

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA MARIA
CENTRO DE CIÊNCIAS NATURAIS E EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Arthur Ramirez Tauchen

RETRATOS DE FASE DE UMA FAMÍLIA DE SISTEMAS
CÚBICOS PLANARES INTEGRÁVEIS COM DUAS
PARÁBOLAS INVARIANTES

Santa Maria, RS
2022

Arthur Ramirez Tauchen

**RETRATOS DE FASE DE UMA FAMÍLIA DE SISTEMAS CÚBICOS
PLANARES INTEGRÁVEIS COM DUAS PARÁBOLAS INVARIANTES**

Dissertação apresentada ao Curso de Pós-Graduação em Matemática, da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM, RS), como requisito parcial para a obtenção do grau de **Mestre em Matemática**.

Orientador: Prof. Dr. Maurício Fronza da Silva

**Santa Maria, RS
2022**

Tauchen , Arthur Ramirez
Retratos de fase de uma família de sistemas cúbicos
planares integráveis com duas parábolas invariantes /
Arthur Ramirez Tauchen .- 2022.
81 p.; 30 cm

Orientador: Maurício Fronza da Silva
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Santa
Maria, Centro de Ciências Naturais e Exatas, Programa de
Pós-Graduação em Matemática, RS, 2022

1. Equações Diferenciais Ordinárias 2. Sistemas
quadráticos planares 3. Retratos de fase 4. Parábolas
invariantes I. Fronza da Silva , Maurício II. Título.

Sistema de geração automática de ficha catalográfica da UFSM. Dados fornecidos pelo autor(a). Sob supervisão da Direção da Divisão de Processos Técnicos da Biblioteca Central. Bibliotecária responsável Paula Schoenfeldt Patta CRB 10/1728.

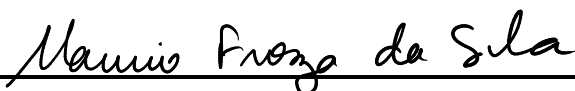
Declaro, ARTHUR RAMIREZ TAUCHEN , para os devidos fins e sob as penas da lei, que a pesquisa constante neste trabalho de conclusão de curso (Dissertação) foi por mim elaborada e que as informações necessárias objeto de consulta em literatura e outras fontes estão devidamente referenciadas. Declaro, ainda, que este trabalho ou parte dele não foi apresentado anteriormente para obtenção de qualquer outro grau acadêmico, estando ciente de que a inveracidade da presente declaração poderá resultar na anulação da titulação pela Universidade, entre outras consequências legais.

Arthur Ramirez Tauchen

**RETRATOS DE FASE DE UMA FAMÍLIA DE SISTEMAS CÚBICOS PLANARES
INTEGRÁVEIS COM DUAS PARÁBOLAS INVARIANTES**

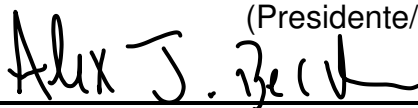
Dissertação apresentada ao Curso de Pós-Graduação em Matemática, da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM, RS), como requisito parcial para a obtenção do grau de **Mestre em Matemática.**

Aprovado em 10 de Junho de 2022:



Maurício Fronza da Silva, Dr. (UFSM)

(Presidente/Orientador)



Alex Jenaro Becker, Dr. (UFSM)



Alexandre Tavares Baraviera, Dr. (UFRGS)

Santa Maria, RS

2022

RESUMO

RETRATOS DE FASE DE UMA FAMÍLIA DE SISTEMAS CÚBICOS PLANARES INTEGRÁVEIS COM DUAS PARÁBOLAS INVARIANTES

AUTOR: Arthur Ramirez Tauchen

ORIENTADOR: Maurício Fronza da Silva

Neste trabalho apresentamos resultados da teoria qualitativa de Equações Diferenciais Ordinárias utilizadas no estudos de campos de vetores planares. Em seguida, aplicamos estes resultados para determinar o retrato de fase global no disco de Poincaré, de uma família de campos planares cúbicos integráveis com duas parábolas invariantes. Até onde sabemos esta família ainda não havia sido estudada.

Palavras-Chave: Equações Diferenciais Ordinárias. Sistemas quadráticos planares. Retratos de fase. Parábolas invariantes.

ABSTRACT

PHASE PORTRAITS OF A FAMILY OF INTEGRABLE CUBIC PLANAR SYSTEMS WITH TWO INVARIANT PARABOLAS

AUTHOR: Arthur Ramirez Tauchen

ADVISOR: Maurício Fronza da Silva

In this work we present results of the qualitative theory of Ordinary Differential Equations used in the study of planar vector fields. Then, we apply these results to determine the global phase portrait in the Poincaré disk, of a family of planar cubic integrable vector fields with two invariant parabolas. As far as we know, this family has not yet been studied.

Keywords: Ordinary Differential Equations. cubic planar system. Phase portraits. Invariant parabolas.

Sumário

1	INTRODUÇÃO	8
2	RESULTADOS DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS . . .	9
2.1	Campos de Vetores	9
2.2	Conjugação e equivalência de campos de vetores	11
2.3	Conjuntos limites e o Teorema de Poincaré-Bendixson	12
2.4	Estrutura local dos pontos singulares	14
3	A TÉCNICA BLOW UP	21
3.1	Blow up direcional	21
3.2	Blow up quase homogêneo	26
4	COMPACTIFICAÇÃO DE POINCARÉ	29
4.1	Construção da Compactificação de Poincaré	29
4.2	A expressão da compactificação de Poincaré nas cartas locais	32
4.3	Estudo das singularidades infinitas	35
4.4	Exemplo	36
5	ARTIGO: PHASE PORTRAITS OF A FAMILY OF INTEGRABLE CUBIC SYSTEMS WITH TWO INVARIANT PARABOLAS	38
6	CONSIDERAÇÕES FINAIS	80
	REFERÊNCIAS	81

1 Introdução

As Equações Diferenciais Ordinárias (EDO's) aparecem de forma natural na modelagem de fenômenos nas mais diversas áreas como biologia, química, engenharias e física. Durante os seus primórdios no século XVII, a teoria de EDO's era focada em obter soluções explícitas, porém este viés foi se tornando inviável, à medida que as equações foram se tornando mais complexas. Hoje sabemos que a maioria das equações não pode ser resolvida por métodos analíticos. Além disso, mesmo após um grande esforço para obter uma solução explícita, ela pode não ajudar a compreender o fenômeno que está sendo estudado. Em sua obra "Mémoire sur les courbes définies par une équation différentielle", Henri Poincaré¹(1854-1912) dá início à chamada teoria qualitativa, a qual tem por objetivo entender as propriedades das soluções de EDO's, sem precisar explicitá-las.

Dentro desta nova perspectiva, surgem problemas naturais como a equivalência de retratos de fase e a classificação topológica global de um sistema de equações diferenciais. Embora a classificação topológica de sistema lineares no plano seja conhecida, a classificação topológica de campos de vetores de grau $n > 1$ ainda é um problema em aberto. Como classificar todos os sistemas de grau n não é uma tarefa nada realista, uma alternativa é classificar topologicamente todos os sistemas de uma família de campos planares que possuam alguma curva algébrica invariante ou integral primeira.

Esta dissertação está dividida em duas partes. Na primeira são apresentados resultados e técnicas que foram utilizadas no desenvolvimento da segunda parte. No capítulo 2 apresentamos os elementos básicos da teoria de EDO's e de teoria qualitativa, como: conjugação de campos, conjuntos limites, o teorema de Poicaré-Bendixson e o Teorema de Hartman–Grobman. O capítulo 3 traz a técnica do Blow up, que é essencial para o estudo de singularidades não elementares. No capítulo 4 é apresentada a compactificação de Poincaré, que permite entender o comportamento global das soluções de uma equação diferencial.

A segunda parte é formada pelo Capítulo 5. Nela aplicamos resultados dos capítulos anteriores para estudar uma família específica de campos cúbicos. Mais precisamente, apresentamos a classificação topológica dos retratos de fase no disco de Poincaré de todos os campos cúbicos quadráticos que possuem duas parábolas dadas por equações $f_1 = 0, f_2 = 0$ como curvas algébricas invariantes, e que possuem integral primeira da forma $H = f_1^\alpha f_2^\beta$, sendo $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ constantes. Até onde sabemos, este resultado ainda não é conhecido.

¹ Matemático e físico francês.

2 Resultados de Equações Diferenciais Ordinárias

Este capítulo tem por objetivo recordar resultados fundamentais da Teoria de EDO's, bem como fixar a notação que será utilizada ao longo deste trabalho. Iniciaremos apresentando os campos de vetores em \mathbb{R}^2 , também chamados de campos planares. Na sequência trataremos de elementos da Teoria Qualitativa. Por não se tratar do objetivo principal, os resultados serão apresentados sem demonstrações, que podem ser encontradas em (SOTOMAYOR, 1979), (PERKO, 2001), (DOERING; LOPES, 2016), (ANDRONOV et al., 1973) e (DUMORTIER; LLIBRE; ARTÉS, 2006).

2.1 Campos de Vetores

Um campo de vetores C^k , $k \geq 1$, definido em um aberto $U \subset \mathbb{R}^2$, é uma aplicação $X : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ de classe C^k . O campo X define o sistema autônomo de EDO's dado por

$$\dot{x} = X(x), \quad (2.1)$$

onde $x \in U$, \dot{x} denota dx/dt e reciprocamente. Uma solução do sistema (2.1) é uma função diferenciável $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida em um intervalo aberto I da reta tal que

$$\frac{d\varphi(t)}{dt} = X(\varphi(t)), \text{ para todo } t \in I.$$

Uma solução também é chamada de trajetória ou curva integral.

Definição 2.1.1. *Uma solução $\varphi : I \rightarrow U$ é dita solução maximal de (2.1) se dada qualquer outra solução $\psi : J \rightarrow U$ de (2.1), com $I \subset J$ e $\psi|_I = \varphi$, então $I = J$. Neste caso o intervalo I recebe o nome de intervalo maximal e é denotado por I_{x_0} .*

O teorema abaixo é conhecido como Teorema do Fluxo Local.

Teorema 2.1.2. *Seja $X : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ um campo de vetores de classe C^k , $k \geq 1$, no aberto $U \subset \mathbb{R}^2$, então*

- i) (Existência e unicidade de soluções maximais) Para cada $x_0 \in U$, existe uma única solução maximal φ_{x_0} do sistema (2.1), definida no intervalo maximal I_{x_0} , satisfazendo $\varphi_{x_0}(0) = x_0$.*
- ii) (Propriedade de fluxo) Se $y_0 = \varphi_{x_0}(t_0)$ e $t_0 \in I_{x_0}$, então $I_{y_0} = I_{x_0} - t_0 = \{s - t_0 \mid s \in I_{x_0}\}$ e também $\varphi_{y_0}(s) = \varphi_{x_0}(t_0 + s)$, para todo $s \in I_{y_0}$;*

iii) (Diferenciabilidade com relação às condições iniciais) O conjunto $D = \{(t, x) \mid x \in U, t \in I_x\}$ é aberto em \mathbb{R}^3 e a aplicação $\phi : D \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $\phi(t, x) = \phi_x(t)$ é de classe C^k .

Quando for necessário ficar explícito, o símbolo φ_x denota a solução de (2.1) que satisfaz $\varphi(0, x) = x$, com $x \in U$. O conjunto imagem $\gamma_x = \{\varphi_x(t); t \in I\}$ de uma solução é chamado de órbita de X pelo ponto x .

Pela existência de solução decorre que por cada ponto de U passa uma única órbita do campo X , e a unicidade implica que órbitas distintas não podem se interceptar. Isso diz que o domínio aberto U fica completamente decomposto em órbitas. O conjunto U munido da decomposição da decomposição em órbitas de X chama-se retrato de fase retrato de X . As órbitas são orientadas no sentido positivo (do tempo t), que é indicado por meio de setas.

Definição 2.1.3. A função $\phi : D \rightarrow \mathbb{R}^2$ do Teorema 2.1.2-iii) é chamada de fluxo gerado por X ou pelo sistema $\dot{x} = X(x)$. Se $I_x = \mathbb{R}$, para todo $x \in U$, o campo X é dito completo.

O fluxo também é chamado de “grupo a um parâmetro” gerado por X . Podemos entender o fluxo de um sistema como uma família de transformações indexadas por \mathbb{R} que age da seguinte forma: dado $x_0 \in U$ qualquer, $\phi_{t_0}(x_0) = \varphi_{x_0}(t_0)$, onde $\varphi_{x_0}(t)$ é a solução de (2.1) passando por x_0 , com $\varphi_{x_0}(0) = x_0$. Fixado t_0 , o fluxo dá a posição de cada solução, em função da condição inicial, após decorrido o tempo t_0 .

Teorema 2.1.4. Se X é um campo de vetores de classe C^1 no aberto $U \subset \mathbb{R}^2$ e X é limitado, então X é completo.

Definição 2.1.5. Um ponto $x \in U$ é dito um ponto singular de (2.1) se $X(x) = 0$. Caso contrário, x é dito ponto regular.

Existem outras terminologias na literatura corrente para ponto singular, como singularidade, ponto crítico ou ponto estacionário. O próximo resultado estabelece que existem somente três tipos de órbitas de um campo de vetores.

Teorema 2.1.6. Se φ é uma solução maximal de (2.1) definida em $I \subset \mathbb{R}$, então vale apenas uma das afirmações

- i) φ é uma bijeção com sua imagem;
- ii) $I = \mathbb{R}$ e φ é uma função constante;
- iii) $I = \mathbb{R}$ e φ é uma função periódica, de período mínimo τ , isto é, existe $\tau > 0$ tal que $\varphi(t + \tau) = \varphi(t)$, para todo $t \in I$.

2.2 Conjugação e equivalência de campos de vetores

Em qualquer teoria matemática é comum buscar maneiras de comparar dois objetos, a fim de estudar os elementos centrais desta teoria. Por exemplo, temos a noção de homeomorfismo entre espaços topológicos que é uma relação que preserva os elementos centrais da teoria: compacidade, conexidade, etc. Em Equações Diferenciais Ordinárias, os objetos centrais são os sistemas de equações, e os elementos são as suas trajetórias. Vamos definir duas maneiras de dizer que dois sistemas são o mesmo, no sentido de terem o mesmo comportamento qualitativo na vizinhança de pontos singulares.

Definição 2.2.1. (*Conjugação topológica*) *Sejam $X_1 : U_1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ e $X_2 : U_2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ campos de vetores definidos nos abertos $U_1, U_2 \subset \mathbb{R}^2$, e $\phi_1 : D_1 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\phi_2 : D_2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, os fluxos gerados por X_1 e X_2 , respectivamente. Dizemos que X_1 é topologicamente conjugado (C^r -conjugado) a X_2 se existe um homeomorfismo (difeomorfismo C^r) $h : U_1 \rightarrow U_2$ tal que*

$$h(\phi_1(t, x)) = \phi_2(t, h(x)), \quad \text{para todo } (t, x) \in D_1. \quad (2.2)$$

Observação 2.2.2. *Na notação da Definição 2.2.1, suponha que X_1 tem uma órbita periódica γ , de período τ . Seja $x \in \gamma$ e h uma conjugação, então*

$$h(x) = h(\phi_1(0, x)) = h(\phi_1(\tau, x)) = \phi_2(\tau, h(x)).$$

Como $h(x) = \phi_2(0, h(x))$, a órbita $\hat{\gamma} = h(\gamma)$ é uma órbita periódica de X_2 , de período τ . Resultados análogos valem para os demais dois tipos de órbitas de X_1 .

A próxima proposição dá uma maneira alternativa de verificar quando um difeomorfismo é ou não uma conjugação entre dois campos, que prescinde o conhecimento do fluxo dos campos.

Proposição 2.2.3. *Se $X_1 : U_1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ e $X_2 : U_2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ são campos de classe C^r e $h : U_1 \rightarrow U_2$ é um difeomorfismo de classe C^r , $r \geq 1$. Então $h : U_1 \rightarrow U_2$ é uma conjugação entre X_1 e X_2 se e somente se*

$$Dh_p X_1(p) = X_2(h(p)) \quad \text{para todo } p \in U_1.$$

Observe que na definição 2.2.1 o tempo é preservado. Uma noção menos restritiva de comparação entre campos é a equivalência topológica.

Definição 2.2.4. (*Equivalência topológica*) *Sejam $X_1 : U_1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ e $X_2 : U_2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ campos de vetores definidos nos abertos $U_1, U_2 \subset \mathbb{R}^2$. Dizemos que X_1 é topologicamente equivalente (C^r -equivalente) a X_2 se existe um homeomorfismo (difeomorfismo C^r) $h : U_1 \rightarrow U_2$ que envia órbitas de X_1 em órbitas de X_2 , preservando a orientação de todas as órbitas, ou revertendo a orientação de todas as órbitas. Mais precisamente, dado $p \in U_1$, se γ_p^1*

é a órbita orientada de X_1 passando por p , então $h(\gamma_p^1)$ é a órbita orientada $\gamma_{h(p)}^2$ de X_2 passando por $h(p)$.

Analogamente definimos equivalência e conjugação de sistemas planares autônomos. A noção de conjugação topológica é mais forte que equivalência, pois na conjugação, além das órbitas serem preservadas, a velocidade com que elas são percorridas é a mesma, o que nem sempre ocorre na equivalência topológica. Em geral, só são obtidas conjugações locais entre campos, daí a existência do conceito de equivalência. A conjugação e a equivalência topológica são relações de equivalência.

É claro que toda conjugação topológica é um equivalência topológica, mas a recíproca não é verdadeira.

Exemplo 2.2.5. *Considere os sistemas*

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -x\end{aligned}\tag{2.3}$$

e

$$\begin{aligned}\dot{x} &= 2y \\ \dot{y} &= -2x\end{aligned}\tag{2.4}$$

As órbitas dos sistemas (2.3) e (2.4) são periódicas, de período 2π e π , respectivamente. Logo, pela observação (2.2.2) não pode haver uma conjugação entre os dois campos. Porém, tomando h como a função identidade em \mathbb{R}^2 , temos uma equivalência topológica entre os sistemas (2.3) e (2.4).

O resultado abaixo, relacionado a equivalência topológica de campos de vetores, é usado extensivamente neste trabalho.

Proposição 2.2.6. *Sejam P, Q e k funções reais definidas em um aberto conexo $U \subset \mathbb{R}^2$, com $k(x, y) \neq 0$, para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Então o campo de vetores definido por*

$$\begin{aligned}\dot{x} &= P(x, y)k(x, y), \\ \dot{y} &= Q(x, y)k(x, y)\end{aligned}$$

é C^r -equivalente ao campo dado por

$$\begin{aligned}\dot{x} &= P(x, y), \\ \dot{y} &= Q(x, y)\end{aligned}$$

As órbitas mantém a orientação caso $k > 0$, e revertem a orientação caso $k < 0$.

2.3 Conjuntos limites e o Teorema de Poincaré-Bendixson

Dado um campo X , podemos estar interessados em saber o que acontece com suas trajetórias quando $t \rightarrow \infty$. Surgem então as noções discutidas abaixo:

Definição 2.3.1. *Seja $X : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ um campo de vetores C^1 definido no aberto $U \subset \mathbb{R}^2$. Para cada $p \in U$, denotemos por $I_p(\omega_-(p), \omega_+(p))$ o intervalo maximal de p . Se $\omega_+(p) = +\infty$ então definimos o conjunto ω -limite de $p \in U$, denotado por $\omega(p)$, como*

$$\omega(p) = \left\{ q \in U \mid \exists (t_n) \rightarrow +\infty \text{ tal que } \lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi(t_n, p) = q \right\}.$$

De maneira análoga, se $\omega_-(p) = -\infty$ então definimos o conjunto α -limite de p como

$$\alpha(p) = \left\{ q \in U \mid \exists (t_n) \rightarrow -\infty \text{ tal que } \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(t_n, p) = q \right\}.$$

Note que o conjunto $\omega(p)$ de $p \in U$ do sistema (2.1) é o conjunto $\alpha(p)$ do sistema $\dot{x} = -X(x)$, logo podemos reduzir nosso estudo ao conjunto $\omega(p)$. O seguinte teorema descreve as propriedades gerais do conjunto ω -limite de um ponto cuja trajetória está contida em um compacto.

Teorema 2.3.2. *Sejam $X : U \rightarrow \mathbb{R}^k$ um campo de classe C^k , $p \in U$ definido no aberto $U \subset \mathbb{R}^2$, e $\gamma_p^+ = \{\varphi(t, p), t \geq 0\}$, $\gamma_p^- = \{\varphi(t, p), t \leq 0\}$ as chamadas semi-órbitas positiva e negativa de X , respectivamente. Se $\gamma_p^+ \subset K$, para algum conjunto compacto $K \subset U$, então*

- i) $\omega(p) \neq \emptyset$;*
- ii) $\omega(p)$ é compacto;*
- iii) $\omega(p)$ é invariante, isto é, se $q \in \omega(p)$, então a órbita γ_q de q está em $\omega(p)$;*
- iv) $\omega(p)$ é conexo.*

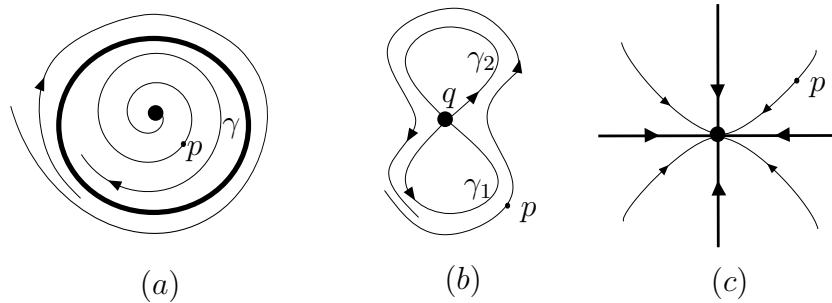
O Teorema de Poincaré-Bendixson é a principal ferramenta no estudo de conjuntos ω -limite de campos de vetores planares. Ele descreve todas as possibilidades para estes conjunto no caso de campos planares.

Teorema 2.3.3 (Teorema de Poincaré-Bendixson). *Seja $X : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ um campo de vetores C^1 definido no aberto $U \subset \mathbb{R}^2$. Fixado $x \in U$, suponha que a semi-órbita positiva γ_x^+ de x esteja contida em um subconjunto compacto de U . Se X possui um número finito de pontos singulares em $\omega(x)$, então uma e apenas uma das seguintes possibilidades ocorre:*

- 1. se $\omega(x)$ contém apenas pontos regulares, então $\omega(x)$ é uma órbita periódica;*
- 2. se $\omega(x)$ contém tanto pontos regulares quanto pontos singulares, então $\omega(x)$ é um conjunto de órbitas onde cada uma tende a um dos pontos singulares de $\omega(x)$;*
- 3. se $\omega(x)$ não possui pontos regulares, então $\omega(x) = \{y\}$ para algum ponto singular y .*

Em particular, o teorema de Poincaré-Bendixson afirma que os únicos conjuntos ω -limite compactos, não-vazios e sem singularidades são as órbitas periódicas. A figura 1 ilustra as possibilidades para conjuntos ω -limite.

Figura 1 – (a) Para todo ponto p que é interior à órbita periódica γ , tem-se $\omega(p) = \gamma$. (b) Neste caso, temos $\omega(p) = \{q\} \cup \gamma_1 \cup \gamma_2$. (c) No caso de um nó atrator linear, qualquer ponto $p \in \mathbb{R}^2$ tem a origem como conjunto ω -limite.



Fonte: Autor.

2.4 Estrutura local dos pontos singulares

Nesta seção estudamos o comportamento local das soluções do sistema (2.1) na vizinhança de um ponto. A longo desta seção, X denota um campo $X : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ de classe C^k , definido em um aberto $U \subset \mathbb{R}^2$.

O teorema do Fluxo Tubular é importante pois garante que o fluxo na vizinhança de um ponto regular é, a menos de conjugação, o mesmo fluxo do campo constante $Y = (1, 0)$, ou seja, existe apenas uma classe de conjugação local. Para isso, precisamos da noção de seção transversal local de um campo de vetores.

Definição 2.4.1. Dado X , uma função $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, de classe C^r é dita uma seção transversal de X se para todo $a \in A$, $f'(a)$ e $X(f(a))$, são linearmente independentes e f é um homeomorfismo. Seja $\Sigma = f(A)$, com a topologia induzida de \mathbb{R} .

Teorema 2.4.2. (Fluxo Tubular) Sejam p um ponto regular de $X : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ de classe C^k , definido em um aberto $U \subset \mathbb{R}^2$ e $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow U$ uma seção transversal de classe C^r com $f(p) = 0$, então existem uma vizinhança V de p em U e um difeomorfismo $h : V \rightarrow (-\varepsilon, \varepsilon) \times B$ de classe C^r , com $\varepsilon > 0$ e B uma vizinhança da origem tal que

i) $h(V \cap \Sigma) = \{0\} \times B$;

ii) h é uma conjugação C^r entre o campo $X|_V$ e o campo constante $Y : (-\varepsilon, \varepsilon) \times B \rightarrow \mathbb{R}^2$ dado por $Y = (1, 0)$.

O comportamento das órbitas nas vizinhanças de pontos singulares apresentam uma complexidade muito maior. Para sistemas lineares da forma

$$\begin{aligned}\dot{x} &= ax + by \\ \dot{y} &= cx + dy,\end{aligned}\tag{2.5}$$

as classes de conjugação são bem conhecidas, porém mesmo no plano, não existe uma classificação geral para sistemas não lineares. Ainda assim, existem resultados que ajudam a determinar o comportamento na vizinhança de um ponto singular.

Seja $X = (P, Q)$ definido no aberto $U \subset \mathbb{R}^2$ e $p \in \mathbb{R}^2$. Dizemos que a matriz Jacobiana

$$DX(p) = \begin{pmatrix} \frac{\partial P}{\partial x}(p) & \frac{\partial P}{\partial y}(p) \\ \frac{\partial Q}{\partial x}(p) & \frac{\partial Q}{\partial y}(p) \end{pmatrix}$$

é a parte linear do campo X no ponto p .

Definição 2.4.3. *Seja X um campo de vetores, um ponto singular p de X é dito:*

- *hiperbólico se os dois autovalores de $DX(p)$ têm parte real não nula;*
- *semi-hiperbólico se exatamente um autovalor de $DX(p)$ é zero;*
- *elementar, se for hiperbólico ou semi-hiperbólico;*
- *nilpotente se os autovalores de $DX(p)$ são nulos mas $DX(p) \neq 0$;*
- *linearmente nulo se $DX(p) = 0$.*

Observe que uso da palavra nilpotente se justifica, pois ocorre no caso em que a Forma de Jordan da matriz jacobiana é da forma

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

O próximo resultado nos mostra que, ao trabalharmos com pontos singulares x_0 de sistemas diferenciais tais como (2.1), podemos sem perda de generalidade, supor que $x_0 = 0$.

Observação 2.4.4. *Considere o sistema (2.1) e defina, para $x_0 \in U$, o conjunto aberto $V = U - x_0 \subset \mathbb{R}^n$ obtido pela translação de U , e $g \in C^1(V, \mathbb{R}^n)$ a função dada por $g(y) = f(y + x_0)$, $y \in V$. Então x_0 é um ponto singular do sistema (2.1) se, e somente se, 0 é um ponto singular do sistema $\dot{y} = g(y)$.*

Dentre as singularidades de um campo, o comportamento local mais simples ocorre nas vizinhanças dos pontos singulares hiperbólicos. Começamos observando que pontos singulares hiperbólicos são isolados.

Observação 2.4.5. *Todo ponto singular hiperbólico é isolado, isto é, existe uma vizinhança do mesmo na qual não há nenhum outro ponto singular. Isto é uma consequência direta do teorema da função inversa, pois como $|DX(p)| \neq 0$, X é um difeomorfismo local, logo, por ser uma bijeção, não pode haver outro ponto na vizinhança do ponto singular com imagem também nula.*

A classificação topológica dos pontos singulares hiperbólicos é dada pelo Teorema de Hartman-Grobman. Ele afirma que, nesse caso, o campo é localmente conjugado ao seu linearizado.

Teorema 2.4.6 (Teorema de Hartman–Grobman). *Suponha que $X : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ é um campo de classe C^k definido no aberto $U \subset \mathbb{R}^n$ tal que $p \in U$ seja um ponto singular hiperbólico de X . Então existem vizinhanças W de p e V de $(0, 0) \in \mathbb{R}^2$ tais que $X|_W$ é topologicamente conjugado ao campo definido por $\dot{x} = DX(p)|_V(x)$.*

Aumentando o grau de complexidade, temos as singularidades semi-hiperbólicas. Observamos que uma singularidade semi-hiperbólica pode não ser isolada, nem mesmo no caso de campos lineares.

Exemplo 2.4.7. *Todo ponto da reta $y = 0$ é uma singularidade do campo linear*

$$\begin{aligned}\dot{x} &= 0 \\ \dot{y} &= y,\end{aligned}$$

e $(0, 0)$ é um ponto singular semi-hiperbólico.

O Teorema de Hartman-Grobman afirma que, no caso de singularidades hiperbólicas, existem apenas três tipos de comportamento, a menos de conjugação topológica: nó atrator, nó repulsor ou sela. No caso das singularidades semi-hiperbólicas isoladas, existe um quarto tipo, chamado sela-nó. Para maiores detalhes veja (DUMORTIER; LLIBRE; ARTÉS, 2006).

Teorema 2.4.8 (Classificação das singularidades semi-hiperbólicas). *Seja $(0, 0)$ uma singularidade isolada do campo de vetores X dado por*

$$\begin{aligned}\dot{x} &= A(x, y) \\ \dot{y} &= \lambda y + B(x, y)\end{aligned}\tag{2.6}$$

sendo A e B são funções analíticas em uma vizinhança da origem com $A(0, 0) = B(0, 0) = 0$ e $DA(0, 0) = DB(0, 0) = 0$ e $\lambda > 0$. Seja $y = f(x)$ a solução de $\lambda y + B(x, y) = 0$ em uma vizinhança de $(0, 0)$ e suponha que a função $g(x) = A(x, f(x))$ tenha uma expressão da forma $g(x) = a_m x^m + o(x^m)$, com $m \geq 2$ e $a_m \neq 0$. Então sempre existe uma curva algébrica analítica invariante, chamada de variedade instável forte, tangente a 0 no eixo y , no qual X é analiticamente conjugado a

$$\dot{y} = \lambda y$$

que tem um comportamento repulsor, pois $\lambda > 0$. Além disso vale uma das seguinte afirmações:

- i) Se m é ímpar e $a_m < 0$, então $(0, 0)$ é uma sela topológica, como na figura 2-(a). Tangente ao eixo x existe uma única curva invariante C^∞ , chamada de variedade central na qual X é C^∞ -conjugado a

$$\dot{x} = -x^m(1 - ax^{m-1}), \quad (2.7)$$

para algum $a \in \mathbb{R}$. Se esta curva invariante é analítica, então sobre ela X é C^ω conjugado a (2.7). O sistema X é C^∞ -conjugado a

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -x^m(1 - ax^{m-1}) \\ \dot{y} &= \lambda y \end{aligned} \quad (2.8)$$

e C^0 -conjugado a

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -x \\ \dot{y} &= y \end{aligned} \quad (2.9)$$

- ii) Se m é ímpar e $a_m < 0$ então $(0, 0)$ é um nó topológico instável, como na figura 2-(b). Cada ponto não pertencente à variedade instável forte pertence a uma curva invariante C^∞ , chamada variedade central, tangente ao eixo x na origem, na qual X é C^∞ -conjugado a

$$\dot{x} = x^m(1 - ax^{m-1}), \quad (2.10)$$

para algum $a \in \mathbb{R}$. Todas essas variedades centrais são mutuamente infinitamente tangentes entre si, e conseqüentemente no máximo uma delas pode ser analítica no caso em que X é C^ω -conjugado a (2.10). O sistema X é C^∞ -conjugado a

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x^m(1 - ax^{m-1}) \\ \dot{y} &= \lambda y \end{aligned} \quad (2.11)$$

e C^0 -conjugado a

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x \\ \dot{y} &= y \end{aligned} \quad (2.12)$$

iii) Se m é par então $(0,0)$ é uma sela-nó, isto é, uma singularidade tal que qualquer vizinhança é a união de um setor parabólico e dois hiperbólicos como na figura 2-(c). Mudando x para $-x$, supomos $a_m > 0$. Cada ponto à direita da variedade instável forte ($x > 0$) está sobre uma curva invariante C^∞ , chamada de variedade central, tangente ao eixo x na origem, e na qual X é C^∞ -conjugado

$$\dot{x} = x^m(1 - ax^{m-1}), \tag{2.13}$$

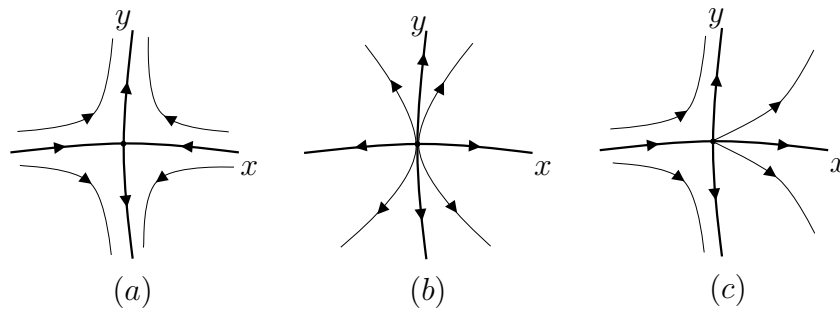
para algum $a \in \mathbb{R}$. Todas essas variedades centrais coincidem em $x \leq 0$, e são consequentemente infinitamente tangentes na origem. No máximo uma dessas variedades pode ser analítica, e nesse caso X é C^ω -conjugado a

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x^m(1 + ax^{m-1}) \\ \dot{y} &= \lambda y \end{aligned} \tag{2.14}$$

e é C^0 -conjugado a

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x^2 \\ \dot{y} &= y \end{aligned} \tag{2.15}$$

Figura 2 – Retratos de fase de pontos singulares semi-hiperbólicos



Fonte: Autor.

O próximo resultado abrange o teorema de classificação das singularidades nilpotentes. Para maiores detalhes veja (DUMORTIER; LLIBRE; ARTÉS, 2006).

Teorema 2.4.9 (Classificação das singularidades Nilpotentes). *Seja $(0,0)$ uma singularidade isolada do campo de vetores X dado por*

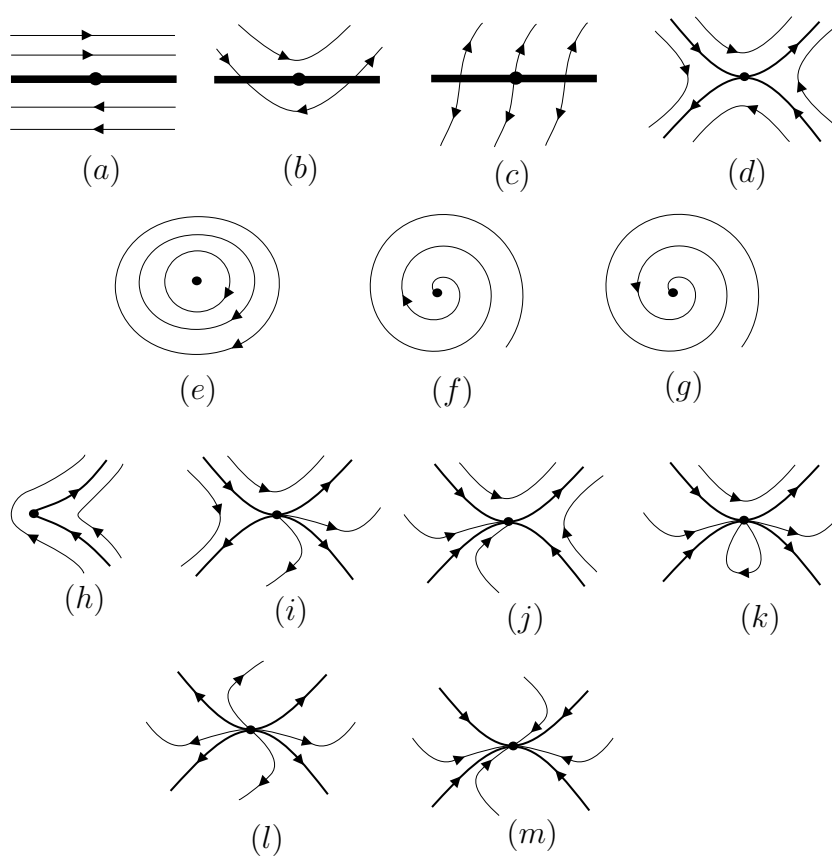
$$\begin{aligned} \dot{x} &= y + A(x, y) \\ \dot{y} &= B(x, y) \end{aligned} \tag{2.16}$$

onde A e B são funções analíticas em uma vizinhança da origem com $A(0,0) = B(0,0) = 0$ e $DA(0,0) = DB(0,0) = 0$. *Seja $y = f(x)$ a solução de $y + A(x, y) = 0$ em uma vizinhança de $(0,0)$ e considere $F(x) = B(x, f(x))$ e $G(x) = (\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y})(x, f(x))$. Então valem as afirmações*

- 1) Se $F(x) \equiv G(x) \equiv 0$, então o retrato de fase de X é dado na figura 3-(a).
- 2) Se $F(x) \equiv 0$ e $G(x) = bx^n + o(x^n)$ para $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$ e $b \neq 0$ então o retrato de fase de X é dado na figura 3-(b) ou 3-(c).
- 3) Se $G(x) \equiv 0$ e $F(x) = ax^m + o(x^m)$ para $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 1$ e $a \neq 0$ então
 - i) Se m é ímpar e $a > 0$, então a origem é uma sela (figura 3-(d)). Se $a < 0$, então temos um centro ou foco, figura 3-(e)-(g);
 - ii) Se m é par a origem é uma cúspide, figura 3-(h).
- 4) Se $F(x) = ax^m + o(x^m)$ e $G(x) = bx^n + o(x^n)$, com $m, n \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$ e $n \geq 1$, $a \neq 0$, $b \neq 0$, então temos
 - i) Se m é par e
 - i1) $m < 2n + 1$, a origem de X é uma cúspide como em figura 3-(h);
 - i2) $m > 2n + 1$, a origem é uma sela-nó, como em figura 3-(i);
 - ii) m é ímpar e $a > 0$, a origem de X é uma sela, como em figura 3-(d);
 - iii) Se m é ímpar, $a < 0$ e
 - iii1) $m < 2n + 1$ ou $m = 2n + 1$ e $b^2 + 4a(n + 1) < 0$ então a origem de X é um centro ou um foco, figura 3-(e)-(g);
 - iii2) n é ímpar e $m > 2n + 1$ ou $m = 2n + 1$ e $b^2 + 4a(n + 1) \geq 0$ a origem de X consiste de um setor parabólico e um elíptico, como na figura 3-(k);
 - iii3) se n par e $m > 2n + 1$ ou $m = 2n + 1$ e $b^2 + 4a(n + 1) \geq 0$, então a origem de X é nó, como na figura 3-(l)-(m) o nó é atrator se $b < 0$ e repulsor se $b > 0$.

A demonstração do teorema de classificação de singularidade nilpotentes é feita utilizando a técnica do Blow up, que é tratada no próximo capítulo.

Figura 3 – Retratos de fase de pontos singulares nilpotentes.



Fonte: Autor.

3 A técnica Blow up

A técnica do Blow up consiste em uma mudança de coordenadas utilizada para estudar pontos singulares não elementares, isto é, nilpotentes e linearmente nulos. Intuitivamente, essa mudança de coordenadas “explode” ou expande o ponto singular em um número finito de singularidades, que serão hiperbólicas ou semi-hiperbólicas e podem ser estudadas separadamente. Caso as singularidades que surgem não sejam elementares, é possível aplicar um novo blow up em cada uma. O chamado Teorema da Decomposição, que pode ser encontrado em (DUMORTIER; LLIBRE; ARTÉS, 2006), garante que sob certas condições, após um número finito de Blow ups, serão encontrados apenas pontos singulares elementares. Após isso, pelo processo inverso (blow down), obtemos o retrato de fase de X na vizinhança de um ponto singular não elementar. Existe ainda uma técnica similar chamada Blow up polar, que consiste em “explodir” o ponto singular explode em finitos pontos singulares sobre um círculo. Ficaremos restritos ao Blow up direcional pois este se mostra mais eficiente quando são necessários sucessíveis Blow ups. Maiores detalhes podem ser encontrados em (ANDRONOV et al., 1973).

3.1 Blow up direcional

Considere o sistema

$$\begin{aligned}\dot{x} &= P(x, y) \\ \dot{y} &= Q(x, y)\end{aligned}\tag{3.1}$$

em que P e Q são funções analíticas definidas em alguma vizinhança da origem. Suponha que $(0, 0)$ é um ponto singular isolado do sistema (3.1). A mudança de coordenadas dada por

$$x = u, \quad y = uv,\tag{3.2}$$

é chamada Blow up na direção x positivo. Note que como $v = \frac{y}{u} = \frac{y}{x}$, esta transformação não está bem definida no eixo $x = 0$. A relação (3.2) implica que pontos do segundo e do terceiro quadrante do plano xy são enviados em pontos do terceiro e do segundo quadrante do plano uv , respectivamente. Os demais quadrantes são invariantes.

Derivando (3.2) com relação a t , obtemos

$$\dot{u} = \dot{x}, \quad \dot{y} = \dot{u}v + u\dot{v},\tag{3.3}$$

ou seja

$$\dot{u} = \dot{x}, \quad \text{e } \dot{v} = \frac{\dot{y} - \dot{u}v}{u}.\tag{3.4}$$

Substituindo isto em (3.1), obtemos

$$\begin{aligned}\dot{u} &= P(u, uv) \\ \dot{v} &= \frac{Q(u, vu) - vP(u, uv)}{u}.\end{aligned}\tag{3.5}$$

A origem do plano xy é levada a reta $u = 0$.

A mudança de variáveis

$$x = uv, \quad y = v,\tag{3.6}$$

é chamada Blow up na direção y positivo. Com cálculos análogos aos aplicados ao Blow up na direção x positivo, a substituição em (3.6) transforma o sistema (3.1) em

$$\begin{aligned}\dot{u} &= \frac{P(uv, v) - uQ(uv, v)}{v} \\ \dot{v} &= Q(uv, v).\end{aligned}\tag{3.7}$$

Observação 3.1.1. Considerando $h(x, y) = (x, \frac{y}{x})$, $X_1(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$ o campo antes do Blow up e $X_2(u, v) = (P(u, uv), Q(u, uv))$ o campo após a mudança (3.2), temos que

$$\begin{aligned}Dh(X_1) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -y & 1 \\ x^2 & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P(x, y) \\ Q(x, y) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} P(x, y) \\ -\frac{y}{x^2}P(x, y) + \frac{1}{x}Q(x, y) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} P(u, uv) \\ -\frac{v}{u}P(u, uv) + \frac{1}{u}Q(u, uv) \end{pmatrix} \\ &= X_2(h(x, y)).\end{aligned}$$

Ou seja, pela Proposição 2.2.3, a mudança de coordenadas não linear (3.2) é de fato uma C^∞ -conjugação no seu domínio de definição. Um cálculo análogo pode ser feito para a mudança 3.6.

Exemplo 3.1.2. Considere o campo dado pelo sistema

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x^2 \\ \dot{y} &= 2xy - y^2.\end{aligned}\tag{3.8}$$

Note que $(0, 0)$ é uma singularidade isolada e linearmente nula. Aplicando Blow up na direção x positivo, da Proposição 2.2.3 obtemos que o sistema (3.8), com $x \neq 0$, é

C^∞ -conjugado ao campo

$$\begin{aligned}\dot{u} &= u^2 \\ \dot{v} &= uv - uv^2,\end{aligned}\tag{3.9}$$

nas regiões $u \neq 0$. Pela Proposição 2.2.6, o campo dado pelo sistema (3.9), nas regiões $u > 0$ e $u < 0$, é C^∞ -equivalente,

$$\begin{aligned}\dot{\bar{u}} &= \bar{u} \\ \dot{\bar{v}} &= \bar{v} - \bar{v}^2,\end{aligned}\tag{3.10}$$

em cada uma das regiões $\bar{u} > 0$ e $\bar{u} < 0$, respectivamente. Como fizemos o Blow up na direção x , buscamos singularidades com $\bar{u} = 0$. São elas $(0,0)$ e $(0,1)$. A matriz Jacobiana do sistema (3.10) nos pontos $(0,0)$ e $(0,1)$ são respectivamente

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ e } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Pelo Teorema de Hartman-Grobman, $(0,0)$ é um nó repulsor e $(0,1)$ é uma sela hiperbólica. O retrato de fase de (3.10) é dado na figura 4 – (a).

Faremos agora o processo inverso (Blow down). Intuitivamente, para obtermos o retrato de fase de (3.9), devemos multiplicar (3.10) por u , sendo assim, cria-se uma linha de singularidades em $u = 0$, e o sentido das órbitas é trocado na região onde $u < 0$. Ainda, pela mudança de variáveis (3.2), a reta invariante $v = 1$ é enviada na reta $y = x$ do sistema (3.8). Podemos também usar informações do campo (3.8), por exemplo, sobre $x = 0$, o campo é horizontal e aponta para baixo, pois $\dot{x} = 0$ e $\dot{y} = -y^2$.

Agora, aplicando o blow up na direção y positivo, obtemos o sistema

$$\begin{aligned}\dot{u} &= (u - u^2)v \\ \dot{v} &= (2u - 1)v^2\end{aligned}\tag{3.11}$$

Novamente, pela Proposição 2.2.6, o campo dado pelo sistema (3.11) é C^∞ equivalente, na região onde $v \neq 0$ ao campo dado pelo sistema

$$\begin{aligned}\dot{\bar{u}} &= \bar{u} - \bar{u}^2 \\ \dot{\bar{v}} &= (2\bar{u} - 1)\bar{v}\end{aligned}\tag{3.12}$$

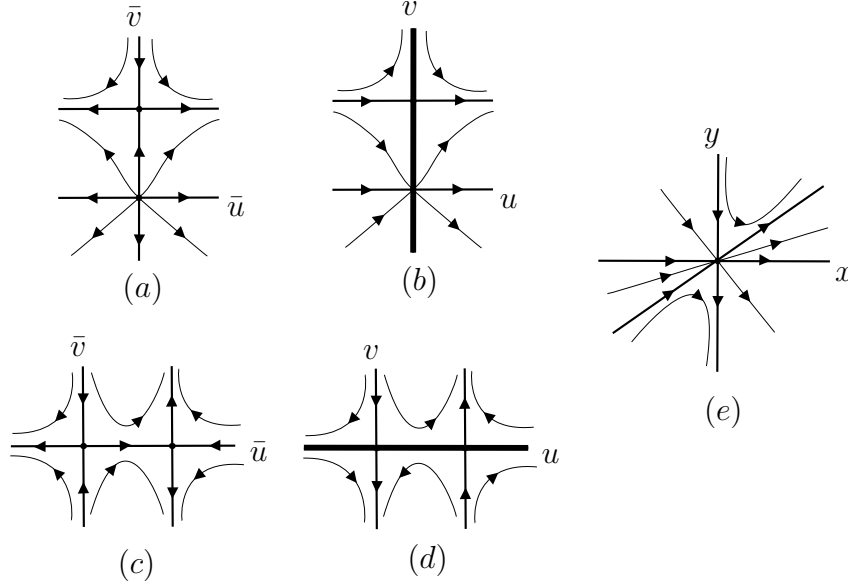
Como fizemos um blow up na direção y , buscamos singularidades com $\bar{v} = 0$. Neste caso, encontramos $(0,0)$ e $(1,0)$. A matriz Jacobiana do sistema 3.12 nos pontos $(0,0)$ e $(1,0)$ são respectivamente

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ e } \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Portanto ambas as singularidades são selas hiperbólicas. Por argumentos análogos aos aplicados para no blow up na direção x , temos o retrato de fase de (3.12) e (3.11) nas figuras 4-(c) e 4-(d), respectivamente.

O retrato de fase do sistema (3.8) é dado na figura 4-(e).

Figura 4 – (a) Retrato de fase do sistema (3.10). (b) Retrato de fase do sistema (3.9). (c) Retrato de fase do sistema (3.12). (d) Retrato de fase do sistema (3.12). (e) Retrato de fase do sistema (3.8).



Fonte: Autor.

Os próximos resultados darão sustentação ao Blow down, processo que consiste em desfazer o Blow up. Dado $\varepsilon > 0$, considere as seguintes regiões do plano:

$$B_\varepsilon = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; \sqrt{x^2 + y^2} < \varepsilon\}$$

$$U_\varepsilon = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; \sqrt{x^2 + y^2} < \varepsilon, x \neq 0\}$$

$$V_\varepsilon = \left\{ (u, v) \in \mathbb{R}^2; -\sqrt{\frac{\varepsilon^2}{1+v^2}} < u < \sqrt{\frac{\varepsilon^2}{1+v^2}}; u \neq 0 \right\}$$

$$W_\varepsilon = \left\{ (u, v) \in \mathbb{R}^2; -\sqrt{\frac{\varepsilon^2}{1+v^2}} < u < \sqrt{\frac{\varepsilon^2}{1+v^2}} \right\}$$

Suponha que as funções P e Q do sistema (3.1) são analíticas em B_ε , para algum $\varepsilon > 0$ e seja X o campo definido por (3.1). Seja $G : W_\varepsilon \rightarrow B_\varepsilon$ dada por (3.2), onde os pontos de W_ε são denotados por (u, v) e os pontos de B_ε por (x, y) . Note que $G|_{V_\varepsilon}$ é um difeomorfismo entre V_ε e U_ε . Logo

$$\tilde{X}(u, v) = DG^{-1}(G(u, v))X(G(u, v)), \text{ para } (u, v) \in V_\varepsilon, \quad (3.13)$$

é um campo de vetores definido em V_ε que é C^ω -conjugado a $X|_{U_\varepsilon}$. O campo \tilde{X} é o campo definido pelo sistema (3.5). Tomando ε suficientemente pequeno, podemos garantir que \tilde{X} tem uma extensão C^ω para W_ε .

Lema 3.1.3. *O campo \hat{X} tem uma única extensão \bar{X} de classe C^ω para W_ε a qual satisfaz*

$$\begin{aligned}\dot{u} &= uP_m(1, v) + u^2P^*(u, v) \\ \dot{v} &= Q_m(1, v) - vP_m(1, v) + uQ^*(u, v)\end{aligned}\tag{3.14}$$

onde P^* e Q^* são funções reais C^ω em W_ε .

Lema 3.1.4. *Seja $(0, 0)$ um ponto singular isolado do sistema (3.1) e seja γ^+ uma semi-órbita positiva do sistema (3.1) parametrizada por $(x(t), y(t))$. Suponha que $\omega(\gamma^+) = \{(0, 0)\}$ com $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{y(t)}{x(t)} = \beta$, para algum $\beta \in \mathbb{R}$ e que $u(t) > 0$, para todo $t > 0$, então*

i) existe uma semi-órbita positiva γ_1 do sistema (3.14) contida em V_ε correspondente a γ e o ponto $(0, \beta)$ é uma singularidade de (3.14);

ii) $\omega(\gamma_1) = \{(0, \beta)\}$.

Reciprocamente, sejam $(0, \beta)$ ponto singular (3.14), para algum $\beta \in \mathbb{R}$ e γ_1 semi-órbita positiva do sistema (3.14) contida em V_ε e tal que $\omega(\gamma_1) = \{(0, \beta)\}$. Então a semi-órbita positiva γ do sistema (3.1) parametrizada por $(x(t), y(t))$ e correspondente a γ_1 , satisfaz $\omega(\gamma) = \{(0, 0)\}$ e $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{y(t)}{x(t)} = \beta$

Após aplicar o blow up na direção y positivo (transformação (3.6)) no sistema (3.1) e aplicação da Proposição 2.2.6 com o fator v^{m-1} e uma extensão para \mathbb{R}^2 , obtemos o análogo ao sistema (3.14) dado por

$$\begin{aligned}\dot{u} &= uP_m(u, 1) - uQ_m(u, 1) + vP^*(u, v) \\ \dot{v} &= vP_m(u, 1) + v^2Q^*(u, 1)\end{aligned}\tag{3.15}$$

onde P^* e Q^* são funções reais analíticas definidas em \mathbb{R}^2 . As singularidades do sistema (3.15) com $v = 0$ satisfazem $uP_m(u, 1) - uQ_m(u, 1)$.

Para enunciar resultados análogos ao Lema 3.1.4, definimos as regiões

$$\begin{aligned}U'_\varepsilon &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; \sqrt{x^2 + y^2} < \varepsilon, y \neq 0\} \\ V'_\varepsilon &= \left\{ (u, v) \in \mathbb{R}^2; -\sqrt{\frac{\varepsilon^2}{1+v^2}} < u < \sqrt{\frac{\varepsilon^2}{1+v^2}}; v \neq 0 \right\}\end{aligned}$$

Lema 3.1.5. *Seja $(0, 0)$ um ponto singular isolado do sistema (3.1) e seja γ^+ uma semi-órbita positiva do sistema (3.1) parametrizada por $(x(t), y(t))$. Suponha que $\omega(\gamma^+) = \{(0, 0)\}$ com $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{x(t)}{y(t)} = \alpha$, para algum $\alpha \in \mathbb{R}$ e que $v(t) > 0$, para todo $t > 0$, então*

i) existe uma semi-órbita positiva γ_1 do sistema (3.15) contida em V'_ε que corresponde a γ e o ponto $(\alpha, 0)$ é uma singularidade do sistema (3.15);

$$\text{ii) } \omega(\gamma_1) = \{(\alpha, 0)\}.$$

Reciprocamente, sejam $(\alpha, 0)$ ponto singular (3.15), para algum $\beta \in \mathbb{R}$ e γ_1 semi-órbita positiva do sistema (3.15) contida em V'_ε . Então a semi-órbita positiva γ do sistema (3.1) parametrizada por $(x(t), y(t))$ e correspondente a γ_1 , satisfaz $\omega(\gamma) = \{(0, 0)\}$ e $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{x(t)}{y(t)} = \alpha$.

3.2 Blow up quase homogêneo

Existem casos em que os pontos singulares que aparecem após o blow up direcional são não elementares. Nestes casos, existe uma generalização do blow up direcional, que tem uma implementação computacional mais eficiente. O blow up quase homogêneo consiste nas seguintes mudanças de variáveis

$$x = u^\alpha, \quad y = u^\beta v, \quad (\text{direção } x \text{ positivo}), \quad (3.16)$$

$$x = -u^\alpha, \quad y = u^\beta v, \quad (\text{direção } x \text{ negativo}), \quad (3.17)$$

$$x = uv^\alpha, \quad y = v^\beta, \quad (\text{direção } y \text{ positivo}), \quad (3.18)$$

$$x = uv^\alpha, \quad y = -v^\beta, \quad (\text{direção } y \text{ negativo}), \quad (3.19)$$

onde α e β são números naturais escolhidos de forma conveniente. Note que tomando $\alpha = \beta = 1$ recaímos no blow up direcional.

Exemplo 3.2.1. *Vamos estudar o retrato de fase do campo vetorial dado pelo sistema*

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= x^2 + 2xy. \end{aligned} \quad (3.20)$$

A origem de (3.20) é uma singularidade nilpotente isolada. Apesar de ser um campo simples, aplicando o Blow up tanto na direção x quanto na direção y , aparecem singularidades não elementares, e precisaríamos aplicar a técnica novamente nestas. Podemos evitar isto aplicando o Blow up quase homogêneo na direção x , com $\alpha = 2$ e $\beta = 3$. Com isto, obtemos

$$\begin{aligned} \dot{u} &= \frac{u^2 v}{2} \\ \dot{v} &= u + 2u^2 v - \frac{3}{2} uv^2 \end{aligned} \quad (3.21)$$

dividindo o sistema pelo fator comum u , obtemos

$$\begin{aligned}\dot{u} &= \frac{\bar{u}\bar{v}}{2} \\ \dot{v} &= 1 + 2\bar{u}\bar{v} - \frac{3}{2}\bar{v}^2\end{aligned}\tag{3.22}$$

as singularidades de (3.22) com $\bar{u} = 0$ são $(0, \sqrt{2/3})$ e $(0, -\sqrt{2/3})$. Os autovalores da matriz Jacobiana de (3.22) avaliada nesses pontos são, respectivamente

$$\frac{1}{\sqrt{6}}, -\sqrt{6} \text{ e } \frac{-1}{\sqrt{6}}, \sqrt{6}.$$

Logo, ambas são selas. O retrato de fase de (3.22) está na figura 5-(a). Para ir do sistema (3.22) para (3.21), multiplicamos por u , o que cria uma linha de singularidades em $u = 0$, e inverte o sentido das órbitas onde $u < 0$. Ainda, note que (3.21) tem

$$v = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}$$

como retas invariantes. Por (3.16), temos que o sistema (3.20) tem

$$y = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}x^{2/3}$$

como retas invariantes.

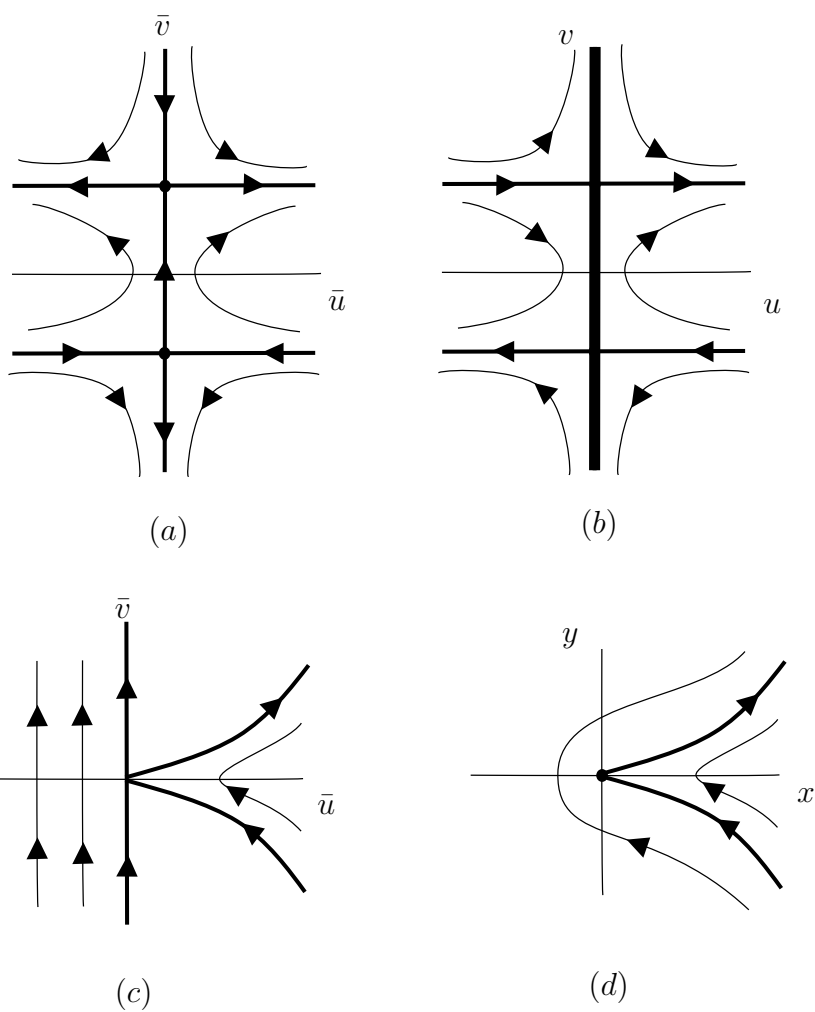
Até agora, não temos informações sobre o que acontece na região onde $x < 0$, por isso vamos aplicar o Blow up quase homogêneo dado em (3.17). Após isto e cancelando o fator u em comum, obtemos

$$\begin{aligned}\dot{u} &= -\frac{\bar{u}\bar{v}}{2} \\ \dot{v} &= 1 - 2\bar{u}\bar{v} + \frac{3}{2}\bar{v}^2\end{aligned}\tag{3.23}$$

Este campo não tem singularidades e é vertical constante igual 1 em pontos da forma $(0, \bar{v})$. Um ponto singular com este comportamento é chamado de cúspide. Agora, a desingularização está completa e o retrato de fase de (3.20) é dado na figura 5-(d).

Existem maneiras precisas de determinar tanto quais direções e sentidos são necessárias para o Blow up. A escolha de α e β adequados pode ser obtida por um processo conhecido como diagrama de Newton. Ambas podem ser encontrados em (ALVAREZ; FERRAGUT; JARQUE, 2011).

Figura 5 – (a) Retrato de fase do sistema (3.22). (b) Retrato de fase do sistema (3.21).
 (c) Retrato de fase do sistema (3.23). (d) Retrato de fase do sistema (3.20)



Fonte: Autor.

4 Compactificação de Poincaré

Nos capítulos anteriores apresentamos resultados que descrevem o comportamento local das órbitas de um campo. No entanto, não permitem determinar como as singularidades se conectam para produzir o retrato de fase de um sistema planar.

A fim de entender o comportamento das órbitas do sistema $\dot{x} = X(x)$ quando estas estão próximas ao infinito, podemos usar uma compactificação. Este procedimento deve ser usado principalmente porque \mathbb{R}^2 não é compacto. Neste capítulo apresentaremos a chamada compactificação de Poincaré. Existem outras técnicas para compactificar o plano na esfera, como por exemplo, a projeção estereográfica, que consiste em identificar o plano com a esfera \mathbb{S}^2 com exceção do polo norte, e depois acrescentar o ponto ∞ a \mathbb{R}^2 , de modo que $\mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$ torna-se um conjunto compacto.

A compactificação de Poincaré é uma ferramenta que transforma um campo polinomial planar em outro campo planar cujas órbitas estão contidas em um conjunto compacto. Desse modo, podemos utilizar o Teorema de Poincaré-Bendixson, além de outros resultados, estabelecendo o retrato de fase global do sistema original.

A ideia da compactificação de Poincaré é identificar o plano \mathbb{R}^2 com os hemisférios norte e sul de \mathbb{S}^2 e através de projeções, o campo X em \mathbb{R}^2 pode ser estendido a um campo $p(X)$ em \mathbb{S}^2 , de forma analítica. Esta técnica tem como vantagem o fato de que os pontos singulares ficam distribuídos ao longo do equador da esfera, enquanto na projeção estereográfica, estes ficam todos identificados com o polo norte da esfera. Faremos a construção da Compactificação de Poincaré para um campo vetorial polinomial planar, mas essa construção pode ser estendida para campos em \mathbb{R}^n . Observamos que a técnica pode ser aplicada somente a campos polinomiais, ou seja, cujas coordenadas do campo são polinômios.

4.1 Construção da Compactificação de Poincaré

Neste capítulo usaremos $x = (x_1, x_2)$ como coordenadas de \mathbb{R}^2 e $y = (y_1, y_2, y_3)$ para coordenadas de \mathbb{R}^3 . Consideremos o campo vetorial $X = (P, Q)$, ou equivalentemente o sistema

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= P(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 &= Q(x_1, x_2). \end{aligned} \tag{4.1}$$

Primeiramente, identificamos \mathbb{R}^2 com o plano $\{(x_1, x_2, 1) \in \mathbb{R}^3 : x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$, tangente à esfera $\mathbb{S}^2 = \{y \in \mathbb{R}^3 : y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = 1\}$ no ponto $N = (0, 0, 1)$. Tal esfera é chamada Esfera de Poincaré. O próximo passo é transferir duas cópias do campo em

\mathbb{R}^2 , uma para o hemisfério norte $H^+ = \{y \in \mathbb{R}^3; y_3 > 0\}$ e outra para o hemisfério sul $H^- = \{y \in \mathbb{R}^3; y_3 < 0\}$ de \mathbb{S}^2 , através das projeções centrais $f^+ : \mathbb{R}^2 \rightarrow H^+$ e $f^- : \mathbb{R}^2 \rightarrow H^-$. Geometricamente, dado um ponto $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, considere a reta r que passa por x e por $O = (0, 0, 0) \in \mathbb{R}^3$. Essa reta intersecta a esfera \mathbb{S}^2 em dois pontos distintos, um no hemisfério norte e outro no hemisfério sul.

A fim de obter a expressão de f^+ , note que os pontos da reta \overrightarrow{Ox} são da forma $t(x_1, x_2, 1)$, $t \in \mathbb{R}$, e $f^+(x)$ está no hemisfério norte de \mathbb{S}^2 se for um vetor unitário, isto é, $\langle tx, tx \rangle = 1$, com $t > 0$. Daí

$$\begin{aligned} \langle (tx_1, tx_2, t), (tx_1, tx_2, t) \rangle &= 1 \\ t^2 x_1^2 + t^2 x_2^2 + t^2 &= 1 \\ t &= \frac{1}{\Delta(x)}, \end{aligned}$$

com $\Delta(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + x_1^2 + x_2^2}}$, pois $t > 0$. Desta forma,

$$f^+(x) = \left(\frac{x_1}{\Delta(x)}, \frac{x_2}{\Delta(x)}, \frac{1}{\Delta(x)} \right).$$

Com o raciocínio inteiramente análogo, obtemos

$$f^-(x) = - \left(\frac{x_1}{\Delta(x)}, \frac{x_2}{\Delta(x)}, \frac{1}{\Delta(x)} \right) = -f^+(x).$$

Proposição 4.1.1. *As funções $f^+ : \mathbb{R}^2 \rightarrow H^+$ e $f^- : \mathbb{R}^2 \rightarrow H^-$ são difeomorfismos.*

Demonstração. f^+ é uma função C^∞ de \mathbb{R}^2 em H^+ , então basta mostrar que f^+ tem inversa de classe C^∞ . Para isto defina $g^+ : H^+ \rightarrow \mathbb{R}^2$ por

$$g^+(y_1, y_2, y_3) = \left(\frac{y_1}{y_3}, \frac{y_2}{y_3} \right).$$

Para todo $x \in \mathbb{R}^2$ temos que

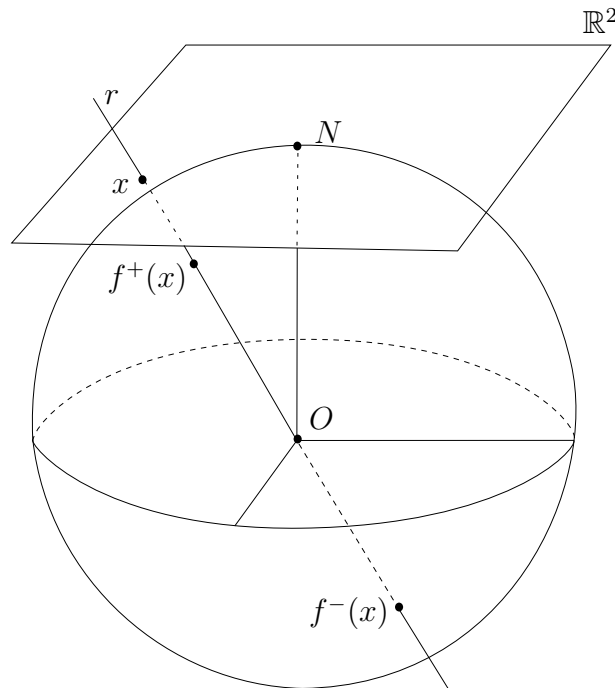
$$g^+ \circ f^+(x) = g^+ \left(\frac{x_1}{\Delta(x)}, \frac{x_2}{\Delta(x)}, \frac{1}{\Delta(x)} \right) = (x_1, x_2).$$

Por outro lado, dado $y \in H^+$,

$$f^+ \circ g^+(y) = f^+ \left(\frac{y_1}{y_3}, \frac{y_2}{y_3} \right) = y_3 \left(\frac{y_1/y_3}{\sqrt{y_1^2 + y_2^2 + y_3^2}}, \frac{y_2/y_3}{\sqrt{y_1^2 + y_2^2 + y_3^2}}, \frac{1}{\sqrt{y_1^2 + y_2^2 + y_3^2}} \right),$$

logo $f^+ \circ g^+(y) = (y_1, y_2, y_3) = y$. Isso prova que g^+ é a inversa de f^+ .

Figura 6 – Projeção Central



Fonte: Autor.

Além disso, g^+ é C^∞ , pois sua composição com as cartas locais resulta em uma função de classe C^∞ entre abertos de \mathbb{R}^2 , e esta é a definição de função diferenciável entre superfícies.

Para f^- definimos $g^-(y_1, y_2, y_3) = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_3 & y_3 \end{pmatrix}$ em H^- . Cálculos análogos mostram que g^- é a inversa de f^- e que g^- é de classe C^∞ . \square

Note que pontos da forma $(y_1, y_2, 0) \notin f^+(\mathbb{R}^2)$, e também que $(y_1, y_2, 0)$ é o limite de f^+ quando $\|x\|$ tende ao infinito. Juntamente com a figura 6, isto nos ajuda a entender que estamos identificando o infinito de \mathbb{R}^2 com o equador de \mathbb{S}^2 . Identificando o equador de \mathbb{S}^2 com \mathbb{S}^1 , cada ponto de \mathbb{S}^1 corresponde a uma direção distinta com a qual podemos nos aproximar do infinito em \mathbb{R}^2 .

O campo X define um campo vetorial \bar{X} em $H^+ \cup H^-$ da seguinte forma:

$$\bar{X}(y) = \begin{cases} Df^+(x)(X(x)), & \text{se } y = f^+(x) \\ Df^-(x)(X(x)), & \text{se } y = f^-(x). \end{cases} \quad (4.2)$$

Vale ressaltar que \bar{X} é um campo definido em $\mathbb{S}^2 \setminus \mathbb{S}^1$, que pela Proposição 2.2.3, é C^∞ -conjugado a X . Como queremos estudar o comportamento das órbitas no infinito, nosso objetivo agora é estender o campo \bar{X} para todo \mathbb{S}^2 .

Embora os argumentos apresentados até aqui sejam válidos para qualquer campo definido em \mathbb{R}^2 , a hipótese de X ser polinomial garante a existência da extensão de \bar{X}

para \mathbb{S}^2 . Como ficará claro posteriormente, tal extensão é possível se multiplicarmos o campo pelo fator $\rho(y) = y_3^{d-1}$, onde d é o máximo entre os graus de P e Q . O campo $\hat{X} = y_3^{d-1}\bar{X}$ obtido desse modo é chamado compactificação de Poincaré do campo X em \mathbb{R}^2 , e vamos denotá-lo por $p(X)$. Mostraremos que $p(X)$ não é topologicamente conjugado a X , mas continua sendo topologicamente equivalente. Como nosso objetivo é determinar os conjuntos α e ω -limites das órbitas de X , a equivalência topológica é suficiente.

Enquanto as coordenadas cartesianas são globais no plano, na esfera não existem coordenadas únicas que nos permitem identificar todos os pontos, por isto usamos cartas locais. É possível cobrir a esfera \mathbb{S}^2 com seis cartas locais que a parametrizam. Considere

$$U_k = \{y \in \mathbb{S}^2; y_k > 0\}, \quad \text{com } \phi_k : U_k \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \phi_k(y) = \left(\frac{y_m}{y_k}, \frac{y_n}{y_k} \right)$$

$$V_k = \{y \in \mathbb{S}^2; y_k < 0\}, \quad \text{com } \psi_k : V_k \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \psi_k(y) = -\left(\frac{y_m}{y_k}, \frac{y_n}{y_k} \right)$$

para $m < n$, $m \neq n$, $k = 1, 2, 3$. Utilizaremos indistintamente $z = (u, v)$ para a imagem de ϕ_k e ψ_k nas 6 cartas.

Como estamos trabalhando com cartas, precisamos saber como o campo se escreve em cada uma das cartas locais. Por fim, note que os pontos de \mathbb{S}^1 tem coordenada $v = 0$ em todas cartas. De fato, se $y = (y_1, y_2, 0) \in \mathbb{S}^1$, então

$$\phi_1(y) = \left(\frac{y_2}{y_1}, \frac{0}{y_1} \right) = (u, 0), \quad \text{e } \phi_2(y) = \left(\frac{y_1}{y_2}, \frac{0}{y_2} \right) = (u, 0).$$

4.2 A expressão da compactificação de Poincaré nas cartas locais

Apresentaremos os cálculos da expressão do campo compactificado na carta U_1 . Começamos inicialmente com o campo polinomial $X(x_1, x_2) = (P(x_1, x_2), Q(x_1, x_2))$ em \mathbb{R}^2 , passamos então para um campo induzido em H^+ , $\bar{X}(y) = Df^+(x)X(x)$, para $y = f^+(x)$, no hemisfério norte. Calculemos \bar{X} em U_1 , nas coordenadas (u, v) . Dado $y \in U_1$, desde que $D\phi_1(y)$ está definida no plano tangente a \mathbb{S}^2 em y , o campo \bar{X} nas coordenadas (u, v) será definido por $D\phi_1(y)\bar{X}(y)$. Pela regra da cadeia, com $y = f^+(x)$, temos

$$D\phi_1(y)\bar{X}(y) = D\phi_1(y)Df^+(x)X(x) = D(\phi_1 \circ f^+)(x)X(x).$$

Como

$$(\phi_1 \circ f^+)(x) = \phi_1 \left(\frac{x_1}{\Delta(x)}, \frac{x_2}{\Delta(x)}, \frac{1}{\Delta(x)} \right) = \left(\frac{x_2}{x_1}, \frac{1}{x_1} \right) = (u, v)$$

Assim, temos que na carta U_1 valem as relações

$$x_1 = \frac{1}{v} \quad \text{e} \quad x_2 = \frac{u}{v}. \quad (4.3)$$

Daí

$$\begin{aligned}\bar{X}|_{U_1} &= \begin{pmatrix} \frac{-x_2}{x_1^2} & \frac{1}{x_1} \\ -\frac{1}{x_1^2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P(x_1, x_2) \\ Q(x_1, x_2) \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{x_1^2} \left(-x_2 P(x_1, x_2) + x_1 Q(x_1, x_2), -P(x_1, x_2) \right),\end{aligned}$$

logo,

$$\bar{X}|_{U_1} = v^2 \left(-\frac{u}{v} P\left(\frac{1}{v}, \frac{u}{v}\right) + \frac{1}{v} Q\left(\frac{1}{v}, \frac{u}{v}\right), -P\left(\frac{1}{v}, \frac{u}{v}\right) \right). \quad (4.4)$$

Agora, observe que como P e Q são polinômios, com grau máximo d , é possível que apareça um termo de ordem v^{d-1} na expressão de $\bar{X}|_{U_1}$. Desta forma, o campo $\bar{X}|_{U_1}$ não estará definido em $v = 0$, que como já observamos, corresponde ao equador de \mathbb{S}^2 . A fim de resolver este problema, podemos multiplicar o campo \bar{X} pelo fator $\rho(y) = y_3^{d-1}$.

Precisamos da expressão do fator ρ nas coordenadas (u, v) .

$$y_3 = \frac{1}{\sqrt{1 + x_1^2 + x_2^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + 1/v^2 + u^2/v^2}} = \frac{|v|}{\sqrt{1 + u^2 + v^2}} = \frac{v}{\sqrt{1 + u^2 + v^2}}$$

onde a última igualdade se dá pois $v = \frac{y_3}{y_1} > 0$, já que estamos considerando pontos em $U_1 \cap H^+$. Daí segue que

$$\rho(y) = y_3^{d-1} = \frac{v^{d-1}}{\Delta(z)^{d-1}} = v^{d-1} m(z)$$

onde $\Delta(z) = \frac{1}{\sqrt{1 + u^2 + v^2}}$ e $m(z) = (1 + u^2 + v^2)^{\frac{1-d}{2}}$. Finalmente, a compactificação de Poincaré do campo X na carta U_1 é dado por

$$p(X|_{U_1}) = v^{d+1} m(z) \left(-\frac{u}{v} P\left(\frac{1}{v}, \frac{u}{v}\right) + \frac{1}{v} Q\left(\frac{1}{v}, \frac{u}{v}\right), -P\left(\frac{1}{v}, \frac{u}{v}\right) \right).$$

Como $m(z) > 0$, a compactificação de Poincaré é topologicamente equivalente a

$$\frac{1}{m(z)} p(X|_{U_1}) = v^{d+1} \left(-\frac{u}{v} P\left(\frac{1}{v}, \frac{u}{v}\right) + \frac{1}{v} Q\left(\frac{1}{v}, \frac{u}{v}\right), -P\left(\frac{1}{v}, \frac{u}{v}\right) \right).$$

Os cálculos para as demais cartas são análogos e as expressões são dadas a seguir.

Para a carta (U_1, ϕ_1) :

$$\dot{u} = v^d \left[-u P\left(\frac{1}{v}, \frac{u}{v}\right) + Q\left(\frac{1}{v}, \frac{u}{v}\right) \right], \quad \dot{v} = -v^{d+1} P\left(\frac{1}{v}, \frac{u}{v}\right). \quad (4.5)$$

Para a carta (U_2, ϕ_2) :

$$\dot{u} = v^d \left[P\left(\frac{u}{v}, \frac{1}{v}\right) - u Q\left(\frac{u}{v}, \frac{1}{v}\right) \right], \quad \dot{v} = -v^{d+1} Q\left(\frac{u}{v}, \frac{1}{v}\right). \quad (4.6)$$

Para a carta U_3 , sua expressão coincide com o campo X , pois $U_3 = H^+$ e $\phi_3 = (f^+)^{-1}$, ou seja, para a carta (U_3, ϕ_3) :

$$\dot{u} = P(u, v), \quad \dot{v} = Q(u, v). \quad (4.7)$$

Observando a expressão de ψ_k , e o processo que foi feito com ϕ_k em cada carta, a expressão do campo $p(X)$ na vizinhança de cada V_i será a mesma que em U_i , multiplicada pelo fator $(-1)^{d-1}$. Isso ocorre porque em V_i

$$y_3^{d-1} = \frac{-v^{d-1}}{\Delta(z)^{d-1}} = (-1)^{d-1} \frac{v^{d-1}}{\Delta(z)^{d-1}}.$$

Definição 4.2.1. Chamamos de ponto singular finito (respectivamente, infinito) de X ou de $p(X)$ a um ponto singular que está em $\mathbb{S}^2 \setminus \mathbb{S}^1$ (respectivamente, \mathbb{S}^1).

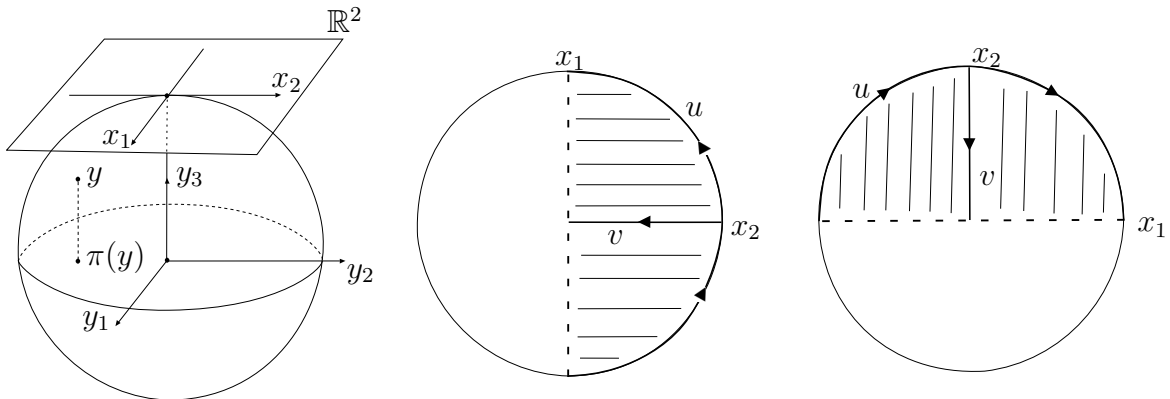
Observação 4.2.2. Se $y \in \mathbb{S}^1$ é um ponto singular infinito, então $-y$ também é, pois a expressão de $p(X)$ nas cartas V_k difere apenas pelo fator $(-1)^{d-1}$. Além disso, como a expressão nas cartas V_k difere pelo fator $(-1)^{d-1}$, o grau do campo determina o comportamento qualitativo dos pontos singulares que estão em V_k .

A observação acima afirma que os pontos singulares infinitos vêm em pares, diametralmente opostos, portanto se quisermos estudar o campo X em todo \mathbb{R}^2 , podemos estudar apenas metade deles e usar o grau do campo para determinar o comportamento dos demais. Por isto, vamos nos concentrar em $\mathbb{S}^1 \cup H^+$, que chamaremos de disco de Poincaré. Por razões práticas, para representar geometricamente os retratos de fase de um sistema polinomial planar, projetamos o Disco de Poincaré no disco unitário fechado $\mathbb{D} = \{x \in \mathbb{R}^2; x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}$, utilizando a projeção ortogonal $\pi : H^+ \rightarrow \mathbb{D}$, dada por $\pi(y_1, y_2, y_3) = (y_1, y_2)$. Desta forma, \mathbb{R}^2 corresponde ao interior do disco e o infinito à sua fronteira (Veja figura 7-(a)). Como esta projeção é um homeomorfismo, o campo induzido em \mathbb{D} é topologicamente equivalente a compactificação em $\mathbb{S}^1 \cup H^+$. Por conveniência, também chamaremos \mathbb{D} de disco de Poincaré.

Vamos entender como funcionam as coordenadas no disco de Poincaré. Após a projeção π , a parte hachurada da figura 7-(b) (sem o eixo $x_1 = 0$) corresponde a região coberta pela carta U_1 , e a região em branco (sem o eixo $x_1 = 0$) é coberta pela carta V_1 . Pelas relações (4.3), podemos determinar as direções positivas de u e v , que são indicadas pelas setas. Pela Observação 4.2.2, conhecemos os pontos singulares e seus comportamentos na região coberta por V_1 , por isso precisamos estudar apenas a origem da carta U_2 .

A parte em destaque da figura 7-(c) mostra a região que é coberta pela carta U_2 . Como aí $x_1 = \frac{u}{v}$ e $x_2 = \frac{1}{v}$, temos as direções positivas, indicadas pelas setas. Lembre-se que as direções de x_1 e x_2 são meras convenções.

Figura 7 – (a) Esfera de Poincaré. (b) Disco de Poincaré com as direções na carta U_1 . (c) Disco de Poincaré com as direções na carta U_2



Fonte: Autor.

A Proposição a seguir garante que a órbita passando por um ponto em \mathbb{S}^1 permanece sempre nesse conjunto.

Proposição 4.2.3. *O infinito é invariante por $p(X)$.*

Observação 4.2.4. *Se o campo X tem grau d ímpar, então o campo $p(X)$ é simétrico em relação a origem de \mathbb{R}^2 .*

4.3 Estudo das singularidades infinitas

Agora que já temos a expressão da compactificação de Poincaré $p(X)$ em cada uma das seis cartas, nosso objetivo é dar uma caracterização para os pontos singulares infinitos. Em qualquer uma das cartas, tais pontos são da forma $(u, 0)$. Começemos a olhar para a parte linear de $p(X)$. Seja d o grau do campo $X = (P, Q)$. Podemos escrever $P = P_0 + P_1 + \dots + P_d$ e $Q = Q_0 + Q_1 + \dots + Q_p$, onde P_i e Q_i são polinômios homogêneos de grau i , com $i = 1, 2, \dots, d$.

Note que se P e Q são polinômios nas variáveis $\left(\frac{1}{v}, \frac{u}{v}\right)$, então $v^{d-1}P_i = 0$ se $v = 0$ e $i < d$. Considerando $(u, 0) \in \mathbb{S}^1 \cap (U_1 \cup V_1)$ um ponto singular de $p(X)$, então $p(X)(u, 0) = (0, 0)$, isto é

$$\dot{u} = v^d \left[-uP\left(\frac{1}{v}, \frac{u}{v}\right) + Q\left(\frac{1}{v}, \frac{u}{v}\right) \right] = 0. \tag{4.8}$$

Podemos reescrever (4.8) como

$$\dot{u} = F(u) = -uP_d(1, u) + Q_d(1, u) = 0.$$

Analogamente, usando a expressão de $\dot{u} = 0$ na carta U_2 , que se $(u, 0) \in \mathbb{S}^1 \cap (U_2 \cup V_2)$ é um ponto singular infinito de $p(X)$ se e somente se

$$G(u) = P_d(u, 1) - uQ_d(u, 1) = 0.$$

Podemos também calcular o jacobiano do campo $p(X)$ nos pontos da forma $(u, 0)$. Note que para $i = 0, \dots, d - 1$, os termos P_i

$$Jp(X)(u, 0) = \begin{pmatrix} F'(u) & Q_{d-1}(1, u) - uP_{d-1}(1, u) \\ 0 & -P_d(u, 1) \end{pmatrix}.$$

Se $(u, 0) \in \mathbb{S}^1 \cap (U_2 \cup V_2)$

$$Jp(X)(u, 0) = \begin{pmatrix} G'(u) & P_{d-1}(u, 1) - uQ_{d-1}(u, 1) \\ 0 & -Q_d(1, u) \end{pmatrix}.$$

4.4 Exemplo

Faremos o estudo global do sistema de equações diferenciais:

$$\dot{x} = 2x - 2xy, \quad \dot{y} = 2y - x^2 + y^2 \quad (4.9)$$

O sistema tem 4 pontos singulares finitos: $(0, 0)$, $(\sqrt{3}, 1)$, $(-\sqrt{3}, 1)$ e $(0, -2)$. Os autovalores associados a matriz jacobiana $DX(x, y)$ avaliada nesses 4 pontos são respectivamente: 2, com multiplicidade algébrica 2, e $-6, 2$ para os outros três pontos. Portanto, a origem é um nó repulsor e os outros três pontos são selas hiperbólicas. Note que o eixo $x = 0$ é invariante, pois se $x = 0$, então $\dot{x} = 0$, ou seja, o campo é horizontal. Para fazer o retrato de fase, podemos usar os autovetores associados aos autovalores, para determinar os subespaços instáveis e estáveis. O retrato de fase do sistema (4.9) na região finita está na figura 8-(a).

Analisamos agora os pontos singulares infinitos. A expressão de $p(X)$ an carta U_1 é dada por

$$\dot{u} = 3u^2 - 1, \quad \dot{v} = -2v(v - u) \quad (4.10)$$

Como estamos buscando pontos singulares infinitos, apenas aqueles com coordenada $v = 0$ nos interessam. São eles: $z = (1/\sqrt{3}, 0)$ e $w = (-1/\sqrt{3}, 0)$ com autovalores associados à $Dp(X)|_{U_1}(u, v)$: $2\sqrt{3}, 2/\sqrt{3}$ e $-2\sqrt{3}, -2/\sqrt{3}$, respectivamente. Logo, o ponto singular $(1/\sqrt{3}, 0)$ é um nó repulsor e $(-1/\sqrt{3}, 0)$ é nó atrator. O retrato de fase de (4.10) na região está na figura 8 - (b). Agora, com estas informações e com a Observação 4.2.2, sabendo que o sistema tem grau 2, podemos afirma que $-z$ e $-w$ são pontos de singulares de V_1 , e são um nó atrator e um nó repulsor, respectivamente.

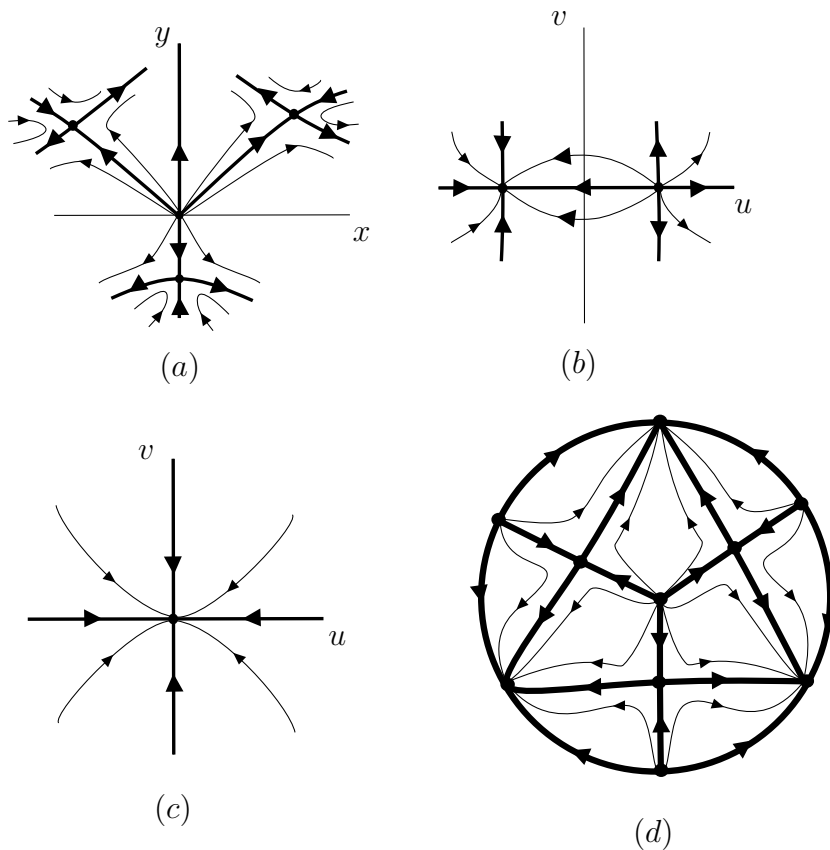
Na carta U_2 a compactificação de Poincaré é dada por

$$\dot{u} = u^3 - 3u, \quad \dot{v} = (u^2 - 1)v - 2v^2 \tag{4.11}$$

Precisamos estudar apenas a origem do sistema (4.11), pois é a única região do infinito que não foi estudada ainda. Os autovalores associados a $Dp(X)(0,0)$ são -1 e -3 , logo a origem de U_2 é um nó atrator. O retrato de fase de (4.11) na região está na figura 8-(c).

Agora, temos todas as informações necessárias para esboçar o retrato de fase global do sistema (4.9) no disco de Poincaré, apresentado na figura 8-(d).

Figura 8 – (a) Retrato de fase do sistema (4.9) na região finita. (b) Retrato de fase do sistema (4.10). (c) Retrato de fase do sistema (4.11). (d) Retrato de fase global do sistema (4.9) no disco de Poincaré.



Fonte: Autor.

5 Artigo: Phase portraits of a family of integrable cubic systems with two invariant parabolas

Neste capítulo trazemos o artigo no qual estudamos uma família de campos polinomiais planares. Apresentamos a classificação topológica dos retratos de fase no disco de Poincaré de todos os campos cúbicos quadráticos que possuem duas parábolas dadas por equações $f_1 = 0, f_2 = 0$ como curvas algébricas invariantes, e que possuem integral primeira da forma $H = f_1^\alpha f_2^\beta$, sendo $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ constantes. Até onde sabemos, este resultado ainda não é conhecido, logo temos a intenção de submeter tal artigo para publicação.

PHASE PORTRAITS OF A FAMILY OF INTEGRABLE CUBIC SYSTEMS WITH TWO INVARIANT PARABOLAS

ARTHUR RAMIREZ TAUCHEN¹ AND MAURÍCIO FRONZA DA SILVA²

ABSTRACT. We provide the three normal forms of all planar differential systems of degree $d \leq 3$ with two invariant parabolas given by $f_1 = 0, f_2 = 0$, with parallel axes, and a first integral of the form $H = f_1^\alpha f_2^\beta$, where α, β are real constants. We determine the 39 global phase portraits in the Poincaré disc of two of the normal forms.

1. INTRODUCTION AND STATEMENT OF MAIN RESULTS

In this work, we consider a planar polynomial differential system of the form

$$(1) \quad \dot{x} = P(x, y), \quad \dot{y} = Q(x, y),$$

where P and Q are real polynomials defined on \mathbb{R}^2 and the derivative with respect to the independent variable t is denoted by the dot. If $d(P)$ and $d(Q)$ denote the degrees of P and Q , respectively, we say that the planar polynomial differential system (1) has *degree* $d = \max\{d(P), d(Q)\}$. In the case that $d = 2$ or $d = 3$, we simply say that system (1) is a *quadratic system* or a *cubic system*, respectively.

Let $U \subset \mathbb{R}^2$ be an open and dense set. The vector field X given by system (1) is *integrable* in \mathbb{R}^2 if there is an analytic non-locally constant function $H : U \rightarrow \mathbb{R}$, called a *first integral* of system (1), which is constant on each orbit of X .

Suppose that X is the vector field defined by system (1). Let f be a real polynomial function not identically zero defined on \mathbb{R}^2 . The curve defined by $f = 0$ is an *invariant algebraic curve* of system (1) if there exists a real polynomial function k defined on \mathbb{R}^2 , called the *cofactor* of the invariant algebraic curve $f = 0$, such that

$$(2) \quad X(f) = P \frac{\partial f}{\partial x} + Q \frac{\partial f}{\partial y} = kf.$$

Invariant algebraic curves with linearly independent cofactors are used to construct first integrals. In fact, suppose that $f_1 = 0$ and $f_2 = 0$ are invariant algebraic curves of system (1), with cofactors k_1 and k_2 , respectively. From the Darboux's Theorem, see Theorem 8.7 of [1], it follows that $f_1^\alpha f_2^\beta$ is a first integral of system (1) if, and only if, $\alpha k_1 + \beta k_2 = 0$, where $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

The class of systems of the form (1) is very large. Even for the quadratic systems, despite being intensely studied, the problem of the topological classification is still open. The strategy used to improve knowledge about them is the study of subclasses of these systems satisfying specific properties, such as integrability.

The normal form of a quadratic system with an invariant parabola was presented in [6]. In [2] the authors studied the quadratic systems with invariant hyperbolas. The works [8],

Key words and phrases. cubic system, phase portraits, invariant parabolas.

[5], [3] and [4] classify, for instance, the global phase portraits of quadratic integrable vector fields having two invariant straight lines, two invariant circles, an ellipse and a straight line, a parabola and a straight line as invariant algebraic curves, respectively.

When we compare the expression of quadratic planar vector fields with an invariant ellipse, hyperbola and parabola, we observe that the last case has more parameters than the previous ones. Then, we expect more complicated behaviour for the invariant parabola than for the ellipse and hyperbola, see [6].

The integrable cubic systems having two nonconcentric circles as invariant algebraic curves also was studied in [5]. Cubic systems having two invariant parabolas can have more complicated behaviors. In [7] the authors present a planar cubic system with a limit cycle bounded by two invariant parabolas.

In [10], the author proved that, if a planar differential polynomial systems with degree ≤ 2 , different of the null system, has two parabolas defined by $f_1 = 0$, $f_2 = 0$ as invariant algebraic curves, and a first integral of the form $H = f_1^\alpha f_2^\beta$, where α, β are real constants, then there exists a system of coordinates such that

$$(3) \quad f_1(x, y) = y - x^2 \text{ and } f_2(x, y) = ax^2 + bx + y + c,$$

for suitable constants $a, b, c \in \mathbb{R}$ satisfying

$$(4) \quad (a + 1)^2 + b^2 + c^2 \neq 0 \text{ and } a \neq 0.$$

In particular, the axes of the invariant parabolas are parallel.

Then, from now on, we take parabolas with parallel axes, but we also consider cubic vector fields. In our first result we present the normal forms of vector fields of degree ≤ 3 having the parabolas $f_1 = 0$ and $f_2 = 0$ given by (3)-(4) as invariant algebraic curves, and a first integral of the form $H = f_1^\alpha f_2^\beta$.

Proposition 1. *All polynomial planar differential system of degree ≤ 3 , having the parabolas $f_1 = 0$ and $f_2 = 0$ given by (3)-(4) as invariant algebraic curves, and a first integral of the form $H = f_1^\alpha f_2^\beta$ with α, β real constants, is topologically equivalent to one of the following systems, where $A, B, C, D, E, F, \lambda$ are real parameters:*

$$(5) \quad \dot{x} = ((a + 1)x^2 + bx + c)k(x, y), \quad \dot{y} = (2(a + 1)xy + by + bx^2 + 2cx)k(x, y),$$

where $k(x, y) = A + Bx + Cy$, $x, y \in \mathbb{R}$, and the cofactors are $k_1 = k_2 = k$; or

$$(6) \quad \dot{x} = (2(1 + a)x + b)k(x, y), \quad \dot{y} = 2(2(1 + a)y + bx)k(x, y),$$

where $k(x, y) = Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F$ and the cofactors are $k_1 = k_2 = 2(a + 1)k$; or

$$(7) \quad \begin{aligned} \dot{x} &= -\lambda y - \lambda ax^2 - \lambda bx - \lambda c - y + x^2, \\ \dot{y} &= -2\lambda xy - 2\lambda ax^3 - 2\lambda bx^2 - 2\lambda cx + 2axy + by - 2ax^3 - bx^2, \end{aligned}$$

the cofactors are $k_1(x, y) = 2(a + 1)x + b$, $k_2(x, y) = \lambda k_1(x, y)$, $x, y \in \mathbb{R}$.

System (5) is cubic if, and only if, $(a + 1)^2 + b^2 \neq 0$ and $B^2 + C^2 \neq 0$. System (6) is cubic if, and only if $(a + 1)(A^2 + B^2 + C^2) \neq 0$ or $a = -1$, $(A^2 + B^2 + C^2) \neq 0$. System (7) is cubic if, and only if, $\lambda \neq -1$.

In our main results, we present the phase portrait in the Poincaré disc of the normal forms (5) and (7).

Theorem 2. *Suppose $(a + 1)^2 + b^2 \neq 0$ and $B^2 + C^2 \neq 0$. Then the phase portraits in the Poincaré disc of system (5) are topologically equivalent to one of the 19 phase portraits shown in Figure 1. The correspondence between systems (5) and the phase portraits of Figure 1 is provided in Table 4.*

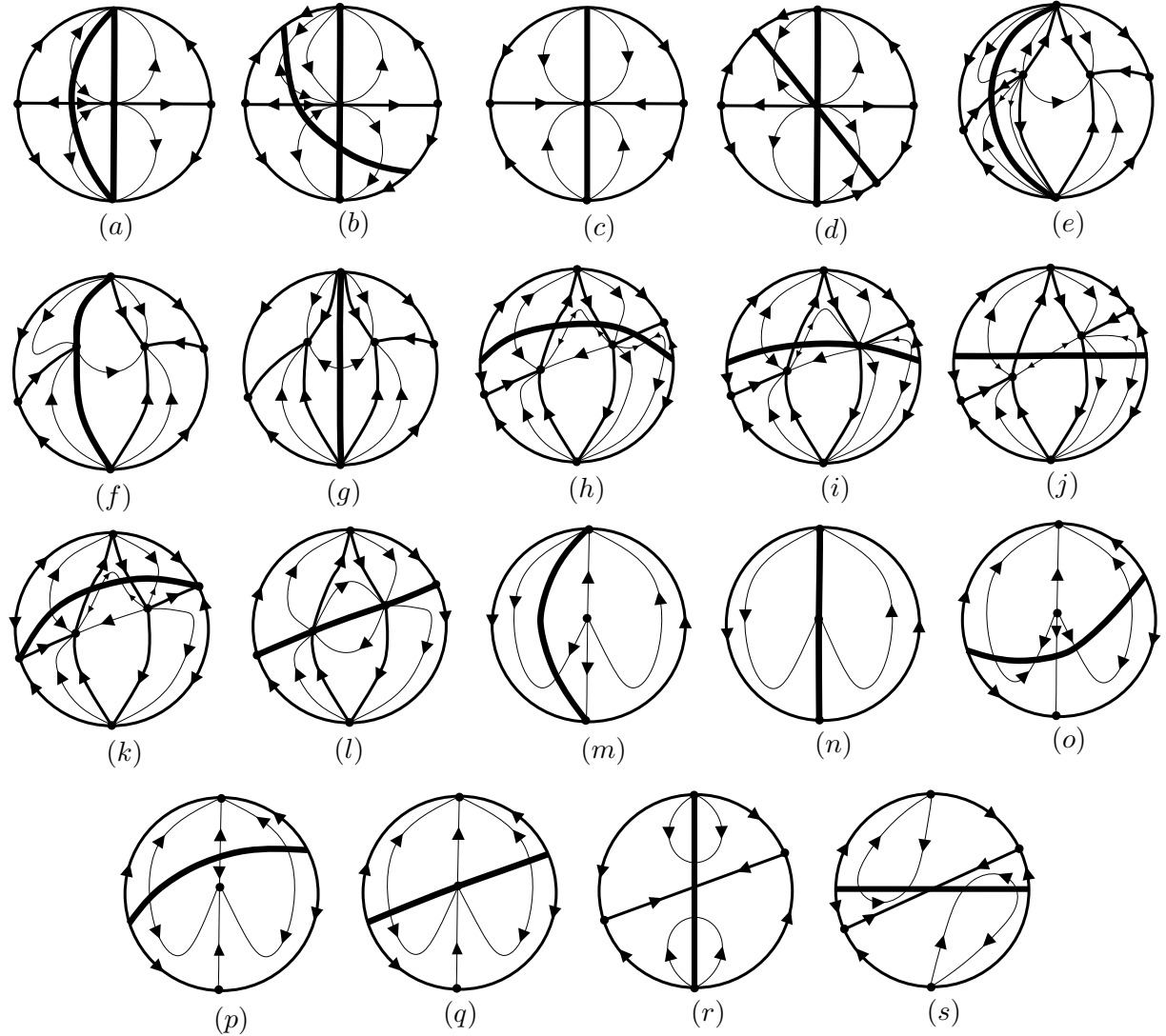


FIGURE 1. Global phase portrait in the Poincaré disc of the normal form (5), with $(a + 1)^2 + b^2 \neq 0$ and $B^2 + C^2 \neq 0$.

Global Phase Portrait of Figure 1	Parameters
(a)	$b^2 = \theta$ $C = 0, A/B \neq b/(2(a+1))$
(b)	$b^2 = \theta$ $C \neq 0$ and $A \neq [b/(2(a+1))][B - Cb/(2(a+1))]$
(c)	$b^2 = \theta$ $C = 0$ and $A/B = b/(2(a+1))$
(d)	$b^2 = \theta$ $C \neq 0$ and $A = [b/(2(a+1))][B - bC/(2(a+1))]$
(e)	$a \neq -1, b^2 > \theta$ $a < -1, C = 0$ and: $-A/B < x_2$ or $-A/B > x_1$ $a > -1, C = 0$ and: $-A/B < x_2$ or $-A/B > x_1$; (reverse orbits)
(f)	$a \neq -1, b^2 > \theta$ $a < -1, C = 0$ and: $-A/B = x_1$ or $-A/B = x_2$ $a > -1, C = 0$ and: $-A/B = x_1$ or $-A/B = x_2$; (reverse orbits)
(g)	$a \neq -1, b^2 > \theta$ $a < -1, C = 0$ and $x_1 < -A/B < x_2$ $a > -1, C = 0$ and $x_2 < -A/B < x_1$ (reverse orbits)
(h)	$a \neq -1, b^2 > \theta$ If $a > -1, C \neq 0, B/C \neq b/(a+1)$ and $-(Cc - A(a+1))/(Cb + B(a+1)) < x_2$ or $-(Cc - A(a+1))/(Cb + B(a+1)) > x_1$; (reverse orbits)
(i)	$a \neq -1, b^2 > \theta$ $a < -1, C \neq 0, B/C \neq b/(a+1)$ and: $-(Cc - A(a+1))/(Cb + B(a+1)) = x_1$ or $-(Cc - A(a+1))/(Cb + B(a+1)) = x_2$,
(j)	$a \neq -1, b^2 > \theta$ If $a < -1, C \neq 0, B/C \neq b/(a+1)$ and $x_1 < -(Cc - A(a+1))/(Cb + B(a+1)) < x_2$
(k)	$a \neq -1, b^2 > \theta$ If $a < -1, C \neq 0, B/C = b/(a+1)$ and $A/C \neq c/(a+1)$ If $a > -1, C \neq 0, B/C = b/(a+1)$ and $A/C \neq c/(a+1)$ (reverse orbits)
(l)	$a \neq -1, b^2 > \theta$ $a < -1, C \neq 0, B/C = b/(a+1)$ and $A/C = c/(a+1)$ If $a < -1, C \neq 0, B/C = b/(a+1)$ and $A/C = c/(a+1)$ (reverse orbits)
(m)	$a = -1, b^2 > \theta$ $C = 0$ and $A/B > c/b$. If $C = 0$ and $A/B < c/b$ (reverse orbits)
(n)	$a = -1, b^2 > \theta$ $C = 0$ and $A/B = c/b$
(o)	$a = -1, b^2 > \theta$ $C(A - Bc/b + Cc^2/b^2) > 0$
(p)	$a = -1, b^2 > \theta$ $C(A - Bc/b + Cc^2/b^2) < 0$
(q)	$a = -1, b^2 > \theta$ $C \neq 0$ and $A - Bc/b + Cc^2/b^2 = 0$
(r)	$a = -1, b^2 < \theta$ $a < -1$ and $C = 0$. If $a > -1$ and $C = 0$ (reverse orbits)
(s)	$a = -1, b^2 < \theta$ $a < -1$ and $B = 0$. If $a > -1$ and $B = 0$ (reverse orbits)

TABLE 1. The correspondence between the phase portraits presented in Figure 1 and the normal form (5) of Theorem 2. Here, $(a+1)^2 + b^2 \neq 0$, $B^2 + C^2 \neq 0$, $\theta = 4(1+a)c$, $x_1 = (-b + \sqrt{b^2 - 4(a+1)c})/(2(1+a))$, $x_2 = (-b - \sqrt{b^2 - 4(a+1)c})/(2(1+a))$

Theorem 3. *Suppose $\lambda \neq -1$. Then the phase portraits in the Poincaré disc of system (7) are topologically equivalent to one of the 19 phase portraits shown in Figure 2. The correspondence between systems (7) and the phase portraits of Figure 2 are provided in Table 2.*

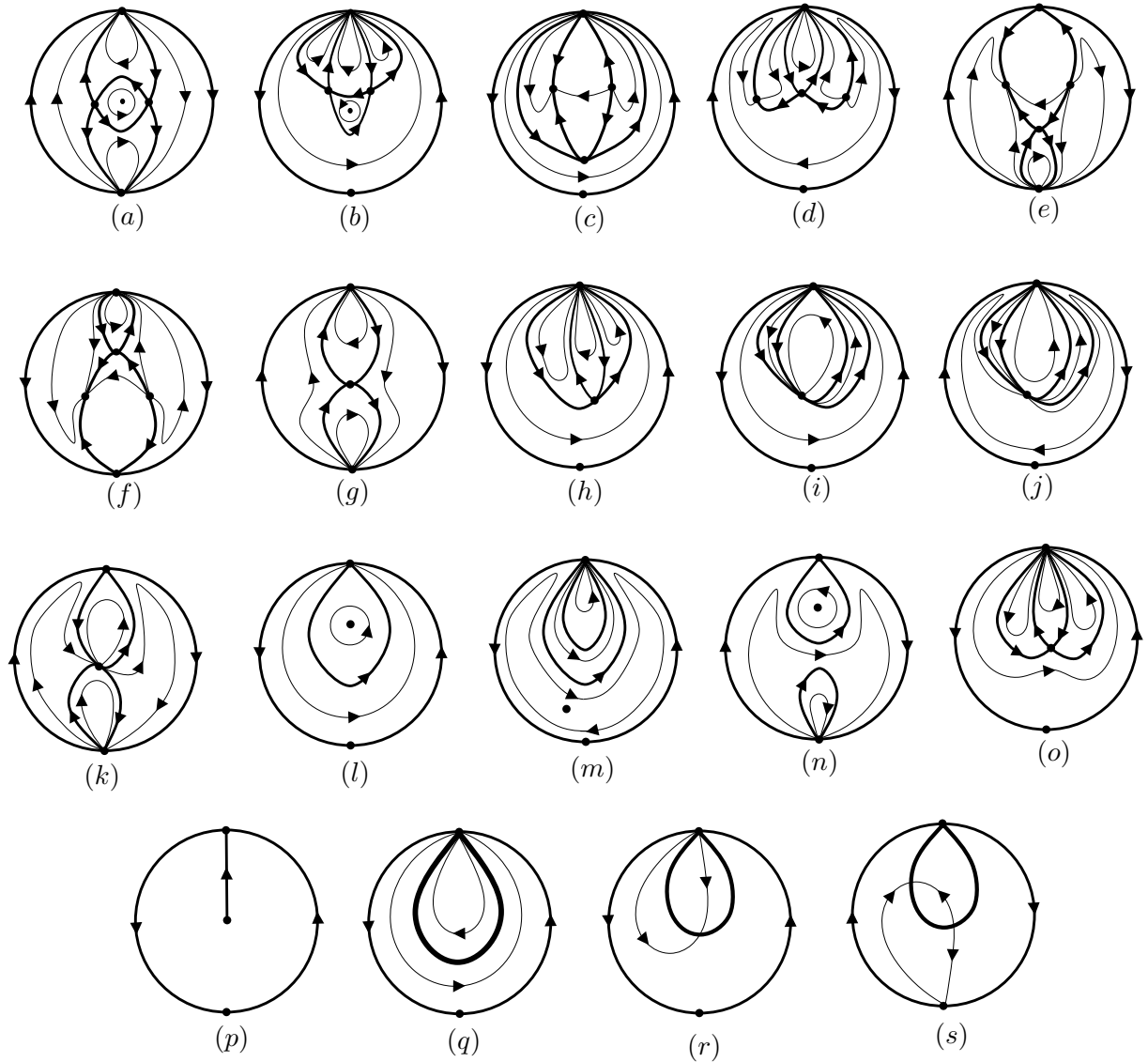


FIGURE 2. Phase portraits in the Poincaré disc of system (7) for the case $\lambda \neq -1$.

In this work we use three types of lines in the figures. The separatrices are presented by lines thinner than the lines of singular points and the finest lines are the orbits in canonical regions.

On the other hand, we observe the family considered in Proposition 1 does not contain all cubic planar differential systems with two invariant parabolas and first integral of the form $H = f_1^\alpha f_2^\beta$. In fact, consider the parabolas $f_1 = 0, f_2 = 0$ with not parallel axes given by $f_1(x, y) = y - x^2, f_2(x, y) = x - y^2$. The vector field defined by system

$$(8) \quad \dot{x}(x, y) = 3y^2 - 4x^2y + x, \dot{y}(x, y) = -2y(xy - 1),$$

<i>Global Phase Portrait of Figure 1</i>	<i>Parameters</i>
(a)	$\delta > 0$ $a > 0, \lambda > 0$
(b)	$\delta > 0$ $a < 0, \lambda > 0$
(c)	$\delta > 0$ $-1 < a < 0, -1 < \lambda < 0$ $a < -1, \lambda < -1$ (<i>reverse orbits</i>)
(d)	$\delta > 0$ $-1 < a < 0, \lambda < -1$ $a < -1, -1 < \lambda < 0$ (<i>reverse orbits</i>)
(e)	$\delta > 0$ $a > 0, -1 < \lambda < 0$
(f)	$\delta > 0$ $a > 0, \lambda < -1$
(g)	$\delta = 0, a > 0, \lambda > 0$ $\delta < 0, a > 0, \lambda > 0$
(h)	$\delta = 0, a < 0, \lambda > 0$ $\delta < 0, a < 0, \lambda > 0$
(i)	$\delta = 0$ $-1 < a < 0, -1 < \lambda < 0$ $a < -1, \lambda < -1$ (<i>reverse orbits</i>)
(j)	$\delta = 0$ $-1 < a < 0, \lambda < -1$ $a < -1, -1 < \lambda < 0$ (<i>reverse orbits</i>)
(k)	$\delta = 0$ $a > 0, -1 < \lambda < 0$ $a > 0, \lambda < -1$ (<i>reverse orbits</i>)
(l)	$\delta < 0$ $-1 < a < 0, -1 < \lambda < 0$ $a < -1, \lambda < -1$ (<i>reverse orbits</i>)
(m)	$\delta < 0$ $-1 < a < 0, \lambda < -1$ $a < -1, -1 < \lambda < 0$ (<i>reverse orbits</i>)
(n)	$\delta < 0$ $a > 0, -1 < \lambda < 0$ $a > 0, \lambda < -1$
(o)	$a = -1, b \neq 0$ $\lambda > 0$
(p)	$a = -1, b \neq 0$ $\lambda < 0$
(q)	$a = -1, b = 0, c \neq 0, \lambda > -1$ $a = -1, b = 0, c \neq 0, \lambda < -1$ (<i>reverse orbits</i>) $\lambda = 0, a = 1, b = c = 0$
(r)	$\lambda = 0, a > 0$
(s)	$\lambda = 0, a < 0$

TABLE 2. The correspondence between the phase portraits presented in Figure 2 and the normal form (7) of Theorem 3. Here, $\lambda \neq -1$, $\delta = b^2 + 4(1+a)c$.

has $f_1 = 0, f_2 = 0$ as invariant algebraic curves and $H = f_1 f_2^{-2}$ as a first integral.

This work is organized as follows. In Section 2 we introduce the main tools to study the phase portrait of planar vector fields. The useful results concerning quadratic planar vector fields with two invariant parabolas are presented in Section 3. We prove Theorem 2 in the Section 4. The Section 5 deals with singularities of vector fields having two invariant algebraic curves. The Theorem 3 is proved in Section 6 and the Proposition 1 is proved in the Appendix.

The authors would like to thank Professor J. Llibre for interesting suggestions on the subject of this work.

2. PRELIMINARY DEFINITIONS AND RESULTS

Let $X : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ be a vector field defined on the open set $U \subset \mathbb{R}^2$ and let $DX(x, y)$ be the Jacobian matrix of X at $(x, y) \in U$. Suppose that (x, y) is a singular point of X . If both the eigenvalues of $DX(x, y)$ have real part different from zero, then (x, y) is called a *hyperbolic singular point*; if only one eigenvalue of $DX(x, y)$ is zero, then (x, y) is a *semi-hyperbolic singular point*; if both eigenvalues of $DX(x, y)$ are zero but the Jacobian matrix is not the null matrix, then (x, y) is called a *nilpotent singular point*; if $DX(x, y)$ is the null matrix, then (x, y) is a *linearly null singular point*.

The local topological classification of hyperbolic, semi-hyperbolic and nilpotent singular points is given, for instance, in Theorems 2.15, 2.19 and 3.5 of [1], respectively.

To study the behavior of the orbits near linearly null singular points we use the blow-up technique. Translating the singular point to the origin, we consider the change of coordinates $x = u, y = uv$, called *blow-up in the x-direction*. This is a diffeomorphism between the regions $x \neq 0$ and $u \neq 0$ which maps the region $x < 0, y > 0$ into the region $u < 0, v < 0$ and the region $x < 0, y < 0$ into the region $u < 0, v > 0$.

In a similar way, the change of coordinates $x = uv, y = v$, is called *blow-up in the y-direction*. This is a diffeomorphism between the regions $y \neq 0$ and $v \neq 0$ which maps the region $x < 0, y < 0$ into the region $u > 0, v < 0$ and the region $x > 0, y < 0$ into the region $u < 0, v < 0$.

In order to study the behaviour of a polynomial planar vector field $X = (P, Q)$ near the infinity we use the Poincaré compactification. The open northern and the open southern hemisphere of \mathbb{S}^2 are denoted by H^+ and H^- , respectively.

We identify the tangent plane to \mathbb{S}^2 at the the point $(0, 0, 1)$ with \mathbb{R}^2 . Using the central projections $f^+ : \mathbb{R}^2 \rightarrow H^+, f^- : \mathbb{R}^2 \rightarrow H^-$ defined by $f^\pm(x_1, x_2) = \pm(x_1, x_2, 1)/\Delta x$, where $\Delta x = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + 1}$, we obtain the vector field \tilde{X} defined on $H^+ \cup H^-$ by $\tilde{X} = Df^\pm \circ X$ on H^\pm . Denote a point $y \in \mathbb{S}^2$ by $y = (y_1, y_2, y_3)$ and let $d = 1, 2, ..$ be the degree of X . We verify that $y \mapsto y_3^{d-1} \tilde{X}(y)$ has an analytical extension $\rho(X)$ to \mathbb{S}^2 , called *the Poincaré compactification* of X . Then X is topologically equivalent to the restriction of $\rho(X)$ to H^+ and to the restriction of $\rho(X)$ to H^- . Therefore, considering only the phase portrait of $\rho(X)$ restricted to H^+ we determine the phase portrait of X .

The ortogonal projection of the northern closed hemisphere is called the *Poincaré disc*. We identify the circle $y_1^2 + y_2^2 = 1, y_3 = 0$ of \mathbb{R}^3 with \mathbb{S}^1 . A singular point of $\rho(X)$ contained in $\mathbb{S}^2 \setminus \mathbb{S}^1$ or in \mathbb{S}^1 is called a *finite* or *infinite* singular point of X , respectively.

We consider the six local charts (U_i, ϕ_i) and (V_i, ψ_i) , $i = 1, 2, 3$, of \mathbb{S}^2 , where $U_i = \{y \in \mathbb{S}^2 \mid y_i > 0\}$, $V_i = \{y \in \mathbb{S}^2 \mid y_i < 0\}$, and $\varphi_1(y) = -\psi_1(y) = (y_2, y_3)/y_1$, $\varphi_2(y) = -\psi_2(y) = (y_1, y_3)/y_2$, $\varphi_3(y) = -\psi_3(y) = (y_1, y_2)/y_3$. If we denote by (u, v) the value $\varphi_i(y)$, $y \in U_i$, or $\psi_i(y)$, $y \in V_i$, $i = 1, 2, 3$, we obtain that the expression for $\rho(X)$ in the local chart (U_1, φ_1) is given by

$$\dot{u} = v^d(-uP(1/v, u/v) + Q(1/v, u/v)), \quad \dot{v} = -v^{d+1}P(1/v, u/v),$$

in (U_2, φ_2) is

$$\dot{u} = v^d(P(u/v, 1/v) - uQ(u/v, 1/v)), \quad \dot{v} = -v^{d+1}Q(u/v, 1/v),$$

and, in the chart (U_3, φ_3) ,

$$\dot{u} = P(u, v), \quad \dot{v} = Q(u, v),$$

where d is the degree of X . For (V_i, ψ_i) the expression of $\rho(X)$ is given by the expression in the chart (U_i, φ_i) multiplied by $(-1)^{d-1}$, $i = 1, 2, 3$.

If y is a infinite singular point of X contained in U_i or V_i , $i = 1, 2, 3$, then the expression of y in the correspondent chart is of the form $(u, 0)$ for a suitable choice of $u \in \mathbb{R}$.

Notice that we cover the boundary of the Poincaré disc with U_1, U_2, V_1 and V_2 . Since $\rho(X)$ is symmetric with respect the origin, to study the infinite singular points of X it is sufficient to study the infinite singular points contained in U_1 and the origin of U_2 . More details of the Poincaré compactification in [1, Chapter 5].

Let g be a real polynomial function defined on \mathbb{R}^2 . Since the inverse function of $f^+ : \mathbb{R}^2 \rightarrow H^+$ is given by $x_1 = y_1/y_3, x_2 = y_2/y_3, y = (y_1, y_2, y_3) \in H^+$, we observe that the expression of $g = 0$ in H^+ is $g(y_1/y_3, y_2/y_3) = 0$.

Moreover, the inverse of $\varphi_1 : U_1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ is given by $y_1 = 1/m, y_2 = u/m, y_3 = v/m$, with $m = \sqrt{1 + u^2 + v^2}$. Then, the points $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ such that $g(x_1, x_2) = 0$ correspond to the points $(u, v) \in U_1$ such that $g(1/v, u/v), v \neq 0$. The inverse of $\varphi_2 : U_2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ is given by $y_1 = u/m, y_2 = 1/m, y_3 = v/m$. The points $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ such that $g(x_1, x_2) = 0$ correspond to points $(u, v) \in U_2$ such that $g(u/v, 1/v), v \neq 0$.

In particular, for f_1 and f_2 given by (3) we have the following expressions.

Remark 4. *The points of \mathbb{R}^2 of the parabola $f_1 = 0$ are mapped into the points (u, v) such that $uv = 1, v = u^2$ of U_1, U_2 , respectively, with $v \neq 0$.*

Remark 5. *The points $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ of the parabola $f_2 = 0$ such that $x_1 > 0$ or $x_1 < 0$, are mapped into points (u, v) of U_1 or V_1 , respectively, such that $a + bv + cv^2 + uv = 0$, with $v \neq 0$.*

Remark 6. *The points $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ of the parabola $f_2 = 0$ such that $x_2 > 0$ or $x_2 < 0$, are mapped into points (u, v) of U_2 or V_2 , respectively, such that $au^2 + buv + cv^2 + v = 0$, with $v \neq 0$.*

Remark 7. *Given $A, B, C \in \mathbb{R}$, with $B^2 + C^2 \neq 0$, the points $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ of the straight line $A + Bx_1 + Cx_2 = 0$ such that $x_1 > 0$ or $x_2 > 0$, are mapped into points $(u, v) \in U_1$ such that $Av + B + Cu = 0$, or into points $(u, v) \in U_2$ such that $Av + Bu + C = 0$, respectively, with $v \neq 0$. If $B \neq 0$, it intercepts the line of infinity $v = 0$ of chart (U_1, φ_1) at $(-B/C, 0)$ if $C \neq 0$ and at the origin otherwise and, if $B = 0$ but $AC \neq 0$, then this straight line intercepts the origin of the chart (U_2, φ_2) .*

Consider two C^1 planar vector fields X and Y defined on the open sets $U, V \subset \mathbb{R}^2$, respectively. We say that X and Y are *topologically equivalent* if there exists a homeomorphism that maps the orbits of X into orbits of Y preserving the orientation of all orbits, or reversing the orientation of all orbits. Denoting by $\beta(x)$, $\omega(x)$ and $\alpha(x)$ the orbit, the ω -limit and the α -limit of a point $x \in U$, respectively, an orbit $\beta(x)$ of the vector field X is called a *separatrix* of X if

- $\beta(x) = \{x\}$, or
- $\beta(x)$ is a periodic orbit and there is a neighborhood of $\beta(x)$ with no other periodic orbits, or
- $\beta(x)$ is homeomorphic to \mathbb{R} and there is not a neighborhood Z of $\beta(x)$ such that both situations occurs:
 - (1) $\alpha(y) = \alpha(x)$ and $\omega(y) = \omega(x)$ for each $y \in Z$;
 - (2) the boundary of Z is formed by $\omega(x), \alpha(x), \beta(y)$ and $\beta(z)$, where $y, z \in U$ satisfies $\omega(x) = \omega(y) = \omega(z)$ and $\alpha(x) = \alpha(y) = \alpha(z)$.

The union of the separatrices of X is called *extended separatrix skeleton*, denoted by Σ , and it is a closed set invariant under the flow. Each connected component of \mathbb{R}^2/Σ is called a *canonical region* and the union of the extended separatrix skeleton with one orbit in each canonical region is a *completed separatrix skeleton*. Two completed separatrix skeletons are *topologically equivalent* if there exists a homeomorphism that maps the orbits of one into orbits of the other preserving the orientation of all orbits, or reversing the orientation of all orbits.

Theorem 8 (Markus-Neumann-Peixoto). *Two planar analytic vector fields are topologically equivalent in \mathbb{R}^2 if and only if their completed separatrices skeleton are topologically equivalent.*

Hence, to determine the global phase portrait of planar systems it is sufficient to determine only its separatrices and one orbit in each canonical region. The proof can be found in [9].

3. THE QUADRATIC CASE

In this section we present the helpful results of [10]. Observe that the degree of normal form (5) is ≤ 2 if and only if $B = C = 0$; or $a = -1, b = 0$. The degree of normal form (6) is ≤ 2 if and only if $a \neq -1, A = B = C = 0$; or $a = -1, b \neq 0, A = B = C = 0$. The degree of normal form (7) is ≤ 2 if and only if $\lambda \neq -1$. Then, from Proposition 1 we obtain

Proposition 9. *All polynomial planar differential system of degree ≤ 2 , having the parabolas $f_1 = 0$ and $f_2 = 0$ given by (3) as invariant algebraic curves, and a first integral of the form $H = f_1^\alpha f_2^\beta$ with α, β real constants, is topologically equivalent to one of the following systems, where A, B, C are real parameters:*

$$(9) \quad \dot{x} = A + Bx + Cy, \quad \dot{y} = 2x(A + Bx + Cy),$$

the cofactors are $k_1 \equiv k_2 \equiv 0$; or

$$(10) \quad \dot{x} = (2(1 + a)x + b)k(x, y), \quad \dot{y} = 2(2(1 + a)y + bx)k(x, y),$$

where $k(x, y) = A + Bx + Cy$ and the cofactors are $k_1 = k_2 = 4(a + 1)k$; or

$$(11) \quad \dot{x} = (1 + a)x^2 + bx + c, \quad \dot{y} = 2(1 + a)xy + by + bx^2 + 2cx,$$

the cofactors are $k_1(x, y) = k_2(x, y) = 2(a + 1)x + b$.

Then, the author proved

Theorem 10. *The phase portrait in the Poincaré disc of a planar polynomial differential system of degree ≤ 2 different of the null system, having two parabolas defined by $f_1 = 0, f_2 = 0$ as invariant algebraic curves and a first integral of the form $H = f_1^\alpha f_2^\beta$, with $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, is topologically equivalent to one on the eleven phase portraits presented in Figure 3. The correspondence between normal forms (9), (10), (11), and the phase portraits of Figure 3 is presented in Table 3.*

The Table 3 present the correspondence between normal forms (9), (10), (11), and the phase portraits of Figure 3. Here $\theta = 4(1 + a)c$ and $\delta = \sqrt{b^2 - 4(1 + a)c}$, that is, $\delta = \sqrt{b^2 - \theta}$.

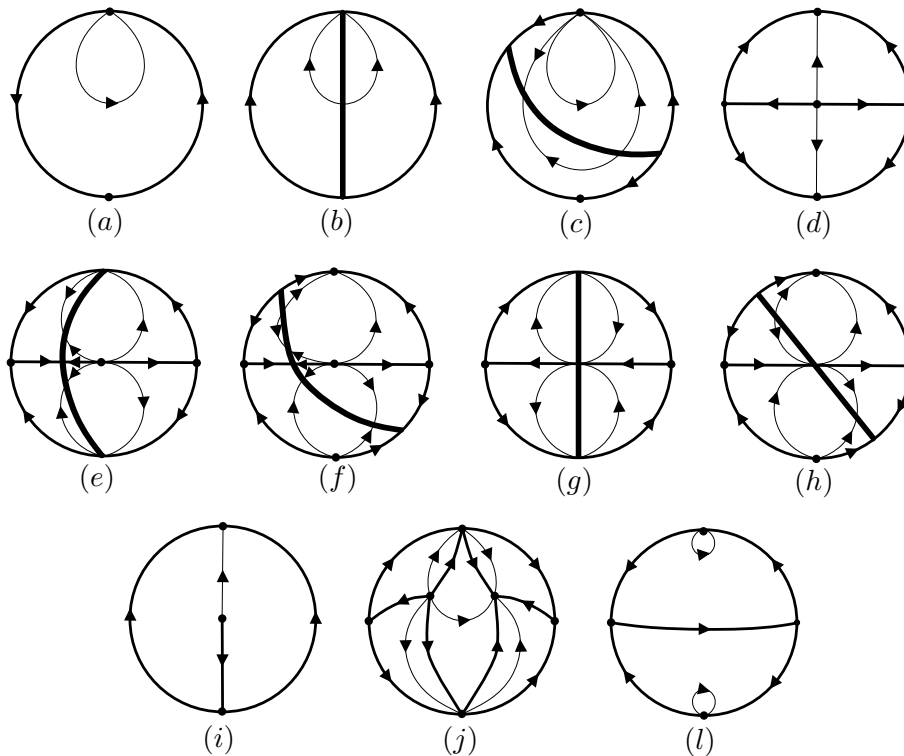


FIGURE 3. Phase portraits in the Poincaré disc of a planar polynomial differential system of degree ≤ 2 , different of the null system, having two parabolas defined by $f_1 = 0, f_2 = 0$ as invariant algebraic curves, and a first integral of the form $H = f_1^\alpha f_2^\beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

We need more precisely results of [10] concerning the normal forms (9), (10) and (11).

Lemma 11. *Consider system (9) with the hypothesis $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$.*

- (i) *If $B = C = 0$ then the phase portrait in the Poincaré disc of system (9) is presented in Figure 3-(a).*
- (ii) *If $B \neq 0, C = 0$ then the phase portrait in the Poincaré disc of system (9) is presented in Figure 3-(b).*

Global Phase Portrait of Figure 3	Normal form	Parameters
(a)	(9)	$B = C = 0$
	(10)	$a = -1, B = C = 0$
	(11)	$a = -1, b = 0, c \neq 0$
(b)	(9)	$B = 0, C \neq 0$ or $B \neq 0, C = 0$
	(10)	$a = -1, B = 0, C \neq 0$ or $a = -1, B \neq 0, C = 0$
(c)	(9)	$BC \neq 0$
	(10)	$a = -1, BC \neq 0$
(d)	(10)	$B = C = 0$
(e)	(10)	$A \neq bB/(2(1+a)), C = 0$
(f)	(10)	$A \neq (b/(2(1+a)))(B - bC/(2(1+a))), C \neq 0$
(g)	(10)	$A = bB/(2(1+a)), C = 0$
	(11)	$a \neq -1, b = \sqrt{\theta}$
(h)	(10)	$A = (b/(2(1+a)))(B - bC/(2(1+a))), C \neq 0$
(i)	(11)	$a = -1, b \neq 0$
(j)	(11)	$a \neq -1, b^2 > \theta$
(l)	(11)	$a \neq -1, b^2 < \theta$

TABLE 3. The correspondence between the phase portraits presented in Figure 3 and the normal forms of Proposition 9. Here, $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$ and $\theta = 4(1+a)c$.

(iii) If $C \neq 0$ then the phase portrait in the Poincaré disc of system (9) is presented in Figure 3-(c).

Remark 12. Notice that if $a = -1$ then system (10) can be written as system (9). If $A = B = C = 0$ then system (10) becomes $\dot{x} = \dot{y} = 0$.

Lemma 13. Consider system (10) with the hypotheses $a \neq -1$ and $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$.

- (i) If $B = C = 0$ then the phase portrait in the Poincaré disc of system (10) is presented in Figure 3-(d).
- (ii) If $C = 0$ and $A \neq bB/(2(a+1))$ then the phase portrait in the Poincaré disc of system (10) is presented in Figure 3-(e).
- (iii) If $C \neq 0$ and $A \neq [b/(2(a+1))][B - bC/(2(a+1))]$ then the phase portrait in the Poincaré disc of system (10) is presented in Figure 3-(f).
- (iv) If $C = 0$ and $A = bB/(2(a+1))$ then the phase portrait in the Poincaré disc of system (10) is presented in Figure 3-(g).
- (v) If $C \neq 0$ and $A = [b/(2(a+1))][B - bC/(2(a+1))]$ then the phase portrait in the Poincaré disc of system (10) is presented in Figure 3-(h).

Remark 14. All the isolated finite singular points of system (11) are contained in the intersection of the parabolas $f_1 = 0$ and $f_2 = 0$. In system (11), if $a = -1$, then $f_1 = 0$ and $f_2 = 0$ are never tangent. On the other hand, if $a \neq -1$ and $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ satisfies $f_1(x, y) = f_2(x, y) = 0$, then $k(x, y) = 0$ if, and only if, the parabolas $f_1 = 0$ and $f_2 = 0$ are tangent.

Remark 15. The vector field defined by the normal form (11) is topologically equivalent to the vector field defined by

$$\dot{x} = (a + 1)x^2 - bx + c, \quad \dot{y} = 2(a + 1)xy - by - bx^2 + 2cx,$$

under the change of coordinates given by $(t, x, y) \mapsto (-t, -x, y)$. Therefore, in this section we consider only the case $b \geq 0$.

4. PROOF OF THEOREM 2

Observe that the degree of the normal form (5) is ≤ 2 if and only if $B = C = 0$; or $a = -1, b = 0$. Then, in this section we consider the normal form (5) with the hypotheses $B^2 + C^2 \neq 0$ and $(a + 1)^2 + b^2 \neq 0$.

We remember that $\theta = 4(a + 1)c$ and we divide the proof of Theorem 2 in four cases, namely

- $b^2 = \theta$,
- $a \neq -1, b^2 > \theta$,
- $a = -1, b^2 > \theta$,
- $b^2 < \theta$,

which are studied in Lemma 16-19, respectively.

Lemma 16. *Consider system (5) with the hypotheses $B^2 + C^2 \neq 0, (a + 1)^2 + b^2 \neq 0$ and $b^2 = \theta$. Then $a \neq -1$.*

- (i) *If $C = 0$ and $A/B \neq b/(2(a + 1))$ then the phase portrait in the Poincaré disc of system (5) is presented in Figure 4-(a).*
- (ii) *If $C \neq 0$ and $A \neq [b/(2(a + 1))][B - Cb/(2(a + 1))]$ then the phase portrait in the Poincaré disc of system (5) is presented in Figure 4-(b).*
- (iii) *If $C = 0$ and $A/B = b/(2(a + 1))$ then the phase portrait in the Poincaré disc of system (5) is presented in Figure 4-(c).*
- (iv) *If $C \neq 0$ and $A = [b/(2(a + 1))][B - bC/(2(a + 1))]$ then the phase portrait in the Poincaré disc of system (5) is presented in Figure 4-(d).*

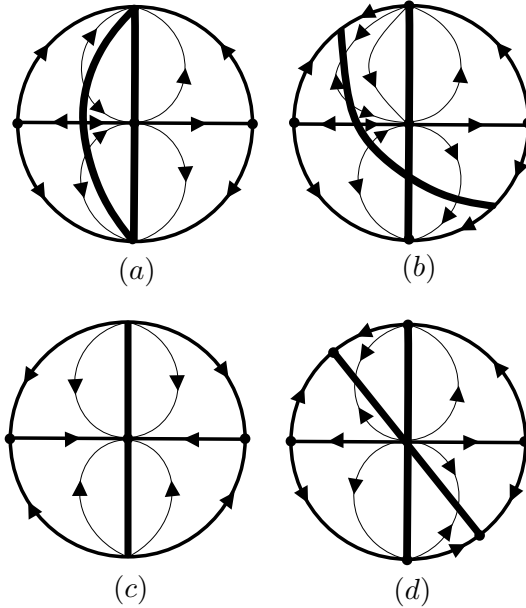


FIGURE 4. Phase portrait of normal form (5) for the case $a \neq -1, b^2 = \theta$

Proof. If $a = -1$ then, from $b^2 = \theta = 4(a + 1)c$, we obtain that $b = 0$. Then we suppose that $a \neq -1$. Solving the equation $b^2 = 4(a + 1)c$ for c we put system (5) into the form:

$$(12) \quad \begin{aligned} \dot{x} &= \frac{1}{4(a+1)}(2(a+1)x + b)^2 k(x, y), \\ \dot{y} &= \frac{1}{2(a+1)}(2(a+1)x + b)(2(a+1)y + bx)k(x, y). \end{aligned}$$

In order to use Lemma 13, after the rescaling given by $ds = (2(a + 1)x + b)/4(a + 1) dt$, system (12) is topologically equivalent to the system (10) in the region $2(a + 1)x + b \neq 0$. As in the proof of Lemma 13 we consider the singular point (x_0, x_0^2) of system (10), where $x_0 = -b/(2(a + 1))$.

Observe that (x_0, x_0^2) is contained in the line of singularities $2(a + 1)x + b = 0$ of system (5). From Remark 7, it follows that the origin of the chart (U_2, φ_2) , is contained in the expression of line of singularities $2(a + 1)x + b = 0$ of system (5) in the chart (U_2, φ_2) .

Case (i) In this case, the straight lines $k = 0$ and $2(a + 1)x + b = 0$ are distinct and parallel. From Lemma 13-(ii) we obtain the phase portrait of system (5).

Case (ii) In this case, since $C \neq 0$, the straight lines $k = 0$ and $2(a + 1)x + b = 0$ are concurrent at the point (x_0, \tilde{y}_0) , where $\tilde{y}_0 = (bB - 2A(a + 1))/(2C(a + 1))$. From the hypothesis $A \neq [b/(2(a + 1))][B - Cb/(2(a + 1))]$ it follows that $y_0 \neq \tilde{y}_0$. From Lemma 13-(iii) we obtain the phase portrait of system (5).

Case (iii) In this case, the straight lines $k = 0$ and $2(a + 1)x + b = 0$ are equal. From Lemma 13-(iv) we obtain the phase portrait of system (5).

Case (iv) In this case, the straight lines $k = 0$ and $2(a + 1)x + b = 0$ are concurrent at the point (x_0, y_0) . From Lemma 13-(v) we obtain the phase portrait of system (5). \square

Lemma 17. Consider system (5) with the hypotheses $B^2 + C^2 \neq 0, a \neq -1$ and $b^2 > \theta$. Consider the finite singular points (x_1, y_1) and (x_2, y_2) of system (5), where $x_1 = (-b + \sqrt{b^2 - 4(a + 1)c})/(2(1 + a)), x_2 = (-b - \sqrt{b^2 - 4(a + 1)c})/(2(1 + a))$ and $y_j = x_j^2, j = 1, 2$.

- (i) If $a < -1, C = 0$ and: $-A/B < x_1$ or $-A/B > x_2$; then the phase portrait in the Poincaré disc of system (5) is presented in Figure 5-(a). If $a > -1, C = 0$ and: $-A/B < x_2$ or $-A/B > x_1$; then the orientation of the orbits are reversed.
- (ii) If $a < -1, C = 0$ and: $-A/B = x_1$ or $-A/B = x_2$; then the phase portrait in the Poincaré disc of system (5) is presented in Figure 5-(b). If $a > -1, C = 0$ and: $-A/B = x_1$ or $-A/B = x_2$; then the orientation of the orbits are reversed.
- (iii) If $a < -1, C = 0$ and $x_1 < -A/B < x_2$ then the phase portrait in the Poincaré disc of system (5) is presented in Figure 5-(c). If $a > -1, C = 0$ and $x_2 < -A/B < x_1$ then the orientation of the orbits are reversed.
- (iv) If $a < -1, C \neq 0, B/C \neq b/(a + 1)$ and: $-(Cc - A(a + 1))/(Cb + B(a + 1)) < x_1$ or $-(Cc - A(a + 1))/(Cb + B(a + 1)) > x_2$; then the phase portrait in the Poincaré disc of system (5) is presented in Figure 5-(d). If $a > -1, C \neq 0, B/C \neq b/(a + 1)$ and $-(Cc - A(a + 1))/(Cb + B(a + 1)) < x_2$ or $-(Cc - A(a + 1))/(Cb + B(a + 1)) > x_1$; then the orientation of the orbits are reversed.
- (v) If $a < -1, C \neq 0, B/C \neq b/(a + 1)$ and: $-(Cc - A(a + 1))/(Cb + B(a + 1)) = x_1$ or $-(Cc - A(a + 1))/(Cb + B(a + 1)) = x_2$, then the phase portrait in the Poincaré disc of system (5) is presented in Figure 5-(e). If $a > -1, C \neq 0, B/C \neq b/(a + 1)$ and: $-(Cc - A(a + 1))/(Cb + B(a + 1)) = x_1$ or $-(Cc - A(a + 1))/(Cb + B(a + 1)) = x_2$, then the orientation of the orbits are reversed.

- (vi) If $a < -1, C \neq 0, B/C \neq b/(a+1)$ and $x_2 < -(Cc - A(a+1))/(Cb + B(a+1)) < x_1$ then the phase portrait in the Poincaré disc of system (5) is presented in Figure 5-(f). If $a > -1, C \neq 0, B/C \neq b/(a+1)$ and $x_1 < -(Cc - A(a+1))/(Cb + B(a+1)) < x_2$ then the orientation of the orbits are reversed.
- (vii) If $a < -1, C \neq 0, B/C = b/(a+1)$ and $A/C \neq c/(a+1)$ then the phase portrait in the Poincaré disc of system (5) is presented in Figure 5-(g). If $a > -1, C \neq 0, B/C = b/(a+1)$ and $A/C \neq c/(a+1)$ then the orientation of the orbits are reversed.
- (viii) If $a < -1, C \neq 0, B/C = b/(a+1)$ and $A/C = c/(a+1)$ then the phase portrait in the Poincaré disc of system (5) is presented in Figure 5-(h). If $a > -1, C \neq 0, B/C = b/(a+1)$ and $A/C = c/(a+1)$ then the orientation of the orbits are reversed.

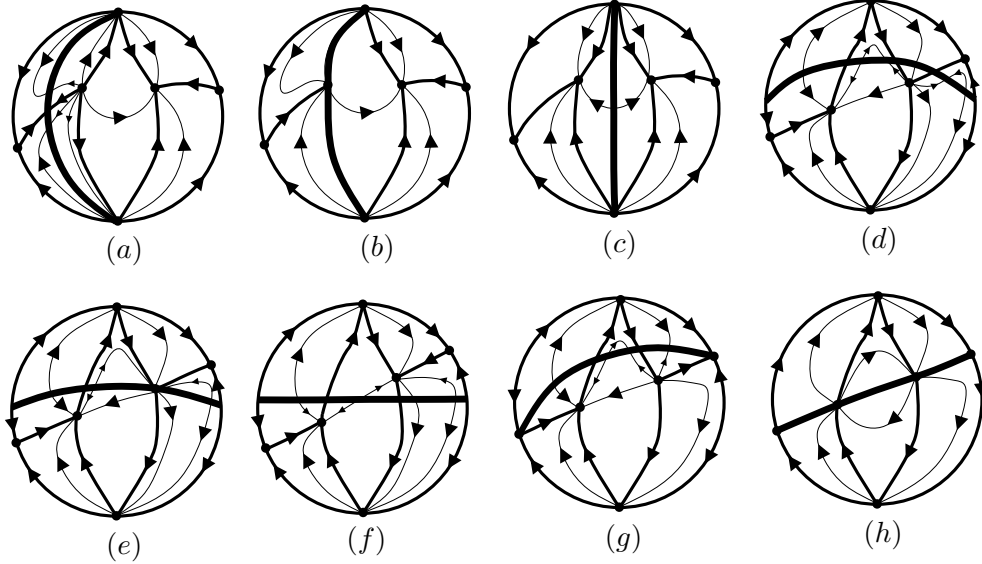


FIGURE 5. Phase portrait of normal form (5) for the case $a \neq -1$ and $b^2 > \theta$.

Proof. Note that $k = 0$ is a line of singular points of system (5). After the rescaling given by $ds = k dt$, system (5) is topologically equivalent to the system (11) in the region $k \neq 0$.

If $a \neq -1, b^2 > 4(a+1)c$, then the singular points of system (11) are $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$, where $x_1 = (-b + \sqrt{b^2 - 4(a+1)c})/(2(1+a)), x_2 = (-b - \sqrt{b^2 - 4(a+1)c})/(2(1+a))$, and $y_1 = x_1^2, y_2 = x_2^2$. Define $r(x, y) = y + b/(a+1)(x - x_1) - y_1, r_1(x, y) = x - x_1$ and $r_2(x, y) = x - x_2$. The straight lines $r = 0, r_1 = 0$ and $r_2 = 0$ are invariant algebraic curves of system (11) with cofactors $2(a+1)x + b, (a+1)(x - x_2)$ and $(a+1)(x - x_1)$, respectively.

Cases (i)-(iii) In this cases $k = 0$ is the vertical straight line given by $x = -A/B$. From Remark 7, it follows that the origin of the chart (U_2, φ_2) , is contained in the expression of line of singularities $k = 0$ of system (5) in the chart (U_2, φ_2) .

Suppose that $a < -1$, then $x_1 < x_2$. We consider the cases

$$-\frac{A}{B} < x_1, -\frac{A}{B} = x_1, x_1 < -\frac{A}{B} < x_2, -\frac{A}{B} = x_2, x_2 < -\frac{A}{B}.$$

From Theorem 10 and the phase portrait presented in the Figure 3-(j), we observe that the phase portrait corresponding to the case $-\frac{A}{B} < x_1$ is topologically equivalent to the case $x_2 < -\frac{A}{B}$. Then we obtain the case **(i)**.

From Theorem 10 and the phase portrait presented in the Figure 3-(j), we observe that the phase portrait corresponding to the case $-\frac{A}{B} = x_1$ is topologically equivalent to the case $x_2 = -\frac{A}{B}$. Then we obtain the case **(ii)**.

From Theorem 10 and the phase portrait presented in the Figure 3-(j), and the hypothesis $x_1 < -\frac{A}{B} < x_2$ we obtain the case **(iii)**.

Cases (iv)-(vi) In this cases the straight lines $k = 0$ and $r = 0$ are concurrent at the point (\tilde{x}, \tilde{y}) , where $\tilde{x} = -(Cc - A(a+1))/(Cb + B(a+1))$ and $\tilde{y} = (Bc - Ab)/(Cb + B(a+1))$.

Suppose that $a < -1$, then $x_1 < x_2$. We consider the cases

$$\tilde{x} < x_1, \tilde{x} = x_1, x_1 < \tilde{x} < x_2, \tilde{x} = x_2, x_2 < \tilde{x}.$$

From Theorem 10 and the phase portrait presented in the Figure 3-(j), we observe that the phase portrait corresponding to the case $\tilde{x} < x_1$ is topologically equivalent to the case $x_2 < \tilde{x}$. Then we obtain the case **(iv)**.

From Theorem 10 and the phase portrait presented in the Figure 3-(j), we observe that the phase portrait corresponding to the case $\tilde{x} = x_1$ is topologically equivalent to the case $x_2 = \tilde{x}$. Then we obtain the case **(v)**.

From Theorem 10 and the phase portrait presented in the Figure 3-(j), from the hypothesis $x_1 < \tilde{x} < x_2$ we obtain the case **(vi)**.

Case (vii) In this case the straight lines $k = 0$ and $r = 0$ are parallel. Suppose that $a < -1$, then $x_1 < x_2$. We consider the cases

$$\frac{A}{C} < \frac{c}{a+1}, \frac{A}{C} > \frac{c}{a+1}.$$

From Theorem 10 and the phase portrait presented in the Figure 3-(j), we observe that the phase portrait corresponding to the case $A/C < c/(a+1)$ is topologically equivalent to the case $A/C > c/(a+1)$. Then we obtain the case **(vii)**.

(viii) In this case the straight lines $k = 0$ and $r = 0$ are coincident. From Theorem 10 and the phase portrait presented in the Figure 3-(j) we obtain the case **(viii)**.

If we consider $a < -1$ in items **(i) – (viii)** we will obtain the phase portraits of each item, but with the orientation of the orbits reversed. \square

Lemma 18. Consider system (5) with the hypotheses $B^2 + C^2 \neq 0, a = -1$ and $b^2 > \theta$.

- (i) If $C = 0$ and $A/B > c/b$ then the phase portrait in the Poincaré disc of system (5) is presented in Figure 6-(a). If $C = 0$ and $A/B < c/b$ then the orientation of the orbits are reversed.
- (ii) If $C = 0$ and $A/B = c/b$ then the phase portrait in the Poincaré disc of system (5) is presented in Figure 6-(b).
- (iii) If $C(A - Bc/b + Cc^2/b^2) > 0$ then the phase portrait in the Poincaré disc of system (5) is presented in Figure 6-(c).
- (iv) If $C(A - Bc/b + Cc^2/b^2) < 0$ then the phase portrait in the Poincaré disc of system (5) is presented in Figure 6-(d).
- (v) If $C \neq 0$ and $A - Bc/b + Cc^2/b^2 = 0$ then the phase portrait in the Poincaré disc of system (5) is presented in Figure 6-(e).

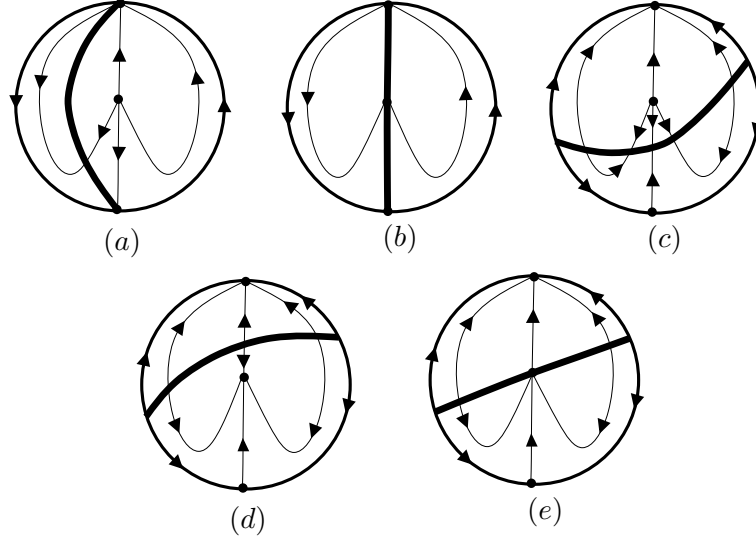


FIGURE 6. Phase portrait of normal form (5) for the case $a = -1$ and $b^2 > \theta$.

Proof. Note that $k = 0$ is a line of singular points of system (5). After the rescaling given by $ds = k dt$, system (5) is topologically equivalent to the system (11) in the region $k \neq 0$.

The singular point of system (11) is (x_0, y_0) , where $x_0 = -c/b$ and $y_0 = x_0^2$. Define $r(x, y) = x - x_0$. The straight line $r = 0$ is an invariant algebraic curve of system (11) with cofactor 1.

Cases (i)-(ii) In this cases $k = 0$ is the vertical straight line given by $x = -A/B$. From Remark 7, it follows that the origin of the chart (U_2, φ_2) , is contained in the expression of line of singularities $k = 0$ of system (5) in the chart (U_2, φ_2) . We consider the cases

$$-\frac{A}{B} < x_0, \quad -\frac{A}{B} = x_0, \quad x_0 < -\frac{A}{B}.$$

From Theorem 10, the phase portrait presented in the Figure 3-(i), we observe that the phase portrait corresponding to the case $-\frac{A}{B} < x_0$ is topologically equivalent to the case $x_0 < -\frac{A}{B}$. Then we obtain the case **(i)**.

From Theorem 10 and the phase portrait presented in the Figure 3-(i), and the hypothesis $x_0 = -\frac{A}{B}$ we obtain the case **(ii)**.

Cases (iii)-(iv) In this case (x_0, y_0) is not contained in the line of singularities $k = 0$. We consider the cases

$$\begin{aligned} C > 0 \text{ and } A - Bc/b + Cc^2/b^2 < 0; & \quad C < 0 \text{ and } A - Bc/b + Cc^2/b^2 > 0; \\ C > 0 \text{ and } A - Bc/b + Cc^2/b^2 > 0; & \quad C < 0 \text{ and } A - Bc/b + Cc^2/b^2 < 0. \end{aligned}$$

From Theorem 10 and the phase portrait presented in the Figure 3-(i), we observe that the phase portrait corresponding to the case $C > 0$ and $A - Bc/b + Cc^2/b^2 > 0$ is topologically equivalent to the case $C < 0$ and $A - Bc/b + Cc^2/b^2 < 0$. Then we obtain the case **(iii)**.

From Theorem 10 and the phase portrait presented in the Figure 3-(i), we observe that the phase portrait corresponding to the case $C > 0$ and $A - Bc/b + Cc^2/b^2 < 0$ is topologically equivalent to the case $C < 0$ and $A - Bc/b + Cc^2/b^2 > 0$. Then we obtain the case **(iv)**.

Case (v) In this case (x_0, y_0) is contained in the line of singularities $k = 0$. From Theorem 10 and the phase portrait presented in the Figure 3-(i), and the hypothesis $A - Bc/b + Cc^2/b^2 = 0$ we obtain the case (iv). \square

Lemma 19. Consider system (5) with the hypotheses $B^2 + C^2 \neq 0, (a + 1)^2 + b^2 \neq 0$ and $b^2 < \theta$. Then $a \neq -1$.

- (i) If $a < -1$ and $C = 0$ then the phase portrait in the Poincaré disc of system (5) is presented in Figure 7-(a). If $a > -1$ and $C = 0$ then the orbits are reversed.
- (ii) If $a < -1$ and $B = 0$ then the phase portrait in the Poincaré disc of system (5) is presented in Figure 7-(b). If $a > -1$ and $B = 0$ then the orbits are reversed.

Proof. Note that $k = 0$ is a line of singular points of system (5). After the rescaling given by $ds = k dt$, system (5) is topologically equivalent to the system (11) in the region $k \neq 0$. Observe that if $a \neq -1$ and $b^2 < \theta$, then (11) is a nonsingular system.

Case (i) In this cases $k = 0$ is the vertical straight line given by $x = -A/B$. From Remark 7, it follows that the origin of the chart (U_2, φ_2) , is contained in the expression of line of singularities $k = 0$ of system (5) in the chart (U_2, φ_2) . From Theorem 10 and the phase portrait presented in the Figure 3-(1), we obtain the case (i).

Case (ii) In this cases $k = 0$ is the horizontal straight line given by $y = -A/C$. From Remark 7, it follows that the origin of the chart (U_1, φ_1) , is contained in the expression of line of singularities $k = 0$ of system (5). From Theorem 10 and the phase portrait presented in the Figure 3-(1), we obtain the case (ii). \square

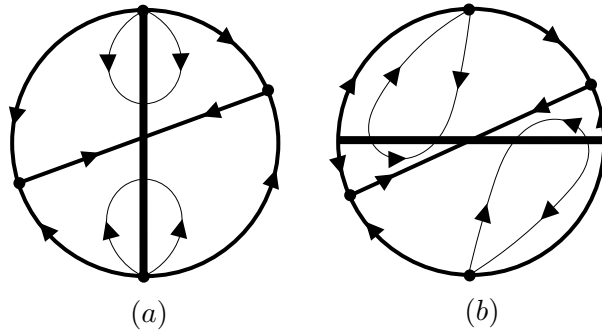


FIGURE 7. Phase portrait of normal form (5) for the case $a \neq -1$ and $b^2 < \theta$.

5. SINGULARITIES OF VECTOR FIELDS WITH TWO INVARIANT ALGEBRAIC CURVES

If f is a real differentiable function defined on \mathbb{R}^2 we denote by H_f the Hamiltonian vector field $(-f_y, f_x)$.

When f_1, f_2 are real polynomials defined on \mathbb{R}^2 then the vector field

$$(13) \quad X = \lambda_1 f_1 H_{f_2} + \lambda_2 f_2 H_{f_1}, \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R},$$

has $f_1 = 0$ and $f_2 = 0$ as invariant algebraic curves, see [5]. When f_1 and f_2 are the parabolas given by (3), by taking $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = \lambda$ we observe that the normal form (7) is a particular case of (13). Then, in order to study the normal form (7) we consider some results concerning the vector field (13).

Remark 20. Define $k = H_{f_2}(f_1)$. Since $H_{f_1}(f_2) = -H_{f_2}(f_1)$ and $H_{f_j}(f_j) = 0$, $j = 1, 2$. If X is the vector field (13) then the cofactor k_j of f_j is given by $k_j = (-1)^{j+1}\lambda_j k$, $j = 1, 2$.

We observe that the singular points of the vector field (13) are contained in the curve $k = 0$ or in the intersection of the invariant algebraic curves $f_1 = 0$ and $f_2 = 0$.

Remark 21. If (x, y) is a singular point of the vector field (13), then $k(x, y) = 0$ or $f_1(x, y) = f_2(x, y) = 0$.

In fact, suppose that $\lambda_1 = 0$ and $\lambda_2 \neq 0$. In this case $f_2 = 0$ is a line of singular points of X , in particular, the points on the intersection of the invariant algebraic curves $f_1 = 0$ and $f_2 = 0$ are singular points of X . The case $\lambda_1 \neq 0$ and $\lambda_2 = 0$ follows in the same way.

Suppose that $\lambda_1\lambda_2 \neq 0$. From Remark 20 it follows that $X(f_1) = \lambda_1 f_1 k$ and $X(f_2) = -\lambda_2 f_2 k$. Then, at the point (x, y) we have $f_1(x, y)k(x, y) = 0$ and $f_2(x, y)k(x, y) = 0$. If $k(x, y) \neq 0$ we obtain $f_1(x, y) = f_2(x, y) = 0$, and the proof of Remark 21 is finished.

If (x, y) is a singular point of the vector field (13), then we compute the eigenvalues of $JX(x, y)$ for the cases $f_1(x, y) = f_2(x, y) = 0$ or $k(x, y) = 0$ in Lemma 22 and Lemma 23, respectively. In particular, we will observe that there is no semi-hyperbolic singular points of the vector field (13).

The next result means that, if (x, y) is a singular point of the vector field (13) contained in the intersection of the invariant algebraic curves $f_1 = 0$ and $f_2 = 0$, then (x, y) is a hyperbolic node, hyperbolic saddle, nilpotent or linearly null singular point.

Lemma 22. Consider the vector field X given by (13) where f_1, f_2 are polynomial functions and define $k = H_{f_2}(f_1)$. If $f_1(x, y) = f_2(x, y) = 0$ for some $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ then (x, y) is a singular point of the vector field (13), the eigenvalues γ_1, γ_2 of the Jacobian matrix $JX(x, y)$ are $\gamma_1 = -\lambda_2 k(x, y)$, $\gamma_2 = \lambda_1 k(x, y)$ and the eigenvectors are

$$(14) \quad v_1 = (f_{1y}(x, y), -f_{1x}(x, y)), \quad v_2 = (f_{2y}(x, y), f_{2x}(x, y)),$$

respectively.

Proof. In order to simplify the notation we define $f_{jx} = \frac{\partial f_j}{\partial x}(x, y)$, $f_{jy} = \frac{\partial f_j}{\partial y}(x, y)$, $j = 1, 2$. Note that

$$JX(x, y) = \begin{bmatrix} -\lambda_1 f_{1x} f_{2y} - \lambda_2 f_{1y} f_{2x} & -\lambda_1 f_{1y} f_{2y} - \lambda_2 f_{1y} f_{2y} \\ \lambda_1 f_{1x} f_{2x} + \lambda_2 f_{1x} f_{2x} & \lambda_1 f_{1y} f_{2x} + \lambda_2 f_{1x} f_{2y} \end{bmatrix},$$

then

$$\det JX(x, y) = -\lambda_1 \lambda_2 (H_{f_1}(f_2))^2(x, y)$$

and

$$\operatorname{tr} JX(x, y) = (\lambda_2 - \lambda_1) H_{f_1}(f_2)(x, y),$$

where $\operatorname{tr} JX(x, y)$ denotes the trace and $\det JX(x, y)$ is the determinant of $JX(x, y)$. Considering

$$\gamma = \frac{1}{2} \left(\operatorname{tr} JX(x, y) \pm \sqrt{(\operatorname{tr} JX(x, y))^2 - 4 \det JX(x, y)} \right),$$

we have $\gamma = \frac{1}{2} H_{f_1}(f_2) ((\lambda_2 - \lambda_1) \pm |\lambda_1 + \lambda_2|)(x, y)$. Hence

$$\gamma_1 = \lambda_2 H_{f_1}(f_2)(x, y) \text{ and } \gamma_2 = -\lambda_1 H_{f_1}(f_2)(x, y)$$

are the eigenvalues of $JX(x, y)$. From this matrix and the eigenvalues we obtain the eigenvectors v_1 and v_2 easily. \square

Since the vector field (13) is integrable, the next result means that, if (x, y) is a singular point of (13) such that $k(x, y) = 0$, then (x, y) is a hyperbolic saddle, nilpotent, linearly null or a center.

Lemma 23. *Consider the vector field X given by (13) where f_1, f_2 are polynomial functions and define $k = H_{f_2}(f_1)$. If $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ is a singular point of the vector field (13) and $k(x, y) = 0$ then the eigenvalues of $JX(x, y)$ are given by $\pm\sqrt{-\det JX(x, y)}$.*

Proof. In order to simplify the notation we define $f_j = f_j(x, y)$, $f_{jx} = \frac{\partial f_j}{\partial x}(x, y)$, $f_{jy} = \frac{\partial f_j}{\partial y}(x, y)$, $f_{jxx} = \frac{\partial^2 f_j}{\partial x^2}(x, y)$, $f_{jxy} = \frac{\partial^2 f_j}{\partial x \partial y}(x, y)$ and $f_{jyy} = \frac{\partial^2 f_j}{\partial y^2}(x, y)$, $j = 1, 2$.

Since $k(x, y) = -f_{2y}f_{1x} + f_{2x}f_{1y}$, using the product rule and the hypothesis $k(x, y) = 0$ we write $JX(x, y) = J_1 + J_2$ where

$$J_1 = (\lambda_1 + \lambda_2) \begin{bmatrix} -f_{1x}f_{2y} & -f_{1y}f_{2x} \\ f_{1x}f_{2x} & f_{1x}f_{2y} \end{bmatrix}$$

and

$$J_2 = \begin{bmatrix} -(\lambda_1 f_{2xy}f_1 + \lambda_2 f_{1xy}f_2) & -(\lambda_1 f_{2yy}f_1 + \lambda_2 f_{1yy}f_2) \\ \lambda_1 f_{2xx}f_1 + \lambda_2 f_{1xx}f_2 & \lambda_1 f_{2xy}f_1 + \lambda_2 f_{1xy}f_2 \end{bmatrix},$$

then $\text{tr } JX(x, y) = 0$. After a straightforward computation we conclude the proof. \square

For a special class of invariant algebraic curves, we can solve the equation $\dot{x}(x, y) = 0$ for y and after the substitution of the result in $\dot{y}(x, y) = 0$ we obtain a more precisely result than the Remark 21.

Remark 24. *Suppose that $\lambda_1\lambda_2 \neq 0$ and $\lambda_2 \neq -\lambda_1$. If f_j is of the form $f_j(x, y) = y + g_j(x)$ for some polynomial function g_j , $j = 1, 2$, then (x_0, y_0) is a singular point of the vector field (13) if and only if (x_0, y_0) is a solution of the system*

$$k(x)(g_2(x) - g_1(x)) = 0 \text{ and } y = -\frac{1}{\lambda_1 + \lambda_2}(\lambda_1 g_1(x) + \lambda_2 g_2(x)).$$

Moreover $k := H_{f_2}(f_1)$ is given by $k(x) = (g_2'(x) - g_1'(x))$, $x \in \mathbb{R}$. Therefore, the possibilities of the localization for the singular points (x_0, y_0) of vector field (13) are:

- (1) (x_0, y_0) is contained in the intersection of the invariants $f_j(x, y) = 0$, $j = 1, 2$ and (x_0, y_0) is a 0th-order contact of the invariants (not-tangent). This case corresponds to $g_1(x_0) = g_2(x_0)$ and $k(x_0) \neq 0$.
- (2) (x_0, y_0) is contained in the intersection of the invariants $f_j = 0$, $j = 1, 2$ and (x_0, y_0) is a 1th-order contact of the invariants (tangent). This case corresponds to $g_1(x_0) = g_2(x_0)$ and $k(x_0) = 0$.
- (3) (x_0, y_0) is not contained in the union of the invariants $f_j = 0$, $j = 1, 2$. This case corresponds to $k(x_0) = 0$ and $g_1(x_0) \neq g_2(x_0)$

6. PROOF OF THEOREM (3)

The vector field defined by system (7) is topologically equivalent to the vector field defined by

$$(15) \quad \begin{aligned} \dot{x} &= -y\lambda - \lambda ax^2 + \lambda bx - \lambda c - y + x^2, \\ \dot{y} &= -2\lambda xy - 2a\lambda x^3 + 2b\lambda x^2 - 2c\lambda x + 2axy - by - 2ax^3 + bx^2, \end{aligned}$$

under the change of coordinates given by $(t, x, y) \mapsto (-t, -x, y)$. Then, it is sufficient to consider the case $b \geq 0$.

Lemma 25. *If $\lambda = 0$ then the phase portrait in the Poincaré disc of system (7) is presented in the Figure 8.*

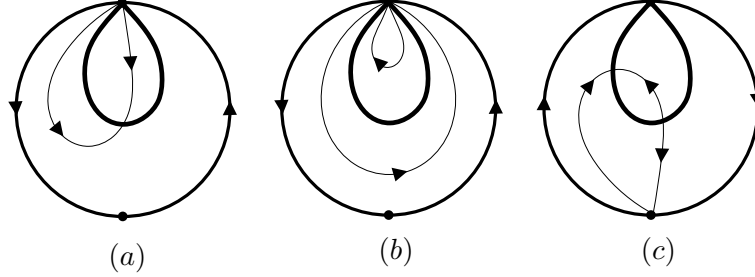


FIGURE 8. Phase portrait in the Poincaré disc of system (7) in the case $\lambda = 0$. (a) $a > 0, (a + 1)^2 + b^2 + c^2 \neq 0$. (b) $a = 1, b = c = 0$. (c) $a < 0$.

Proof. If $\lambda = 0$ then system (7) becomes

$$(16) \quad \dot{x} = x^2 - y, \quad \dot{y} = (x^2 - y)(2ax + b).$$

System (16) is topologically equivalent to the system

$$(17) \quad \dot{x} = 1, \quad \dot{y} = 2ax + b,$$

in the region $y \neq x^2$. The orbits of system (17) are contained in the parabolas of the form $y = ax^2 + bx + \alpha$, where $\alpha \in \mathbb{R}$ is a constant. The expression of these orbits in the chart (U_2, φ_2) is $v = au^2 + buv + \alpha v^2, v \neq 0$. From Remark 4 we obtain the proof of (25). \square

Observe that system (7) is a cubic system if, and only if, $\lambda \neq 1$. Then, from now on, we suppose that $\lambda \neq 0, \lambda \neq -1$ and $b \geq 0$.

We divide this section in three subsections. We study the finite and infinite singularities of system (7) in the subsections 6.1 and 6.2. Finally we prove Theorem (3) in Subsection 6.3.

6.1. Finite singularities of system (7). We write f_j of the form $f_j(x, y) = y + g_j(x), j = 1, 2$, where $g_1(x) = -x^2$ and $g_2(x) = ax^2 + bx + c, x, y \in \mathbb{R}$. From Remark 24 we have the following information about the number of singular points of system (7).

Lemma 26. *Define $\delta = b^2 - 4(a + 1)c$. If $a \neq -1$ then consider the points*

$$\begin{aligned} (x_0, y_0) &= (-b/(2a + 2), (-(4a^2c + 8ac + 4c - ab^2 - 2b^2)\lambda + b^2)/(4(a + 1)^2(\lambda + 1))), \\ (x_1, y_1) &= ((-\sqrt{\delta} - b)/(2a + 2), (b\sqrt{\delta} - 2ac - 2c + b^2)/2(a + 1)^2), \\ (x_2, y_2) &= ((\sqrt{\delta} - b)/(2a + 2), (-b\sqrt{\delta} + 2ac + 2c - b^2)/2(a + 1)^2). \end{aligned}$$

If $a = -1, b \neq 0$ then consider the point

$$(x_3, y_3) = (-c/b, c^2/b^2).$$

- (i) *If $\delta > 0$ and $a \neq -1$, then the system (7) has three distinct singular points given by $(x_j, y_j), j = 0, 1, 2$. The singular point (x_j, y_j) is a 0-th order contact point of the invariant algebraic curves $f_1 = 0$ and $f_2 = 0$ (not-tangent), $j = 1, 2$. The singular point (x_0, y_0) is not contained in the union of the invariant algebraic curves $f_1 = 0$ and $f_2 = 0$.*

- (ii) If $\delta = 0$ and $a \neq -1$ then (x_0, y_0) is the unique singular point of the system (7). In this case (x_0, y_0) is the tangency point of the invariant algebraic curves $f_1 = 0$ and $f_2 = 0$.
- (iii) If $\delta < 0$ and $a \neq -1$ then (x_0, y_0) is the unique singular point of the system (7). The singular point (x_0, y_0) is not contained in the union of the invariant algebraic curves $f_1 = 0$ and $f_2 = 0$.
- (iv) If $a = -1$, $b = 0$ and $c \neq 0$ then the singular points of the system (7) are given by the line $(x, x^2 - c\lambda/(\lambda + 1))$, $x \in \mathbb{R}$.
- (v) If $a = -1$ and $b \neq 0$ then (x_3, y_3) is the unique singular point of the system (7). The singular point (x_3, y_3) is a 0-th order contact point (not-tangent) of the invariant algebraic curves $f_1 = 0$ and $f_2 = 0$.

In the next remark we present the relative position of the invariant algebraic curves and the finite singular points.

Remark 27. Suppose that $a \neq -1$, $\lambda \neq -1$, $\delta \neq 0$ and consider the points (x_j, y_j) , $j = 0, 1, 2$, defined in Lemma 26. Then $f_1(x_0, y_0) = \delta\lambda/(4(a + 1)(\lambda + 1)) \neq 0$, $f_2(x_0, y_0) = -\delta/(4(a + 1)(\lambda + 1)) \neq 0$ and (x_0, y_0) is not contained in the union of the invariant algebraic curves $f_1 = 0$ and $f_2 = 0$. Since $b \geq 0$, we have the above possibilities.

- (i) Suppose that $a > 0$ and $\lambda > 0$. If $\delta > 0$ then $x_1 < x_0 < x_2$ and $f_1(x_0, y_0) > 0$, $f_2(x_0, y_0) < 0$; if $\delta < 0$ then $f_1(x_0, y_0) < 0$, $f_2(x_0, y_0) > 0$.
- (ii) Suppose that $a > 0$, $-1 < \lambda < 0$. If $\delta > 0$ then $x_1 < x_0 < x_2$ and $f_1(x_0, y_0) < 0$, $f_2(x_0, y_0) < 0$; if $\delta < 0$ then $f_1(x_0, y_0) > 0$, $f_2(x_0, y_0) > 0$.
- (iii) Suppose that $a > 0$, $\lambda < -1$. If $\delta > 0$ then $x_1 < x_0 < x_2$ and $f_1(x_0, y_0) > 0$, $f_2(x_0, y_0) > 0$; if $\delta < 0$ then $f_1(x_0, y_0) < 0$, $f_2(x_0, y_0) < 0$.
- (iv) Suppose that $-1 < a < 0$, $\lambda > 0$. If $\delta > 0$ then $x_1 < x_0 < x_2$ and $f_1(x_0, y_0) > 0$, $f_2(x_0, y_0) < 0$; if $\delta < 0$ then $f_1(x_0, y_0) < 0$, $f_2(x_0, y_0) > 0$.
- (v) Suppose that $-1 < a < 0$, $-1 < \lambda < 0$. If $\delta > 0$ then $x_1 < x_0 < x_2$ and $f_1(x_0, y_0) < 0$, $f_2(x_0, y_0) < 0$; if $\delta < 0$ then $f_1(x_0, y_0) > 0$, $f_2(x_0, y_0) > 0$.
- (vi) Suppose that $-1 < a < 0$, $\lambda < -1$. If $\delta > 0$ then $x_1 < x_0 < x_2$ and $f_1(x_0, y_0) > 0$, $f_2(x_0, y_0) > 0$; if $\delta < 0$ then $f_1(x_0, y_0) < 0$, $f_2(x_0, y_0) < 0$.
- (vii) Suppose that $a < -1$, $\lambda > 0$. If $\delta > 0$ then $x_2 < x_0 < x_1$ and $f_1(x_0, y_0) < 0$, $f_2(x_0, y_0) > 0$; if $\delta < 0$ then $f_1(x_0, y_0) > 0$, $f_2(x_0, y_0) < 0$.
- (viii) Suppose that $a < -1$, $-1 < \lambda < 0$. If $\delta > 0$ then $x_2 < x_0 < x_1$ and $f_1(x_0, y_0) > 0$, $f_2(x_0, y_0) > 0$; if $\delta < 0$ then $f_1(x_0, y_0) < 0$, $f_2(x_0, y_0) < 0$.
- (ix) Suppose that $a < -1$, $\lambda < -1$. If $\delta > 0$ then $x_2 < x_0 < x_1$ and $f_1(x_0, y_0) < 0$, $f_2(x_0, y_0) < 0$; if $\delta < 0$ then $f_1(x_0, y_0) > 0$, $f_2(x_0, y_0) > 0$.

Remark 28. Define $k(x) = 2(a + 1)x + b$, $f_1(x, y) = y - x^2$ and $f_2(x, y) = y + ax^2 + bx + c$, $x, y \in \mathbb{R}$. Suppose that $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ is such that $f_1(x, y) = f_2(x, y) = 0$. From Lemma 22 it follows that the eigenvalues of the Jacobian matrix of the vector field defined by system (7) evaluated at (x, y) are $\gamma_1 = -\lambda(2(a + 1)x + b)$, $\gamma_2 = (2(a + 1)x + b)$ with respective eigenvectors given by $v_1 = (1, 2x)$, $v_2 = (1, 2ax + b)$.

We remember that $\delta = b^2 - 4(a + 1)c$ and we divide the study of the finite singular points of system (7) in five cases, namely:

- $a \neq -1, \delta > 0$,
- $a \neq -1, \delta = 0$,
- $a \neq -1, \delta < 0$,
- $a = -1, b > 0$,

- $a = -1, b = 0, c \neq 0,$

which are studied in Lemma 29-33, respectively.

Lemma 29. *Consider system (7) with the hypothesis $a \neq -1$ and $\delta > 0$.*

- (i) *If $a > 0$ and $\lambda > 0$, then the phase portrait at the finite singular points of system (7) is presented in Figure 9-(a).*
- (ii) *If $a < 0, a \neq -1$ and $\lambda > 0$ then the phase portrait at the finite singular points of system (7) is presented in Figure 9-(b).*
- (iii) *If $-1 < a < 0$ and $-1 < \lambda < 0$ then the phase portrait at the finite singular points of system (7) is presented in Figure 9-(c). If $a < -1, \lambda < -1$ then the orientation of the orbits in Figure 9-(c) is reversed.*
- (iv) *If $-1 < a < 0$ and $\lambda < -1$ then the phase portrait at the finite singular points of system (7) is presented in Figure 9-(d). If $a < -1$ and $-1 < \lambda < 0$ then the orientation of the orbits in Figure 9-(d) is reversed.*
- (v) *If $a > 0$ and $-1 < \lambda < 0$ then the phase portrait at the finite singular points of system (7) is presented in Figure 9-(e).*
- (vi) *If $a > 0$ and $\lambda < -1$ then the phase portrait at the finite singular points of system (7) is presented in Figure 9-(f).*

Proof. From Lemma 26-(i) we obtain that the finite singular points of system (7) are (x_j, y_j) with $j = 0, 1, 2$.

The determinant of the Jacobian matrix of the vector field defined by system (7) evaluated at (x_0, y_0) is $\delta\lambda/2$. From Lemma 23 it follows that the eigenvalues of the Jacobian matrix of the vector field defined by system (7) evaluated at (x_0, y_0) are $\pm\sqrt{-\delta\lambda/2}$. Since the vector field defined by system (7) is integrable, if $\lambda < 0, \lambda \neq -1$, then (x_0, y_0) is a hyperbolic saddle point, if $\lambda > 0$ then (x_0, y_0) is a center.

Define $k = H_{f_2}(f_1)$. Since $k(x_1) = -\sqrt{\delta}$, from Remark 28 it follows that the eigenvalues of the Jacobian matrix of the vector field defined by system (7) evaluated at (x_1, y_1) are $\sqrt{\delta}\lambda$ and $-\sqrt{\delta}$. If $\lambda > 0$ then (x_1, y_1) is a hyperbolic saddle point, if $\lambda < 0, \lambda \neq -1$, then (x_1, y_1) is a hyperbolic attracting node.

Since $k(x_2) = \sqrt{\delta}$, from Remark 28 it follows that the eigenvalues of the Jacobian matrix of the vector field defined by system (7) evaluated at (x_2, y_2) are $-\sqrt{\delta}\lambda$ and $\sqrt{\delta}$. If $\lambda > 0$ then (x_2, y_2) is a hyperbolic saddle point, if $\lambda < 0, \lambda \neq -1$, then (x_2, y_2) is a hyperbolic repelling node.

The relative position of (x_0, y_0) with respect to the algebraic invariant curves $f_1 = 0$ and $f_2 = 0$ is given by Remark 27.

When $(x_j, y_j), j = 1, 2$ is a saddle point, the stable and unstable manifold are contained in the invariants $f_1 = 0$ and $f_2 = 0$. In this case, we determine the stable and unstable manifold using the tangent space given by Remark 28. \square

Lemma 30. *Consider system (7) with the hypothesis $a \neq -1$ and $\delta = 0$.*

- (i) *If $a > 0$ and $\lambda > 0$ then the phase portrait at the finite singular points of system (7) is presented in Figure 10-(a).*
- (ii) *If $a < 0, a \neq -1$ and $\lambda > 0$, then the phase portrait at the finite singular points of system (7) is presented in Figure 10-(b).*

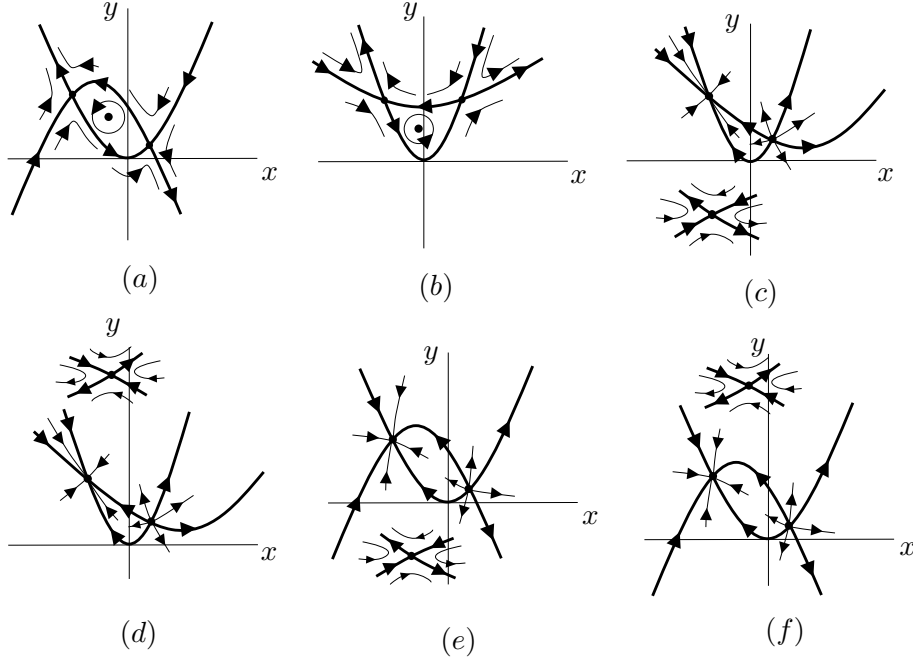


FIGURE 9. Phase portraits of system (7) in the finite region for the case $\delta > 0$. (a) $a > 0, \lambda > 0$. (b) $a < 0, a \neq -1, \lambda > 0$. (c) $-1 < a < 0, -1 < \lambda < 0$; if $a < -1, \lambda < -1$ then the orientation of the orbits is reversed. (d) $-1 < a < 0, \lambda < -1$; if $a < -1, -1 < \lambda < 0$ then the orientation of the orbits is reversed. (e) $a > 0, -1 < \lambda < 0$. (f) $a > 0, \lambda < -1$.

- (iii) If $-1 < a < 0$ and $-1 < \lambda < 0$ then the phase portrait at the finite singular points of system (7) is presented in Figure 10-(c). If $a < -1$ and $\lambda < -1$ then the orientation of the orbits of figure 10-(c) is reversed.
- (iv) If $-1 < a < 0$ and $\lambda < -1$; then the phase portrait at the finite singular points of system (7) is presented in Figure 10-(d). If $a < -1$ and $-1 < \lambda < 0$ then the orientation of the orbits in system in Figure 10-(d) is reversed.
- (v) If $a > 0$ and $-1 < \lambda < 0$; then the phase portrait at the finite singular points of system (7) is presented in Figure 10-(e).
- (vi) If $a > 0$ and $\lambda < -1$ then the phase portrait at the finite singular points of system (7) is presented in Figure 10-(f)

Proof. From Lemma 26-(ii) we obtain that (x_0, y_0) is the unique singular point of the system (7). In this case $y_0 = b^2/(4(a+1)^2)$. Using Lemma 23 we obtain that (x_0, y_0) is a nilpotent singular point of system (7). In order to study this singular point, we translate (x_0, y_0) to the origin, then we apply the linear change of coordinates given by

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -\lambda - 1 & 0 \\ \frac{b(\lambda+1)}{a+1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

After this change of coordinates, system (7) becomes

$$(18) \quad \begin{aligned} \dot{x} &= y + x^2(\lambda + 1)(a\lambda - 1) \\ \dot{y} &= 2x(\lambda + 1)(ax^2\lambda^3 + 3ax^2\lambda^2 + y\lambda + 3ax^2\lambda - ay + ax^2). \end{aligned}$$

The origin of system (18) is a nilpotent singular point, and the system is in the form required by [1, Theorem 3.5].

We define $f(x) = -x^2(\lambda + 1)(a\lambda - 1)$, $F(x) = 2(a + 1)^2\lambda(\lambda + 1)^2x^3$ and $G(x) = 2(a + 1)(\lambda - 1)(\lambda + 1)x$, for x on an appropriated neighborhood of the origin. If $\lambda \neq -1$ then we define $\tilde{a} = (2(a + 1)^2\lambda(\lambda + 1)^2)$, $m = 3$, $\tilde{b} = 2(a + 1)(\lambda - 1)(\lambda + 1)$, $n = 1$.

If $\lambda > 0$ then from [1, Theorem 3.5] it follows that (x_0, y_0) is a saddle point of system (7). Since $f_1(x_0, y_0) = f_2(x_0, y_0) = 0$, the invariant algebraic curves $f_1 = 0$ and $f_2 = 0$ are the separatrices. Moreover for system (7) we have

$$(19) \quad \dot{x}|_{f_1(x,y)=0} = -k(x)^2\lambda/(4(a + 1)), \quad \dot{x}|_{f_2(x,y)=0} = k(x)^2/(4(a + 1)).$$

If $a > 0$, $\lambda > 0$, from (19) we have $\dot{x}|_{f_1(x,y)=0} < 0$ and $\dot{x}|_{f_2(x,y)=0} > 0$, so we obtain the phase portrait of Figure 10-(a). If $a < -1$ and $\lambda > 0$, from (19) we have $\dot{x}|_{f_1(x,y)=0} > 0$ and $\dot{x}|_{f_2(x,y)=0} < 0$, so we obtain the phase portrait of Figure 10-(b). If $-1 < a < 0$, $\lambda > 0$, then $\dot{x}|_{f_1(x,y)=0} < 0$ and $\dot{x}|_{f_2(x,y)=0} > 0$, but because of the relative positions of the invariant algebraic curves $f_1 = 0$ and $f_2 = 0$, we obtain the phase portrait of Figure 10-(b).

If $\lambda < 0$ then from [1, Theorem 3.5] it follows that the sectorial decomposition of system (18) at the origin is composed by one hyperbolic sector and one elliptic sector.

In order to determine the relative position of the elliptic sector, we observe that if Γ is an orbit such that the $\alpha(\Gamma) = \omega(\Gamma) = (x_0, y_0)$, then there exists $(x, y) \in \Gamma$ such that $\dot{x}(x, y) = 0$. Here $\alpha(\Gamma)$ and $\omega(\Gamma)$ denote the α -limit and the ω -limit of the orbit Γ .

Notice that $\dot{x}(x, y) = 0$ if, and only if, $y = q(x)$, where $q(x) = -(a\lambda - 1)/(\lambda + 1)x^2 - b\lambda/(\lambda + 1)x - (b^2\lambda)/(4(a + 1)(\lambda + 1))$, $x \in \mathbb{R}$. Then

$$(20) \quad f_1(x, q(x)) = -((2ax + 2x + b)^2\lambda)/(4(a + 1)(\lambda + 1)), x \in \mathbb{R},$$

and

$$(21) \quad f_2(x, q(x)) = ((2ax + 2x + b)^2)/(4(a + 1)(\lambda + 1)), x \in \mathbb{R}.$$

If $-1 < a < 0$, $-1 < \lambda < 0$ then from (20) it follows that $f_1(x, q(x)) > 0$, $x \neq x_0$. Using (19) we obtain the phase portrait presented in the Figure 10-(c). If $a < -1$ and $\lambda < -1$ then from (21) it follows that $f_2(x, q(x)) > 0$, $x \neq x_0$. Using (19) we obtain the phase portrait presented in the Figure 10-(c) with the orientation of the orbits reversed.

If $-1 < a < 0$, $\lambda < -1$ then from (21) it follows that $f_2(x, q(x)) < 0$, $x \neq x_0$. Using (19) we obtain the phase portrait presented in the Figure 10-(d). If $a < -1$ and $-1 < \lambda < 0$ then from (20) it follows that $f_1(x, q(x)) < 0$, $x \neq x_0$. Using (19) we obtain the phase portrait presented in the Figure 10-(d) with the orientation of the orbits reversed.

If $a > 0$, $-1 < \lambda < 0$ then from (20) it follows that $f_1(x, q(x)) > 0$, $x \neq x_0$. Using (19) we obtain the phase portrait presented in the Figure 10-(e).

If $a > 0$, $\lambda < -1$ then from (21) it follows that $f_2(x, q(x)) < 0$, $x \neq x_0$. Using (19) we obtain the phase portrait presented in the Figure 10-(f). \square

Lemma 31. *Consider system (7) with the hypotheses $a \neq -1$ and $\delta < 0$.*

- (i) *If $a > 0$ and $\lambda > 0$ then the phase portrait at the finite singular points of system (7) is presented in in Figure 11-(a).*
- (ii) *If $a < -1$, $\lambda > 0$, then the phase portrait at the finite singular points of system (7) is presented in Figure 11-(b). If $-1 < a < 0$, $\lambda > 0$ then the orientation of the orbits in Figure 11-(b) is reversed.*

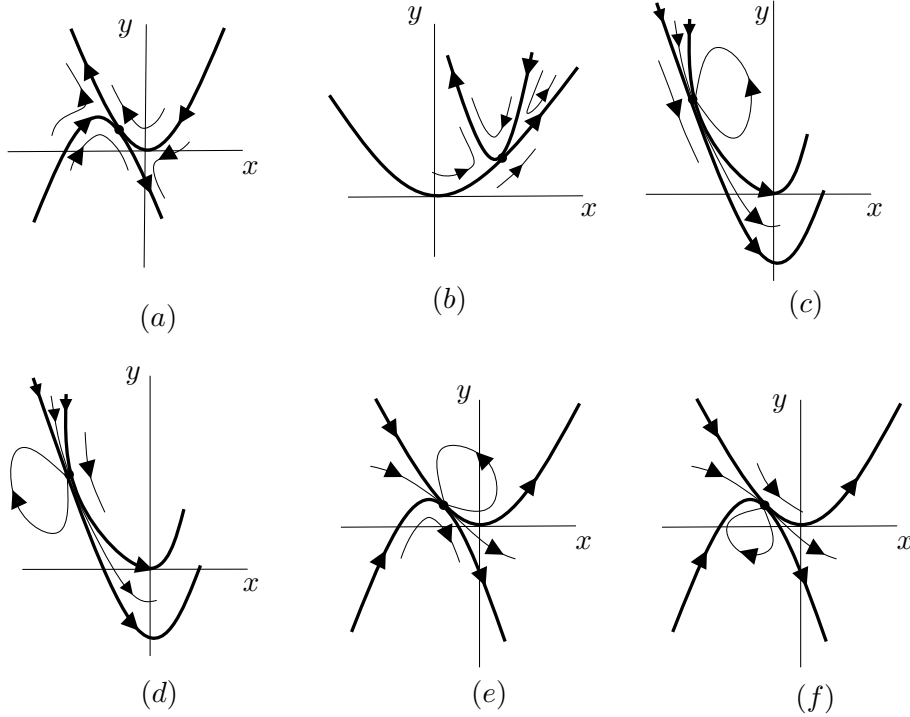


FIGURE 10. Phase portraits of system (7) in the finite region for the case $\delta = 0$. (a) $a > 0, \lambda > 0$. (b) $a < 0, \lambda > 0$. (c) $-1 < a < 0, -1 < \lambda < 0$; if $a < -1, \lambda < -1$ then the orientation of the orbits is reversed. (d) $-1 < a < 0, \lambda < -1$; if $a < -1, -1 < \lambda < 0$ then the orientation of the orbits is reversed. (e) $a > 0, -1 < \lambda < 0$; (f) $a > 0, \lambda < -1$.

- (iii) If $-1 < a < 0, -1 < \lambda < 0$ then the phase portrait at the finite singular points of system (7) is presented in Figure 11-(c). If $a < -1, \lambda < -1$ then the orientation of the orbits in Figure 11-(c) is reversed.
- (iv) If $-1 < a < 0, \lambda < -1$ then the phase portrait at the finite singular points of system (7) is presented in Figure 11-(d). If $a < -1, -1 < \lambda < 0$ then the orientation of the orbits in Figure 11-(c) is reversed.
- (v) If $a > 0, -1 < \lambda < 0$ then the phase portrait at the finite singular points of system (7) is presented in Figure 11-(e).
- (vi) $a > 0, \lambda < -1$ then the phase portrait at the finite singular points of system (7) is presented in Figure 11-(f).

Proof. From Lemma 26-(iii) we obtain that (x_0, y_0) is the unique singular point of the system (7). The determinant of the Jacobian matrix of the vector field defined by system (7) evaluated at (x_0, y_0) is $\delta\lambda/2$. Since the vector field defined by system (7) is integrable, from Lemma 23 it follows that, if $\lambda > 0$ then (x_0, y_0) is a hyperbolic saddle and if $\lambda < 0, \lambda \neq -1$ then (x_0, y_0) is a center.

The relative position of (x_0, y_0) with respect to the invariant algebraic curves is given by Remark 27. Moreover, for system (7) we have $\dot{x}|_{x=0} = (-y-c)\lambda - y$. Moreover for system (7) we have $\dot{x}|_{f_1(x,y)=0} = -((a+1)x^2 + bx + c)\lambda$ and $\dot{x}|_{f_2(x,y)=0} = (a+1)x^2 + bx + c$. \square

Lemma 32. Consider system (7) with the hypothesis $a = -1$ and $b \neq 0$.

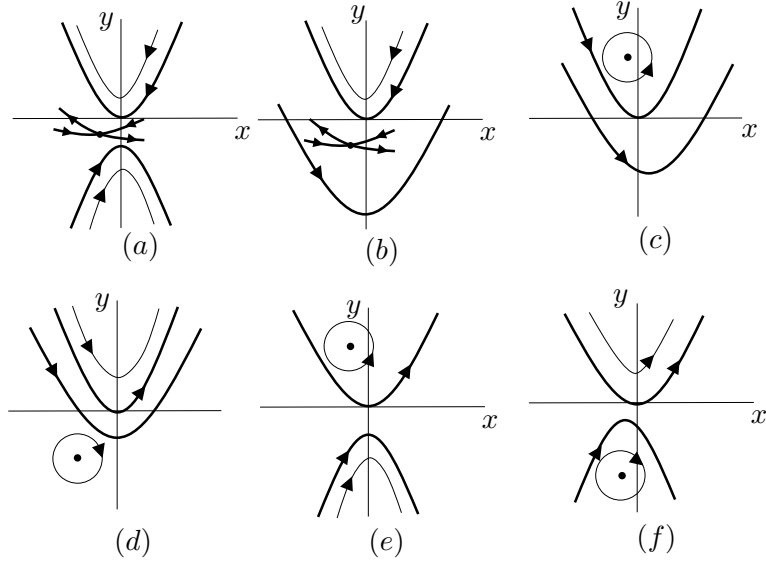


FIGURE 11. Phase portraits of system (7) in the finite region for the case $\delta < 0$. (a) $a > 0, \lambda > 0$. (b) $a < -1, \lambda > 0$; if $-1 < a < 0, \lambda > 0$ then the orientation of the orbits is reversed. (c) $-1 < a < 0, -1 < \lambda < 0$; if $a < -1, \lambda < -1$ then the orientation of the orbits is reversed. (d) $-1 < a < 0, \lambda < -1$; if $a < -1, -1 < \lambda < 0$ then the orientation of the orbits is reversed. (e) $a > 0, -1 < \lambda < 0$. (f) $a > 0, \lambda < -1$.

- (i) If $b > 0, \lambda > 0$ then the phase portrait at the finite singular point of system (7) is presented in Figure 12-(a).
- (ii) If $b > 0, \lambda < 0, \lambda \neq -1$, then the phase portrait at the finite singular point of system (7) is presented in Figure 12-(b).

Proof. From Lemma 26-(v) it follows that (x_3, y_3) is the unique singular point of system (7). Using Lemma 22 we obtain that the eigenvalues of the Jacobian matrix of system (7) evaluated at (x_3, y_3) are $-\lambda b$ and b . If $\lambda > 0$ then (x_3, y_3) is a hyperbolic saddle, and if $\lambda < 0$ then (x_3, y_3) a repelling node. If $c > 0$ then $x_3 > 0$, and if $c < 0$ then $x_3 < 0$.

Moreover for system (7) we have $\dot{x}|_{f_1(x,y)=0} = -(bx+c)\lambda$ and $\dot{x}|_{f_2(x,y)=0} = bx+c$. \square

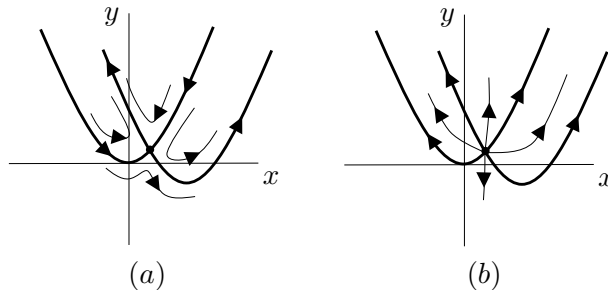


FIGURE 12. Phase portraits of system (7) in the finite region for the case $a = -1, b > 0$. (a) $\lambda > 0$. (b) $\lambda < 0, \lambda \neq -1$.

Lemma 33. Suppose $a = -1, b = 0$ and $c \neq 0$. If $\lambda > -1, \lambda \neq 0$ the phase portrait of system (7) in the finite region is presented in Figure 13. If $\lambda < -1, \lambda \neq 0$ then the orientation of the orbits in Figure 13 is reversed.

Proof. Define $p(x, y) = y\lambda - x^2\lambda + c\lambda + y - x^2$. In this case, system (7) becomes

$$(22) \quad \dot{x} = -p(x, y), \quad \dot{y} = -2xp(x, y).$$

After the rescaling given by $dt = p(x, y)ds$, system (22) is topologically equivalent to the system

$$(23) \quad \dot{x} = -1, \quad \dot{y} = -2x.$$

in the region $p(x, y) \neq 0$. The system (23) has no singular points and its orbits are contained in parabolas of the form $y = x^2 + \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$. The phase portrait in the finite region of system (22) for the case $\lambda > -1$ is presented in figure 13. If $\lambda < -1$ then the orientation of the orbits is reversed.

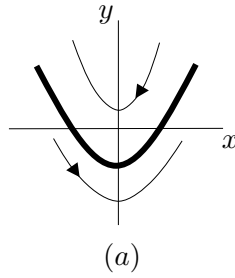


FIGURE 13. (a) Phase portrait of system (7) for the case $a = -1$, $b = 0$, $c \neq 0$, $\lambda > -1$ and $\lambda \neq 0$. If $\lambda < -1$ then the orientation of the orbits is reversed.

□

6.2. Infinite singular points. The expression of the Poincaré compactification of system (7) in charts (U_1, φ_1) and (U_2, φ_2) is

$$(24) \quad \begin{aligned} \dot{u} &= cuv^3\lambda + u^2v^2\lambda + buv^2\lambda - 2cv^2\lambda + auv\lambda - 2uv\lambda - 2bv\lambda - \\ &\quad - 2a\lambda + u^2v^2 + buv^2 + 2auv - uv - bv - 2a, \\ \dot{v} &= v^2(cv^2\lambda + uv\lambda + bv\lambda + a\lambda + uv - 1), \end{aligned}$$

and

$$(25) \quad \begin{aligned} \dot{u} &= - (cv^3\lambda - 2cu^2v^2\lambda + buv^2\lambda + v^2\lambda - 2bu^3v\lambda + -2au^4\lambda + buv^2 + v^2 - bu^3v \\ &\quad + 2au^2v - u^2v - 2au^4 + au^2v\lambda - 2u^2v\lambda + 2au^4\lambda + buv^2 \\ &\quad + v^2 - bu^3v - 3u^2v + 2u^4), \\ \dot{v} &= v(2cuv^2\lambda + 2bu^2v\lambda + 2uv\lambda + 2au^3\lambda - bv^2 + bu^2v - 2auv + 2au^3), \end{aligned}$$

respectively. System (24) has no singular points (u, v) with $v = 0$. The origin of system (25) is linearly null.

In order to study the origin of U_2 , we will perform the blow-up in the u -direction given by $u = p, v = p^2q$, that carries system (25) into

$$(26) \quad \begin{aligned} \dot{p} &= -p^4(cp^2q^3\lambda - 2cp^2q^2\lambda + bpq^2\lambda + q^2\lambda - 2bpq\lambda + aq\lambda - 2q\lambda - 2a\lambda + bpq^2 \\ &\quad + q^2 - bpq + 2aq - q - 2a), \\ \dot{q} &= p^3(q - 1)q(2cp^2q^2\lambda + 2bpq\lambda + 2q\lambda + 2a\lambda + bpq + 2q + 2a). \end{aligned}$$

This blow-up do not change any quadrant. After the rescaling given by $ds = p^3 dt$, system (26) becomes

$$(27) \quad \begin{aligned} \dot{\bar{p}} &= -\bar{p}(c\bar{p}^2\bar{q}^3b\lambda - 2c\bar{p}^2\bar{q}^2\lambda + b\bar{p}\bar{q}^2\lambda + \bar{q}^2\lambda - 2b\bar{p}\bar{q}\lambda + a\bar{q}\lambda - 2\bar{q}\lambda - 2a\lambda + b\bar{p}\bar{q}^2 \\ &\quad + \bar{q}^2 - b\bar{p}\bar{q} + 2a\bar{q} - \bar{q} - 2a), \\ \dot{\bar{q}} &= (\bar{q} - 1)\bar{q}(2c\bar{p}^2\bar{q}^2\lambda + 2b\bar{p}\bar{q}\lambda + 2\bar{q}\lambda + 2a\lambda + b\bar{p}\bar{q} + 2\bar{q} + 2a). \end{aligned}$$

We divide the study of system (27) in three cases, namely:

- $a \neq -1$,
- $a = -1, b \neq 0$,
- $a = -1, b = 0, c \neq 0$,

which are studied in Lemma 34-36, respectively.

Lemma 34. *Consider system (25) with $a \neq -1$ and $\lambda \neq -1$.*

- (i) *If $a > 0$ and $\lambda > 0$ then the local phase portrait of system (25) at the origin is presented in Figure 14-(c).*
- (ii) *If $a < 0$, $a \neq -1$ and $\lambda > 0$ then the local phase portrait of system (25) at the origin is presented in Figure 15-(c).*
- (iii) *If $-1 < a < 0$ and $-1 < \lambda < 0$ then the local phase portrait of system (25) at the origin is presented in Figure 16-(c). If $a < -1, \lambda < -1$ then the orientation of the orbits in Figure 16-(c) is reversed.*
- (iv) *If $-1 < a < 0$ and $\lambda < -1$ then the local phase portrait of system (25) at the origin is presented in Figure 17-(c). If $a < -1, -1 < \lambda < 0$ then the orientation of the orbits in Figure 17-(c) are reversed.*
- (v) *If $a > 0$ and $-1 < \lambda < 0$ then the local phase portrait of system (25) at the origin is presented in Figure 18-(c).*
- (vi) *If $a > 0$ and $\lambda < -1$ then the phase portrait at the finite singular points of system (7) is presented in Figure 19-(c).*

Proof. Since $a \neq -1$, system (27) has three singular points (\bar{p}, \bar{q}) with $\bar{p} = 0$. They are $(0, w_j)$, with $w_0 = 0$, $w_1 = 1$ and $w_2 = -a$. The Jacobian matrices of the vector field defined by system (27) evaluated at $(0, 0)$, $(0, 1)$ and $(0, -a)$ are respectively

$$(28) \quad \begin{pmatrix} 2a(\lambda + 1) & 0 \\ 0 & -2a(\lambda + 1) \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} (a + 1)\lambda & 0 \\ 0 & 2(a + 1)(\lambda + 1) \end{pmatrix}$$

and

$$(29) \quad \begin{pmatrix} a(a + 1) & 0 \\ -a^2(a + 1)b(2\lambda + 1) & 2a(a + 1)(\lambda + 1) \end{pmatrix}.$$

Observe that the straight lines $\bar{q} = w_j, j = 0, 1, 2$ are invariant algebraic curves of system (27). Since for $j = 1, 2$, the straight lines $\bar{q} = w_j$ corresponds to the parabolas $v = w_j u^2$, then the parabolas $v = w_j u^2$ are invariant algebraic curves of system (25), $j = 1, 2$. Analogously, the straight line $\bar{q} = w_0$ corresponds to $v = 0$. Moreover, in system (25) we have $\dot{u}|_{u=0} = -v^2(cv\lambda + \lambda + 1)$.

Case (i) If $a > 0$ and $\lambda > 0$ then $w_2 < w_0 < w_1$. From (28)-(29) it follows that w_0 is a saddle and $w_j, j = 1, 2$ are repelling nodes. We summarize the blow-up in the case $a > 0$ and $\lambda > 0$ in Figure 14.

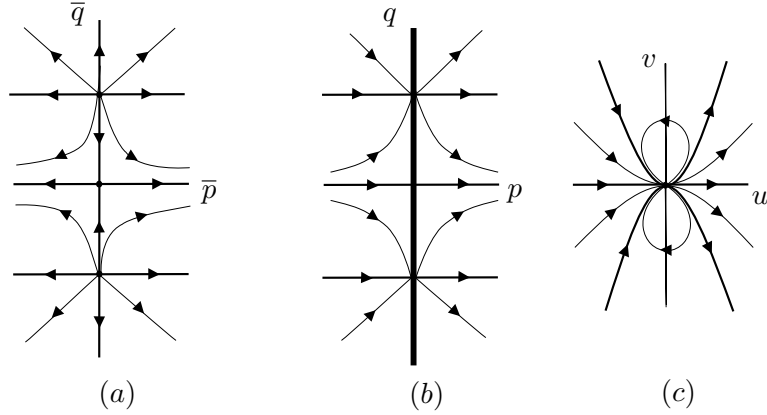


FIGURE 14. Phase portrait of system (25) at $(0,0)$ for the case that $a > 0$, $\lambda > 0$. (a) System (27). (b) System (26). (c) System (25).

Case (ii) If $-1 < a < 0, \lambda > 0$ then $w_0 < w_2 < w_1$. From (28)-(29) it follows that w_1 is a repelling node, w_2 is an attractor node and w_0 is a saddle.

If $a < -1, \lambda > 0$ then $w_0 < w_1 < w_2$. From (28)-(29) it follows that w_1 is a attracting node, w_2 is an repelling node and w_0 is a saddle.

We summarize the blow-up in the cases $-1 < a < 0, \lambda > 0$ or $a < -1, \lambda > 0$ in Figure 15.

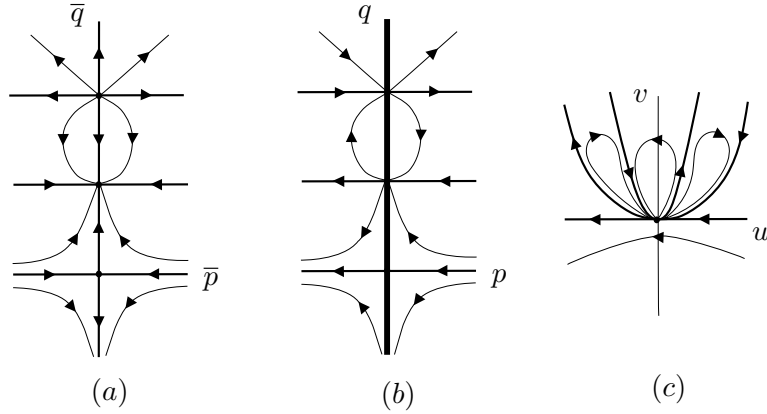


FIGURE 15. Phase portrait of system (25) at $(0,0)$ for the case that $a < 0, a \neq -1, \lambda > 0$. (a) System (27). (b) System (26). (c) System (25).

Case (iii) If $-1 < a < 0$ and $-1 < \lambda < 0$ then $w_0 < w_2 < w_1$. From (28)-(29) it follows that w_j is a saddle, $j = 0, 1$ and w_2 is an attractor node. We summarize the blow-up in the case $-1 < a < 0$ and $-1 < \lambda < 0$ in Figure 16.

If $a < -1, \lambda < -1$ then the orientation of the orbits in Figure 16 are reversed.

Case (iv) If $-1 < a < 0, \lambda < -1$ then $w_0 < w_2 < w_1$. From (28)-(29) it follows that w_j is a saddle, $j = 0, 2$ and w_1 is an attractor node. We summarize the blow-up in the case $-1 < a < 0$ and $\lambda < -1$ in Figure 17.

If $a < -1, -1 < \lambda < 0$ then the orientation of the orbits in Figure 17 are reversed.

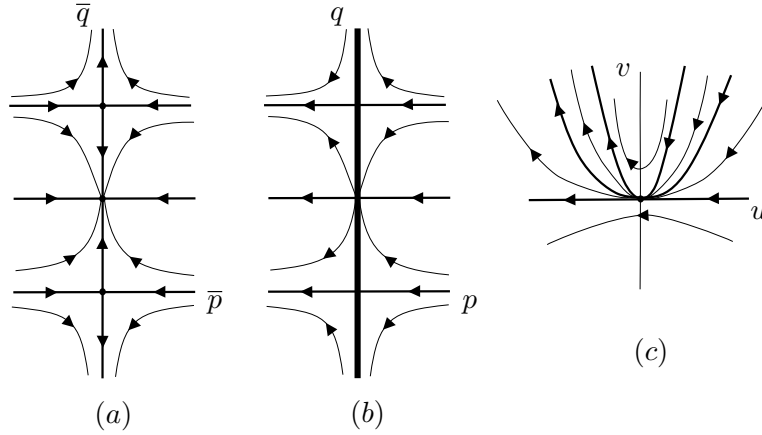


FIGURE 16. Phase portrait of system (25) at $(0,0)$ for the case that $-1 < a < 0$, $-1 < \lambda < 0$. (a) System (27). (b) System (26). (c) System (25). If $a < -1$, $\lambda < -1$ then the orientation of the orbits are reversed.

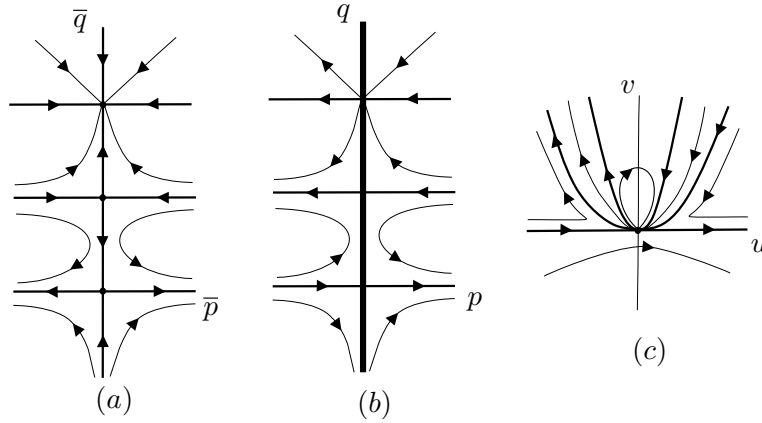


FIGURE 17. Phase portrait of system (25) at $(0,0)$ for the case that $-1 < a < 0$, $\lambda < -1$. (a) System (27). (b) System (26). (c) System (25). If $a < -1$, $-1 < \lambda < 0$ then the orientation of the orbits are reversed.

Case (v) If $a > 0$, $-1 < \lambda < 0$ then $w_2 < w_0 < w_1$. From (28)-(29) it follows that w_j are saddles, $j = 1, 2$ and w_2 is a repelling node. We summarize the blow-up in the case $a > 0$ and $\lambda > 0$ in Figure 18-(c).

Case (vi) If $a > 0$, $\lambda < -1$ then $w_2 < w_0 < w_1$. From (28)-(29) it follows that w_j are saddles, $j = 1, 2$ and w_1 is an attractor node. We summarize the blow-up in the case $a > 0$ and $\lambda < -1$ in Figure 19-(c).

□

Lemma 35. Consider system (25) with $a = -1$, $b \neq 0$.

- i) If $\lambda > 0$, then the local phase portrait of system (25) at the origin is presented in Figure 20-(f).
- ii) If $-1 < \lambda < 0$ then the local phase portrait of system (25) at the origin is presented in Figure 21-(f).
- iii) If $\lambda < -1$ then the local phase portrait of system (25) at the origin is presented in Figure 22-(f).

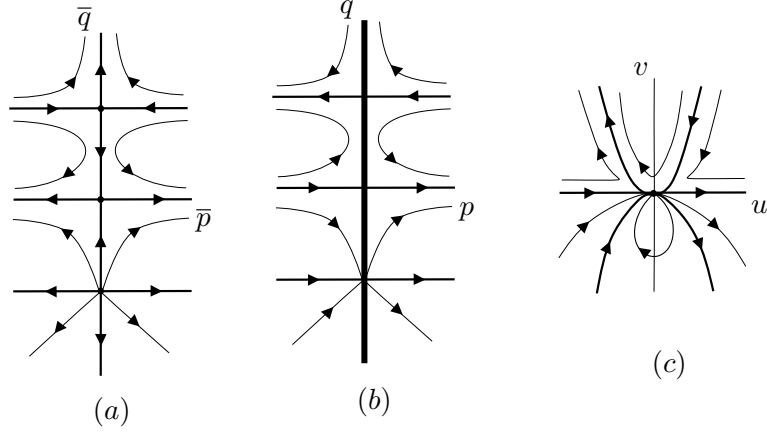


FIGURE 18. Phase portrait of system (25) at $(0, 0)$ for the case that $a > 0$, $-1 < \lambda < 0$. (a) System (27). (b) System (26). (c) System (25).

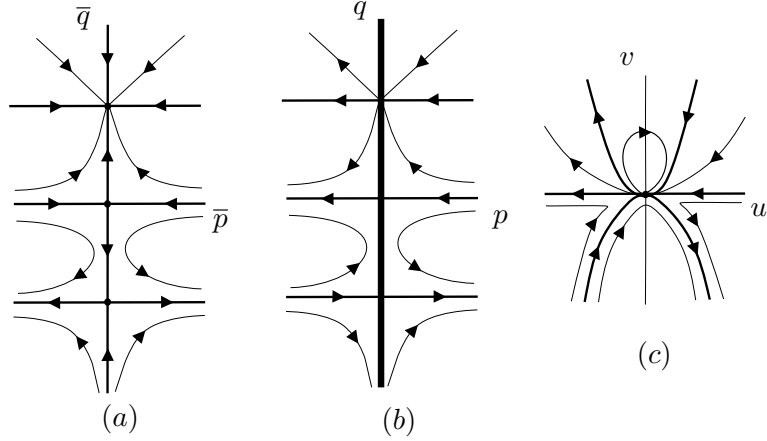


FIGURE 19. Phase portrait of system (25) at $(0, 0)$ for the case that $a > 0$, $\lambda < -1$. (a) System (27). (b) System (26). (c) System (25).

Proof. Since $a = -1$, system (27) has two singular points (\bar{p}, \bar{q}) with $\bar{p} = 0$. They are $(0, 0)$ and $(0, 1)$. The Jacobian matrix of the vector field defined by system (27) evaluated at $(0, 0)$ and $(0, 1)$ is

$$\begin{pmatrix} -2(\lambda + 1) & 0 \\ 0 & 2(\lambda + 1) \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

respectively.

In order to study the point $(0, 1)$ we translate $(0, 1)$ to the origin and we apply the homogeneous blow-up in the \bar{p} -direction given by $\bar{p} = z, \bar{q} = zw$. This Blow up changes the points (\bar{p}, \bar{q}) of the second quadrant by points (z, w) of the third quadrant, and (\bar{p}, \bar{q}) of the third quadrant by points (z, w) of the second quadrant. After these change of coordinates system (27) becomes

$$\begin{aligned} \dot{z} &= -z^2(cw^3z^4\lambda + cw^2z^3\lambda + bw^2z^2\lambda - cwz^2\lambda + w^2z\lambda - cz\lambda - w\lambda - b\lambda \\ &\quad + bw^2z^2 + w^2z + bwz - w), \\ \dot{w} &= wz(3cw^3z^4\lambda + 7w^2z^3\lambda + 3bw^2z^2\lambda + 5cwz^2\lambda + 3w^2z\lambda \\ &\quad + 4bwz\lambda + cz\lambda + w\lambda + b\lambda + 2bw^2z^2 + 3w^2z + 3bwz + w + b). \end{aligned} \tag{30}$$

After the rescaling given by $dt = z ds$, system (30) becomes

$$(31) \quad \begin{aligned} \dot{z} &= -\bar{z}(c\bar{w}^3z^4\lambda + c\bar{w}^2z^3\lambda + b\bar{w}^2z^2\lambda - c\bar{w}\bar{z}^2\lambda + \bar{w}^2\bar{z}\lambda - c\bar{z}\lambda - \bar{w}\lambda - b\lambda \\ &\quad + b\bar{w}^2\bar{z}^2 + \bar{w}^2\bar{z} + b\bar{w}\bar{z} - \bar{w}), \\ \dot{w} &= \bar{w}(3c\bar{w}^3z^4\lambda + 7\bar{w}^2z^3\lambda + 3b\bar{w}^2z^2\lambda + 5c\bar{w}\bar{z}^2\lambda + 3\bar{w}^2\bar{z}\lambda \\ &\quad + 4b\bar{w}\bar{z}\lambda + c\bar{z}\lambda + \bar{w}\lambda + b\lambda + 2b\bar{w}^2\bar{z}^2 + 3\bar{w}^2\bar{z} + 3b\bar{w}\bar{z} + \bar{w} + b). \end{aligned}$$

The singular points (\bar{z}, \bar{w}) of system (31) with $\bar{z} = 0$ are $(0, 0)$ and $(0, -b)$. The Jacobian matrix of system (31) evaluated at $(0, 0)$ and $(0, -b)$ is

$$\begin{pmatrix} b\lambda & 0 \\ 0 & b(\lambda + 1) \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -b & 0 \\ -b(c - b^2)\lambda & -b(\lambda + 1) \end{pmatrix}$$

respectively.

Define $w_0 = 0, w_1 = 1$. Observe that the straight line $\bar{w} = w_0$ is an invariant algebraic curve of system (31). Due to the translation, the straight line $\bar{w} = w_0$ corresponds to the straight line $\bar{q} = w_1$ of system (27). Moreover, in system (27) we have $\dot{\bar{p}}|_{\bar{p}=0} = 0$ and $\dot{\bar{q}}|_{\bar{p}=0} = 2(\bar{q} - 1)^2\bar{q}(\lambda + 1)$.

Observe that the straight lines $\bar{q} = w_j, j = 0, 1$ are invariant algebraic curves of system (27). Then, the curves given by $v = 0$ and $v = u^2$ are invariant algebraic curves of system (25). Moreover, in system (25) we have: $\dot{u}|_{u=0} = -v^2(\lambda + 1 + \lambda cv), \dot{u}|_{v=0} = -2(\lambda + 1)u^4$.

Case i) If $\lambda > 0$, since $b > 0$, we have that $(0, 0)$ is a repelling node and $(0, -b)$ is an attracting node of system (31). We summarize the blow-up in Figure 20.

Case ii) If $-1 < \lambda < 0$, since $b > 0$, we have that $(0, 0)$ is a saddle and $(0, -b)$ is an attractor node of system (31). We summarize the blow-up in Figure 21.

Case iii) If $\lambda < -1$, since $b > 0$, we have that $(0, 0)$ is an attractor and $(0, -b)$ is a saddle of system (31). We summarize the blow-up in Figure 22.

□

Lemma 36. Consider system (25) with $a = -1, b = 0$ and $c \neq 0$,

- (i) If $c\lambda > 0$ with $\lambda > -1$ or $c\lambda < 0$ with $\lambda < -1$, then the local phase portrait of system (25) at the origin is present in Figure 23 – (d).
- (ii) If $c\lambda < 0$ with $\lambda > -1$ or $c\lambda > 0$ with $\lambda < -1$, then the local phase portrait of system (25) at the origin is present in Figure 23 – (e).

Proof. In this case system (25) becomes

$$(32) \quad \dot{u} = -(v - 2u^2)\bar{k}(u, v), \quad \dot{v} = 2uv\bar{k}(u, v),$$

where $\bar{k}(u, v) = (1 + \lambda)(v - u^2) + c\lambda v^2$.

After the rescaling given by $dw = \bar{k}(u, v) ds$ system (32) becomes

$$(33) \quad \bar{u}' = -\bar{v} + 2\bar{u}^2, \quad \bar{v}' = 2\bar{u}\bar{v}.$$

The origin of system (33) is a nilpotent singular point. In order to study it, we will perform a quasi-homogeneous blow-up in the \bar{u} -direction given by $\bar{u} = p, \bar{v} = p^2q$. This carries system (33) into

$$(34) \quad \dot{p} = -p^2(q - 2), \quad \dot{q} = 2p(q - 1)q.$$

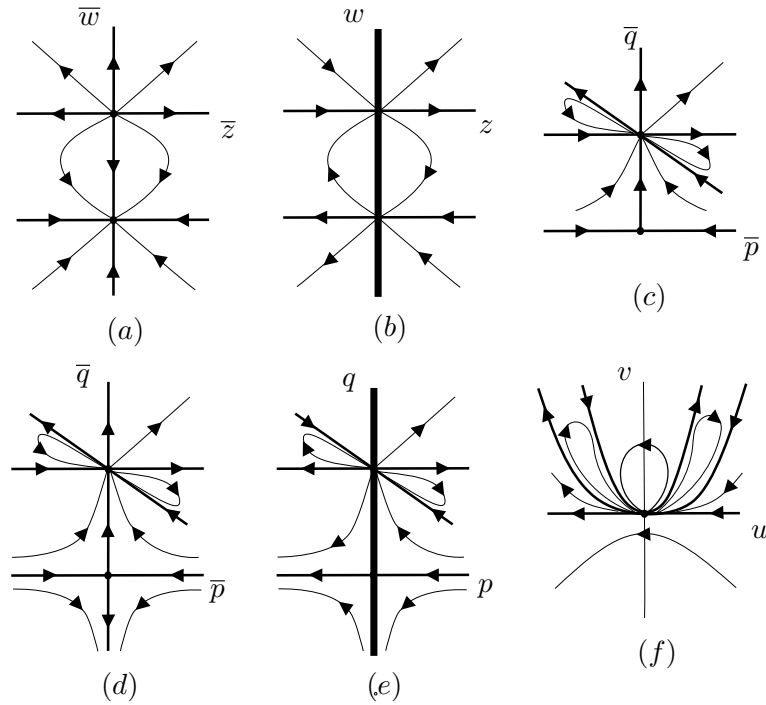


FIGURE 20. Phase portrait of system (25) at the origin in the case $a = -1$, $\lambda > 0$. (a) System (31). (b) System (30). (c) Local phase portrait of system (27) at the point $(0, 1)$. (d) System (27). (e) System (26). System (25).

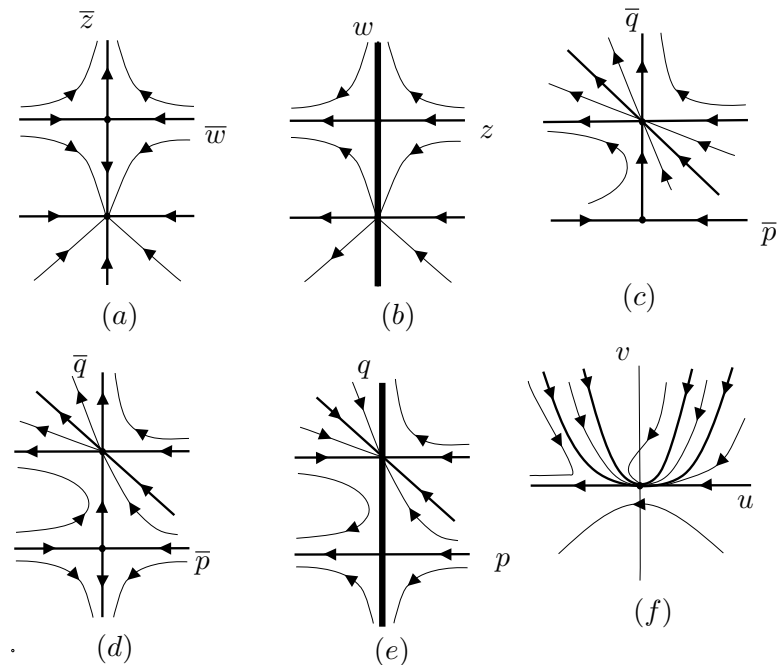


FIGURE 21. Phase portrait of system (25) at the origin in the case $a = -1$, $-1 < \lambda < 0$. (a) System (31). (b) System (30). (c) Local phase portrait of system (27) at the point $(0, 1)$. (d) System (27). (e) System (26). System (25).

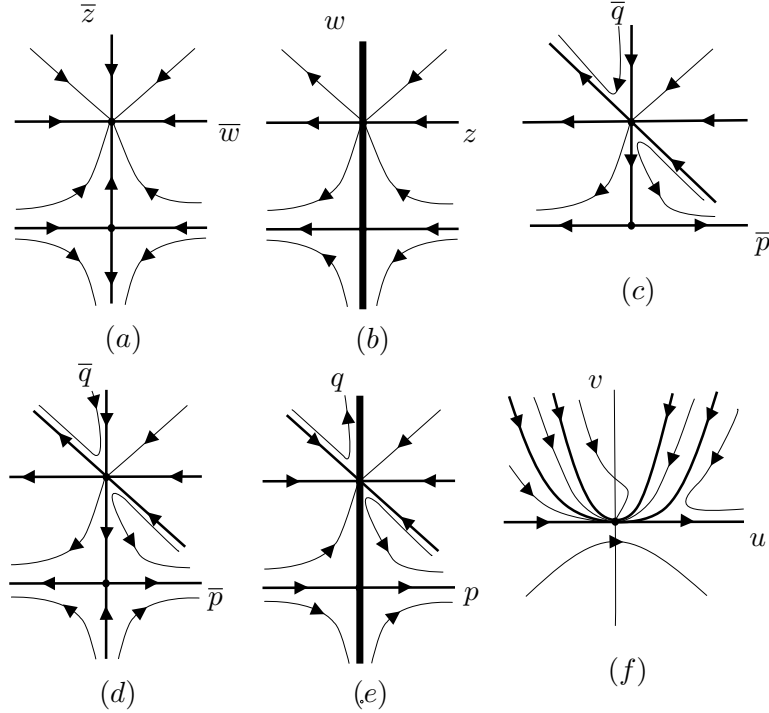


FIGURE 22. Phase portrait of system (25) at the origin in the case $a = -1$, $\lambda < -1$. (a) System (31). (b) System (30). (c) Local phase portrait of system (27) at the point $(0, 1)$. (d) System (27). (e) System (26). System (25).

After the rescaling given by $dt = p ds$ system (34) becomes

$$(35) \quad \dot{\bar{p}} = -\bar{p}(\bar{q} - 2), \quad \dot{\bar{q}} = 2(\bar{q} - 1)\bar{q}.$$

System (35) has $(0, 0)$ and $(0, 1)$ as singular points with $\bar{p} = 0$. The Jacobian matrix of system (35) evaluated at $(0, 0)$ and $(0, 1)$ is

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},$$

respectively. Then $(0, 0)$ is a hyperbolic saddle and $(0, 1)$ a hyperbolic repelling node. We summarize the blow-up in Figure 23.

To determine the phase portrait of system (32) at the origin, observe that $(0, 0)$ is contained in the line of singular points $\bar{k}(u, v) = 0$. After a translation, the equations of $\bar{k}(u, v) = 0$ becomes $\bar{k}'(u', v') = -(1 + y)u'^2 + c\lambda v'^2 - (\lambda + 1)^2/4c\lambda$. Therefore, we have the following conditions on the coefficients c and λ :

- (i) If $c\lambda < 0$ with $\lambda > -1$ or $c\lambda > 0$ with $\lambda < -1$, then $\bar{k}(u, v) = 0$ is an ellipse.
- (ii) If $c\lambda > 0$ with $\lambda > -1$ or $c\lambda < 0$ with $\lambda < -1$, then $\bar{k}(u, v) = 0$ is an hyperbole.

□

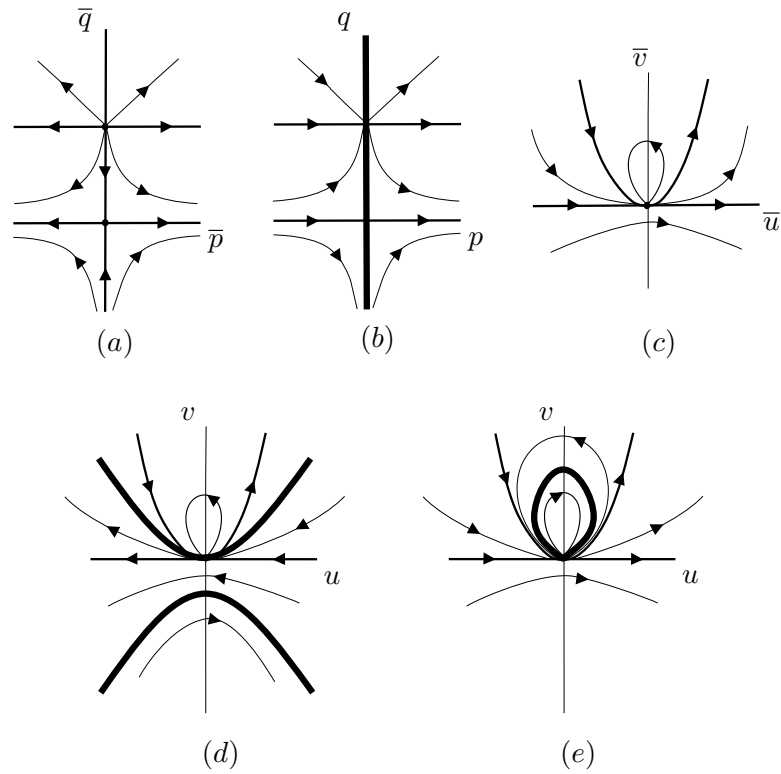


FIGURE 23. (a) Phase portrait of system (35). (b) Phase portrait of system (34). (c) Phase portrait of system (33). (d) Phase portrait of system (32) for the case $\bar{k} = 0$ is a hyperbola. (e) Phase portrait of system (32) for the case $\bar{k} = 0$ is an ellipse.

6.3. Proof of Theorem 3. Combining the information of Lemmas 29-35, we obtain the local phase portrait of all the finite and infinite singularities in the Poincaré disc of systems (7) with $\lambda \neq 0, \lambda \neq -1$, as is shown in Figure 24-(a)-(u).

In order to obtain Figure 24-(v), we use the following remark. The expression of function p of the proof of Lemma 33 in the chart (U_2, φ_2) , is the function \bar{k} presented in the proof of Lemma 36.

The correspondence between the parameters of system (7) and the local phase portrait in the Poincaré disc shown in Figure 24 is given in Table 4.

Using the Poincaré–Bendixson Theorem, the invariant algebraic curves $f_1 = 0, f_2 = 0$ and its expressions in the chart (U_2, φ_2) , we obtain that each local phase portrait in the Poincaré disc given in Figure 24-(a)-(k), determines an unique global phase portrait in the Poincaré disc of Figure 2-(a)-(k), respectively. In the phase portraits presented in the Figure 24-(c)-(f), we determine the α and ω -limits of the separatrices of the finite saddle points, using arguments as presented in the proof of Lemma 6.1 of [4].

The global phase portrait in the Poincaré disc determined by Figure 24-(l), 24-(m) and 24-(r) is topologically equivalent to the global phase portrait in the Poincaré disc presented in the Figure 2-(k), 2-(g) and 2-(n), respectively.

In the same way, each local phase portrait in the Poincaré disc given in Figure 24-(o), 24-(p), 24-(s) and 24-(t) determines an unique global phase portrait in the Poincaré disc of Figure 2-(l), 2-(m), 2-(o) and 2-(p), respectively.

The global phase portrait in the Poincaré disc determined by Figure 24-(u) is topologically equivalent to the global phase portrait in the Poincaré disc presented in the Figure 2-(p).

The global phase portrait in the Poincaré disc presented in Figure 24-(v) is the global phase portrait in the Poincaré disc presented in Figure 2-(q).

Now suppose $\lambda = 0$, the second phase portrait presented in Lemma 25 is topologically equivalent to the global phase portrait in the Poincaré disc presented in Figure 2-(q). From Lemma 25 we obtain global phase portrait in the Poincaré disc presented in Figure 2-(r)-(s).

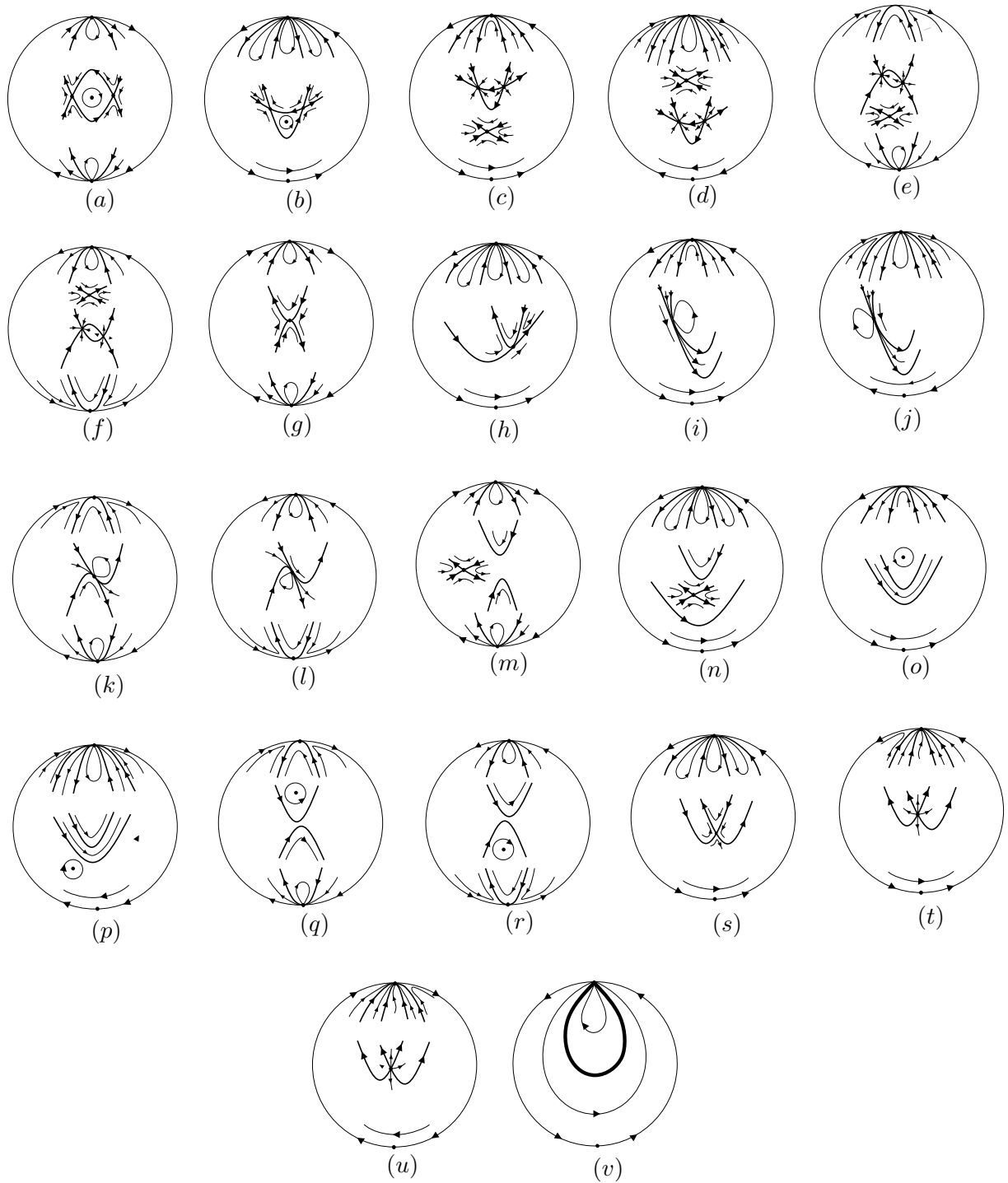


FIGURE 24. Local phase portrait in the Poincaré disc of the normal form (7).

Global Phase Portrait of Figure 24	Parameters
(a)	$\delta > 0$ $a > 0, \lambda > 0$
(b)	$\delta > 0$ $a < 0, \lambda > 0$
(c)	$\delta > 0$ $-1 < a < 0, -1 < \lambda < 0$ $a < -1, \lambda < -1$ (reverse orbits)
(d)	$\delta > 0$ $-1 < a < 0, \lambda < -1$ $a < -1$ and $-1 < \lambda < 0$ (reverse orbits)
(e)	$\delta > 0$ $a > 0, -1 < \lambda < 0$
(f)	$\delta > 0$ $a > 0, \lambda < -1$
(g)	$\delta = 0$ $a > 0, \lambda > 0$
(h)	$\delta = 0$ $a < 0, \lambda > 0$
(i)	$\delta = 0$ $-1 < a < 0, -1 < \lambda < 0$ $a < -1, \lambda < -1$ (reverse orbits)
(j)	$\delta = 0$ $-1 < a < 0, \lambda < -1$ $a < -1$ and $-1 < \lambda < 0$ (reverse orbits)
(k)	$\delta = 0$ $a > 0, -1 < \lambda < 0$
(l)	$\delta = 0$ $a > 0, \lambda < -1$
(m)	$\delta < 0$ $a > 0, \lambda > 0$
(n)	$\delta < 0$ $a < 0, \lambda > 0$ $-1 < a < 0, \lambda > 0$ (reverse orbits)
(o)	$\delta < 0$ $-1 < a < 0, -1 < \lambda < 0$ $a < -1, \lambda < -1$ (reverse orbits)
(p)	$\delta < 0$ $-1 < a < 0, \lambda < -1$ $a < -1, -1 < \lambda < 0$ (reverse orbits)
(q)	$\delta < 0$ $a > 0, -1 < \lambda < 0$
(r)	$\delta < 0$ $a > 0, \lambda < -1$
(s)	$a = -1, b \neq 0$ $\lambda > 0$
(t)	$a = -1, b \neq 0$ $-1 < \lambda < 0$
(u)	$a = -1, b \neq 0$ $\lambda < -1$
(v)	$\lambda \neq 0, a = -1, b = 0, c \neq 0$

TABLE 4. The correspondence between the phase portraits presented in Figure 24 and the normal forms of Proposition 3. Here, $\delta = b^2 + 4(1 + a)c$.

APPENDIX A. PROOF OF PROPOSITION 1

The proofs presented in this appendix follow from polynomial identities. Here we use the software WxMaxima to compute the coefficients of the polynomials.

Proof of Proposition 1. Consider a planar polynomial differential system

$$\dot{x}(x, y) = P(x, y), \quad \dot{y}(x, y) = Q(x, y)$$

with degree ≤ 3 , and $f_1 = 0$ is an invariant algebraic curve. Since $Pf_{1x} + Qf_{1y} = 0$ on the points of the form $y = x^2$, it follows that all planar polynomial differential system with degree ≤ 3 with $f_1 = 0$ as invariant algebraic curve is of the form

$$(36) \quad \begin{aligned} \dot{x}(x, y) &= \frac{1}{2}(2c_1xy^2 + 2g_1y^2 - 2g_1x^2y + c_2x^2y + 2f_1xy + 2i_1y + g_2x^3 - 2f_1x^3 + \\ &\quad b_2x^3 - 2i_1x^2 + f_2x^2 + a_2x^2 + i_2x + e_2x + 2j_1), \\ \dot{y}(x, y) &= 2c_1y^3 + c_2xy^2 + g_2y^2 + b_2x^2y + f_2xy + i_2y + a_2x^3 + e_2x^2 + 2j_1x, \end{aligned}$$

where $c_1, f_1, g_1, i_1, j_1, a_2, b_2, c_2, e_2, f_2, g_2, i_2$ are real parameters. The cofactor is

$$k_1(x, y) = 2c_1y^2 - 2g_1xy + c_2xy + g_2y + g_2x^2 - 2f_1x^2 + b_2x^2 - 2i_1x + f_2x + i_2.$$

As in the proof of Proposition 1 of [10], let X be the vector field defined by system (36). There exists $\lambda \in \mathbb{R}$ such that $X(f_2) = \lambda k_1 f_2$ if, and only if, $c_1, f_1, g_1, i_1, j_1, a_2, b_2, c_2, e_2, f_2, g_2, i_2$ and λ satisfy the following nonlinear system with twelve equations

$$(37) \quad \begin{aligned} (g_2 - 2f_1 + b_2)(\lambda - 1) &= 0 \\ (2g_1 - c_2)(\lambda - 1) &= 0 \\ c_1(\lambda - 1) &= 0 \\ -4ai_1\lambda + 2bg_2\lambda + 2af_2\lambda - 4bf_1\lambda + 2bb_2\lambda + 4ai_1 - bg_2 - 2af_2 + \\ &\quad 2bf_1 - bb_2 - 2aa_2 - 2a_2 = 0 \\ 2ag_2\lambda + 2g_2\lambda - 4bg_1\lambda - 4f_1\lambda + 2bc_2\lambda + 2b_2\lambda + \\ &\quad 2bg_1 - 4af_1 - bc_2 - 2b_2 = 0 \\ -2g_1\lambda + c_2\lambda + 2bc_1\lambda - 2ag_1 - c_2 - bc_1 &= 0 \\ 2ai_2\lambda - 4bi_1\lambda + 2cg_2\lambda + 2bf_2\lambda - 4cf_1\lambda + 2b_2c\lambda - 2ai_2 + \\ &\quad 2bi_1 - bf_2 - 2ae_2 - 2e_2 - a_2b = 0 \\ 2i_1\lambda - bg_2\lambda + 2cg_1\lambda - f_2\lambda - cc_2\lambda + 2ai_1 + f_2 + bf_1 &= 0 \\ g_2\lambda + 2cc_1\lambda - g_2 - bg_1 &= 0 \\ 2bi_2\lambda - 4ci_1\lambda + 2cf_2\lambda - 4aj_1 - 4j_1 - bi_2 - be_2 &= 0 \\ i_2\lambda + cg_2\lambda - i_2 - bi_1 &= 0 \\ ci_2\lambda - bj_1 &= 0. \end{aligned}$$

From the first and second equations we know that $\lambda = 1$ or, if $\lambda \neq 1$, then $C = E = 0$. We shall study both cases separately.

Case 1. Suppose $a = -1, b = 0, c \neq 0$.

Case 1.1 Suppose $a = -1, b = 0, c \neq 0, \lambda = 1$. Then $g_2 = 0, i_2 = 0, f_2 = 2i_1, c_1 = 0, g_1 = c_2/2, f_1 = b_2/2$ and X is topologically equivalent to the vector field given by system (6).

Case 1.2 Suppose $a = -1, b = 0, c \neq 0, \lambda \neq 1$. Then $c_1 = 0, g_2 = 0, i_2 = 0, f_1 = b_2/2, g_1 = c_2/2, i_1 = 0, f_2 = i_1/2$ and X is topologically equivalent to the vector field given by system (6).

Case 2. Suppose $a = -1, b \neq 0$.

Case 2.1 Suppose $a = -1, b \neq 0, \lambda = 1$. Then $c_1 = 0, g_1 = 0, c_2 = 0, f_1 = b_2, g_2 = 2f_1 - b_2, f_2 = (2b_2c + a_2b)/b, j_1 = (c(be_2 - 2a_2c))/b^2, i_1 = f_2/2 - a_2/2, i_2 = e_2 - 2a_2c/b$ and X is topologically equivalent to the vector field given by system (5).

Case 2.1 Suppose $a = -1, b \neq 0, \lambda \neq 1$. Then $c_1 = 0, b_2 = 0, c_2 = 0, g_1 = c_2/2, g_2 = 2f_1 - b_2, f_1 = b_2/2, f_2 = 2i_1, j_1 = ci_2\lambda/b, i_1 = (i_2\lambda - i_2)/b, f_2 = 2i_1, e_2 = 2i_2\lambda - i_2, i_2 = -(a_2b)/(2\lambda - 2)$ and X is topologically equivalent to the vector field given by system (7).

Case 3. Suppose $a \neq -1, a \neq 0$.

Case 3.1 Suppose $a \neq -1, a \neq 0, \lambda = 1$.

Case 3.1.1 Suppose $a \neq -1, a \neq 0, \lambda = 1, b = 0$.

Case 3.1.1.1 Suppose $a \neq -1, a \neq 0, \lambda = 1, b = 0, c = 0$. Then $a_2 = 0, g_1 = 0, g_2 = 2f_1, e_2 = (b_2c)/(a+1), i_1 = (cc_2)/(2a+2), e_2 = (b_2c)/(a+1), j_1 = 0$ and X is topologically equivalent to the vector field given by system (6).

Case 3.1.1.2 Suppose $a \neq -1, a \neq 0, \lambda = 1, b = 0, c \neq 0$. Then $a_2 = 0, g_1 = 0, g_2 = 2f_1, e_2 = (b_2c)/(a+1), i_1 = (cc_2)/(2a+2), i_2 = 0, f_1 = 0, i_2 = 0, g_2 = 2f_1, j_1 = (c(af_2 + f_2 - cc_2))/(2(a+1)^2)$ and X is topologically equivalent to the vector field given by system (5).

Case 3.1.2 Suppose $a \neq -1, a \neq 0, \lambda = 1, b \neq 0$.

Case 3.1.2.1 Suppose $a \neq -1, a \neq 0, \lambda = 1, b \neq 0, b^2 = 4(a+1)c$. Then $i_1 = cg_2/b, j_1 = ci_2/b, g_1 = 2cc_1/b, c = b^2/(4(a+1)), a_2 = (b(g_2 - 2f_1 + b_2))/(2(a+1)), f_2 = (b^2g_2 + 4a^2e_2 + 8ae_2 + 4e_2)/(2(a+1)b), g_2 = (4a^2f_1 + 8af_1 + 4f_1 - abc_2 - bc_2 + b^2c_1)/(2(a+1)^2)$ and X is topologically equivalent to the vector field given by system (6).

Case 3.1.2.2 Suppose $a \neq -1, a \neq 0, \lambda = 1, b \neq 0, b^2 \neq 4(a+1)c$. Then $i_1 = cg_2/b, j_1 = ci_2/b, c_1 = 0, g_1 = 0, g_2 = (2bf_1 - bb_2 + 2aa_2 + 2a_2)/b, i_1 = cg_2/b, f_2 = (4cf_1 + 2ae_2 + 2e_2 - 2b_2c + a_2b)/b, i_2 = ((be_2 - 2a_2c)/b), f_1 = ((b^2cc_2 + 2abb_2c + 2bb_2c - 4a^2a_2c - 8aa_2c - 4a_2c - b^3b_2 + 2aa_2b^2 + 2a_2b^2)/(b(4ac + 4c - b^2))), c_2 = ((2(a+1)(bb_2 - 2aa_2 - 2a_2))/b^2)$, and X is topologically equivalent to the vector field given by system (5).

Case 3.2 Suppose $a \neq -1, a \neq 0, \lambda \neq 1$.

Case 3.2.1 Suppose $a \neq -1, a \neq 0, \lambda \neq 1, b = 0$.

Then $g_1 = c_2/2, c_2 = 0, b_2 = 0, f_1 = 0, g_2 = 0, g_1 = 0, f_2 = (2i_1\lambda + 2ai_1)/(\lambda - 1), i_1 = a_2/(2a), i_2 = 0, e_2 = 0, j_1 = (a_2c\lambda)/(2a(\lambda - 1))$, and X is topologically equivalent to the vector field given by system (6).

Case 3.2.2 Suppose $a \neq -1, a \neq 0, \lambda \neq 1, b \neq 0$. Then $g_1 = c_2/2, c_2 = 0, b_2 = 0, f_1 = 0, g_2 = 0, g_1 = 0, f_2 = (2i_1\lambda + 2ai_1)/(\lambda - 1), i_1 = a_2/(2a), j_1 = ci_2\lambda/b, a_2 = (2ai_2(\lambda - 1))/b, i_1 = a_2/(2a), e_2 = 2i_2\lambda - i_2$ and X is topologically equivalent to the vector field given by system (7).

□

REFERENCES

- [1] F. DUMORTIER, J. LLIBRE AND J.C. ARTÉS, *Qualitative theory of planar differential systems*, Universitext, Springer–Verlag, 2006.
- [2] R. OLIVEIRA, A. C. REZENDE, D. SCHLOMIUK, N. VULPE, Geometric and algebraic classification of quadratic differential systems with invariant hyperbolas. *Electron. J. Differential Equations* 2017, Paper No. 295, 122 pp.
- [3] J. LLIBRE AND J. YU, *Phase portraits of quadratic systems with an ellipse and a straight line as invariant algebraic curves*, *Electronic J. of Differential Equations* **2015**, N^o 314, 14 pp.
- [4] J. LLIBRE AND M. F. DA SILVA, *Phase portraits of integrable quadratic systems with an invariant parabola and an invariant straight line*, *C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I* **2019**, N^o 357, 24 pp.
- [5] J. LLIBRE, M. MESSIAS AND A. REINOL, *Normal forms and global phase portraits of quadratic and cubic integrable vector fields having two nonconcentric circles as invariant algebraic curves*, *Dynamical Systems*, **2017**, N^o 3, 17 pp.
- [6] C. CHRISTOPHER, *Quadratic systems having a parabola as an invariant curve*, *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh*, **1989**, N^o 112A, 22 pp.
- [7] E. SÁEZ AND I. SZÁNTÓ, *A cubic system with a limit cycle bounded by two invariant parabolas*, *Differential Equations and Dynamical Systems*, **2009**, N^o 17, 6 pp.
- [8] D. SCHLOMIUK, N. VULPE, Global topological classification of Lotka-Volterra quadratic differential systems. *Electron. J. Differential Equations* **2012**, N^o 64, 69 pp.
- [9] D. A. NEUMANN, *Classification of continuous flows on 2-manifold*, *Preceedings of the American Mathematical Society*, **1975**, N^o 48, 9 pp.
- [10] Cordeiro, A.P, *Retratos de fase de uma família de sistemas quadráticos planares integráveis com duas parábolas invariantes*. Dissertação de mestrado, CCNE, UFSM, **2021**.

² DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA, UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA MARIA, 97110-820, SANTA MARIA, RS, BRAZIL

Email address: arthur.tauchen@acad.ufsm.br

² DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA, UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA MARIA, 97110-820, SANTA MARIA, RS, BRAZIL

Email address: mauriciofronzadasilva@gmail.com

6 Considerações Finais

Neste trabalho apresentamos alguns resultados clássicos da teoria de Equações Diferenciais Ordinárias e algumas das técnicas que foram utilizadas para realizar o estudo de uma subfamília de sistemas diferenciais que, até onde sabemos, ainda não havia sido estudada.

O estudo dos pontos singulares nilpotentes é feito através da técnica de Blow up, que consiste em “explodir” tal ponto em pontos singulares mais simples que podem ser classificados por algum teorema de fácil aplicação.

A compactificação de Poincaré é utilizada para entender o comportamento global de um campo de vetores, isto é, quando as soluções vão para o infinito. Tanto na compactificação como no Blow up, foi imprescindível a utilização de softwares como Maxima.

As técnicas aqui empregadas podem ser utilizadas para o estudo de outras subfamílias cujo retrato de fase e formas normais ainda não foram descritas, uma vez que este estudo é bastante amplo e ainda há muito a ser investigado.

Referências

- ALVAREZ, M. J.; FERRAGUT, A.; JARQUE, X. **A survey on the Blow up technique**. Barcelona: International Journal of Bifurcation and Chaos, Vol. 21, No. 11, 2011.
- ANDRONOV, A. et al. **Qualitative theory of second-order dynamic systems**. New York: John Wiley and Sons, 1973.
- DOERING, C. I.; LOPES, A. O. **Equações Diferenciais Ordinárias**. Sixth edition. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 2016.
- DUMORTIER, F.; LLIBRE, J.; ARTÉS, J. C. **Qualitative Theory of Planar Differential Systems**. New York: Springer-Verlag, 2006.
- PERKO, L. **Differential Equations and Dynamical Systems**. Third edition. [S.l.]: Springer-Verlag, 2001.
- SOTOMAYOR, J. **Lições de equações diferenciais ordinárias**. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1979.