UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA MARIA
CENTRO DE CIÊNCIAS NATURAIS E EXATAS
DEPARTAMENTO DE FÍSICA

INTRODUÇÃO À TEORIA DA RELATIVIDADE GERAL

MONOGRAFIA DE GRADUAÇÃO EM FÍSICA

Pablo Fernando Carlesso

Santa Maria
2010

INTRODUÇÃO À TEORIA DA RELATIVIDADE GERAL

por

Pablo Fernando Carlesso

Monografia apresentada ao curso de graduação em Física Bacharelado da
Universidade Federal de Santa Maria (UFSM, RS),
como requisito parcial para a obtenção do grau de
Bacharel em Física

Orientadora: Profª. Maria Emília Xavier Guimarães (IF-UFF)

Santa Maria, RS, Brasil

2010

Universidade Federal de Santa Maria
Centro de Ciências Naturais e Exatas
Departamento de Física

A Comissão Examinadora, abaixo assinada, aprova a Monografia:

INTRODUÇÃO À TEORIA DA RELATIVIDADE GERAL

elaborada por
Pablo Fernando Carlesso

como requisito parcial para a obtenção do grau de Bacharel em Física

COMISSÃO EXAMINADORA:

Aguinaldo Médice Severino, Dr.
(Presidente/Coorientador)

Celso Arami Marques da Silva, Dr. (UFSM)

Lúcio Strazzabosco Dornelles, Dr. (UFSM)

Santa Maria, 08 de Janeiro de 2010

AGRADECIMENTOS

Agradeço aos professores do Curso de Física da UFSM que, de alguma forma, contribuiram para minha formação. Agradeço à minha orientadora, Maria Emília Xavier Guimarães, pela sua disponibilidade em me ajudar. Finalmente agradeço aos meus pais, Osvaldir José Carlesso e Eliane Jomara Carlesso pelo apoio.

RESUMO

Monografia de Graduação
Departamento de Física
Universidade Federal de Santa Maria

INTRODUÇÃO À TEORIA DA RELATIVIDADE GERAL

AUTOR: Pablo Fernando Carlesso
ORIENTADORA: Maria Emília Xavier Guimarães
Data e local da defesa: Santa Maria, 08 de Janeiro de 2010

Esta monografia aborda a construção da Teoria Geral da Relatividade. Para isto, é feita uma revisão de cálculo tensorial com a apresentação dos principais conceitos de Geometria Diferencial envolvidos, como geodésicas, tensor de curvatura, tensor métrico e conexão métrica. Também é feita uma revisão sobre a Teoria da Relatividade Restrita, com a apresentação das transformações de Lorentz e dos quadrivetores no espaço-tempo de Minkowski. Então, através do princípio da equivalência é apresentada uma nova interpretação para a gravidade e se chegam às equações de campo de Einstein, que constituirão em uma nova teoria para a gravitação. A partir dessas equações, damos um exemplo de solução bem conhecida na literatura: a solução de Schwarzschild.

Palavras-chave: Geometria Diferencial; Relatividade Restrita; Gravitação; Métrica de Schwarzschild.

ABSTRACT

Graduation thesis
Departamento de Física
Universidade Federal de Santa Maria

INTRODUCTION TO THE GENERAL THEORY OF RELATIVITY

AUTHOR: Pablo Fernando Carlesso
ORIENTATOR: Maria Emília Xavier Guimarães
Place and date: Santa Maria, January 08, 2010.

This manuscript deals with the construction of the General Relativity Theory. To achieve this goal, we first review the basic mathematical tools, namely: Differential Geometry, Geodesics, Curvature Tensor, Metric Tensor, and Affine Connection. In the same sense, we review the basic concepts of the Special Relativity Theory and present the Minkowski spacetime as a Riemann Manifold. Thus, through the Equivalence Principle, we introduce a new interpretation of the gravitational phenomena. In this manner, we find the Einstein's Field Equations and solve them for a particular case: a spherical and static distribution of matter which mimics a star. That is, we find the Schwarzschild Solution. Then we conclude that this new approach of the gravitational phenomena is more complete and satisfactory than the Newtonian Gravitation Theory for a strong gravitational field.

Keywords: Differential Geometry; Special Theory of Relativity; Gravitation; Schwarzschild Metric.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO 07

2 GEOMETRIA DIFERENCIAL 08

2.1 Tensores 08

2.2 Derivação covariante 08

2.3 Transporte paralelo 11

2.4 Geodésicas 13

2.5 Tensor de curvatura 14

2.6 Geometria riemanniana 15

2.6.1 A conexão em espaços riemannianos 16

3 RELATIVEDADE RESTRITA 19

3.1 Espaço-tempo de Minkowski 20

3.1.1 Tempo próprio e os quadrivetores 21

4 TEORIA DA RELATIVIDADE GERAL 24

4.1 Princípio da Equivalência 24

4.2 Equações de campo de Einstein 26

4.2.1 Aproximação para campos fracos 27

4.2.2 Tensor energia-momento 29

5 SOLUÇÃO DE SCHWRZSCHILD 33

6 CONCLUSÃO 39

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS 40

1 INTRODUÇÃO

Newton desenvolveu sua mecânica com base nas constatações experimentais conhecidas em sua época e que foram fornecidas principalmente por Galileu e Kepler. Desta forma, ele chegou à sua mecânica que unificou as leis de movimento dos corpos na Terra e no Sistema Solar. Estas leis funcionaram muito bem, mas então surgiu um problema ao tentar relaciona-las com o Eletromagnetismo de Maxwell. As leis de Newton são construídas em função das transformações de Galileu – que relacionam todos os referenciais inerciais. Já o Eletromagnetismo é construído em função das transformações de Lorentz que têm por princípio o fato de a velocidade da luz ser uma constante universal. Este problema foi resolvido por Einstein, através da Teoria da Relatividade Restrita, quando ele considerou que os conceitos de espaço e tempo utilizados por Newton não deveriam ter caráter absoluto.

Foi então que surgiu outro problema – que será o problema abordado nesta monografia: a Teoria da Gravitação Universal de Newton não especifica um limite de velocidade para as interações gravitacionais ocorrerem, tratando o espaço e o tempo como independentes e absolutos; mas não podemos simplesmente definir o limite da velocidade da luz e passar a aplicar as transformações de Lorentz para os campos gravitacionais, como ocorre no Eletromagnetismo. Isso porque a própria Relatividade Restrita deixa de fazer sentido quando se leva em consideração a existência de campos gravitacionais. As razões para isto serão expostas no decorrer deste texto.

Nosso universo, obviamente, possui campos gravitacionais, assim, buscamos uma teoria que generalize a *relatividade* de modo que ela não seja mais *restrita* para universos onde não existem interações gravitacionais.

Como veremos, será útil tratar as três dimensões espaciais mais a dimensão temporal como coordenadas de um *espaço-tempo quadridimensional*, neste sentido a utilização de Álgebra Tensorial e conceitos de Geometria Diferencial, além de simplificar os cálculos, evidenciará as características do espaço-tempo necessárias para chegar à Teoria da Relatividade Geral. Em posse desta teoria, poderemos então descrever satisfatoriamente a gravidade.

2 GEOMETRIA DIFERENCIAL

2.1 Tensores

Tensores podem ser basicamente definidos como quantidades matemáticas que obedecem certas regras quando submetidos a uma transformação de coordenadas. Assim, dados dois conjuntos distintos de sistemas coordenados em um espaço de *n* dimensões :

$$x^a = x^a(x^1, x^2, \dots, x^n) \tag{2.1}$$

e

$$x'^a = x'^a(x'^1, x'^2, \dots, x'^n) \tag{2.2}$$

Podemos definir dois tipos de tensores:

● *Tensores Covariantes*:

$$X'_a = \frac{\partial x^b}{\partial x'^a} X_b \tag{2.3}$$

● *Tensores Contravariantes*:

$$X'^a = \frac{\partial x'^a}{\partial x^b} X^b \tag{2.4}$$

Aqui, como em todo o restante desta monografia é utilizada a *notação de Einstein*, na qual consideram-se termos que possuem índices repetidos como sendo um somatório sobre as dimensões. Obviamente, deve-se definir o número de dimensões *n* do espaço no qual os tensores são tratados para que esta notação faça sentido. Um tensor pode possuir tanto índices covariantes quanto contravariantes, neste caso ele será um *tensor misto*.

2.2 Derivação covariante

Ao aplicarmos uma diferenciação parcial a um tensor covariante X'_a, dado por (2.3) obtemos:

$$\partial'_c X'_a = \frac{\partial}{\partial x'^c}\left(\frac{\partial x^e}{\partial x'^a}\right) X_e \tag{2.5}$$

Sendo:

$$\partial'_c \equiv \frac{\partial}{\partial x'^c} = \frac{\partial x^d}{\partial x'^c}\frac{\partial}{\partial x^d} \tag{2.6}$$

Temos então:

$$\partial'_c X'_a = \frac{\partial x^e}{\partial x'^a}\frac{\partial x^d}{\partial x'^c}\frac{\partial}{\partial x^d} X_e + \frac{\partial^2 x^e}{\partial x'^c \partial x'^a} X_e \tag{2.7}$$

Vemos então que esta operação não é tensorial, pois não se comporta como (2.3) frente a uma transformação de coordenadas devido ao segundo termo do lado direito. Mas podemos definir uma derivação de caráter tensorial reescrevendo (2.7) da seguinte maneira:

$$\partial'_c X'_a - \frac{\partial^2 x^e}{\partial x'^c \partial x'^a}\frac{\partial x'^b}{\partial x^e} X'_b = \frac{\partial x^e}{\partial x'^a}\frac{\partial x^d}{\partial x'^c}\partial_d X_e \tag{2.8}$$

Com isso, definimos a seguinte operação:

$$\nabla_c X_a = \partial_c X_a - \Gamma^b_{ac} X_b \tag{2.9}$$

Esta é a *derivada covariante* de um vetor X_a. O fator Γ^a_{bc} é denominado *conexão*. É esta conexão que faz com que a derivação covariante tenha caráter tensorial.

No caso de um *escalar* φ, a derivação covariante nada mais é do que a própria derivada convencional:

$$\nabla_c \varphi = \partial_c \varphi \tag{2.10}$$

A partir desse fato, podemos obter uma relação para a derivação covariante de tensores contravariantes, definindo um produto escalar entre dois tensores como:

$$X^a Y_a = \varphi \tag{2.11}$$

Utilizando esta relação em (2.10), temos:

$$\nabla_c \varphi = \partial_c \varphi = Y_b \partial_c X^a + X^a \partial_c Y_b \tag{2.12}$$

Fazendo a derivação covariante no termo do lado esquerdo de (2.11), temos:

$$\nabla_c (X^a Y_a) = Y_a \nabla_c X^a + X^a \nabla_c Y_a \tag{2.13}$$

Assim, substituindo (2.12) e (2.13) em (2.10), obtemos:

$$Y_a \nabla_c X^a + X^a (\partial_c Y_a - \Gamma^b_{ac} Y_b) = Y_a \partial_c X^a + X^a \partial_c Y_a \tag{2.14}$$

Como no segundo termo entre parênteses os índices a e b definem somatórios (pois estão repetidos), não faz diferença reescreve-lo da seguinte forma: $X^a \Gamma^b_{ac} Y_b \rightarrow X^b \Gamma^a_{bc} Y_a$. Podemos então eliminar Y_a da equação, de modo que (2.14) se torna:

$$\nabla_c X^a = \partial_c X^a + \Gamma^a_{bc} X^b \tag{2.15}$$

Que é a derivada covariante para um tensor contravariante. Agora podemos generalizar a derivação covariante para o caso de um vetor misto arbitrário $T^{a\ldots}_{b\ldots}$:

$$\nabla_c T^{a\ldots}_{b\ldots} = \partial_c T^{a\ldots}_{b\ldots} + \Gamma^a_{dc} T^{d\ldots}_{b\ldots} + \cdots - \Gamma^d_{bc} T^{a\ldots}_{d\ldots} - \cdots \tag{2.16}$$

A operação (2.15) obedece as regras de transformação de um tensor:

$$\partial'_c X'^a + \Gamma'^a_{bc} X'^b = \frac{\partial x^f}{\partial x'^c} \frac{\partial x'^a}{\partial x^d} \left(\partial_f X^d + \Gamma^d_{ef} X^e \right) \tag{2.17}$$

Efetuando uma mudança de coordenadas no primeiro termo da equação acima:

$$\partial'_c X'^a = \frac{\partial x^f}{\partial x'^c}\frac{\partial x'^a}{\partial x^d}\partial_f X^d + \frac{\partial^2 x'^a}{\partial x^d \partial x^f}\frac{\partial x^f}{\partial x'^c}X^d \tag{2.18}$$

Podemos re-escrever (2.17) assim:

$$\Gamma'^a_{bc}X'^b = \frac{\partial x^f}{\partial x'^c}\frac{\partial x'^a}{\partial x^d}\Gamma^d_{ef}X^e - \frac{\partial^2 x'^a}{\partial x^d \partial x^f}\frac{\partial x^f}{\partial x'^c}X^d \tag{2.19}$$

Novamente, podemos eliminar os vetores X'^b, X^e e X^d efetuando uma mudança nos seus índices repetidos, de modo que obtemos:

$$\Gamma'^a_{bc} = \frac{\partial x^f}{\partial x'^c}\frac{\partial x'^a}{\partial x^d}\frac{\partial x^e}{\partial x'^b}\Gamma^d_{ef} - \frac{\partial^2 x'^a}{\partial x^d \partial x^f}\frac{\partial x^f}{\partial x'^c}\frac{\partial x^d}{\partial x'^b} \tag{2.20}$$

Simplificando o segundo termo, obtemos:

$$\Gamma'^a_{bc} = \frac{\partial x^f}{\partial x'^c}\frac{\partial x'^a}{\partial x^d}\frac{\partial x^e}{\partial x'^b}\Gamma^d_{ef} - \frac{\partial^2 x^d}{\partial x'^b \partial x'^c}\frac{\partial x'^a}{\partial x^d} \tag{2.21}$$

Assim fica evidente que a conexão não é um tensor. Mas podemos formar um tensor a partir da diferença entre duas conexões – pois aí o segundo termo de (2.21) irá se anular, neste caso o tensor resultante será diferente de zero apenas para conexões antissimétricas – nas quais os índices covariantes da conexão não comutam. O tensor assim definido é denominado *Torção*.

2.3 Transporte paralelo

Dado um espaço coberto por um sistema de coordenadas x^a, podemos definir uma curva nesse espaço vinculando todas as suas coordenadas com um parâmetro u:

$$x^a(u) = x^a(x^1(u), x^2(u), \dots, x^n(u)) \tag{2.22}$$

Assim também é possível definir um campo verorial tangente a essa curva como:

$$X^a(u) = \frac{dx^a(u)}{du} \tag{2.23}$$

Podemos representar um campo vetorial arbitrário T^a num ponto Q dado por $x^a + dx^a$ por uma expansão em série de Taylor de primeira ordem em torno do ponto x^a em P:

$$T^a(x + dx) = T^a(x) + dx^b \partial_b T^a \tag{2.24}$$

Que é a própria definição de derivação:

$$T^a(x + dx) - T^a(x) = \frac{\partial T^a}{\partial x^b} dx^b \tag{2.25}$$

Mas como foi visto anteriormente, esta operação não tem caráter tensorial e isso pode ser explicado da seguinte maneira: apesar da soma ou diferença de tensores também resultar em um tensor, isso só é válido para tensores avaliados em um mesmo ponto, pois nas definições de tensores (2.3) e (2.4) as quantidades $\frac{\partial x^b}{\partial x'^a}$ são função do ponto em que os tensores são avaliados na transformação de coordenadas, assim, no caso de (2.25), a subtração não resulta em um tensor porque são dois tensores avaliados em pontos distintos.

Já no caso da derivação covariante, o fator Γ^a_{bc} "transporta" o vetor T^ado ponto P para Q de forma que ele tenha suas componentes modificadas para $T^a + \delta T^a$. Subtraindo os dois vetores, temos:

$$[T^a(x) + dx^b \partial_b T^a] - [T^a + \delta T^a] = dx^b \partial_b T^a - \delta T^a \tag{2.26}$$

Que é a própria derivação covariante. Assim, comparando com a definição (2.15), tiramos que:

$$\delta T^a = -\Gamma^a_{bc} T^b dx^c \tag{2.27}$$

Que é definido como o *Transporte Paralelo* do ponto P ao ponto Q. E o vetor resultante de um transporte paralelo não só depende desses pontos como também da curva que os conecta.

2.4 Geodésicas

Dado um campo vetorial arbitrário T^a no caso de ele se propagar paralelamente ao longo de uma curva $x^a(u)$ então o transporte paralelo dele ao longo da curva do ponto u até $u + du$ deverá ser proporcional ao campo avaliado em $u + du$ com um fator de proporcionalidade do tipo:

$$T^a(u + du) = [1 + \lambda(u)du][T^a + \delta(T^a)] \tag{2.28}$$

Sendo:

$$T^a(u + du) = T^a + \partial_c T^a dx^c = T^a + \partial_c T^a \frac{dx^c}{du} du \tag{2.29}$$

E o transporte paralelo dado por (2.27):

$$T^a + \delta(T^a) = T^a - \Gamma^a_{bc} T^b dx^c = T^a - \Gamma^a_{bc} T^b \frac{dx^c}{du} du \tag{2.30}$$

Substituindo os dois últimos resultados em (2.28) e desprezando o termo proporcional a $(du)^2$, obtemos então:

$$\partial_c T^a \frac{dx^c}{du} + \Gamma^a_{bc} T^b \frac{dx^c}{du} = T^a \lambda(u) \tag{2.31}$$

Podemos reparametrizar a curva por um parâmetro s tal que $\lambda(u)$ se anule e neste caso teremos:

$$X^c \nabla_c T^a = 0 \tag{2.32}$$

Assim, sempre que a expressão acima é satisfeita para um campo vetorial ao longo de uma curva com uma dada parametrização, significa que ele se propaga paralelamente ao longo desta. Uma *geodésica*, é uma curva tal que seu campo vetorial tangente (2.23) se propaga paralelamente ao longo dela, de modo que temos – através de (2.23) e (2.32):

$$\frac{d^2x^a}{ds^2} + \Gamma^a_{bc}\frac{dx^b}{ds}\frac{dx^c}{ds} = 0 \qquad (2.33)$$

2.5 Tensor de curvatura

Como vimos, o transporte paralelo de um vetor não só depende de seus pontos inicial e final, mas também da curva pela qual ele é transportado. Existe um caso particular, que é quando o espaço em que a curva está inserida possui *curvatura nula*, neste caso o transporte paralelo de um ponto P a um ponto Q resultará em um tensor que será independente da curva escolhida para transporta-lo. Quando isto ocorre, significa que a derivada covariante comuta neste espaço. Ou seja, teremos:

$$\nabla_c\nabla_d X^a - \nabla_d\nabla_c X^a = 0 \qquad (2.34)$$

Mas, desenvolvendo o lado esquerdo da equação acima, temos que:

$$\nabla_c\nabla_d X^a - \nabla_d\nabla_c X^a = \partial_c\Gamma^a_{bd}X^b - \partial_d\Gamma^a_{bc}X^b + \Gamma^e_{bd}\Gamma^a_{ec}X^b - \Gamma^e_{bc}\Gamma^a_{ed}X^b \qquad (2.35)$$

Ou:

$$\nabla_c\nabla_d X^a - \nabla_d\nabla_c X^a = R^a_{bcd}X^b \qquad (2.36)$$

Onde R^a_{bcd} é denominado *tensor de curvatura*, ou *tensor de Riemann*:

$$R^a_{bcd} = \partial_c\Gamma^a_{bd} - \partial_d\Gamma^a_{bc} + \Gamma^e_{bd}\Gamma^a_{ec} - \Gamma^e_{bc}\Gamma^a_{ed} \qquad (2.37)$$

É ele que define a curvatura de um espaço, e se ele for nulo então a expressão (2.36) indica que a derivada covariante comuta neste espaço e portanto o espaço é plano. Através da definição (2.37), podemos ver que ele é antissimétrico nos dois últimos índices covariantes:

$$R^a_{bcd} = -R^a_{bdc} \qquad (2.38)$$

Usando este fato podemos tirar a seguinte identidade algébrica:

$$R^a_{bcd} + R^a_{dbc} + R^a_{cdb} = 0 \tag{2.39}$$

E também uma identidade diferencial que será importante na obtenção das equações de campo da Relatividade Geral, chamada *identidade de Bianchi*:

$$\nabla_e R_{abcd} + \nabla_c R_{abde} + \nabla_d R_{abec} = 0 \tag{2.40}$$

2.6 Geometria Riemanniana

Qualquer espaço que possa ser caracterizado por um intervalo do tipo:

$$ds^2 = g_{ab}(x)dx^a dx^b \tag{2.41}$$

Com $ds^2 \equiv (ds)^2$. É denominado *Espaço de Riemann,* quando $ds^2 > 0$, já quando o intervalo ds^2 assume valores nulos ou negativos, o espaço é chamado *pseudoriemanniano* – que é o caso dos espaços definidos pelas relatividades restrita e geral.

O fator g_{ab}, é denominado *tensor métrico*; ele é sempre um tensor covariante de segunda ordem simétrico ($g_{ab} = g_{ba}$) e nele estão contidas todas as propriedades geométricas do espaço. É uma função do sistema de coordenadas utilizado.

Em um espaço provido de um tensor métrico é possível transformar índices contravariantes em covariantes e vice-versa e definir operações como o produto escalar; por exemplo, na expressão da identidade de Bianchi (1.37) temos:

$$R_{abcd} = g_{ae}R^e_{bcd} \tag{2.42}$$

No caso do usual espaço euclidiano, por exemplo, podemos aferir a distância entre dois pontos, sendo o tensor métrico dada por:

$$\delta_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{2.43}$$

Aqui os índices gregos representam o espaço euclidiano tridimensional e portanto variam de 1 a 3 e equação (2.41) se torna:

$$ds = \sqrt{(dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2} \tag{2.44}$$

2.6.1 A conexão em espaços riemannianos

Em um espaço provido de um tensor métrico, é possível definir o módulo de um vetor arbitrário X^a como:

$$X = g_{ab}X^aX^b \tag{2.45}$$

Podemos chegar a uma expressão para a conexão em espaços riemannianos considerando que o módulo de um vetor será invariante frente a um transporte paralelo:

$$g_{ab}(P)X^a(P)X^b(P) = g_{ab}(Q)X^a(Q)X^b(Q) \tag{2.46}$$

Sendo que P e Q distam de um intervalo infinitesimal dx^a; com o transporte paralelo definido por (2.27), temos:

$$\left.\begin{aligned} X^a(Q) &= X^a(P) - \Gamma^a_{dc}X^d dx^c \\ X^b(Q) &= X^b(P) - \Gamma^a_{dc}X^d dx^c \end{aligned}\right\} \tag{2.47}$$

Expandindo $g_{ab}(Q)$ em uma série de Taylor de primeira ordem:

$$g_{ab}(Q) = g_{ab}(P) + \partial_c g_{ab} dx^c \tag{2.48}$$

Agora substituindo o lado direito de (2.46) por (2.47) e utilizando (2.48) temos:

$$g_{ab}(P)X^a(P)X^b(P) = \\ [g_{ab}(P) + \partial_c g_{ab} dx^c][X^a(P) - \Gamma^a_{dc} X^d dx^c][X^b(P) - \Gamma^b_{dc} X^d dx^c] \tag{2.49}$$

Considerando que os termos que têm dependência com $(dx^c)^2$ e $(dx^c)^3$ desaparecem sendo que esta é uma quantidade infinitesimal que tende a zero, chegamos a:

$$\left(g_{ad}\Gamma^d_{bc} + g_{db}\Gamma^d_{ac} - \partial_c g_{ab}\right)X^a X^b dx^c = 0 \tag{2.50}$$

Sendo que o fator $X^a X^b dx^c$ não é necessariamente nulo, temos:

$$g_{ad}\Gamma^d_{bc} + g_{db}\Gamma^d_{ac} - \partial_c g_{ab} = 0 \tag{2.51}$$

Esta expressão mostra que a derivada covariante do tensor métrico é nula. Fazendo duas permutações nos índices: $a \leftrightarrow b$, depois $c \leftrightarrow a$, obtemos:

$$g_{bd}\Gamma^d_{ca} + g_{dc}\Gamma^d_{ba} - \partial_a g_{bc} = 0 \tag{2.52}$$

Fazendo as mesmas permutações novamente na equação acima, obtemos:

$$g_{cd}\Gamma^d_{ab} + g_{da}\Gamma^d_{cb} - \partial_b g_{ca} = 0 \tag{2.53}$$

Agora, somando (2.52) e (2.53) e subtraindo (2.51), chegamos a:

$$2g_{cd}\Gamma^d_{ab} = \partial_a g_{bc} + \partial_b g_{ca} - \partial_c g_{ab} \tag{2.54}$$

Agora, multiplicando a equação pela forma contravariante da métrica: g^{fc}, definida por:

$$g^{fc} g_{cd} = \delta^f_d \tag{2.55}$$

Chegamos finalmente a:

$$\Gamma^f_{ab} = \frac{1}{2} g^{fc}(\partial_a g_{bc} + \partial_b g_{ca} - \partial_c g_{ab}) \tag{2.56}$$

Vemos então que a conexão pode ser definida completamente pelo tensor métrico em espaços riemannianos e, consequentemente, o mesmo ocorre com o tensor de curvatura (2.37). O que demonstra que toda informação a respeito da geometria de um espaço está contida no seu tensor métrico.

3 RELATIVIDADE RESTRITA

A relatividade restrita é embasada em dois princípios básicos: a constância da velocidade da luz no vácuo e a invariância das leis da física na mudança entre referenciais inerciais. Como consequência desses princípios, o espaço e o tempo não podem ser mais tratados como absolutos e são interdependentes e as relações entre as coordenadas de dois referenciais inerciais se deslocando com velocidade $(\mathrm{v}^{\alpha}) = (\mathrm{v}^1, \mathrm{v}^2, \mathrm{v}^3)$ um em relação ao outro, é dada pelas transformações de Lorentz:

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{x}^{\alpha\prime} &= \gamma(\mathrm{x}^{\alpha} - \mathrm{v}^{\alpha} t) \\ t' &= \gamma\left(t - \frac{\delta_{\alpha\beta}\mathrm{x}^{\alpha}\mathrm{v}^{\beta}}{c^2}\right) \end{aligned}\right\} \tag{3.1}$$

O fator γ é dado por:

$$\gamma = \left(1 - \frac{\delta_{\alpha\beta}\mathrm{v}^{\alpha}\mathrm{v}^{\beta}}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} = \left(1 - \frac{\mathrm{v}^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \tag{3.2}$$

As transformações de Lorentz também implicam que uma partícula se deslocando com velocidade v em relação a um dado referencial terá sua massa medida por observadores em repouso neste referencial dada por:

$$m = \gamma m_0 \tag{3.3}$$

Onde m_0 é a *massa de repouso* da partícula.

Assim, no caso limite para baixas velocidades, podemos expandir o fator γ em uma série binomial, desprezando os termos de ordem muito alta:

$$\gamma = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \simeq 1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} \tag{3.4}$$

E (3.3) fica:

$$mc^2 \simeq m_0c^2 + \frac{1}{2}m_0v^2 \tag{3.5}$$

Vemos que o segundo termo do lado direito desta equação é a energia cinética da partícula em relação ao seu referencial. Fica evidente então a equivalência entre massa e energia:

$$E = mc^2 \tag{3.6}$$

Sendo o momento de uma partícula de massa de repouso m_0 e velocidade v^α definido por:

$$\mathrm{p}^\alpha = m\mathrm{v}^\alpha = \gamma m_0\mathrm{v}^\alpha \tag{3.7}$$

Através desta relação e de (2.6), podemos chegar à seguinte relação:

$$\left(\frac{E}{c}\right)^2 - \mathrm{p}_x^2 - \mathrm{p}_y^2 - \mathrm{p}_z^2 = (m_0c)^2 \tag{3.8}$$

Com:

$$\delta_{\alpha\beta}\mathrm{p}^\alpha\mathrm{p}^\beta = (\mathrm{p}^1)^2 + (\mathrm{p}^2)^2 + (\mathrm{p}^3)^2 \equiv \mathrm{p}_x^2 + \mathrm{p}_y^2 + \mathrm{p}_z^2 \tag{3.9}$$

Se multiplicarmos a equação (3.8) por c^2 vemos que ela implica em conservação da energia total da partícula, e como a massa inercial m_0 independe do sistema de referência utilizado, a quantidade do lado direito deve ser um *invariante de Lorentz*.

3.1 Espaço-tempo de Minkowski

Na mecânica newtoniana tínhamos uma métrica dada por (2.43), esta era invariante frente às transformações de Galileu e portanto servia para descrever o espaço no qual as leis de Newton atuam. Mas na relatividade restrita, estas transformações já não se mostram mais adequadas e qualquer mudança entre dois referenciais inerciais deve obedecer às regras de transformação de

Lorentz. Ao aplicarmos estas transformações ao intervalo (2.44) vemos que ele depende do referencial escolhido e portanto não serve para caracterizar o espaço-tempo. Surge então a necessidade de uma nova métrica, e esta é definida pelo intervalo espaço-temporal:

$$ds^2 = c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \tag{3.10}$$

Esta quantidade não depende do referencial adotado, ou seja: é um invariante de Lorentz. Representando a variável temporal por $x^0 \equiv ct$, o intervalo pode ser escrito como:

$$ds^2 = \eta_{ab}dx^a dx^b$$

E o tempo passa a ser representado como uma nova coordenada num espaço-tempo de quatro dimensões denominado espaço-tempo de Minkowski cuja métrica é dada por:

$$\eta_{ab} \equiv diag(1, -1, -1, -1) \tag{3.11}$$

Vemos que o espaço-tempo de Minkowski é pseudo-riemanniano (o tensor métrico possui determinante negativa) e que η_{ab} tem suas componentes constantes e portanto tem curvatura nula. Esse tensor métrico serve então para definir operações (como produto escalar) e manipular o índice de tensores no espaço de Minkowski.

3.1.1 Tempo próprio e quadrivetores

Na cinemática pré-relativística a trajetória de uma partícula pode ser representada por três equação de vínculo que relacionam as coordenas do espaço tridimensional com um parâmetro: o tempo. Mas ao analisarmos o movimento de uma partícula no espaço de Minkowski fica complicado parametrizar as coordenadas pelo tempo do referencial utilizado, sendo que o tempo medido pela partícula depende do seu estado de movimento. Assim, nesse caso é conveniente utilizar o tempo próprio (τ) para parametrizar a trajetória de uma partícula no espaço-tempo, que é o tempo medido por relógios que se deslocam juntamente com a partícula. Ele é definido por:

$$d\tau^2 = \frac{1}{c^2} ds^2 \tag{3.12}$$

Ou, no espaço de Minkowski:

$$d\tau = \left(1 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right)^{1/2} dt = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\, dt \tag{3.13}$$

No caso de esta partícula estar em repouso, por exemplo, o tempo próprio da partícula será o tempo do referencial.

Sendo $x^a(\tau)$ a trajetória da partícula, definimos então sua *quadrivelocidade*:

$$v^a(\tau) = \frac{d}{d\tau} x^a(\tau) \tag{3.14}$$

E o *quadrimomento* será o produto da quadrivelocidade pela massa de repouso da partícula. Se analizarmos o produto escalar do quadrimomento por ele mesmo:

$$\eta_{ab} p^a p^b = (p_0)^2 - (p_1)^2 - (p_2)^2 - (p_3)^2 \tag{3.15}$$

Mas o termo do lado esquerdo desta equação se relaciona com a definição de tempo próprio (3.12), assim temos:

$$\eta_{ab} p^a p^b = m_0^2 \eta_{ab} \frac{dx^a}{d\tau} \frac{dx^b}{d\tau} = m_0^2 c^2 \tag{3.16}$$

Logo,

$$(p_0)^2 - (p_1)^2 - (p_2)^2 - (p_3)^2 = m_0^2 c^2 \tag{3.17}$$

Comparando com (3.8), temos uma relação entre as componentes do quadrimomento e do momento relativístico de uma partícula, e temos que p_0 é relacionado com a energia da partícula:

$$p_0 = \frac{E}{c} \tag{3.18}$$

Assim, o quadrimomento fornece uma informação completa a respeito do momento e da energia de uma partícula.

4 TEORIA DA RELATIVIDADE GERAL

4.1 Princípio da equivalência

Na mecânica newtoniana, a força devido à gravidade atuando sobre um corpo é proporcional à sua *massa gravitacional*. A prorpiedade de inérica dos corpos também define uma massa que é chamada *massa inercial*. Mas a massa da Teoria da Gravitação Universal de Newton, não tem nenhuma relação com a massa presente na Segunda Lei de Newton. Apesar disso, inúmeros experimentos desde Galileu indicam que estas massas são equivalentes. Esta igualdade é vista apenas como uma coincidência sendo por esta razão, por exemplo, que o movimento de corpos em queda livre sob um campo gravitacional independe de suas massas.

No princípio da equivalência, não se pode distinguir entre sistemas de referência inerciais e não-inerciais na presença de campos gravitacionais. Não havendo nenhuma distinção física, por exemplo, entre um objeto em queda livre em um campo gravitacional ou este objeto no espaço livre de campos gravitacionais. E, reciprocamente, não havendo como distinguir entre referenciais acelerados e referenciais em repouso em campos gravitacionais.

Mas a Relatividade Restrita só é válida para referenciais inerciais, e isso é um problema se levarmos em consideração o fato de não poder fazer distinções físicas entre referenciais acelerados e não-acelerados. A solução aqui é considerar que a métrica do espaço de Minkowski se modifica na presença de campos gravitacionais, de modo que a gravidade seja uma mudança nas características do espaço: $\eta_{ab} \rightarrow g_{ab}$

Considerando então o movimento de uma partícula livre neste espaço-tempo, dada a equação de Euler-Lagrange com o parâmetro de tempo próprio:

$$\frac{\partial L}{\partial x^c} - \frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^c}\right) = 0 \tag{4.1}$$

A lagrangeana para uma partícula livre será apenas sua energia cinética:

$$L = \frac{m}{2} g_{ab} \dot{x}^a \dot{x}^b \tag{4.2}$$

De forma que a equação de Lagrange se torna:

$$g_{ac} \ddot{x}^a + \partial_b g_{ac} \dot{x}^a \dot{x}^b - \frac{1}{2} \partial_c g_{ab} \dot{x}^a \dot{x}^b = 0 \tag{4.3}$$

Utilizando (2.50) e (2.52), temos:

$$g_{ac} \ddot{x}^a + \left(g_{cd} \Gamma^d_{ab} + g_{da} \Gamma^d_{cb} - \frac{1}{2} g_{ad} \Gamma^d_{bc} - \frac{1}{2} g_{db} \Gamma^d_{ac} \right) \dot{x}^a \dot{x}^b = 0 \tag{4.4}$$

Os três últimos termos dentro dos parênteses se cancelam, pois os índices a e b podem ser trocados livremente sendo que eles são repetidos em cada termo:

$$g_{da} \Gamma^d_{cb} \dot{x}^a \dot{x}^b - \frac{1}{2} g_{ad} \Gamma^d_{bc} \dot{x}^a \dot{x}^b - \frac{1}{2} g_{db} \Gamma^d_{ac} \dot{x}^a \dot{x}^b = g_{da} \Gamma^d_{cb} \dot{x}^a \dot{x}^b - g_{da} \Gamma^d_{cb} \dot{x}^a \dot{x}^b = 0 \tag{4.5}$$

Assim, (4.4) se torna:

$$g_{ac} \ddot{x}^a + g_{cd} \Gamma^d_{ab} \dot{x}^a \dot{x}^b = 0 \tag{4.6}$$

Multiplicando a equação por g^{ec} chegamos então a:

$$\delta^e_a \ddot{x}^a + \delta^e_d \Gamma^d_{ab} \dot{x}^a \dot{x}^b = 0 \tag{4.7}$$

Ou:

$$\frac{d^2 x^e}{d\tau^2} + \Gamma^e_{ab} \frac{dx^b}{d\tau} \frac{dx^c}{d\tau} = 0 \tag{4.8}$$

Que é a equação de uma curva geodésica (2.33). Ou seja: partículas livres no espaço-tempo se deslocam em trajetórias geodésicas. Esse espaço-tempo será caracterizado por um tensor métrico g_{ab} que determinará sua geometria. Assim, corpo massivo no espaço-tempo, como a Terra por exemplo, deforma o espaço de Minkowski alterando sua métrica. No caso de não haver nenhuma perturbação, a métrica volta a ser a de Minkowski, e a conexão em (4.8) se anula, de modo que a trajetória de uma partícula será dada por:

$$\frac{d^2x^e}{d\tau^2} = 0 \tag{4.9}$$

Que é a usual equação para uma partícula livre em espaços planos. Então, simplesmente não existe força de atração gravitacional entre os corpos na relatividade generalizada. Assim, qualquer partícula que não se desloque sobre a geodédica do espaço-tempo, sentirá a gravidade como sendo uma força de inércia, e partículas em queda livre em um campo gravitacional não sentirão qualquer efeito pois se deslocarão sobre a geodésica. Por exemplo, um objeto parado sobre a superfície da Terra não está se deslocando sobre a geodédica do espaço-tempo, assim sente uma força inercial, que na Lei da Gravitação de Newton era chamada de força de atração gravitacional. Além disso, não faz mais sentido falar em referenciais inerciais, seja qual for o referencial utilizado, as leis da física deverão ser igualmente válidas, bastando apenas determinar a métrica do espaço-tempo.

4.2 Equações de campo de Einstein

O problema agora é determinar de que forma a presença de corpos no espaço-tempo altera a sua geometria. Ou seja: dada uma distribuição de matéria, temos que achar o tensor métrico g_{ab} adequado para descrever a deformação causada por ela. Este problema é resolvido pelas equações de campo de Einstein – que relacionam a geometria do espaço-tempo com a distribuição de matéria e energia contidas nele. Esta equação foi postulada por Einstein através de uma série de argumentos intuitivos. É possível utilizar alguns argumentos para se convencer de sua consistência. Em todo caso, as equações de Einstein foram corroboradas por diversos experimentos desde que foi publicada, em 1915.

Posteriormente, foi possível obter as mesmas equações a partir da Teoria Clássica de Campos, utilizando o Princípio Variacional. Mesmo assim, por esse método variacional há uma quantidade postulada através de considerações heurísticas, que é a lagrangeana de Einstein.

4.2.1 Aproximação para campos fracos

Apesar de tudo a Teoria da Gravitação Universal de Newton funciona muito bem para descrever a gravidade em casos em que a velocidade dos corpos envolvidos é bem menor que a da luz e em que os corpos não são excessivamente massivos. Assim, a teoria da relatividade geral deve coincidir com as previsões newtonianas nestas condições.

Ao considerarmos o caso de uma partícula livre se deslocando com velocidades muito menores que a da luz em um campo gravitacional "fraco" podemos escrever a métrica do espaço-tempo como sendo a métrica de Minkowski acrescida de uma pequena perturbação:

$$g_{ab} = \eta_{ab} + h_{ab} \tag{4.10}$$

Sabemos que o movimento de uma partícula no espaço-tempo é dada pela equação de uma geodésica (4.8). E a equação da geodésica fica:

$$\frac{d^2x^a}{d\tau^2} + c^2\Gamma^a_{00}\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 = 0 \tag{4.11}$$

Pois, para velocidades muito menores que c:

$$\frac{dx^0}{d\tau} = c\frac{dt}{d\tau} \gg \frac{dx^\alpha}{d\tau} \tag{4.12}$$

Com o índice α representando as coordenadas espaciais. E o conector métrico dado por (2.56) – considerando que o campo é aproximadamente estático ($\partial_0 g_{ab} = 0$) fica:

$$\Gamma^a_{00} = \frac{1}{2}g^{ab}(\partial_0 g_{b0} + \partial_b g_{0b} - \partial_b g_{00}) = -\frac{1}{2}g^{ab}\partial_b g_{00} \tag{4.13}$$

Considerando que $h_{ab} \ll 1$, podemos inverter a métrica dada em (4.10) para achar sua forma contravariante, pela relação (2.55):

$$g^{ab} = \eta^{ab} - h^{ab} \tag{4.14}$$

E a conexão fica:

$$\Gamma^{a}_{00} = -\frac{1}{2}\eta^{ab}\partial_b h_{00} \tag{4.15}$$

Como $\partial_0 h_{00} = 0$, a equação pode ser escrita como:

$$\Gamma^{a}_{00} = \Gamma^{\alpha}_{00} = \frac{1}{2}\delta^{\alpha\beta}\partial_\beta h_{00} = \frac{1}{2}\partial_\alpha h_{00} \tag{4.16}$$

E (4.11) fica:

$$\frac{d^2x^\alpha}{d\tau^2} = -\frac{1}{2}\partial_\alpha h_{00} c^2 \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 \tag{4.17}$$

Dividindo ambos os lados por $\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2$, obtemos então:

$$\frac{d^2x^\alpha}{dt^2} = -\frac{c^2}{2}\partial_\alpha h_{00} \tag{4.18}$$

Comparando com a segunda lei de Newton para uma força gravitacional descrita por um potencial φ, temos:

$$h_{00} = \frac{2\varphi}{c^2} \tag{4.19}$$

Ou, através de (4.10):

$$g_{00} = 1 + \frac{2\varphi}{c^2} \tag{4.20}$$

Ou seja: podemos considerar a métrica do espaço-tempo como sendo o análogo do potencial da gravitação newtoniana.

Na teoria da gravitação universal, temos a Equação de Poisson, que quando resolvida para uma dada distribuição de massa nos dá o potencial gravitacional:

$$\nabla^2\varphi = 4\pi G\rho \tag{4.21}$$

Onde G é a constante gravitacional de Newton e ρ a densidade de massa.

4.2.2 Tensor energia-momento

Precisamos então de um análogo para a densidade de matéria. Mas ao se representar a gravidade como a geometria do espaço-tempo qualquer coisa contida nele obedecerá as leis da gravitação – não só corpos que possuem massa como era na gravitação newtoniana. Então qualquer coisa que transporte alguma forma de energia no espaço-tempo afetará sua geometria. Isso faz sentido pela Relatividade Restrita, onde qualquer coisa que possua massa tem associada uma “energia de repouso”.

Assim, dada uma distribuição de energia no espaço-tempo, queremos achar uma relação para definir como esta distribuição o afeta. Isto implica em uma equação que relacione o tensor métrico do espaço-tempo com um outro tensor que descreverá tal distribuição. Este tensor é denominado tensor energia-momento – T_{ab}, e assim como o tensor métrico deve ser um tensor de segunda ordem simétrico.

Como foi visto anteriormente, o quadrimomento para uma partícula dá uma descrição completa de sua energia, e essa descrição é válida qualquer que seja o referencial utilizado. Assim qualquer perturbação causada por uma partícula no espaço-tempo deverá estar relacionada com o quadrimomento.

No caso de um conjunto de partículas, cada uma terá sua energia associada. E a energia total será o somatório da energia de todas as partículas. Para um conjunto de partículas com mesma massa se deslocando em conjunto (sem que haja variação na posição das partículas umas em relação às outras). Podemos falar em densidade de energia ao associar a um quadrivolume uma densidade de partículas n, medido em um referencial em repouso em relação ao volume. O fluxo nesse quadrivolume dependerá da velocidade de deslocamento do conjunto:

$$N^a = nv^a \tag{4.22}$$

E a densidade de energia (para o referencial do conjunto) no quadrivolume será:

$$\varepsilon_0 = \rho c^2 = nm_0 c^2 \tag{4.23}$$

Mas as quantidades m_0 e n aqui definidas nos darão apenas a densidade de energia para referenciais em repouso com relação ao conjunto de partículas; nos quais $(v^a) = (1,0,0,0)$ ou, consequentemente, onde $(N^a) = (1,0,0,0)$ e $(cp^a) = (m_0 c^2, 0,0,0)$. Assim, para um referencial harbitrário, a densidade de energia será dada por:

$$T_{ab} = cp_a N_a = nm_0 c^2 v_a v_b = c^2 \rho v_a v_b \tag{4.24}$$

Este é o tensor-energia momento para este conjunto de partículas. No caso de uma distribuição contínua podemos mesmo assim considerar uma porção infinitesimal desse contínuo, contribuindo com uma quantidade infinitesimal de energia. Se este meio contínuo for um fluido, por exemplo, é preciso levar em consideração que estas porções infinitesimais estão vinculadas entre si (há forças internas como pressão, tensão, etc..). Em todo caso, no limite para baixas velocidades, a densidade de energia da partícula se reduzirá sempre a:

$$T_{00} = \rho c^2 \tag{4.25}$$

Pois não haverá diferença significativa na densidade de energia na troca de um referencial para outro.

Então, analogamente à equação de Poisson, devemos ter um tensor construído das derivadas segundas da métrica que estará relacionado com o tensor energia-momento:

$$G_{ab} = \kappa T_{ab} \tag{4.26}$$

Quando não há gravidade em um local do espaço, o gradiente do potencial é nulo. Agora locais sem campo gravitacionais são aqueles com curvatura nula, ou seja: quando o tensor de Riemann é zero:

$$R^a_{bcd} = 0 \tag{4.27}$$

Mas o tensor que procuramos deve ter as mesmas características que o tensor energia-momento – ser covariante de segunda ordem e simétrico. O tensor de Ricci tem estas características, ele é construído da contração de dois índices do tensor de curvatura:

$$R_{bd} = R^a_{bad} \tag{4.28}$$

Entretanto, pela conservação de ennergia, devemos ter:

$$\nabla^a T_{ab} = 0 \tag{4.29}$$

Mas o tensor de Ricci não tem derivada covariante necessariamente nula em qualquer região do espaço, sendo que ele é construído a partir da contração do tensor de curvatura. Para obtermos uma relação para a derivação do tensor de Ricci utilizamos a identidade de Bianchi (2.40) multiplicando-a por $g^{be}g^{ad}$, chegamos a:

$$2\nabla_b R^b_c - \nabla_c R = 0 \tag{4.30}$$

Onde R é o escalar de Ricci:

$$R = g^{ab} R_{ab} \tag{4.31}$$

Sendo:

$$R^b_c = g^{ab} R_{ac} \tag{4.32}$$

Chegamos a:

$$\nabla^a R_{ac} = \frac{1}{2} \nabla_c R \tag{4.33}$$

Que mostra que a derivação covariante do tensor métrico não é nula sempre, como requer a conservação de energia. Mas podemos reescrever $\nabla_c R$ como $g_{ac}\nabla^a R$, de modo que (4.33) se torna:

$$\nabla^a \left(R_{ac} - \frac{1}{2} g_{ac} R \right) = 0 \tag{4.34}$$

Podemos fazer isso porque a que a derivada covariante da métrica é nula. Concluímos então que este é o tensor que satisfaz todas as condições que procuramos, sendo covariante de segunda ordem, simétrico, construído das derivadas do tensor métrico e que satisfaz a conservação de energia. Ele é denominado tensor de Einstein:

$$G_{ab} \equiv R_{ab} - \frac{1}{2} g_{ab} R \tag{4.35}$$

Ao fazermos a aproximação para campos fracos, e velocidades muito menores que a da luz, como vimos, a única componente não nula do tensor energia-momento será T_{00} devemos ter:

$$\nabla^2 g_{00} = \kappa T_{00} \tag{4.36}$$

Sendo o tensor métrico para campos fracos dado por (4.20), temos:

$$\nabla^2 \varphi = \frac{\kappa c^4 \rho}{2} \tag{4.37}$$

Comparando com a equação de Poisson (4.21), obtemos então um valor para a constante de acoplamento:

$$\kappa = \frac{8\pi G}{c^4} \tag{4.38}$$

E temos então as equações de campo de Einstein:

$$R_{ab} - \frac{1}{2} g_{ab} R = \frac{8\pi G}{c^4} T_{ab} \tag{4.39}$$

5 SOLUÇÃO DE SCHWRZSCHILD

As equações de campo relacionam a distribuição de matéria com a geometria do espaço-tempo. Mas o problema é que estas equações são não-lineares: tanto a matéria afeta o espaço tempo quanto o espaço tempo afeta a distribuição de matéria. Assim é muito complicado achar soluções para as equações de campo dada uma distribuição de massa. Mas quando se considera certas propriedades de simetria, é então possível achar soluções exatas das equações. A solução mais importante neste caso é a solução de Schwarzschild – que resolve as equações de campo para o vácuo ao redor de objetos estáticos que possuem simetria esférica.

Como a fonte possui uma distribuição estática, e sendo que é esta distribuição que define como será a métrica do espaço-tempo ao seu redor, então a métrica deve ser também independente do tempo. Podemos reescrever o intervalo espaço-temporal (2.41) da seguinte maneira:

$$ds^2 = g_{00}(dx^0)^2 + 2g_{0\alpha}dx^0dx^\alpha + g_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta \tag{5.1}$$

Lembrando que as letras gregas representam apenas os índices das coordenadas espaciais. Como estamos considerando um espaço-tempo estático, então não pode haver diferenças entre passado e futuro assim podemos fazer a transformação: $x^0 \to -x^0$, sem que a métrica sofra alterações, neste caso (5.1) fica:

$$ds^2 = g_{00}(dx^0)^2 - 2g_{0\alpha}dx^0dx^\alpha + g_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta \tag{5.2}$$

Comparando estas duas equações e sendo que $g_{0\alpha}$ não muda com a reversão temporal, por não depender do tempo, chegamos à conclusão que estas componentes da métrica devem ser nulas. Então, no caso de soluções estáticas o intervalo deve ser dado por:

$$ds^2 = g_{00}(dx^0)^2 + g_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta \tag{5.3}$$

Ou seja: o intervalo pode ser completamente separado em parte temporal e parte espacial.

Agora levando em consideração a distribuição esférica da fonte também é razoável supor que a métrica terá simetria esférica – isto significa que: dado um ponto qualquer no espaço-tempo, ao efetuarmos uma rotação qualquer, mantendo constante a distância à origem, a métrica permanecerá invariante.

Assim, para ressaltar essa simetria, é conveniente adotar o seguinte sistema de coordenadas esféricas:

$$(x^0, x^1, x^2, x^3) = (t, r, \theta, \phi) \tag{5.4}$$

Que se relacionam com o sistema cartesiano da seguinte maneira:

$$\left.\begin{aligned} x &= rsen\theta cos\phi \\ y &= rsen\theta sen\phi \\ z &= rcos\theta \end{aligned}\right\}, (0 \leq \theta \leq \pi), (0 \leq \phi < 2\pi) \tag{5.5}$$

Centrado sobre a origem da distribuição esférica, onde θ é o ângulo azimutal medido em relação ao eixo z e ϕ é o ângulo axial medido em relação ao eixo x. De modo que, o intervalo (5.3) fica:

$$ds^2 = g_{00}(r)c^2dt^2 - g_{11}(r)dr^2 - r^2(d\theta^2 + sen^2\theta d\phi^2) \tag{5.6}$$

Agora precisamos determinar as funções $g_{00}(r)$ e $g_{11}(r)$, que não devem ter dependência com os ângulos pela condição de simetria esférica e nem com o tempo, pela condição de a métrica ser estática. Para isso é conveniente escrevê-los como:

$$\left.\begin{aligned} g_{00}(r) &= e^{2\nu(r)} \\ g_{11}(r) &= e^{2\lambda(r)} \end{aligned}\right\} \tag{5.7}$$

Assim, o tensor métrico fica:

$$g_{ab} = diag\left(e^{2\nu}, -e^{2\lambda}, -r^2, -r^2sen^2\theta\right) \tag{5.8}$$

E como g_{ab} só contém elementos não-nulos em sua diagonal, a forma contravariante da métrica definida por (2.55) será:

$$g^{ab} = diag\left(e^{-\nu}, -e^{-\lambda}, -r^{-2}, -r^{-2}sen^{-2}\theta\right) \tag{5.9}$$

Assim, temos que achar estas duas funções (ν e λ) através da solução das equações de campo. Em posse dos valores das componentes covariantes e contravariantes da métrica, podemos achar os valores das componentes da conexão métrica, através de (2.56):

$$\left.\begin{array}{c} \Gamma^0_{10} = \Gamma^0_{01} = \nu' \\ \Gamma^1_{00} = \nu' e^{2\nu-2\lambda} \\ \Gamma^1_{11} = \lambda' \\ \Gamma^1_{22} = -r\nu' e^{-2\lambda} \\ \Gamma^1_{33} = -rsen^2\theta e^{-2\lambda} \\ \Gamma^2_{33} = -sen\theta cos\theta \\ \Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = \Gamma^3_{13} = \Gamma^3_{31} = r^{-1} \\ \Gamma^3_{23} = \Gamma^3_{32} = cotg\theta \end{array}\right\} \tag{5.10}$$

Com todas as demais componentes sendo nulas, e sendo aqui a derivada em relação a $x^1 = r$ denotada por:

$$\partial_1 \nu = \frac{\partial \nu}{\partial r} \equiv \nu' \tag{5.11}$$

Agora, com estas componentes, podemos calcular as componentes do tensor de Ricci, dado por (2.37) e (4.28). obtemos então:

$$R_{00} = \left(-\nu'' + \nu'\lambda' - \nu'^2 - \frac{2\nu'}{r}\right)e^{2\nu-2\lambda} \tag{5.12}$$

$$R_{11} = \nu'' - \nu'\lambda' + \nu'^2 - \frac{2\lambda'}{r} \tag{5.13}$$

$$R_{22} = (1 + r\nu' - r\lambda')e^{-2\lambda} - 1 \tag{5.14}$$

$$R_{33} = \left[(1 + r\nu' - r\lambda')e^{-2\lambda} - 1\right]sen^2\theta \tag{5.15}$$

Sendo todas as demais componentes nulas.

Agora considerando que queremos a solução das equações de campo para o espaço *ao redor* de um objeto – ou seja: para o espaço vazio – então temos T_{ab} nulo. E a equação de campo fica:

$$R_{ab} - \frac{1}{2}g_{ab}R = 0 \tag{5.16}$$

Multiplicando esta equação por g^{cb} temos:

$$R_a^c = \delta_a^c R \tag{5.17}$$

O que implica em:

$$R_{aa} = 0 \tag{5.18}$$

Ou seja: todas as componentes não-nulas do tensor de Ricci obtidas acima devem ser igualadas a zero. Assim, reescrevemos as equações (5.12), (5.13) e (5.14):

$$-\nu'' + \nu'\lambda' - \nu'^2 - \frac{2\nu'}{r} = 0 \tag{5.19}$$

$$\nu'' - \nu'\lambda' + \nu'^2 - \frac{2\lambda'}{r} = 0 \tag{5.20}$$

$$(1 + r\nu' - r\lambda')e^{-2\lambda} - 1 = 0 \tag{5.21}$$

Somando (5.19) com (5.20) chegamos a:

$$\nu' + \lambda' = \frac{\partial}{\partial r}(\nu + \lambda) = 0 \Rightarrow \nu + \lambda = C \tag{5.22}$$

Onde C é uma constante. Mas levando em consideração que a perturbação causada pela fonte deve diminuir à medida que r aumenta, a métrica deve se aproximar da métrica de Minkowski para $r \to \infty$, então ν e λ devem tender a zero nesta condição. Assim a constante C deve ser nula e temos:

$$\nu = -\lambda \tag{5.23}$$

Usando essa relação, (5.21) fica:

$$(1 + 2r\nu')e^{2\nu} = 1 \tag{5.24}$$

Ou:

$$\frac{\partial}{\partial r}(re^{2\nu}) = 1 \tag{5.25}$$

Integrando esta equação, obtemos:

$$re^{2\nu} = r - 2m \tag{5.26}$$

Onde $-2m$ é a constante de integração.

Então, através de (5.7) e (5.23) e (5.26), chegamos finalmente a:

$$\left.\begin{aligned} g_{00} &= e^{2\nu} = 1 - \frac{2m}{r} \\ g_{11} &= -e^{2\lambda} = -e^{-2\nu} = \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} \end{aligned}\right\} \tag{5.27}$$

Mas, como vimos, no limite para campos fracos a componente g_{00} deve ser dado por (4.20) como o potencial gravitacional newtoniano de uma distribuição esférica de massa M dada por:

$$\varphi = -\frac{GM}{r} \tag{5.28}$$

Com G a constante gravitacional de Newton. Comparando então (5.27) com (4.20) e utilizando a relação acima, chegamos a um valor para a constante de integração:

$$m = \frac{GM}{c^2} \tag{5.29}$$

Chegamos então ao elemento de linha de Schwarzschild:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) c^2 dt^2 - \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1} dr^2 - r^2(d\theta^2 + sen^2\theta d\phi^2) \tag{5.30}$$

E vemos que no limite para r muito grande esta expressão se reduz ao intervalo de Minkowski.

Em posse dessa métrica, podemos então determinar a equação de movimento para corpos se deslocando nos arredores de uma distribuição esférica de massa M. No caso de não haver forças externas atuando, basta resolver a equação da geodésica com o tensor métrico definido pelo elemento de linha de Schwarzschild.

6 CONCLUSÃO

Como vimos a Teoria da Relatividade Geral (RG) é uma teoria capaz de descrever o universo na presença de campos gravitacionais ampliando e generalizando os conceitos envolvidos na Teoria da Relatividade Restrita ao interpretar os campos gravitacionais como uma deformação no espaço-tempo de Minkowski causada por distribuições de matéria. E sabendo qual a distribuição de matéria podemos também aferir qual será a geometria do espaço-tempo, através das equações de campo de Einstein.

Neste sentido obtemos a solução das equações de campo para um objeto de simetria esférica, estático e com massa definida – a solução de Schwarzschild – que apesar de simples teve importância crucial na validação da teoria, por ser capaz de descrever muito bem o espaço-tempo próximo ao Sol, por exemplo, e sendo capaz de prever e descrever fenômenos que a gravitação de Newton foi incapaz de explicar, como o desvio na trajetória na luz das estrelas devido à presença do sol (lentes gravitacionais) e o cálculo mais preciso do periélio de Mercúrio. A RG também tem papel fundamental para a cosmologia e com ela foi possível descrever o nosso universo em expansão.

Neste texto foram englobados os principais aspectos para a compreensão da RG. A partir daqui abrem-se caminhos para a solução de problemas mais complexos que o descrito pela Solução de Schwarzschild.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] CARROLL, S. M. **Spacetime and Geometry: An introduction to General Relativity**. Pearson Education, 2004. ISBN 0-8053-8732-3

[2] d'INVERNO, Ray. **Introducing Einstein's Relativity**. Oxford University Press, 1992. ISBN 0-19-859686-3

[3] HOBSON; M. P. EFSTATHIOU; G. P. LASENBY; A. N. **General Relativity: An Introduction for Physicists**. Cambridge University Press, 2006. ISBN: 978-0-511-13795-2

[4] PAPAPETROU; A. **Lectures on General Relativity**. D. Reidel Publishing Company, 1974. ISBN: 90-277-0514-3

[5] CHOW; T. L. **Gravity, Black Holes and Very Early Universe: An Introduction to General Relativity and Cosmology**. Springer, 2008. ISBN-13: 978-0-387-73631-0

[6] STEPHANI; H. **General Relativity: An introduction to the theory of the gravitational field**. Cambridge University Press, 1990. ISBN: 0 521 37941 5