

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA MARIA
CENTRO DE CIÊNCIAS NATURAIS E EXATAS
CURSO DE FÍSICA - BACHARELADO**

**AVANÇO DO PERIASTRO E DEFLEXÃO DA LUZ NO
CAMPO GRAVITACIONAL DE ESTRELAS E BURACOS
NEGROS CARREGADOS E EM ROTAÇÃO**

TRABALHO DE GRADUAÇÃO EM FÍSICA

Gustavo Cipolat Colvero

**Santa Maria
2007**

AVANÇO DO PERIASTRO E DEFLEXÃO DA LUZ NO CAMPO GRAVITACIONAL DE ESTRELAS E BURACOS NEGROS CARREGADOS E EM ROTAÇÃO

por

Gustavo Cipolat Colvero

Monografia apresentada ao Curso de Física - Bacharelado da
Universidade Federal de Santa Maria (UFSM, RS), como requisito
parcial para a obtenção do grau de
Bacharel em Física

Orientador: Vilson Tonin Zanchin

Santa Maria
2007

DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho aos meus pais, minha irmã e amigos pelo apoio e confiança incondicionais e ao meu orientador pelos ensinamentos e pela paciência.

Filosofia é escrita neste grande livro (o universo) que está sempre aberto à nossa visão. Mas ele não pode ser entendido a menos que primeiro se aprenda a linguagem e os símbolos com os quais ele é escrito, e estes símbolos são triângulos, círculos e outras figuras geométricas sem as quais não é humanamente possível compreender sequer uma palavra; sem estas é como se andássemos por um labirinto sombrio...

(Galileo Galilei, 1823)

RESUMO

Trabalho de Graduação em Física
Curso de Física - Bacharelado
Universidade Federal de Santa Maria

AVANÇO DO PERIASTRO E DEFLEXÃO DA LUZ NO CAMPO GRAVITACIONAL DE ESTRELAS E BURACOS NEGROS CARREGADOS E EM ROTAÇÃO

AUTOR: GUSTAVO CIPOLAT COLVERO

ORIENTADOR: VILSON TONIN ZANCHIN

Data e local da defesa: Santa Maria, 8 de março de 2007.

Neste trabalho obtém-se analiticamente expressões para o avanço do periastro e para a deflexão da luz no campo gravitacional de buracos negros eletricamente carregados e em rotação. Apresenta-se inicialmente o problema através de uma breve recapitulação histórica onde se explica a respeito da incompatibilidade entre a existência de tais fenômenos e a gravitação newtoniana e faz-se uma breve revisão a respeito da gravitação relativística. Em seguida, apresentam-se os espaços tempos de Reissner-Nordström-anti de Sitter e de Kerr-Newman, que representam as situações de interesse e obtém-se então as expressões analíticas desejadas por meio da solução aproximada das equações diferenciais que representam o movimento. Constatamos que a presença da carga elétrica na fonte ocasiona uma diminuição tanto do avanço do periastro quanto da deflexão da luz e que pode haver, inclusive, situações especiais em que estes se anulam. Por fim, faz-se uma análise dos resultados obtidos em comparação com dados astrofísicos do sistema solar, onde encontra-se um valor máximo para a carga elétrica do Sol da ordem de $10^{21}C$ (valor este incompatível com previsões feitas através de efeitos locais causados pelo campo elétrico). Sugere-se ainda uma aplicação dos resultados obtidos no estudo da influência do campo magnético de uma estrela no movimento de corpos vizinhos, onde a geometria nas suas vizinhanças seria descrita pela métrica de Kerr-Newman, como uma primeira aproximação e para pontos distantes de uma estrela eletricamente carregada, ou magnetizada, e em rotação.

Palavras-chave: relatividade geral; estrelas; buracos negros; periastro

ABSTRACT

In the present study it is obtained analytic expressions to the periastron advance and light bending in the gravitational field of rotating and electrically charged black holes. First it is made a historical review emphasizing the incompatibility between Newtonian gravitation and the existence of such phenomena, and a brief review of relativistic gravitation is also presented. Next it is introduced the Reissner-Nordström-anti de Sitter and Kerr-Newman geometries and then the relevant analytic expressions are found by means of approximated solutions of the differential equations governing the particles motion in each geometry. We notice that the presence of electric charge decreases the perihelion advance as well as the light deflection in comparison to the uncharged cases, and there are extreme situations where such effects may even vanish. Then the analytic results are compared to the astronomical data of the solar system, and it is found that Sun's net electric charge is bounded by $Q \lesssim 10^{21}C$ (which is incompatible with predictions made based in the local effects of the electric field). At last, by using Kerr-Newman black hole metric as a first approximation to the large distance gravitational field of a rotating, electrically charged (or magnetized) star, it is proposed that those results could be applied to study the influence of the magnetic field of a star in the motion of the surrounding objects.

Key-words: general relativity; black holes; stars; light bending; periastron

LISTA DE TABELAS

1	Evolução das observações do avanço do periélio de Mercúrio	12
2	Unidades geometrizadas	43
3	Alguns valores numéricos comparativos	44

LISTA DE FIGURAS

1	Órbitas newtonianas e órbitas observadas	12
2	Desvio gravitacional da luz	14
3	Parâmetro de impacto	29

SUMÁRIO

1	Introdução	11
2	Revisão bibliográfica	15
2.1	A métrica do espaço-tempo e as equações de campo de Einstein	15
2.2	Movimento geodésico	16
2.2.1	Intervalos e vetores tipo-tempo, nulos e tipo-espaço	16
2.2.2	Transporte paralelo	16
2.2.3	Geodésias	16
2.2.4	Movimento de partículas livres e de raios de luz	17
2.3	Quantidades conservadas e primeiras integrais das equações do movimento . .	18
2.4	As geometrias padrão da relatividade geral	18
2.4.1	A métrica e as coordenadas de Schwarzschild	19
2.4.2	A métrica de Schwarzschild-anti de Sitter	20
2.4.3	A solução de Reissner-Nordström-anti de Sitter (RNAdS)	20
2.4.4	A métrica de Kerr	21
2.4.5	A solução de Kerr-Newman (KN)	22
3	Geodésicas, avanço do periastro e desvio da luz: caso estático	25
3.1	Equações de movimento na métrica RNAdS	25
3.2	O avanço do periastro	27
3.3	Desvio da luz	28
4	Geodésicas, avanço do periastro e desvio da luz: caso com rotação	31

4.1	Equações de movimento na métrica de Kerr-Newman	31
4.2	O avanço do periastro	34
4.2.1	Primeira abordagem	35
4.2.2	Segunda abordagem	37
4.3	Desvio da luz	38
5	Últimas considerações	41
	Apêndice A – Unidades e dimensões	43
	Apêndice B – Resultados anteriores	45
B.1	Resultados para o caso Schwarzschild-anti de Sitter	45
B.2	Resultados para o caso Kerr	46
	Referências	47

1 INTRODUÇÃO

Dentre os testes clássicos da Teoria da Relatividade Geral dois efeitos se destacam, a saber: a precessão do periastro na órbita de partículas de teste e a deflexão da luz por um corpo central.

Sempre que uma partícula de teste executa um movimento ligado não-circular no campo gravitacional de uma estrela, sua posição é confinada entre uma distância mínima e uma distância máxima, chamadas, respectivamente, de periastro e apastro, ambos genericamente chamados de pontos de retorno. Por razões históricas, quando se trata do sistema solar, o periastro passa a se chamar periélio e o apastro passa a se chamar afélio.

Qualquer que seja o potencial gravitacional associado a estrela, desde que a este corresponda um campo de forças centrais (no sentido newtoniano), todo movimento ligado não-circular de partículas de teste é confinado entre dois, e apenas dois, pontos de retorno (MARION; THORTON, 1995). É possível, entretanto, que a posição angular dos pontos de retorno não seja fixa, mas varie no tempo, ou seja, é possível que após uma revolução orbital da partícula de teste, o periastro tenha se deslocado de um certo ângulo em relação à órbita anterior. Quando isto ocorre diz-se que os pontos de retorno precessam, ou, mais especificamente, avançam. A figura 1 ilustra uma situação desse tipo.

O fenômeno da precessão dos pontos de retorno foi primeiramente observado na órbita do planeta Mercúrio no final do século XIX, quando se percebeu, a partir de observações astronômicas acumuladas por muitas décadas, que havia um avanço secular em seu periélio.

A questão do avanço do periélio de Mercúrio foi inicialmente considerada um problema, pois representava uma crise no paradigma da gravitação newtoniana, já que a lei da gravitação de Newton é uma lei de força do tipo inverso-do-quadrado, da qual se obtém as leis de Kepler, segundo as quais as órbitas dos planetas deveriam ser elípticas.

Quando se considera o sistema planetário em sua complexidade total, ou seja, quando se trata este como um sistema de muitos corpos (e não um simples sistema de dois corpos), pode-se realmente, através da teoria newtoniana, prever um certo avanço no periélio de Mercúrio. En-

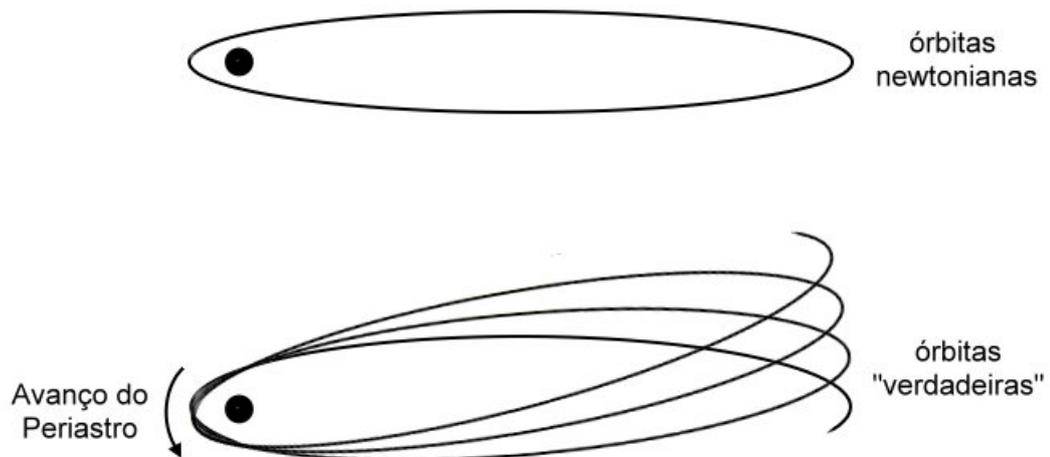


Figura 1: Órbitas newtonianas e órbitas observadas

tretanto, mesmo quando descontamos esse avanço devido a todas as contribuições newtonianas conhecidas, do valor total do avanço do periélio de Mercúrio, que é da ordem de 5599.74 ± 0.41 segundos de arco por século da Terra, ainda ficamos com cerca de 43 segundos de arco cuja natureza não se pode explicar do ponto de vista newtoniano.

Durante os últimos cem anos foram utilizadas diversas técnicas observacionais com a finalidade de se obter valores cada vez mais precisos para o avanço do periélio de mercúrio (PIREAU; ROZELOT, 2003). A tabela 1 tem uma pequena amostra da evolução das observações, indicando o quanto do avanço do periélio de Mercúrio não é explicado pela gravitação newtoniana.

Tabela 1: Evolução das observações do avanço do periélio de Mercúrio

Referência	Avanço "excedente" do Periélio (segundos de arco/século)
Newcomb, 1898	~ 43.37
Clemence, 1943	42.84 ± 1.01
Clemence, 1947	42.57 ± 0.96
Duncombe, 1958	43.10 ± 0.44
Wayman, 1966	43.95 ± 0.41
Shapiro et al., 1972	43.15 ± 0.30
Morrison & Ward, 1975	41.90 ± 0.50
Shapiro et al., 1976	43.11 ± 0.21
Anderson et al., 1978	43.3 ± 0.2
Bretagnon, 1982	45.40 ± 0.05
Rana, 1987	45.25 ± 0.05
Krasinsky et al., 1986	42.83 ± 0.12
Krasinsky et al., 1993	42.985 ± 0.061

Embora os resultados mais recentes apresentem um desvio padrão menor, é o resultado obtido em 1972 (SHAPIRO et al., 1972) o mais citado mesmo em artigos atuais, e é, portanto, a este que nos referiremos daqui por diante.

Apesar de ter havido inúmeras tentativas de resolver o problema, como modificar a lei da gravitação de Newton e até mesmo supor a existência de um planeta não observado, a questão só foi resolvida em 1915, com o surgimento de uma nova teoria da gravitação, a Relatividade Geral.

A solução obtida por Karl Schwarzschild em 1916 para as novas equações de campo resulta em equações para o movimento planetário que prevêm a existência de um avanço de 42.98 segundos de arco por século no periélio de Mercúrio, portanto, de acordo com a relatividade geral, a ocorrência do avanço do periastro não representa nenhuma anomalia, mas sim, algo que se espera no movimento planetário.

Por outro lado, o encurvamento de raios de luz na presença de campos gravitacionais é um resultado direto do princípio da equivalência e não tem nenhum tipo de análogo na gravitação newtoniana.

Para ver isso, consideremos o exemplo hipotético de uma nave espacial movendo-se com aceleração constante relativa a um referencial inercial K . Um raio de luz que entra na espaçonave viaja em uma linha reta em relação a K , mas em relação á nave acelerada este deve executar seu movimento em uma trajetória curva. De acordo com o princípio da equivalência, as observações realizadas na espaçonave acelerada em relação a um referencial inercial devem ser as mesmas que as realizadas por um observador que se encontra estacionado em um campo gravitacional homogêneo, cuja intensidade é tal que a aceleração devido à gravidade se equivalha a aceleração da espaçonave. Portanto, pode-se concluir que um feixe de luz terá sua trajetória defletida devido a presença do campo gravitacional (ROSSER, 1964). Este fenômeno foi primeiramente previsto por Einstein em 1907 (LORENTZ; EINSTEIN; MINKOWSKI, 2001), antes mesmo de a teoria da relatividade geral estar completa e foi observado pela primeira vez somente em 1919, quando observações realizadas durante um eclipse¹ mostraram que a luz vinda de estrelas distantes tinham sua trajetória defletida ao passar pelas vizinhanças do Sol. A figura 2 apresenta tal efeito de forma esquemática.

Como no caso do avanço do periélio de Mercúrio, o resultado observacional para o desvio da luz pelo Sol mais comumente citado não é dos mais recentes, mais sim o obtido por Fomalont e Sramek em 1976 (FOMALONT; SRAMEK, 1976), que indica um desvio de $1,761 \pm 0,016$

¹Houve duas expedições para realizar as observações durante o eclipse total do Sol em 1919, uma em Sobral, no Brasil e outra na Ilha de Príncipe, na África.

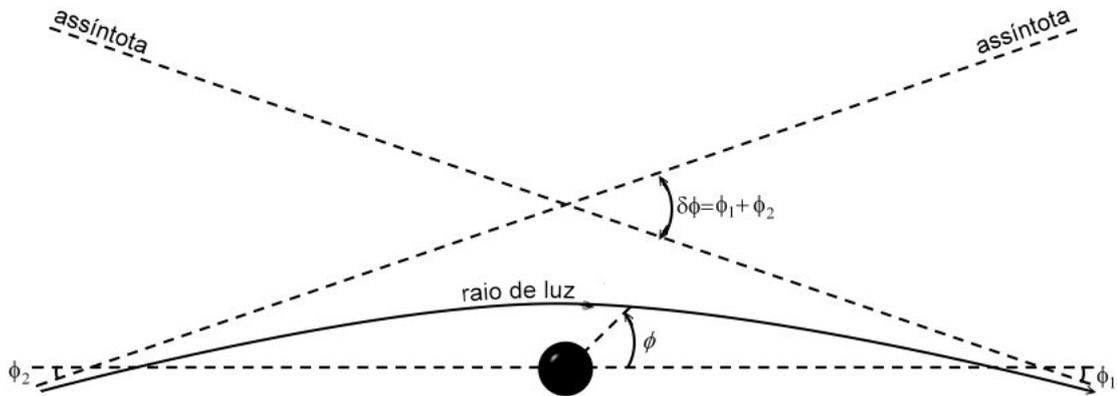


Figura 2: Desvio gravitacional da luz

segundos de arco.

Embora, possamos utilizar o princípio da equivalência para prever sua existência, precisamos conhecer as equações que descrevem o movimento para obter resultados quantitativos a respeito do desvio da luz, e estas dependem da natureza exata das fontes de campo gravitacional. Por exemplo, com a solução de Schwarzschild, obtém-se um desvio de 1,75 segundos de arco no campo gravitacional do Sol.

A despeito da grande concordância entre os dados observacionais e os previstos teoricamente com a geometria de Schwarzschild tanto para o desvio da luz quanto para o avanço do periastro, a existência de erro experimental sempre nos permite conjecturar se há algum fator não sendo considerado na previsão teórica, bem como impor limites em alguns parâmetros físicos associados ao problema.

No presente estudo consideramos presença de carga elétrica e de rotação na fonte, e também a existência de uma constante cosmológica e analisamos a influência destes parâmetros nos fenômenos do avanço do periastro e da deflexão da luz, dando às equações de movimento um tratamento que é, á medida do possível, análogo ao utilizado na gravitação newtoniana.

2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Neste capítulo faremos uma breve revisão abordando conceitos fundamentais em relatividade geral pertinentes ao presente trabalho. Introduzimos algumas noções básicas de geometria, discorrendo sobre o papel das coordenadas e de como se descreve o movimento de partículas de teste e de raios de luz do ponto de vista da gravitação relativística.

2.1 A métrica do espaço-tempo e as equações de campo de Einstein

Podemos imaginar o espaço curvo bidimensional correspondente à superfície de uma esfera como sendo uma superfície imersa num espaço euclidiano tri-dimensional. Podemos, da mesma maneira, ter um espaço curvo de 4 dimensões imerso em um espaço plano com maior número de dimensões. Tais espaços curvos são chamados espaços riemannianos (DIRAC, 1975). Em tais espaços curvos não podemos usar coordenadas cartesianas para rotular todos os pontos, mas sim, coordenadas curvilíneas. Seja então um sistema de coordenadas curvilíneas x^μ . Neste sistema de coordenadas, a distância ds entre os pontos x^μ e $x^\mu + dx^\mu$ é dada por

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu. \quad (2.1)$$

Dado então o sistema de coordenadas, os elementos $g_{\mu\nu}$, que são funções das próprias coordenadas, fixam todas as distâncias infinitesimais. Designamos então $g_{\mu\nu}$ por componentes do tensor métrico, ou métrica. A partir da métrica obtemos mais do que a informação a respeito das distâncias, dela obtemos o tensor de curvatura de Riemman, do qual obtém-se informação sobre a própria curvatura do espaço.

De acordo com a relatividade geral, o espaço-tempo é curvo no sentido de Riemman, mas com métrica não positivo-definida (é pseudo-Riemmaniano), e a gravitação origina-se de sua curvatura, a qual, por sua vez, origina-se da presença de matéria/energia. A métrica, que devido a sua assinatura não é mais dita riemanniana, mas sim lorentziana, é então obtida a partir das

equações de campo de Einstein

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}, \quad (2.2)$$

onde R , chamado escalar de curvatura, é o traço de $R_{\mu\nu}$, chamado tensor de Ricci, obtido a partir de contração do tensor de Riemann e Λ é a constante cosmológica. O tensor de componentes $T_{\mu\nu}$ é chamado de tensor de energia-momento e representa as fontes do campo gravitacional.

2.2 Movimento geodésico

2.2.1 Intervalos e vetores tipo-tempo, nulos e tipo-espaço

Nos espaços-tempos da relatividade geral o intervalo ds^2 dado pela Eq. (2.1) pode ser positivo, nulo ou negativo. Caso a métrica tenha assinatura $(-+++)$ (convenção que manteremos daqui por diante) dois pontos podem ser infinitesimalmente separados por um intervalo tipo-tempo ($ds^2 < 0$), nulo ($ds^2 = 0$), ou tipo-espaço ($ds^2 > 0$).

Um vetor de componentes u^μ é dito tipo-tempo se $g_{\mu\nu}u^\mu u^\nu = u^\mu u_\mu < 0$, nulo se $u^\mu u_\mu = 0$, ou tipo-espaço se $u^\mu u_\mu > 0$.

2.2.2 Transporte paralelo

Em um espaço curvo não há sentido em estabelecer uma relação de paralelismo entre vetores localizados em pontos diferentes, digamos, A e B . Entretanto, podemos considerar um ponto A' infinitesimalmente próximo a A e, neste ponto, definir um vetor que seja paralelo ao primeiro, localizado em A . Podemos então transportar o vetor de A até A' mantendo-o paralelo a si mesmo e constante seu comprimento. Desta maneira podemos definir o transporte paralelo do vetor ao longo de um caminho até o ponto B . Como caminhos diferentes conduzem a diferentes vetores em B , não podemos definir um vetor em B paralelo a um vetor em A de maneira absoluta, mas sim, relativa a um dado caminho. Podemos ainda transportar um vetor paralelamente de A através de uma curva fechada e resultar em um novo vetor em A que, geralmente, não é idêntico ao primeiro.

2.2.3 Geodésias

Suponhamos uma curva x^μ descrita por um parâmetro genérico τ . À cada ponto da curva podemos associar um vetor tangente $u^\mu = dx^\mu/d\tau$. Se, entre quaisquer dois pontos sobre a

curva os vetores tangente se relacionam por transporte paralelo, a curva é dita geodésia (ou geodésica). As curvas geodésias são tais que se τ é um a parâmetro afim, o vetor tangente satisfaz a equação

$$\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{\nu\sigma}^\mu \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\sigma}{d\tau} = 0. \quad (2.3)$$

Os símbolos Γ que aparecem nessa equação são chamados símbolos de Christoffel e se relacionam com a métrica da seguinte forma:

$$\Gamma_{\mu\nu}^\sigma = \frac{1}{2} g^{\sigma\beta} \left(\frac{\partial g_{\beta\mu}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial g_{\beta\nu}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\beta} \right), \quad (2.4)$$

onde $g^{\mu\nu}$ é definida de forma que seus elementos sejam representados por uma matriz que é a inversa da matriz que representa os elementos de $g_{\mu\nu}$.

Na relatividade geral as geodésias podem ser tipo-tempo, nulas ou tipo-espaço, de acordo com o vetor tangente. No que segue, estaremos interessados somente nos dois primeiros tipos.

2.2.4 Movimento de partículas livres e de raios de luz

Os espaços tempos da relatividade geral são explorados através do movimento de partículas de teste livres e de raios de luz, sendo consideradas livres partículas sobre as quais não haja influências além da gravitacional.

Em substituição à primeira lei de Newton, é postulado que partículas livres viajam sempre sobre geodésias tipo-tempo. Postula-se também que raios de luz viajam sobre geodésias nulas.

Para geodésias tipo-tempo, o melhor parâmetro a ser adotado é o tempo-próprio de um observador que se desloca sobre ela, que denotamos por τ . Já no caso de geodésias nulas, podemos adotar um outro parâmetro afim, para o qual a equação destas é idêntica à das geodésias tipo-tempo.

$$\frac{d^2x^\mu}{d\kappa^2} + \Gamma_{\nu\sigma}^\mu \frac{dx^\nu}{d\kappa} \frac{dx^\sigma}{d\kappa} = 0, \quad (2.5)$$

onde substituímos κ por τ para geodésias tipo-tempo parametrizadas por tempo-próprio, ou então por um parâmetro afim para geodésias nulas. Para o caso do movimento de partículas, a eq. (2.5) faz às vezes da segunda lei de Newton.

2.3 Quantidades conservadas e primeiras integrais das equações do movimento

Em mecânica newtoniana, as leis de conservação nos fornecem as primeiras integrais das equações de movimento, reduzindo a ordem e o número de equações a serem resolvidas. Estas leis de conservação estão sempre ligadas a simetrias. Por exemplo, a lei de conservação de energia se relaciona com a simetria em relação a um deslocamento temporal; a conservação do momento linear se relaciona com simetrias em relação a deslocamentos espaciais; e a conservação do momento angular se relaciona com a simetria em relação a rotações.

Em relatividade geral mantém-se essas relações entre as grandezas conservadas e determinadas simetrias, que agora dizem respeito à métrica e, por isso, são chamadas de isometrias. Uma maneira prática de se testar se um espaço tempo tem uma determinada simetria é verificar se a métrica é independente de alguma de suas coordenadas (isometria), ou seja, se a métrica não se altera em transformações do tipo

$$x^\mu \rightarrow x^\mu + \text{constante}. \quad (2.6)$$

À cada simetria deste tipo, podemos associar um vetor, chamado vetor de Killing¹, de componentes

$$\chi^\alpha = \left\{ \delta_\mu^\alpha \right\}, \quad (2.7)$$

ou seja, o vetor reside na direção em que a métrica não se altera.

Associada a cada vetor de Killing existe uma constante de movimento. Essas constantes são proporcionais ao produto $\chi \cdot \mathbf{u}$, onde \mathbf{u} é a quadrivelocidade e χ representa cada um dos vetores de Killing.

Outra primeira integral importante vem da normalização da quadrivelocidade

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = \kappa, \quad (2.8)$$

onde, κ vale $-c^2$ para geodésias tipo-tempo e 0 para geodésias nulas.

2.4 As geometrias padrão da relatividade geral

Nesta seção apresentamos as soluções das equações de Einstein mais simples que têm relevância para o nosso trabalho.

¹Em homenagem à Wilhelm Killing.

2.4.1 A métrica e as coordenadas de Schwarzschild

A solução de Schwarzschild foi a primeira solução que se obteve para as equações de campo de Einstein e corresponde à região exterior à uma distribuição esfericamente simétrica e estática de matéria. Sua geometria é descrita pela métrica

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), \quad (2.9)$$

onde M é a massa do objeto que serve como fonte do campo gravitacional, dada de forma geometrizada.¹

Além de ser esfericamente simétrica e estática, a métrica (2.9) tem a característica de ser assintoticamente Minkowski, ou seja, no limite em que $r \rightarrow \infty$ esta torna-se a métrica de Minkowski em coordenadas esféricas.

Na física newtoniana o tempo é um conceito absoluto, o mesmo para qualquer observador, e pode ser usado como parâmetro afim para todas as trajetórias. Além disso, o fato do espaço ser considerado euclidiano permitir-nos usar coordenadas cartesianas, as quais fornecem diretamente as medidas de distância. Na relatividade geral, as coordenadas não representam necessariamente medidas de distâncias ou intervalos de tempo, e precisam ser reinterpretadas, sendo que só exigimos *a priori* que coordenadas numericamente próximas representem eventos vizinhos no espaço-tempo. Para tornar clara essa interpretação, fazemos a seguir uma breve interpretação das coordenadas de Schwarzschild.

A coordenada r que aparece na métrica (2.9) não deve ser interpretada como a distância à algum centro. Esta tem apenas a interpretação geométrica de estar relacionada com a área A de uma esfera bidimensional de r e t constantes pela fórmula

$$r = \sqrt{\frac{A}{4\pi}}. \quad (2.10)$$

De fato, a distância entre duas superfícies vizinhas de raios r e $r + \Delta r$, respectivamente, é dada por

$$l = \frac{\Delta r}{\sqrt{1 - \frac{2M}{r}}}.$$

Consideremos agora dois eventos próximos que ocorrem no mesmo ponto no espaço. O tempo medido pelo relógio de um observador que se encontra neste ponto, chamado de tempo próprio e representado por τ , se relaciona com a coordenada t , também chamada de tempo

¹O apêndice A trata do sistema de unidades geometrizadas, o qual será usado durante o resto do texto.

coordenado, da seguinte maneira

$$\tau = t \sqrt{1 - \frac{2M}{r}}. \quad (2.11)$$

É importante ressaltar que não está claro se o tempo newtoniano deve ser identificado com o tempo coordenado ou com o tempo próprio do observador, já que a teoria newtoniana não faz distinção entre os dois (RINDLER, 1969). Vale observar também que as quantidades físicas l e τ não estão definidas no limite $r \rightarrow 2M$ (que é o horizonte de eventos), nem em toda a região $r < 2M$. A solução desse aparente problema está relacionado com o fato de que as coordenadas t e r não são coordenadas apropriadas para tal região. De fato, conforme se pode ver pela mudança de sinal dos coeficientes da métrica de Schwarzschild, na região $0 < r < 2M$ a coordenada t passa a ter caráter de coordenada espacial, enquanto que r tem caráter de coordenada temporal

2.4.2 A métrica de Schwarzschild-anti de Sitter

A métrica (2.9) é obtida a partir das equações (2.2) quando tanto $T_{\mu\nu}$ como Λ são iguais a zero. Podemos, entretanto, considerar que Λ é diferente de zero. De fato, quando considera-se que Λ é uma constante positiva, obtém-se a solução de Schwarzschild-anti de Sitter (Também conhecida pelo nome solução de Kottler):

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + f(r)^{-1}dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \quad (2.12)$$

onde

$$f(r) = 1 - \frac{2M}{r} + \frac{\Lambda r^2}{3}. \quad (2.13)$$

A presença do termo $\Lambda r^2/3$ mostra que a solução (2.12) não é assintoticamente Minkowski. Entretanto, resultados atuais indicam que $\Lambda \lesssim 10^{-36} \text{km}^{-2}$ para testes realizados no sistema solar (SERENO; JETZER, 2006) e, portanto, os efeitos da constante cosmológica na dinâmica de sistemas planetários podem ser ignorados.

Com a escolha de sinais adotadas nesse trabalho, a solução das equações de Einstein para o caso de Λ negativo leva o nome de métrica de Schwarzschild -de Sitter.

2.4.3 A solução de Reissner-Nordström-anti de Sitter (RNAdS)

A geometria de Reissner-Nordström-anti de Sitter é solução das equações de campo Einstein (2.2) com constante cosmológica e campo eletrostático e descreve geometria do espaço-tempo de um objeto esférico eletricamente carregado. Tal objeto pode ser uma estrela, um

buraco negro, etc (no caso de estrelas, a solução corresponde à região exterior).

Seja então a solução RNAdS em coordenadas análogas às de Schwarzschild :

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + f(r)^{-1}dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) , \quad (2.14)$$

$$f(r) = 1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} + \frac{\Lambda r^2}{3} , \quad (2.15)$$

onde $M \equiv Gm/c^2$ e $Q^2 \equiv Gq^2/c^4$ sendo m a massa da estrela, q sua carga elétrica, Λ a constante cosmológica.

Vemos imediatamente que a presença de carga elétrica na fonte contribui gravitacionalmente e isso independe do sinal da carga elétrica. Este resultado, inesperado do ponto de vista newtoniano, se deve ao fato de que, associado ao campo elétrico, temos uma certa quantidade de energia, e, de acordo com a relatividade geral, toda forma de energia atua como fonte do campo gravitacional.

Em relação às suas simetrias, vemos que a métrica (2.14) é estacionária, portanto há um vetor de Killing, ξ , de componentes $(1, 0, 0, 0)$ e também invariante sob rotações em relação ao eixo-z, portanto há um vetor de Killing, η , de componentes $(0, 0, 0, 1)$.

Embora estejamos interessados somente na influência gravitacional da carga elétrica, é importante observar que espaço-tempo de RNAdS é também caracterizado por um quadri-vetor potencial eletromagnético A , de componentes

$$(A)_\mu = (-Q/r, 0, 0, 0). \quad (2.16)$$

Podemos então obter o tensor de Maxwell ($F_{\mu\nu}$), o qual tem as seguintes componentes não-nulas:

$$F_{rt} = -F_{tr} = Q/r^2. \quad (2.17)$$

Logo, um observador em repouso em relação à fonte sente a presença de um campo elétrico, de componentes

$$(E)_a = (F_{rt}, F_{\theta t}/r, F_{\phi t}/r \sin \theta) = (Q/r^2, 0, 0). \quad (2.18)$$

2.4.4 A métrica de Kerr

A solução que descreve um buraco negro em rotação foi obtida inicialmente por Roy Kerr em 1963 (KERR, 1963). Esta solução é caracterizada por dois parâmetros, a massa M e o

momento angular J , cuja métrica é dada por

$$ds^2 = g_{tt}dt^2 + 2g_{t\phi}dtd\phi + g_{rr}dr^2 + g_{\theta\theta}d\theta^2 + g_{\phi\phi}d\phi^2, \quad (2.19)$$

onde

$$\begin{aligned} g_{tt} &= -\frac{\Delta - a^2 \sin^2 \theta}{\Sigma} \\ g_{t\phi} &= -\frac{a \sin^2 \theta (r^2 + a^2 - \Delta)}{\Sigma} \\ g_{rr} &= \frac{\Sigma}{\Delta} \\ g_{\theta\theta} &= \Sigma \\ g_{\phi\phi} &= \frac{(r^2 + a^2)^2 - \Delta^2 \sin^2 \theta}{\Sigma} \sin^2 \theta \end{aligned} \quad (2.20)$$

$a \equiv J/M$ é o chamado parâmetro de Kerr e, por conveniência, introduzimos as funções Σ e Δ definidas respectivamente por

$$\Sigma = r^2 + a^2 \cos^2 \theta, \quad (2.21)$$

$$\Delta = r^2 + a^2 - 2Mr. \quad (2.22)$$

Considerando-se apenas o plano equatorial, os elementos (2.20) reduzem-se a

$$\begin{aligned} g_{tt} &= -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) \\ g_{t\phi} &= -\frac{2aM}{r} \\ g_{rr} &= \frac{r^2}{\Delta} \\ g_{\theta\theta} &= 0 \\ g_{\phi\phi} &= r^2 + a^2 + \frac{2Ma^2}{r} \end{aligned} \quad (2.23)$$

Vemos que a solução de Kerr é estacionária e axialmente simétrica. A perda da simetria esférica em relação á solução de Schwarzschild se deve ao fato de a rotação estabelecer uma direção especial, ou seja, a direção do eixo de rotação.

2.4.5 A solução de Kerr-Newman (KN)

A métrica de Kerr-Newman pode-se ser obtida a partir da solução de Reissner-Nordström através de uma transformação complexa de coordenadas (NEWMAN et al., 1965) e é a solução

mais geral representativa de buracos negros em espaços assintoticamente planos, dependendo de três parâmetros: a massa, carga elétrica e rotação.

Embora a solução KN não represente a região exterior à uma estrela eletricamente carregada e em rotação, podemos considerá-la como uma primeira aproximação no limite de grandes distâncias da fonte.

Esta solução é da forma

$$ds^2 = g_{tt}dt^2 + 2g_{t\phi}dtd\phi + g_{rr}dr^2 + g_{\theta\theta}d\theta^2 + g_{\phi\phi}d\phi^2, \quad (2.24)$$

com

$$\begin{aligned} g_{tt} &= -\frac{\Delta - a^2 \sin^2 \theta}{\Sigma} \\ g_{t\phi} &= -\frac{a \sin^2 \theta (r^2 + a^2 - \Delta)}{\Sigma} \\ g_{rr} &= \frac{\Sigma}{\Delta} \\ g_{\theta\theta} &= \Sigma \\ g_{\phi\phi} &= \frac{(r^2 + a^2)^2 - \Delta^2 \sin^2 \theta}{\Sigma} \sin^2 \theta \end{aligned} \quad (2.25)$$

e

$$\Sigma = r^2 + a^2 \cos^2 \theta \quad (2.26)$$

$$\Delta = r^2 + a^2 + Q^2 - 2Mr \quad (2.27)$$

Pode-se identificar M como a massa do objeto, Q a sua carga elétrica e $a \equiv J/M$, o chamado parâmetro de Kerr, onde J é o momento angular do objeto. As coordenadas (t, r, θ, ϕ) são análogas as coordenadas de Schwarzschild e chamadas coordenadas de Boyer-Lindquist (BOYER; LINDQUIST, 1967).

Tal como o espaço-tempo de RNAdS, o espaço-tempo de KN é especificado por um quadri-vetor potencial eletromagnético:

$$(A)_\mu = \frac{-Qr}{\Sigma} (1, 0, 0, a \sin^2 \theta). \quad (2.28)$$

Assim, um observador que se encontra em repouso em relação à fonte, e distante desta, observa tanto um campo elétrico, quanto um campo magnético (MISNER; THORNE; WHEELER, 1973), cujas componentes são dadas respectivamente por

$$(E)_a = \left(F_{rt}, \frac{F_{\theta t}}{r}, \frac{F_{\phi t}}{r \sin \theta} \right) = \left(\frac{Q}{r^2}, 0, 0 \right), \quad (2.29)$$

onde ignoramos termos da ordem de $(1/r)^3$, e

$$(B)_a = \left(\frac{F_{\theta\phi}}{r^2 \sin \theta}, \frac{F_{\phi r}}{r \sin \theta}, \frac{F_{r\theta}}{r} \right) = \left(\frac{2aQ \cos \theta}{r^3}, \frac{aQ \sin \theta}{r^3}, 0 \right), \quad (2.30)$$

onde desprezamos termos da ordem de $(1/r)^4$.

Vemos que a rotação do buraco negro origina um campo magnético. Podemos ainda identificar seu momento magnético:

$$m = aQ = \frac{Q}{M} J. \quad (2.31)$$

3 GEODÉSICAS, AVANÇO DO PERIASTRO E DESVIO DA LUZ: CASO ESTÁTICO

Neste capítulo apresentamos o estudo das equações das geodésias em geometrias estáticas capazes de descrever a região exterior a objetos astrofísicos como estrelas e buracos negros sem rotação, mas que podem carregar carga elétrica (ou magnética). Tais situações são muito bem caracterizadas pela geometria de Reissner-Nordström-anti de Sitter apresentada na seção 2.4.3, sendo que a constante cosmológica é mantida no problema por completeza e para possibilitar comparação com estudos anteriores.

Para simplificar a apresentação, reescrevemos aqui tal métrica:

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + f(r)^{-1}dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \quad (3.1)$$

$$f(r) = 1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} + \frac{\Lambda r^2}{3}. \quad (3.2)$$

3.1 Equações de movimento na métrica RNAdS

Conforme discutido no capítulo precedente, as simetrias da métrica (2.14) implicam na existência de quantidades conservadas no movimento e que estão relacionadas com os vetores de Killing ξ e η de forma que, em tal caso, há duas constantes de movimento:

$$\xi \cdot \mathbf{u} = g_{\mu\nu}\xi^\mu u^\nu = \text{constante} \equiv -E \quad (3.3)$$

$$\eta \cdot \mathbf{u} = g_{\mu\nu}\eta^\mu u^\nu = \text{constante} \equiv L. \quad (3.4)$$

No caso do movimento de partículas materiais, ou seja, para geodésias tipo-tempo, a constante E pode ser interpretada como a energia total por unidade de massa de repouso da partícula que viaja sobre a geodésia em questão, relativamente a um observador estático localizado no

infinito. Para as geodésias nulas, ou seja, para o movimento de fótons, E é interpretada de forma que $\hbar E$ é a energia do fóton. Já a constante L é interpretada como o momento angular por unidade de massa de repouso no caso das geodésias tipo-tempo e como $\hbar L$ sendo o momento angular do fóton no caso das geodésias nulas. Usando a métrica (3.1), obtemos assim duas primeiras integrais na forma

$$\begin{aligned} u^t &= -E f(r)^{-1}, \\ u^\phi &= L (r^2 \sin^2 \theta)^{-1}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Como mencionado anteriormente, outra primeira integral é fornecida pela condição de normalização da quadrivelocidade, que no presente caso é

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu} u^\mu u^\nu &= f(r)(u^t)^2 + g_{rr}(u^r)^2 + g_{\theta\theta}(u^\theta)^2 + g_{\phi\phi}(u^\phi)^2 \\ &= f(r)(u^t)^2 + f(r)^{-1}(u^r)^2 + r^2(u^\theta)^2 + r^2 \sin^2 \theta (u^\phi)^2 = \kappa. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Consideremos o movimento somente no plano equatorial, dado pelas condições iniciais $\theta = \pi/2$ e $u^\theta = 0$, e substituindo as equações (3.5) na equação (3.6), encontramos a equação para a coordenada radial

$$\frac{1}{2}(u^r)^2 + V_{eff}(r) = \varepsilon, \quad (3.7)$$

onde

$$V_{eff}(r) = \frac{1}{2} \left[f(r) \left(\frac{L^2}{r^2} - \kappa \right) + \kappa \right], \quad (3.8)$$

$$\varepsilon \equiv \frac{E^2 + \kappa}{2}. \quad (3.9)$$

Vemos que a equação (3.7) tem a mesma forma da equação radial do caso newtoniano, com a diferença de que o potencial efetivo, $V_{eff}(r)$, apresenta contribuições de natureza relativística.

Para determinar as órbitas, fazemos a substituição de variáveis $r \rightarrow w = 1/r$ e, usando o fato de que a geodésicas está restrita ao plano $\theta = \pi/2$, tem-se que a solução pode ser representada por uma função $w = w(\phi)$ a ser determinada. Assim, pela regra da cadeia, temos

$$u^r = -\frac{u^\phi}{w^2} \frac{dw}{d\phi} = -L \frac{dw}{d\phi}. \quad (3.10)$$

onde usamos, da Eq. (3.5), a relação $u^\phi = L/r^2$. A equação (3.7) torna-se então

$$\frac{L^2}{2} \left(\frac{dw}{d\phi} \right)^2 + V_{eff}(w) = \varepsilon, \quad (3.11)$$

com $V_{eff}(w)$ dado por

$$V_{eff}(w) = \frac{1}{2} \left[\left(1 - 2Mw + Q^2w^2 + \frac{\Lambda}{3w^2} \right) (L^2w^2 - \kappa) + \kappa \right]. \quad (3.12)$$

Derivando em relação a ϕ , chega-se na forma final da equação radial

$$\frac{d^2w}{d\phi^2} + w + \frac{\kappa M}{L^2} - \frac{\kappa Q^2}{L^2}w - 3Mw^2 + 2Q^2w^3 + \frac{\kappa \Lambda}{3L^2} \frac{1}{w^3} = 0. \quad (3.13)$$

O objetivo agora é obter a função $w(\phi)$ e, então, encontrar o avanço do periastro e a deflexão da luz. Contudo, devido a complexidade da equação diferencial (3.13), é praticamente impossível escrevermos sua solução geral na forma analítica e, portanto, somos forçados a buscar soluções aproximadas para cada caso de interesse.

3.2 O avanço do periastro

Para estudar o avanço do periastro, consideramos as geodésias tipo-tempo. Neste caso $\kappa = -1$ e a equação (3.13) torna-se

$$\frac{d^2w}{d\phi^2} + w - \frac{M}{L^2} + \frac{Q^2}{L^2}w - 3Mw^2 + 2Q^2w^3 - \frac{\Lambda}{3L^2} \frac{1}{w^3} = 0. \quad (3.14)$$

Consideremos inicialmente órbitas newtonianas, as quais são obtidas desprezando todos os termos além do terceiro na equação (3.13). Em tal caso, a solução corresponde às elipses

$$w_0 = \frac{M}{L^2} [1 + e \cos(\phi - \phi_0)], \quad (3.15)$$

onde e e ϕ_0 são constantes de integração e correspondem, respectivamente, a excentricidade das órbitas e a posição angular inicial. Procuremos então por correções perturbativas, que correspondem a órbitas quase-newtonianas, dadas em termos de potências dos parâmetros M^2/L^2 , Q^2/L^2 e ΛL^2 de modo que: a solução geral $w(\phi)$ possa ser escrita como uma série da forma

$$w = w_0 + w_1 + w_2 + \dots,$$

onde w_0 , w_1 , w_2 , etc., são funções tais que

$$w_0 \gg w_1 \gg w_2 \gg \dots$$

Assim, considerando apenas os termos de primeira ordem em todos os parâmetros e pequenas excentricidades, ou seja, somente primeira ordem em e , temos que a equação que dá a

correção de primeira ordem é

$$\frac{d^2 w_1}{d\phi^2} + w_1 = \frac{3M^3}{L^4} - \frac{Q^2 M}{L^4} + \frac{\Lambda L^4}{3M^3} + \left(\frac{6M^3}{L^4} - \frac{Q^2 M}{L^4} - \frac{\Lambda L^4}{M^3} \right) e \cos(\phi - \phi_0). \quad (3.16)$$

Para um grande número de revoluções a equação (3.16) tem como solução

$$w_1 \simeq \frac{M}{L^2} \left(\frac{3M^2}{L^2} - \frac{Q^2}{2L^2} - \frac{\Lambda L^6}{2M^4} \right) \phi e \sin(\phi - \phi_0). \quad (3.17)$$

Assim, com correção até primeira ordem, temos

$$w \simeq w_0 + w_1 \simeq \frac{M}{L^2} [1 + e \cos(\phi - \phi_0)] + \frac{M}{L^2} \left(\frac{3M^2}{L^2} - \frac{Q^2}{2L^2} - \frac{\Lambda L^6}{2M^4} \right) \phi e \sin(\phi - \phi_0). \quad (3.18)$$

Definindo

$$\Delta_0 \equiv \frac{3M^2}{L^2} - \frac{Q^2}{2L^2} - \frac{\Lambda L^6}{2M^4}, \quad (3.19)$$

temos

$$w \simeq \frac{M}{L^2} [1 + e \cos(\phi - \phi_0) + \Delta_0 \phi e \sin(\phi - \phi_0)], \quad (3.20)$$

ou ainda

$$w \simeq \frac{M}{L^2} [1 + e \cos(\phi - \phi_0 - \Delta_0 \phi)]. \quad (3.21)$$

Vemos que w é uma função periódica, cujo período é

$$\frac{2\pi}{1 - \Delta_0} \approx 2\pi(1 + \Delta_0). \quad (3.22)$$

Assim, o avanço do periastro por revolução orbital é

$$\delta_{\phi_{prec}} \simeq 2\pi\Delta_0 = \frac{6\pi M^2}{L^2} \left(1 - \frac{\Lambda L^8}{6M^6} \right) - \frac{\pi Q^2}{L^2}. \quad (3.23)$$

Podemos ver que, com relação ao que se obtém no caso Schwarzschild-anti de Sitter (Apêndice B), a carga elétrica contribui no sentido de diminuir o avanço do periastro.

3.3 Desvio da luz

No estudo do desvio da luz, consideramos as geodésias nulas, $\kappa = 0$ e a equação (3.13) torna-se

$$\frac{d^2 w}{d\phi^2} + w - 3Mw^2 + 2Q^2 w^3 = 0. \quad (3.24)$$

Na equação (3.24) fica evidente que a constante cosmológica não influencia no movimento da luz, de acordo então com o que havia anteriormente sido notado no caso Schwarzschild-anti de Sitter (Apêndice B).

Consideremos inicialmente um feixe de luz que passa suficientemente longe da estrela, de forma que os últimos dois termos da equação (3.24) são apenas pequenas perturbações. Neste caso temos

$$w_0 = \frac{1}{b} \cos \phi, \quad (3.25)$$

onde b é o parâmetro de impacto e representa a menor distância que o feixe de luz atinge da estrela durante o seu movimento em linha reta quando se desprezam os efeitos gravitacionais (figura 3).

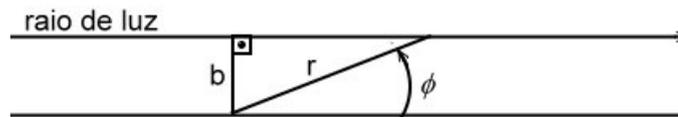


Figura 3: Parâmetro de impacto

De maneira análoga ao caso do avanço do periastro, procuramos por correções perturbativas, dadas agora por potências dos parâmetros $\alpha \equiv M/b$ e $\beta \equiv Q^2/b^2$, de modo que a solução $w(\phi)$ seja dada por

$$w = w_0 + \alpha w_1 + \alpha^2 w_2 + \beta w_3 + \beta^2 w_4 + \alpha \beta w_5 + \dots \quad (3.26)$$

Substituindo a equação (3.26) na equação (3.24), vemos que as correções contendo termos até a ordem de M^2/b^2 e Q^2/b^2 vêm das equações

$$\frac{d^2 w_1}{d\phi^2} + w_1 = \frac{3}{b} \sin^2 \phi \quad (3.27)$$

$$\frac{d^2 w_2}{d\phi^2} + w_2 = 6w_1 \sin \phi + 3w_1^2 \left(M - 2\frac{Q^2}{b} \sin \phi \right) \quad (3.28)$$

$$\frac{d^2 w_3}{d\phi^2} + w_3 = -\frac{2}{b} \sin^3 \phi. \quad (3.29)$$

As soluções para w_1 e w_3 são

$$w_1 = \frac{1}{2b} (3 + \cos 2\phi) \quad (3.30)$$

$$w_3 = \frac{1}{4b} (3\phi \cos \phi - 2 \sin \phi - \sin \phi \cos^2 \phi) . \quad (3.31)$$

Percebe-se que Mw_1 é da ordem de α e que $(Q^2/b)w_1$ é da ordem de β . Portanto, ambos não pertencem à equação para w_2 , que tem então a solução

$$w_2 = -\frac{3}{16b} (20\phi \cos \phi - 11 \sin \phi + 4 \sin \phi \cos^2 \phi) . \quad (3.32)$$

Desta forma, a solução corrigida com termos da ordem de M^2/b^2 e Q^2/b^2 é

$$w \simeq \frac{\sin \phi}{b} + \frac{M}{2b^2} (3 + \cos 2\phi) - \frac{3M^2}{16b^3} (20\phi \cos \phi - 11 \sin \phi + 4 \sin \phi \cos^2 \phi) \\ + \frac{Q^2}{4b^3} (3\phi \cos \phi - 2 \sin \phi - \sin \phi \cos^2 \phi) . \quad (3.33)$$

Para obter o desvio da luz, seguimos o procedimento usual (D'INVERNO, 1992). Na figura 2 vemos que os valores de ϕ para os quais w se anula são os ângulos das assíntotas, que designamos por $-\phi_1$ e $\pi + \phi_2$. Substituindo-se estes valores na equação (3.33) e expandindo-a para pequenos valores de ϕ_1 e ϕ_2 , obtemos o desvio da luz, que é, por definição, $\phi_1 + \phi_2$:

$$\delta\phi \simeq \frac{4M}{b} - \frac{3\pi Q^2}{4b^2} + \frac{15\pi M^2}{4b^2} . \quad (3.34)$$

Observa-se que a carga elétrica atua no sentido de diminuir também o desvio da luz em relação aos casos Schwarzschild e Schwarzschild-anti de Sitter (Apêndice B) e que a expressão (3.34) se reduz à equivalente destes casos no limite em que a carga elétrica e a constante cosmológica respectivamente desaparecem.

4 GEODÉSICAS, AVANÇO DO PERIASTRO E DESVIO DA LUZ: CASO COM ROTAÇÃO

O estudo das geodésias da métrica KN conforme apresentada na seção 2.4.5 em sua generalidade é uma tarefa complexa e foge ao escopo do presente trabalho. Podemos, entretanto, restringir o estudo às geodésias do plano equatorial, $\theta = \pi/2$. Neste caso, os elementos (2.25) se reduzem a

$$\begin{aligned}g_{tt} &= -\left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right) \\g_{t\phi} &= -\left(\frac{2aM}{r} - \frac{aQ^2}{r^2}\right) \\g_{rr} &= \frac{r^2}{\Delta} \\g_{\theta\theta} &= 0 \\g_{\phi\phi} &= r^2 + a^2 + \frac{2Ma^2}{r} - \frac{a^2Q^2}{r^2}\end{aligned}\tag{4.1}$$

Esta métrica, que representa o plano equatorial de um buraco negro carregado e em rotação, é aceita também como uma aproximação para a geometria no exterior a uma estrela eletricamente carregada e em rotação (no plano equatorial). Assim sendo, faremos uso dessa aproximação para estimar o avanço do periastro e desvio da luz causados por objetos astrofísicos com tais características, conforme descrevemos a seguir.

4.1 Equações de movimento na métrica de Kerr-Newman

A métrica de KN tem os mesmos tipos de vetores de Killing ξ e η associados à métrica de RNAdS, representando, respectivamente, as simetrias temporal e axial da mesma. Então, as

quantidades conservadas neste caso são

$$\begin{aligned} E &= -g_{\mu\nu}\xi^\mu u^\nu = -g_{tt}u^t - g_{t\phi}u^\phi, \\ L &= g_{\mu\nu}\eta^\mu u^\nu = g_{t\phi}u^t + g_{\phi\phi}u^\phi, \end{aligned} \quad (4.2)$$

e têm a mesma interpretação física que no caso estático.

Das equações (4.2), obtemos as primeiras integrais

$$u^t = \frac{g_{t\phi}L + g_{\phi\phi}E}{g_{t\phi}^2 - g_{tt}g_{\phi\phi}}, \quad (4.3)$$

$$u^\phi = \frac{g_{tt}L + g_{t\phi}E}{g_{tt}g_{\phi\phi} - g_{t\phi}^2}, \quad (4.4)$$

e o termo recorrente $g_{t\phi}^2 - g_{tt}g_{\phi\phi}$ pode ser identificado como

$$\begin{aligned} g_{t\phi}^2 - g_{tt}g_{\phi\phi} &= \left(\frac{2aM}{r} - \frac{aQ^2}{r^2}\right)^2 + \left(1 - \frac{2M}{r} - \frac{Q^2}{r^2}\right) \left(r^2 + a^2 - \frac{a^2Q^2}{r^2} + \frac{2Ma^2}{r}\right) \\ &= r^2 + a^2 + Q^2 - 2Mr = \Delta. \end{aligned} \quad (4.5)$$

A normalização da quadrivelocidade resulta também em uma primeira integral da equação de movimento

$$u_\mu u^\mu = g_{tt}(u^t)^2 + 2g_{t\phi}u^t u^\phi + g_{\phi\phi}(u^\phi)^2 = \kappa, \quad (4.6)$$

onde, novamente, κ vale $-c^2$ para geodésias tipo-tempo e 0 para geodésias nulas.

Há ainda uma quarta constante do movimento (CARTER, 1968), entretanto, sua utilização requer uma abordagem do tipo hamiltoniana, que não é necessária no presente estudo.

Substituindo as equações (4.3) e (4.4) na equação (4.6) e, após um certo algebrismo, obtemos

$$g_{rr}(u^r)^2 - \frac{1}{\Delta} (L^2 g_{tt} + E^2 g_{\phi\phi} + 2LE g_{t\phi}) = \kappa. \quad (4.7)$$

Substituindo-se os valores de g_{tt} , $g_{t\phi}$, g_{rr} , $g_{\phi\phi}$ e Δ na equação acima, ficamos com

$$\begin{aligned} (u^r)^2 + \frac{2M\kappa}{r} + \frac{(L - aE)^2 + 2aE(L - aE) - \kappa(a^2 + Q^2)}{r^2} - \frac{2M(L - aE)^2}{r^3} \\ + \frac{Q^2(L - aE)^2}{r^4} = E^2 + \kappa. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Definindo $Z \equiv L - aE$, que corresponde à componente axial efetiva do momento angular da

partícula de teste, ficamos com a equação

$$(u^r)^2 + \frac{2M\kappa}{r} + \frac{Z^2 + 2aEZ - \kappa(a^2 + Q^2)}{r^2} - \frac{2MZ^2}{r^3} + \frac{Q^2Z^2}{r^4} = E^2 + \kappa, \quad (4.9)$$

a qual pode ser escrita na forma

$$\frac{1}{2}(u^r)^2 + V_{eff}(r) = \varepsilon, \quad (4.10)$$

onde definimos

$$V_{eff}(r) = \frac{1}{2} \left[\frac{2M\kappa}{r} + \frac{Z^2 + 2aEZ - \kappa(a^2 + Q^2)}{r^2} - \frac{2MZ^2}{r^3} + \frac{Q^2Z^2}{r^4} \right], \quad (4.11)$$

$$\varepsilon = \frac{E^2 + \kappa}{2}. \quad (4.12)$$

Novamente, como no caso estático, vamos fazer a substituição $r \rightarrow w = 1/r$. Pela regra da cadeia, temos que

$$u^r = -\frac{u^\phi}{w^2} \frac{dw}{d\phi} = -r^2 \left(\frac{g_{tt}L + g_{t\phi}E}{\Delta} \right) \frac{dw}{d\phi}. \quad (4.13)$$

Para explicitar esta última relação, temos de manipular o termo

$$X = r^2 \left(\frac{g_{tt}L + g_{t\phi}E}{\Delta} \right). \quad (4.14)$$

Substituindo os coeficientes g_{tt} e $g_{t\phi}$ da métrica (4.1) e reagrupando os termos obemos

$$\begin{aligned} X &= \frac{1}{\Delta} [\Delta(L - aE) + r^2 aE - a^2(L - aE)] = \frac{1}{\Delta} (\Delta Z + r^2 aE - a^2 Z) \\ &= Z + \frac{a}{\Delta} (r^2 E - aZ). \end{aligned} \quad (4.15)$$

Além disso, definindo

$$P \equiv r^2 E - aZ, \quad (4.16)$$

obtemos

$$X = Z + \frac{aP}{\Delta}. \quad (4.17)$$

Substituindo esse resultado na equação (4.10), vemos que a mesma pode então ser escrita na forma

$$\frac{1}{2} \left(\frac{dw}{d\phi} \right)^2 \left(Z + \frac{aP}{\Delta} \right)^2 + V_{eff}(w) = \varepsilon, \quad (4.18)$$

com

$$V_{eff}(w) = \frac{1}{2} \{ 2M\kappa w + [Z^2 + 2aEZ - \kappa(a^2 + Q^2)] w - 2MZ^2 w^3 + Q^2 Z^2 w^4 \}. \quad (4.19)$$

Derivando então a equação (4.18) em relação a ϕ , obtemos

$$\begin{aligned} \frac{d^2w}{d\phi^2} \left(1 + \frac{aP}{Z\Delta}\right)^2 + \frac{dw}{d\phi} \frac{d}{d\phi} \left[\frac{1}{2} \left(1 + \frac{aP}{Z\Delta}\right)^2 \right] + w \left[1 + \frac{2aE}{Z} - \frac{\kappa}{Z^2} (a^2 + Q^2) \right] \\ + \frac{\kappa M}{Z^2} - 3Mw^2 + 2Q^2w^3 = 0, \end{aligned} \quad (4.20)$$

que é a equação fundamental a ser resolvida para obtermos as curvas geodésicas da geometria de Kerr-Newman. Como no caso estático, a fim de encontrarmos soluções na forma analítica, faremos isso através de métodos aproximativos.

4.2 O avanço do periastro

Para determinar o avanço do periastro, fazemos $\kappa = -1$, e a equação (4.20) fica

$$\begin{aligned} \frac{d^2w}{d\phi^2} \left(1 + \frac{aP}{Z\Delta}\right)^2 + \frac{dw}{d\phi} \frac{d}{d\phi} \left[\frac{1}{2} \left(1 + \frac{aP}{Z\Delta}\right)^2 \right] + w \left[1 + \frac{2aE}{Z} + \frac{1}{Z^2} (a^2 + Q^2) \right] \\ - \frac{M}{Z^2} - 3Mw^2 + 2Q^2w^3 = 0. \end{aligned} \quad (4.21)$$

Para grandes valores de r (pequenos de w), o termo $(1 + aP/Z\Delta)^2$ pode ser expandido em série de potências de w na forma

$$\left(1 + \frac{aP}{Z\Delta}\right)^2 = A_0 + A_1w + A_2w^2 + \mathcal{O}(w^3), \quad (4.22)$$

cujos os três primeiros coeficientes são dados por

$$\begin{aligned} A_0 &= \left(1 + \frac{aE}{Z}\right)^2, \\ A_1 &= \frac{4aEM}{Z} \left(1 + \frac{aE}{Z}\right), \\ A_2 &= 2 \left(1 + \frac{aE}{Z}\right) \left[\frac{4aEM^2}{Z} - \frac{aE(a^2 + Q^2)}{Z} \right] + \left(\frac{2aEM}{Z}\right)^2. \end{aligned} \quad (4.23)$$

Considerando-se $r^2 \gg (M^2, Q^2, a^2)$ e $Z^2 \gg (Q^2, a^2)$ ficamos com a equação

$$\begin{aligned} \frac{d^2w}{d\phi^2} \left[\left(1 + \frac{aE}{Z}\right)^2 + \frac{4aEM}{Z} \left(1 + \frac{aE}{Z}\right) w \right] + \left(1 + \frac{a^2 + Q^2}{Z^2} + 2\frac{aE}{Z}\right) w \\ + \left(\frac{dw}{d\phi}\right)^2 \left[\frac{2aEM}{Z} \left(1 + \frac{aE}{Z}\right) \right] - \frac{M}{Z^2} - 3Mw^2 + 2Q^2w^3 = 0. \end{aligned} \quad (4.24)$$

Vamos então resolver a equação (4.24) por meio de duas abordagens que, embora seme-

lhantes, diferem pelos tipos de aproximações feitas.

4.2.1 Primeira abordagem

Inicialmente, escrevemos a equação (4.24) na forma

$$\begin{aligned} \frac{d^2 w}{d\phi^2} \left(1 + \frac{aE}{Z}\right)^2 + \left(1 + \frac{a^2 + Q^2}{Z^2} + \frac{2aE}{Z}\right) w = \frac{M}{Z^2} + 3Mw^2 - 2Q^2 w^3 \\ - \frac{d^2 w}{d\phi^2} \left[\frac{4aEM}{Z} \left(1 + \frac{aE}{Z}\right) w \right] - \left(\frac{dw}{d\phi}\right)^2 \left[\frac{2aEM}{Z} \left(1 + \frac{aE}{Z}\right) \right]. \end{aligned} \quad (4.25)$$

Procuramos então por uma solução aproximada da forma ($w \simeq w_0 + w_1$) onde w_0 é uma primeira aproximação e contém somente termos da ordem de $(1/r)$ e w_2 é uma correção da ordem de $(1/r^2)$. Assim temos as equações para w_0

$$\frac{d^2 w_0}{d\phi^2} \left(1 + \frac{aE}{Z}\right)^2 + \left(1 + \frac{a^2 + Q^2}{Z^2} + \frac{2aE}{Z}\right) w_0 = \frac{M}{Z^2}. \quad (4.26)$$

Para diminuir o número de termos nas equações, usaremos as definições dos coeficientes A_0 e A_1 dadas em (4.23) e definimos ainda a constante

$$B \equiv 1 + \frac{a^2 + Q^2}{Z^2} + \frac{2aE}{Z}. \quad (4.27)$$

Assim, a equação (4.26) fica

$$A_0 \frac{d^2 w_0}{d\phi^2} + B w_0 = \frac{M}{Z^2}, \quad (4.28)$$

cuja solução é da forma

$$w_0 = \frac{M}{BZ^2} \left[1 + e \cos \sqrt{\frac{B}{A_0}} (\phi - \phi_0) \right]. \quad (4.29)$$

A equação para w_1 resulta, então,

$$A_0 \frac{d^2 w_1}{d\phi^2} + B w_1 = 3Mw_0^2 - A_1 w_0 \frac{d^2 w_0}{d\phi^2} - \frac{A_1}{2} \left(\frac{dw_0}{d\phi}\right)^2, \quad (4.30)$$

Para pequenos valores de e , essa equação pode ser aproximada por

$$A_0 \frac{d^2 w_1}{d\phi^2} + B w_1 = \frac{3M^3}{B^2 Z^4} + \left[\frac{M^2}{BZ^4} \left(\frac{6}{B} + \frac{A_1}{A_0}\right) \right] e \cos \sqrt{\frac{B}{A_0}} (\phi - \phi_0), \quad (4.31)$$

a qual, para um grande número de revoluções orbitais, tem a solução

$$w_1 \simeq \frac{M}{BZ^2} \left[\frac{M}{BZ^2} \left(\frac{3M}{B} + \frac{A_1}{A_0} \right) \right] e \sqrt{\frac{B}{A_0}} \phi \cos \sqrt{\frac{B}{A_0}} (\phi - \phi_0). \quad (4.32)$$

Portanto, a solução total aproximada para geodésias tipo-tempo é

$$w \simeq \frac{M}{BZ^2} \left[1 + e \cos \sqrt{\frac{B}{A_0}} (\phi - \phi_0) \right] + \frac{M}{BZ^2} \left[\frac{M}{BZ^2} \left(\frac{3M}{B} + \frac{A_1}{A_0} \right) \right] e \sqrt{\frac{B}{A_0}} \phi \cos \sqrt{\frac{B}{A_0}} (\phi - \phi_0), \quad (4.33)$$

ou ainda

$$w \simeq \frac{M}{BZ^2} \left[1 + e \cos \sqrt{\frac{B}{A_0}} (\phi - \Delta_0 \phi - \phi_0) \right], \quad (4.34)$$

onde

$$\Delta_0 \equiv \frac{M}{BZ^2} \left(\frac{3M}{B} + \frac{A_1}{A_0} \right). \quad (4.35)$$

Vemos que w é uma função periódica de período

$$\frac{2\pi}{\sqrt{\frac{B}{A_0}} (1 - \Delta_0)} \simeq \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{B}{A_0}}} (1 + \Delta_0), \quad (4.36)$$

de onde concluímos que o avanço do periastro por revolução orbital é

$$\delta_\phi \simeq 2\pi \left(\frac{1 + \Delta_0}{\sqrt{\frac{B}{A_0}}} - 1 \right). \quad (4.37)$$

A forma com que o avanço do periastro é apresentado na expressão (4.37) não é apropriada para a presente análise, mesmo quando os valores das constantes são substituídos na mesma. Com a finalidade de comparar com os resultados conhecidos (Apêndice B) e com os dados de observações, fazemos todas as substituições necessárias e expandimos em potências de $1/Z$. Assim, obtemos

$$\delta_\phi \simeq \frac{\pi}{Z^2} (6M^2 + a^2 E^2 - a^2 - Q^2) + \frac{2\pi}{Z^3} [(a^2 + Q^2 - a^2 E^2) a E - 10M^2 a E] + \mathcal{O} \left(\frac{1}{Z} \right)^4. \quad (4.38)$$

4.2.2 Segunda abordagem

Podemos reescrever a equação (4.24) da seguinte maneira

$$\frac{d^2w}{d\phi^2} + w = \frac{M}{Z^2} + 3Mw^2 - 2Q^2w^3 - \frac{d^2w}{d\phi^2} \left[\frac{2aE}{Z} + \frac{a^2E^2}{Z^2} + \frac{4aEM}{Z} \left(1 + \frac{aE}{Z} \right) w \right] - \left(\frac{a^2 + Q^2}{Z^2} + \frac{2aE}{Z} \right) w - \left(\frac{dw}{d\phi} \right)^2 \left[\frac{2aEM}{Z} \left(1 + \frac{aE}{Z} \right) \right]. \quad (4.39)$$

Procuramos agora por uma solução aproximada da forma $w \simeq w_0 + w_1$ onde w_0 é uma primeira aproximação e corresponde ao limite quase newtoniano e w_1 é a correção que se obtém considerando-se que termos como $(M/Z)^2$, $(Q/Z)^2$, $(a/Z)^2$ são apenas perturbações, sendo suas potências e produtos considerados como pertencendo à ordens superiores e ignorados.

Assim, temos a seguinte equação para w_0

$$\frac{d^2w_0}{d\phi^2} + w_0 = \frac{M}{Z^2}, \quad (4.40)$$

cuja solução já nos é familiar

$$w_0 = \frac{M}{Z^2} [1 + e \cos(\phi - \phi_0)]. \quad (4.41)$$

Por outro lado, a correção w_1 satisfaz a equação

$$\frac{d^2w_1}{d\phi^2} + w_1 = 3Mw_0^2 - \frac{d^2w_1}{d\phi^2} \left[\frac{aE}{Z} + \frac{a^2E^2}{Z^2} + \frac{4aEM}{Z} w_0 \right] - w_0 \left(\frac{a^2 + Q^2}{Z^2} + \frac{2aE}{Z} \right), \quad (4.42)$$

que, resolvendo para pequenas excentricidades e muitas revoluções, nos dá

$$w_1 \simeq \frac{M}{Z^2} \left[\frac{1}{Z^2} \left(3M^2 + a^2E^2 - \frac{a^2}{2} - \frac{Q^2}{2} \right) + \frac{2aEM^2}{Z^3} \right]. \quad (4.43)$$

Dessa forma, a solução completa em primeira aproximação nas potências de $1/z^2$ é

$$w \simeq \frac{M}{Z^2} [1 + e \cos(\phi - \Delta_0\phi - \phi_0)], \quad (4.44)$$

onde definimos

$$\Delta_0 = \frac{1}{Z^2} \left(3M^2 + \frac{a^2E^2}{2} - \frac{a^2}{2} - \frac{Q^2}{2} \right) + \frac{2aEM^2}{Z^3}. \quad (4.45)$$

Neste caso temos que o avanço do periastro é dado por

$$\delta_\phi \simeq \frac{\pi}{Z^2} (6M^2 + a^2E^2 - a^2 - Q^2) + \frac{4\pi aEM^2}{Z^3}. \quad (4.46)$$

Vemos que os resultados obtidos, (4.38) e (4.46) diferem apenas por termos da ordem de $(1/Z)^3$ e, possivelmente, em relação aos de ordens maiores, o que é consistente com as aproximações feitas. Em ambos os casos, em aproximações até a ordem de $(1/r)^2$ e $1/Z^2$, a carga elétrica atua no sentido de diminuir o avanço do periastro em relação ao que se obtém no caso de Kerr (Apêndice B).

Vemos também que, diferentemente do caso estático, a energia da partícula aparece explicitamente na expressão para o avanço do periastro, e que o avanço do periastro é incrementado se a e Z têm a mesma direção (sinais iguais) mas é diminuído se a e Z têm direções opostas (sinais distintos).

Embora seja este último resultado da Eq. (4.46) o que corresponda ao obtido anteriormente no limite em que a carga elétrica se anula, é o resultado (4.37) que, pelo menos a princípio, parece ser de maior interesse do ponto de vista astrofísico, já que para obtê-lo não consideramos *a priori* que a rotação seja apenas uma pequena perturbação do caso estático.

4.3 Desvio da luz

Para obter o desvio da luz, fazemos $\kappa = 0$ na equação (4.18), que então se reduz a:

$$\frac{d^2w}{d\phi^2} \left(1 + \frac{aP}{Z\Delta}\right)^2 + \frac{dw}{d\phi} \frac{d}{d\phi} \left[\frac{1}{2} \left(1 + \frac{aP}{Z\Delta}\right)^2 \right] + w \left[1 + \frac{2aE}{Z} \right] - 3Mw^2 + 2Q^2w^3 = 0. \quad (4.47)$$

Fazendo uma análise das equações (4.21) a (4.24), vemos que a carga elétrica só aparece em termos da ordem de $(1/r)^3$ e maiores na equação (4.47). Tentar obter o desvio da luz usando o mesmo procedimento da subseção (4.2.1) implica em obtermos a correção para a ordem de $(1/r)^3$ e isto leva a um demasiado número de termos a serem manipulados. Vamos então obter o desvio da luz no plano equatorial do espaço tempo de Kerr-Newman através do mesmo procedimento descrito na subseção (4.2.2).

Iniciamos reescrevendo a equação (4.47) na forma

$$\frac{d^2w}{d\phi^2} + w = 3Mw^2 - 2Q^2w^3 - \frac{d^2w}{d\phi^2} \left[\frac{2aE}{Z} + \frac{a^2E^2}{Z^2} + \frac{4aEM}{Z} \left(1 + \frac{aE}{Z}\right) w \right] - \frac{2aE}{Z} w - \left(\frac{dw}{d\phi} \right)^2 \left[\frac{2aEM}{Z} \left(1 + \frac{aE}{Z}\right) \right], \quad (4.48)$$

onde usamos novamente a expansão (4.22), com os coeficientes dados em (4.23).

Em pontos muito distantes, onde os efeitos da gravitação são tão pequenos que se pode desprezá-los, a equação (4.48) torna-se

$$\frac{d^2 w_0}{d\phi^2} + w_0 = 0, \quad (4.49)$$

com solução

$$w_0 = \frac{1}{b} \sin \phi. \quad (4.50)$$

A constante de integração b tem a mesma interpretação que no caso estático, sendo o parâmetro de impacto.

Procuramos então por uma solução aproximada da forma $w \simeq w_0 + w_1$ onde w_1 é a correção que se obtém considerando-se que termos como $(M/Z)^2$, $(Q/Z)^2$, $(a/Z)^2$ são pequenas perturbações. Com isso, a equação para w_1 será

$$\frac{d^2 w_1}{d\phi^2} + w_1 = 3Mw_0 - \frac{d^2 w_1}{d\phi^2} \left[\frac{aE}{Z} + \frac{a^2 E^2}{Z^2} + \frac{4aEM}{Z} w_0 \right] - w_0 \left(\frac{2aE}{Z} \right), \quad (4.51)$$

cuja solução é

$$w_1 = \frac{1}{b} \left(-\frac{a^2 E^2}{Z^2} \phi \cos \phi \right) + \frac{M}{b^2} \left[\left(1 + \frac{2aE}{Z} \right) \cos^2 \phi + 1 \right] + \frac{Q^2}{4b^3} (3\phi \cos \phi - \sin \phi \cos^2 \phi - 2 \sin \phi). \quad (4.52)$$

Assim ficamos com

$$w \simeq \frac{1}{b} \left(\sin \phi - \frac{a^2 E^2}{Z^2} \phi \cos \phi \right) + \frac{M}{b^2} \left[\left(1 + \frac{2aE}{Z} \right) \cos^2 \phi + 1 \right] + \frac{Q^2}{4b^3} (3\phi \cos \phi - \sin \phi \cos^2 \phi - 2 \sin \phi). \quad (4.53)$$

Com isso, podemos obter o desvio da luz utilizando o mesmo procedimento que no caso estático:

$$\delta\phi \simeq \frac{1}{b(a^2 E^2 - 2Z^2)} \left[4MZ(aE + Z) + \pi a^2 E^2 + \frac{4MZ}{b} (Z + aE) - \frac{3\pi Q^2 Z^2}{b^2} \right]. \quad (4.54)$$

Expandindo a expressão (4.54) em potências de $1/b$ e desprezando termos da ordem de $(a/Z)^2$, obtemos

$$\delta\phi \simeq \frac{4M}{b} \left(1 + \frac{aE}{Z} \right) - \frac{3\pi Q^2}{4b^2}. \quad (4.55)$$

Novamente, como no caso estático, vemos que a carga elétrica atua no sentido de diminuir a deflexão da luz em relação ao que se obtém no caso sem carga elétrica (Apêndice B).

Vemos também na expressão (4.55) que, como no caso do avanço do periélio, o desvio da luz é aumentado se a e Z têm a mesma direção mas é diminuído se a e Z têm direções opostas que e há a presença de um termo contendo a energia E .

5 ÚLTIMAS CONSIDERAÇÕES

O principal objetivo deste trabalho foi o de se utilizar a descrição relativística da gravitação no estudo do avanço do periastro e da deflexão da luz como forma de um exercício introdutório aos fundamentos da relatividade geral.

A escolha dos espaços-tempos de Kerr-Newman e de Reissner-Nordström-anti de Sitter deveu-se ao fato de os resultados obtidos nestes casos não serem amplamente difundidos como, por exemplo, os resultados obtidos nos casos Schwarzschild e Schwarzschild-anti de Sitter (listados no Apêndice B) sendo que, inclusive, não foi possível encontrar na literatura resultados do caso KN para que pudessem ser comparados com os obtidos no presente estudo.

Comparando os presentes resultados (capítulos 3 e 4) com os resultados encontrados na literatura tratando do avanço do periastro (CHALIASOS, 2001)¹ e da deflexão da luz (GERGELY; BARBARA, 2006)² no espaço-tempo de Reissner-Nordström, vemos que estes estão em plena concordância.

Ambos os resultados chamam a atenção pelo fato de a carga elétrica contribuir no sentido negativo, ou seja, no sentido de diminuir tanto o avanço do periastro, quanto a deflexão da luz e ambos sugerem que podem haver condições em que estes se anulem.

Utilizando o resultados conhecidos sobre observações do avanço do periélio de Mercúrio e da deflexão de raios de luz no campo gravitacional do Sol, podemos utilizar as equações (3.23) e (3.34) para obter um valor máximo que a carga elétrica do Sol poderia assumir sem modificar consideravelmente a trajetória das partículas de teste. Se desprezarmos a constante cosmológica, chegamos a conclusão de que a carga elétrica do Sol deve ser da ordem de $10^{21}C$ para exercer efeito comparável com as incertezas nos dados observacionais sobre avanço do periélio e desvio da luz pelo Sol. De fato, não há indícios sequer de que esta atinja valores tão elevados..

¹Este artigo trata do avanço do periastro de partículas carregadas e utiliza outro procedimento para obter-se a solução das equações.

²Embora este artigo trate de lentes gravitacionais em mundos-brana, tanto as equações, quanto o procedimento usado para solucioná-las são os mesmos que o equivalente caso em relatividade geral.

Por fim, e talvez o mais interessante neste estudo seja a perspectiva de aplicação dos resultados aqui obtidos no estudo do campo gravitacional das chamadas magnetars, que são estrelas de nêutrons cuja emissão e evolução são dominadas por seus intensos campos magnéticos (HEYL, 2005) e de relevante interesse astrofísico. Neste caso, a geometria é determinada por um intenso campo magnético, diferentemente das estrelas carregadas. Entretanto, poderíamos associar termos do tipo $\langle Qa \rangle$ com o momento magnético da magnetar, utilizando assim a geometria de Kerr-Newman como uma primeira aproximação ao campo gravitacional de tais estrelas e estimar os efeitos desses campos magnéticos intensos no movimento de objetos próximos.

APÊNDICE A – UNIDADES E DIMENSÕES

Em relatividade geral é comum o uso de um sistema de unidades geometrizadas, o qual é definido de forma que a constante de gravitação universal G , e a velocidade da luz, c , são postas iguais a um:

$$G = c = 1.$$

Neste sistema de unidades, grandezas que eram previamente medidas em unidades de comprimento, massa e tempo passam a ser todas medidas em potências de unidades de comprimento. A tabela 2 mostra alguns fatores de conversão mais usuais entre os sistemas Internacional de unidades e o de unidades geometrizadas

Tabela 2: Unidades geometrizadas

Grandeza	Símbolo	Unidade geometrizada	Conversão
Massa	M	L	GM/c^2
Comprimento	L	L	1
Tempo	t	L	ct
Energia	E	L	GE/c^4
Carga elétrica	q	L	$(G/4\pi\epsilon_0)^{1/2}/c^2$
Momento linear	p	L	Gp/c^3
Momento angular	J	L^2	GJ/c^3
Momento angular por unidade de massa	l	L	l/c
Energia de uma órbita por unidade de massa	ϵ	adimensional	ϵ/c^2

No caso específico da carga elétrica, podemos definir genericamente o fator de conversão de qualquer sistema de unidades para o de unidades geometrizadas

$$\frac{1}{c^2} \sqrt{Gk_C},$$

onde k_C é a constante da lei de força de Coulomb e é dependente do sistema de unidades.

Este sistema de unidades geometrizadas pode ainda ser expandido, se igualarmos à unidade também a constante de Boltzmann, k .

A título de curiosidade, a tabela 3 contém algumas constantes dadas nos sistemas cgs/SI e de unidades geometrizadas.

Tabela 3: Alguns valores numéricos comparativos

Grandeza	cgs/SI	Geom.
Massa do Sol	$1.989 \times 10^{33} \text{g}$	1.475km
Massa da Terra	$5.977 \times 10^{27} \text{g}$	0.443cm
Massa da Lua	$7.35 \times 10^{25} \text{g}$	$5.45 \times 10^{-3} \text{cm}$

APÊNDICE B – RESULTADOS ANTERIORES

Este apêndice trata dos resultados obtidos para o avanço do periastro e deflexão da luz nos espaços-tempos de Schwarzschild-anti de Sitter e de Kerr.

B.1 Resultados para o caso Schwarzschild-anti de Sitter

Da métrica (2.12) obtém-se as equações para o movimento de partículas de teste

$$\frac{d^2w}{d\phi^2} + w = \frac{M}{L^2} + 3mw^2 + \frac{\Lambda}{3L^2w^3}, \quad (\text{B.1})$$

e de raios de luz

$$\frac{d^2w}{d\phi^2} + w = 3mw^2. \quad (\text{B.2})$$

Como notado inicialmente por Islam (ISLAM, 1983 apud FREIRE; BEZERRA; LIMA, 2001), a constante cosmológica não exerce influência no movimento de raios de luz.

Das equações (B.1) e (B.2), Islam obteve expressões para o avanço do periastro por revolução orbital e para o desvio da luz:

$$\delta\phi_{prec} = \frac{6\pi M^2}{L^2} \left(1 - \frac{\Lambda L^8}{6M^6} \right), \quad (\text{B.3})$$

e

$$\delta\phi = \frac{4M}{b}, \quad (\text{B.4})$$

respectivamente.

B.2 Resultados para o caso Kerr

A partir da métrica (2.23) podemos obter as equações para o movimento de partículas de teste e de raios de luz:

$$\frac{d^2w}{d\phi^2} \left(1 + \frac{aP}{Z\Delta}\right)^2 + \frac{dw}{d\phi} \frac{d}{d\phi} \left[\frac{1}{2} \left(1 + \frac{aP}{Z\Delta}\right)^2 \right] + w \left[1 + \frac{2aE}{Z} + \frac{a^2}{Z^2} \right] - \frac{M}{Z^2} - 3Mw^2 = 0. \quad (\text{B.5})$$

$$\frac{d^2w}{d\phi^2} \left(1 + \frac{aP}{Z\Delta}\right)^2 + \frac{dw}{d\phi} \frac{d}{d\phi} \left[\frac{1}{2} \left(1 + \frac{aP}{Z\Delta}\right)^2 \right] + w \left[1 + \frac{2aE}{Z} \right] - 3Mw^2 = 0. \quad (\text{B.6})$$

Seguindo então as mesmas aproximações que Krori & Barua (KRORI; BARUA, 1986) obtemos o avanço do periastro por revolução orbital e o desvio da luz:

$$\delta_{\phi_{prec}} = \frac{6\pi M^2}{Z^2} \left(1 + \frac{2a}{3Z} E\right), \quad (\text{B.7})$$

$$\delta\phi = \frac{4M}{b} \left(1 + \frac{a}{Z} E\right). \quad (\text{B.8})$$

Tanto o avanço do periastro, quanto o desvio da luz são aumentados se a e Z têm a mesma direção mas são diminuídos se a e Z têm direções opostas. Outro fato a ser notado é que a constante E aparece explicitamente nas expressões (B.7) e (B.8).

REFERÊNCIAS

- BOYER, R. H.; LINDQUIST, R. W. Maximal analytic extension of the kerr metric. *Journal of Mathematical Physics*, v. 8, p. 265–281, 1967.
- CARTER, B. Global structure of the kerr family of gravitational fields. *Physical Review*, v. 174, n. 5, p. 1559–1571, 1968.
- CHALIASOS, E. Perihelion shift in the reissner-nordström field. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, v. 79, p. 135–144, 2001.
- D'INVERNO, R. *Introducing Einstein's Relativity*. New York: Oxford University Press, 1992.
- DIRAC, P. A. M. *General Theory of Relativity*. New York: John Wiley and Sons, 1975.
- FOMALONT, E. B.; SRAMEK, R. A. Measurements of the solar gravitational deflection of radio waves in agreement with general relativity. *Physical Review Letters*, v. 36, n. 25, p. 1475–1478, 1976.
- FREIRE, W.; BEZERRA, V. B.; LIMA, J. A. S. Cosmological constant, conical defect and classical tests of general relativity. *General relativity and Gravitation*, v. 33, n. 8, p. 1407–1414, 2001.
- GERGELY, L. A.; BARBARA, D. Weak gravitational lensing in brane-worlds. 2006. Pre-print arxiv:astro-ph/0602427. Acesso em 10 nov. 2006.
- HEYL, J. S. Magnetars. 2005. Pre-print arxiv:astro-ph/0504077. Acesso em 10 nov. 2006.
- ISLAM, J. N. *Physics Letters A*, v. 97, n. 239, 1983.
- KERR, R. P. Gravitational field of a spinning mass as an example of algebraically special metrics. *Physical Review Letters*, v. 11, p. 237–238, 1963.
- KRORI, K. D.; BARUA, M. Astronomical tests in a kerr field. *Astrophysics and Space Science*, v. 123, p. 21–29, 1986.
- LORENTZ, H. A.; EINSTEIN, A.; MINKOWSKI, H. *O Princípio da Relatividade*. 5. ed. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian, 2001. (Textos Fundamentais da Física Moderna, v. 1). Coletânea de artigos.
- MARION, J. B.; THORTON, S. T. *Classical Dynamics of Particles and Systems*. 3. ed. San Diego: Saunders College Publishing, 1995.
- MISNER, C. W.; THORNE, K. S.; WHEELER, J. A. *Gravitation*. San Francisco: W. H. Freeman, 1973.

- NEWMAN, E. T.; COUCH, E.; CHINNAPARED, K.; EXTON, A.; PRAKASH, A.; TORRENCE, R. Metric of a rotating charged mass. *Journal of Mathematical Physics*, v. 6, n. 6, p. 918–919, 1965.
- PIREAUX, S.; ROZELOT, J.-P. Solar quadrupole moment and purely relativistic gravitation contributions to mercury's perihelion advance. *Astrophysics and Space Science*, v. 284, p. 1159–1194, 2003.
- RINDLER, W. *Essential Relativity*. 2. ed. New York: Springer-Verlag, 1969. (Texts and Monographs in Physics).
- ROSSER, W. G. V. *An Introduction to the Theory of Relativity*. London: Butterworth, 1964.
- SERENO, M.; JETZER, P. Solar and stellar system tests of the cosmological constant. *Physical Review D*, v. 73, n. 063004, p. 1–5, 2006.
- SHAPIRO, I. I.; PETTENGILL, G. H.; INGALLS, R. P.; B., C. D.; DYCE, R. B. Mercury's perihelion advance: Determination by radar. *Physical Review Letters*, v. 28, n. 24, p. 1594–1597, 1972.