon_s\varepsilon_t\varepsilon_{st} = [s][s][t][t][st][st] = [s][st][s][st]$.

Portanto $S(G) = \{[1],\ [s],\ [t],\ [st],\ \varepsilon_s,\ \varepsilon_t,\ \varepsilon_{st},\ \varepsilon_s[t],\ \varepsilon_s[st],\ \varepsilon_t[s],\ \varepsilon_t[st],\ \varepsilon_{st}[s],\ \varepsilon_{st}[t],\ \varepsilon_s\varepsilon_t,\ \varepsilon_s\varepsilon_t[st],\ \varepsilon_s\varepsilon_{st},\ \varepsilon_s\varepsilon_{st}[t],\ \varepsilon_t\varepsilon_{st},\ \varepsilon_t\varepsilon_{st}[s],\ \varepsilon_s\varepsilon_t\varepsilon_{st}\}$.

2.2 O Teorema da Correspondência

Na seção anterior mostramos que $S(G)$ é um semigrupo inverso. Agora mostraremos que as ações de $S(G)$ sobre um conjunto X estão em correspondência uma a uma com as ações parciais de G em X.

Nesta seção uma ação parcial de G em X é uma função $\alpha : G \longrightarrow I(X)$ satisfazendos as condições da Definição 1.2.3. A proposição seguinte nos dá condições necessárias e suficientes sobre as bijeções parciais para que uma função de G em $I(X)$ seja uma ação parcial de G em X ([9, Proposição 4.1]).

Proposição 2.2.1. *Sejam G um grupo e X um conjunto. A função $\alpha : G \longrightarrow I(X)$ é uma ação parcial de G em X se, e somente se, para quaisquer $s, t \in G$ temos:*
(1) $\alpha_s \alpha_t \alpha_{t^{-1}} = \alpha_{st} \alpha_{t^{-1}}$,
(2) $\alpha_1 = Id_X$.

Neste caso, α também satisfaz:
(3) $\alpha_{s^{-1}} \alpha_s \alpha_t = \alpha_{s^{-1}} \alpha_{st}$.

Prova: ($\Rightarrow$) Assuma que $\alpha : G \longrightarrow I(X)$ é uma ação parcial de G em X. O item (2) segue diretamente da definição de ação parcial. Resta mostrar então (1) e (3). Mostremos que $\alpha_s \alpha_t \alpha_{t^{-1}} = \alpha_{st} \alpha_{t^{-1}}$, para quaisquer $s, t \in G$. Para tanto, mostremos primeiro que $dom(\alpha_s \alpha_t \alpha_{t^{-1}}) = dom(\alpha_{st} \alpha_{t^{-1}})$. Com efeito, observe que $\alpha_t \alpha_{t^{-1}} = Id_{X_t}$. Assim, $dom(\alpha_s \alpha_t \alpha_{t^{-1}}) = X_t \cap X_{s^{-1}}$. Por outro lado, $dom(\alpha_{st} \alpha_{t^{-1}}) = \alpha_{t^{-1}}^{-1}(X_{t^{-1}} \cap X_{(st)^{-1}}) = \alpha_t(X_{t^{-1}} \cap X_{(st)^{-1}})$. Pela condição $(2)'$ da Definição 1.2.3, obtemos que $dom(\alpha_{st} \alpha_{t^{-1}}) = X_t \cap X_{t(st)^{-1}} = X_t \cap X_{s^{-1}}$. Portanto, $dom(\alpha_s \alpha_t \alpha_{t^{-1}}) = dom(\alpha_{st} \alpha_{t^{-1}})$. Agora, seja $x \in X_t \cap X_{s^{-1}}$. Então, pela condição $(3)'$ da Definição 1.2.3 temos que $(\alpha_s \alpha_t \alpha_{t^{-1}})(x) = \alpha_s(x)$ e $(\alpha_{st} \alpha_{t^{-1}})(x) = \alpha_s(x)$. Daí, $\alpha_s \alpha_t \alpha_{t^{-1}} = \alpha_{st} \alpha_{t^{-1}}$, para quaisquer $s, t \in G$.
Mostremos que $\alpha_{s^{-1}} \alpha_s \alpha_t = \alpha_{s^{-1}} \alpha_{st}$. De fato, pelo que foi feito acima temos que $\alpha_{t^{-1}} \alpha_{s^{-1}} \alpha_s = \alpha_{t^{-1}s^{-1}} \alpha_s$. Além disso, lembremos que $\alpha_t^{-1} = \alpha_{t^{-1}}$. Então $\alpha_{s^{-1}} \alpha_s \alpha_t = (\alpha_{t^{-1}} \alpha_{s^{-1}} \alpha_s)^{-1} = (\alpha_{t^{-1}s^{-1}} \alpha_s)^{-1} = \alpha_{s^{-1}} \alpha_{st}$.

($\Leftarrow$) O item (1) da definição de ação parcial segue diretamente das hipóteses.
Tomando $s = t^{-1}$ em (1), temos que $\alpha_{t^{-1}} \alpha_t \alpha_{t^{-1}} = \alpha_{t^{-1}t} \alpha_{t^{-1}} = \alpha_1 \alpha_{t^{-1}} = \alpha_{t^{-1}}$. Além disso, substituindo t por t^{-1}, temos também: $\alpha_t \alpha_{t^{-1}} \alpha_t = \alpha_t$. Pela unicidade do inverso, concluímos que $\alpha_t^* = \alpha_{t^{-1}}$. Defina $X_t = im(\alpha_t)$. Portanto, $dom(\alpha_t) = im(\alpha_t^*) = im(\alpha_{t^{-1}}) = X_{t^{-1}}$. Então, $\alpha_t : X_{t^{-1}} \longrightarrow X_t$ como queríamos. Para quaisquer $s, t \in G$ temos: $\alpha_{t^{-1}} \alpha_{s^{-1}} = \alpha_{t^{-1}} \alpha_{s^{-1}} \alpha_s \alpha_{s^{-1}} = \alpha_{t^{-1}s^{-1}} \alpha_s \alpha_{s^{-1}}$. Em particular, os domínios dessas funções são iguais. Observe primeiro que $dom(\alpha_{t^{-1}} \alpha_{s^{-1}}) = \alpha_{s^{-1}}^{-1}(X_{s^{-1}} \cap X_t) = \alpha_s(X_{s^{-1}} \cap X_t)$. Por outro lado, como $\alpha_s \alpha_{s^{-1}} = Id_{X_s}$ então $dom(\alpha_{(st)^{-1}} \alpha_s \alpha_{s^{-1}}) = X_s \cap X_{st}$. Logo, $\alpha_s(X_{s^{-1}} \cap X_t) = X_s \cap X_{st}$ e essa é exatamente a condição $(2)'$ da Definição 1.2.3. Temos que $dom(\alpha_{(st)^{-1}} \alpha_s \alpha_{s^{-1}}) = X_s \cap X_{st}$

e $\alpha_{t^{-1}}\alpha_{s^{-1}}(x) = \alpha_{t^{-1}s^{-1}}\alpha_s\alpha_{s^{-1}}(x)$, para todo $x \in X_s \cap X_{st}$. Substituindo s por s^{-1} e t por t^{-1}, obtemos $dom(\alpha_{(st)}\alpha_{s^{-1}}\alpha_s) = X_{s^{-1}} \cap X_{s^{-1}t^{-1}}$ e $\alpha_t\alpha_s(x) = \alpha_{ts}\alpha_{s^{-1}}\alpha_s(x)$, para todo $x \in X_{s^{-1}} \cap X_{s^{-1}t^{-1}}$. Tome $x \in X_{s^{-1}} \cap X_{s^{-1}t^{-1}}$. Como $\alpha_{s^{-1}}\alpha_s = Id_{X_{s^{-1}}}$ e $x \in X_{s^{-1}}$ então $(\alpha_t\alpha_s)(x) = \alpha_{ts}(x)$, para todo $x \in X_{s^{-1}} \cap X_{(ts)^{-1}}$ e essa é a condição $(3)'$ da Definição 1.2.3. Logo, $\alpha : G \longrightarrow I(X)$ é uma ação parcial de G em X. $\square$

A proposição anterior caracteriza as ações parciais de um grupo G num conjunto X em termos da estrutura do semigrupo inverso $I(X)$. No que segue, uma ação de um semigrupo (de um monóide) S em um conjunto X significará um homomorfismo de semigrupos (de monóide) de S em $I(X)$. Agora estamos prontos para demonstrar o principal resultado desta seção.

Teorema 2.2.2. *Para cada grupo G e qualquer conjunto X existe uma correspondência uma a uma entre as ações parciais de G em X e as ações de $S(G)$ em X.*

Prova: Primeiro mostremos que para cada ação parcial de G em X corresponde uma única ação de $S(G)$ em X. Com efeito, dada uma ação parcial α de G em X, pela proposição anterior, temos que:
(1) $\alpha_{s^{-1}}\alpha_s\alpha_t = \alpha_{s^{-1}}\alpha_{st}$,
(2) $\alpha_s\alpha_t\alpha_{t^{-1}} = \alpha_{st}\alpha_{t^{-1}}$,
(3) $\alpha_s\alpha_1 = \alpha_s$, para todo $s, t \in G$.
Assim, α satisfaz as condições $(1) - (3)$ da Proposição 2.1.1. Portanto, existe um único homomorfismo $\widetilde{\alpha} : S(G) \longrightarrow I(X)$ tal que $\widetilde{\alpha}([t]) = \alpha_t$.
Reciprocamente, seja $\beta : S(G) \longrightarrow I(X)$ um homomorfismo de monóide. Defina $\alpha : G \longrightarrow I(X)$ por $\alpha(t) = \alpha_t = \beta([t])$. Assim, temos $\alpha(1) = \alpha_1 = \beta([1]) = Id_X$. Além disso, $\alpha_s\alpha_t\alpha_{t^{-1}} = \beta([s])\beta([t])\beta([t^{-1}])$. Como β é homomorfismo, obtemos: $\alpha_s\alpha_t\alpha_{t^{-1}} = \beta([s][t][t^{-1}]) = \beta([st][t^{-1}]) = \beta([st])\beta([t^{-1}]) = \alpha_{st}\alpha_{t^{-1}}$. Analogamente, $\alpha_{s^{-1}}\alpha_s\alpha_t = \alpha_{s^{-1}}\alpha_{st}$. Assim, pela proposição anterior, α é uma ação parcial de G em X. Logo, pelo que foi feito anteriormente, temos que $\widetilde{\alpha} : S(G) \longrightarrow I(X)$ dada por $\widetilde{\alpha}([t]) = \alpha_t$ é a única ação (global) de $S(G)$ em X. Portanto, segue que $\widetilde{\alpha} = \beta$. $\square$

Exemplo: Sejam $G = \langle s;\ s^3 = 1\rangle = \{1, s, s^2\}$, $X = \{1, 2, 3\}$, $X_s = \{1, 3\}$ e $X_{s^{-1}} = \{1, 2\}$. Considere a ação parcial $\alpha : G \longrightarrow I(X)$ dada por $\alpha_1 = Id_X$, $\alpha_s : X_{s^{-1}} \longrightarrow X_s$, com $\alpha_s(1) = 1$ e $\alpha_s(2) = 3$, e $\alpha_{s^{-1}} : X_s \longrightarrow X_s^{-1}$, com $\alpha_{s^{-1}}(1) = 1$ e $\alpha_{s^{-1}}(3) = 2$. Vamos construir $\widetilde{\alpha} : S(G) \longrightarrow I(X)$.

Lembremos que $S(G) = \{[1], [s], [s^{-1}], [s][s^{-1}], [s^{-1}][s], [s][s], [s^{-1}][s^{-1}], [s][s][s]\}$. Pelo Teorema 2.2.2 temos que $\widetilde{\alpha}([t]) = \alpha_t$, para todo $t \in G$. Então, temos que $\widetilde{\alpha}([1]) = \alpha_1 = Id_X$, $\widetilde{\alpha}([s]) = \alpha_s$, $\widetilde{\alpha}([s^{-1}]) = \alpha_{s^{-1}}$, $\widetilde{\alpha}([s][s^{-1}]) = \alpha_s \alpha_{s^{-1}} = Id_{X_s}$, $\widetilde{\alpha}([s^{-1}][s]) = \alpha_{s^{-1}} \alpha_s = Id_{X_{s^{-1}}}$, $\widetilde{\alpha}([s][s]) = \alpha_s \alpha_s$, $\widetilde{\alpha}([s^{-1}][s^{-1}]) = \alpha_{s^{-1}} \alpha_{s^{-1}}$ e $\widetilde{\alpha}([s][s][s]) = \alpha_s \alpha_s \alpha_s$.

Capítulo 3

Os Isomorfismos

Iniciamos este capítulo construindo a expansão de Birget-Rhodes de um semigrupo e mostramos também alguns resultados no caso particular de grupo (resultados obtidos em [20]). Na seção seguinte, provamos que o semigrupo universal $S(G)$, associado ao grupo G e construído no capítulo anterior, é isomorfo a expansão de Birget-Rhodes de G ([15, Teorema 2.4]). Por fim, apresentamos resultados de [10] que estabelecem um isomorfismo entre $R \star_{\alpha} G$ e $(R \star_{\widetilde{\alpha}} \widetilde{G})/I$, onde α é uma ação parcial de G em R, $\widetilde{\alpha}$ é a respectiva ação de $\widetilde{G}$ em R e I é um ideal de $R \star_{\widetilde{\alpha}} \widetilde{G}$.

3.1 A expansão de Birget-Rhodes

No capítulo 1 construímos o monóide inverso $\widetilde{G}$ e vimos que $\widetilde{G}/\sigma \simeq G$. Portanto G é imagem homomórfica do semigrupo $\widetilde{G}$. Isso nos mostra que $\widetilde{G}$ é uma expansão (ver [3]) do grupo G. Nesta seção, dado um semigrupo S construiremos um semigrupo $\widetilde{S}^R$. Em particular, quando S for igual a um grupo G teremos que $\widetilde{G}^R = \widetilde{G}$. Provaremos também que $\widetilde{G}$ é um monóide F-inverso.

Seja S um semigrupo. Denotamos por S^1 o monóide construído a partir de S pela inclusão de uma identidade (se necessário). Isto é, $S^1 = S \cup \{1\}$ e o produto em S^1 é o produto de S juntamente com: $1s = s1 = s$, para todo $s \in S^1$. Então, S^1 é um monóide. Para qualquer sequência finita $(s_1, s_2, \cdots, s_k)$, $s_i \in S$, para todo $i = 1, 2, \cdots, k$, considere $\mathcal{P}(s_1, s_2, \cdots, s_k) = \{1, s_1, s_1s_2, \cdots, s_1s_2\cdots s_k\}$, onde 1 é a identidade de S^1.

Defina

$$\widetilde{S}^R = \{(\mathcal{P}(s_1, s_2, \cdots, s_k), s_1 s_2 \cdots s_k);\ s_1, s_2, \cdots, s_k \in S, k \geq 1\},$$

com multiplicação dada por:

$$(\mathcal{P}(s_1, s_2, \cdots, s_k), s_1 s_2 \cdots s_k)(\mathcal{P}(t_1, t_2, \cdots t_m), t_1 t_2 \cdots t_m) =$$
$$(\mathcal{P}(s_1, s_2, \cdots, s_k) \cup (s_1 s_2 \cdots s_k)\mathcal{P}(t_1, t_2, \cdots, t_m), s_1 s_2 \cdots s_k t_1 t_2 \cdots t_m),$$

onde $sU = \{su; u \in U\}$, para todo $s \in S$ e $U \subset S$.

Note que a multiplicação está bem definida, pois

$$(\mathcal{P}(s_1, s_2, \cdots, s_k), s_1 s_2 \cdots s_k)(\mathcal{P}(t_1, t_2, \cdots t_m), t_1 t_2 \cdots t_m) =$$
$$(\mathcal{P}(s_1, s_2, \cdots, s_k, t_1, t_2, \cdots, t_m),\ s_1 s_2 \cdots s_k t_1 t_2 \cdots t_m) \in \widetilde{S}^R.$$

É fácil ver que $\widetilde{S}^R$ com essa multiplicação é um semigrupo, ou seja, que a operação definida acima é associativa. Agora, considere $\eta : \widetilde{S}^R \longrightarrow S$ definida por $\eta((\mathcal{P}(s_1, s_2, \cdots, s_k),\ s_1 s_2 \cdots s_k)) = s_1 s_2 \cdots s_k$. Mostremos que η é um homomorfismo de semigrupos. Sejam $(\mathcal{P}(s_1, s_2, \cdots, s_k), s_1 s_2 \cdots s_k)$, $(\mathcal{P}(t_1, t_2, \cdots, t_m), t_1 t_2 \cdots t_m) \in \widetilde{S}^R$. Então,

$$\eta((\mathcal{P}(s_1, s_2, \cdots, s_k), s_1 s_2 \cdots s_k))\eta((\mathcal{P}(t_1, t_2, \cdots, t_m), t_1 t_2 \cdots t_m)) =$$
$$s_1 s_2 \cdots s_k t_1 t_2 \cdots t_m.$$

Por outro lado,

$$\eta((\mathcal{P}(s_1, s_2, \cdots, s_k), s_1 s_2 \cdots s_k)(\mathcal{P}(t_1, t_2, \cdots, t_m), t_1 t_2 \cdots t_m)) =$$
$$\eta((\mathcal{P}(s_1, s_2, \cdots, s_k) \cup (s_1 s_2 \cdots s_k)\mathcal{P}(t_1, t_2, \cdots, t_m), s_1 s_2 \cdots s_k t_1 t_2 \cdots t_m)) =$$
$$s_1 s_2 \cdots s_k t_1 t_2 \cdots t_m.$$

Portanto, η é um homomorfismo que é claramente sobrejetor. Consequentemente, $\widetilde{S}^R/\ker(\eta) \simeq S$, onde $Ker(\eta) \subset \widetilde{S}^R \times \widetilde{S}^R$ é uma congruência.

O semigrupo $\widetilde{S}^R$ construído acima é denominado *a expansão de Birget-Rhodes do semigrupo S*. O leitor interessado nestas expansões de semigrupos pode consultar [3] ou [20].

Exemplos: (1) Seja $S = \{s_1, s_2, s_3\}$ com a seguinte operação: $s_1 s_2 = s_2 s_1 = s_2$, $s_1 s_3 = s_3 s_1 = s_3$, $s_2 s_2 = s_2$, $s_2 s_3 = s_3 s_2 = s_3$ e $s_3 s_3 = s_2$. Então, S com essa operação é um monóide inverso com $1_S = s_1$. Note que, $\mathcal{P}(s_1, s_{i_1}, \cdots, s_{i_k}) = \mathcal{P}(s_{i_1}, \cdots, s_{i_k})$. Então,

$$\mathcal{P}(s_2, s_{i_1}, \cdots, s_{i_k}) = \begin{cases} \mathcal{P}(s_2) = \{s_1, s_2\} \\ \mathcal{P}(s_2, s_3) = \{s_1, s_2, s_3\} \end{cases}$$

Da mesma forma, $\mathcal{P}(s_3, s_{i_1}, \cdots, s_{i_k}) = \{s_1, s_3, s_3 s_{i_1}, \cdots, s_3 s_{i_1} \cdots s_{i_k}\}$ e

$$\mathcal{P}(s_3, s_{i_1}, \cdots, s_{i_k}) = \begin{cases} \mathcal{P}(s_3) = \{s_1, s_3\} \\ \mathcal{P}(s_3, s_2) = \{s_1, s_3, s_2\} \end{cases}$$

Portanto, $\widetilde{S}^R = \{(\mathcal{P}(s_1), s_1), (\mathcal{P}(s_2), s_2), (\mathcal{P}(s_2, s_3), s_3), (\mathcal{P}(s_3), s_3), (\mathcal{P}(s_3, s_2), s_2)\}$.

(2) Sejam $H = \{0, 1\}$ e $S = H \times H = \{(i, j);\ i, j \in H\}$. Então, S é um semigrupo regular com a seguinte operação: $(i, j)(k, l) = (i, l)$. Daí, $S = \{s_1 = (0, 0), s_2 = (0, 1), s_3 = (1, 0), s_4 = (1, 1)\}$ e a tábua de multiplicação de S é dada por:

	s_1	s_2	s_3	s_4
s_1	s_1	s_2	s_1	s_2
s_2	s_1	s_2	s_1	s_2
s_3	s_3	s_4	s_3	s_4
s_4	s_3	s_4	s_3	s_4

Observe que $s_{i_1} s_{i_2} \cdots s_{i_n} = s_{i_1} s_{i_n}$. Então,

$$P(s_1, s_{i_1}, s_{i_2}, \cdots, s_{i_n}) = \begin{cases} P(s_1) \\ P(s_1, s_2) \end{cases}$$

De forma análoga,

$$P(s_2, s_{i_1}, s_{i_2}, \cdots, s_{i_n}) = \begin{cases} P(s_2) \\ P(s_2, s_1) \end{cases}$$

$$P(s_3, s_{i_1}, s_{i_2}, \cdots, s_{i_n}) = \begin{cases} P(s_3) \\ P(s_3, s_4) \end{cases}$$

e

$$P(s_4, s_{i_1}, s_{i_2}, \cdots, s_{i_n}) = \begin{cases} P(s_4) \\ P(s_4, s_3) \end{cases}$$

Assim, $\widetilde{S}^R = \{(P(s_1), s_1), (P(s_1, s_2), s_2), (P(s_2), s_2), (P(s_2, s_1), s_1), (P(s_3), s_3), (P(s_3, s_4), s_4), (P(s_4), s_4), (P(s_4, s_3), s_3)\}$.

Proposição 3.1.1. *Para cada grupo G temos $\widetilde{G}^R = \widetilde{G}$, onde $\widetilde{G} = \{(A, g) \in \mathcal{P}_1(G) \times G;\ g \in A\}$ com multiplicação dada por: $(A, g)(B, h) = (A \cup gB, gh)$. Além disso, $\widetilde{G}^R$ é um semigrupo F-inverso.*

Prova: Seja $(\mathcal{P}(g_1, g_2, \cdots, g_n), g_1g_2\cdots g_n) \in \widetilde{G}^R$. Assim, pela definição dada acima, $(\mathcal{P}(g_1, g_2, \cdots, g_n), g_1g_2\cdots g_n) = (\{1, g_1, g_1g_2, \cdots, g_1g_2\cdots g_n\}, g_1g_2\cdots g_m) \in \mathcal{P}_1(G) \times G$. Logo, $\widetilde{G}^R \subseteq \widetilde{G}$. Por outro lado, seja $(A, g) = (\{1, g_1, g_2, \cdots, g_k\}, g) \in \widetilde{G}$, com $g_k = g$. Então,

$$(\mathcal{P}(g_1, g_1^{-1}, g_2, g_2^{-1}, \cdots, g_k, g_k^{-1}, g), g_1g_1^{-1}g_2g_2^{-1}\cdots g_kg_k^{-1}g) =$$
$$(\{1, g_1, g_1g_1^{-1}, g_1g_1^{-1}g_2, \cdots, g_1g_1^{-1}\cdots g_kg_k^{-1}g\}, g) = (\{1, g_1, g_2, \cdots, g_k\}, g) = (A, g).$$

Daí, $\widetilde{G} \subseteq \widetilde{G}^R$. Portanto, $\widetilde{G}^R = \widetilde{G}$.

Conforme visto no exemplo da pág. 9, $\sigma = Ker(\varphi)$, onde σ é a congruência de grupo minimal e φ é a função de $\widetilde{G}$ em G dada por $\varphi(A, g) = g$. Então, para cada $(A, g) \in \widetilde{G}$, a σ-classe de (A, g) é dada por $\{(B, g) \in \mathcal{P}_1(G) \times \{g\};\ g \in B\}$. Observe que para qualquer $(B, g) \in \mathcal{P}_1(G) \times G$, com $g \in B$, temos $(B, 1)(\{1, g\}, g) = (B \cup \{1, g\}, g) = (B, g)$ e $(B, 1) \in E(\widetilde{G})$. Assim, $(B, g) \leq (\{1, g\}, g)$. Logo, $(\{1, g\}, g)$ é o elemento máximo da σ-classe de (A, g). Portanto, $\widetilde{G}$ é um monóide F-inverso. □

Como $\widetilde{G}$ é um monóide F-inverso então pelo Teorema 1.1.14 temos que $\widetilde{G}$ é um monóide E-unitário.

Exemplo: Seja $G = \langle g;\ g^3 = 1\rangle = \{1, g, g^2\}$. Pela proposição anterior, temos que $\widetilde{G}^R = \widetilde{G}$. Então,
$\widetilde{G} = \{(\{1\}, 1), (\{1, g\}, 1), (\{1, g\}, g), (\{1, g^2\}, 1), (\{1, g^2\}, g^2), (\{1, g, g^2\}, 1), (\{1, g, g^2\}, g), (\{1, g, g^2\}, g^2)\}$. Além disso, as σ-classes distintas de $\widetilde{G}$ são
$C_1 = \{(\{1\}, 1), (\{1, g\}, 1), (\{1, g^2\}, 1), (\{1, g, g^2\}, 1)\}$, $C_2 = \{(\{1, g\}, g), (\{1, g, g^2\}, g)\}$ e $C_3 = \{(\{1, g^2\}, g^2), (\{1, g, g^2\}, g^2)\}$.

No caso particular em que o semigrupo S é um grupo finito G, a caracte-rização dada pela Proposição 3.1.1, nos permite contar os elementos de $\widetilde{G}$.

Proposição 3.1.2. *Se G é um grupo finito de ordem n então $\widetilde{G}$ tem $2^{n-2}(n+1)$ elementos.*

Prova: Observe que existem 2^{n-1} elementos da forma $(A, 1)$ em $\widetilde{G}$. Daí, para $g \neq 1$ temos 2^{n-2} elementos da forma (A, g). Como existem $(n-1)$ possibilidades de escolha para $g \neq 1$, temos no total $2^{n-1} + (n-1)2^{n-2} = 2^{n-2}(n+1)$. □

Na próxima seção deste capítulo provaremos que $\widetilde{G} \simeq S(G)$. Então, o resultado acima corresponde à [9, Teorema 3.3].

3.2 $S(G) \simeq \widetilde{G}$

Nesta seção vamos mostrar que o semigrupo universal associado a um grupo G construído por Exel em [9] é isomorfo a expansão de Birget-Rhodes do grupo G. Além disso, vamos reobter o Teorema 2.2.2. Esses resultados foram provados por J. Kellendonk e M. V. Lawson na seção 2.1 de [14].

Na próxima proposição apresentamos uma generalização da Proposição 2.2.1, usando a noção de pré-morfismo.

Proposição 3.2.1. *Sejam G um grupo e S um monóide inverso. Então uma função $\alpha : G \longrightarrow S$ é um pré-morfismo unitário se, e somente se, as duas condições seguintes são satisfeitas:*
(1) $\alpha(1) = 1$,
(2) $\alpha(s)\alpha(t)\alpha(t^{-1}) = \alpha(st)\alpha(t^{-1})$, *para todo* $s, t \in G$.

Prova: ($\Rightarrow$) Seja $\alpha : G \longrightarrow S$ um pré-morfismo unitário. Precisamos mostrar a condição (2), pois (1) segue diretamente do fato do pré-morfismo α ser unitário. Como α é pré-morfismo então, $\alpha(s)\alpha(t) \leq \alpha(st)$, para quaisquer $s, t \in G$. Assim, $\alpha(s)\alpha(t)\alpha(t^{-1}) \leq \alpha(st)\alpha(t^{-1}) \leq \alpha(stt^{-1}) = \alpha(s)$. Daí, concluímos que $\alpha(st)\alpha(t^{-1}) \leq \alpha(s)$. Portanto, existe $e \in E(S)$ tal que $\alpha(st)\alpha(t^{-1}) = e\alpha(s)$. Logo,

$$\alpha(st)\alpha(t^{-1})\alpha(s)^{-1}\alpha(s) = e\alpha(s)\alpha(s)^{-1}\alpha(s) = e\alpha(s).$$

Então

$$\alpha(st)\alpha(t^{-1})\alpha(s)^{-1}\alpha(s) = \alpha(st)\alpha(t^{-1}). \tag{3.2.1}$$

Por outro lado, como $\alpha(s)\alpha(t)\alpha(t^{-1}) \leq \alpha(st)\alpha(t^{-1})$ então pelo Lema 1.1.7 temos

$$\alpha(s)\alpha(t)\alpha(t^{-1}) = \alpha(st)\alpha(t^{-1})(\alpha(s)\alpha(t)\alpha(t^{-1}))^{-1}(\alpha(s)\alpha(t)\alpha(t^{-1})) =$$
$$\alpha(st)\alpha(t^{-1})(\alpha(t)\alpha(t)^{-1})(\alpha(s)^{-1}\alpha(s))(\alpha(t)\alpha(t)^{-1}).$$

Observe que os elementos entre parênteses são idempotentes e S é semigrupo inverso, então eles comutam. Daí,

$$\alpha(s)\alpha(t)\alpha(t^{-1}) = \alpha(st)\alpha(t^{-1})(\alpha(s)^{-1}\alpha(s))(\alpha(t)\alpha(t)^{-1}\alpha(t))\alpha(t)^{-1} =$$
$$(\alpha(st)\alpha(t^{-1})\alpha(s)^{-1}\alpha(s))\alpha(t)\alpha(t)^{-1}.$$

Usando 3.2.1, segue que $\alpha(s)\alpha(t)\alpha(t^{-1}) = \alpha(st)\alpha(t^{-1})\alpha(t)\alpha(t)^{-1} = \alpha(st)\alpha(t^{-1})$.
($\Leftarrow$) Seja $\alpha : G \longrightarrow S$ uma função satisfazendo (1) e (2). Mostremos inicialmente que $\alpha(s)^{-1} = \alpha(s^{-1})$, para todo $s \in G$. Em $\alpha(s)\alpha(t)\alpha(t^{-1}) = \alpha(st)\alpha(t^{-1})$, substituindo s por t^{-1}, obtemos $\alpha(t^{-1})\alpha(t)\alpha(t^{-1}) = \alpha(t^{-1}t)\alpha(t^{-1}) = \alpha(1)\alpha(t^{-1}) =$

$\alpha(t^{-1})$. Porém se substituirmos s por t e t por t^{-1}, temos que $\alpha(t)\alpha(t^{-1})\alpha(t) = \alpha(tt^{-1})\alpha(t) = \alpha(1)\alpha(t) = \alpha(t)$. Portanto, pelo Teorema 1.1.4, $\alpha(t^{-1}) = \alpha(t)^{-1}$, para todo $t \in G$. Mostremos que $\alpha(s)\alpha(t) \leq \alpha(st)$, para quaisquer $s, t \in G$. De fato, pela condição (2) temos que $\alpha(s)\alpha(t)\alpha(t^{-1}) = \alpha(st)\alpha(t^{-1})$. Daí, $\alpha(s)\alpha(t)\alpha(t^{-1})\alpha(t) = \alpha(st)\alpha(t^{-1})\alpha(t)$. Como foi mostrado anteriormente, $\alpha(t^{-1}) = \alpha(t)^{-1}$. Assim, temos que $\alpha(s)\alpha(t) = \alpha(s)\alpha(t)\alpha(t^{-1})\alpha(t) = \alpha(st)\alpha(t^{-1})\alpha(t) = \alpha(st)\alpha(t)^{-1}\alpha(t)$. Mas $\alpha(t)^{-1}\alpha(t) \in E(S)$. Portanto, $\alpha(s)\alpha(t) \leq \alpha(st)$. Logo, $\alpha : G \longrightarrow S$ é um pré-morfismo e da condição (1) segue diretamente que α é unitário. $\square$

Corolário 3.2.2. *Sejam G um grupo, S um monóide inverso e $\alpha : G \longrightarrow S$ um pré-morfismo unitário. Então,*
(1) $\alpha(s)\alpha(t)\alpha(t^{-1}) = \alpha(st)\alpha(t^{-1})$,
(2) $\alpha(s^{-1})\alpha(s)\alpha(t) = \alpha(s^{-1})\alpha(st)$, *para todo $s, t \in G$.*

Prova: A condição (1) é imediata da proposição anterior. Substituindo s por t^{-1} e t por s^{-1} em (1), obtemos $\alpha(t^{-1})\alpha(s^{-1})\alpha(s) = \alpha(t^{-1}s^{-1})\alpha(s)$. Então, $\alpha(s^{-1})\alpha(s)\alpha(t) = (\alpha(t^{-1})\alpha(s^{-1})\alpha(s))^{-1} = (\alpha(t^{-1}s^{-1})\alpha(s))^{-1} = \alpha(s^{-1})\alpha(st)$. $\square$

No caso particular em que o monóide inverso S é $I(X)$, temos exatamente a Proposição 2.2.1 que foi provada por R. Exel em [9].

Vamos analisar a seguinte situação: sejam S um monóide F-inverso e σ a congruência de grupo minimal. Então, pelo Teorema 1.1.9, sabemos que S/σ é um grupo, que denotaremos por $G = S/\sigma$. Seja s_g o elemento máximo na σ-classe g. Defina $i : G \longrightarrow S$ por $i(g) = s_g$. Denotemos por 1_S a identidade do monóide inverso S. Note que $\sigma(1_S)\sigma(t) = \sigma(1_S t) = \sigma(t)$, para todo $t \in S$. Analogamente, $\sigma(t)\sigma(1_S) = \sigma(t)$. Portanto, a identidade de G é a σ-classe do elemento 1_S.

Como S é um monóide F-inverso então, pela Teorema 1.1.14, S é E-unitário. Assim, os elementos que estão relacionados por σ com a identidade são somente os idempotentes (ver Teorema 1.1.13). Isto é, $\sigma(1_S) = E(S)$. Além disso, dado $e \in \sigma(1_S)$ temos que $e \leq 1_S$, pois $e = e1_S$. Logo, 1_S é o elemento máximo de $\sigma(1_S)$. Portanto, $i(1) = 1_S$, onde $1 = \sigma(1_S)$. Considere $s_g \in g$, onde $g = \sigma(s)$ para algum $s \in S$ e $s_h \in h$, onde $h = \sigma(t)$ para algum $t \in S$. Então, $s_g \,\sigma\, s$ e $s_h \,\sigma\, t$. Como σ é uma congruência segue que $s_g s_h \,\sigma\, st$, ou seja, $s_g s_h \in \sigma(st) = \sigma(s)\sigma(t) = gh$. Assim, $s_g s_h \leq s_{gh}$, pois s_{gh} é o elemento máximo na σ-classe gh. Logo, $i(g)i(h) \leq i(gh)$. Seja $g \in G$, onde $g = \sigma(s)$ para algum $s \in S$. Se $t \in \sigma(s)$ então existe $u \in S$ com $u \leq s$ e $u \leq t$. Pelo Lema 1.1.7, $u^{-1} \leq s^{-1}$ e $u^{-1} \leq t^{-1}$. Daí, $t^{-1} \in \sigma(s^{-1})$. Portanto,

$t \in g$ se, e somente se, $t^{-1} \in g^{-1}$. Mostremos que $s_g^{-1} = s_{g^{-1}}$. Lembremos que s_g é o elemento máximo na σ-classe g. Assim, $s_g \in g$ e para todo $t \in g$, temos que $t \leq s_g$. Pelo que vimos anteriormente $s_g^{-1} \in g^{-1}$ e como $t \leq s_g$, para todo $t \in g$ então $t^{-1} \leq s_g^{-1}$, para todo $t^{-1} \in g^{-1}$. Portanto, $s_g^{-1} = s_{g^{-1}}$. Assim, $i(g)^{-1} = i(g^{-1})$. Disto segue a próxima proposição.

Proposição 3.2.3. *Sejam S um monóide F-inverso, σ a congruência de grupo minimal, $G = S/\sigma$ e $i : G \longrightarrow S$ que associa a cada $g \in G$ o elemento máximo s_g da σ-classe g. Então i é um pré-morfismo unitário.*

Vamos considerar o caso particular onde $S = \widetilde{G}$, pois já mostramos na seção 1.1 (exemplo pág. 9) que $\widetilde{G}/\sigma \simeq G$. Além disso, na seção anterior provamos que $\widetilde{G}$ é a expansão de Birget-Rhodes do grupo G e que é um monóide F-inverso (ver Proposição 3.1.1). Na mesma proposição mostramos que $(\{1, g\}, g)$ é o elemento máximo da σ-classe g. Portanto, $i : G \longrightarrow \widetilde{G}$ é dada por $i(g) = (\{1, g\}, g)$.

Lema 3.2.4. *O semigrupo $\widetilde{G}$ é gerado pelos elementos $i(g)$, onde $g \in G$. Em particular, se $(A, g) = (\{1, g_1, \cdots, g_n\}, g_n)$, onde $g = g_n$, então*

$$(A, g) = i(g_1)i(g_1^{-1}g_2)\cdots i(g_{n-1}^{-1}g_n).$$

Além disso, valem as seguintes equações:
(1) $i(s^{-1})i(s)i(t) = i(s^{-1})i(st)$,
(2) $i(s)i(t)i(t^{-1}) = i(st)i(t^{-1})$,
(3) $i(s)i(1) = i(s)$,
(4) $i(1)i(s) = i(s)$, *para todo* $s, t \in G$.

Prova: Seja $(A, g) = (\{1, g_1, \cdots, g_n\}, g_n)$. Então, temos que

$$(\{1, g_1, \cdots, g_{n-1}\}, g_{n-1})(\{1, g_{n-1}^{-1}g_n\}, g_{n-1}^{-1}g_n) =$$
$$(\{1, g_1, \cdots, g_{n-1}\} \cup g_{n-1}\{1, g_{n-1}^{-1}g_n\}, g_{n-1}g_{n-1}^{-1}g_n) = (\{1, g_1, \cdots, g_n\}, g_n) = (A, g).$$

Repetindo esse processo, obtemos que

$$(A, g) = (\{1, g_1\}, g_1)\prod_{k=2}^{n}(\{1, g_{k-1}^{-1}g_k\}, g_{k-1}^{-1}g_k) = i(g_1)i(g_1^{-1}g_2)\cdots i(g_{n-1}^{-1}g_n),$$

como queríamos.

Os ítens (1) e (2) decorrem da Proposição 3.2.3 e do Corolário 3.2.2. Já (3) e (4) seguem diretamente da Proposição 3.2.3. □

O lema acima mostra que $i : G \longrightarrow \widetilde{G}$ satisfaz as condições $(1) - (3)$ da Proposição 2.1.1. Daí, existe um único homomorfismo de semigrupos $\widetilde{i} : S(G) \longrightarrow \widetilde{G}$ tal que $\widetilde{i}([g]) = i(g)$. Observe que $\widetilde{G}$ é imagem homomórfica do semigrupo universal $S(G)$. De fato, dado $(A, g) = (\{1, g_1, \cdots, g_n\}, g_n)$ um elemento de $\widetilde{G}$, pelo Lema 3.2.4, $(A, g) = i(g_1)i(g_1^{-1}g_2)\cdots i(g_{n-1}^{-1}g_n)$. Então, $\widetilde{i}([g_1][g_1^{-1}g_2]\cdots[g_{n-1}^{-1}g_n]) = \widetilde{i}([g_1])\widetilde{i}([g_1^{-1}g_2])\cdots\widetilde{i}([g_{n-1}^{-1}g_n]) = i(g_1)i(g_1^{-1}g_2)\cdots i(g_{n-1}^{-1}g_n) = (A, g)$.

O teorema abaixo implicará que temos de fato um isomorfismo.

Teorema 3.2.5. *Sejam G um grupo e S um monóide inverso. Então para cada pré-morfismo unitário $\alpha : G \longrightarrow S$ existe um único homomorfismo de monóide $\widetilde{\alpha} : \widetilde{G} \longrightarrow S$ tal que $\widetilde{\alpha}i = \alpha$.*

Prova: Seja $(A, g) = (\{1, g_1, \cdots, g_n\}, g_n)$ um elemento de $\widetilde{G}$, com $g = g_n$. Defina $\widetilde{\alpha} : \widetilde{G} \longrightarrow S$ por $\widetilde{\alpha}(A, g) = \alpha(g_1)\alpha(g_1)^{-1}\alpha(g_2)\alpha(g_2)^{-1}\cdots\alpha(g_n)\alpha(g_n)^{-1}\alpha(g_n)$. Observe que $\alpha(g_j)\alpha(g_j)^{-1} \in E(S)$. Assim, a definição de $\widetilde{\alpha}$ independe da ordem dos elementos g_j. Portanto, $\widetilde{\alpha}$ está bem definida. Note que, $(\{1\}, 1) \in \widetilde{G}$ então $\widetilde{\alpha}(\{1\}, 1) = \alpha(1)\alpha(1)^{-1}\alpha(1) = \alpha(1) = 1$, pois α é um pré-morfismo unitário. Logo, $\widetilde{\alpha}$ leva a identidade de $\widetilde{G}$ na identidade de S. Além disso, $\widetilde{\alpha}(i(g)) = \widetilde{\alpha}(\{1, g\}, g) = \alpha(g)\alpha(g)^{-1}\alpha(g) = \alpha(g)$. Portanto, $\widetilde{\alpha}i = \alpha$.

Mostremos que $\widetilde{\alpha}$ é homomorfismo de monóide. Considere $(A, g), (B, h) \in \widetilde{G}$, onde $A = \{1, g_1, \cdots, g_m = g\}$ e $B = \{1, h_1, \cdots, h_n = h\}$. Pela definição, temos $\widetilde{\alpha}(A, g) = \alpha(g_1)\alpha(g_1)^{-1}\cdots\alpha(g_m)\alpha(g_m)^{-1}\alpha(g)$ e $\widetilde{\alpha}(B, h) = \alpha(h_1)\alpha(h_1)^{-1}\cdots\alpha(h_n)$ $\alpha(h_n)^{-1}\alpha(h)$. Agora vamos calcular $\widetilde{\alpha}(A, g)\widetilde{\alpha}(B, h)$. Note que,

$$\widetilde{\alpha}(A, g)\widetilde{\alpha}(B, h) =$$
$$\alpha(g_1)\alpha(g_1)^{-1}\cdots\alpha(g_m)\alpha(g_m)^{-1}\alpha(g)\alpha(h_1)\alpha(h_1)^{-1}\cdots\alpha(h_n)\alpha(h_n)^{-1}\alpha(h).$$

Observe primeiramente que

$$\alpha(g)\alpha(h_1)\alpha(h_1)^{-1}\alpha(h_2)\alpha(h_2)^{-1}\cdots\alpha(h_n)\alpha(h_n)^{-1} =$$
$$\alpha(g)\alpha(g)^{-1}\alpha(g)\alpha(h_1)\alpha(h_1)^{-1}\alpha(h_2)\alpha(h_2)^{-1}\cdots\alpha(h_n)\alpha(h_n)^{-1} =$$
$$\alpha(g)\alpha(h_1)\alpha(h_1)^{-1}\alpha(g)^{-1}\alpha(g)\alpha(h_2)\alpha(h_2)^{-1}\cdots\alpha(h_n)\alpha(h_n)^{-1} =$$
$$\alpha(g)\alpha(g)^{-1}\alpha(g)\alpha(h_1)\alpha(h_1)^{-1}\alpha(g)^{-1}\alpha(g)\alpha(h_2)\alpha(h_2)^{-1}\cdots\alpha(h_n)\alpha(h_n)^{-1} =$$
$$\alpha(g)\alpha(h_1)\alpha(h_1)^{-1}\alpha(g)^{-1}\alpha(g)\alpha(h_2)\alpha(h_2)^{-1}\alpha(g)^{-1}\alpha(g)\cdots\alpha(h_n)\alpha(h_n)^{-1} =$$
$$\alpha(g)\prod_{p=1}^{n}\alpha(h_p)\alpha(h_p)^{-1}\alpha(g)^{-1}\alpha(g).$$

Agora vejamos,

$$\alpha(g)\alpha(h_1)\alpha(h_1)^{-1}\alpha(g)^{-1}\alpha(g) = \alpha(gh_1)\alpha(h_1)^{-1}\alpha(g)^{-1}\alpha(g) =$$
$$\alpha(gh_1)(\alpha(g)^{-1}\alpha(g)\alpha(h_1))^{-1} = \alpha(gh_1)(\alpha(g)^{-1}\alpha(gh_1))^{-1} = \alpha(gh_1)\alpha(gh_1)^{-1}\alpha(g).$$

Assim,

$$[\alpha(g)\alpha(h_1)\alpha(h_1)^{-1}\alpha(g)^{-1}\alpha(g)]\alpha(h_2)\alpha(h_2)^{-1}\alpha(g)^{-1}\alpha(g) =$$
$$\alpha(gh_1)\alpha(gh_1)^{-1}[\alpha(g)\alpha(h_2)\alpha(h_2)^{-1}\alpha(g)^{-1}\alpha(g)] =$$
$$\alpha(gh_1)\alpha(gh_1)^{-1}\alpha(gh_2)\alpha(gh_2)^{-1}\alpha(g).$$

Continuando, obtemos

$$\alpha(g)\alpha(h_1)\alpha(h_1)^{-1}\cdots\alpha(h_n)\alpha(h_n)^{-1} = \alpha(gh_1)\alpha(gh_1)^{-1}\cdots\alpha(gh_n)\alpha(gh_n)^{-1}\alpha(g).$$

Daí,

$$\widetilde{\alpha}(A,g)\widetilde{\alpha}(B,h) =$$
$$\alpha(g_1)\alpha(g_1)^{-1}\cdots\alpha(g_m)\alpha(g_m)^{-1}\alpha(g)\alpha(h_1)\alpha(h_1)^{-1}\cdots\alpha(h_n)\alpha(h_n)^{-1}\alpha(h) =$$
$$\prod_{k=1}^{m}(\alpha(g_k)\alpha(g_k)^{-1})\prod_{l=1}^{n}(\alpha(gh_l)\alpha(gh_l)^{-1})\alpha(g)\alpha(h).$$

Observe que $\alpha(g)\alpha(h) = \alpha(g)\alpha(g)^{-1}\alpha(g)\alpha(h)$. Pelo Corolário 3.2.2, temos $\alpha(g)\alpha(h) = \alpha(g)\alpha(g)^{-1}\alpha(gh)$. Assim,

$$\widetilde{\alpha}(A,g)\widetilde{\alpha}(B,h) = \prod_{k=1}^{m}(\alpha(g_k)\alpha(g_k)^{-1})\prod_{l=1}^{n}(\alpha(gh_l)\alpha(gh_l)^{-1})\alpha(g)\alpha(g)^{-1}\alpha(gh).$$

Como $g = g_m$, temos $\widetilde{\alpha}(A,g)\widetilde{\alpha}(B,h) = \prod_{k=1}^{m}(\alpha(g_k)\alpha(g_k)^{-1})\prod_{l=1}^{n}(\alpha(gh_l)\alpha(gh_l)^{-1})\alpha(gh)$.

Por outro lado, $(A,g)(B,h) = (\{1,g_1,\cdots,g_m\},g)(\{1,h_1,\cdots,h_n\},h) = (\{1,g_1,\cdots,g_m\}\cup g\{1,h_1,\cdots,h_n\},gh) = (\{1,g_1,\cdots,g_m,gh_1,\cdots,gh_n\},gh)$. Por definição,

$$\widetilde{\alpha}((A,g)(B,h)) =$$
$$\alpha(g_1)\alpha(g_1)^{-1}\cdots\alpha(g_m)\alpha(g_m)^{-1}\alpha(gh_1)\alpha(gh_1)^{-1}\cdots\alpha(gh_n)\alpha(gh_n)^{-1}\alpha(gh) =$$
$$\prod_{k=1}^{m}(\alpha(g_k)\alpha(g_k)^{-1})\prod_{l=1}^{n}(\alpha(gh_l)\alpha(gh_l)^{-1})\alpha(gh).$$

Portanto, $\widetilde{\alpha}((A,g)(B,h)) = \widetilde{\alpha}(A,g)\widetilde{\alpha}(B,h)$. Assim, $\widetilde{\alpha} : \widetilde{G} \longrightarrow S$ é um homomorfismo de monóide.

Mostremos que nessas condições $\widetilde{\alpha}$ é único. Suponha $\varphi : \widetilde{G} \longrightarrow S$ um homomorfismo de monóide tal que $\varphi i = \alpha$. Seja $(A,g) = (\{1,g_1,\cdots,g_n\},g_n) \in \widetilde{G}$. Pelo lema anterior temos que $(A,g) = i(g_1)i(g_1^{-1}g_2)\cdots i(g_{n-1}^{-1}g_n)$. Assim,

$$\varphi(A,g) = \varphi(i(g_1)i(g_1^{-1}g_2)\cdots i(g_{n-1}^{-1}g_n)) =$$
$$\varphi(i(g_1))\varphi(i(g_1^{-1}g_2))\cdots\varphi(i(g_{n-1}^{-1}g_n)) = \alpha(g_1)\alpha(g_1^{-1}g_2)\cdots\alpha(g_{n-1}^{-1}g_n).$$

Pelo Corolário 3.2.2, $\alpha(g_1)\alpha(g_1^{-1}g_2) = \alpha(g_1)\alpha(g_1)^{-1}\alpha(g_2)$. Daí,

$$(\alpha(g_1)\alpha(g_1^{-1}g_2))\alpha(g_2^{-1}g_3) = \alpha(g_1)\alpha(g_1)^{-1}\alpha(g_2)\alpha(g_2^{-1}g_3) =$$
$$\alpha(g_1)\alpha(g_1)^{-1}\alpha(g_2)\alpha(g_2)^{-1}\alpha(g_3).$$

Continuando, obtemos $\varphi(A,g) = \alpha(g_1)\alpha(g_1)^{-1}\cdots\alpha(g_n)\alpha(g_n)^{-1}\alpha(g_n) = \widetilde{\alpha}(A,g)$. $\square$

No caso em que o semigrupo inverso S é o monóide inverso simétrico $I(X)$ então pelo teorema anterior, dado um pré-morfismo unitário $\alpha : G \longrightarrow I(X)$ (ação parcial, ver seção 1.2) existe um único homomorfismo de monóide $\widetilde{\alpha} : \widetilde{G} \longrightarrow I(X)$ (ação (global), ver seção 2.2) tal que $\widetilde{\alpha}(\{1,g\},g) = \alpha_g$. Reciprocamente, se $\beta : \widetilde{G} \longrightarrow I(X)$ é ação (global) então considere $\alpha : G \longrightarrow I(X)$ dada por $\alpha_g = \beta(\{1,g\},g)$. Mostremos que α é um pré-morfismo unitário. De fato, $\alpha_1 = \beta(\{1\},1) = Id_X$. Além disso,

$$\alpha_g\alpha_{g^{-1}}\alpha_g = \beta(\{1,g\},g)\beta(\{1,g^{-1}\},g^{-1})\beta(\{1,g\},g) =$$
$$\beta((\{1,g\},g)(\{1,g^{-1}\},g^{-1})(\{1,g\},g)) = \beta(\{1,g\},g) = \alpha_g.$$

Analogamente, $\alpha_{g^{-1}}\alpha_g\alpha_{g^{-1}} = \alpha_{g^{-1}}$. Daí, $\alpha_g^{-1} = \alpha_{g^{-1}}$. Finalmente, sejam $g,h \in G$. Então, $\alpha_g\alpha_h = \beta(\{1,g\},g)\beta(\{1,h\},h) = \beta((\{1,g\},g)(\{1,h\},h)) = \beta(\{1,g,gh\},gh)$. Mas, $(\{1,g,gh\},gh) \leq (\{1,gh\},gh)$, pois $(\{1,g,gh\},gh) = (\{1,g\},1)(\{1,gh\},gh)$ e $(\{1,g\},1) \in E(\widetilde{G})$. Então temos que, $\beta(\{1,g,gh\},gh) = \beta((\{1,g\},1)(\{1,gh\},gh)) = \beta(\{1,g\},1)\beta(\{1,gh\},gh)$. Portanto, $\alpha_g\alpha_h = \beta(\{1,g\},1)\alpha_{gh}$. Assim, $\alpha_g\alpha_h \leq \alpha_{gh}$, pois $\beta(\{1,g\},1) \in E(I(X))$. Logo, α é pré-morfismo unitário. Além disso, $\widetilde{\alpha} = \beta$ (visto que $\widetilde{\alpha}$ e β coincidem nos geradores de $\widetilde{G}$). Das observações acima reobtemos o Teorema 2.2.2.

Corolário 3.2.6. *Para cada grupo G e qualquer conjunto X existe uma correspondência uma a uma entre as ações parciais de G em X e as ações de $\widetilde{G}$ em X.*

Também segue do Teorema 3.2.5 o isomorfismo entre $S(G)$ e $\widetilde{G}$.

Corolário 3.2.7. *A função $\widetilde{i} : S(G) \longrightarrow \widetilde{G}$ dada por $\widetilde{i}([g]) = (\{1,g\},g)$ é um isomorfismo de monóides.*

Prova: Defina $\alpha : G \longrightarrow S(G)$ por $\alpha(g) = [g]$. Então mostremos que α é um pré-morfismo unitário. De fato, $\alpha(1) = [1] = 1_S$. Além disso, $\alpha(g)\alpha(g^{-1})\alpha(g) = [g][g^{-1}][g] = [g] = \alpha(g)$ e $\alpha(g^{-1})\alpha(g)\alpha(g^{-1}) = [g^{-1}][g][g^{-1}] = [g^{-1}] = \alpha(g^{-1})$. Logo, $\alpha(g)^{-1} = \alpha(g^{-1})$. Mais ainda, dados $g,h \in G$ temos $\alpha(g)\alpha(h) = [g][h]$ e $[g][h] \leq [gh]$, pois $[g][h] = [gh][h^{-1}][h]$ e $[h^{-1}][h] \in E(S(G))$. Portanto, $\alpha(g)\alpha(h) \leq \alpha(gh)$.

Fazendo $S = S(G)$ e $\alpha : G \longrightarrow S(G)$ dada por $\alpha(g) = [g]$ no teorema anterior, temos que existe um único homomorfismo $\widetilde{\alpha} : \widetilde{G} \longrightarrow S(G)$ tal que $\widetilde{\alpha}(i(g)) = \widetilde{\alpha}(\{1,g\},g) = [g]$, onde $i : G \longrightarrow \widetilde{G}$ é dada por $i(g) = (\{1,g\},g)$. Desta forma, $(\widetilde{i}\widetilde{\alpha})(\{1,g\},g) = \widetilde{i}(\widetilde{\alpha}(\{1,g\},g)) = \widetilde{i}([g]) = (\{1,g\},g)$. Assim, $\widetilde{i}\widetilde{\alpha} = Id_{\widetilde{G}}$. Por outro lado, $(\widetilde{\alpha}\widetilde{i})([g]) = \widetilde{\alpha}(\widetilde{i}([g])) = \widetilde{\alpha}(\{1,g\},g) = [g]$. Logo, $\widetilde{\alpha}\widetilde{i} = Id_{S(G)}$. Assim, o homomorfismo $\widetilde{\alpha}$ é o inverso de $\widetilde{i}$. Portanto, $\widetilde{i}$ é um isomorfismo. □

Observação 3.2.8. (1) *Seja $a \in S(G)$ escrito na forma padrão por $a = \varepsilon_{r_1}\cdots\varepsilon_{r_n}[s]$. Então,*

$$\widetilde{i}(a) = \widetilde{i}(\varepsilon_{r_1}\cdots\varepsilon_{r_n}[s]) = \widetilde{i}(\varepsilon_{r_1})\cdots\widetilde{i}(\varepsilon_{r_n})\widetilde{i}([s]) = \widetilde{i}([r_1][r_1^{-1}])\cdots\widetilde{i}([r_n][r_n^{-1}])\widetilde{i}([s]) =$$
$$\widetilde{i}([r_1])\widetilde{i}([r_1^{-1}])\cdots\widetilde{i}([r_n])\widetilde{i}([r_n^{-1}])\widetilde{i}([s]) =$$
$$(\{1,r_1\},r_1)(\{1,r_1^{-1}\},r_1^{-1})\cdots(\{1,r_n\},r_n)(\{1,r_n^{-1}\},r_n^{-1})(\{1,s\},s) =$$
$$(\{1,r_1\},1)\cdots(\{1,r_n\},1)(\{1,s\},s) = (\{1,r_1,\cdots,r_n\},1)(\{1,s\},s) =$$
$$(\{1,r_1,\cdots,r_n,s\},s).$$

Portanto, num elemento qualquer de $S(G)$ a função $\widetilde{i} : S(G) \longrightarrow \widetilde{G}$ é dada por:

$$\widetilde{i}(\varepsilon_{r_1}\cdots\varepsilon_{r_n}[s]) = (\{1,r_1,\cdots,r_n,s\},s).$$

(2) *Dado $(A,g) = (\{1,g_1,\cdots,g_n\},g_n)$ um elemento qualquer de $\widetilde{G}$, temos que*

$$(A,g) = i(g_1)i(g_1^{-1}g_2)\cdots i(g_{n-1}^{-1}g_n) =$$
$$(\{1,g_1\},g_1)(\{1,g_1^{-1}g_2\},g_1^{-1}g_2)\cdots(\{1,g_{n-1}^{-1}g_n\},g_{n-1}^{-1}g_n).$$

Assim,

$$\widetilde{\alpha}(A,g) = \widetilde{\alpha}((\{1,g_1\},g_1)(\{1,g_1^{-1}g_2\},g_1^{-1}g_2)\cdots(\{1,g_{n-1}^{-1}g_n\},g_{n-1}^{-1}g_n)) =$$
$$\widetilde{\alpha}(\{1,g_1\},g_1)\widetilde{\alpha}(\{1,g_1^{-1}g_2\},g_1^{-1}g_2)\cdots\widetilde{\alpha}(\{1,g_{n-1}^{-1}g_n\},g_{n-1}^{-1}g_n) =$$
$$[g_1][g_1^{-1}g_2]\cdots[g_{n-1}^{-1}g_n] = [g_1][g_1^{-1}][g_2][g_2^{-1}]\cdots[g_{n-1}][g_{n-1}^{-1}][g_n] = \varepsilon_{g_1}\varepsilon_{g_2}\cdots\varepsilon_{g_{n-1}}[g_n].$$

Portanto, num elemento qualquer de $\widetilde{G}$ a função $\widetilde{\alpha} : \widetilde{G} \longrightarrow S(G)$ é dada por:

$$\widetilde{\alpha}(\{1,g_1,\cdots,g_n\},g_n) = \varepsilon_{g_1}\varepsilon_{g_2}\cdots\varepsilon_{g_{n-1}}[g_n].$$

3.3 $R \star_\alpha G \simeq (R \star_{\widetilde{\alpha}} \widetilde{G})/I$

Nesta seção vamos considerar ações parciais de grupos e ações de semigrupos sobre anéis. Uma ação de um semigrupo S em um anel R é um homomorfismo de semigrupos $\beta : S \longrightarrow I(R)$. Se S é um monóide inverso temos, para cada $s \in S$, $\beta_s : E_{s^{-1}} \longrightarrow E_s$ um isomorfismo entre ideais bilaterais de R, $\beta_{1_S} = Id_R$ e $\beta_s\beta_t = \beta_{st}$, para quaisquer $s,t \in S$.

Veremos a seguir que, dada uma ação parcial de G em R existe uma única ação (global) de $\widetilde{G}$ em R. Uma vez estabelecida essa relação entre ações parciais e ações globais, vamos investigar qual é a relação entre os respectivos skew's.

Seja R um anel (associativo com 1). Então, R é um conjunto não vazio e assim $I(R)$ é um semigrupo inverso. Dada uma ação parcial $\alpha = (\{D_g\}_{g\in G},\{\alpha_g\}_{g\in G})$ do grupo G num anel R, sabemos pelo Teorema 3.2.5, que $\widetilde{\alpha} : \widetilde{G} \longrightarrow I(R)$ dada por $\widetilde{\alpha}_{(A,g)} = \alpha_{g_1}\alpha_{g_1^{-1}} \cdots \alpha_{g_{n-1}}\alpha_{g_{n-1}^{-1}}\alpha_{g_n}$, onde $(A,g) = (\{1, g_1, \cdots, g_n\}, g_n)$, é uma ação global de $\widetilde{G}$ no conjunto R. Nos próximos lemas, exibiremos resultados sobre domínio e imagem da ação de $\widetilde{G}$ sobre o anel R.

Lema 3.3.1. *Sejam $\alpha = (\{D_g\}_{g\in G}, \{\alpha_g\}_{g\in G})$ uma ação parcial de G em R, $(A,g) = (\{1, g_1, \cdots, g_n\}, g_n)$ um elemento de $\widetilde{G}$ e $\widetilde{\alpha} : \widetilde{G} \longrightarrow I(R)$ dada por $\widetilde{\alpha}_{(A,g)} = \alpha_{g_1}\alpha_{g_1^{-1}} \cdots \alpha_{g_{n-1}}\alpha_{g_{n-1}^{-1}}\alpha_{g_n}$. Se denotarmos $dom(\widetilde{\alpha}_{(A,g)}) = D_{(A,g)^{-1}}$ e $im(\widetilde{\alpha}_{(A,g)}) = D_{(A,g)}$ então temos:*
(1) $D_{(A,g)} = D_{g_1} \cap D_{g_2} \cap \cdots \cap D_{g_n}$,
(2) $D_{(A,g)^{-1}} = D_{g_n^{-1}} \cap D_{g_n^{-1}g_1} \cap \cdots \cap D_{g_n^{-1}g_{n-1}}$,
(3) $\widetilde{\alpha}_{(A,g)}(x) = \alpha_g(x)$ para todo $x \in D_{(A,g)^{-1}}$.

Prova: Temos que $\widetilde{\alpha}_{(A,g)} = \alpha_{g_1}\alpha_{g_1^{-1}} \cdots \alpha_{g_{n-1}}\alpha_{g_{n-1}^{-1}}\alpha_{g_n}$, onde $(A,g) = (\{1, g_1, \cdots, g_n\}, g_n)$. É fácil verificar que $\alpha_{g_i}\alpha_{g_i^{-1}} = Id_{D_{g_i}}$, para todo $1 \leq i \leq n-1$. Daí, da definição da operação em $I(R)$, segue que $D_{(A,g)} = D_{g_1} \cap D_{g_2} \cap \cdots \cap D_{g_n}$. Para a prova de (2), note que $D_{(A,g)^{-1}} = dom(\widetilde{\alpha}_{(A,g)^{-1}})$ e $(A,g)^{-1} = (\{1, g_n^{-1}g_1, \cdots, g_n^{-1}g_{n-1}, g_n^{-1}\}, g_n^{-1})$. Daí, $\widetilde{\alpha}_{(A,g)^{-1}} = \alpha_{g_n^{-1}g_1}\alpha_{(g_n^{-1}g_1)^{-1}} \cdots \alpha_{g_n^{-1}g_{n-1}}\alpha_{(g_n^{-1}g_{n-1})^{-1}}\alpha_{g_n^{-1}}$. Do caso anterior, temos $D_{(A,g)^{-1}} = D_{g_n^{-1}} \cap D_{g_n^{-1}g_1} \cap \cdots \cap D_{g_n^{-1}g_{n-1}}$. A prova de (3) é imediata, uma vez que $\alpha_{g_j}\alpha_{g_j^{-1}} = Id_{D_{g_j}}$, para todo $1 \leq j \leq n-1$. □

Pelo lema acima, $D_{(A,g)}$ é um ideal bilateral de R, para qualquer $(A,g) \in \widetilde{G}$. Claramente, $\widetilde{\alpha}_{(\{1\},1)} = Id_R$. Além disso, usando $(2')$ da Definição 1.2.3 temos que $\widetilde{\alpha}_{(A,g)}(D_{(A,g)^{-1}}) = D_{(A,g)}$. Assim, $\widetilde{\alpha}_{(A,g)}\widetilde{\alpha}_{(A,g)^{-1}} = Id_{D_{(A,g)}}$ e $\widetilde{\alpha}_{(A,g)^{-1}}\widetilde{\alpha}_{(A,g)} = Id_{D_{(A,g)^{-1}}}$.

Lema 3.3.2. *Sejam $(A,g) = (\{1, g_1, \cdots, g_n\}, g_n)$ e $(B,h) = (\{1, h_1, \cdots, h_m\}, h_m)$. Então,*
(1) $D_{[(A,g)(B,h)]} = \alpha_g(D_{(B,h)} \cap D_{g^{-1}}) \cap D_{(A,g)}$,
(2) $D_{[(A,g)(B,h)]^{-1}} = \alpha_{h^{-1}}(D_{(A,g)^{-1}} \cap D_h) \cap D_{(B,h)^{-1}}$.

Prova: Lembremos que $(A,g)(B,h) = (\{1, g_1, \cdots, g_n, g_nh_1, \cdots, g_nh_m\}, g_nh_m)$. Assim, usando o Lema 3.3.1, temos $D_{(A\cup gB, gh)} = (D_{g_1} \cap \cdots \cap D_{g_n}) \cap D_{g_nh_1} \cap \cdots \cap D_{g_nh_m} = D_{(A,g)} \cap (D_{g_nh_1} \cap D_{g_n}) \cap \cdots \cap (D_{g_nh_m} \cap D_{g_n}) = D_{(A,g)} \cap \alpha_{g_n}(D_{h_1} \cap D_{g_n^{-1}}) \cap \cdots \cap \alpha_{g_n}(D_{h_m} \cap D_{g_n^{-1}}) = D_{(A,g)} \cap \alpha_{g_n}(D_{h_1} \cap \cdots \cap D_{h_m} \cap D_{g_n^{-1}}) = D_{(A,g)} \cap \alpha_{g_n}(D_{(B,h)} \cap D_{g_n^{-1}})$. Como $g = g_n$ segue (1). O item (2) segue de (1) e do fato que $[(A,g)(B,h)]^{-1} = (h^{-1}B, h^{-1})(g^{-1}A, g^{-1})$. □

Pelo lema acima, $dom(\widetilde{\alpha}_{(A,g)}\widetilde{\alpha}_{(B,h)}) = \alpha_{h^{-1}}(D_{(A,g)^{-1}} \cap D_{(B,h)}) = \alpha_{h^{-1}}(D_{(A,g)^{-1}} \cap D_h) \cap D_{(B,h)^{-1}} = D_{[(A,g)(B,h)]^{-1}} = dom(\widetilde{\alpha}_{(A,g)(B,h)})$ e $\widetilde{\alpha}_{(A,g)}\widetilde{\alpha}_{(B,h)}(x) = \widetilde{\alpha}_{(A,g)(B,h)}(x)$, para todo $x \in D_{[(A,g)(B,h)]^{-1}}$. Portanto, $\widetilde{\alpha}$ é uma ação de $\widetilde{G}$ em R.

Por outro lado, dada uma ação $\beta : \widetilde{G} \longrightarrow I(R)$ $((A,g) \longmapsto \beta_{(A,g)} : D_{(A,g)^{-1}} \longrightarrow D_{(A,g)})$ considere $\alpha : G \longrightarrow I(R)$ dada por: $\alpha_g : D_{(\{1,g\},g)^{-1}} \longrightarrow D_{(\{1,g\},g)}$ e $\alpha_g = \beta_{(\{1,g\},g)}$. De forma análoga ao que fizemos na prova do Corolário 3.2.6, mostra-se que α é uma ação parcial de G em R. Portanto, temos o seguinte teorema.

Teorema 3.3.3. *Sejam G um grupo e R um anel. Existe uma bijeção entre ações parciais de G em R e ações de $\widetilde{G}$ em R.*

Considere uma ação parcial $\alpha = (\{D_g\}_{g\in G}, \{\alpha_g\}_{g\in G})$ de um grupo G num anel R. O skew anel de grupo parcial $R \star_\alpha G$ é o conjunto

$$\left\{ \sum_{g\in G}^{\text{finita}} a_g\delta_g \ ; \ a_g \in D_g \right\},$$

onde δ_g são símbolos. A adição é feita coordenada a coordenada, e a multiplicação é dada por $(a_g\delta_g)(b_h\delta_h) = \alpha_g(\alpha_{g^{-1}}(a_g)b_h)\delta_{gh}$. Em [4], encontra-se condições suficientes para que o skew anel de grupo parcial seja associativo. Outros resultados sobre skew anel de grupo parcial também podem ser encontrados na referência citada acima.

Daqui por diante, usaremos $\widetilde{\alpha} = (\{D_{(A,g)}\}_{(A,g)\in\widetilde{G}}, \{\widetilde{\alpha}_{(A,g)}\}_{(A,g)\in\widetilde{G}})$ para denotar a ação global de $\widetilde{G}$ em R. Agora definiremos o skew anel da expansão de Birget-Rhodes.

Definição 3.3.4. *Sejam R um anel e G um grupo. O skew anel da expansão de Birget-Rhodes $\widetilde{G}$ é definido por*

$$R \star_{\widetilde{\alpha}} \widetilde{G} = \left\{ \sum_{(A,g)\in\widetilde{G}}^{\textit{finita}} a\delta_{(A,g)} \, ; \, a \in D_{(A,g)} \right\},$$

com a soma coordenada a coordenada e a multiplicação dada por $(a\delta_{(A,g)})(b\delta_{(B,h)}) = \alpha_g(\alpha_{g^{-1}}(a)b)\delta_{(A,g)(B,h)}$, onde $a \in D_{(A,g)}$ e $b \in D_{(B,h)}$.

Note que a multiplicação acima está bem definida. Com efeito, como $\alpha_{g^{-1}}(a)b \in D_{g^{-1}} \cap D_{(B,h)}$ então $\alpha_g(\alpha_{g^{-1}}(a)b) \in \alpha_g(D_{g^{-1}} \cap D_{(B,h)})$. Além disso, $\alpha_g(\alpha_{g^{-1}}(a)b) \in D_{(A,g)}$, pois $a \in D_{(A,g)}$. Portanto, $\alpha_g(\alpha_{g^{-1}}(a)b) \in \alpha_g(D_{g^{-1}} \cap D_{(B,h)}) \cap D_{(A,g)}$. Porém, pelo Lema 3.3.2, temos que $\alpha_g(D_{g^{-1}} \cap D_{(B,h)}) \cap D_{(A,g)} = D_{[(A,g)(B,h)]}$. Daí, segue que $\alpha_g(\alpha_{g^{-1}}(a)b) \in D_{[(A,g)(B,h)]}$. Desta forma a multiplicação está bem definida. Além disso, o skew anel da expansão de Birget-Rhodes de um grupo G tem unidade $1_{R\star_{\widetilde{\alpha}}\widetilde{G}} = 1_R\delta_{(\{1\},1)}$.

O teorema seguinte mostra sob que condições o skew construído acima é associativo. Para tanto, precisamos introduzir alguns conceitos. Seguindo [4], o anel de multiplicadores de um anel I, denotado por $M(I)$, é o conjunto formado pelos pares ordenados (L, R), onde L e R são funções aditivas de I que satisfazem:
(1) $L(ab) = L(a)b$,
(2) $R(ab) = aR(b)$,
(3) $R(a)b = aL(b)$, para todo $a, b \in I$.
Dados $(L, R), (L', R') \in M(I)$, as operações que tornam $M(I)$ um anel são $(L, R) + (L', R') = (L + L', R + R'), (L, R)(L', R') = (L \circ L', R \circ R')$. Dizemos que L é um multiplicador a esquerda de I e R é um multiplicador a direita de I.

Além disso, um anel I é dito (L, R)-associativo se, dados quaisquer dois multiplicadores (L, R) e (L', R') em $M(I)$, temos $R' \circ L = L \circ R'$.

Mais ainda, seja $\pi : I \longrightarrow J$ um isomorfismo de ideais. Então é fácil verificar que para $(L, R) \in M(I)$ o par $(\pi \circ L \circ \pi^{-1}, \pi \circ R \circ \pi^{-1})$ é um elemento de $M(J)$ e temos o seguinte.

Proposição 3.3.5. *A função $\overline{\pi} : M(I) \longrightarrow M(J)$ definida por $\overline{\pi}(L, R) = (\pi \circ L \circ \pi^{-1}, \pi \circ R \circ \pi^{-1})$ é um isomorfismo de anéis.*

O próximo teorema fornece condições suficientes para que o skew anel da expansão de Birget-Rhodes seja associativo.

Teorema 3.3.6. *Sejam G um grupo e R um anel. Se $D_{(A,g)}$ é (L, R)-associativo para todo $(A, g) \in \widetilde{G}$ então $R \star_{\widetilde{\alpha}} \widetilde{G}$ é um anel associativo.*

Prova: Obviamente, $R \star_{\widetilde{\alpha}} \widetilde{G}$ é associativo se, e somente se,

$$(a\delta_{(B,h)}b\delta_{(A,g)})c\delta_{(C,l)} = a\delta_{(B,h)}(b\delta_{(A,g)}c\delta_{(C,l)}), \tag{3.3.2}$$

com $a \in D_{(B,h)}, b \in D_{(A,g)}$ e $c \in D_{(C,l)}$. Iniciamos pelo lado esquerdo da igualdade acima:

$$(a\delta_{(B,h)}b\delta_{(A,g)})c\delta_{(C,l)} = \alpha_h(\alpha_{h^{-1}}(a)b)\delta_{(B,h)(A,g)}c\delta_{(C,l)} = \alpha_h(\alpha_{h^{-1}}(a)b)\delta_{(B\cup hA,hg)}c\delta_{(C,l)} = \alpha_{hg}[\alpha_{(hg)^{-1}}(\alpha_h(\alpha_{h^{-1}}(a)b))c]\delta_{(B\cup hA\cup hgC,hgl)}.$$

Observe que, $\alpha_{h^{-1}}(a)b \in D_{h^{-1}} \cap D_{(A,g)}$. Logo, $\alpha_h(\alpha_{h^{-1}}(a)b) \in \alpha_h(D_{h^{-1}} \cap D_{(A,g)})$. Além disso, pelo Lema 3.3.1, $D_{(A,g)} \subset D_g$. Assim, $\alpha_h(\alpha_{h^{-1}}(a)b) \in \alpha_h(D_{h^{-1}} \cap D_g)$ e como α é ação parcial, segue que

$$\alpha_{(hg)^{-1}}(\alpha_h(\alpha_{h^{-1}}(a)b)) = \alpha_{g^{-1}}(\alpha_{h^{-1}}(\alpha_h(\alpha_{h^{-1}}(a)b))) = \alpha_{g^{-1}}(\alpha_{h^{-1}}(a)b).$$

Daí,

$$\alpha_{hg}[\alpha_{(hg)^{-1}}(\alpha_h(\alpha_{h^{-1}}(a)b))] = \alpha_{hg}(\alpha_{g^{-1}}(\alpha_{h^{-1}}(a)b)c).$$

Mas, $\alpha_{h^{-1}}(a)b \in D_g \cap D_{h^{-1}}$. Logo, $\alpha_{g^{-1}}(\alpha_{h^{-1}}(a)b) \in \alpha_{g^{-1}}(D_g \cap D_{h^{-1}})$. Portanto,

$$(a\delta_{(B,h)}b\delta_{(A,g)})c\delta_{(C,l)} = \alpha_h[\alpha_g(\alpha_{g^{-1}}(\alpha_{h^{-1}}(a)b)c)]\delta_{(B\cup hA\cup hgC,hgl)}. \tag{3.3.3}$$

Por outro lado, temos

$$a\delta_{(B,h)}(b\delta_{(A,g)}c\delta_{(C,l)}) = a\delta_{(B,h)}(\alpha_g(\alpha_{g^{-1}}(b)c)\delta_{(A\cup gC,gl)}) =$$

$$= \alpha_h(\alpha_{h^{-1}}(a)\alpha_g(\alpha_{g^{-1}}(b)c))\delta_{(B\cup hA\cup hgC,hgl)}. \tag{3.3.4}$$

Comparando 3.3.3 e 3.3.4 e aplicando $\alpha_{h^{-1}}$, obtemos que 3.3.2 vale se, e somente se,

$$\alpha_g[\alpha_{g^{-1}}(\alpha_{h^{-1}}(a)b)c] = \alpha_{h^{-1}}(a)\alpha_g(\alpha_{g^{-1}}(b)c)$$

com $a \in D_{(B,h)}, b \in D_{(A,g)}$ e $c \in D_{(C,l)}$. Como $\widetilde{\alpha}_{(B,h)^{-1}} = \alpha_{h^{-1}}|_{D_{(B,h)}} : D_{(B,h)} \longrightarrow D_{(B,h)^{-1}}$ é um isomorfismo de ideais, então a igualdade acima é equivalente a seguinte:

$$\alpha_g(\alpha_{g^{-1}}(ab)c) = a\alpha_g(\alpha_{g^{-1}}(b)c),$$

para quaisquer $a \in D_{(B,h)^{-1}}, b \in D_{(A,g)}$ e $c \in D_{(C,l)}$.
Considere as funções $R_c : D_{(A,g)^{-1}} \longrightarrow D_{(A,g)^{-1}}$ dada por $R_c(x) = xc$ e $L_a : D_{(A,g)} \longrightarrow D_{(A,g)}$ dada por $L_a(x) = ax$. As funções R_c e L_a assim definidas são multiplicadores a direita de $D_{(A,g)^{-1}}$ e a esquerda de $D_{(A,g)}$, respectivamente. Então a equação anterior é equivalente a seguinte,

$$\alpha_g \circ R_c \circ \alpha_{g^{-1}} \circ L_a(b) = L_a \circ \alpha_g \circ R_c \circ \alpha_{g^{-1}}(b),$$

para quaisquer $a \in D_{(B,h)^{-1}}, b \in D_{(A,g)}$ e $c \in D_{(C,l)}$.
Pela Proposição 3.3.5, temos que $\alpha_g \circ R_c \circ \alpha_{g^{-1}}$ é um multiplicador a direita de $D_{(A,g)}$ e como este é (L, R)-associativo então a última equação é satisfeita. Portanto, a multiplicação em $R \star_{\widetilde{\alpha}} \widetilde{G}$ é associativa. □

Note que se $D_{(A,g)}$ é (L,R)-associativo para todo $(A,g) \in \widetilde{G}$ então D_g é (L,R)-associativo para todo $g \in G$. De fato, basta notar que $D_{(\{1,g\},g)} = D_g$. Consequentemente, quando assumimos que $D_{(A,g)}$ é (L,R)-associativo para todo $(A,g) \in \widetilde{G}$ temos que $R \star_{\widetilde{\alpha}} \widetilde{G}$ e $R \star_\alpha G$ são anéis associativos.

Teorema 3.3.7. *Sejam $\alpha = (\{D_g\}_{g \in G}, \{\alpha_g\}_{g \in G})$ uma ação parcial de um grupo G num anel R e $\widetilde{\alpha} = (\{D_{(A,g)}\}_{(A,g) \in \widetilde{G}}, \{\widetilde{\alpha}_{(A,g)}\}_{(A,g) \in \widetilde{G}})$ a respectiva ação (global) de $\widetilde{G}$ em R. Suponha que os ideais $D_{(A,g)}$ são (L,R)-associativos. Então,*

$$R \star_\alpha G \simeq (R \star_{\widetilde{\alpha}} \widetilde{G})/I,$$

onde I é o ideal de $R \star_{\widetilde{\alpha}} \widetilde{G}$ gerado pelos elementos da forma $a\delta_{(A,g)} - a\delta_{(B,h)}$, com $(A,g) \leq (B,h)$ e $a \in D_{(A,g)}$.

Prova: Considere a função $\varphi : R \star_{\widetilde{\alpha}} \widetilde{G} \longrightarrow R \star_\alpha G$ definida por $\varphi(a\delta_{(A,g)}) = a\delta_g$ e estendida por linearidade. Assim, claramente φ é um homomorfismo sobrejetor de anéis.

Tome $I = \langle a\delta_{(A,g)} - a\delta_{(B,h)};\ a \in D_{(A,g)},\ (A,g) \leq (B,h)\rangle$. Como $(A,g) \leq (B,h)$ então $(A,g) = (B,h)(C,1)$, para algum $(C,1) \in E(\widetilde{G})$. Logo, $g = h$ e, pelo Lema 3.3.2, temos $D_{(A,g)} \subset D_{(B,g)}$. Como $I \subset Ker(\varphi)$, temos que $\phi : (R \star_{\widetilde{\alpha}} \widetilde{G})/I \longrightarrow R \star_\alpha G$ dada por $\phi(\overline{a\delta_{(A,g)}}) = a\delta_g$, onde $\overline{a\delta_{(A,g)}}$ é a classe de $a\delta_{(A,g)}$, está bem definida. Por outro lado, seja $\psi : R \star_\alpha G \longrightarrow (R \star_{\widetilde{\alpha}} \widetilde{G})/I$ dada por $\psi(a\delta_g) = \overline{a\delta_{i(g)}}$, onde $i(g) = (\{1,g\},g)$, e estendida por linearidade. Note que, $D_{i(g)} = D_{(\{1,g\},g)} = D_g$ e daí ψ está bem definida. Mostremos que ψ é um homomorfismo de anéis. De fato, sejam $a \in D_{(A,g)}$ e $b \in D_{(B,h)}$. Então, $\psi(a\delta_{(A,g)}b\delta_{(B,h)}) = \psi(\alpha_g(\alpha_{g^{-1}}(a)b)\delta_{(A \cup gB, gh)}) = \overline{\alpha_g(\alpha_{g^{-1}}(a)b)\delta_{i(gh)}}$. Por outro lado, $\psi(a\delta_{(A,g)})\psi(b\delta_{(B,h)}) = \overline{a\delta_{i(g)}}\ \overline{b\delta_{i(h)}} = \overline{a\delta_{i(g)}b\delta_{i(h)}} = \overline{\alpha_g(\alpha_{g^{-1}}(a)b)\delta_{i(g)i(h)}}$. No entanto, $i(g)i(h) = (\{1,g\},g)(\{1,h\},h) = (\{1,g,gh\},gh) = (\{1,g\},1)i(gh)$ e $(\{1,g\},1)$ é um idempotente de $\widetilde{G}$. Então, $i(g)i(h) \leq i(gh)$. Portanto, $\alpha_g(\alpha_{g^{-1}}(a)b)\delta_{i(g)i(h)} - \alpha_g(\alpha_{g^{-1}}(a)b)\delta_{i(gh)} \in I$. Daí, $\overline{\alpha_g(\alpha_{g^{-1}}(a)b)\delta_{i(g)i(h)}} = \overline{\alpha_g(\alpha_{g^{-1}}(a)b)\delta_{i(gh)}}$. Logo, temos que ψ é um homomorfismo de anéis. Seja $x = \overline{a\delta_{(A,g)}} \in (R \star_{\widetilde{\alpha}} \widetilde{G})/I$. Daí, $\psi\phi(x) = \psi(a\delta_g) = \overline{a\delta_{i(g)}} = x$, pois $(A,g) \leq i(g)$. Além disso, dado $x = a\delta_g \in R \star_\alpha G$ temos $\phi\psi(x) = \phi(\overline{a\delta_{i(g)}}) = a\delta_g = x$. Então, ψ e ϕ são inversas uma da outra. Desta forma, $R \star_\alpha G \simeq (R \star_{\widetilde{\alpha}} \widetilde{G})/I$. □

Observação 3.3.8. *O teorema acima corresponde exatamente ao Teorema 3.7 de [10], porém usando $\widetilde{G}$ ao invés de $S(G)$. Também em [10], o anel $(R \star_\beta S(G))/I$, onde*

$I = \langle a\delta_s - a\delta_t ; a \in D_s$ e $s \leq t\rangle$, é chamado de produto cruzado parcial. Portanto, o Teorema 3.3.7 mostra que o skew anel de grupo parcial é isomorfo ao correspondente produto cruzado parcial.

Referências Bibliográficas

[1] F. Abadie, *Enveloping actions and takai duality for partial actions*, J. Funct. Anal. **197** (2003), 14–67.

[2] D. Bagio, W. Cortes, M. Ferrero, and A. Paques, *Actions of inverse semigroups on algebras*, Comm. Algebra **35** (2007), 3865–3874.

[3] J-C. Birget and J. Rhodes, *Group theory via global semigroup theory*, Journal of Algebra **120** (1989), 284–300.

[4] M. Dokuchaev and R. Exel, *Associativity of crossed products by parcial actions, enveloping actions and partial representations*, Trans. Amer. Math. Soc. **357** (2005), 1931–1952.

[5] M. Dokuchaev, M. Ferrero, and A. Paques, *Partial actions and galois thery*, Journal of Pure and Applied Algebra **208** (2007), 77–87.

[6] R. Exel, *Circle actions on c^*-algebras, partial automorphisms and generalized pimsner-voiculescu exact sequences*, J. Funct. Anal. **122** (1994), 361–401.

[7] ———, *Amenability for fell bundles*, J. Reine Angew. Math. **492** (1997), 41–73.

[8] ———, *Twisted partial actions: a classification of c^*-algebraic bundles*, Proceedings of the London Mathematical Society **74** (1997), 417–443.

[9] ———, *Partial actions of groups and actions of inverse semigroups*, Proceedings of the American Mathematical Society **126** (1998), 3481–3494.

[10] R. Exel and F. Vieira, *Partial crossed product of group g vs crossed product of $s(g)$*, preprint.

[11] M. Ferrero and J. Lazzarin, *Partial actions and partial skew group rings*, Journal Algebra **319** (2008), 5247–5268.

[12] N. D. Gilbert, *Actions and expansions of ordered groupoids*, Journal of Pure and Applied Algebra **198** (2005), 175–195.

[13] J. M. Howie, *An introduction to semigroup theory*, Academic Press, 1976.

[14] J. Kellendonk and M. V. Lawson, *Partial actions of groups*, Internat. J. Algebra Comput. **14** (2004), 87–114.

[15] M. V. Lawson, *Inverse semigroups*, World Scientific, New Jersey, 1998.

[16] K. McClanahan, *k-theory for partial crossed products by discrete groups*, J. Funct. Anal. **130** (1995), 77–117.

[17] G. B. Preston, *Inverse semi-groups*, Journal of London Mathematical Society **29** (1954), 396–403.

[18] ______, *Inverse semi-groups with minimal right ideals*, Journal of London Mathematical Society **29** (1954), 404–411.

[19] ______, *Representations of inverse semi-groups*, Journal of London Mathematical Society **29** (1954), 411–419.

[20] M. Szendrei, *A note on birget-rhodes expansion of groups*, Journal of Pure and Applied Algebra **58** (1989), 93–99.

[21] V. V. Wagner, *Generalized groups*, Doklady Akademii Nauk **84** (1952), 1119–1122.