

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA MARIA
CENTRO DE CIÊNCIAS NATURAIS E EXATAS
CURSO DE GRADUAÇÃO EM FÍSICA**

**AVALIAÇÃO DOS TERMOS DA EQUAÇÃO DE
BALANÇO DE FLUXO DE ENERGIA CINÉTICA
TURBULENTA**

TRABALHO FINAL DE GRADUAÇÃO

Gabrielle Gonçalves Grivot

Santa Maria, RS, Brasil

2015

/UFSM, RS

Grivot, Gabrielle Gonçalves

Bacharel

2015

AVALIAÇÃO DOS TERMOS DA EQUAÇÃO DE BALANÇO DE FLUXO DE ENERGIA CINÉTICA TURBULENTA

Gabrielle Gonçalves Grivot

Trabalho Final de Graduação apresentado ao Curso de Graduação em Física da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM, RS), como requisito parcial para obtenção do grau de **Bacharel em Física.**

Orientador: Prof. Franciano Scremin Puhales

Santa Maria, RS, Brasil

2015

**Universidade Federal de Santa Maria
Centro de Ciências Naturais e Exatas
Curso de Graduação em Física**

A Comissão Examinadora, abaixo assinada,
aprova o Trabalho Final de Graduação

**AVALIAÇÃO DOS TERMOS DA EQUAÇÃO DE BALANÇO DE FLUXO
DE ENERGIA CINÉTICA TURBULENTA**

elaborada por
Gabrielle Gonçalves Grivot

como requisito parcial para obtenção do grau de
Bacharel em Física

COMISSÃO EXAMINADORA:

Franciano Scremin Puhales, Dr.
(Presidente/orientador)

Giuliano Demarco, Dr. (UFSM)

Fernando Lucas Metz, Dr. (UFRGS)

Santa Maria, 9 de julho de 2015.

*O tempo é um ponto de vista. Velho
é quem é um dia mais velho que a
gente...*

(Mário Quintana)

Aos meus pais e mães. A minha esposa e filho(a). Aos meus
irmãos e irmãs. A Franciano e Giuliano.

AGRADECIMENTOS

A Deus por ter me concedido a vida.

RESUMO

Trabalho Final de Graduação
Curso de Graduação em Física
Universidade Federal de Santa Maria

AVALIAÇÃO DOS TERMOS DA EQUAÇÃO DE BALANÇO DE FLUXO DE ENERGIA CINÉTICA TURBULENTA

AUTOR: GABRIELLE GONÇALVES GRIVOT

ORIENTADOR: FRANCIANO SCREMIN PUHALES

Data e Local da Defesa: Santa Maria, 9 de julho de 2015.

Neste trabalho é proposta uma equação de balanço para os fluxos turbulentos de energia cinética turbulenta (ECT) na camada limite planetária (CLP) e seus termos são avaliados através de dados gerados por um modelo de simulação numérica. Define-se a formação da camada limite expandindo seu conceito a origem da mesma junto à superfície terrestre. Observa-se, então, que os escoamentos são turbulentos na CLP, e assim, define-se a turbulência como um conjunto de vórtices acoplados, de diferentes escalas espaciais e temporais, os quais interagem uns com os outros e com os contornos. Devido à complexidade determinística das equações de movimento para um escoamento turbulento, em geral, o problema é tratado do ponto de vista estatístico. Para abordar o fenômeno o modelo numérico mais utilizado é a simulação dos grandes turbilhões ("Large Eddy Simulation", LES). O modelo LES consiste na aplicação do processo de médias sobre volume para resolver as equações que descrevem um escoamento turbulento. Para obter os perfis verticais de cada um dos termos dessa equação serão empregados dados de LES buscando estabelecer quais mecanismos físicos são importantes no comportamento do fluxo de ECT.

Palavras-chave: Energia. Turbulência. Fluxo.

ABSTRACT

Bachelor Thesis
Curso de Graduação em Física
Universidade Federal de Santa Maria

EVALUATION OF TURBULENT KINETIC ENERGY FLUX EQUATION TERMS

AUTHOR: GABRIELLE GONÇALVES GRIVOT

ADVISOR: FRANCIANO SCREMIN PUHALES

Local and date: Santa Maria, July 9, 2015.

In this paper we propose a balance equation for turbulent flux of turbulent kinetic energy (TKE) in the planetary boundary layer (PBL) and its terms are evaluated through data generated by a numerical simulation model. Define the formation of the boundary layer by expanding its concept to the origin of it along the earth's surface. It is observed, then, that the flow is turbulent in the PLC, and thus, turbulence is defined as a set of coupled vortex, different spatial and temporal scales, which interact with each other and with contours. Due to the complexity of the deterministic equations of motion for a turbulent flow, in general, the problem is dealt from a statistical point of view. To address the phenomenon the most widely used numerical model is the simulation of large eddies ("Large Eddy Simulation" LES). The LES model consists of applying average process on volume to solve the equations describing turbulent flow. For the vertical profiles of each of the terms of this equation will be employed LES data seeking to establish what physical mechanisms are important in the behavior of the ECT flow.

Keywords: Energy. Turbulence. Flux.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1 – representação do escoamento próximo a uma superfície rígida (camada limite).	13
Figura 2.1 – fluxo de massa.	16
Figura 2.2 – elemento de fluido movendo-se com o fluido	19
Figura 2.3 – força do gradiente de pressão	21
Figura 2.4 – escoamento bidimensional entre duas camadas de fluido viscoso	27
Figura 2.5 – proporcionalidade entre força e área	28
Figura 2.6 – tensão viscosa	29
Figura 3.1 – perfil vertical dos termos da equação de balanço de fluxo de ECT.	46
Figura 3.2 – perfil vertical dos termos da equação de balanço de fluxo de ECT segundo MOENG.	47

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

<i>ECT</i>	Energia cinética turbulenta
<i>CLP</i>	Camada limite planetária
<i>LES</i>	Large eddy simulation

LISTA DE SÍMBOLOS

ρ	Massa específica
δ	Varição infinitesimal
∇	Operador nabra
\sum	Somatório
α	Volume Específico
θ	Temperatura potencial
ϕ	Energia livre por unidade de área
ζ	Constante qualquer
Γ	Taxa adiabática de variação vertical de temperatura
γ	Varição observada de temperatura
\oint	Integral sobre um caminho fechado
$\langle . \rangle$	Média
Φ	Função potencial
τ	Tensão viscosa
τ_{zx}	Componente z da tensão viscosa na direção x (tensão de cisalhamento)
μ	Coeficiente de viscosidade dinâmica
ν	Coeficiente de viscosidade cinemática
u_*	Escala de velocidade de fricção
w_*	Escala de velocidade convectiva
Re	Número de Reynolds
Re_c	Número de Reynolds crítico
ε_{ijk}	Tensor de Levi-Civita
ω_j	Termo de Coriolis

SUMÁRIO

RESUMO	6
ABSTRACT	7
INTRODUÇÃO	12
1 CAMADA LIMITE	13
2 ESTUDO DOS FLUIDOS	14
2.1 escoamento de fluidos	14
2.2 Equações de conservação	15
2.2.1 Equação de conservação de massa	15
2.2.2 Equação de conservação do momento	19
2.2.3 Equação de conservação da energia	20
2.3 Força do gradiente de pressão	21
2.4 Força gravitacional	22
2.5 Temperatura potencial	23
2.6 A equação de Bernoulli	25
2.7 Fluidos viscosos	26
3 TURBULÊNCIA	32
3.1 Regimes de escoamento	32
3.2 Experiência de Reynolds	32
3.3 Interpretação física dos processos que levam à formação de turbulência ..	33
3.4 Características observáveis no escoamento turbulento	33
3.5 Procedimento matemático: médias de Reynolds	34
3.6 Equação da continuidade	35
3.7 Equação de difusão-advecção	37
3.8 Equações de Navier-Stokes	39
3.9 Equação de balanço de fluxo de energia cinética turbulenta	41
3.10 Avaliação dos termos da equação de balanço de fluxo de energia cinética turbulenta	46
4 CONCLUSÃO	48
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	49

INTRODUÇÃO

O objetivo deste trabalho é avaliar os termos da equação de balanço para os fluxos turbulentos de energia cinética turbulenta (ECT) na camada limite planetária (CLP). Escoamentos de fluidos originam uma camada limite. Esta camada é caracterizada por um intenso gradiente de velocidade na direção normal a superfície, estabelecendo o que chamamos de CLP. A CLP reage a forçantes termodinâmicos, provenientes do aquecimento e resfriamento da superfície terrestre (PUHALES, 2011). A espessura da CLP é relativamente variável no tempo e no espaço cuja dimensão varia entre centenas de metros a alguns quilômetros.

Devemos notar que os escoamentos na CLP são turbulentos. A turbulência consiste em um conjunto de vórtices acoplados, de diferentes escalas espaciais e temporais, os quais interagem uns com os outros. A complexidade matemática envolvida no detalhamento da turbulência é proveniente da grande quantidade de informações que devemos incluir na descrição do fenômeno, o que o torna, portanto, analiticamente insolúvel. Através dos princípios e leis da mecânica e termodinâmica chegamos às equações que a descrevem. Porém, a interpretação física elaborada é em âmbito probabilístico através dos termos de variáveis médias, variâncias e covariâncias, exatamente em função de não termos soluções analíticas para as equações.

Para se fazer uma avaliação dos termos da equação de balanço para os fluxos turbulentos de energia cinética turbulenta (ECT) na camada limite planetária (CLP) faremos uso de um modelo numérico-computacional denominado "Large Eddy Simulation"(LES). O modelo LES consiste na aplicação do processo de médias sobre volume para resolver as equações que descrevem um escoamento turbulento (MOENG, 1989). Segundo (POPE, 2000), o argumento físico deste modelo é a separação de escalas de movimento (filtragem); as grandes escalas que contém a maior parte da ECT e são dependentes do ambiente (grandes turbilhões) são separadas das pequenas escalas (pequenos turbilhões) nas quais acredita-se que exista um comportamento universal.

Para obter os perfis verticais de cada um dos termos dessa equação serão empregados dados de LES, uma vez que a descrição espacial (horizontal e vertical) de campos turbulentos é complexo do ponto de vista experimental. Com isso pretende-se estabelecer quais mecanismos físicos são importantes no comportamento do fluxo de ECT.

1 CAMADA LIMITE

Em mecânica de fluidos, de maneira geral, define-se camada limite como a região do escoamento na qual a velocidade tende a zero na vizinhança de uma parede sólida. Portanto, esta região é caracterizada por um gradiente de velocidade normal a direção do escoamento (LANDAU; LIFSHITZ, 1959). A figura (1.1) ilustra aproximadamente o processo de formação da camada limite. A espessura, $h(x)$, é representada pela linha pontilhada (região sombreada). Os vetores u_0 e $u(z)$ representam o campo de velocidade. Nota-se que o campo definido por u_0 possui magnitude constante, o que caracteriza, neste caso, o escoamento antes da formação da camada limite. Já os vetores u_z possuem um gradiente normal a direção do escoamento e portanto fica evidenciado uma camada limite. Na região acima da camada limite o escoamento permanece idêntico ao inicial, visto que não há interação com a superfície.

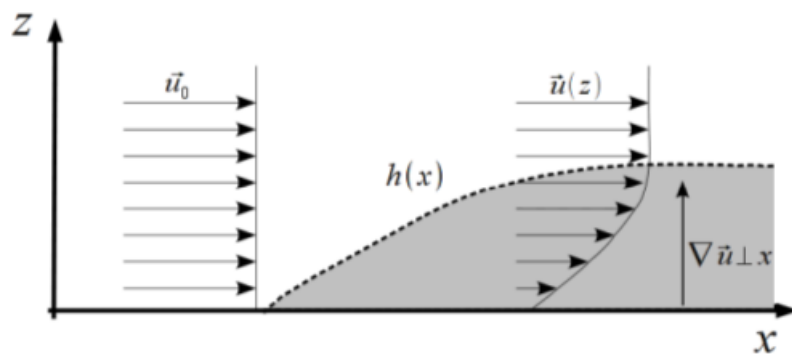


Figura 1.1: representação do escoamento próximo a uma superfície rígida (camada limite).

Deve ficar claro, que o escoamento ilustrado na figura 1.1 (PUHALES, 2011) é laminar. Porém, na maioria das vezes, este escoamento, após um determinado instante de tempo torna-se turbulento e em geral, escoamentos em camadas limite são turbulentos. Na superfície da terra, os escoamentos têm caráter turbulento e será discutido com detalhes.

2 ESTUDO DOS FLUIDOS

2.1 Escoamento de fluidos

Podemos tentar descrever o escoamento de fluidos sob dois aspectos. Uma maneira seria tentar seguir o movimento individual de cada partícula do fluido, determinando suas coordenadas (x, y, z) em função do tempo (t) . As coordenadas (x, y, z) , no instante (t) , de uma partícula de fluido que no instante (t_0) , estivesse no ponto (x_0, y_0, z_0) seriam determinadas pelas funções $x(x_0, y_0, z_0, t_0, t)$; $y(x_0, y_0, z_0, t_0, t)$; $z(x_0, y_0, z_0, t_0, t)$, que descrevem o movimento do fluido. Proceder desta maneira é olhar o fenômeno sob o ponto de vista da mecânica do ponto material, proposto por Joseph Louis Lagrange (1736-1813).

Leonard Euler (1707-1783) desenvolveu outro método de estudo mais conveniente, porém restrito a alguns casos. Este método em vez de tentar especificar o comportamento de cada partícula de fluido, estuda a massa específica e a velocidade do fluido em cada ponto do espaço, em cada instante. Desta forma, descrevemos o escoamento do fluido através da massa específica $\rho(x, y, z, t)$ e a velocidade $v(x, y, z, t)$ no ponto (x, y, z) no instante (t) .

Assim, todas as grandezas usadas na definição do estado do fluido, por exemplo, a pressão P , terão valores definidos em cada ponto do espaço e em cada instante. Embora este estudo proposto por Euler considere pontos do espaço, ao invés de partículas de fluido, não podemos deixar de seguir o movimento das próprias partículas, pelo menos durante intervalos de tempo infinitesimais dt , visto que, as leis da mecânica se aplicam a partículas e não a pontos do espaço.

O método de análise de escoamentos proposto por Euler e Lagrange são amplamente utilizados visto que tais modelos foram propostos a dois séculos atrás. Mas, para tal entendimento precisamos evidenciar algumas características peculiares ao escoamento de fluidos, dentre as quais podemos citar: escoamentos permanentes ou não permanentes.

Basicamente o que diferencia estes dois regimes de escoamento são as acelerações. Quando a aceleração local:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = 0 \quad (2.1)$$

o escoamento é dito em regime permanente. Caso contrário, se:

$$\frac{\partial v}{\partial t} \neq 0 \quad (2.2)$$

então o escoamento é dito em regime não permanente.

Escoamento em regime uniforme ocorre quando a aceleração convectiva é zero. O vetor velocidade é idêntico em qualquer ponto do campo de velocidade. O regime pode ser não permanente, mas a velocidade deve variar idênticamente em todo ponto. O escoamento não uniforme depende do espaço cujo escoamento está ocorrendo. Na CLP, por exemplo, o escoamento das massas de ar tende a ser não uniforme devido às rugosidades do terreno.

Os escoamentos podem ainda ser classificados como laminares ou turbulentos. No escoamento laminar, as partículas do fluido se movem suavemente paralelas umas às outras. Este tipo de escoamento é evidenciado para baixas velocidades. Quando a velocidade do escoamento aumenta progressivamente, o escoamento deixa de ser laminar e passa a ser turbulento, caracterizado pelo movimento desordenado das partículas do fluido.

Os fluidos também apresentam certas características. Estes podem ser considerados compressíveis ou incompressíveis. Os líquidos, geralmente, são supostos incompressíveis, ou seja, a densidade ρ é constante, independentemente de (x, y, z, t) . Finalmente, os fluidos podem ser considerados viscosos ou não viscosos. A viscosidade é uma propriedade dos fluidos reais, através da qual estes resistem à tendência ao escoamento, de maneira análoga ao atrito para o movimento dos sólidos.

2.2 Equações de conservação

2.2.1 Equação de conservação de massa

Para derivar uma equação que explicita a conservação de massa, é proposto a hipótese euleriana, ou seja, a partir de um volume de controle. O fluxo de massa na direção x é definido como segue:

$$F_x = \rho u \quad (2.3)$$

Sendo ρu o fluxo de massa no ponto $p(x, y, z)$, temos:

NA FACE 1 (figura 2.1):

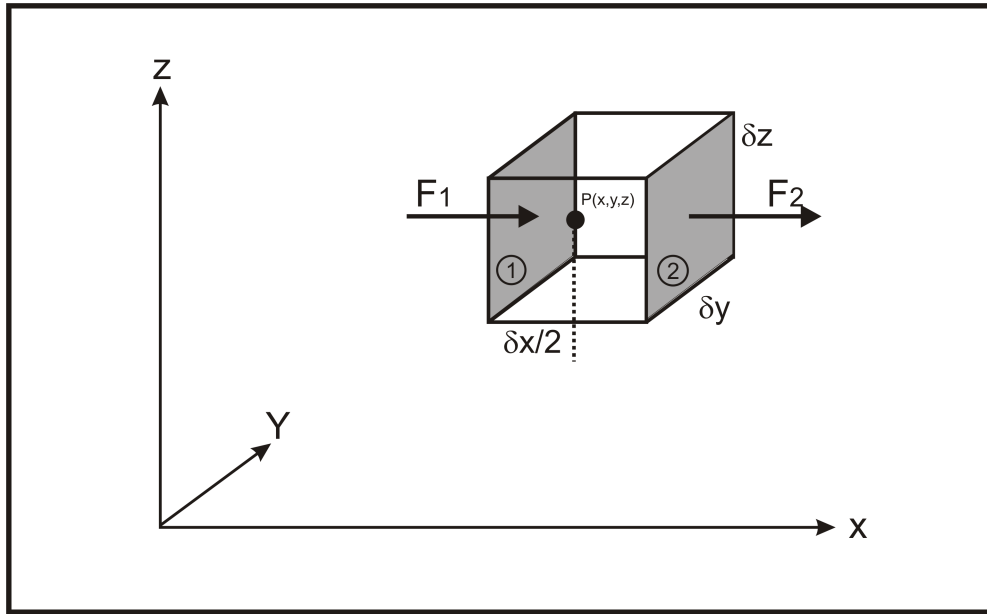


Figura 2.1: fluxo de massa.

$$F_1 = \rho u - \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) \frac{\delta x}{2} \quad (2.4)$$

NA FACE 2 (figura 2.1):

$$F_2 = \rho u + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) \frac{\delta x}{2} \quad (2.5)$$

O fluxo total líquido (ou saldo de fluxo) na direção x é dado por $F_2 - F_1$.

Agora vamos determinar a massa total que entra na FACE 1 e FACE 2 (figura 2.1), por unidade de área, respectivamente:

$$F_1 \cdot A_1 = \left[\rho u - \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) \frac{\delta x}{2} \right] \delta y \delta z \quad (2.6)$$

$$F_2 \cdot A_2 = \left[\rho u + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) \frac{\delta x}{2} \right] \delta y \delta z \quad (2.7)$$

A diferença entre os fluxos de massa para a componente u da velocidade na direção x é:

$$F_1 \cdot A_1 - F_2 \cdot A_2 = - \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) \delta x \delta y \delta z \quad (2.8)$$

Para as direções y e z , temos, respectivamente:

$$F_1 \cdot A_1 - F_2 \cdot A_2 = -\frac{\partial}{\partial y}(\rho v) \delta x \delta y \delta z \quad (2.9)$$

$$F_1 \cdot A_1 - F_2 \cdot A_2 = -\frac{\partial}{\partial z}(\rho w) \delta x \delta y \delta z \quad (2.10)$$

Para o volume de controle total, o fluxo líquido de massa através de suas paredes é:

$$\delta x \delta y \delta z [\nabla \cdot (\rho v)] = \left[\left(\frac{\partial}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{k} \right) (\rho u \hat{i} + \rho v \hat{j} + \rho w \hat{k}) \right] \delta x \delta y \delta z \quad (2.11)$$

onde:

$$\nabla \cdot (\rho v) = \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w) \quad (2.12)$$

é a divergência do fluxo de massa.

O fluxo líquido deve igualar-se à variação de massa dentro do volume de controle. A massa em δV é dada por $\rho \delta V$. Neste caso, como δV é fixo no espaço, a variação de massa no interior é do tipo local:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \delta V) = \delta V \frac{\partial}{\partial t} \rho \quad (2.13)$$

Igualando a variação de massa em δV (equação 2.13) com o fluxo de massa (equação 2.12) através de suas paredes:

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho + \nabla \cdot (\rho v) = 0 \quad (2.14)$$

que é a equação da continuidade.

Escrevendo explicitamente $\nabla \cdot (\rho v)$:

$$\nabla \cdot (\rho v) = \rho(\nabla \cdot v) + v \cdot \nabla \rho \quad (2.15)$$

substituindo (2.15 em 2.14), resulta:

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho + v \cdot \nabla \rho + \rho(\nabla \cdot v) = 0 \quad (2.16)$$

onde o primeiro e o segundo termos da equação acima é a variação total de ρ , logo:

$$\frac{d\rho}{dt} = -\rho(\nabla \cdot v) \quad (2.17)$$

dividindo ambos os termos da equação (2.17) por ρ , chegamos novamente a equação da continuidade:

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} = -(\nabla \cdot v) \quad (2.18)$$

Outra maneira de derivar a equação da continuidade é seguindo a hipótese lagrangeana, ou seja, seguindo um elemento de fluido. Neste caso, a massa do elemento de fluido é fixa e se move com o fluido (figura 2.2). Observe:

$$\delta V = \delta x \delta y \delta z \quad (2.19)$$

$$\delta M = \rho \delta V = \rho \delta x \delta y \delta z \quad (2.20)$$

derivando (2.20) em relação ao tempo, concluímos que:

$$\frac{d}{dt} \delta M = 0 \quad (2.21)$$

dividindo (2.21) por $\frac{1}{\delta M}$, vem:

$$\frac{1}{\delta V} \frac{d}{dt} \delta V + \frac{1}{\rho} \frac{d}{dt} \rho = 0 \quad (2.22)$$

Substituindo (2.19) em (2.22):

$$\frac{1}{\delta x \delta y \delta z} \frac{d}{dt} (\delta x \delta y \delta z) = \frac{1}{\delta x} \frac{d}{dt} (\delta x) + \frac{1}{\delta y} \frac{d}{dt} (\delta y) + \frac{1}{\delta z} \frac{d}{dt} (\delta z) \quad (2.23)$$

Mas por definição:

$$u_A = \frac{dx}{dt} \quad (2.24)$$

$$u_B = \frac{d(x + \delta x)}{dt} \quad (2.25)$$

Portanto, para as direções (x, y, z) , respectivamente:

$$u_B - u_A = \frac{d(x + \delta x)}{dt} - \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt} \delta x = \delta u \quad (2.26)$$

$$v_B - v_A = \frac{d(y + \delta y)}{dt} - \frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt} \delta y = \delta v \quad (2.27)$$

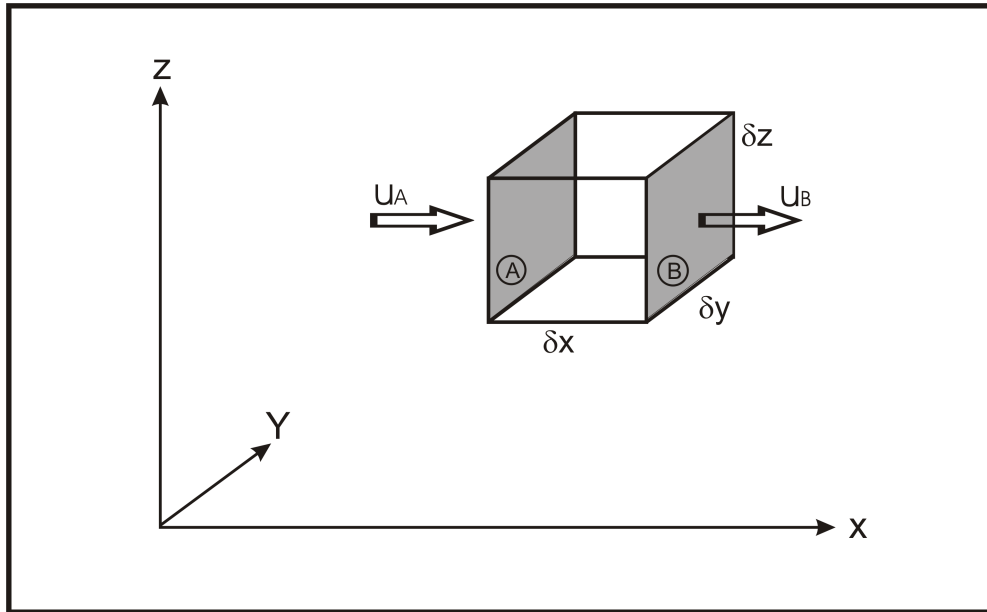


Figura 2.2: elemento de fluido movendo-se com o fluido

$$w_B - w_A = \frac{d(z + \delta z)}{dt} - \frac{dz}{dt} = \frac{d}{dt} \delta z = \delta w \quad (2.28)$$

Substituindo as equações (2.26), (2.27) e (2.28) na equação (2.23), temos:

$$\frac{1}{\delta V} \frac{d}{dt} \delta V = \frac{1}{\delta x} \delta u + \frac{1}{\delta y} \delta v + \frac{1}{\delta z} \delta w \quad (2.29)$$

no limite:

$$\lim_{\delta x \delta y \delta z \rightarrow 0} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \nabla \cdot v = \frac{1}{\delta V} \frac{d}{dt} \delta V \quad (2.30)$$

substituindo este resultado em (2.22), resulta:

$$\nabla \cdot v + \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} = 0 \quad (2.31)$$

que é a equação da continuidade.

2.2.2 Equação de conservação do momento

Assim como a massa, sabemos que o momento \vec{p} também se conserva. Desta forma podemos afirmar que: o momento linear total \vec{p} de uma partícula é conservado quando a força total que atua sobre esta partícula é zero.

$$\sum \mathbf{F} = \frac{dp}{dt} \quad (2.32)$$

Por unidade de massa temos:

$$\frac{\sum \mathbf{F}}{m} = \frac{dv}{dt} = \sum \vec{a} \quad (2.33)$$

2.2.3 Equação de conservação da energia

Definindo que a energia total de uma partícula é a soma da energia cinética e potencial temos:

$$E_T = T + U_P \quad (2.34)$$

Tomando a derivada total no tempo de E_T , resulta:

$$\frac{dE_T}{dt} = \frac{dT}{dt} + \frac{dU_P}{dt} \quad (2.35)$$

mas

$$\begin{aligned} \mathbf{F} \cdot dr &= m \frac{dv}{dt} \cdot \frac{dr}{dt} dt = m \frac{dv}{dt} \cdot v dt = \frac{m}{2} \frac{d}{dt} (v \cdot v) dt \\ &= \frac{m}{2} \frac{d}{dt} v^2 dt = d \left(\frac{1}{2} m v^2 \right) = dT \end{aligned} \quad (2.36)$$

dividindo ambos os membros por dt ,

$$\frac{dT}{dt} = \mathbf{F} \cdot \left(\frac{dr}{dt} \right) \quad (2.37)$$

Além disso:

$$\frac{dU_P}{dt} = \sum_i \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} + \frac{\partial U}{\partial t} = \nabla U \cdot \frac{dr}{dt} + \frac{\partial U_P}{\partial t} \quad (2.38)$$

Substituindo as equações (2.37) e (2.38) em (2.35):

$$\frac{dE_T}{dt} = \mathbf{F} \cdot \frac{dr}{dt} + \left(\nabla U_P \cdot \frac{dr}{dt} \right) + \frac{\partial U_P}{\partial t} = (\mathbf{F} + \nabla U_P) \cdot \frac{dr}{dt} + \frac{\partial U_P}{\partial t} = \frac{\partial U_P}{\partial t} \quad (2.39)$$

e levando em consideração que: $\mathbf{F} = -\nabla U_P$, podemos concluir que a energia total E_T de uma partícula sob a ação de um campo de força conservativo é uma constante no tempo.

2.3 Força do gradiente de pressão

Uma força importante que atua em um fluido é a força do gradiente de pressão (figura 2.3). Por definição, temos:

$$\mathbf{F}_{\text{AX}} = - \left(P_0 + \frac{\partial P}{\partial x} \frac{\delta x}{2} \right) \delta y \delta z \quad (2.40)$$

$$\mathbf{F}_{\text{BX}} = + \left(P_0 - \frac{\partial P}{\partial x} \frac{\delta x}{2} \right) \delta y \delta z \quad (2.41)$$

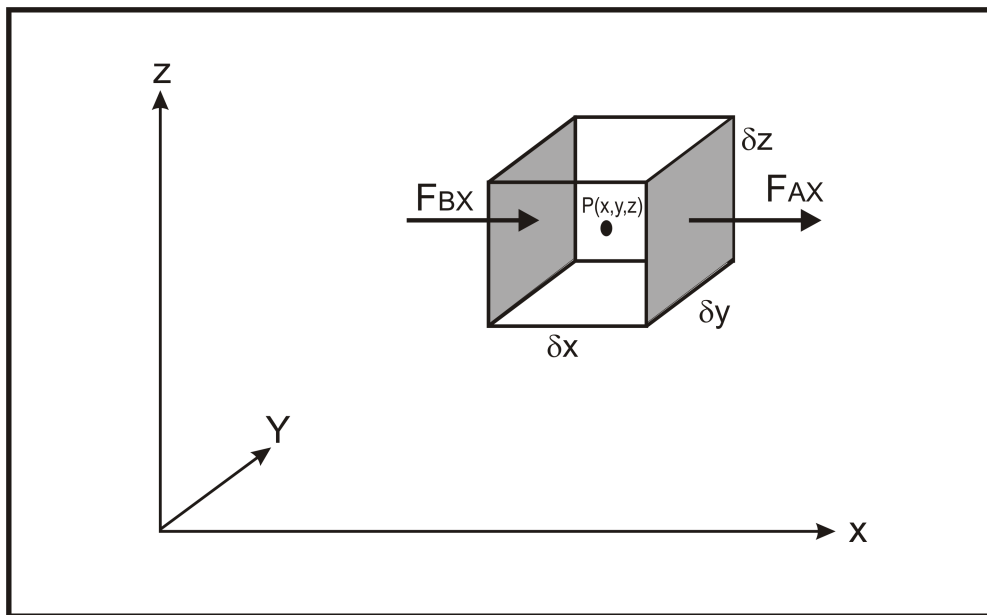


Figura 2.3: força do gradiente de pressão

Portanto a força resultante na direção x será:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_x &= \mathbf{F}_{\text{AX}} - \mathbf{F}_{\text{BX}} \\ \mathbf{F}_x &= -\frac{\partial P}{\partial x} \delta x \delta y \delta z \end{aligned} \quad (2.42)$$

dividindo ambos os lados de (2.42) por m resulta:

$$\frac{\mathbf{F}_x}{m} = -\frac{\partial P}{\partial x} \frac{\delta V}{m} \quad (2.43)$$

desta forma, temos as componentes da força do gradiente de pressão dadas por:

$$\frac{\mathbf{F}_x}{m} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} \quad (2.44)$$

$$\frac{\mathbf{F}_y}{m} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} \quad (2.45)$$

$$\frac{\mathbf{F}_z}{m} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} \quad (2.46)$$

Reescrevendo as equações (2.44), (2.45) e (2.46) na forma vetorial, resulta:

$$\frac{\mathbf{F}_P}{m} = -\frac{1}{\rho} \nabla P = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial P}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial P}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial P}{\partial z} \hat{k} \right) \quad (2.47)$$

2.4 Força gravitacional

A força gravitacional por unidade de massa é dada por:

$$\frac{\mathbf{F}_g}{m} = -g \hat{k} \quad (2.48)$$

Para um fluido ideal (não viscoso), e em um referencial fixo, a equação do momento é dada pela equação (2.33). Assim:

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla P - g \hat{k} \quad (2.49)$$

e as componentes de (x, y, z) de $\frac{dv}{dt}$ são dadas por:

$$\frac{dv_x}{dt} \rightarrow \frac{du}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} \quad (2.50)$$

$$\frac{dv_y}{dt} \rightarrow \frac{dv}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} \quad (2.51)$$

$$\frac{dv_z}{dt} \rightarrow \frac{dw}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} - g \quad (2.52)$$

Substituindo as derivadas totais nas equações (2.50), (2.51) e (2.52) por derivadas

parciais, temos:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -u \frac{\partial u}{\partial x} - v \frac{\partial u}{\partial y} - w \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} \quad (2.53)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -u \frac{\partial v}{\partial x} - v \frac{\partial v}{\partial y} - w \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} \quad (2.54)$$

$$\underbrace{\frac{\partial w}{\partial t}}_A = - \underbrace{u \frac{\partial w}{\partial x}}_B - \underbrace{v \frac{\partial w}{\partial y}}_C - \underbrace{w \frac{\partial w}{\partial z}}_D - \underbrace{\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z}}_E - \underbrace{g}_F \quad (2.55)$$

onde os termos (A), (B), (C), (D), (E) e (F), representam:

- (A) Variação local (euleriana);
- (B) Advecção na direção x ;
- (C) Advecção na direção y ;
- (D) Advecção na direção z ;
- (E) Gradiente de pressão;
- (F) Gravidade.

2.5 Temperatura potencial

Para fluidos ideais, efeitos de dissipação viscosa e condutividade térmica podem ser desprezados. Como consequência não há trocas de calor entre as diferentes partes do fluido, ou entre o fluido e sua vizinhança. Assim, os movimentos no fluido podem ser considerados adiabáticos. Desta forma:

$$dQ = 0 \quad (2.56)$$

$$dS = 0 \quad (2.57)$$

Concluimos de (2.56) e (2.57) que a energia e a entropia se conservam, respectivamente.

Da primeira lei da termodinâmica vem que:

$$\begin{aligned} dq &= dU + dw \\ dq &= C_v dT + Pd\alpha \end{aligned} \quad (2.58)$$

onde α é o volume específico, ou seja, $\frac{1}{\rho}$. Da equação de estado, temos:

$$P\alpha = R'T \quad (2.59)$$

Diferenciando a equação (2.59):

$$Pd\alpha + \alpha dP = R'T \quad (2.60)$$

substituindo este resultado em (2.58):

$$dq = C_p dT - \alpha dP \quad (2.61)$$

Logo:

$$dS = C_p \left(d \ln T - \frac{R'}{C_p} d \ln P \right) \quad (2.62)$$

Feito essas considerações podemos definir a temperatura potencial como segue:

$$\theta = T \left(\frac{P_0}{P} \right)^{\frac{R'}{C_p}} \quad (2.63)$$

onde P_0 é constante denominada pressão de referência. Tomando o logaritmo da equação (2.63):

$$\ln \theta - \ln T + \frac{R'}{C_p} \ln P_0 - \frac{R'}{C_p} \ln P \quad (2.64)$$

portanto:

$$dS = C_p d \ln \theta = \frac{C_p}{\theta} d\theta \quad (2.65)$$

Assim, se $\frac{dS}{dt} = 0$, então:

$$\frac{d \ln \theta}{dt} = 0 \quad (2.66)$$

Processos adiabáticos conservam a temperatura potencial θ . Se $\frac{dS}{dt} = 0$, então $\theta = \text{const}$. E assim concluímos que a energia termodinâmica é dada por:

$$\frac{C_p}{\theta} \frac{d\theta}{dt} = 0 \quad (2.67)$$

2.6 A equação de Bernoulli

A equação para o momento pode ser escrita como:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -v \cdot \nabla v - \frac{1}{\rho} \nabla P - g \hat{k} \quad (2.68)$$

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla P - g \hat{k} \quad (2.69)$$

que é a equação (2.49)

Da termodinâmica temos que:

$$dh = TdS + \alpha dP \quad (2.70)$$

onde dh é a entalpia, $h(P)$. Como o escoamento é adiabático (isentrópico), temos $dq = 0$ e $dS = 0$, e desta forma:

$$dh = \alpha dP = \frac{dP}{\rho} \quad (2.71)$$

portanto:

$$\frac{1}{\rho} \nabla P = \nabla h \quad (2.72)$$

Substituindo (2.72) em (2.68), a equação do momento pode ser escrita como segue:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = v \cdot \nabla v - \nabla h \quad (2.73)$$

Usando a seguinte identidade vetorial:

$$\frac{1}{2} \nabla v^2 = (v \times \nabla \times v) + v \cdot \nabla v \quad (2.74)$$

onde o último termo é a advecção. Substituindo (2.74) em (2.73), resulta:

$$\frac{\partial v}{\partial t} - v \times (\nabla \times v) = -\nabla h - \frac{1}{2} \nabla v^2 \quad (2.75)$$

Considerando uma linha de corrente e tomando a componente da equação (2.75) ao longo de uma linha de corrente, o que matematicamente equivale a tomar o produto escalar com o vetor unitário s e direção paralela a linha de corrente, termo a termo, resulta:

$$\nabla h \cdot s = \frac{\partial h}{\partial s} \quad (2.76)$$

onde a componente do gradiente na direção s é a variação de h na direção de s . Desta forma:

$$\begin{aligned} \nabla \left(\frac{1}{2} v^2 \right) &= \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{1}{2} v^2 \right) \\ [v \times (\nabla \times v)] \cdot s &= 0 \end{aligned} \quad (2.77)$$

pois $v \times (\nabla \times v)$ é perpendicular a v e a s .

Tomando o produto escalar de (2.75) por s , obtemos:

$$\frac{\partial v}{\partial t} \cdot s = -\frac{\partial h}{\partial s} - \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{1}{2} v^2 \right) \quad (2.78)$$

e assumindo a estacionariedade do campo, ou seja, $\frac{\partial v}{\partial t} = 0$, resulta:

$$\frac{\partial}{\partial s} \left(h + \frac{1}{2} v^2 \right) = 0 \quad (2.79)$$

ao longo de uma linha de corrente. Portanto:

$$h + \frac{1}{2} v^2 = \text{constante} \quad (2.80)$$

A equação (2.80) é a equação de Bernoulli.

Se o campo gravitacional for considerado a equação (2.80) fica:

$$h + \frac{1}{2} v^2 + g = \text{constante} \quad (2.81)$$

ao longo de uma linha de corrente.

2.7 Fluidos viscosos

A viscosidade é uma propriedade dos fluidos reais, através do qual estes resistem à tendência ao escoamento, de maneira análoga ao atrito para o movimento dos sólidos. A viscosidade representa um processo molecular de transferência de momento das camadas do fluido. Tal transferência fica evidenciada nas camadas que possuem maior momento para as camadas que possuem menor momento,

A transferência é uma consequência da agitação térmica das moléculas e, por isso, é um processo irreversível. Por exemplo, consideremos um escoamento bidimensional entre duas superfícies, onde a superfície inferior é fixa e a superior move-se com velocidade v_0 conforme indica a figura (2.4).

Se não houvesse viscosidade, a superfície superior se deslocaria sem atrito e todo

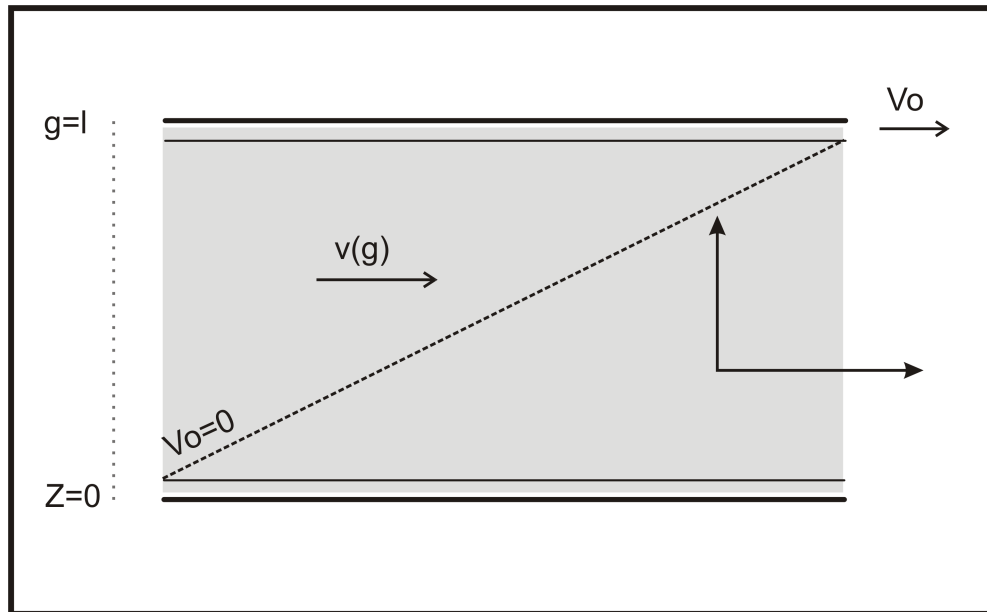


Figura 2.4: escoamento bidimensional entre duas camadas de fluido viscoso

restante do fluido permaneceria em repouso. Como há viscosidade, há transferência de momento da placa superior para a camada de fluido adjacente, e desta para a seguinte, e assim sucessivamente.

Neste caso, o fluxo de momento ocorre na direção z e se refere ao momento em x . O fluxo de momento é representado por: $\tau_{zx} \rightarrow$ transferência de momento x na direção z .

Dimensionalmente fluxo de momento é:

$$\frac{\text{momento}}{\text{area} \times \text{tempo}} = \frac{\text{massa} \times \text{velocidade}}{\text{area} \times \text{tempo}} = \frac{\text{massa} \times \text{aceleracao}}{\text{area}} = \frac{\text{forca}}{\text{area}} = \text{pressao}$$

Desta forma:

$$\frac{du}{dt} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} \quad (2.82)$$

logo τ_{zx} é definido como tensão viscosa.

Na figura (2.5), a força necessária para manter a superfície superior se deslocando com velocidade constante é diretamente proporcional a área da superfície e a velocidade é inversamente proporcional a distância entre as superfícies. Neste caso:

$$\mathbf{F} = \mu A \frac{v_0}{l} \quad (2.83)$$

onde μ é o coeficiente de viscosidade dinâmica.

Para um estado uniforme, a força deve ser igualmente distribuída para cada camada δz .

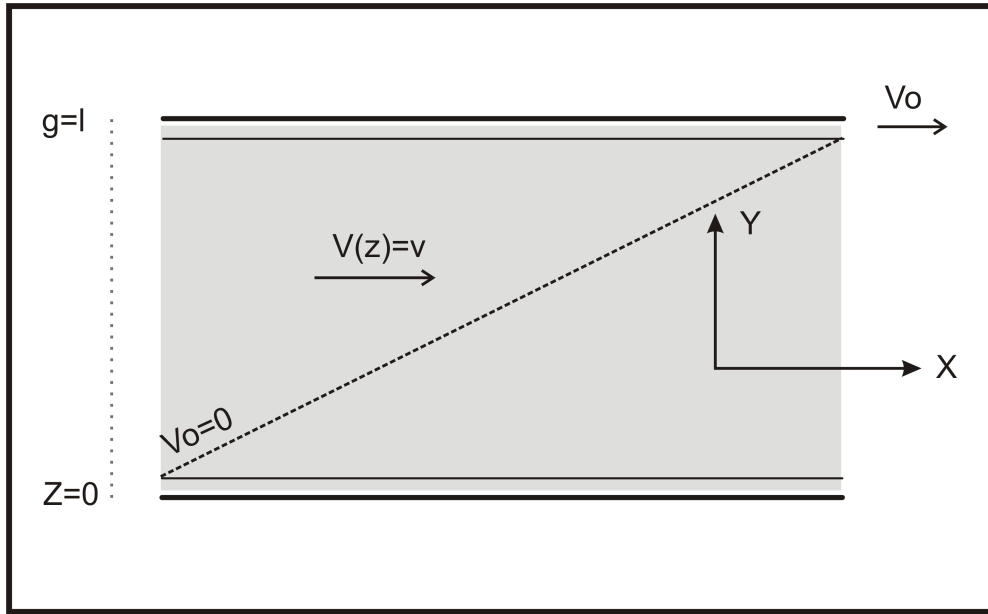


Figura 2.5: proporcionalidade entre força e área

$$\mathbf{F} = \mu A \frac{\delta v}{\delta z} \quad (2.84)$$

dividindo ambos os lados da equação (2.84) por A , resulta:

$$\frac{\mathbf{F}}{A} = \mu \frac{\delta v}{\delta z} \quad (2.85)$$

e como a tensão viscosa tem dimensão de pressão, obtemos a seguinte expressão:

$$\tau_{zx} = \mu \frac{\partial v}{\partial z} \quad (2.86)$$

que é denominado tensão de cisalhamento. A figura (2.6) representa uma condição estável pois τ_{zx} é constante para todo z . Para uma dada camada de fluido, o momento que vem de cima é igualmente transferido para as camadas inferiores.

A tensão viscosa na superfície superior e inferior da figura (2.6) é dada por, respectivamente:

$$\tau_{zx} + \frac{\tau_{zx}}{\partial z} \frac{\delta z}{2} \delta x \delta y \quad (2.87)$$

$$\tau_{zx} - \frac{\tau_{zx}}{\partial z} \frac{\delta z}{2} \delta x \delta y \quad (2.88)$$

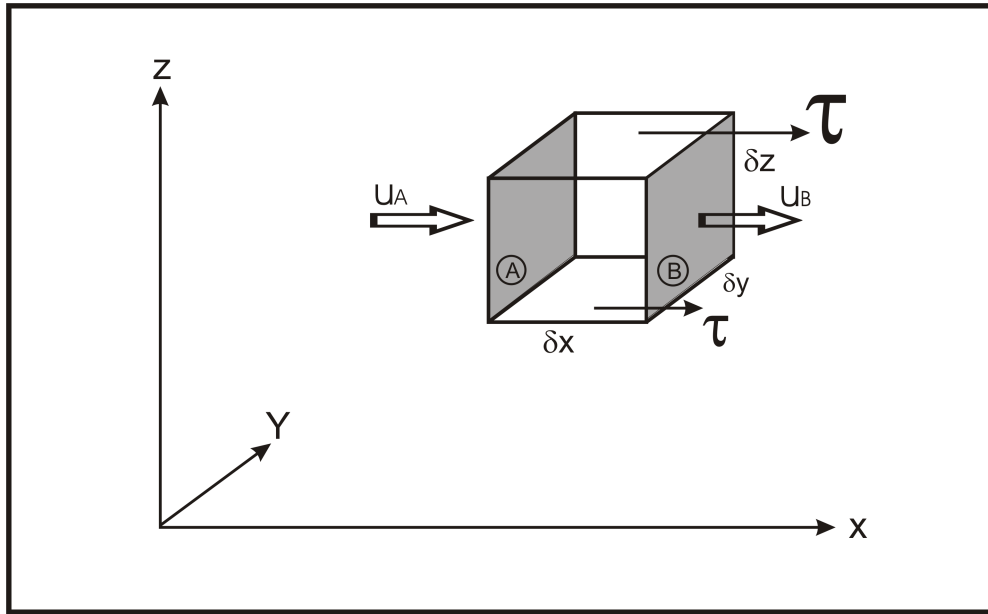


Figura 2.6: tensão viscosa

de forma que a força líquida no elemento de fluido fica:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{zx} &= \left(\tau_{zx} + \frac{\tau_{zx}}{\partial z} \frac{\delta z}{2} \delta x \delta y \right) - \left(\tau_{zx} - \frac{\tau_{zx}}{\partial z} \frac{\delta z}{2} \delta x \delta y \right) \\ \mathbf{F}_{zx} &= \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \delta x \delta y \delta z \end{aligned} \quad (2.89)$$

e a força viscosa por unidade de massa é:

$$\frac{\mathbf{F}_{zx}}{m} = \frac{\delta V}{\delta m} \frac{\partial \tau_{zx}}{\delta z} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \quad (2.90)$$

Como para qualquer fluxo, não é τ_{zx} que altera o estado do sistema, mas sim sua divergência, podemos escrever:

$$\frac{\mathbf{F}_{zx}}{m} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial z} \right) \quad (2.91)$$

para μ constante, temos:

$$\frac{\mathbf{F}_{zx}}{m} = \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad (2.92)$$

onde a constante $\frac{\mu}{\rho} = \nu$, é denominada coeficiente de viscosidade cinemática. Logo:

$$\frac{\mathbf{F}_{zx}}{m} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad (2.93)$$

O tensor τ_{zx} apesar de representar transferência na vertical, se refere ao momento em x e portanto afeta a componente u . Já a \mathbf{F}_{zx} representa uma força aplicada na superfície normal ao eixo z , na direção x . O mesmo vale para as demais forças.

As forças viscosas nas direções x, y, z , são respectivamente:

$$\frac{\mathbf{F}_{vx}}{m} = \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \quad (2.94)$$

$$\frac{\mathbf{F}_{vy}}{m} = \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) \quad (2.95)$$

$$\frac{\mathbf{F}_{vz}}{m} = \nu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) \quad (2.96)$$

Voltando a expressão para o momento:

$$\frac{dv}{dt} = \sum \frac{\mathbf{F}}{m} \quad (2.97)$$

agora, adicionando a força de atrito (viscosidade) no lado esquerdo da equação (2.97), chega-se as equações de Navier-Stokes.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \left(-u \frac{\partial u}{\partial x} - v \frac{\partial u}{\partial y} - w \frac{\partial u}{\partial z} \right) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \quad (2.98)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \left(-u \frac{\partial v}{\partial x} - v \frac{\partial v}{\partial y} - w \frac{\partial v}{\partial z} \right) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) \quad (2.99)$$

$$\underbrace{\frac{\partial w}{\partial t}}_A = \left(\underbrace{-u \frac{\partial w}{\partial x} - v \frac{\partial w}{\partial y} - w \frac{\partial w}{\partial z}}_B \right) - \underbrace{\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z}}_C + \nu \underbrace{\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right)}_D - \underbrace{g}_E \quad (2.100)$$

onde os termos acima representam:

- (A) variação local;
- (B) advecção;
- (C) gradiente de pressão;
- (D) viscosidade;
- (E) gravidade.

Imaginemos agora um fluido no qual apenas a viscosidade afete o campo de velocidade. Neste caso:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (2.101)$$

a equação (2.101) é do tipo equação de difusão, cuja mesma representa processos irreversíveis. Para o ar ν é da ordem de 10^{-5} , de forma que a viscosidade molecular tende a ser desprezada para a maioria das aplicações atmosféricas. A exceção é uma camada muito fina de ar, de centímetros de espessura, muito próximo à superfície, no qual processos moleculares são dominantes.

Podemos representar, desta forma, as equações de Navier-Stokes em sua forma vetorial:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\vec{v} \cdot \nabla \vec{v} - \frac{1}{\rho} \nabla P + \nu \nabla^2 \vec{v} + \vec{g} \quad (2.102)$$

3 TURBULÊNCIA

3.1 Regimes de escoamento

Os escoamentos podem ser classificados como laminares ou turbulentos, como segue:

- ESCOAMENTO LAMINAR: as partículas do fluido comportam-se de maneira previsível e regular no tempo. O fluido escoava como se fossem "laminas" deslocando-se umas sobre as outras.
- ESCOAMENTO TURBULENTO: as partículas do fluido apresentam variações temporais e espaciais praticamente randômicas.

Num escoamento originalmente laminar podem ocorrer pequenas perturbações. Se estas perturbações decaem no tempo, o escoamento permanece laminar e é dito "estável" (em relação a turbulência). Se as perturbações aumentam exponencialmente, o escoamento se torna turbulento e é dito "instável".

3.2 Experiência de Reynolds

Osborne Reynolds (1842/1912) foi um pioneiro no estudo da turbulência. Ele se interessou em identificar as condições que levam o escoamento a ter caráter laminar ou turbulento.

Reynolds identificou três grandezas físicas relevantes para o problema:

- Escala de comprimento do escoamento (L): quanto maior L , maior a tendência à turbulência;
- Escala de velocidade do escoamento (U): quanto maior U , maior a tendência à turbulência;
- Viscosidade do escoamento (ν): quanto maior ν , menor a tendência à turbulência.

Estas três grandezas relevantes permitiram a constatação de um único número adimensional, chamado número de Reynolds.

$$R_e = \frac{UL}{\nu} \quad (3.1)$$

Quanto maior o número de Reynolds, maior a tendência à turbulência. Reynolds imaginava que haveria um valor universal de R_e a partir do qual os escoamentos seriam

turbulentos. Ele identificou este valor como sendo: $R_{ec} \approx 2000$. Na verdade esse limite não é bem claro. Podem haver escoamentos laminares com R_e bem maior que 2000 e escoamentos turbulentos para valores menores que R_{ec} .

3.3 Interpretação física dos processos que levam à formação de turbulência

O número de Reynolds pode ser visto como uma razão entre os termos advectivos (inerciais) e os viscosos, da equação de Navier-Stokes.

$$\frac{u \frac{\partial u}{\partial x}}{\nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}} \approx \frac{U \frac{U}{L}}{\nu \frac{U}{L^2}} = \frac{UL}{\nu} \quad (3.2)$$

Assim, uma representação física dos processos que levam à formação de turbulência pode ser tirada do número de Reynolds.

- Os termos advectivos (inerciais) contribuem para que haja o aumento de perturbações que se formam no escoamento laminar (instabilidades);
- Os termos viscosos contém essas perturbações, tendo um papel estabilizador.

Desta forma, quando os termos viscosos não são suficientemente grandes para conter as instabilidades criadas pelos termos advectivos, a turbulência se forma.

3.4 Características observáveis no escoamento turbulento

As principais características observáveis no escoamento turbulento são:

- i) O vento (e qualquer outra variável) tem comportamento irregular. Essa quase aleatoriedade distingue o movimento turbulento de outros fenômenos, como ondas;
- ii) É possível escolher um valor médio, ou típico para as variáveis. Isso mostra que o movimento turbulento não é totalmente aleatório;
- iii) As quantidades envolvidas no escoamento variam apenas dentro de limites definidos. Isso mostra que é possível determinar uma escala de turbulência;
- iv) Há grandes quantidades de escalas de tempo e espaço superpostas;
- v) Os campos turbulentos são auto-similares, ou seja, as mesmas características são verificadas em escalas de tempo diferentes.

3.5 Procedimento matemático: médias de Reynolds

Soluções analíticas exatas das equações de Navier-Stokes não existem. Soluções numéricas são possíveis, mas mesmo essas, para casos de turbulência bem desenvolvida só seriam exatas se fossem disponíveis recursos computacionais e observacionais de uma tecnologia que ainda não dominamos.

O que se faz, então, é resolver as equações de Navier-Stokes para valores médios e não para valores instantâneos e exatos. Esse procedimento foi sugerido por Reynolds em 1895 e consiste na decomposição do campo turbulento em uma parte média e uma parte turbulenta, como segue, por exemplo, para as componentes da velocidade do vento.

$$\begin{aligned} u &= \langle u \rangle + u' \\ v &= \langle v \rangle + v' \\ w &= \langle w \rangle + w' \end{aligned} \quad (3.3)$$

Procedemos da mesma maneira para outras quantidades como pressão, densidade, temperatura, umidade, entre outras.

A média nas equações (3.3), a rigor, deve ser uma média sobre "ensemble", ou seja, uma média sobre um número suficiente de realizações sob condições semelhantes. Na prática, entretanto, isso é impossível, e o que normalmente se faz são médias temporais (em medidas locais como as de torre) ou espaciais (medidas por avião ou sensores remotos). Isso é possível pela hipótese ergódico que diz que as médias espaciais ou temporais tendem à média sobre "ensemble" quando o número de observações for suficientemente grande.

O operador média de Reynolds tem as seguintes propriedades:

$$\langle c \rangle = c \quad (3.4)$$

$$\langle cA \rangle = c \langle A \rangle \quad (3.5)$$

$$\langle \langle A \rangle \rangle = \langle A \rangle \quad (3.6)$$

$$\langle a' \rangle = 0 \quad (3.7)$$

$$\left\langle \frac{dA}{dt} \right\rangle = \frac{d \langle A \rangle}{dt} \quad (3.8)$$

$$\langle \langle A \rangle \langle B \rangle \rangle = \langle A \rangle \langle B \rangle \quad (3.9)$$

$$\langle a'b' \rangle \neq 0 \quad (3.10)$$

e semelhantemente a (3.10):

$$\langle a'^2 \rangle \neq 0 \quad (3.11)$$

$$\langle a'b'^2 \rangle \neq 0 \quad (3.12)$$

$$\langle a'^2 b'^2 \rangle \neq 0 \quad (3.13)$$

ou seja, a média do produto das perturbações não é necessariamente nula. Assim, desta forma, concluímos que para se obter uma solução dos campos médios das equações básicas, as variáveis que nelas aparecem devem ser decompostas em partes médias e turbulentas.

3.6 Equação da continuidade

Vamos agora reescrever a equação da continuidade e substituir na mesma suas variáveis já decompostas em partes média e turbulenta. Segue então que:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot v + \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} &= 0 \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + v \frac{\partial \rho}{\partial y} + w \frac{\partial \rho}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} &= 0 \end{aligned} \quad (3.14)$$

as variáveis são decompostas como segue:

$$u = \langle u \rangle + u' \quad (3.15)$$

$$v = \langle v \rangle + v' \quad (3.16)$$

$$w = \langle w \rangle + w' \quad (3.17)$$

$$\rho = \langle \rho \rangle + \rho' \quad (3.18)$$

substituindo as equações (3.15), (3.16), (3.17) e (3.18) em (3.14), resulta:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial(\langle \rho \rangle + \rho')}{\partial t} + (\langle u \rangle + u') \frac{\partial(\langle \rho \rangle + \rho')}{\partial x} + (\langle v \rangle + v') \frac{\partial(\langle \rho \rangle + \rho')}{\partial y} + \\ & (\langle w \rangle + w') \frac{\partial(\langle \rho \rangle + \rho')}{\partial z} + \frac{\partial(\langle u \rangle + u')}{\partial x} + \frac{\partial(\langle v \rangle + v')}{\partial y} + \frac{\partial(\langle w \rangle + w')}{\partial z} = 0 \end{aligned} \quad (3.19)$$

Separando os termos e aplicando a média de Reynolds:

$$\begin{aligned} & \left\langle \frac{\partial \langle \rho \rangle}{\partial t} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial \rho'}{\partial t} \right\rangle + \left\langle \langle u \rangle \frac{\partial \langle \rho \rangle}{\partial x} \right\rangle + \left\langle \langle u \rangle \frac{\partial \rho'}{\partial x} \right\rangle + \left\langle u' \frac{\partial \langle \rho \rangle}{\partial x} \right\rangle + \left\langle u' \frac{\partial \rho'}{\partial x} \right\rangle \\ & + \left\langle \langle v \rangle \frac{\partial \langle \rho \rangle}{\partial y} \right\rangle + \left\langle \langle v \rangle \frac{\partial \rho'}{\partial y} \right\rangle + \left\langle v' \frac{\partial \langle \rho \rangle}{\partial y} \right\rangle + \left\langle v' \frac{\partial \rho'}{\partial y} \right\rangle \\ & + \left\langle \langle w \rangle \frac{\partial \langle \rho \rangle}{\partial z} \right\rangle + \left\langle \langle w \rangle \frac{\partial \rho'}{\partial z} \right\rangle + \left\langle w' \frac{\partial \langle \rho \rangle}{\partial z} \right\rangle + \left\langle w' \frac{\partial \rho'}{\partial z} \right\rangle \\ & + \left\langle \frac{\partial \langle u \rangle}{\partial x} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial \langle v \rangle}{\partial y} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial \langle w \rangle}{\partial z} \right\rangle \\ & + \left\langle \frac{\partial u'}{\partial x} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial v'}{\partial y} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial w'}{\partial z} \right\rangle = 0 \end{aligned} \quad (3.20)$$

e por fim aplicando as propriedades do operador média, a equação (3.20) reduz-se a:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \langle \rho \rangle}{\partial t} + \langle u \rangle \frac{\partial \langle \rho \rangle}{\partial x} + \left\langle u' \frac{\partial \rho'}{\partial x} \right\rangle + \langle v \rangle \frac{\partial \langle \rho \rangle}{\partial y} + \left\langle v' \frac{\partial \rho'}{\partial y} \right\rangle + \langle w \rangle \frac{\partial \langle \rho \rangle}{\partial z} + \left\langle w' \frac{\partial \rho'}{\partial z} \right\rangle \\ & + \langle \rho \rangle \frac{\partial \langle u \rangle}{\partial x} + \langle \rho \rangle \frac{\partial \langle v \rangle}{\partial y} + \langle \rho \rangle \frac{\partial \langle w \rangle}{\partial z} \\ & + \left\langle \rho' \frac{\partial u'}{\partial x} \right\rangle + \left\langle \rho' \frac{\partial v'}{\partial y} \right\rangle + \left\langle \rho' \frac{\partial w'}{\partial z} \right\rangle \end{aligned} \quad (3.21)$$

Nota-se que aplicando a média de Reynolds e suas propriedades, apenas os termos que contém produtos de partes médias e produtos de partes turbulentas sobrevivem. Desta forma, reescreve-se a equação (3.21) em sua forma vetorial.

$$\underbrace{\frac{\partial \langle \rho \rangle}{\partial t}}_A + \underbrace{\langle v \rangle \cdot (\nabla \langle \rho \rangle)}_B + \underbrace{\langle v' \cdot (\nabla \rho') \rangle}_C + \underbrace{\langle \rho \rangle (\nabla \cdot \langle v \rangle)}_D + \underbrace{\langle \rho' (\nabla \cdot v') \rangle}_E = 0 \quad (3.22)$$

onde os termos acima representam:

- (A) evolução do campo médio de densidade;
- (B) advecção pelo vento médio;
- (C) advecção pelo vento turbulento;
- (D) divergência do vento (campo) médio;

(E) divergência do vento (campo) turbulento.

Os fenômenos turbulentos são mais importantes nas camadas mais baixas da atmosfera. Nesse caso, para essa região, pode-se mostrar que o escoamento é aproximadamente incompressível, de forma que a equação da continuidade pode ser escrita como:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (3.23)$$

Aplicando a média de Reynolds na equação (3.23):

$$\begin{aligned} \frac{\partial (\langle u \rangle + u')}{\partial x} + \frac{\partial (\langle v \rangle + v')}{\partial y} + \frac{\partial (\langle w \rangle + w')}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial \langle u \rangle}{\partial x} + \frac{\partial \langle v \rangle}{\partial y} + \frac{\partial \langle w \rangle}{\partial z} &= 0 \end{aligned} \quad (3.24)$$

Subtraindo (3.24) de (3.23), resulta:

$$\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial w'}{\partial z} = 0 \quad (3.25)$$

e podemos concluir que a incompressibilidade faz com que tanto a parte média como a parte turbulenta do escoamento não apresentem divergências.

3.7 Equação de difusão-advecção

A equação de difusão-advecção representa a conservação de um escalar qualquer que vamos chamar de c . Desta forma podemos representá-la como segue:

$$\frac{dc}{dt} = 0 \quad (3.26)$$

$$\frac{\partial c}{\partial t} + u \frac{\partial c}{\partial x} + v \frac{\partial c}{\partial y} + w \frac{\partial c}{\partial z} \quad (3.27)$$

Aplicando a média de Reynolds e suas propriedades à equação (3.27):

$$\begin{aligned} \frac{\partial c}{\partial t} + (\langle u \rangle + u') \frac{\partial (\langle c \rangle + c')}{\partial x} + (\langle v \rangle + v') \frac{\partial (\langle c \rangle + c')}{\partial y} + (\langle w \rangle + w') \frac{\partial (\langle c \rangle + c')}{\partial z} = 0 \\ \underbrace{\frac{\partial \langle c \rangle}{\partial t}}_A + \underbrace{\langle u \rangle \frac{\partial \langle c \rangle}{\partial x}}_B + \underbrace{\langle v \rangle \frac{\partial \langle c \rangle}{\partial y}}_C + \underbrace{\langle w \rangle \frac{\partial \langle c \rangle}{\partial z}}_D \\ + \underbrace{\left\langle u' \frac{\partial c'}{\partial x} \right\rangle}_E + \underbrace{\left\langle v' \frac{\partial c'}{\partial y} \right\rangle}_F + \underbrace{\left\langle w' \frac{\partial c'}{\partial z} \right\rangle}_G = 0 \end{aligned} \quad (3.28)$$

Os termos (B), (C) e (D) são os termos advectivos, os termos (E), (F) e (G), são advectivos não lineares e representam o transporte da componente turbulenta da quantidade c pelo vento turbulento. Podemos escrevê-los da seguinte maneira:

$$\left\langle u' \frac{\partial c'}{\partial x} \right\rangle = \frac{\partial \langle u' c' \rangle}{\partial x} - \left\langle c' \frac{\partial u'}{\partial x} \right\rangle \quad (3.29)$$

$$\left\langle v' \frac{\partial c'}{\partial y} \right\rangle = \frac{\partial \langle v' c' \rangle}{\partial y} - \left\langle c' \frac{\partial v'}{\partial y} \right\rangle \quad (3.30)$$

$$\left\langle w' \frac{\partial c'}{\partial z} \right\rangle = \frac{\partial \langle w' c' \rangle}{\partial z} - \left\langle c' \frac{\partial w'}{\partial z} \right\rangle \quad (3.31)$$

Substituindo as equações (3.29), (3.30) e (3.31) em (3.28), resulta:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \langle c \rangle}{\partial t} + \langle u \rangle \frac{\partial \langle c \rangle}{\partial x} + \langle v \rangle \frac{\partial \langle c \rangle}{\partial y} + \langle w \rangle \frac{\partial \langle c \rangle}{\partial z} \\ + \frac{\partial \langle u' c' \rangle}{\partial x} + \frac{\partial \langle v' c' \rangle}{\partial y} + \frac{\partial \langle w' c' \rangle}{\partial z} \\ + \left\langle c' \left(\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial w'}{\partial z} \right) \right\rangle = 0 \end{aligned} \quad (3.32)$$

mas pela equação da continuidade, concluímos que no último termo da equação (3.32), a parte que está entre parenteses é zero, e portanto (3.32) torna-se:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \langle c \rangle}{\partial t} = - \langle u \rangle \frac{\partial \langle c \rangle}{\partial x} - \langle v \rangle \frac{\partial \langle c \rangle}{\partial y} - \langle w \rangle \frac{\partial \langle c \rangle}{\partial z} \\ - \frac{\partial \langle u' c' \rangle}{\partial x} - \frac{\partial \langle v' c' \rangle}{\partial y} - \frac{\partial \langle w' c' \rangle}{\partial z} \end{aligned} \quad (3.33)$$

Na equação (3.37) aparecem três novas incógnitas $\langle u' c' \rangle$, $\langle v' c' \rangle$ e $\langle w' c' \rangle$. Estatís-

ticamente estes termos representam a média do produto das perturbações. Perturbação é igual ao desvio em relação à média. Por exemplo, para variáveis A e B , a média de produtos de desvios em relação a média é:

$$\frac{1}{N} (A - \langle A \rangle) (B - \langle B \rangle) = (A, B) \quad (3.34)$$

onde (A, B) representa a covariância. Desta forma, $\langle u'c' \rangle$, $\langle v'c' \rangle$ e $\langle w'c' \rangle$ são covariâncias. Fisicamente estes termos representam os fluxos turbulentos.

$\langle u'c' \rangle \rightarrow$ fluxo turbulento de c na direção x ;

$\langle v'c' \rangle \rightarrow$ fluxo turbulento de c na direção y ;

$\langle w'c' \rangle \rightarrow$ fluxo turbulento de c na direção z .

Se $\langle w'c' \rangle > 0$, então nos locais onde o ar sobe, tem em média, perturbações positivas de c' . Nos locais onde o ar desce, em média, $c' < 0$. Ambos os efeitos citados tendem a gerar transporte de c para cima, ou seja, fluxo vertical turbulento positivo. Na equação (3.33) o que afeta o $\langle c \rangle$ não são os fluxos e sim suas divergências. Os termos de advecção pelo vento médio tem ordem de grandeza diferentes, pois em geral $\langle u \rangle$ e $\langle v \rangle$ são muito maiores que $\langle w \rangle$.

Para os termos turbulentos, frequentemente se faz uma especificação ou simplificação de homogeneidade horizontal da turbulência. Isto implica em gradientes horizontais dos fluxos turbulentos iguais a zero.

$$\frac{\partial \langle u'c' \rangle}{\partial x} \approx 0 \quad (3.35)$$

$$\frac{\partial \langle v'c' \rangle}{\partial y} \approx 0 \quad (3.36)$$

Assim, a equação de difusão-advecção (3.33), toma a seguinte forma:

$$\frac{\partial \langle c \rangle}{\partial t} = -\langle u \rangle \frac{\partial \langle c \rangle}{\partial x} - \langle v \rangle \frac{\partial \langle c \rangle}{\partial y} - \langle w \rangle \frac{\partial \langle c \rangle}{\partial z} - \frac{\partial \langle w'c' \rangle}{\partial z} \quad (3.37)$$

Se $c = \theta$, a equação (3.37) corresponde à equação de conservação de energia.

3.8 Equações de Navier-Stokes

Para complementar o sistema de equações básicas que "governam" o escoamento turbulento, vamos aplicar o método de Reynolds às equações de Navier-Stokes. Para a

componente x , temos:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \left(-u \frac{\partial u}{\partial x} - v \frac{\partial u}{\partial y} - w \frac{\partial u}{\partial z} \right) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \quad (3.38)$$

aplicando o método de Reynolds e assumindo que o fluido é incompressível na camada limite, a equação (3.38), torna-se:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \langle u \rangle}{\partial t} = & - \langle u \rangle \frac{\partial \langle u \rangle}{\partial x} - \langle v \rangle \frac{\partial \langle u \rangle}{\partial y} - \langle w \rangle \frac{\partial \langle u \rangle}{\partial z} \\ & - \left\langle u' \frac{\partial u'}{\partial x} \right\rangle - \left\langle v' \frac{\partial u'}{\partial y} \right\rangle - \left\langle w' \frac{\partial u'}{\partial z} \right\rangle \\ & - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \langle P \rangle}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 \langle u \rangle}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \langle u \rangle}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \langle u \rangle}{\partial z^2} \right) \end{aligned} \quad (3.39)$$

Para os termos turbulentos, temos:

$$\left\langle u' \frac{\partial u'}{\partial x} \right\rangle = \frac{\partial \langle u'u' \rangle}{\partial x} - \left\langle u' \frac{\partial u'}{\partial x} \right\rangle \quad (3.40)$$

$$\left\langle v' \frac{\partial u'}{\partial y} \right\rangle = \frac{\partial \langle v'u' \rangle}{\partial y} - \left\langle u' \frac{\partial v'}{\partial y} \right\rangle \quad (3.41)$$

$$\left\langle w' \frac{\partial u'}{\partial z} \right\rangle = \frac{\partial \langle w'u' \rangle}{\partial z} - \left\langle u' \frac{\partial w'}{\partial z} \right\rangle \quad (3.42)$$

Somando as equações (3.40), (3.41) e (3.42), temos:

$$\frac{\partial \langle u \rangle}{\partial t} = \frac{\partial \langle u'u' \rangle}{\partial x} + \frac{\partial \langle v'u' \rangle}{\partial y} + \frac{\partial \langle w'u' \rangle}{\partial z} - \left\langle u' \left(\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial w'}{\partial z} \right) \right\rangle \quad (3.43)$$

mas o último termo da equação (3.43) é zero, e portanto temos:

$$\frac{\partial \langle u \rangle}{\partial t} = \frac{\partial \langle u'u' \rangle}{\partial x} + \frac{\partial \langle v'u' \rangle}{\partial y} + \frac{\partial \langle w'u' \rangle}{\partial z} \quad (3.44)$$

Substituindo a equação (3.44) na equação (3.39), resulta:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \langle u \rangle}{\partial t} = & - \langle u \rangle \frac{\partial \langle u \rangle}{\partial x} - \langle v \rangle \frac{\partial \langle u \rangle}{\partial y} - \langle w \rangle \frac{\partial \langle u \rangle}{\partial z} \\ & - \frac{\partial \langle u'^2 \rangle}{\partial x} - \frac{\partial \langle v'u' \rangle}{\partial y} - \frac{\partial \langle w'u' \rangle}{\partial z} \\ & - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \langle P \rangle}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 \langle u \rangle}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \langle u \rangle}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \langle u \rangle}{\partial z^2} \right) \end{aligned} \quad (3.45)$$

e similarmente para $\langle v \rangle$ e $\langle w \rangle$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \langle v \rangle}{\partial t} = & - \langle u \rangle \frac{\partial \langle v \rangle}{\partial x} - \langle v \rangle \frac{\partial \langle v \rangle}{\partial y} - \langle w \rangle \frac{\partial \langle v \rangle}{\partial z} \\ & - \frac{\partial \langle u'v' \rangle}{\partial x} - \frac{\partial \langle v'^2 \rangle}{\partial y} - \frac{\partial \langle w'v' \rangle}{\partial z} \\ & - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \langle P \rangle}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 \langle v \rangle}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \langle v \rangle}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \langle v \rangle}{\partial z^2} \right) \end{aligned} \quad (3.46)$$

$$\begin{aligned} \underbrace{\frac{\partial \langle w \rangle}{\partial t}}_A = & - \underbrace{\langle u \rangle \frac{\partial \langle w \rangle}{\partial x} - \langle v \rangle \frac{\partial \langle w \rangle}{\partial y} - \langle w \rangle \frac{\partial \langle w \rangle}{\partial z}}_B \\ & - \underbrace{\frac{\partial \langle u'w' \rangle}{\partial x} - \frac{\partial \langle v'w' \rangle}{\partial y} - \frac{\partial \langle w'^2 \rangle}{\partial z}}_C \\ & - \underbrace{\frac{1}{\rho} \frac{\partial \langle P \rangle}{\partial z}}_D + \nu \underbrace{\left(\frac{\partial^2 \langle w \rangle}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \langle w \rangle}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \langle w \rangle}{\partial z^2} \right)}_E - \underbrace{g}_F \end{aligned} \quad (3.47)$$

onde:

- (A) variação local do vento médio no tempo;
- (B) advecção pelo vento médio;
- (C) divergência dos fluxos turbulentos;
- (D) gradiente de pressão;
- (E) dissipação viscosa;
- (F) gravidade.

As equações (3.45), (3.46) e (3.47) são a forma turbulenta das equações de Navier-Stokes.

3.9 Equação de balanço de fluxo de energia cinética turbulenta

A equação de Navier Stokes pode ser escrita, para escoamentos turbulentos, da seguinte maneira:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = -u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{1}{\langle \rho \rangle} \frac{\partial P}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} + g_i - g_i \frac{\theta'}{\langle \theta_v \rangle} - 2\varepsilon_{ijk} \Omega_j u_k \quad (3.48)$$

Aplicando a decomposição de Reynolds $u_i = \langle u_i \rangle + u'_i$ para os campos de velocidade e pressão em (3.48):

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \langle u_i \rangle + \frac{\partial}{\partial t} u'_i = & - \left[\left(\langle u_j \rangle + u'_j \right) \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\langle u_i \rangle + u'_i \right) \right] - \frac{1}{\langle \rho \rangle} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\langle P \rangle + P' \right) \\ & + \nu \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} \left(\langle u_i \rangle + u'_i \right) + g_i - g_i \frac{\theta'}{\langle \theta_v \rangle} - 2\varepsilon_{ijk} \Omega_j \left(\langle u_k \rangle + u'_k \right) \end{aligned} \quad (3.49)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \langle u_i \rangle + \frac{\partial}{\partial t} u'_i = & - \langle u_j \rangle \frac{\partial}{\partial x_j} \langle u_i \rangle - \langle u_j \rangle \frac{\partial}{\partial x_j} u'_i - u'_j \frac{\partial}{\partial x_j} \langle u_i \rangle - u'_j \frac{\partial}{\partial x_j} u'_i \\ & - \frac{1}{\langle \rho \rangle} \frac{\partial}{\partial x_i} \langle P \rangle - \frac{1}{\langle \rho \rangle} \frac{\partial}{\partial x_i} P' + \nu \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} \langle u_i \rangle + \nu \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} u'_i \\ & - 2\varepsilon_{ijk} \Omega_j \langle u_k \rangle - 2\varepsilon_{ijk} \Omega_j u'_k + g_i - g_i \frac{\theta'}{\langle \theta_v \rangle} \end{aligned} \quad (3.50)$$

Aplicando o operador média em ambos os lados da equação (3.50):

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial}{\partial t} \langle u_i \rangle \right\rangle + \left\langle \frac{\partial}{\partial t} u'_i \right\rangle = & - \left\langle \langle u_j \rangle \frac{\partial}{\partial x_j} \langle u_i \rangle \right\rangle - \left\langle \langle u_j \rangle \frac{\partial}{\partial x_j} u'_i \right\rangle \\ & - \left\langle u'_j \frac{\partial}{\partial x_j} \langle u_i \rangle \right\rangle - \left\langle u'_j \frac{\partial}{\partial x_j} u'_i \right\rangle \\ & - \left\langle \frac{1}{\langle \rho \rangle} \frac{\partial}{\partial x_i} \langle P \rangle \right\rangle - \left\langle \frac{1}{\langle \rho \rangle} \frac{\partial}{\partial x_i} P' \right\rangle \\ & + \left\langle \nu \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} \langle u_i \rangle \right\rangle + \left\langle \nu \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} u'_i \right\rangle \\ & - \langle 2\varepsilon_{ijk} \Omega_j \langle u_k \rangle \rangle - \langle 2\varepsilon_{ijk} \Omega_j u'_k \rangle + g_i - g_i \frac{\langle \theta' \rangle}{\langle \theta_v \rangle} \end{aligned} \quad (3.51)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \langle u_i \rangle + \frac{\partial}{\partial t} \langle u'_i \rangle = & - \langle u_j \rangle \frac{\partial}{\partial x_j} \langle u_i \rangle - \langle u_j \rangle \frac{\partial}{\partial x_j} \langle u'_i \rangle - \langle u'_j \rangle \frac{\partial}{\partial x_j} \langle u_i \rangle \\ & - \left\langle u'_j \frac{\partial}{\partial x_j} u'_i \right\rangle - \frac{1}{\langle \rho \rangle} \frac{\partial}{\partial x_i} \langle P \rangle - \frac{1}{\langle \rho \rangle} \frac{\partial}{\partial x_i} \langle P' \rangle \\ & + \nu \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} \langle u_i \rangle + \nu \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} \langle u'_i \rangle \\ & - 2\varepsilon_{ijk} \Omega_j \langle u_k \rangle - 2\varepsilon_{ijk} \Omega_j \langle u'_k \rangle + g_i - g_i \frac{\langle \theta' \rangle}{\langle \theta_v \rangle} \end{aligned} \quad (3.52)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \langle u_i \rangle = & - \langle u_j \rangle \frac{\partial}{\partial x_j} \langle u_i \rangle - \left\langle u'_j \frac{\partial}{\partial x_j} u'_i \right\rangle - \frac{1}{\langle \rho \rangle} \frac{\partial}{\partial x_i} \langle P \rangle + \nu \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} \langle u_i \rangle \\ & - 2\varepsilon_{ijk} \Omega_j \langle u_k \rangle + g_i \end{aligned} \quad (3.53)$$

A equação (3.53) é a equação para o campo de velocidade média do movimento. Lembrando que:

$$\frac{\partial}{\partial t} u'_i = \frac{\partial}{\partial t} u_i - \frac{\partial}{\partial t} \langle u_i \rangle \quad (3.54)$$

podemos escrever como segue:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} u'_i = & \left[-u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{1}{\langle \rho \rangle} \frac{\partial P}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} + g_i - g_i \frac{\theta'}{\langle \theta_v \rangle} - 2\varepsilon_{ijk} \Omega_j u_k \right] \\ - & \left[-\langle u_j \rangle \frac{\partial}{\partial x_j} \langle u_i \rangle - \left\langle u'_j \frac{\partial}{\partial x_j} u'_i \right\rangle - \frac{1}{\langle \rho \rangle} \frac{\partial}{\partial x_i} \langle P \rangle + \nu \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} \langle u_i \rangle - 2\varepsilon_{ijk} \Omega_j \langle u_k \rangle + g_i \right] \end{aligned} \quad (3.55)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} u'_i = & - \langle u_j \rangle \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} - u'_j \frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_j} - u'_j \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} + \left\langle u'_j \frac{\partial}{\partial x_j} u'_i \right\rangle - \frac{1}{\langle \rho \rangle} \frac{\partial P'}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 u'_i}{\partial x_j^2} \\ & - g_i \frac{\theta'}{\langle \theta_v \rangle} - 2\varepsilon_{ijk} \Omega_j u'_k \end{aligned} \quad (3.56)$$

Multiplicando (3.56) por u'_i , resulta:

$$\begin{aligned} u'_i \frac{\partial}{\partial t} u'_i = & - u'_i \langle u_j \rangle \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} - u'_i u'_j \frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_j} - u'_i u'_j \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} + u'_i \left\langle u'_j \frac{\partial}{\partial x_j} u'_i \right\rangle \\ & - u'_i \frac{1}{\langle \rho \rangle} \frac{\partial P'}{\partial x_i} + u'_i \nu \frac{\partial^2 u'_i}{\partial x_j^2} - u'_i g_i \frac{\theta'}{\langle \theta_v \rangle} - 2\varepsilon_{ijk} u'_i \Omega_j u'_k \end{aligned} \quad (3.57)$$

Pela regra da cadeia,

$$\frac{1}{2} \frac{\partial X^2}{\partial Y} = X \frac{\partial X}{\partial Y} \quad (3.58)$$

e pelas propriedades do tensor de Levi-Civita,

$$\varepsilon_{ijk} A_i B_j C_k = 0 \quad (3.59)$$

A equação (3.57), é reescrita da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\partial u_i'^2}{\partial t} = & - \frac{1}{2} \langle u_j \rangle \frac{\partial u_i'^2}{\partial x_j} - u_i' u_j' \frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_j} - \frac{1}{2} u_j' \frac{\partial u_i'^2}{\partial x_j} + u_i' \left\langle u_j' \frac{\partial u_i'}{\partial x_j} \right\rangle \\ & - u_i' \frac{1}{\langle \rho \rangle} \frac{\partial P'}{\partial x_i} + u_i' \nu \frac{\partial^2 u_i'}{\partial x_j^2} - u_i' g_i \frac{\theta'}{\langle \theta_v \rangle} \end{aligned} \quad (3.60)$$

No entanto a energia cinética turbulenta por unidade de massa é definida como segue:

$$E = \frac{1}{2} u_i'^2 \quad (3.61)$$

Substituindo (3.61) em (3.60), obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial t} = & - \langle u_j \rangle \frac{\partial E}{\partial x_j} - u_i' u_j' \frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_j} - u_j' \frac{\partial E}{\partial x_j} + u_i' \left\langle u_j' \frac{\partial u_i'}{\partial x_j} \right\rangle - u_i' \frac{1}{\langle \rho \rangle} \frac{\partial P'}{\partial x_i} \\ & + u_i' \nu \frac{\partial^2 u_i'}{\partial x_j^2} - u_i' g_i \frac{\theta'}{\langle \theta_v \rangle} \end{aligned} \quad (3.62)$$

A equação (3.62) é a equação de balanço da energia cinética turbulenta.

Em posse das equações (3.56) e (3.62), vamos obter a equação de balanço de fluxo de energia cinética turbulenta, ou seja:

$$\frac{\partial}{\partial t} (u_i' E) = u_i' \frac{\partial E}{\partial t} + E \frac{\partial u_i'}{\partial t} \quad (3.63)$$

Por conveniência faremos uma mudança de índices na equação (3.63), tornando-a:

$$\frac{\partial}{\partial t} (u_j' E) = u_j' \frac{\partial E}{\partial t} + E \frac{\partial u_j'}{\partial t} \quad (3.64)$$

Desenvolvendo o 1º termo do lado direito da equação (3.64):

$$\begin{aligned} u_j' \frac{\partial E}{\partial t} = & u_j' \langle u_j \rangle \frac{\partial E}{\partial x_j} - u_i' u_j'^2 \frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_j} - u_j'^2 \frac{\partial E}{\partial x_j} \\ & + u_j' u_i' \frac{\partial}{\partial x_j} \langle u_j' u_i' \rangle - \frac{u_j'}{\langle \rho \rangle} \frac{\partial}{\partial x_i} (u_i' P') + u_j' u_i' \nu \frac{\partial^2 u_i'}{\partial x_j^2} \\ & - u_j' u_i' g_i \frac{\theta'}{\langle \theta_v \rangle} \end{aligned} \quad (3.65)$$

Desenvolvendo o 2º termo do lado direito da equação (3.64):

$$\begin{aligned}
E \frac{\partial}{\partial t} u'_j &= - E \langle u_m \rangle \frac{\partial u'_j}{\partial x_m} - E u'_m \frac{\partial \langle u_j \rangle}{\partial x_m} - E u'_m \frac{\partial u'_j}{\partial x_m} \\
&+ E \left\langle u'_m \frac{\partial u'_j}{\partial x_m} \right\rangle - \frac{E}{\langle \rho \rangle} \frac{\partial P'}{\partial x_j} + E \nu \frac{\partial^2 u'_j}{\partial x_m^2} \\
&- E g_i \frac{\theta'}{\langle \theta_v \rangle} - 2 \varepsilon_{jmn} E \Omega_m u'_n
\end{aligned} \tag{3.66}$$

Retornando aos índices i, j, k em (3.66) e somando as equações (3.65) e (3.66), obtemos:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} (u'_j E) &= \langle u_j \rangle \frac{\partial u'_j E}{\partial x_j} - u'_i u'_j \frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_j} - u'_j \frac{\partial E}{\partial x_j} \\
&+ u'_j u'_i \frac{\partial}{\partial x_j} \langle u'_j u'_i \rangle - \frac{u'_j}{\langle \rho \rangle} \frac{\partial}{\partial x_i} (u'_i P') + u'_j u'_i \nu \frac{\partial^2 u'_i}{\partial x_j^2} \\
&- u'_j u'_i g_i \frac{\theta'}{\langle \theta_v \rangle} - \frac{E}{\langle \rho \rangle} \frac{\partial P'}{\partial x_j} - E g_i \frac{\theta'}{\langle \theta_v \rangle}
\end{aligned} \tag{3.67}$$

Finalmente vamos aplicar o operador média na equação (3.67) e reescrevê-la para uma CLP convectiva:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} \langle u'_j E \rangle &= - \langle u' w'^2 \rangle \frac{\partial \langle u \rangle}{\partial z} - \langle v' w'^2 \rangle \frac{\partial \langle v \rangle}{\partial z} + \langle E \rangle \frac{\partial}{\partial z} \langle w'^2 \rangle \\
&+ \langle w' u' \rangle \frac{\partial}{\partial z} \langle w' u' \rangle + \langle w' v' \rangle \frac{\partial}{\partial z} \langle w' v' \rangle + \langle w'^2 \rangle \frac{\partial}{\partial z} \langle w'^2 \rangle \\
&- \frac{1}{\rho} \left[\left\langle w' \frac{\partial}{\partial x} (u' P') + w' \frac{\partial}{\partial y} (v' P') + w' \frac{\partial}{\partial z} (w' P') + E \frac{\partial P'}{\partial z} \right\rangle \right] \\
&+ \nu \left\langle w' u' \frac{\partial^2 u'}{\partial z^2} + w' v' \frac{\partial^2 v'}{\partial z^2} + w'^2 \frac{\partial^2 w'}{\partial z^2} \right\rangle \\
&- \frac{g}{\langle \theta_v \rangle} \langle w'^2 \theta' \rangle - \frac{g}{\langle \theta_v \rangle} \langle E \theta' \rangle
\end{aligned} \tag{3.68}$$

Esta é a equação proposta para o balanço de fluxo de energia cinética turbulenta. A partir de agora, alguns termos serão avaliados no modelo LES.

3.10 Avaliação dos termos da equação de balanço de fluxo de energia cinética turbulenta

Após chegar a equação de balanço de fluxo de ECT (equação 3.68), faremos a análise de alguns termos da mesma. Vejamos os resultados:

Termos 1 e 2 da equação (3.68).

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle u'_j E \rangle = - \langle u' w'^2 \rangle \frac{\partial \langle u \rangle}{\partial z} - \langle v' w'^2 \rangle \frac{\partial \langle v \rangle}{\partial z} \quad (3.69)$$

Segundo Moeng (1989), estes termos representam o cisalhamento do vento médio. O cisalhamento é maior próximo a superfície e no topo da CLP. Conforme a figura 3.1(a), as previsões se confirmam.

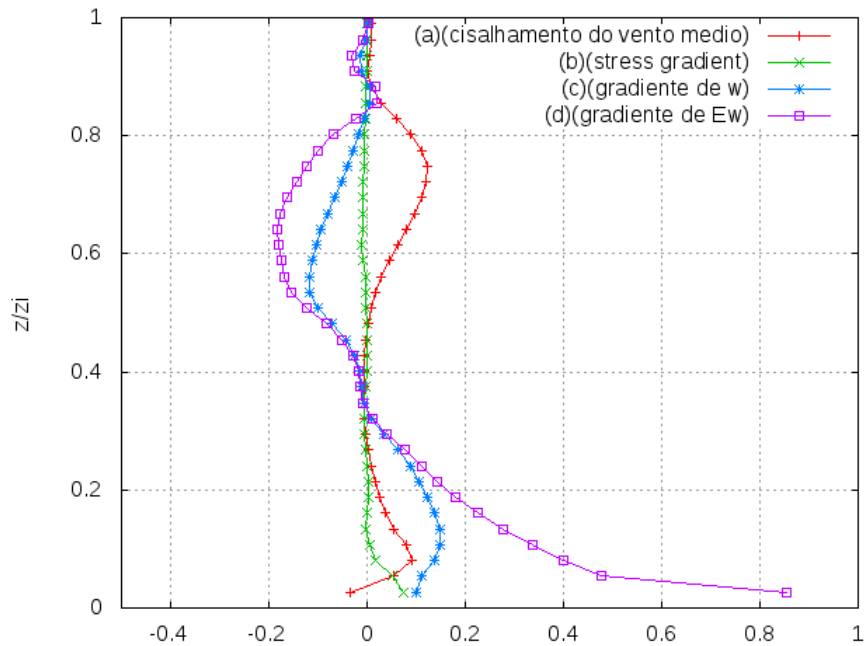


Figura 3.1: perfil vertical dos termos da equação de balanço de fluxo de ECT.

Termos 4 e 5 da equação (3.68).

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle u'_j E \rangle = \langle w' u' \rangle \frac{\partial}{\partial z} \langle w' u' \rangle + \langle w' v' \rangle \frac{\partial}{\partial z} \langle w' v' \rangle \quad (3.70)$$

Segundo Moeng (1989), estes termos representam o stress gradiente (“gradientes do tensor de Reynolds”). A tendência é que esses termos diminuam de valor em relação a altura da CLP. De fato isto ocorre conforme figura 3.1(b).

Termo 6 da equação (3.68).

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle u'_j E \rangle = \langle w'^2 \rangle \frac{\partial}{\partial z} \langle w'^2 \rangle \quad (3.71)$$

O termo (6) representa o gradiente da componente turbulenta do vento médio na direção z . Verificamos na figura 3.1(c) que ele cresce com a altura da CLP e logo em seguida este gradiente tende a diminuir até sofrer uma inversão, ou seja ele passa a ser negativo e novamente passa a aumentar em módulo até que retorna a ser positivo. Este termo também concorda com o resultado obtido por Moeng (1989), conforme podemos verificar na figura (3.2).

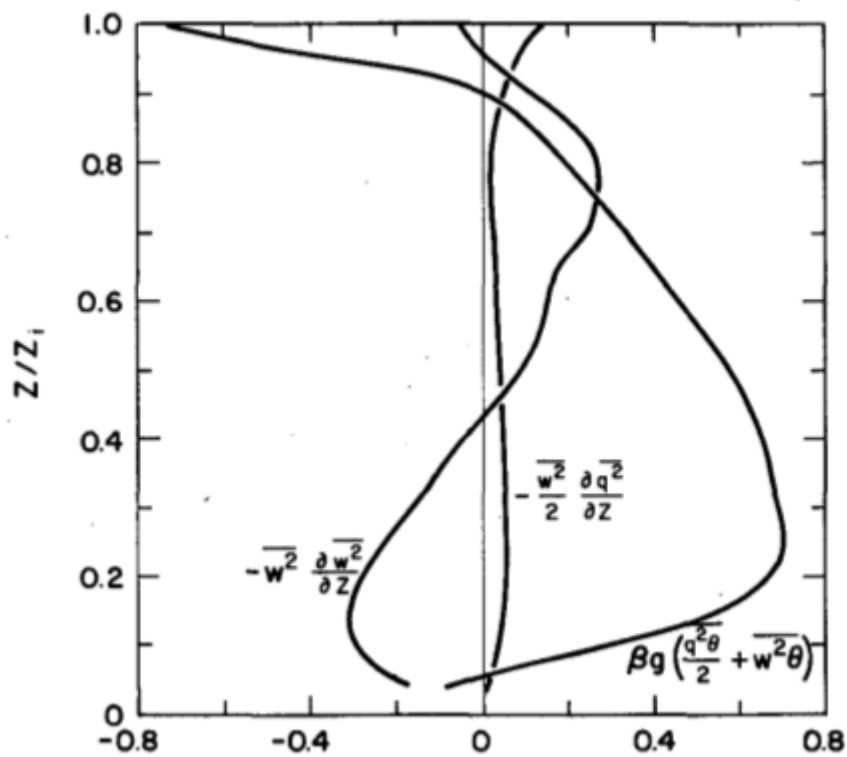


Figura 3.2: perfil vertical dos termos da equação de balanço de fluxo de ECT segundo MOENG.

Termo (3) da equação (3.68).

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle u'_j E \rangle = \frac{\partial}{\partial z} \langle w'^2 E \rangle \quad (3.72)$$

E finalmente, o termo (3) que representa o gradiente do fluxo de ECT pela componente turbulenta do vento médio na direção z , observamos um gradiente muito intenso próximo à superfície e um decaimento do mesmo em função da altura da CLP conforme a figura 3.1(d).

4 CONCLUSÃO

No presente trabalho derivamos uma equação para o Balanço de Fluxo de Energia Cinética Turbulenta para uma camada limite planetária. Partindo de Leis da mecânica dos fluidos e da termodinâmica chegamos às equações de Navier-Stokes. Após esta etapa obtemos a equação da Energia Cinética Turbulenta e finalmente propomos uma equação de balanço de fluxo de ECT. A partir daí, é feita uma breve avaliação de alguns termos desta equação e traça-se comparativos com o trabalho pioneiro de (MOENG, 1989). A análise e interpretação destes termos é muito trabalhosa, devido ao fato da equação para o fluxo de ECT não apresentar solução analítica. Assim fez-se uso do modelo de simulação numérica dos grandes turbilhões (LES).

Na análise dos termos (1 e 2), (4 e 5), (6) e (3), foi obtido os resultados explicitados pela (figura 3.1). Em geral, os resultados obtidos foram satisfatórios. Para os termos (1 e 2), que representam o cisalhamento do vento médio, esperávamos que estes valores fossem grandes próximos à superfície, o que de fato ocorre, assim como no topo da camada limite planetária. Já para os termos (4 e 5), que representam o gradiente do tensor de Reynolds, esperávamos um gradiente mais intenso próximo à superfície, porém observa-se uma pequena elevação do mesmo com a altura, mas em geral, ele permanece constante. Já o termo (6) que representa o gradiente da componente turbulenta do vento médio na direção z , foi o que apresentou maior concordância com os dados obtidos por (MOENG, 1989). O gradiente é intenso próximo à superfície terrestre caracterizando assim a camada limite planetária (CLP). Em relação ao termo (3), que representa o gradiente do fluxo de ECT pela componente turbulenta do vento médio na direção z , é preciso analisá-lo melhor, até mesmo para outras séries de dados, visto que não podemos afirmar uma boa precisão em relação ao trabalho de Moeng (1989).

Assim, podemos concluir que, frente à complexidade do tratamento matemático e experimental do assunto proposto, conseguimos avanços em relação ao tema. Uma boa revisão da teoria foi realizada, passo a passo, privilegiando uma série de demonstrações. Por outro lado, a simulação numérica empregada é de grande valia para a abordagem do fenômeno em função de sua grande complexidade. Para um futuro trabalho, cabe um refinamento da equação proposta. Até chegar em sua forma final, muitos cálculos são feitos, abrindo assim, margem para erros, visto que a equação obtida foi somente para a componente " z " do sistema de coordenadas, ou seja, assumimos a homogeneidade horizontal da turbulência. Outras séries de dados serão rodadas e o próprio programa que faz o cálculo dos termos da equação de balanço de fluxo de energia cinética turbulenta pode ser revisado e melhorado. Comparações com outros trabalhos pioneiros poderão ser realizadas.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

LANDAU, L. D.; LIFSHITZ, E. M. **Fluid mechanics**. London: Pergamon Press, 1959. 536 p.

MOENG, C.-H. Evaluation of turbulence transport and dissipation closures in second-order modeling. **Journal of Atmospheric Sciences**, v. 46, n. 14, p. 2311–2330, 1989.

POPE, S. B. **Turbulent flows**. Cambridge, Reino Unido: Cambridge University Press, 2000. 771 p.

PUHALES, F. S. **Parametrização do transporte de energia cinética turbulenta na camada limite convectiva**. 2011. 159 f. Tese (Doutorado em Física) — Universidade Federal de Santa Maria, Avenida Roraima, 1000, Centro de Ciências Naturais e Exatas - CCNE/UFSM, 2011.