



**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA MARIA  
CENTRO DE CIÊNCIAS NATURAIS E EXATAS  
CURSO DE GRADUAÇÃO EM FÍSICA**

**CARACTERIZAÇÃO DE TURBULÊNCIA  
COMPLETAMENTE DESENVOLVIDA ATRAVÉS DE  
CUMULANTES E PROCESSOS MULTIPLICATIVOS**

**TRABALHO FINAL DE GRADUAÇÃO**

**Leandro Batirolla Krott**

**Santa Maria, RS, Brasil**

**2010**

# **CARACTERIZAÇÃO DE TURBULÊNCIA COMPLETAMENTE DESENVOLVIDA ATRAVÉS DE CUMULANTES E PROCESSOS MULTIPLICATIVOS**

**por**

**Leandro Batirolla Krott**

Trabalho de Graduação em Física apresentado ao Curso de Graduação em Física, da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM), como requisito parcial para obtenção do grau de **Bacharel em Física**.

Orientador: Prof. Dr. Gervásio Annes Degrazia  
UFSM

Santa Maria, RS, Brasil

2010

**Centro de Ciências Naturais e Exatas  
Curso de Graduação em Física**

A Comissão Examinadora, abaixo assinada,  
aprova o Trabalho Final de Graduação

**CARACTERIZAÇÃO DE TURBULÊNCIA  
COMPLETAMENTE DESENVOLVIDA ATRAVÉS DE  
CUMULANTES E PROCESSOS MULTIPLICATIVOS**

elaborado por

**Leandro Batirolla Krott**

como requisito parcial para obtenção do grau de

**Bacharel em Física.**

**COMISSÃO EXAMINADORA:**

---

**Prof. Dr. Gervásio Annes Degrazia**

**UFSM**

(Orientador)

---

**Prof. Dr. Celso Arami Marques da Silva**

**UFSM**

---

**Doutorando Franciano Scremin Puhales**

**UFSM**

Santa Maria, 12 de Janeiro de 2010.

# Lista de Figuras

1.1	Série temporal de velocidade turbulenta do vento. . . . .	11
1.2	Ilustração do processo de transferência de energia de Richardson. . . . .	12
1.3	Flutuação da taxa de dissipação de energia para dados de a) laboratório e b) de atmosfera. Adaptado de Meneveau e Sreenivasan, 1991, J. Fluid Mech.	12
2.1	Funções estrutura de segunda ordem. . . . .	19
2.2	Funções estrutura de terceira ordem. . . . .	19
2.3	Observação do intervalo inercial pela presença do platô. . . . .	20
2.4	Espectro de energia para dados de túnel de vento e ajuste para o intervalo inercial. . . . .	21
2.5	Funções densidade de probabilidade dos incrementos de velocidade do vento.	22
3.1	Momentos adimensionalizados, curtose e assimetria. . . . .	25
4.1	Processo estocástico baseado no modelo log-normal. . . . .	32
4.2	a) Série inicial e b) série obtida no passo $m = 10$ . . . . .	33
4.3	Processo estocástico baseado no modelo log-normal. . . . .	34
5.1	Autocorrelação normalizada para dados de velocidade longitudinal medidos em túnel de vento. . . . .	36
5.2	Comparação dos espectros de energia obtidos para os dados de túnel de vento. . . . .	36
5.3	Cumulantes de primeira, segunda e terceira ordem para dados de túnel de vento. . . . .	38
5.4	Cumulantes de primeira, segunda e terceira ordem para dados de atmosfera e LES. . . . .	39
5.5	Comportamento dos cumulantes de primeira ordem. . . . .	39
5.6	Verificação da proporcionalidade dos cumulantes pela função $F(p)$ . . . . .	40

5.7	Análise da proporcionalidade dos cumulantes para $R_\lambda = 1642$ . . . . .	40
5.8	a) Série sintética obtida pelo processo multiplicativo e b) cumulantes de primeira ordem para séries de tamanhos $2^{10}$ , $2^{12}$ e $2^{15}$ pontos. . . . .	41
5.9	Determinação de $\beta$ pela derivada logarítmica de $C_1$ . . . . .	42

# Lista de Tabelas

5.1	Valores que caracterizam os escoamentos em túnel de vento. . . . .	37
5.2	Valores que caracterizam os escoamentos de atmosfera e LES. . . .	37
5.3	Valores dos log-cumulantes e do coeficiente de intermitência para Paraíso do Sul e túneis de vento. . . . .	38
5.4	Valores encontrados para o coeficiente $\beta$ para dados de túnel de vento e atmosfera. . . . .	42

# Sumário

<b>Resumo</b>	<b>8</b>
<b>Abstract</b>	<b>9</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>10</b>
<b>2 Teoria Estatística da Turbulência</b>	<b>14</b>
2.1 Equações de Navier Stokes . . . . .	14
2.2 Caracterização de um escoamento turbulento . . . . .	15
2.2.1 Escalas . . . . .	16
2.3 Leis de Kolmogorov . . . . .	17
2.4 Intermitência em pequenas escalas . . . . .	19
<b>3 Análise estatística de cumulantes</b>	<b>23</b>
3.1 Obtenção dos cumulantes . . . . .	23
3.2 Proporcionalidade de cumulantes em turbulência . . . . .	24
<b>4 Séries sintéticas para teste dos cumulantes</b>	<b>31</b>
4.1 Processo Estocástico . . . . .	31
<b>5 Resultados obtidos</b>	<b>35</b>
5.1 Dados analisados . . . . .	35
5.2 Estudo dos cumulantes . . . . .	37
<b>6 Conclusões</b>	<b>43</b>
<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>44</b>

# RESUMO

Trabalho Final de Graduação  
Universidade Federal de Santa Maria

## **CARACTERIZAÇÃO DE TURBULÊNCIA COMPLETAMENTE DESENVOLVIDA ATRAVÉS DE CUMULANTES E PROCESSOS MULTIPLICATIVOS**

AUTOR: LEANDRO BATIROLLA KROTT

ORIENTADOR: PROF. DR. GERVÁSIO ANNES DEGRAZIA  
UFSM

Data e Local da Defesa: Santa Maria, 12 de Janeiro de 2010.

Neste trabalho estudamos escoamentos que apresentam turbulência completamente desenvolvida, ou seja, escoamentos caracterizados por elevados números de Reynolds. Após uma revisão teórica fundamentada no modelo de Kolmogorov de 1941, estudamos o conceito de intermitência em pequenas escalas através de cumulantes, definidos como os momentos do logaritmo dos incrementos de velocidade do vento. Obteremos os cumulantes de primeira, segunda e terceira ordem para dados obtidos em túnel de vento, atmosfera e Simulação dos Grandes Turbilhões (LES). Buscamos caracterizar a intermitência através do coeficiente de intermitência para o modelo log-normal, que pode ser obtido pelo ajuste dos cumulantes de segunda ordem. A técnica baseada em cumulantes é uma alternativa para métodos clássicos, como análise de funções estrutura de sexta ordem e correlação da taxa de dissipação de energia. De acordo com Malécot et al. (2000), os cumulantes de primeira e segunda ordem são proporcionais e por isso podemos determinar um coeficiente  $\beta$ , cujo comportamento é supostamente universal com o número de Reynolds. De forma complementar, estudamos a obtenção de processos estocásticos baseados nos modelos log-normal e log-Poisson [Kiyono 2009] e também de processos multiplicativos de cascata, obtidos a partir de variáveis gaussianas de média zero e variância constante. As séries geradas apresentam comportamento de turbulência completamente desenvolvida e portanto podem ser usadas como teste de precisão do método baseado em cumulantes. O coeficiente  $\beta$  indica que os cumulantes podem ser escritos por uma lei de potência.



# **ABSTRACT**

Trabalho Final de Graduação  
Universidade Federal de Santa Maria

## **CARACTERIZATION OF FULLY DEVELOPED TURBULENCE USING CUMULANTS AND MULTIPLICATIVE PROCESSES**

AUTOR: LEANDRO BATIROLLA KROTT

ORIENTADOR: PROF. DR. GERVÁSIO ANNES DEGRAZIA  
UFSM

Data e Local da Defesa: Santa Maria, 12 de Janeiro de 2010.

In this work we study drainings that present fully developed turbulence, that is, drainings characterized for raised Reynolds numbers. After a theoretical revision based on the model of Kolmogorov of 1941, we study the concept of intermittency in small scales through cumulants, defined as the logarithms moments of the increments of speed of the wind. We will get the cumulants of first, second and third order for data gotten in wind tunnel, atmosphere and Large Eddy Simulation (LES). We search to characterize the intermittency through the coefficient of intermittency for the log-normal model, that can be gotten for the adjustment of the cumulantes of second order. The technique based on cumulantes is an alternative for classic methods, as analysis of functions structure of sixth order and correlation of the waste rate of energy. In accordance with Malécot et al. (2000), the cumulants of first and second order are proportional and therefore we can determine a coefficient  $\beta$ , whose behavior it is supposedly universal with the Reynolds number. Of complementary form, we study the attainment of random processes based in the models log-normal and log-Poisson [Kiyono 2009] and of multiplicatives cascade processes, gotten from gaussian variables of average zero and constant variance. The generated series present behavior of fully developed turbulence and therefore they can be used as test of precision of the method based on cumulants. The coefficient  $\beta$  indicates that the cumulants can be written by a power law.

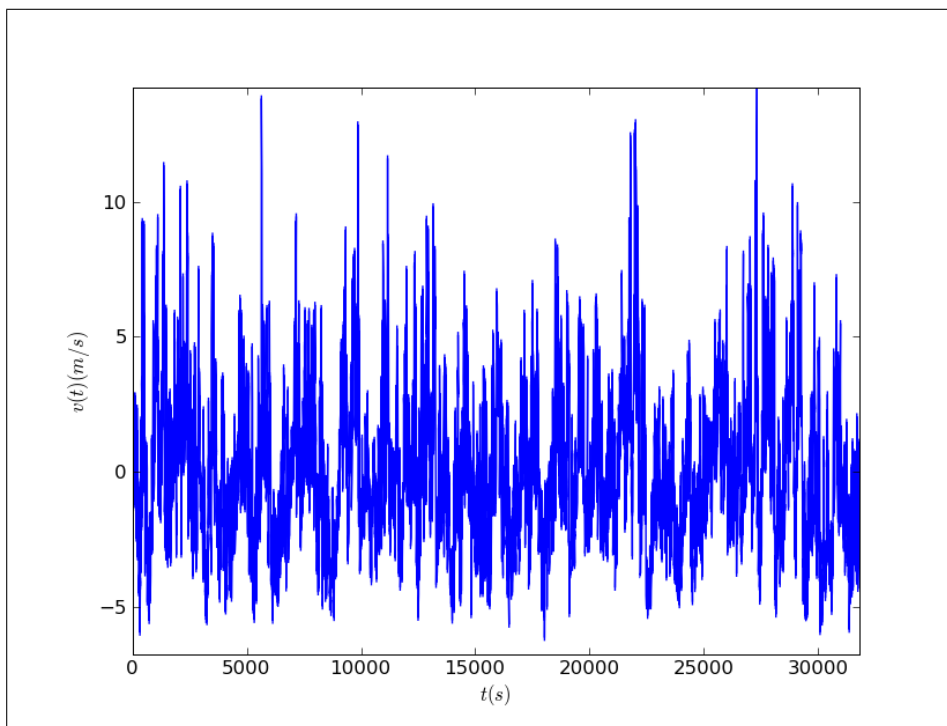
# Capítulo 1

## Introdução

Um dos grandes problemas clássicos que ainda persiste como fonte de muita pesquisa diz respeito à turbulência. O foco dos estudos está na análise de séries de velocidade do vento, temperatura e outras grandezas que caracterizam o meio em que o escoamento acontece. Nos últimos anos tem crescido a atenção para o estudo de séries temporais e de suas respectivas funções distribuição de probabilidade. Como exemplo, além da hidrodinâmica, podemos citar a física de plasmas, a econofísica e alguns sistemas quânticos, como o condensado de Bose-Einstein [Henn et al. 2009].

Estamos interessados em turbulência completamente desenvolvida, condição de validade para a maioria dos modelos estatísticos que descrevem este tipo de fenômeno. Na atmosfera, devido a influência de muitos forçantes, podemos observar facilmente escoamentos com turbulência completamente desenvolvida. Experimentos de laboratório (túnel de vento), assim como os modelos de simulação (LES- *Large Eddy Simulation*, por exemplo), procuram reproduzir as principais características desses escoamentos, mas obviamente não adquirem as mesmas proporções daquelas observadas na atmosfera. A figura 1.1 representa uma série temporal de velocidade turbulenta do vento obtida em um experimento de túnel de vento.

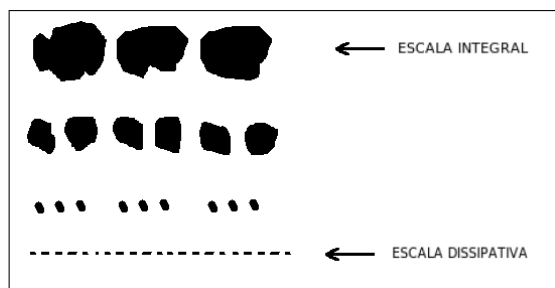
O regime de um escoamento é determinado pelo chamado número de Reynolds (adimensional), definido como a razão entre os forçantes inerciais e viscosos do escoamento. Para um determinado número de Reynolds (número de Reynolds crítico), o escoamento que antes era suave e bem definido (laminar) passa a ser irregular ou simplesmente turbulento, caracterizado por vórtices ou turbilhões de diferentes tamanhos (escalas) e pelo aumento na resistência do escoamento.



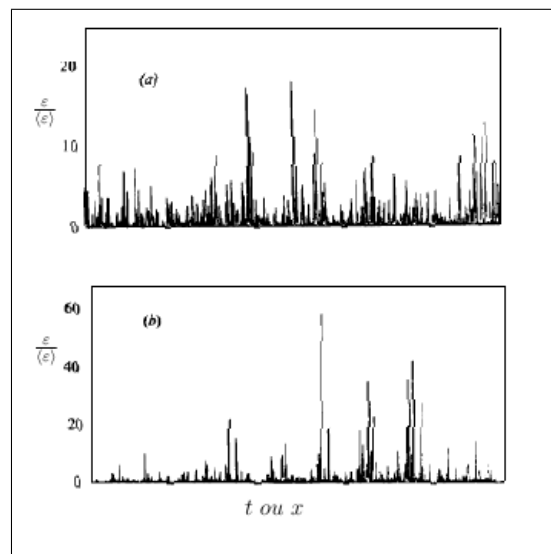
**Figura 1.1:** Série temporal de velocidade turbulenta do vento.

O processo de transferência de energia foi primeiramente previsto por Richardson em 1922 através do seu modelo em que a energia se transfere dos grandes turbilhões para os pequenos por um processo de cascata, como mostra a figura 1.2. Em 1941, Kolmogorov usou esta idéia em seu modelo (K41) e sugeriu que a transferência de energia acontecia a uma taxa média constante  $\varepsilon$ . Esta idéia seria válida para o intervalo inercial, onde as escalas microscópicas e macroscópicas não teriam influência. Kolmogorov expressou seu modelo fractal através das funções estrutura de ordem  $n$ , porém mais tarde percebeu-se que estas idéias estavam erradas, pois não eram válidas para funções estrutura de ordens elevadas. O problema estava no fato de que a taxa de dissipação de energia apresentava uma flutuação muito intensa nas pequenas escalas (figura 1.3), conhecida como intermitência, o que levou Kolmogorov a reformular seu modelo. O modelo de Kolmogorov e Obukhov de 1962, ou log-normal, considera que os expoentes das funções estrutura não variam linearmente com a sua ordem  $n$ , sendo o coeficiente de intermitência  $\mu$  um indicador da natureza da intermitência. Assim como este, outros modelos surgiram como proposta de substituição ao modelo K41.

Após esta revisão teórica relacionada à teoria estatística da turbulência, partiremos para uma metodologia proposta por Malécot et al. (2000), que consiste



**Figura 1.2:** Ilustração do processo de transferência de energia de Richardson.



**Figura 1.3:** Flutuação da taxa de dissipação de energia para dados de a) laboratório e b) de atmosfera. Adaptado de Meneveau e Sreenivasan, 1991, J. Fluid Mech.

no estudo dos cumulantes para os incrementos de velocidade do vento. É verificado que os cumulantes são proporcionais ao logaritmo da escala de medição, e as constantes de proporcionalidade são chamadas de log-cumulantes. Delour et al. (2001) propuseram que os expoentes das funções estrutura pudessem ser escritos em termos dos log-cumulantes. Então, eles verificaram que o coeficiente de intermitência pode ser obtido a partir do log-cumulante de segunda ordem. Além disso, analisaremos a função geradora dos cumulantes, que permite verificar a proporcionalidade dos cumulantes de primeira e segunda ordem e a conseqüente determinação de um coeficiente  $\beta$ , cujo comportamento a princípio é universal com o número de Reynolds. O interesse está no fato de que através deste coeficiente podemos determinar parâmetros até então inacessíveis pelas análises clássicas dos dados.

Para testar a eficiência desta técnica baseada em cumulantes, propomos obter séries temporais sintéticas que caracterizam escoamentos com turbulência completamente desenvolvida [Kiyono 2009]. Estas séries são geradas pelos modelos log-normal e log-Poisson através de variáveis gaussianas de média zero e variância constante. Também iremos gerar processos multiplicativos de cascata pela superposição destas variáveis gaussianas [Kiyono, Struzik e Yamamoto 2007], que irá determinar séries temporais de média zero, porém variância heterogênea. Esta

metodologia prevê log-cumulantes diferentes daqueles previstos por Malécot et al. (2000) , porém se mostra eficiente como teste de verificação dos resultados obtidos.

Veremos que o coeficiente  $\beta$  é uma função do número de Reynolds e uma vez obtido um *ensemble* canônico para os incrementos de velocidade do vento podemos associá-lo à temperatura de um sistema termodinâmico.

# Capítulo 2

## Teoria Estatística da Turbulência

Como a turbulência é um fenômeno que envolve muitos graus de liberdade, o que acarreta em situações extremamente complexas, necessitamos estudá-la através de ferramentas estatísticas. Neste capítulo faremos um estudo da teoria estatística da turbulência, como parte de uma revisão bibliográfica. Primeiramente veremos algumas definições, como número de Reynolds e correlação da velocidade. Adiante, veremos como o modelo de Kolmogorov de 1941 tenta descrever a turbulência isotrópica e homogênea no intervalo inercial através de funções estrutura e porque seu modelo teve que ser reformulado, dando início a uma série de estudos voltados para as flutuações da taxa de dissipação de energia (intermitência).

### 2.1 Equações de Navier Stokes

Para descrever o escoamento de um fluido, consideramos as equações de Navier Stokes abaixo

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \vec{v} + \vec{f} \quad (2.1)$$

e

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0, \quad (2.2)$$

sendo  $\vec{v}$  o vetor velocidade de escoamento,  $\rho$  a densidade do fluido,  $p$  a pressão,  $\nu$  a viscosidade cinemática e  $\vec{f}$  a aceleração devido às forças externas que atuam no fluido.

A equação 2.2 indica que estamos admitindo um fluido incompressível, ou seja, sua densidade não varia sobre o volume ou o escoamento do fluido [Landau e Lifshitz 1959], pois se tomarmos a equação da continuidade

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{v} = 0 \quad (2.3)$$

para  $\rho$  constante no tempo, encontramos o resultado desejado.

A equação de Navier Stokes prevê muitas simetrias, que são quebradas conforme um escoamento passa de laminar para turbulento, porém para números de Reynolds muito grandes estas simetrias vão sendo estatisticamente restauradas [Frisch 1995]. Escoamentos com elevados números de Reynolds e cujas simetrias são restauradas são caracterizados pela turbulência completamente desenvolvida. Para descrever sistemas de interesse, como escoamentos na atmosfera, precisamos encontrar soluções através de métodos numéricos, uma vez que ainda não existe uma solução analítica das equações de Navier Stokes.

## 2.2 Caracterização de um escoamento turbulento

Primeiramente imaginamos um tubo de diâmetro  $L$  por onde escoar um determinado fluido de viscosidade  $\nu$  a uma velocidade média  $V$ . Estes parâmetros permitem caracterizar o escoamento através do chamado número de Reynolds, que pode ser escrito como

$$Re = \frac{LV}{\nu}. \quad (2.4)$$

Mais adiante veremos que o diâmetro  $L$  é uma escala macroscópica por onde a energia é injetada.

Um escoamento laminar é caracterizado por um comportamento suave, com velocidades bem definidas. Já um escoamento turbulento é determinado pela intensa variação da sua velocidade, havendo formação de vórtices ou turbilhões de diferentes escalas. O número de Reynolds nos diz o quanto a turbulência está desenvolvida e, quanto maior seu valor, mais turbulento o escoamento é considerado. Na atmosfera são muitos os fatores que influenciam na observação de turbulência

completamente desenvolvida, como prédios, árvores e montanhas, além de temperatura e umidade.

A fim de descrever a dinâmica destes sistemas turbulentos, podemos introduzir a equação de von Kármán-Howarth, que usa a definição de autocorrelação. Precisamos lembrar que correlação de velocidade é um tensor de segunda ou terceira ordem, cuja definição geral é

$$A_{ij}(\vec{r}, t) = \langle v_i(\vec{x}, t)v_j(\vec{x} + \vec{r}, t) \rangle. \quad (2.5)$$

Então a equação de von Kármán-Howarth pode ser expressa como

$$\frac{\partial A_{11}}{\partial t} = \frac{\partial A_{111}}{\partial r} + \frac{4A_{111}}{r} + 2\nu \left( \frac{\partial^2 A_{11}}{\partial r^2} + \frac{4}{r} \frac{\partial A_{11}}{\partial r} \right), \quad (2.6)$$

onde  $A_{11}$  e  $A_{111}$  são autocorrelações de segunda e terceira ordem, respectivamente.

A forma como os turbilhões dissipam energia está diretamente ligada ao conceito de taxa de dissipação de energia  $\varepsilon$ , que pode ser escrita da seguinte forma

$$\varepsilon = -\nu \left\langle v \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right\rangle, \quad (2.7)$$

sendo  $\nu$  a viscosidade cinemática do fluido e  $v$  sua velocidade na direção  $x$ . Em turbulência isotrópica e homogênea, podemos escrever esta expressão como  $15\nu v_{rms}/\lambda^2$ , onde  $v_{rms} = \langle (\partial v / \partial x)^2 \rangle$  e  $\lambda$  é uma escala microscópica. Para encontrarmos o valor de  $\varepsilon$  através da definição dada em 2.7, precisamos de séries temporais muito longas para que haja convergência estatística e o resultado seja adequado.

### 2.2.1 Escalas

Na definição do número de Reynolds usamos uma escala macroscópica  $L$  ou integral, enquanto que para turbulência isotrópica e homogênea, escrevemos a taxa de dissipação de energia usando a definição de uma escala microscópica  $\lambda$ , também conhecida como microescala de Taylor. Também estamos interessados na escala onde ocorre a dissipação de energia, conhecida como escala dissipativa de Kolmogorov  $\eta$ . A injeção de energia acontece nas grandes escalas, ou seja, em



escalas próximas à integral, cuja definição depende do conceito de autocorrelação, como segue

$$L = \frac{1}{A_{11}(0)} \int_0^{\infty} A_{11}(r) dr. \quad (2.8)$$

Assim como foi definido um número de Reynolds para a escala integral  $L$ , também podemos fazer para a microescala de Taylor  $\lambda$ . Neste sentido, estamos falando do número de Reynolds-Taylor ( $R_\lambda$ ) relacionado com flutuações locais para as pequenas escalas [L.Moriconi 2006].

A turbulência é considerada isotrópica e homogênea para um intervalo onde não há influência nem das grandes escalas nem das pequenas, o chamado intervalo inercial  $\eta \ll r \ll L$ , sendo  $\eta = (\nu^3/\varepsilon)^{1/4}$ . Grande parte dos modelos estatísticos são desenvolvidos de acordo com as propriedades do intervalo inercial, o que justifica a importância deste conceito. Em túnel de vento, as escalas  $L$ ,  $\lambda$  e  $\eta$  tem valores da ordem de  $1m$ ,  $10^{-3}m$  e  $10^{-5}m$ , enquanto que para a atmosfera estes valores correspondem a  $100m$ ,  $10^{-2}m$  e  $10^{-4}m$ , respectivamente.

## 2.3 Leis de Kolmogorov

Nesta seção busca-se fazer um breve relato das Leis de Kolmogorov para as funções estrutura de segunda e terceira ordem, abordando a intermitência em pequenas escalas.

Tentando descrever a dinâmica de escoamentos turbulentos, Kolmogorov reescreveu a equação de von Kármán-Howarth usando uma definição semelhante às correlações para a velocidade. Trata-se das funções estrutura de ordem  $n$ , cuja definição é

$$S_n(r) = \langle \delta v_r^n \rangle, \quad (2.9)$$

sendo  $\delta v_r(x) = v(x+r) - v(x)$  a diferença de velocidades medidas em dois pontos separados por uma distância  $r$  ou, simplesmente, incremento de velocidade.

Então, usando a definição das funções estrutura, reescrevemos a equação de von Kármán-Howarth da seguinte forma

$$\frac{\partial S_2}{\partial t} = -\frac{4}{3}\varepsilon - \frac{1}{3}\left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{4}{r}\right)S_3 + 2\nu\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{4}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)S_2. \quad (2.10)$$

As funções estrutura estão relacionadas com o fluxo turbulento de energia. Richardson, em 1922, previu que a transferência de energia dos grandes turbilhões para os pequenos se fazia por meio de um processo multiplicativo isotrópico (RICHARDSON, 1922) .

Kolmogorov, em 1941, acreditava que apenas os fluxos médios de energia ( $\varepsilon$ ) eram relevantes na cascata de Richardson, possuindo uma estrutura universal numa faixa de escalas (intervalo inercial). Este era o modelo K41, sendo o intervalo inercial definido para valores de  $r$  entre a escala dissipativa de Kolmogorov  $\eta$  e a escala integral  $L$  (definida pela equação 2.8), ou seja,  $\eta \ll r \ll L$ . Neste modelo a turbulência é assumida isotrópica e homogênea , (FRISCH, 1995) . Portanto, os grandes turbilhões se dividiriam em outros menores, num processo de dissipação de energia das grandes escalas (escala integral) para as pequenas (escala dissipativa de Kolmogorov).

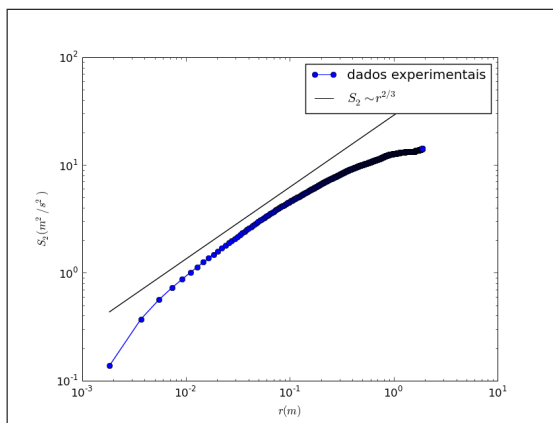
Sendo assim, considerando  $L \rightarrow \infty$  e  $\eta \rightarrow 0$  , pode-se escrever as funções estrutura da seguinte forma para o intervalo inercial  $\eta \ll r \ll L$ ,

$$S_n(r) = C_n(\varepsilon r)^{n/3}. \quad (2.11)$$

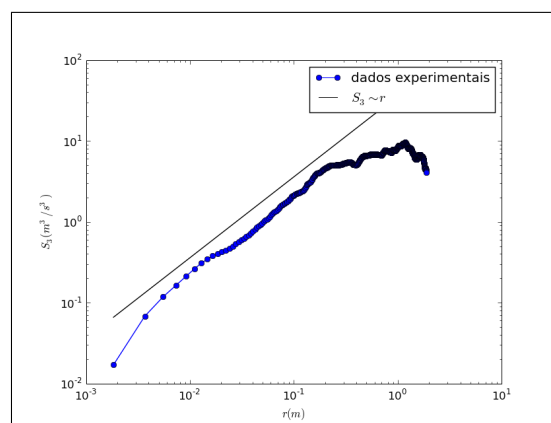
Para as funções estrutura de segunda ordem ( $n = 2$ ) obtemos a lei dos  $2/3$  de Kolmogorov, ou seja,  $S_2(r) = C_2\varepsilon^{2/3}r^{2/3}$ , sendo  $C_2 \approx 2,13$ . De forma similar, obtemos para  $n = 3$  a função estrutura de terceira ordem  $S_3(r) = -(4/5)\varepsilon r$ , conhecida como lei dos  $4/5$  de Kolmogorov. As figuras 2.1 e 2.2 mostram o comportamento das funções estrutura de segunda e terceira ordem, com a curva demonstrativa para o intervalo inercial. Podemos visualizar o intervalo inercial pela análise das funções estrutura. A figura 2.3 mostra um platô, correspondente a este intervalo.

Outra forma de caracterizar um escoamento é através do perfil do espectro de energia em 3D da série analisada, que pode ser definido como uma transformada de Fourier da autocorrelação da velocidade do vento  $A_{ij}(r)$ , como segue

$$E(k) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int A_{ij}(r) \exp(-i\vec{k} \cdot \vec{r}) d^3\vec{r}. \quad (2.12)$$



**Figura 2.1:** Funções estrutura de segunda ordem.



**Figura 2.2:** Funções estrutura de terceira ordem.

No intervalo inercial, o espectro de energia obedece a uma relação do tipo  $E(k) \propto k^{-5/3}$ . Um exemplo de espectro de energia para dados de túnel de vento pode ser visualizado na figura 2.4.

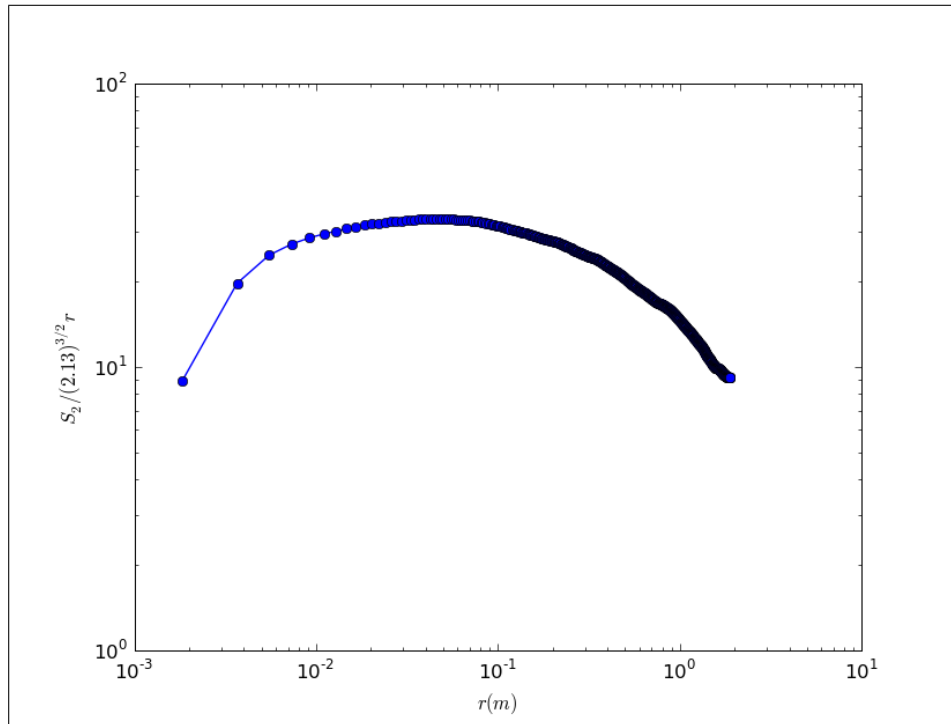
Quando tentamos determinar funções estrutura de ordem maior que  $n = 3$ , verificamos que ocorrem desvios daquilo previsto por Kolmogorov em 1941. Isto o levou a reformular seu próprio modelo em 1962, levando em consideração um outro fenômeno, chamado intermitência, que será discutido a partir de agora.

## 2.4 Intermitência em pequenas escalas

A intermitência em pequenas escalas está associada às flutuações não gaussianas dos incrementos de velocidade, ou seja, suas funções densidade de probabilidade mudam de acordo com a escala que está sendo considerada. Também pode ser entendida como flutuações intensas da taxa de dissipação de energia no tempo e espaço.

Os desvios da predição linear (monofractal) dos expoentes das funções estrutura de velocidade preditos da teoria de Kolmogorov de 1941 podem ser observados nos expoentes das funções estrutura de ordens elevadas e isto acontece devido ao fenômeno de intermitência. Sendo assim, as funções estrutura precisam ser escritas como  $S_n \propto r^{\zeta_n}$ , onde os modelos deixam de ser monofractais ( $\zeta_n = n/3$ ) e passam a ser multifractais ou não lineares.

A figura 2.5 representa as funções densidade de probabilidade não gaussianas, que caracterizam a intermitência.



**Figura 2.3:** Observação do intervalo inercial pela presença do platô.

Considerando o fenômeno de intermitência, outros modelos foram propostos para prever o comportamento dos expoentes  $\zeta_n$  das funções estrutura. Um dos modelos que surgiu para explicar os desvios de K41 foi o modelo log-normal. Neste modelo, Kolmogorov e Obukhov assumiram uma distribuição log-normal para a taxa de dissipação de energia  $\varepsilon$ . Os expoentes das funções estrutura passaram a ser escritos da seguinte maneira

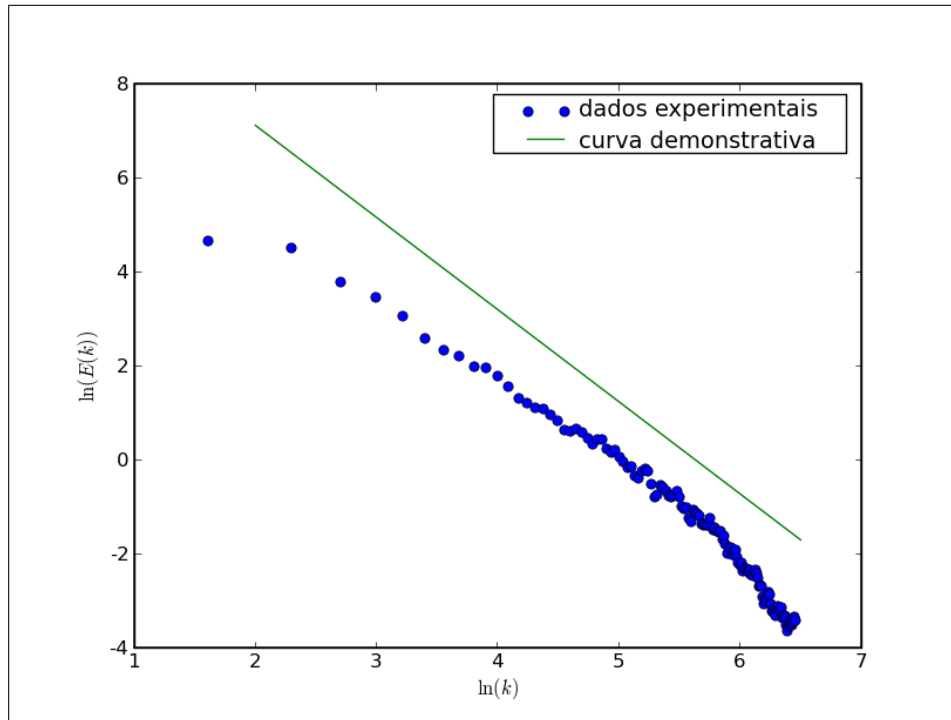
$$\zeta_n = \frac{n}{3} + \frac{\mu}{18}(3n - n^2), \quad (2.13)$$

sendo  $\mu$  conhecido como coeficiente de intermitência.

Este coeficiente de intermitência é usado para caracterizar a natureza da intermitência [Basu et al. 2007] e existem várias maneiras de estimá-lo. De acordo com Cleve et al. (2004), podemos relacionar a correlação da taxa de dissipação de energia com o coeficiente de intermitência

$$\langle \varepsilon(x+r)\varepsilon(x) \rangle \propto r^{-\mu}, \quad (2.14)$$

sendo esta definida como uma média espacial.



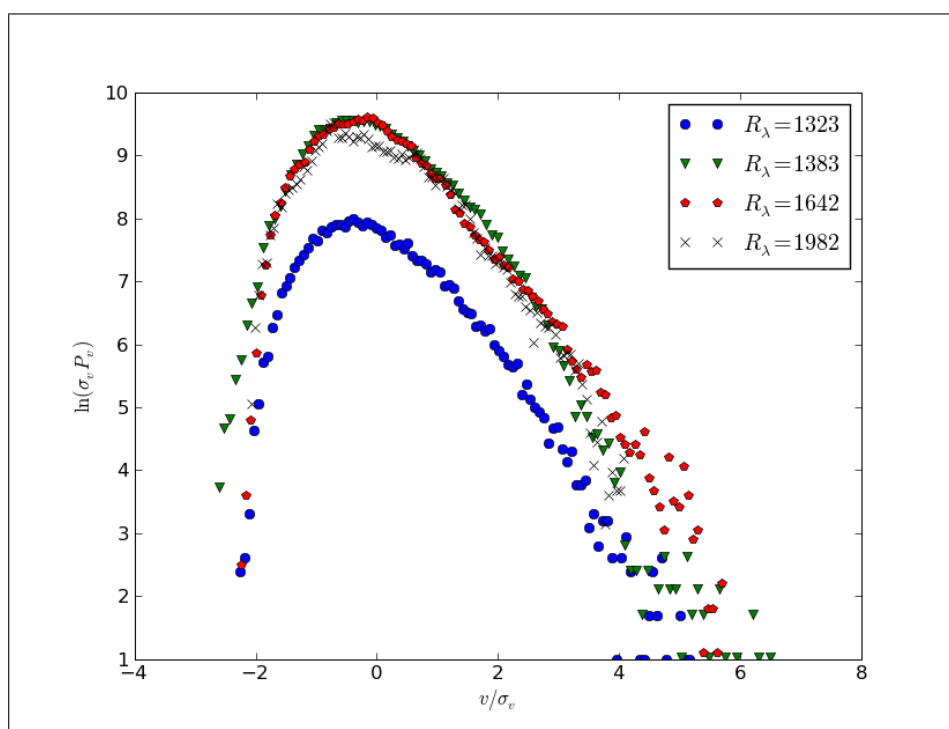
**Figura 2.4:** Espectro de energia para dados de túnel de vento e ajuste para o intervalo inercial.

Outra forma de estimar o coeficiente de intermitência é através das funções estrutura de sexta ordem [Anselmet et al. 1984]

$$S_6(r) = \langle (u(x+r) - u(x))^6 \rangle \sim r^2 \langle \varepsilon(x) \varepsilon(x+r) \rangle, \quad (2.15)$$

ou seja,  $S_6(r) \propto r^{2-\mu}$ .

Ambas as maneiras exigem séries temporais longas e muita precisas, o que dificulta o seu estudo. Por este motivo, utilizaremos um método baseado na expansão das funções estrutura em séries de cumulantes para caracterizar os escoamentos intermitentes. Veremos que existe a possibilidade de obter um coeficiente cujo comportamento acredita-se que seja universal com o número de Reynolds. Estudaremos as implicações e exigências para obtenção deste coeficiente e possíveis aplicações para análise de dados de atmosfera e LES.



**Figura 2.5:** Funções densidade de probabilidade dos incrementos de velocidade do vento.

# Capítulo 3

## Análise estatística de cumulantes

Neste capítulo introduziremos uma técnica proposta por Malécot et al. (2000), que consiste na expansão em séries de cumulantes das funções estrutura em escalas diferentes  $r$  e  $l$  ( $r \leq l$ ), definindo assim um multiplicador aleatório  $\alpha_{rl} = \delta v(r)/\delta v(l)$ . Os cumulantes obtidos a partir daí são os momentos centrais de  $\ln(\alpha_{rl})$ . A escala  $l$  pertence ao intervalo dos grandes turbilhões, uma região em que a função densidade de probabilidade é gaussiana, portanto seu valor pode ser estimado usando a definição dos momentos estatísticos (curtose e assimetria). É observado que os cumulantes são proporcionais ao logaritmo da escala  $r$  de separação das medidas de velocidade do vento, e as constantes de proporcionalidade são conhecidas como log-cumulantes. Podemos escrever os expoentes das funções estrutura como uma série dos log-cumulantes e por comparação com o modelo log-normal obtemos o coeficiente de intermitência  $\mu$  pelo ajuste dos cumulantes de segunda ordem. Através da função geradora dos cumulantes, veremos a possibilidade de que os cumulantes de primeira e segunda ordem sejam proporcionais. Em caso afirmativo, podemos associá-los a uma lei de escala, onde  $C_{1,2} \sim r^\beta$ . O expoente  $\beta$  deve ter um comportamento universal com o número de Reynolds-Taylor.

### 3.1 Obtenção dos cumulantes

Os cumulantes são definidos como os momentos de uma variável aleatória  $v$ , cuja função densidade de probabilidade é  $p(v)$ . A sua obtenção é feita através de uma função característica  $g(k)$ , que é a transformada de Fourier da distribuição de probabilidade da respectiva variável aleatória. Então escreve-se

$$g(k) = \int p(v)e^{ikv} dv. \quad (3.1)$$

Da forma que está escrito, podemos entender a função  $g(k)$  como o valor esperado de  $e^{ikv}$ , ou seja,  $g(k) = \langle e^{ikv} \rangle$ . Expandindo em séries de Maclaurin esta relação, obtemos

$$g(k) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(ik)^j}{j!} \langle v^j \rangle \quad (3.2)$$

ou

$$g(k) = \exp \left( \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(ik)^j}{j!} C_j(r) \right), \quad (3.3)$$

onde  $C_j$  representa os cumulantes da variável aleatória  $v$ .

Comparando as equações 3.2 e 3.3, pode-se expressar os cumulantes de primeira, segunda e terceira ordem da seguinte forma

$$C_1(r) = \langle v \rangle, \quad (3.4)$$

$$C_2(r) = \langle (v - \langle v \rangle)^2 \rangle, \quad (3.5)$$

$$C_3(r) = \langle v^3 \rangle - 3 \langle v^2 \rangle \langle v \rangle + 2 \langle v \rangle^3. \quad (3.6)$$

## 3.2 Proporcionalidade de cumulantes em turbulência

Nesta seção é apresentada a técnica proposta por Malécot et al. (2000). Ela consiste em expandir a razão das funções estrutura nas escalas  $r$  e  $l$  em séries de cumulantes. Para isso, primeiramente considera-se o incremento de velocidade na escala  $r$  como sendo o seguinte

$$\delta v(r) = v(x+r) - v(x). \quad (3.7)$$

O incremento de velocidade, primeiramente escrito como  $\delta v(r)$ , passará a ser escrito como  $\delta v_r$ . Tomamos agora um multiplicador aleatório  $\alpha_{rl}$  para duas escalas  $r$  e  $l$ , sendo  $r \leq l$



$$\delta v_r \stackrel{lei}{=} \alpha_{rl} \delta v_l. \quad (3.8)$$

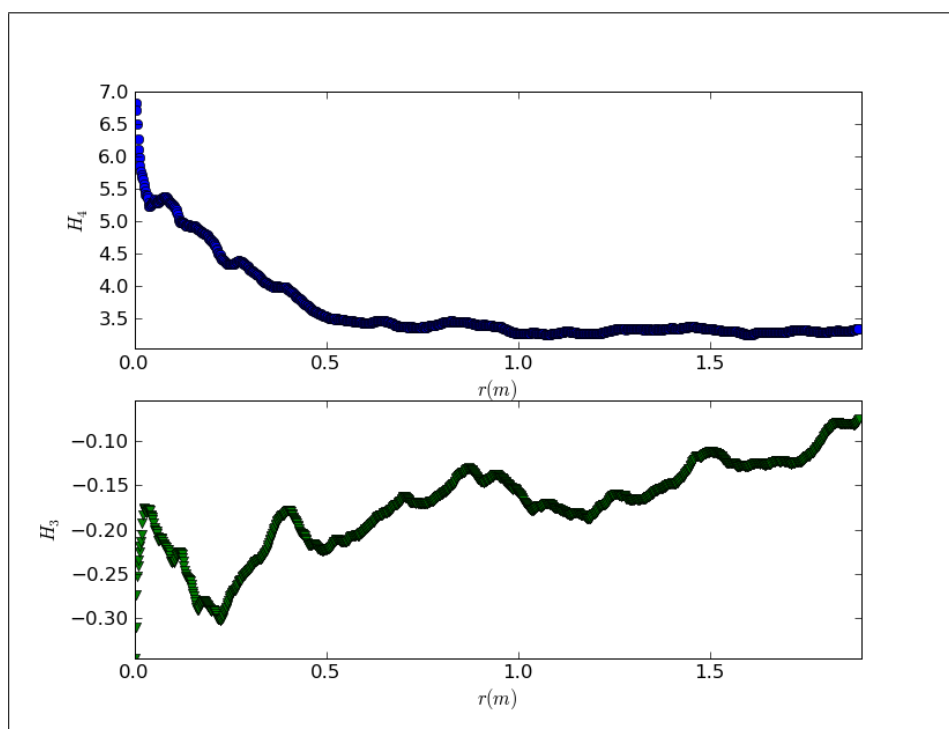
A escala  $l$  caracteriza incrementos de velocidade com distribuição gaussiana. Podemos determinar seu valor pela análise da assimetria e da curtose, definidas respectivamente como

$$H_3 = \frac{\langle (\delta v_r)^3 \rangle}{\langle (\delta v_r)^2 \rangle^{3/2}} \quad (3.9)$$

e

$$H_4 = \frac{\langle (\delta v_r)^4 \rangle}{\langle (\delta v_r)^2 \rangle^2}. \quad (3.10)$$

Os valores de  $H_3$  e  $H_4$  para uma distribuição gaussiana são iguais a 0 e 3, respectivamente. Então, a escala  $l$  é aquela correspondente à região em que esta condição é obedecida. A figura 3.1 usa dados de túnel de vento para exemplificar o comportamento de  $H_3$  e  $H_4$ .



**Figura 3.1:** Momentos adimensionalizados, curtose e assimetria.

Precisamos mostrar que a seguinte relação é verdadeira

$$\langle |\alpha_{rl}|^n \rangle = \frac{\langle |\delta v_r|^n \rangle}{\langle |\delta v_l|^n \rangle}. \quad (3.11)$$

O procedimento consiste em determinar o valor esperado do produto dos incrementos de velocidade, ou momentos compostos  $\langle |\delta v_r|^n |\delta v_l|^m \rangle$ , como segue

$$\langle |\delta v_r|^n |\delta v_l|^m \rangle = \int \int |\delta v_r|^n |\delta v_l|^m p(\delta v_r; \delta v_l) d\delta v_r d\delta v_l, \quad (3.12)$$

onde  $p(\delta v_r; \delta v_l)$  é a função densidade de probabilidade conjunta.

A escala  $l$  é pertencente ao intervalo das escalas integrais, enquanto que a escala  $r$  pertence ao intervalo inercial, o que indica que possuem distribuições de probabilidades independentes, ou seja,

$$p(\delta v_r; \delta v_l) = p(\delta v_r)p(\delta v_l). \quad (3.13)$$

Como consequência,

$$\begin{aligned} \langle |\delta v_r|^n |\delta v_l|^m \rangle &= \int |\delta v_r|^n p(\delta v_r) d\delta v_r \int |\delta v_l|^m p(\delta v_l) d\delta v_l \\ \langle |\delta v_r|^n |\delta v_l|^m \rangle &= \langle |\delta v_r|^n \rangle \langle |\delta v_l|^m \rangle. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Sendo assim, a média da razão, considerando probabilidades independentes, será a razão das médias, conforme está escrito em 3.11.

Podemos caracterizar a variável aleatória  $\alpha_{rl}$  através de sua função densidade de probabilidade [Castaing, Gagne e Hopfinger 1990]

$$P_r(\delta v_r) = \int G_{rl}(\ln \alpha_{rl}) \frac{1}{\alpha_{rl}} P_l \left( \frac{\delta v_l}{\alpha_{rl}} \right) d \ln \alpha_{rl}, \quad (3.15)$$

sendo  $G_{rl}(\ln \alpha_{rl})$  a função densidade de probabilidade de  $\ln(\alpha_{rl})$ . Tomando uma outra escala  $r_1$  maior que  $r$ , a função  $P_r(\delta v)$  pode ser escrita como

$$P_r(\delta v_r) = \int G_{rr_1}(\ln \alpha_{rr_1}) G_{rl}(\ln \alpha_{rl}) \frac{1}{\alpha_{rr_1} \alpha_{rl}} P_l \left( \frac{\delta v_l}{\alpha_{rr_1} \alpha_{rl}} \right) d \ln \alpha_{rr_1} d \ln \alpha_{rl}. \quad (3.16)$$

Isto permite escrever

$$\begin{aligned} G_{rl}(\ln \alpha_{rl}) &= \int G_{rr_1}(\ln \alpha_{rr_1}) G_{rl}(\ln \alpha_{rl}) (\ln \alpha_{rl} - \ln \alpha_{rr_1}) d \ln \alpha_{rr_1}, \\ G_{rl} &= G_{rr_1} \otimes G_{r_1l}. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Considerando escalas  $r_n$  maiores que  $r$ , podemos escrever

$$G_{rl} = G_{rr_{n-1}} \otimes \dots \otimes G_{r_1l}. \quad (3.18)$$

O problema consiste em determinar esta distribuição de probabilidade  $G_{rl}$ , uma vez que ela está definida. Tomando  $g(k)$  como função característica para o multiplicador aleatório  $\alpha_{rl}$  e definindo a função geradora dos cumulantes como  $\psi_{rl}(n) = \ln g(k)$  para a distribuição  $G_{rl}$ , então

$$\psi_{rl}(n) = \ln \left( \frac{\langle |\delta v_r(x)|^n \rangle}{\langle |\delta v_l(x)|^n \rangle} \right) \quad (3.19)$$

ou

$$\psi_{rl}(n) = \ln \langle |\alpha_{rl}|^n \rangle. \quad (3.20)$$

De uma outra maneira, obtém-se

$$\psi_{rl}(n) = \ln \langle e^{n \ln |\alpha_{rl}|} \rangle \quad (3.21)$$

Escrevendo  $e^{\psi_{rl}(n)} = \langle e^{n \ln |\alpha_{rl}|} \rangle$  e comparando com as equações 3.2 e 3.3 conclui-se que

$$e^{\psi_{rl}(n)} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(n)^j}{j!} \langle \ln |\alpha_{rl}|^j \rangle \quad (3.22)$$

e

$$\psi_{rl}(n) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{n^j}{j!} C_j(r; l). \quad (3.23)$$

Portanto, os cumulantes para as funções estrutura de valocidade podem ser escritos da seguinte maneira

$$C_1(r; l) = \langle \ln(\alpha_{rl}) \rangle, \quad (3.24)$$

$$C_2(r; l) = \langle (\ln(\alpha_{rl}) - \langle \ln(\alpha_{rl}) \rangle)^2 \rangle, \quad (3.25)$$

$$C_3(r; l) = \langle (\ln(\alpha_{rl})^3) \rangle - 3 \langle \ln(\alpha_{rl})^2 \rangle \langle \ln(\alpha_{rl}) \rangle + 2 \langle \ln(\alpha_{rl}) \rangle^3. \quad (3.26)$$

Os cumulantes de ordem superior a três normalmente não têm importância e podem ser desprezados.

É interessante ressaltar que os cumulantes  $C_1(r; l)$  e  $C_2(r; l)$  são proporcionais a  $\ln(r)$ , ou seja

$$C_1(r; l) = c_1 \ln(r) + \text{constante}, \quad (3.27)$$

$$C_2(r; l) = c_2 \ln(r) + \text{constante}, \quad (3.28)$$

sendo  $c_1$  e  $c_2$  os log-cumulantes.

O espectro de expoentes das funções estrutura pode ser escrito de uma forma geral como uma série de potências de  $n$  [Delour, Muzy e Arnéodo 2001], cujas constantes são os log-cumulantes. Então,

$$\zeta_n = - \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-n)^j}{j!} c_n. \quad (3.29)$$

Considerando que os cumulantes de ordem superior a três são desprezáveis, o expoente  $\zeta_n$  pode ser escrito como

$$\zeta_n = c_1 n - c_2 \frac{n^2}{2}. \quad (3.30)$$

A comparação deste resultado com o modelo log-normal ( $\zeta_n = n(2 + \mu)/6 - (\mu/18)n^2$ ) indica que  $c_1 = 1/3$  e  $c_2/2 = \mu/18$ , logo

$$\mu = 9c_2. \quad (3.31)$$

Portanto, o coeficiente de intermitência  $\mu$  pode ser obtido pelo coeficiente angular do ajuste feito para o perfil do gráfico  $C_2(r; l) \times \ln(r)$ . O comportamento do logaritmo dos cumulantes de primeira e segunda ordem em função do logaritmo da escala não pode ser explicado pelo modelo log-normal, mas sim através de uma lei de potências, como segue

$$C_{1,2} \sim r^{-\beta}. \quad (3.32)$$

De acordo com [Kahalerras et al. 1998], o expoente  $\beta$  pode ser encontrado da seguinte maneira

$$\frac{\partial C_{1,2}(r)}{\partial \ln(r)} = -\beta C_{1,2} + \text{constante}. \quad (3.33)$$

Uma forma alternativa de obtenção de  $\beta$  é através da seguinte relação

$$\frac{\partial \ln \langle |\delta v(r)|^p \rangle}{\partial \ln(r)} = -\beta (\ln \langle |\delta v(r)|^p \rangle + \kappa_p) \quad (3.34)$$

onde  $\kappa_p$  são constantes.

Este expoente  $\beta$  apresenta um suposto comportamento universal com o número de Reynolds-Taylor, independente dos dados analisados, sendo escrito como

$$\frac{1}{\beta} \simeq \frac{1}{0,28} \log \left( \frac{R_\lambda}{R^*} \right), \quad (3.35)$$

sendo  $R^* = 28$ .

Por analogia, Castaing (1996) deduziu um *ensemble* canônico para um escoamento turbulento e encontrou uma relação entre a temperatura dos turbilhões com o logaritmo do número de Reynolds-Taylor. Ou seja, a importância de  $\beta$  para um escoamento turbulento é similar à importância da temperatura em um sistema termodinâmico.

Uma maneira de verificar se esta análise é coerente ou não com os dados analisados é através do perfil de  $F(p) = \psi(p)/p$ . Os cumulantes de primeira e segunda ordem precisam ser proporcionais para que a análise seja válida, então o

perfil de  $F(p)$  precisa ser de aproximadamente uma reta para diferentes valores de  $p$ . O valor de  $\beta$  é estimado apenas para o intervalo em que haja proporcionalidade destes cumulantes.

# Capítulo 4

## Séries sintéticas para teste dos cumulantes

Neste capítulo estudamos séries temporais geradas por processos estocásticos e a conseqüente obtenção de um processo multiplicativo de cascata, baseado no trabalho de Kiyono (2009). As séries geradas apresentam funções densidade de probabilidade não gaussianas, cuja forma geral foi prevista por Castaing et al. (1990). A partir destas séries temporais sintéticas pretendemos testar a técnica de Malécot et al. (2000) descrita anteriormente, uma vez que conhecemos as propriedades e a estrutura destas séries. Veremos que o log-cumulante de primeira ordem tem um valor fixo de 0, 50.

### 4.1 Processo Estocástico

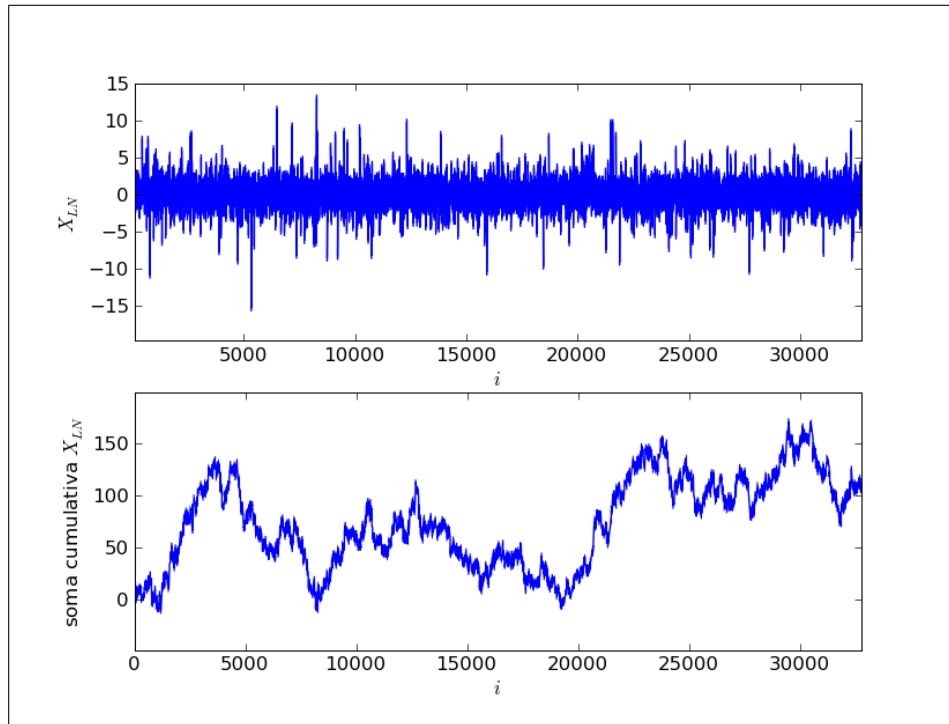
Para construir um processo estocástico precisamos considerar variáveis aleatórias. A obtenção de um processo multiplicativo log-normal ( $X^{LN}$ ) é feito considerando variáveis aleatórias gaussianas de média zero e variância constante ( $W$  e  $Y$ ), que pode ser escrito como segue

$$X^{LN} = We^{\lambda Y - \lambda^2}, \quad (4.1)$$

onde  $\lambda$  é um parâmetro positivo.

A figura 4.1 representa a série gerada pelo processo descrito pela equação 4.1 e a sua respectiva soma cumulativa.

De forma semelhante, podemos escrever um processo log-Poisson



**Figura 4.1:** Processo estocástico baseado no modelo log-normal.

$$X^{LP} = C_r W e^{rP}, \quad (4.2)$$

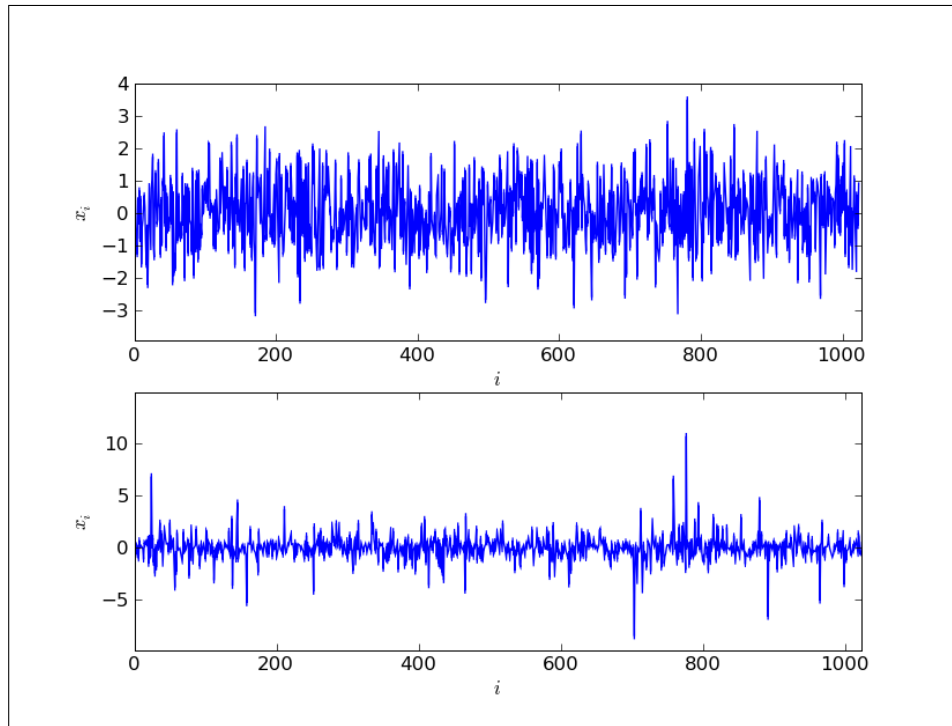
sendo  $P$  uma variável aleatória de Poisson de média e variância  $\alpha$ . O valor de  $C_r$  para um parâmetro real  $r$ , no caso de  $X^{LP}$  normalizado, é  $C_r = \exp(-\alpha (\exp(2r) - 1)/2)$ , enquanto que  $\alpha = \mu_2/r^2$ .

Através dos processos estocásticos log-normal, queremos determinar séries temporais geradas por processos multiplicativos [Kiyono, Struzik e Yamamoto 2007] e usá-las para testar a técnica dos cumulantes. Este processo nada mais é que uma superposição de variáveis aleatórias gaussianas, cuja série resultante apresenta variância heterogênea. Para obtermos este processo de cascata, primeiramente geramos uma série temporal de um ruído branco gaussiano de média zero e tamanho  $2^m$ , sendo  $m$  o número de passos da cascata. No primeiro passo, que corresponde a  $j = 1$ , dividimos o intervalo em dois subintervalos iguais e então multiplicamos a série inicial em cada subintervalo pelos pesos  $\exp[\omega^{(j)}(k)]$  ( $k = 0, 1$ ), sendo  $\omega^{(j)}(k)$  ( $k = 0, 1$ ) variáveis aleatórias gaussianas independentes. Da mesma forma fizemos para o caso em que  $j = 2$  até  $j = m$ , para finalmente obtermos a seguinte série resultante



$$x_i = \xi_i \exp \left[ \sum_{j=1}^m \omega^{(j)} \left( \left[ \frac{i-1}{2^{m-j}} \right] \right) \right]. \quad (4.3)$$

Veja a figura 4.2.



**Figura 4.2:** a) Série inicial e b) série obtida no passo  $m = 10$ .

A idéia do processo multiplicativo é semelhante à idéia de Richardson para explicar a transferência de energia dos grandes turbilhões para os pequenos.

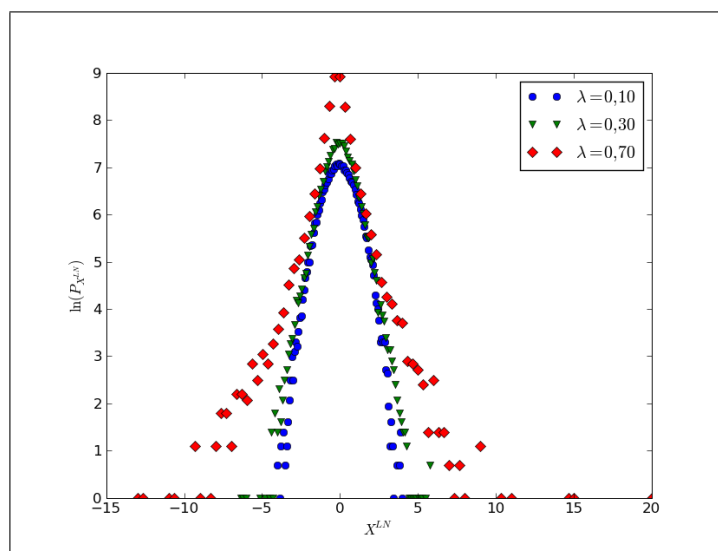
A função densidade de probabilidade para as séries geradas por estes processos (estocástico e multiplicativo) foi introduzida por Castaing et al. (1990) e descreve as séries temporais geradas por este processo de cascata de acordo com o modelo log-normal para turbulência completamente desenvolvida. Reescrita, temos

$$P_{\lambda, \sigma_0}(x) = \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi\lambda}} \exp\left(-\frac{\ln^2(\sigma/\sigma_0)}{2\lambda^2}\right) \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) d(\ln \sigma), \quad (4.4)$$

sendo  $\lambda$  e  $\sigma_0$  parâmetros positivos.

Esta função densidade de probabilidade apresenta intermitência que se manifesta através de caudas, cuja largura depende destes parâmetros. Quando  $\lambda \rightarrow 0$ ,

a distribuição passa a ser gaussiana, enquanto que  $\sigma_0$  afeta no desvio padrão de  $P_{\lambda, \sigma_0}(x)$ . Um exemplo de funções densidade de probabilidade de processos estocásticos log-normais é mostrado na figura 4.3 e indica que a gaussianeidade está diretamente ligada com o valor de  $\lambda$ .



**Figura 4.3:** Processo estocástico baseado no modelo log-normal.

Como estamos interessados em obter um processo multiplicativo que caracterize turbulência completamente desenvolvida e sabendo que  $\lambda = \sqrt{\mu}$ , então escolhemos  $\mu \sim 0,25$ , correspondente ao coeficiente de intermitência do modelo log-normal. As séries resultantes deste processo possuem uma estrutura conhecida, pois os parâmetros que determinam suas características são escolhidos conforme nossa vontade. Sendo assim, elas servem como uma medida da precisão de métodos e modelos de turbulência.

# Capítulo 5

## Resultados obtidos

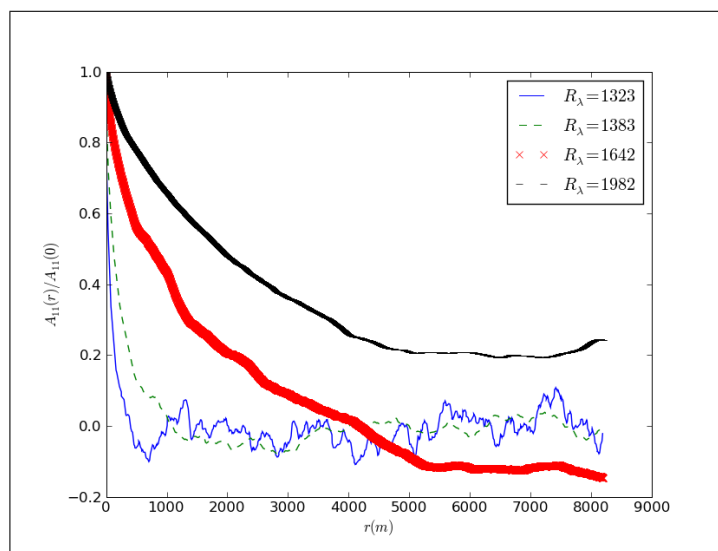
Neste capítulo serão apresentados os resultados obtidos no desenvolvimento do trabalho de graduação. Na primeira seção, caracterizaremos os dados analisados neste trabalho. Posteriormente, determinaremos os parâmetros necessários para a abordagem da metodologia proposta por Malécot et al. (2000). Confirmaremos a proporcionalidade dos cumulantes, o que evidenciará que os cumulantes de primeira e segunda ordem obedecem a uma lei de escala, cujo expoente  $\beta$  apresenta um comportamento supostamente universal com o número de Reynolds. Então, usaremos as séries temporais sintéticas determinadas no capítulo anterior para testar a eficiência desta técnica através do cálculo do log-cumulante de primeira ordem. Uma vez confirmada a precisão da técnica e dos dados disponíveis, obteremos os valores de  $\beta$  para alguns dados de túnel de vento e atmosfera.

### 5.1 Dados analisados

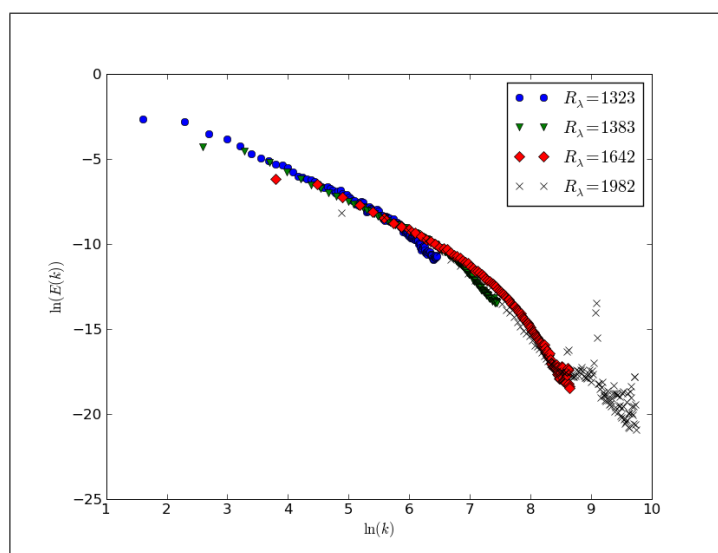
Os dados de túnel de vento, atmosfera e LES usados neste trabalho também foram usados nas dissertações de mestrado de alunos do Laboratório de Física da Atmosfera da UFSM, [Welter 2006] e [Puhales 2008].

Vejamos primeiramente como determinar a taxa de dissipação de energia dos dados analisados. As figuras 2.1, 2.2 e 2.3 ajudam na determinação da taxa de dissipação de energia. A figura 2.3 permite estimar o intervalo inercial (caracterizado pelo platô), enquanto que o ajuste das funções estrutura permite determinar a taxa de dissipação de energia, uma vez que no intervalo inercial seus comportamentos podem ser aproximados por uma reta (escala logarítmica). Uma vez determinado o valor da taxa de dissipação de energia, podemos estimar a escala dissipativa de

Kolmogorov através de sua definição ( $\eta = (\nu^3/\varepsilon)^{1/4}$ ), sabendo que o valor da viscosidade cinemática é  $\nu = 1,42 \times 10^{-5} m^2 s^{-1}$ . A escala integral é determinada usando a definição dada por 2.8, que considera a autocorrelação da velocidade do vento (figura 5.1). Conseqüentemente, o número de Reynolds pode ser determinado pela equação 2.4.



**Figura 5.1:** Autocorrelação normalizada para dados de velocidade longitudinal medidos em túnel de vento.



**Figura 5.2:** Comparação dos espectros de energia obtidos para os dados de túnel de vento.

O perfil dos espectros permite observar que cada série temporal possui escalas dissipativas diferentes, bem como intervalos inerciais diferentes. As tabelas 5.1 e 5.2 apresentam medidas validadas pela teoria de turbulência localmente isotró-

pica.

$n^{\circ}$ de pontos da série ( $\times 10^5$ )	0,320	2,00	2,00	2,00
freq. de aquisição ( $kHz$ )	3,00	9,00	30,0	90,0
$U(m/s)$	14,86	16,53	16,62	16,67
$\sigma_v$	2,73	2,79	3,04	3,32
$\varepsilon(m^2/s^3)$	7,78	33,0	35,24	31,6
$\eta(\times 10^{-5})(m)$	13,7	9,54	9,39	9,65
$\lambda(\times 10^{-3})(m)$	6,88	7,04	7,67	8,48
$L(m)$	0,275	0,367	0,393	0,543
$l(m)$	1,89	5,45	5,8	1,834
$R_{\lambda}(\times 10^3)$	1,323	1,383	1,642	1,982
$Re(\times 10^5)$	2,91	4,33	4,66	6,46

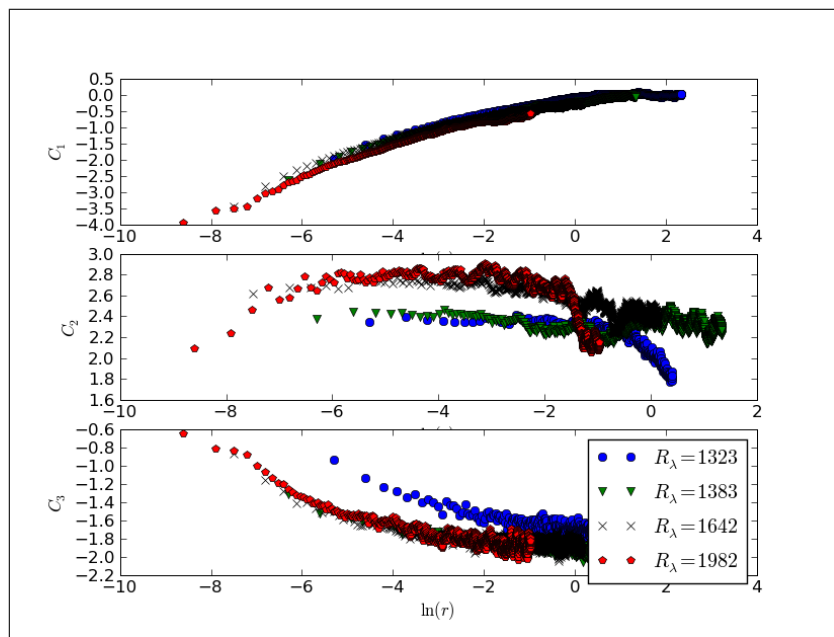
**Tabela 5.1:** Valores que caracterizam os escoamentos em túnel de vento.

	Paraíso do Sul	Candiota	LES
$n^{\circ}$ de pontos da série ( $\times 10^4$ )	6,50	3,00	0,100
freq. de aquisição ( $Hz$ )	16,0	10,0	1,00
$U(m/s)$	6,13	5,87	7,06
$\sigma_v$	1,614	1,238	0,691
$\varepsilon(\times 10^{-2})(m^2/s^3)$	5,19	7,37	1,405
$\lambda(m)$	0,209	0,052	0,01252
$\eta(\times 10^{-4})(m)$	4,79	4,39	6,64
$L(m)$	150,6	81,5	104,0
$l(\times 10^3)(m)$	3,2	1,062	0,218
$R_{\lambda}(\times 10^4)$	2,37	0,453	0,069
$Re(\times 10^7)$	7,24	3,42	5,24

**Tabela 5.2:** Valores que caracterizam os escoamentos de atmosfera e LES.

## 5.2 Estudo dos cumulantes

O foco do trabalho está na análise dos cumulantes obtidos de dados de túnel de vento, atmosfera e LES. Queremos encontrar alguma aplicação da análise dos cumulantes principalmente para dados de atmosfera e LES. Começamos primeiramente obtendo os cumulantes de primeira, segunda e terceira ordem para os dados descritos, conforme a figura 5.4.



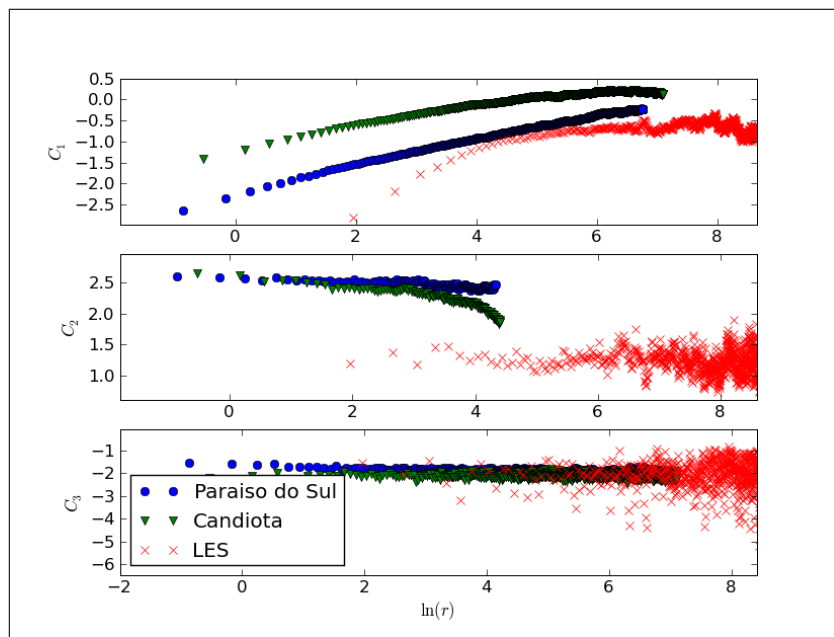
**Figura 5.3:** Cumulantes de primeira, segunda e terceira ordem para dados de túnel de vento.

$R_\lambda$	$c_1$	$c_2$	$\mu$
$2,37 \times 10^4$ (Paraíso do Sul)	0,347	-0,0267	0,240
$1,323 \times 10^3$	0,310	-0,0283	0,255
$1,383 \times 10^3$	0,304	-0,0318	0,286
$1,642 \times 10^3$	0,321	-0,0248	0,223
$1,982 \times 10^3$	0,331	-0,0270	0,243

**Tabela 5.3:** Valores dos log-cumulantes e do coeficiente de intermitência para Paraíso do Sul e túneis de vento.

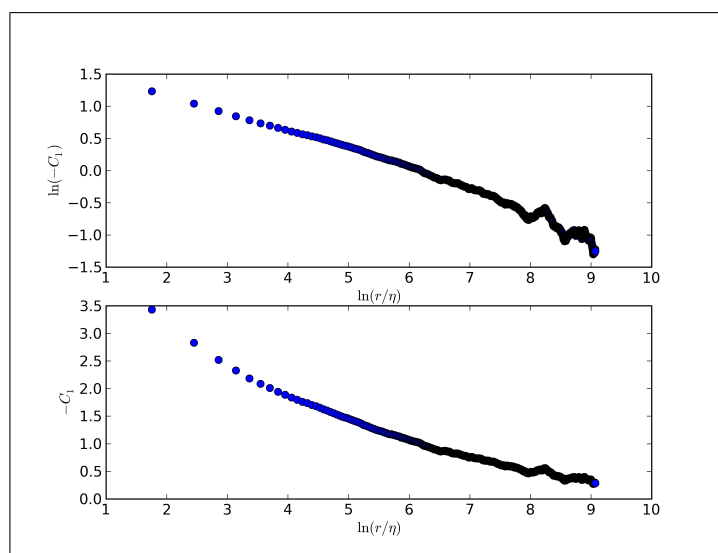
Os log-cumulantes foram calculados e estão apresentados na tabela 5.3. O valor encontrado na literatura para o coeficiente de intermitência é de aproximadamente 0,25, portanto os resultados apresentados na tabela 5.3 são adequados. Alguns dados analisados apresentaram desvios da previsão teórica, sendo que os maiores problemas com relação a isso ocorreram com os dados de LES. A primeira justificativa que encontramos para isso está relacionada com a falta de convergência estatística em virtude do pequeno tamanho das séries analisadas, mas também acreditamos que o tempo usado na simulação LES acarretou na perda de estacionaridade do escoamento, o que invalida este estudo teórico.

Pela figura 5.5, percebemos que o comportamento de  $\ln(-C_1)$  em função de  $\ln(r/\eta)$  (figura superior) se ajusta melhor com uma reta do que o comportamento



**Figura 5.4:** Cumulantes de primeira, segunda e terceira ordem para dados de atmosfera e LES.

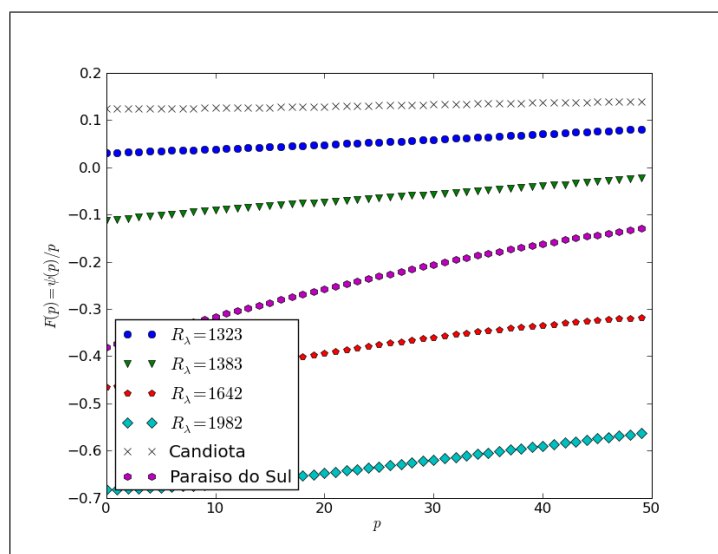
de  $-C_1$  em função de  $\ln(r/\eta)$  (figura inferior). Este comportamento não pode ser interpretado pelo modelo log-normal e evidencia que os cumulantes de segunda e terceira ordem são descritos por uma lei de escala, onde  $C_{1,2} \sim r^\beta$ . O cálculo de  $\beta$  só é possível quando os cumulantes são proporcionais.



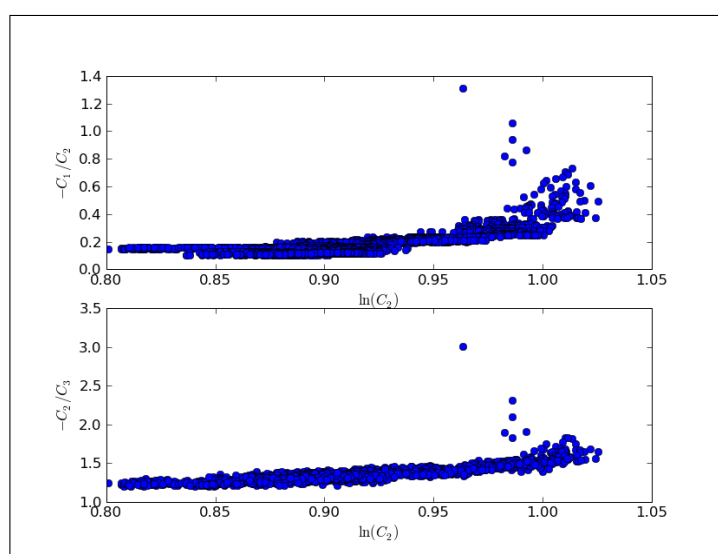
**Figura 5.5:** Comportamento dos cumulantes de primeira ordem.

A verificação da proporcionalidade dos cumulantes, como proposto por Malécot et al. (2000), pode ser feita através de  $F(p) = \psi(p)/p$ , onde  $\psi(p)$  é a função geradora dos cumulantes. A forma de  $F(p)$  deve ser linear com  $p$  para que os cu-

mulantes sejam proporcionais, como mostra a figura 5.6. Observamos que a função  $F(p)$  apresentou um comportamento muito similar com uma reta e que, a princípio, os cumulantes de primeira e segunda ordem são proporcionais. Porém, quando calculamos esta mesma função com valores diferentes para a escala  $l$ , percebemos que ocorrem mudanças significativas para alguns casos no comportamento de  $F(p)$ , enquanto que para outros isto não é observado. Ou seja, a análise de  $F(p)$  não é suficiente para a determinação da proporcionalidade dos cumulantes, o que exige a observação direta de seus comportamentos, através da figura 5.7.



**Figura 5.6:** Verificação da proporcionalidade dos cumulantes pela função  $F(p)$ .

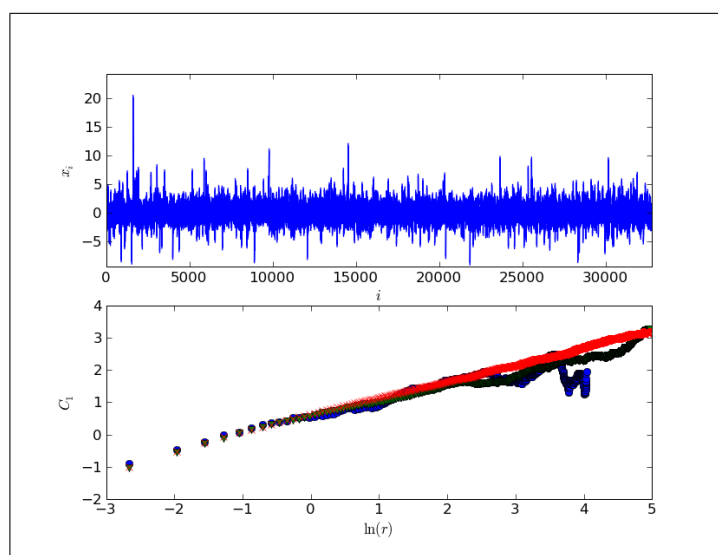


**Figura 5.7:** Análise da proporcionalidade dos cumulantes para  $R_\lambda = 1642$ .

Antes de determinarmos o valor do coeficiente  $\beta$ , resolvemos testar a técnica



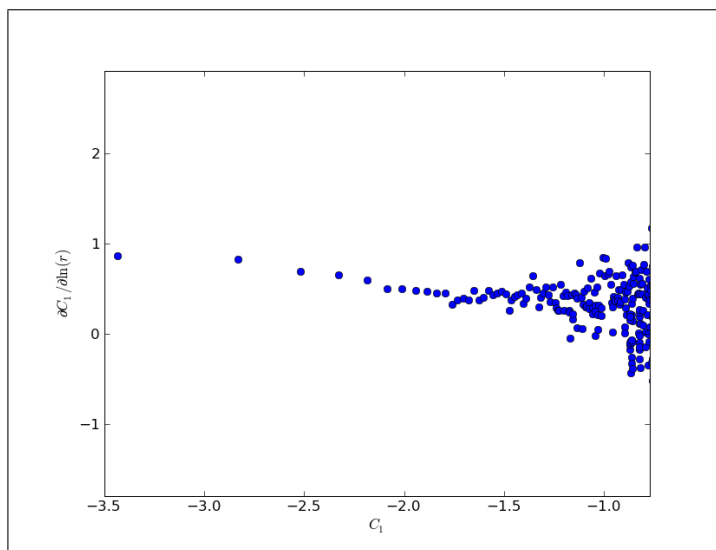
dos cumulantes proposta por Malécot et al. (2000) através de séries sintéticas obtidas pelos processos log-normal e log-Poisson, como visto no capítulo anterior, para verificar a precisão da metodologia. Podemos usar as séries sintéticas para determinar o log-cumulante de primeira ordem, que de acordo com Kiyono(2009) precisa ser de aproximadamente 0,5. Determinamos o valor do log-cumulante de primeira ordem para séries sintéticas de diferentes tamanhos para verificar se isto influencia significativamente nos resultados.



**Figura 5.8:** a) Série sintética obtida pelo processo multiplicativo e b) cumulantes de primeira ordem para séries de tamanhos  $2^{10}$ ,  $2^{12}$  e  $2^{15}$  pontos.

A figura 5.8 mostra uma série sintética obtida pelo processo multiplicativo (4.3), de tamanho  $2^{15}$  pontos, e o comportamento dos cumulantes de primeira ordem para séries de tamanhos  $2^{10}$ ,  $2^{12}$  e  $2^{15}$  pontos. Elas foram geradas para  $\mu = 0,25$  (coeficiente de intermitência), o que garante que estas séries são caracterizadas pela turbulência. É de fácil percepção de que há convergência estatística conforme aumentamos o tamanho da série analisada. Para os dados de melhor convergência, conseguimos obter um log-cumulante de primeira ordem no valor de 0,523. Portanto, verificamos através das séries sintéticas que a técnica dos cumulantes é adequada e apresenta certamente melhores resultados para séries mais longas. Somado a isso, verificamos que os cumulantes são proporcionais (figuras 5.6 e 5.7), portanto o coeficiente  $\beta$  pode ser calculado. A figura 5.9 mostra o comportamento da derivada logarítmica de  $C_1$  em função de  $C_1$ , cuja inclinação dá o valor de  $\beta$ . A tabela 5.4 mostra alguns valores encontrados para os dados de túnel de vento e

atmosfera.



**Figura 5.9:** Determinação de  $\beta$  pela derivada logarítmica de  $C_1$ .

$R_\lambda$	$\beta$
$1,383 \times 10^3$	0,1181
$1,642 \times 10^3$	0,1077
$2,37 \times 10^4$ (Paraíso do Sul)	0,0633
$4,53 \times 10^3$ (Candiota)	0,0403

**Tabela 5.4:** Valores encontrados para o coeficiente  $\beta$  para dados de túnel de vento e atmosfera.

O valor de  $\beta$  é interpretado como a 'velocidade' com que a função densidade de probabilidade de  $\delta v_r$  muda de um comportamento gaussiano para exponencial ao longo das escalas. Em 1996, Castaing obteve um *ensemble* canônico para os incrementos de velocidade do vento, onde os turbilhões representariam reservatórios térmicos, enquanto que as escalas em que os escoamentos ocorrem teriam a função do volume do sistema termodinâmico. Algumas relações demonstradas em seu artigo mostram possíveis generalizações para casos quânticos. Castaing mostrou que a temperatura está relacionada com o número de Reynolds-Taylor através da relação  $1/T \sim \ln(R_\lambda/R^*)$ . Sabendo que  $\beta = \beta(R_\lambda)$  é escrito como em 3.35, então em um escoamento turbulento o valor de  $\beta$  tem a mesma importância que a temperatura para um sistema termodinâmico.

# Capítulo 6

## Conclusões

Em estudos feitos anteriormente, estudamos os cumulantes de acordo com sua definição, ou seja, considerando o incremento de velocidade apenas para uma escala  $r$ . Nesta nova etapa do trabalho usamos a idéia de Malécot et al. (2000), que define um multiplicador aleatório  $\alpha_{rl}$  como sendo a razão dos incrementos de velocidade do vento para escalas  $r$  e  $l$ , com  $r \leq l$ . Determinamos os valores do coeficientes de intermitência e encontramos bons resultados, apesar da flutuação estatística dos cumulantes de segunda ordem. Martins (2008), em seu trabalho de graduação, usou uma técnica, de nome *surrogate*, para estimar de maneira mais adequada os log-cumulantes de segunda ordem. Obteve bons resultados e estão de acordo com os obtidos neste trabalho.

Estudamos os cumulantes com o objetivo principal de obter o expoente  $\beta$ , que a princípio determinaria o comportamento dos cumulantes por uma lei de escala, o que não pode ser entendido pelo modelo log-normal. Verificamos a proporcionalidade dos cumulantes de primeira e segunda ordem através da função  $F(p)$ , dada pela razão entre a função geradora dos cumulantes  $\psi(p)$  e  $p$ . A simples análise de  $F(p)$  não é um indicador suficiente da proporcionalidade de  $C_1$  e  $C_2$ , pois não apresenta um comportamento bem definido para valores específicos das escalas  $l$ . Para nos certificarmos de que os cumulantes são proporcionais, determinamos o comportamento de  $-C_1/C_2 \times C_2$  e concluímos que para um determinado intervalo (inercial), esta relação é aproximadamente constante.

A fim de testar a técnica dos cumulantes, geramos séries temporais sintéticas de diferentes tamanhos e obtivemos os log-cumulantes de primeira ordem, com valores que se aproximam bem do valor fixo previsto na teoria, 0,5. Além disto

ter indicado a eficiência da metodologia, também serviu como verificação da convergência estatística dos cumulantes conforme ocorria o aumento do tamanho das séries temporais.

Calculamos então o coeficiente  $\beta$  para alguns dados de túnel de vento e atmosfera e obtivemos bons resultados. Gostaríamos de ter conseguido obter resultados adequados para dados de LES, porém as séries de que dispúnhamos eram muito curtas. Na tentativa de estudar séries de LES mais longas, enfrentamos o problema de perda de estacionaridade dos dados para intervalos de tempo maiores.

A importância de  $\beta$  é comparável à importância da temperatura de um sistema termodinâmico [Castaing 1996]. A motivação para obter  $\beta$  está no fato de que podemos caracterizar a turbulência através de seu valor, pois está relacionado com a mudança do comportamento das funções densidade de probabilidade de gaussiano para exponencial (intermitente) ao longo das escalas do escoamento. A natureza da intermitência do escoamento é determinada pelo expoente  $\beta$  de uma forma mais adequada que o coeficiente de intermitência  $\mu$  do modelo log-normal, de Kolmogorov e Obukhov de 1962.

# Referências Bibliográficas

- [Anselmet et al. 1984]ANSELMET, F.; GAGNE, Y.; HOPFINGER, E. J.; ANTONIA, R. A. High-order velocity structure functions in tyrbulent shear flos. *Journal of Fluid Physics*, Cambridge University Press, n. 140, p. 63–69, Jun 1984.
- [Basu et al. 2007]BASU, S.; FOFOLA-GEORGIOU, E.; LASHERMES, B.; ARNÉODO, A. Estimating intermittency exponent in neutrally stratified atmospheric surface layer flows: a robust framework based on magnitude cumulant and surrogate analyses. **Physics of Fluids**, v. 19, p. 35–97, 2007.
- [Bernard 2000]BERNARD, D. Turbulence by (and for) amateurs. p. 1–37, 2000.
- [Castaing 1996]CASTAING, B. The temperature of turbulence flows. **Journal Physics II France**, v. 6, p. 105–114, 1996.
- [Castaing, Gagne e Hopfinger 1990]CASTAING, B.; GAGNE, Y.; HOPFINGER, E. J. Velocity probability density functions of high reynolds number turbulence. **Physica D**, v. 46, p. 177–200, 1990.
- [Chevillard et al. 2006]CHEVILLARD, L.; CASTAING, B.; LEVÉQUE, E.; ARNEODO, A. Unified multifractal description of velocity increments statistics in turbulence: Intermittency and skewness. **Physica D**, v. 218, p. 77–82, 2006.
- [Cleve et al. 2004]CLEVE, J.; GREINER, M.; PEARSON, B. R.; SREENIVASAN, K. R. Intermittency exponent of the turbulent energy cascade. *Phys. Rev. E*, American Physical Society, v. 69, n. 6, p. 066316, Jun 2004.
- [Cramér 1946]CRAMÉR, H. **Mathematical methods of statistics**. [S.I.]: Princeton University Press, 1946. 575 p.

- [Delour, Muzy e Arnéodo 2001]DELOUR, J.; MUZY, J. F.; ARNÉODO, A. Intermittency of 1d velocity spatial profiles in turbulence: a magnitude cumulant analysis. **The European Physical Journal B**, v. 23, p. 243–248, 2001.
- [Falkovich e Sreerivasan 2006]FALKOVICH, G.; SREERINIVASAN, K. Lessons from hydrodynamics turbulence. **Physics Today**, 2006.
- [Frisch 1995]FRISCH, U. **Turbulence - The Legacy of A. N. Kolmogorov**. Cambridge: Cambridge University Press, 1995.
- [Henn et al. 2009]HENN, E. A. L.; SEMAN, J. A.; ROATI, G.; MAGALHÃES, K. M. F.; BAGNATO, V. S. Emergence of turbulence in an oscillating bose-einstein condensate. **Physical Review Letters**, n. 103, p. 045301–1–045301–4, 2009.
- [Kahalerras et al. 1998]KAHALERRAS, H.; MALÉCOT, Y.; GAGNE, Y.; CASTAING, B. Intermittency and reynolds number. **Physics of Fluids**, v. 10, p. 910–921, 1998.
- [Katul, Porporato e Poggi 2009]KATUL, G. G.; PORPORATO, A.; POGGI, D. Roughness effects on finescale anisotropy and anomalous scaling in atmospheric flows. **Physics of Fluids**, v. 21, 2009.
- [Kiyono 2009]KIYONO, K. Log-amplitude statistics of intermittent and non-gaussian time series. **Physical Review E**, 2009.
- [Kiyono, Struzik e Yamamoto 2007]KIYONO, K.; STRUZIK, Z. R.; YAMAMOTO, Y. Estimator of a non-gaussian parameter in multiplicative log-normal models. **Physical Review E**, v. 76, p. 041113,1–8, 2007.
- [Landau e Lifshitz 1959]LANDAU, L. D.; LIFSHITZ, E. M. **Fluid Mechanics**. Londres: Pergamon Press, 1959. 536 p.
- [L.Moriconi 2006]L.MORICONI. Introdução à teoria estatística da turbulência. In: \_\_\_\_\_. Turbulência, Tomo 1, 2006, Rio de Janeiro. **Anais da V Escola de Primavera em Transição e Turbulência** . [S.l.: s.n.], 2006. v. 5, p. 35–97.
- [Malécot et al. 2000]MALÉCOT, Y.; AURIAULT, C.; KAHALERRAS, H.; GAGNE, Y.; CHANAL, O.; CHABAUD, B.; CASTAING, B. A statistical estimator of turbulence in-

- termittency in physical and numerical experiments. **The European Physical Journal B**, v. 16, p. 549–561, 2000.
- [Martins 2008]MARTINS, L. G. N. Estabilidade na camada limite atmosférica e intermitência nas pequenas escalas. **Trabalho Final de Graduação**, 2008.
- [Meneveau e Sreenivasan 1991]MENEVEAU, C.; SREENIVASAN, K. R. The multifractal nature of turbulent energy dissipation. **Journal of Fluids Mechanics**, 1991.
- [Puhales 2008]PUHALES, F. S. *Estudo do Ciclo Diário da Camada Limite Planetária Através da Simulação dos Grandes Turbilhões*. [S.I.]: **Dissertação de Mestrado**, 2008.
- [Richardson 1922]RICHARDSON, L. F. Weather prediction by numerical process. **Cambridge University Press, Cambridge**, 1922.
- [Salinas 1997]SALINAS, S. R. *Introdução à Física Estatística*. São Paulo: **EDUSP**, 1997.
- [Schertzer et al. 1997]SCHERTZER, D.; LOVEJOY, S.; SCHMITT, F.; CHIGIRINSKAYA, Y.; MARSAN, D. Multifractal cascade dynamics and turbulence intermittency. **Fractals**, v. 5, n. 3, p. 427–471, 1997.
- [Tomé e Oliveira 2001]TOMÉ, T.; OLIVEIRA, M. J. **Dinâmica Estocástica e Irreversibilidade**. [S.I.]: EDUSP, 2001.
- [Vindel, Yague e Redondo 2008]VINDEL, J. M.; YAGUE, C. .; REDONDO, J. M. Structure functions analysis and intermittency in the atmospheric boundary layer. **Nonlinear Processes in Geophysics**, v. 15, p. 915–929, 2008.
- [Welter 2006]WELTER, G. S. A hipótese de turbulência localmente isotrópica e a universalidade da constante de kolmogorov. **Dissertação de Mestrado**, 2006.