

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA MARIA
CENTRO DE CIÊNCIAS NATURAIS E EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ESTATÍSTICA E
MODELAGEM QUANTITATIVA**

**ANÁLISE DE ÁRVORES INDIVIDUAIS DE *Eucalyptus
grandis* W. Hill ex Maiden. ATRAVÉS DA FUNÇÃO
SPLINE**

MONOGRAFIA DE ESPECIALIZAÇÃO

Maria Eliana de Souza Viera

**Santa Maria, RS, Brasil
2013**

ANÁLISE DE ÁRVORES INDIVIDUAIS DE *Eucalyptus grandis* W. Hill ex Maiden. ATRAVÉS DA FUNÇÃO SPLINE

Maria Eliana de Souza Viera

Monografia apresentada ao Curso de Especialização do Programa de Pós-Graduação em Estatística e Modelagem Quantitativa, da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM, RS), como requisito parcial para obtenção do grau de
Especialista em Estatística e Modelagem Quantitativa

Orientador: Prof. Dr. Ivanor Müller

**Santa Maria, RS, Brasil
2013**

**Universidade Federal de Santa Maria
Centro de Ciências Naturais e Exatas
Programa de Pós-Graduação em Estatística e Modelagem Quantitativa**

**A Comissão Examinadora, abaixo assinada,
aprova a Monografia de Especialização**

**ANÁLISE DE ÁRVORES INDIVIDUAIS DE *Eucalyptus grandis* W.
Hill ex Maiden. ATRAVÉS DA FUNÇÃO SPLINE**

elaborada por
Maria Eliana de Souza Viera

Como requisito parcial para obtenção do grau de
Especialista em Estatística e Modelagem Quantitativa

COMISSÃO EXAMINADORA:

Ivanor Müller, Dr.
(Presidente/Orientador)

Angela Pellegrin Ansuji, Dra. (UFSM)

Fernando de Jesus Moreira Junior, Dr. (UFSM)

Santa Maria, 09 de agosto de 2013.

AGRADECIMENTOS

Agradeço ao Professor Doutor Ivanor Müller, Orientador, sempre muito atencioso e paciente. Obrigada pelos ensinamentos, correções, confiança e amizade. Foste fundamental na realização deste trabalho.

Aos Professores participantes da banca examinadora, Angela Pellegrin Ansuji, Angela Isabel dos Santos Dullius e Fernando de Jesus Moreira Junior, pela disponibilidade, atenção e observações.

Ao Centro de Ciências Naturais e Exatas, pela oportunidade de crescimento pessoal e profissional.

A Coordenação do Curso de Pós-Graduação em Estatística e Modelagem Quantitativa, pela dedicação e preocupação, sempre disposta a repassar informações, enviando um email lembrete/email instrução. Essa atenção especial e organização valem ouro!

Agradeço em especial aos Professores: Adriano Mendonça Souza, Anaelena Bragança de Moraes, Fernando de Jesus Moreira Junior, Janete Pereira Amador, Lorena Vicini, Luciane Flores Jacobi, Roselaine Ruviano Zanini, pela atenção, paciência e conhecimento transmitido durante as aulas.

Aos colegas, pelo companheirismo. Horas de estudos, intervalos de discussões, encontros de distrações.

Aos amigos, que tem o poder de nos alegrar, incentivar, entusiasmar e ensinar, tornando nossa passagem terrena gratificante. Obrigada pelo carinho.

Por fim, e fundamentalmente, agradeço a minha família, pelo apoio e compreensão. Em especial à minha irmã, Mariela, pelo incentivo e hospedagem. Obrigada.

RESUMO

Monografia de Especialização
Programa de Pós-Graduação em Estatística e Modelagem Quantitativa
Universidade Federal de Santa Maria

ANÁLISE DE ÁRVORES INDIVIDUAIS DE *Eucalyptus grandis* W. Hill ex Maiden. ATRAVÉS DA FUNÇÃO SPLINE

AUTORA: MARIA ELIANA DE SOUZA VIERA

ORIENTADOR: Dr. IVANOR MÜLLER

Data e Local da Defesa: Santa Maria, 09 de agosto de 2013.

A descrição de troncos em nível singular é importante no planejamento florestal, pois fornece informações detalhadas sobre o perfil da árvore. A partir da descrição da forma por uma função consegue-se organizar a destinação florestal, de modo que haja acuracidade na estimação do sortimento do fuste. No presente trabalho foram analisadas árvores individuais de *Eucalyptus grandis* W. Hill ex Maiden. através da função spline. Os dados são originários de florestas de propriedade da Aracruz Celulose S.A., com sede no município de Guaíba. Para o estudo foi selecionada a árvore centro de classe para cada uma das classes de diâmetro: menor de 20 cm, de 20 a 30 cm, maior que 30 cm. Os cálculos foram realizados com auxílio do software R (versão 3.0.1). A função spline cúbica mostrou-se eficiente para a descrição do perfil dos troncos, ajustando com precisão o diâmetro ao longo do fuste, conseguindo resgatar os exatos pontos observados, para as árvores estudadas. Porém, seu uso é restrito a árvores individuais, impondo-se constante redefinição dos intervalos de interpolação.

Palavras-chave: perfil do tronco; spline cúbica; interpolação.

ABSTRACT

Monografia de Especialização
Programa de Pós-Graduação em Estatística e Modelagem Quantitativa
Universidade Federal de Santa Maria

ANALYSIS OF *Eucalyptus grandis* W. Hill ex Maiden. INDIVIDUAL TREES THROUGH SPLINE FUNCTION

AUTHOR: MARIA ELIANA DE SOUZA VIERA

ADVISOR: Dr. IVANOR MÜLLER

Date and Place of Defense: Santa Maria, August 9th, 2013.

The description of trunks in singular level is important in forest planning because it provides detailed information about the profile of the tree. From the description of the form by a function, it is possible to organize the forest destination, so that there is accuracy in the estimation of the bole assortment. In the present study, we analyzed individual trees of *Eucalyptus grandis* W. Hill ex Maiden. by spline function. The data are originated from forests owned by Aracruz Celulose S.A., headquartered in the municipality of Guaíba. For the study, it was selected the class center tree for each diameter class: less than 20 cm, 20 to 30 cm and greater than 30 cm. The calculations were performed using the software R (version 3.0.1). The cubic spline function was efficient for the trunks profile description by precisely adjusting the diameter along the bole, achieving the exact redeem points observed for the studied trees. But their use is restricted to individual trees, imposing constant redefinition of interpolation intervals.

Keywords: trunk profile; cubic spline; interpolation.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Aproximação de $f(x)$ pela $S_1(x)$	19
Figura 2 - Representação da função spline cúbica para o perfil de uma árvore.	31
Figura 3 – Representação esquemática do perfil longitudinal da árvore 165.	36
Figura 4 - Representação esquemática do perfil longitudinal da árvore 115.	38
Figura 5 – Representação esquemática do perfil longitudinal da árvore 20.	41

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Classes diamétricas e respectivo número de árvores.	30
Tabela 2 – Nós e respectivas $f(x)$ para interpolação.	32
Tabela 3 - Seccionamento da árvore 165, centro de classe da classe até 20 cm.	34
Tabela 4 - Coeficientes da árvore 165 determinados pela função spline.	35
Tabela 5 - Seccionamento da árvore 115, centro de classe da classe entre 20 e 30 cm.	36
Tabela 6 - Coeficientes da árvore 115 determinados pela função spline.	37
Tabela 7 - Seccionamento da árvore 20, centro de classe da classe superior a 30 cm.	39
Tabela 8 - Coeficientes da árvore 20 determinados pela função spline.	40

LISTA DE ANEXOS

Anexo A – Rotina do software R para gerar gráficos.....	48
Anexo B - Rotina do software R para determinar a função spline.	54
Anexo C – Comandos do R para determinação da função spline da árvore 165.....	57

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO	11
1.1 Justificativa e importância do trabalho	11
1.2 Objetivos	12
1.2.1 Objetivo geral.....	12
1.2.2 Objetivos específicos.....	12
2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	13
2.1 Caracterização da espécie	13
2.2 Forma de tronco	13
2.3 Funções de forma de tronco	15
2.4 Modelos lineares e não lineares	17
2.5 Funções spline em interpolação	18
2.5.1 Spline linear interpolante.....	19
2.5.2 Spline cúbica interpolante.....	20
2.6 Estudo da altura	24
2.7 Sortimentos	24
2.8 Parâmetros de avaliação do ajuste	25
2.8.1 Coeficiente de determinação.....	26
2.8.2 Erro padrão da estimativa	27
2.8.3 Análise de distribuição dos resíduos	27
3 MATERIAL E MÉTODOS	29
3.1 Localização e descrição da área	29
3.2 Povoamento	29
3.3 Amostragem	30
3.4 Estudo da forma de tronco	30
3.5 Determinação dos parâmetros da função spline cúbica	31
3.5.1 Exemplo da função spline cúbica.....	32
4 RESULTADOS E DISCUSSÃO	34
4.1 Classe diamétrica inferior a 20 cm	34
4.2 Classe diamétrica entre 20 e 30 cm	36
4.3 Classe diamétrica superior a 30 cm	39
5 CONCLUSÃO	43
REFERÊNCIAS	44
ANEXOS	47

INTRODUÇÃO

As principais forças de sustentação e expansão da competitividade do setor florestal estão baseadas na tecnologia e gestão, na atual dinâmica da economia brasileira, na demanda crescente por produtos e energias renováveis e na mudança do modelo global de desenvolvimento, cada vez mais fundamentada no conceito de sustentabilidade (ABRAF, 2011).

No manejo florestal busca-se incessantemente o melhoramento no sistema de produção, a fim de garantir otimização do povoamento. O conceito de florestas para multiprodutos permite, através da mesma árvore, extrair-se madeira para diversos nichos de mercado, como a laminação, serraria, fabricação de papel e celulose, o que possibilita maior remuneração do produto advindo de povoamentos florestais (ACERBI JR et al., 2002).

Para um planejamento adequado, possibilitando a eficiência produtiva, torna-se imprescindível um prognóstico de produção preciso, que auxilie na tomada de decisão. Assim, possibilita-se a adoção de regimes de manejo adequados para cada espécie, em cada sítio, que visem prioritariamente à qualidade do produto final através de sistemas de predição do crescimento e da produção individual (SOARES et al., 2003).

Ao considerar um tronco por inteiro, admitimos que tal fuste seja um único sólido geométrico, ignorando que diferentes classes da seção podem assumir diferentes formas geométricas. Através da função spline é possível verificar o comportamento do diâmetro ao longo desse crescimento, a evolução da forma, e calcular o volume comercial por classes de utilização, maximizando, assim, o aproveitamento florestal.

1.1 Justificativa e importância do trabalho

A dinâmica do mercado exige, cada vez mais, a otimização da produção florestal a fim de tornar a produção sustentável, competitiva e lucrativa.

Assim, as funções de forma possibilitam descrever o perfil do tronco, obter por integração a estimativa do volume total e parcial com grande precisão, atuando como ferramentas para prever o diâmetro em qualquer ponto do tronco, na construção de tabelas

de volume e sortimento para as diferentes classes de dimensões exploradas, possibilitando o ordenamento florestal.

A função de forma Spline descreve as árvores individualmente. Essa modelagem individual afeta diretamente o plano de suprimento das empresas florestais, podendo ser elaborado com maior confiabilidade, produzindo informações com alto grau de precisão e exatidão para o planejamento florestal. Por conseguinte, proporcionará redução de custo nas operações realizadas na cadeia produtiva da empresa, o que justifica a utilização desta ferramenta.

1.2 Objetivos

1.2.1 Objetivo geral

O objetivo do presente estudo é analisar a forma de tronco de árvores de *Eucalyptus grandis* W. Hill ex Maiden. através da função spline.

1.2.2 Objetivos específicos

Dentre os objetivos específicos para a espécie em estudo, estão:

- a) Dimensionar e reconstruir a forma de tronco de árvores individuais;
- b) Determinar os coeficientes da função spline;
- c) Interpretar o coeficiente de determinação;
- d) Analisar o uso da função spline.

2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

2.1 Caracterização da espécie

Pertencente à família das Myrtaceae, o gênero *Eucalyptus* é o mais abundante, composto por 500 espécies (JUDD et al., 2002). O *Eucalyptus grandis* destaca-se, entre as espécies do gênero, devido a fácil adaptação climática, a versatilidade e uso múltiplo de sua madeira, sendo muito apreciada para celulose e serraria (FONSECA et al., 2007).

Do total da extensão brasileira em plantios florestais o gênero *Eucalyptus* ocupou, em 2011, o equivalente a 69,6% da área (o que corresponde à 4.873.952 ha), não estagnado, ou seja, continua em expansão (ABRAF, 2012). As espécies mais plantadas no Brasil são o *Eucalyptus grandis*, o *Eucalyptus urophylla* e o híbrido dessas duas espécies, *Eucalyptus urograndis* (FONSECA et al., 2007).

2.2 Forma de tronco

O tronco das árvores apresenta formas bastante variadas em função da morfologia genética e influências do meio. Árvores da periferia, isoladas ou largamente espaçadas, sujeitas a maior intensidade de luz e, praticamente livres de competição, apresentam a forma natural espontânea, ou também dita, específica (FINGER, 1992), mantendo uma copa proporcionalmente mais comprida e tornando o tronco mais cônico.

A qualidade do sítio influencia de tal forma que sítios com menor capacidade produtiva apresentam árvores com formatos mais cônicos, pois o crescimento em altura é menor e, conseqüentemente, mais afilado. Paralelamente, em sítios com alta capacidade produtiva há maior desenvolvimento em altura, levando a um maior equilíbrio altura/diâmetro e formatos mais cilíndricos.

O espaçamento, por sua vez, age de modo que quando o povoamento começa a fechar-se provoca a concorrência entre as copas, ocasionando a morte dos galhos inferiores, com conseqüente formação de troncos mais altos e livres de galhos. De mesmo modo, a poda, com

a diminuição dos galhos inferiores, propicia o direcionamento e maior quantidade de energia para a diferenciação dos tecidos apicais, favorecendo o desenvolvimento superior, tornando o fuste mais cônico.

A posição sociológica exerce influência tendo em vista que árvores com maior copa, que se sobressaem com grande diferença no dossel, tendem a apresentar maior conicidade, pois apresentam menor razão altura/diâmetro, em relação à razão das árvores dominadas. Já as mudanças com o decorrer da idade tendem a tornar as árvores mais cilíndricas, devido ao maior desenvolvimento.

Esses são alguns dos fatores que influenciam o formato que a árvore irá assumir, pois uma árvore não segue uma figura geométrica de forma pura, como círculos e retângulos, da geometria euclidiana. Essas formas exatas são praticamente impossíveis de serem encontradas na natureza. Por possuírem essa geometria particular, a configuração externa do fuste das árvores geralmente não se identifica com a forma de um sólido geométrico específico, mas com várias formas segundo a posição considerada do tronco (BORGES, 1981).

Portanto, apesar dessa aparência irregular consegue-se identificar que essas formas seguem um padrão, que por sua vez podem ser descritos por uma função matemática que caracterize essa geometria fractal específica, ou autossimilaridade, onde diversas partes conhecidas somam-se para formar um perfil desconhecido. Via de regra, as árvores tem em sua base a aparência de um neiloide, passando a se assemelhar a um parabolóide na sua porção mediana, assumindo a forma de cone na sua extremidade superior (SCOLFORO et al., 1998).

Em virtude desta variação de diâmetro, ao longo da extensão da base para o ápice da árvore, temos definida a conicidade, ou, de maneira mais restrita, denominada como afiletamento ou *taper*. Logo, essa tendência decrescente pode ser expressa por uma função matemática, as chamadas funções de afiletamento, que permitem: a estimativa do diâmetro numa altura qualquer do fuste, a estimativa da altura comercial para um dado diâmetro superior, a estimativa de um volume até um diâmetro mínimo qualquer ou ainda a estimativa de qualquer segmento ao longo do fuste (YOSHITANI JUNIOR et al., 2012).

Para a predição de atributos de árvores individuais que são de difícil mensuração (altura) ou de mensuração destrutivas (volume, biomassa) são utilizados modelos empíricos. Esses modelos dendrométricos objetivam analisar a cubagem das árvores através de recursos matemáticos, comparando os sólidos geométricos de revolução às formas naturais das árvores, a fim de determinar seu volume (FINGER, 1992).

Esses sólidos são chamados de “protótipos dendrométricos” ou sólidos padrões comparáveis com a forma do tronco ou parte destes. Os protótipos são obtidos pela rotação da curva geral $y^2 = p \cdot x^r$ ao redor do eixo “X”, onde p = intercepto da equação geral e o expoente de forma “ r ” é um valor assumido conforme o sólido de revolução, cilindro ($r = 0$), parábola quadrática ($r = 1$), cone ($r = 2$) e neilóide ($r = 3$) (FINGER, 1992).

O estudo matemático das formas do tronco é de suma importância para que não haja superestimação, nem subestimação, dos diâmetros, gerando erros no cálculo de volume, pois esse constitui uma das informações de maior importância para o conhecimento do potencial florestal disponível em uma região, sendo que o volume individual oferece um ponto de partida para a avaliação do recurso lenhoso dos povoamentos florestais (MACHADO et al., 2004).

Embora em termos de precisão as funções de afilamento e as equações de volume sejam equivalentes, as funções de afilamento são muito mais interessantes à medida que se consegue estimar volume de qualquer porção da árvore. Seu uso ficou restrito, por muito tempo, pela falta de programas que possibilitassem sua implementação de forma fácil e acessível aos usuários, sendo hoje, portanto, superado pelo advento da tecnologia computacional (QUEIROZ, 2006).

2.3 Funções de forma de tronco

Entende-se por função de forma a descrição matemática do perfil longitudinal de um tronco, desenvolvida com o intuito de permitir estimativas de forma e de volume de uma árvore, através da mensuração do diâmetro e da altura.

A importância na medição da variável diâmetro dá-se por se tratar de uma dimensão diretamente mensurável, a partir da qual se pode calcular a área da seção transversal e o volume. O ponto de medição do diâmetro em árvores em pé é definido como diâmetro a altura do peito (dap), determinada a 1,30 m a partir do nível do solo ao longo do eixo da árvore. Esse é o sistema de medição usualmente utilizado no Brasil.

As funções de forma de tronco, embora complexas de se determinar, tem grande importância, pois quantificam as estimativas de produção. Através dessas funções, consegue-se realizar uma descrição analítica do comportamento e respostas das árvores frente aos diferentes métodos de produção, como o espaçamento entre plantas, a intensidade de podas e

a intensidade de desbastes, sobre a qualidade do material produtivo. Também atuam como ferramenta para predizer o diâmetro em qualquer ponto do tronco, a partir de uma ou duas variáveis medidas (SCHENEIDER, 1993).

São responsáveis pelo cálculo do volume de matéria-prima, onde se podem obter os valores de produtos e resíduos do plantio, e através destes, a construção de tabelas de produção e sortimentos, visando à divisão e quantificação do material em classes (com comprimentos e diâmetros mínimo e máximo), conforme suas dimensões, adequando-se as necessidades do mercado consumidor.

Existem inúmeros modelos que tentam se ajustar com as diversas formas e irregularidades do perfil das árvores, com precisão e acurácia. Dentre os principais modelos, Guimarães e Leite (1992) destacam os modelos polinomiais, sigmoidais, segmentados e os definidos por análise multivariada, os quais são descritos a seguir:

- Modelos polinomiais – baseiam-se principalmente na comparação entre a variável dependente diâmetro, $(d_i/d_{ap})^2$ ou $(d_i/d_{0,1})^2$, e os polinômios formados pela variável independente altura (h_i/h) (GUIMARÃES; LEITE, 1992). Uma propriedade interessante dos modelos polinomiais é a analiticidade, ou seja, podem-se calcular as derivadas de qualquer ordem dos polinômios, porém, a exigência de muitas derivadas pode ser muito restritiva quando se deseja aproximar funções em intervalos grandes (ANGELO et al., 1995). Esse ajuste de regressão entre as relações não explicam, de maneira acurada, as deformações existentes na base do tronco das árvores (MACHADO et al., 2004; MENDONÇA, 2006).

- Modelos sigmoidais – fazem uso de transformações de variáveis de modo que o modelo se assemelha a forma natural dos troncos, ou seja, perfil semelhante a uma curva sigmoide (GUIMARÃES; LEITE, 1992).

- Modelos segmentados – desenvolvidos como alternativa para modelar o afilamento do tronco, consiste na subdivisão do tronco em porções, onde cada parte é representada por uma função de afilamento. Evita-se o oneroso trabalho da analiticidade no intervalo inteiro, permitindo certo grau de descontinuidade das derivadas de ordem mais elevadas em alguns pontos (ANGELO et al., 1995). A união dos submodelos dá-se por meio da imposição de restrições ao modelo geral (GUIMARÃES; LEITE, 1992), aqui estão elencadas as funções spline. Essas funções apresentam boas propriedades de aproximação, convergência e estabilidade com respeito aos erros de arredondamento (ANGELO et al., 1995).

- Modelos definidos por análise multivariada - baseiam-se na aplicação de análise multivariada (análise de componentes principais) para investigar as variações existentes na

estrutura dos dados e definir o modelo de regressão a ser utilizado para descrever o perfil do tronco (GUIMARÃES; LEITE, 1992). Segundo Angelo et al. (1995), assim, é possível a identificação de regiões homogêneas ao longo do tronco, onde cada região constitui um segmento para a aplicação da função spline, apresentando-se como um método para a possível descrição da forma desses troncos.

O uso das funções de forma apresentam muitas vantagens em relação às equações de volume tradicionais, mais especificamente no que se refere aos volumes parciais, nas estimativas de diâmetro de topo de toras, ou ainda para estimar o comprimento de toras até um diâmetro mínimo para determinado uso comercial (KIRCHNER et al., 1989).

2.4 Modelos lineares e não lineares

A regressão é uma técnica estatística muito utilizada para análise de dados quantitativos. Sua ampla utilização é dada por permitir a modelagem e investigação de relação entre duas ou mais variáveis, uma variável dependente, cujo valor deverá ser previsto, e uma ou mais variáveis independentes (ou explicativas), sobre as quais existe conhecimento teórico disponível. Através desse estudo podem-se utilizar modelos para fins de predição, análise estrutural e dosagem de compostos, por exemplo.

Os modelos de regressão lineares são limitados a descrever casos onde há linearidade entre a relação representada. Em muitas situações não é possível à descrição do fenômeno através desses modelos. Para isso desenvolve-se uma nova classe de modelos, onde não são satisfeitas a condição de linearidade entre os parâmetros, temos, então, os chamados modelos de regressão não linear (REGAZZI, 2003).

Nas regressões splines pode-se ter modelos lineares e não lineares, dependendo se os nós tenham sido determinados ou estimados. Quando são determinados previamente, utilizando diagrama de dispersão ou através do conhecimento na área, ele torna-se uma constante e as derivadas parciais em relação aos parâmetros (a, b, c...) não são função de nenhum parâmetro desconhecido, tem-se, assim, a constituição de um modelo linear. No caso em que o nó é estimado ele torna-se um parâmetro, desta forma, ao derivar em relação a x_0 a derivada fica em função de β_2 (intercepto), caracterizando um modelo não linear (OLIVEIRA, 2011).

2.5 Funções spline em interpolação

Quando possuímos uma relação através de curva, uma alternativa para descrição é estabelecer dois ou mais polinômios para intervalos definidos, ou seja, utilizar um modelo segmentado. Esses modelos são denominados de regressão segmentada, ou, função spline.

A origem do nome spline vem de uma régua elástica, usada em desenhos de engenharia, que pode ser curvada de forma a passar por um dado conjunto de pontos (x_i, y_i) (ROGERS; ADAMS, 1990). Essa teoria foi desenvolvida a partir da necessidade prática de aproximação, onde a curva definida pela régua pode ser descrita como uma função por partes, cada qual um polinômio cúbico, de tal forma que ela e suas duas primeiras derivadas são sempre contínuas. A terceira derivada, entretanto, pode ter descontinuidade nos pontos x_i (RUGGIERO; LOPES, 1996).

As funções splines são empregadas em inúmeros trabalhos, distribuídos em diversas áreas do conhecimento. A técnica é utilizada quando se busca fidelidade ao objeto modelado, podendo preservar muitas propriedades matemáticas e geométricas das curvas e superfícies.

Alkan et al. (2013) analisaram o consumo de energia elétrica, em razão da época do ano, através de métodos de regressão spline: linear, quadrático e cúbico. Sáenz-Romero et al. (2012) utilizaram para prognóstico de clima e estudo no impacto da vegetação. Odgers, Libohova e Thompson (2012) através da utilização de mapas de solo digitais em diferentes lâminas, juntamente com funções splines, geraram mapas de estimativas de carbono orgânico no solo. Oliveira (2011) utiliza tal função para a elaboração de curvas de crescimento bovino para descrição de alterações no comportamento do crescimento animal.

Na área da ciência florestal a função spline é testada para cálculo de volume de árvores (Kirchner et al., 1989) e estimação de diâmetro ao longo do fuste (Scolforo et al., 1998), por exemplo.

Se uma função $f(x)$ está tabelada em $(n+1)$ pontos e aproximarmos por um polinômio de grau n que interpola sobre os pontos tabelados, o resultado dessa aproximação não garante a convergência dos pontos. Para obter a garantia dessa convergência usam-se funções spline, onde a alternativa é interpolar $f(x)$ em grupos de poucos pontos, obtendo-se polinômio de grau menor, e impor condições para que a função de aproximação seja contínua e tenha derivadas contínuas até certa ordem (RUGGIERO; LOPES, 1996).

A Figura 1 mostra o caso em que se aproxima a função por uma função linear por partes, a qual é denotada $S_1(x)$.

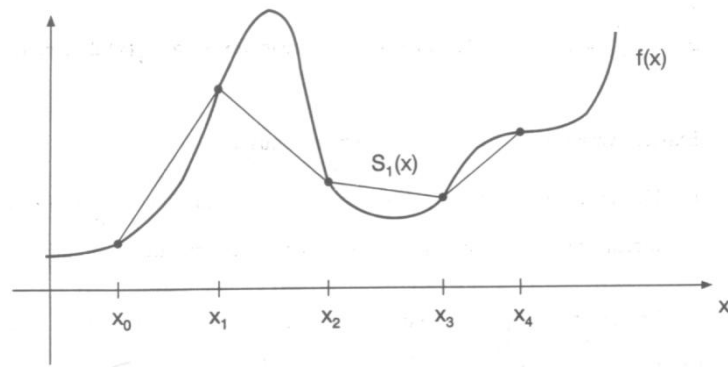


Figura 1 - Aproximação de $f(x)$ pela $S_1(x)$.

Fonte: Ruggiero e Lopes (1996).

A função $S_1(x)$ é contínua, mas não é derivável em todo o intervalo (x_0, x_4) , uma vez que $S'_1(x)$ não existe para $x = x_i$, $1 \leq i \leq 3$. Podemos optar por a cada 3 pontos: x_i, x_{i+1}, x_{i+2} , passar um polinômio de grau 2 e, neste caso, teremos (também) a garantia só de continuidade da função que vai aproximar $f(x)$ (RUGGIERO; LOPES, 1996).

No caso das funções spline, a opção feita é aproximar a função tabelada, em cada subintervalo $[x_i, x_{i+1}]$, por um polinômio de grau p , com algumas imposições definidas sobre a função.

Considerando uma função $f(x)$ tabelada nos pontos $x_0 < x_1 < \dots < x_n$, uma função $S_p(x)$ é denominada spline de grau p com nós nos pontos x_i , $i = 0, 1, \dots, n$, se satisfaz as seguintes condições (RUGGIERO; LOPES, 1996):

a) em cada subintervalo $[x_i, x_{i+1}]$, $i = 0, 1, \dots, (n-1)$, $S_p(x)$ é um polinômio de grau p : $s_p(x)$.

b) $S_p(x)$ é contínua e tem derivada contínua até ordem $(p-1)$ em $[a,b]$.

Se, além disto, $S_p(x)$ também satisfaz a condição:

c) $S_p(x_i) = f(x_i)$, $i = 0, 1, \dots, n$, então é denominada spline interpolante.

2.5.1 Spline linear interpolante

A função spline linear interpolante de $f(x)$, $S_1(x)$, nos nós x_0, x_1, \dots, x_n pode ser escrita em cada subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \dots, n$ como:

$$s_i(x) = f(x_{i-1}) \frac{x_i - x}{x_i - x_{i-1}} + f(x_i) \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}, \quad \forall x \in [x_{i-1}, x_i]$$

Onde:

- a) $S_1(x)$ é polinômio de grau 1 em cada subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$, por definição;
 b) $S_1(x)$ é contínua em (x_{i-1}, x_i) por definição, e, nos nós x_i , realmente S_1 está bem definida, pois:

$S_i(x_i) = s_{i+1}(x_i) = f(x_i) \rightarrow S_i(x)$ é contínua em $[a, b]$ e portanto, $S_1(x)$ é spline linear;

- c) $S_1(x_i) = s_i(x_i) = f(x_i) \rightarrow S_1(x)$ é spline linear interpolante de $f(x)$ nos nós x_0, x_1, \dots, x_n .

2.5.2 Spline cúbica interpolante

Se a spline for quadrática, $S_2(x)$ tem derivadas contínuas apenas até ordem um, logo, a curvatura de $S_2(x)$ pode tocar nos nós. Por esta razão, as splines cúbicas são mais usadas, contrapondo a desvantagem que apresenta a spline linear: ter derivada primeira descontínua nos nós.

Uma spline cúbica $S_3(x)$ é uma função polinomial por partes, contínua, na qual cada parte $s_k(x)$ é um polinômio de terceiro grau no intervalo $[x_{k-1}, x_k]$, $k = 1, 2, \dots, n$.

Se $S_3(x)$ tem a primeira e a segunda derivadas contínuas, resulta que a curva $S_3(x)$ não tem picos e nem troca abruptamente de curvatura nos nós.

Reescrevendo a definição de spline cúbica interpolante, conforme descrito por Ruggiero; Lopes, (1996), tem-se:

Supondo que $f(x)$ esteja tabelada nos pontos x_i , $i = 0, 1, 2, \dots, n$, a função $S_3(x)$ é chamada spline cúbica interpolante de $f(x)$ nos nós x_i , $i = 0, 1, 2, \dots, n$ se existem n polinômios de grau 3, $s_k(x)$, $k = 1, 2, \dots, n$, tais que:

i) $S_3(x) = s_k(x)$ para $x \in [x_{k-1}, x_k]$, $k = 1, 2, \dots, n$

ii) $S_3(x_i) = f(x_i)$, $i = 0, 1, 2, \dots, n$

iii) $S_k(x_k) = s_{k+1}(x_k)$, $k = 1, 2, 3, \dots, (n-1)$

iv) $S'_k(x_k) = s'_{k+1}(x_k)$, $k = 1, 2, 3, \dots, (n-1)$

v) $S''_k(x_k) = s''_{k+1}(x_k)$, $k = 1, 2, 3, \dots, (n-1)$

Para simplificar a notação, escreve-se $s_k(x) = a_k(x - x_k)^3 + b_k(x - x_k)^2 + c_k(x - x_k) + d_k$, $k = 1, 2, 3, \dots, n$.

Assim, o cálculo de $S_3(x)$ exige a determinação de quatro coeficientes para cada k , em um total de $4n$ coeficientes: $a_1, b_1, c_1, d_1, a_2, b_2, \dots, a_n, b_n, c_n, d_n$.

Impondo as condições para que $S_3(x)$ seja spline interpolante de f em x_0, \dots, x_n , tem-se que:

- $(n+1)$ condições para que $S_3(x)$ seja spline interpolante de $f(x)$ nos nós;
- $(n-1)$ condições para que $S_3(x)$ esteja bem definida nos nós (continuidade de $S_3(x)$ em $[x_0, x_n]$);
- $(n-1)$ condições para que $S'_3(x)$ seja contínua em $[x_0, x_n]$; e
- $(n-1)$ condições para que $S''_3(x)$ seja contínua em $[x_0, x_n]$ num total de $(n+1 + 3(n-1)) = 4n - 2$ condições.

Portanto, têm-se duas condições em aberto. Essas condições podem ser impostas de acordo com informações físicas disponíveis sobre o problema, por exemplo.

De acordo com cada definição dada para cada $s_k(x)$, a condição (i) da definição de $S_3(x)$ está automaticamente satisfeita.

Para impor a condição (ii), montam-se, para $k = 1, 2, \dots, n$, as equações:

$$s_k(x_k) = d_k = f(x_k) \quad (1)$$

às quais se devem acrescentar mais a equação:

$$s_1(x_0) = f(x_0) \rightarrow -a_1 h_1^3 + b_1 h_1^2 - c_1 h_1 + d_1 = f(x_0) \quad (2)$$

onde se usa a notação $h_k = x_k - x_{k-1}$, com $k = 1$.

A condição (iii) é satisfeita através das $(n-1)$ equações para $k = 1, 2, \dots, (n-1)$, $s_{k+1}(x_k) = f(x_k)$, ou seja:

$$-a_{k+1} h_{k+1}^3 + b_{k+1} h_{k+1}^2 - c_{k+1} h_{k+1} + d_{k+1} = f(x_k) \quad (3)$$

Para impor as condições (iv) e (v), necessita-se das derivadas das $s_k(x)$:

$$s'_k(x) = 3a_k(x - x_k)^2 + 2b_k(x - x_k) + c_k \quad (4)$$

$$s''_k(x) = 6a_k(x - x_k) + 2b_k \quad (5)$$

Observa-se que $s''_k(x_k) = 2b_k$. Assim, cada coeficiente b_k pode ser escrito em função de $s''_k(x_k)$:

$$b_k = \frac{s''_k(x_k)}{2} \quad (6)$$

Analogamente, como $s''_k(x_{k-1}) = -6a_k h_k + 2b_k$, pode-se também escrever a_k em função das derivadas segundas nos nós, pois:

$$a_k = \frac{2b_k - s''_k(x_{k-1})}{6h_k} = \frac{s''_k(x_k) - s''_k(x_{k-1})}{6h_k}$$

Impondo a condição (v), ($s''_k(x_{k-1}) = s''_{k-1}(x_{k-1})$), obtém-se:

$$a_k = \frac{s''_k(x_k) - s''_{k-1}(x_{k-1})}{6h_k} \quad (7)$$

Observa-se que, no caso $k=1$, está sendo introduzida uma variável, $s''_0(x_0)$, arbitrária.

Uma vez que $d_k = f(x_k)$ e já foram expressos a_k e b_k , pode-se usar (2) e (3) para ter-se c_k também em função das derivadas segundas nos nós. Observa-se que tirar c_1 da equação (2) e, para $k = 1, \dots, (n-1)$ usar (3) é o mesmo que, para $k = 1, 2, \dots, n$, temos:

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{-f(x_{k-1}) - a_k h_k^3 + b_k h_k^2 + d_k}{h_k} \\ &= \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{h_k} - (a_k h_k^2 - b_k h_k) \\ &= \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{h_k} - \left\{ \frac{[s''_k(x_k) - s''_k(x_{k-1})] h_k}{6} - \frac{s''_k(x_k) h_k}{2} \right\} \end{aligned} \quad (8)$$

ou seja:

$$c_k = \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{h_k} - \frac{-2s''_k(x_k)h_k - s''_{k-1}(x_{k-1})h_k}{6}$$

Se for usada mais as notações $s''(x_k) = g_k$ e, $f(x_k) = y_k$, tem-se:

$$a_k = \frac{g_k - g_{k-1}}{6h_k} \quad (9)$$

$$b_k = \frac{g_k}{2} \quad (10)$$

$$c_k = \left[\frac{y_k - y_{k-1}}{h_k} + \frac{2h_k g_k + g_{k-1} h_k}{6} \right] e, \quad (11)$$

$$d_y = y_k \quad (12)$$

Assim para $k = 1, 2, \dots, n$, pode-se calcular todos os coeficientes de $s_k(x)$ em função de $g_j = s''_j(x_j)$, $j = 0, 1, 2, \dots, n$.

Impondo-se agora a condição (iv), $s'_k(x_k) = s'_{k+1}(x_k)$, $k = 1, 2, \dots, (n-1)$ tem-se:

$$s'_k(x_k) = c_{k+1}(x_k)$$

$$s'_k(x_k) = c_k = 3a_{k+1}h_{k+1}^2 - 2b_{k+1}h_{k+1} + c_{k+1}$$

Onde:

$$c_{k+1} = c_k - 3a_{k+1}h_{k+1}^2 + 2b_{k+1}h_{k+1}$$

Utilizando (9), (10) e (11)

3) Impor valores para as inclinações em cada eixo, por exemplo $S''_3(x_0) = A$ e $S'_3(x_n) = B$, o que nos fornecerá as duas equações adicionais:

$$S'_1(x_0) = 3a_1h^2 - 2b_1h + c_1 = A$$

$$S'_n(x_n) = c_n = B$$

É importante ressaltar, conforme Weber (2011), que, em estudos de função densidade de probabilidade multimodas, a função spline cúbica ignora por completo quaisquer comportamentos ou tendências biológicas, uma vez que não foi criada para isso, logo, deve ser utilizada com bastante cuidado.

2.6 Estudo da altura

A altura total de uma árvore pode ser definida como a distância do nível do solo até o topo da árvore, ao longo de seu eixo principal (MACHADO; FIGUEIREDO FILHO, 2003). Na mensuração florestal, além da altura total, são utilizadas diferentes alturas relativas como: altura comercial (altura medida até um diâmetro mínimo, ou bifurcação), altura da inserção do primeiro galho, altura comercial, altura em determinadas porcentagens da altura total, entre outras, dependendo do interesse do trabalho.

Essa variável é utilizada, essencialmente, para o cálculo do volume e de incrementos, em altura e em volume. Nos métodos estimativos a altura também é utilizada como uma segunda variável independente nas tabelas de volume, funções de afilamento e em algumas outras relações dendrométricas (MACHADO; FIGUEIREDO FILHO, 2003). O conhecimento da altura é fundamental para definição de estratégias que buscam aperfeiçoar o uso do fuste para multiprodutos.

2.7 Sortimentos

Sortimento consiste na segmentação, ou divisão, do tronco em diferentes dimensões para distintos fins de aproveitamento. O estudo do sortimento nos povoamentos florestais é de grande importância para a análise do potencial madeireiro, observando-se aspectos do planejamento das atividades de manejo, dimensionamento das unidades de processamento

mecânico da madeira, bem como da comercialização de madeira serrada (JORGE; LARA, 1993).

Para a determinação rápida do estoque de madeira, para os diferentes tipos de aproveitamento, são elaboradas tabelas de sortimento. A construção dessas tabelas é feita a partir de equações que descrevem a forma média do tronco de uma espécie de árvore, onde as funções de afilamento têm as características de reproduzir os valores diamétricos situados a alturas sucessivas (QUEIROZ, 2006).

Assim, a partir da obtenção de tabelas de sortimento para o plantio, pode-se ordenar, organizar e decidir o melhor sistema de manejo à ser implantado na área. Pode-se otimizar os comprimentos de colheita das toras para celulose, energia e serraria, por exemplo, visando selecionar a alternativa que proporcione maior rendimento econômico. Ao destinar cada parte da tora ao seu uso mais rentável a empresa consegue atingir o máximo aproveitamento, pois consegue destinar uma parte da produção madeireira para fins mais nobres, que possuem maior valor agregado (SOARES et al., 2003).

2.8 Parâmetros de avaliação do ajuste

A escolha e avaliação de uma equação devem ser feitas levando-se em conta diversos critérios que ajustem e minimizem os erros. Dependem da precisão exigida, do interesse no modelo, dos recursos ou dados disponíveis. Deve-se empregar o uso de diversos métodos conjuntos, afim de não correr o risco de obter um resultado “mascarado”, ou seja, que através de determinada avaliação tem uma boa precisão, porém não revela a verdadeira dimensão dos dados/população original.

Existem inúmeras formas de avaliar se os resultados obtidos são satisfatórios ou não. As avaliações mais decorrentes utilizam os resultados de coeficiente de determinação, erro padrão da estimativa, análise e distribuição dos resíduos. Usualmente é utilizada a formação de um *ranking* para facilitar a apreciação.

2.8.1 Coeficiente de determinação

O coeficiente de determinação (R^2) avalia a qualidade do ajuste de um modelo através da indicação de quanto da variação total de y é explicada pelo modelo ajustado aos dados, ou seja, quanto da variação da variável dependente (y) é explicada pela variável independente (x). É obtido pela expressão:

$$R^2 = \frac{SQ_{regressão}}{SQ_{total}}$$

Onde:

$SQ_{regressão}$ = soma de quadrados da regressão;

SQ_{total} = soma de quadrados do total.

Se $R^2 = 1$, todos os pontos observados estão sobre a reta estimada, não havendo desvios. Neste caso a função especificada consegue explicar 100% das variações de Y pelas variações de X .

Deve-se observar que o coeficiente é crescente, pois à medida que se inclui uma nova variável ao modelo, maior será o R^2 obtido, mesmo que o benefício proporcionado por essa adição seja pequeno. Isso pode ocasionar um equívoco de interpretação. Portanto este critério não pode ser utilizado isoladamente, uma vez que não há ponderação do coeficiente com o número de variáveis utilizadas.

A fim de incluir o número de variáveis independentes na análise, é proposto um ajuste no coeficiente de determinação, pela expressão:

$$R^2_{ajustado} = R^2 - \left[\frac{n-1}{N-n} \right] * (1 - R^2)$$

Onde:

n = número de variáveis independentes da equação;

N = número de observações;

R^2 = coeficiente de determinação.

Através dessa correção consegue-se ponderar o número de variáveis incluídas, sanando a deficiência do coeficiente de determinação.

2.8.2 Erro padrão da estimativa

O erro padrão da estimativa é uma medida de dispersão entre os valores observados (parâmetros) e os valores estimados pelo modelo. Avalia a precisão do cálculo da média populacional. Quanto menor for o valor para o erro padrão da estimativa menor será a variabilidade do valor estimado para com o valor observado.

Através do erro padrão da estimativa pode-se comparar a precisão de equações com variáveis dependentes de mesma unidade. Para ser possível a comparação de equações com variáveis dependentes de diferentes unidades deve-se converter para porcentagem (MEYER, 1938). São obtidos através das fórmulas:

$$S_{xy} = \sqrt{QM_{\text{resíduo}}}$$

$$S_{xy}\% = \frac{S_{xy}}{\bar{Y}} * 100$$

Onde:

S_{xy} = erro padrão da estimativa;

$QM_{\text{resíduo}}$ = quadrado médio do resíduo obtido na análise de variância;

$S_{xy}\%$ = erro padrão em porcentagem;

\bar{Y} = média aritmética da variável dependente.

2.8.3 Análise de distribuição dos resíduos

Os resíduos consistem na diferença entre o parâmetro (variável dependente observada) e o valor estimado, representados pela seguinte expressão:

$$e_i = Y_i - \hat{Y}_i$$

Onde:

e_i = resíduo da i ésima observação;

Y_i = variável dependente observada;

\hat{Y}_i = variável dependente estimada pelo modelo.

A análise gráfica da distribuição dos resíduos constitui uma ferramenta fundamental para a tomada de decisão quanto à utilização ou não do modelo. Quando plotados gera-se a

dispersão ao longo da magnitude dos dados observados, o que permite uma visão holística, tornando possível a detecção de tendências no ajuste ao longo da linha de regressão, facilitando a verificação do ajuste da equação ao longo da amplitude dos dados observados (SCHNEIDER, 1993).

3 MATERIAL E MÉTODOS

3.1 Localização e descrição da área

Os dados para o estudo foram coletados em povoamentos florestais de propriedade da Empresa Aracruz Celulose S.A., com sede no Município de Guaíba, a 30 km de Porto Alegre, no Estado do Rio Grande do Sul. A área de estudo localiza-se a 30° 20' de latitude sul e 51° 26' de longitude oeste do Meridiano de Greenwich, em talhões denominados de Horto Florestal Passo da Estância, Horto Florestal Barba Negra e Horto Florestal Calderon. A altitude desta região situa-se em torno de 100 metros.

Segundo a classificação climática Köppen, o clima da região é do tipo "Cfa", mesotérmico subtropical, com verões quentes, sem estação seca definida onde a temperatura média anual é de 16°C com precipitação de 1.500 mm/ano (MORENO, 1961).

O solo da área é classificado como litólicos eutróficos, de textura média, relevo fortemente ondulado e substrato de granito com afloramento de rochas, pouco desenvolvidos, com argila de atividade alta e não hidromórficos (LEMOS et al., 1973).

3.2 Povoamento

Os povoamentos florestais foram implantados com espaçamento de 3 x 2 metros, totalizando 1.666 árvores por hectare. Foram realizados desbastes de melhoramento com o objetivo de obtenção de uma área de produção de sementes, remanescendo aos 15 anos, aproximadamente, 200 árvores por hectare.

3.3 Amostragem

Para o estudo da forma de tronco, foram abatidas 261 árvores, cobrindo uma amplitude diamétrica de 8,0 a 74,0 cm de dap, distribuídas em classes de 10 cm de diâmetro. A cubagem das árvores foi realizada através do método de Smalian - onde o volume é calculado por meio do produto da média aritmética, obtida dos extremos das áreas seccionais, multiplicado pelo comprimento da seção - com seções nas posições de 0,10m; 0,30m; 1,30m e, a partir deste ponto, de 1,0 em 1,0 metro, até o ápice das árvores.

Para atender a condição de que o intervalo de seccionamento seja constante, para a aplicação da função spline, os valores de posição (h_i) e de diâmetros (d_i) foram calculados por interpolação.

3.4 Estudo da forma de tronco

A forma do tronco foi estudada pela função spline. Por tratar-se de uma função que descreve as árvores individualmente, os dados foram separados por classe de diâmetro. Delimitaram-se, assim, três classes para o estudo, que estão descritos, com o respectivo número de árvores, na Tabela 1.

Tabela 1 – Classes diamétricas e respectivo número de árvores.

Classes diamétricas	Número de árvores
< 20 cm	68
20 a 30 cm	159
> 30 cm	34
Total	261

A partir dessas classes, através dos parâmetros das árvores centro da classe, realizou-se o estudo. O modelo de equação utilizado para descrever a forma de tronco foi a função spline, dada por:

$$F_k(x) = a_k(x - x_k)^3 + b_k(x - x_k)^2 + c_k(x - x_k) + d_k$$

Onde: a_k , b_k , c_k , e d_k , são os coeficientes; $k = 1, 2, \dots, n$; x_k = limite do intervalo.

3.5 Determinação dos parâmetros da função spline cúbica

Matematicamente, splines são definidas como sendo polinômios segmentados de grau n , cujos valores da função e suas primeiras $n-1$ derivadas contínuas passam nos pontos onde se juntam (SCOLFORO et al., 1998). Estes polinômios segmentados são escolhidos para minimizar a curvatura quadrática média (KIRCHNER et al., 1989).

A Figura 2 ilustra o conceito da função spline para o perfil da árvore. O intervalo $[x_0, x_n]$, que representa a altura da árvore, é subdividido em n subintervalos $[x_0, x_1]$, $[x_1, x_2]$, ..., $[x_{n-1}, x_n]$, ou seja, em alturas relativas, segmentada, e então pode-se aproximar $f(x)$ por um polinômio diferente em cada um desses subintervalos.

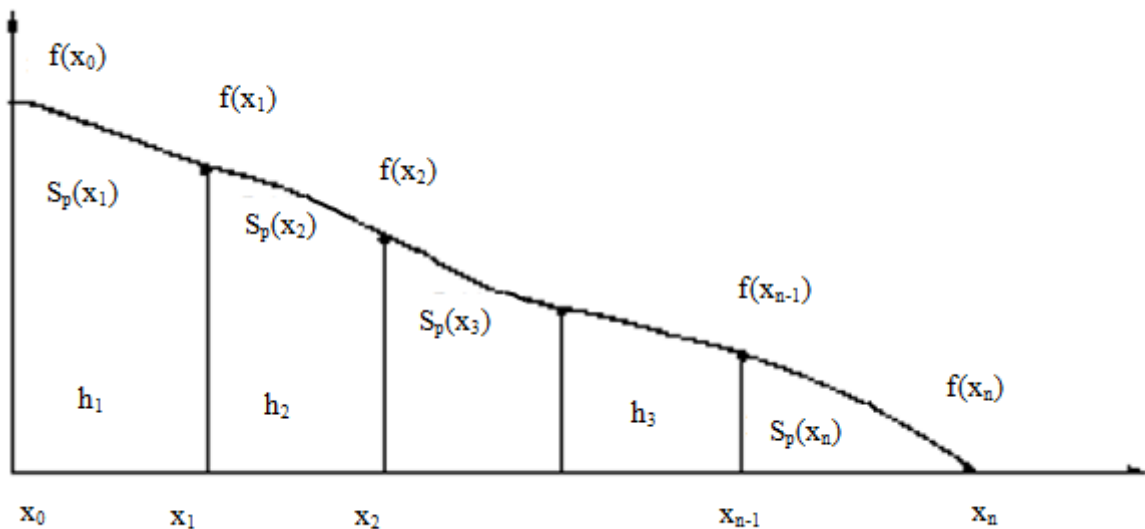


Figura 2 - Representação da função spline cúbica para o perfil de uma árvore.
Fonte: Scolforo et al. (1998) (adaptada).

Através da definição de spline cúbica interpolante tem-se que:

$$s_1(x) = a_1(x - x_1)^3 + b_1(x - x_1)^2 + c_1(x - x_1) + d_1$$

Onde os parâmetros da função spline cúbica são obtidos conforme as equações:

$$a_k = \frac{g_k - g_{k-1}}{6h_k}$$

$$b_k = \frac{g_k}{2}$$

$$c_k = \left[\frac{y_k - y_{k-1}}{h_k} + \frac{2h_k g_k + g_{k-1} h_k}{6} \right]$$

$$d_k = y_k$$

Onde: $g_k = s''(x_k)$; $h_k =$ amplitude do intervalo x ; $y_k = f(x_k)$; $k = 1, 2, \dots, n$.

3.5.1 Exemplo da função spline cúbica

Apresentamos um exemplo, proposto por Ruggiero e Lopes (1996), onde o objetivo é encontrar uma aproximação para $f(0,25)$, por spline cúbica natural interpolante, através dos 5 nós e respectivas $f(x)$ apresentados na Tabela 2.

Tabela 2 – Nós e respectivas $f(x)$ para interpolação.

x	0,0	0,5	1,0	1,5	2,0
$f(x)$	3,0000	1,8616	-0,5571	-4,1987	-9,0536

Fonte: Ruggiero e Lopes (1996).

Temos quatro subdivisões no intervalo $[0; 2,0]$, onde $n = 4$, e portanto, determina-se $s_1(x)$, $s_2(x)$, $s_3(x)$ e $s_4(x)$ resolvendo, para $1 \leq k \leq 3$ ($n-1 = 3$), o sistema:

$$h_k g_{k-1} + 2(h_k + h_{k+1})g_k + h_{k+1}g_{k+1} = 6 \left(\frac{y_{k+1} - y_k}{h_{k+1}} - \frac{y_k - y_{k-1}}{h_k} \right)$$

Neste exemplo, $h_k = h = 0,5$. Assim a equação fica:

$$h g_{k-1} + 4h g_k + h g_{k+1} = \frac{6}{h} (y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1})$$

$$k = 1 \begin{cases} h g_0 + 4h g_1 + h g_2 = \frac{6}{h} (y_2 - 2y_1 + y_0) \\ k = 2 \begin{cases} h g_1 + 4h g_2 + h g_3 = \frac{6}{h} (y_3 - 2y_2 + y_1) \\ k = 3 \begin{cases} h g_2 + 4h g_3 + h g_4 = \frac{6}{h} (y_4 - 2y_3 + y_2) \end{cases} \end{cases} \end{cases}$$

Sendo spline cúbica natural, $g_0 = g_4 = 0$, o sistema a ser resolvido será:

$$\begin{cases} 4hg_1 + hg_2 &= \frac{6}{h}(y_2 - 2y_1 + y_0) \\ hg_1 + 4hg_2 + hg_3 &= \frac{6}{h}(y_3 - 2y_2 + y_1) \\ hg_2 + 4hg_3 &= \frac{6}{h}(y_4 - 2y_3 + y_2) \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 4h & h & 0 \\ h & 4h & h \\ 0 & h & 4h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{pmatrix} = \frac{6}{h} \begin{pmatrix} y_2 - 2y_1 + y_0 \\ y_3 - 2y_2 + y_1 \\ y_4 - 2y_3 + y_2 \end{pmatrix}$$

e, substituindo os valores de $h (= 0,5)$ e de y_i , $0 \leq i \leq 4$,

$$\begin{pmatrix} 4 * 0,5 & 0,5 & 0 \\ 0,5 & 4 * 0,5 & 0,5 \\ 0 & 0,5 & 4 * 0,5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{pmatrix} = \frac{6}{0,5} \begin{pmatrix} -0,5571 - 2(1,8616) + 3 \\ -4,1987 - 2(-0,5571) + 1,8616 \\ -9,0536 - 2(-4,1987) - 0,5571 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0,5 & 0 \\ 0,5 & 2 & 0,5 \\ 0 & 0,5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -15,3636 \\ -14,6748 \\ -14,5598 \end{pmatrix}$$

A solução pelo método da eliminação de Gauss, fornece:

$$\begin{aligned} g_3 &= -6,252 \\ g_2 &= -4,111 \\ g_1 &= -6,6541 \end{aligned}$$

Levando-se estes valores em a_k , b_k , c_k e d_k encontramos $s_1(x)$, $s_2(x)$, $s_3(x)$, $s_4(x)$.

Assim a aproximação para $f(0,25)$, $f(0,25) \approx s_1(0,25)$ e

$$s_1(x) = a_1(x - x_1)^3 + b_1(x - x_1)^2 + c_1(x - x_1) + d_1$$

Onde por (9), (10), (11) e (12), será:

$$a_1 = \frac{g_1 - g_0}{6h} = \frac{-6,6541 - 0}{6 * 0,5} = \frac{-6,6541}{3} = -2,2180$$

$$b_1 = \frac{g_1}{2} = \frac{-6,6541}{2} = -3,3270$$

$$c_1 = \frac{y_1 - y_0}{h} + \frac{2hg_1 + g_0h}{6} = \frac{1,8616 - 3}{0,5} + \frac{(2 * 0,5 * -6,6541)}{6} = -3,3858$$

$$d_1 = y_1 = 1,8616$$

$$s_1(0,25) = -2,2180(-0,25)^3 - 3,3270(-0,25)^2 - 3,3858(-0,25) + 1,8616 = 2,5348$$

Assim, por spline cúbica natural interpolante, $f(0,25) \approx s_1(0,25) = 2,5348$

4 RESULTADOS E DISCUSSÃO

O ajuste da função spline para o estudo da forma do tronco foi realizado para árvores individuais a partir do software R (Version 3.0.1 (2013-05-16) Copyright© 2013 The R Foundation for Statistical Computing). A rotina dos cálculos, assim como um exemplo do uso dos comandos, pode ser visualizada nos anexos (Anexo A, B e C).

O conjunto total de árvores foi subdividido em três classes diamétricas (menor que 20 cm, de 20 cm a 30 cm, e, acima de 30 cm). Para o estudo da função spline selecionou-se a árvore central de cada classe diamétrica, tendo então, a árvore denominada de 165, 115, 20, respectivamente, em cada classe.

Como temos a premissa de ter um intervalo constante para a aplicação da função spline, foi calculado o seccionamento nas posições (h_i) e de diâmetros (d_i) por interpolação.

4.1 Classe diamétrica inferior a 20 cm

A classe diamétrica inferior a 20 cm tem as dimensões representadas pela cubagem, e posterior interpolação das medidas, correspondente à árvore central da classe (Tabela 3). É representada pela árvore 165.

(continua)

Tabela 3 - Seccionamento da árvore 165, centro de classe da classe até 20 cm.

h_i (m)	d_i (cm)
0,0	2,10
1,3	15,00
2,6	14,35
3,9	13,70
5,2	13,05
6,5	12,40
7,8	11,75
9,1	10,70
10,4	10,00
11,7	9,80
13,0	9,15
14,3	8,00

(conclusão)

Tabela 3 - Seccionamento da árvore 165, centro de classe da classe até 20 cm.

h_i (m)	d_i (cm)
15,6	7,35
16,9	6,40
18,2	5,17
19,5	3,97
20,8	2,77
22,1	1,57
23,4	0,37

Onde: h_i = Altura na posição i (metros); d_i = Diâmetro a altura relativa h_i (centímetros).

A Tabela 4 contém os coeficientes determinados pela função spline para cada um dos intervalos de seccionamento da árvore 165.

Tabela 4 - Coeficientes da árvore 165 determinados pela função spline.

Intervalo (m)	a_k	b_k	c_k	d_k
0,00 – 1,30	- 0,4058500	3,255542235	- 8,1616921	21,00
1,30 – 2,60	- 0,5441053	1,672701998	- 1,7549746	15,00
2,60 – 3,90	0,14713900	-0,44930881	- 0,1645634	14,35
3,90 – 5,20	- 0,0444506	0,124533236	- 0,5867717	13,70
5,20 – 6,50	- 0,0306635	-0,04882414	- 0,4883498	13,05
6,50 – 7,80	- 0,0782032	0,070763307	- 0,4598289	12,40
7,80 – 9,10	0,11000830	-0,23422909	- 0,6723344	11,75
9,10 – 10,40	0,01924650	0,156093885	- 0,7739102	10,70
10,40 – 11,70	- 0,1087940	0,231155327	- 0,2704862	10,00
11,70 – 13,00	- 0,0164784	-0,19314123	- 0,2210679	9,80
13,00 – 14,30	0,15194930	-0,25740699	- 0,8067806	9,15
14,30 – 15,60	- 0,1361526	0,335195212	- 0,7056559	8,00
15,60 – 16,90	0,02852820	-0,19579990	- 0,5244420	7,35
16,90 – 18,20	0,03114320	-0,08454001	- 0,8888839	6,40
18,20 – 19,50	- 0,0119995	0,036918512	- 0,9507918	5,17
19,50 – 20,80	0,00319990	-0,00987960	- 0,9156412	3,97
20,80 – 22,10	- 0,0008000	0,002599895	- 0,9251048	2,77
22,10 – 23,40	- 0,0000000	-0,00051998	- 0,9224010	1,57

Onde: a_k , b_k , c_k e d_k = coeficientes.

Através desses coeficientes, determinados pela função spline, foram calculadas as interpolações dentro de cada um dos intervalos. A Figura 3 representa a reconstituição esquemática do perfil longitudinal da árvore 165, em que se pode verificar os valores observados, bem como os valores estimados pela função spline.

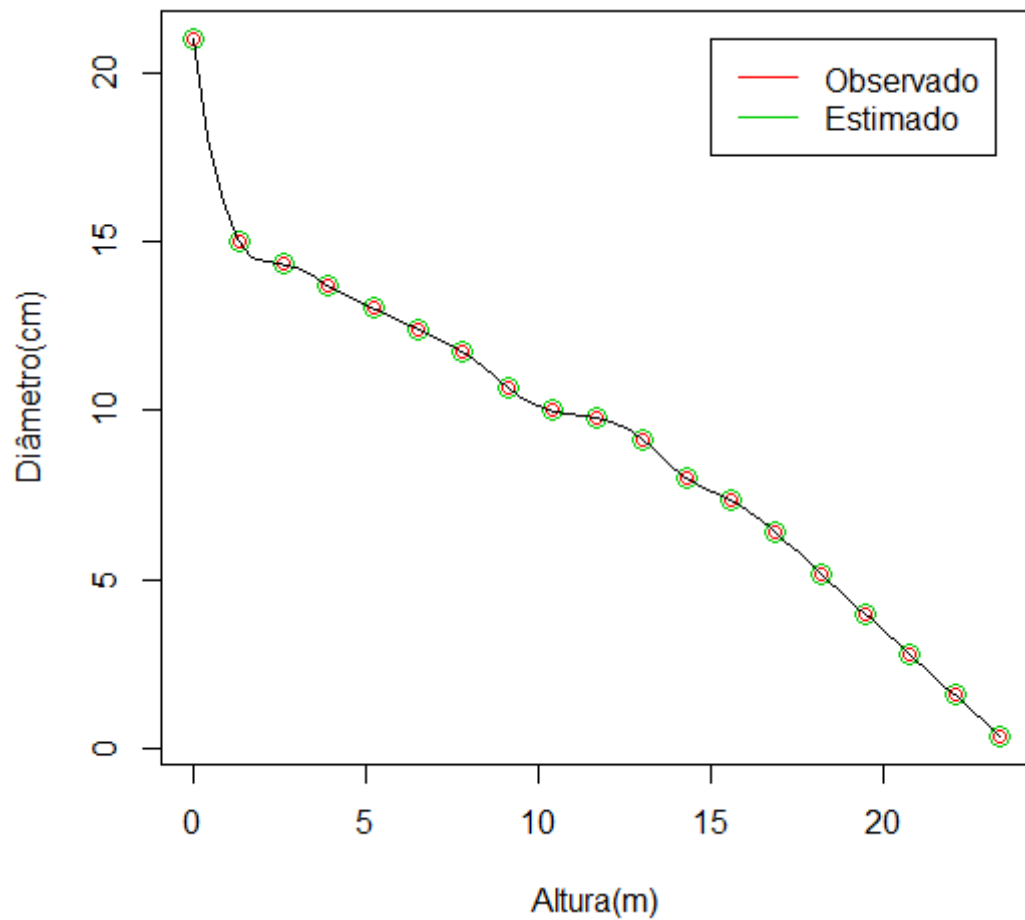


Figura 3 – Representação esquemática do perfil longitudinal da árvore 165.

4.2 Classe diamétrica entre 20 e 30 cm

A classe diamétrica entre 20 e 30 cm tem as dimensões representadas pela cubagem, e posterior interpolação das medidas, correspondente a árvore central da classe, representada pela árvore 115, na Tabela 5.

(continua)

Tabela 5 - Seccionamento da árvore 115, centro de classe da classe entre 20 e 30 cm.

h_i (m)	d_i (cm)
0,0	29,50
1,3	25,00
2,6	23,17
3,9	22,16
5,2	20,83
6,5	20,12
7,8	19,45
9,1	18,22

(conclusão)

Tabela 5 - Seccionamento da árvore 115, centro de classe da classe entre 20 e 30 cm.

h_i (m)	d_i (cm)
10,4	17,49
11,7	17,24
13,0	16,37
14,3	15,20
15,6	14,41
16,9	13,54
18,2	12,92
19,5	12,22
20,8	10,95
22,1	9,76
23,4	8,45
24,7	7,68
26,0	6,71
27,3	5,08
28,6	3,53
29,9	2,00
31,2	0,47

Onde: h_i = Altura na posição i (metros); d_i = Diâmetro a altura relativa h_i (centímetros).

A Tabela 6 contém os coeficientes determinados pela função spline para cada um dos intervalos de seccionamento da árvore 115.

(continua)

Tabela 6 - Coeficientes da árvore 115 determinados pela função spline.

Intervalo (m)	a_k	b_k	c_k	d_k
0,00 – 1,30	-0,1403429	1,3381734899	-4,9639845	29,50
1,30 – 2,60	-0,1417204	0,7908362118	-2,1962719	25,00
2,60 – 3,90	-0,1348328	0,2381266332	-0,8586202	23,17
3,90 – 5,20	0,16216237	-0,2877214427	-0,9230935	22,16
5,20 – 6,50	-0,0859605	0,3447118003	-0,8490060	20,83
6,50 – 7,80	-0,0823168	0,0094659576	-0,3885749	20,12
7,80 – 9,10	0,14212815	-0,3115697135	-0,7813098	19,45
9,10 – 10,40	-0,0037196	0,2427300563	-0,8708013	18,22
10,40 – 11,70	-0,1363529	0,2282234527	-0,2585618	17,49
11,70 – 13,00	0,048448497	-0,3035528611	-0,3564900	17,24
13,00 – 14,30	0,088212078	-0,1146037242	-0,9000936	16,37
14,30 – 15,60	-0,091783836	0,2294233793	-0,7508280	15,20
15,60 – 16,90	0,069546843	-0,1285335801	-0,6196713	14,41
16,90 – 18,20	-0,036198711	0,1426991067	-0,6012561	13,54
18,20 – 19,50	-0,074956826	0,0015241357	-0,4137659	12,92
19,50 – 20,80	0,112994606	-0,2908074838	-0,7898342	12,22

(conclusão)

Tabela 6 - Coeficientes da árvore 115 determinados pela função spline.

Intervalo (m)	a_k	b_k	c_k	d_k
20,80 – 22,10	-0,081163611	0,1498714799	-0,9730510	10,95
22,10 – 23,40	0,120626609	-0,1666666016	-0,9948847	9,76
23,40 - 24,70	-0,100933177	0,3037771750	-0,8166410	8,45
24,70 - 26,00	-0,05371684	-0,0898622168	-0,5385515	7,68
26,00 - 27,30	0,106424116	-0,2993578935	-1,0445376	6,71
27,30 - 28,60	-0,035156682	0,1156961577	-1,2832979	5,08
28,60 - 29,90	0,006892645	-0,0214149029	-1,1607323	3,53
29,90 - 31,20	-0,00151722	0,0054664125	-1,1814653	2,00

Onde: a_k , b_k , c_k e d_k = coeficientes.

Através desses coeficientes, determinados pela função spline, foram calculadas as interpolações dentro de cada um dos intervalos. A Figura 4 representa a reconstituição esquemática do perfil longitudinal da árvore 115, em que se podem verificar os valores observados, bem como os valores estimados pela função spline.

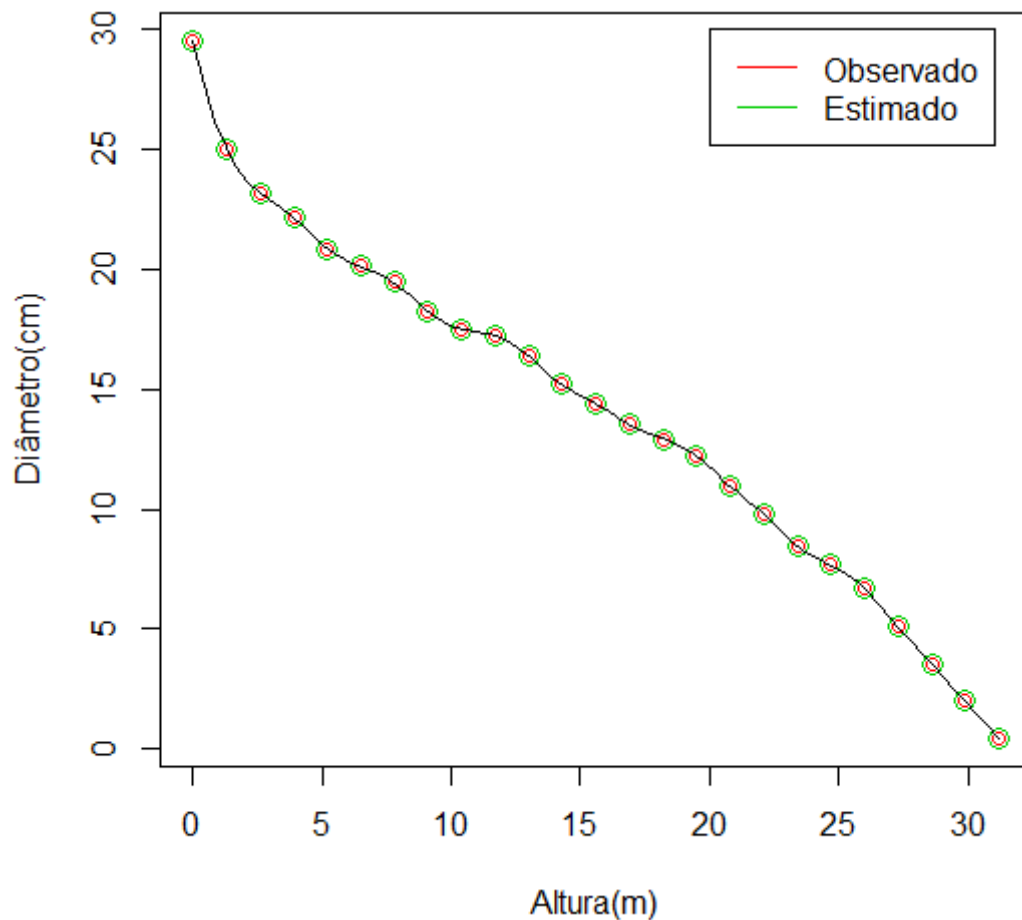


Figura 4 - Representação esquemática do perfil longitudinal da árvore 115.

4.3 Classe diamétrica superior a 30 cm

A classe diamétrica superior a 30 cm tem as dimensões representadas pela cubagem, e posterior interpolação das medidas, correspondente a árvore central da classe (Tabela 7). É representada pela árvore 20.

(continua)

Tabela 7 - Seccionamento da árvore 20, centro de classe da classe superior a 30 cm.

h_i (m)	d_i (cm)
0,0	49,00
1,3	35,00
2,6	33,70
3,9	32,70
5,2	31,60
6,5	31,00
7,8	31,00
9,1	29,60
10,4	28,45
11,7	28,00
13,0	28,00
14,3	26,50
15,6	25,55
16,9	24,20
18,2	23,55
19,5	22,50
20,8	22,00
22,1	21,50
23,4	20,50
24,7	19,50
26,0	18,00
27,3	16,50
28,6	15,70
29,9	14,70
31,2	13,60
32,5	11,40
33,8	10,75
35,1	10,10
36,4	7,90
37,7	6,40
39,0	4,80
40,3	3,00

(conclusão)

Tabela 7 - Seccionamento da árvore 20, centro de classe da classe superior a 30 cm.

h_i (m)	d_i (cm)
41,6	1,05

Onde: h_i = Altura na posição i (metros); d_i = Diâmetro a altura relativa h_i (centímetros).

A Tabela 8 contém os coeficientes determinados pela função spline para cada um dos intervalos de seccionamento da árvore 20.

(continua)

Tabela 8 - Coeficientes da árvore 20 determinados pela função spline.

Intervalo (m)	a_k	b_k	c_k	d_k
0,00 – 1,30	-0,94067668	7,62299882	-19,08938564	49
1,30 – 2,60	-1,243697164	3,95435976	-4,03881949	35
2,60 – 3,90	0,271405252	-0,89605917	-0,06302872	33,7
3,90 – 5,20	-0,023990301	0,16242131	-1,01675794	32,7
5,20 – 6,50	0,097655632	0,06885914	-0,71609336	31,6
6,50 – 7,80	-0,321115612	0,4497161	-0,04194555	31
7,80 – 9,10	0,276474545	-0,80263479	-0,50073984	31
9,10 – 10,40	-0,033758446	0,27561594	-1,18586434	29,6
10,40 – 11,70	0,063383998	0,143958	-0,64041821	28,45
11,70 – 13,00	-0,333569081	0,3911556	0,05522947	28
13,00 – 14,30	0,383318361	-0,90976382	-0,61896122	28
14,30 – 15,60	-0,266613787	0,58517779	-1,04092306	26,5
15,60 – 16,90	0,250728956	-0,45461598	-0,8711927	25,55
16,90 – 18,20	-0,23561929	0,52322695	-0,78199844	24,2
18,20 – 19,50	0,191065452	-0,39568828	-0,61619816	23,55
19,50 – 20,80	-0,096234692	0,34946699	-0,67628584	22,5
20,80 – 22,10	-0,056468061	-0,02584831	-0,25558156	22
22,10 – 23,40	0,094523867	-0,24607375	-0,60908023	21,5
23,40 – 24,70	-0,094044338	0,12256933	-0,76963597	20,5
24,70 – 26,00	0,054070417	-0,24420359	-0,9277605	19,5
26,00 – 27,30	0,105345736	-0,03332896	-1,2885528	18
27,30 – 28,60	-0,156837066	0,37751941	-0,84110521	16,5
28,60 – 29,90	0,112353007	-0,23414515	-0,65471866	15,7
29,90 – 31,20	-0,247058348	0,20403158	-0,69386629	14,7
31,20 – 32,50	0,420714248	-0,75949597	-1,41597	13,6
32,50 – 33,80	-0,229608384	0,88128959	-1,2576383	11,4
33,80 – 35,10	-0,207788221	-0,01418311	-0,13039987	10,75
35,10 – 36,40	0,355253758	-0,82455717	-1,22076222	10,1
36,40 – 37,70	-0,189103005	0,56093249	-1,56347431	7,9
37,70 – 39,00	0,037025354	-0,17656923	-1,06380208	6,4

(conclusão)

Tabela 8 - Coeficientes da árvore 20 determinados pela função spline.

Intervalo (m)	a_k	b_k	c_k	d_k
39,00 – 40,30	-0,004515025	-0,03217035	-1,33516354	4,8
40,30 – 41,60	0,003793051	-0,04977895	-1,44169762	3

Onde: a_k , b_k , c_k e d_k = coeficientes.

Através desses coeficientes, determinados pela função spline, foram calculadas as interpolações dentro de cada um dos intervalos. A Figura 5 representa a reconstituição esquemática do perfil longitudinal da árvore 20, em que se pode verificar os valores observados, bem como os valores estimados pela função spline.

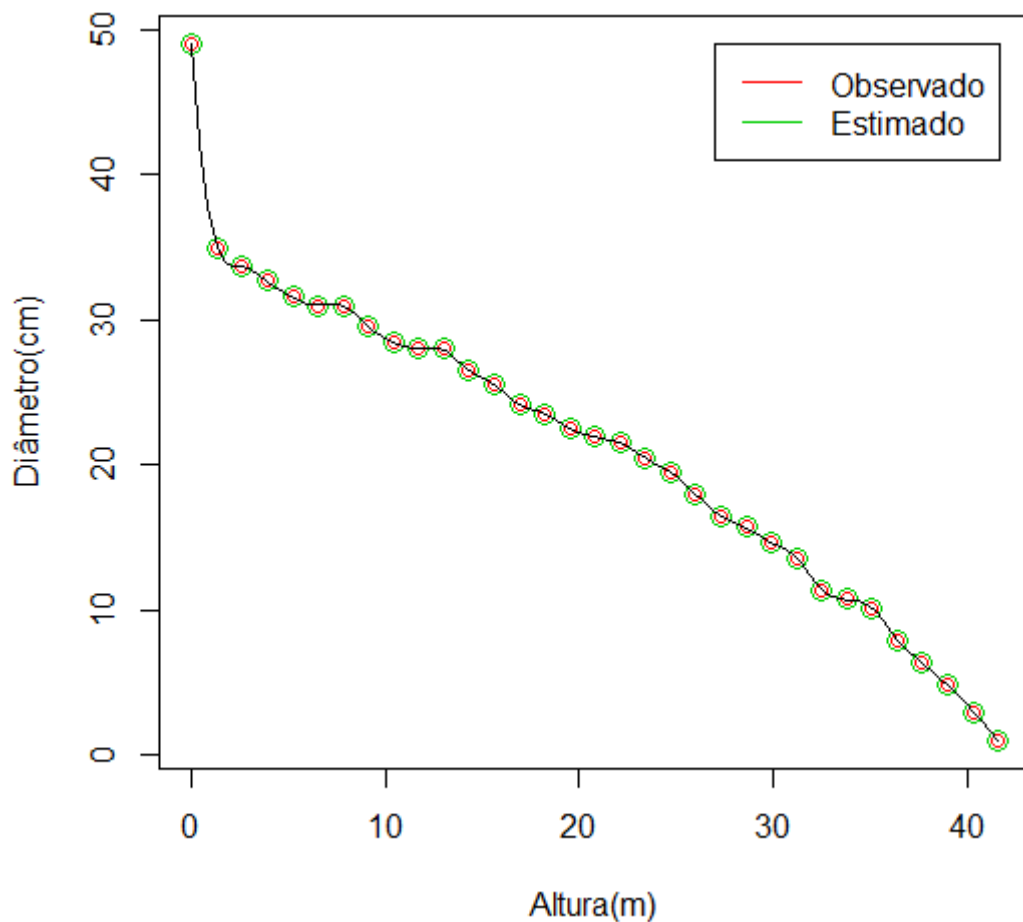


Figura 5 – Representação esquemática do perfil longitudinal da árvore 20.

Scolforo et al. (1998) utilizaram as funções splines cúbicas para estimar o diâmetro ao longo do fuste de *Pinus elliottii*, porém, considerando a região do estudo (sul do Brasil), não recomendam essas funções, pois propiciaram estimativas pouco acuradas. Já Figueiredo Filho (1991) observou que as funções spline cúbicas mostraram-se eficientes para expressar a forma e o volume dos troncos, para *Pinus elliottii* var. *elliotti*.

Kuželkan e Marušák (2012) descrevem que a spline cúbica natural pode ser adequada para descrever os perfis relativamente regulares de árvores coníferas, mas não é capaz de lidar com os perfis de árvores irregulares e mal formadas. Foi o que esses autores concluíram ao tentar modelar espécies folhosas, árvores irregulares e mal formadas. A função suaviza a condução polígono e, portanto, não é capaz de encaixar a brusca oscilação de diâmetro, e recomendam a utilização de Catmull-Rom Spline.

A função spline, por ser uma interpolação numérica de extrapolação calculada por integração, faz com que pontos extremos, ou *outliers*, sejam resgatados, fornecendo um modelo descritivo para árvores individuais. Através desse resgate de pontos consegue apresentar um coeficiente de determinação igual a um e erro padrão de estimativa igual a zero. No entanto, quando aplicadas para estimativas por unidade de área, alguns erros podem estar inseridos, uma vez que essas funções são ajustadas para um número pequeno de árvores em relação ao total envolvido em um inventário florestal (KIRCHNER et al., 1989).

Essa função é uma eficiente ferramenta para predizer o diâmetro em qualquer ponto do tronco, podendo-se, então, estimar volume de povoamentos, construir tabelas de volume e sortimentos para as diferentes classes de dimensões exploradas. No entanto, apresentam a desvantagem de ser de uso restrito para árvores individuais impondo constante redefinição dos intervalos de interpolação.

5 CONCLUSÃO

A função spline cúbica ajustou com precisão o diâmetro ao longo do fuste para as árvores de *Eucalyptus grandis* estudadas. Portanto, o procedimento demonstrou ser eficiente na descrição do perfil do tronco individual. A partir disso, então, pode-se fazer projeções volumétricas (obtidos por integração), seja ela parcial ou total, elucidando a otimização dos recursos florestais, contribuindo, assim, na tomada de decisão.

O método de ajuste leva a resultados bastante precisos. Por ser um processo determinístico, a interpolação obriga a passagem da curva através de todos os pontos que dão origem às funções.

Em razão de ser uma função que segmenta as partes, originando diferentes coeficientes para cada intervalo, deve-se ter muita atenção quanto ao uso. Uma vez mal delimitado os limites da integração, havendo mudanças abruptas ou formas muito irregulares, as funções não conseguirão descrever corretamente o perfil.

A simplicidade de representação, frente à complexidade do cálculo, torna o uso da função spline interessante quando se deseja a suavização dos pontos.

Para o manejo florestal em larga escala ainda encontra seu uso restrito, por tratar-se de ajuste em âmbito de árvores individualizadas. Porém com o desenvolvimento da programação computacional essa limitação vem sendo superada.

REFERÊNCIAS

ABRAF. **Anuário estatístico da ABRAF 2011**. Ano base 2010/ABRAF: Associação Brasileira de Produtores de Florestas Plantadas. 130 p.– Brasília: 2011.

ABRAF. **Anuário estatístico da ABRAF 2012**. Ano base 2011/ABRAF: Associação Brasileira de Produtores de Florestas Plantadas. 149 p.– Brasília: 2012.

ACERBI JR. F.W.; SCOLFORO, J.R.S.; OLIVEIRA, A.D.; MAESTRI, R. Modelo para prognose do crescimento e da produção e análise econômica de regimes de manejo para *Pinus taeda* L. **R. Árvore**, Viçosa-MG, v.26, n.6, p.699-713, 2002.

ALKAN, Ö.; GENÇ, A.; OKTAY, E.; CELİK, A.K. Electricity Consumption Analysis Using Spline Regression Models: The Case of a Turkish Province. **Asian Social Science**. v.9, n.7, 2013.

ANGELO, H.; CASTRO, L.H.R.; HOSOKAWA, R.T.; KIRCHNER, F.F. Análise de componentes principais e função spline para definir a forma do tronco de pinus tropicais. **R. Floresta**. v.24, n.12, p. 55-67, 1995.

BORGES, J.F. **Seccionamento do fuste de *Pinus taeda* L. para obtenção de volume de madeira serrada através da função polinomial**. 1981. 81f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Florestal) Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 1981.

FIGUEIREDO FILHO, A. **Influência da resinagem no crescimento de *Pinus elliottii* Engelm. var. *elliottii* e sua avaliação econômica**. 1991. 138f. Tese (Doutorado em Ciências Florestais). Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 1991.

FINGER, C.A.G. **Fundamentos de Biometria Florestal**. Santa Maria: UFSM, 269p. 1992.

FONSECA, S. M. et al. **Cultura do eucalipto em áreas montanhosas**. Viçosa: SIF, 2007.

GUIMARÃES, D.P.; LEITE, H.G. Um novo modelo para descrever o perfil do tronco. **R. Árvore**, v.16, n.2, 1992.

JORGE, L.A.B.; LARA, H.A. Programa de sortimento de madeira serrada de povoamentos de *Pinus elliottii* com alternativas de produtos padronizados. In: CONGRESSO FLORESTAL PANAMERICANO, 1., CONGRESSO FLORESTAL BRASILEIRO, 7., 1993, Curitiba. **Anais ...Curitiba: SBS/SBEF**, p. 539-548, 1993.

JUDD, W.S. et al. **Plant Systematics: A Phylogenetic Approach**. 2 ed. Sinauer Associates, Inc. Publishers; 2002.

KIRCHNER, F.F.; FIGUEIREDO FILHO, A.F.; SCOLFORO, J.R.S.; MACHADO, S.A.; MITISHITA, E.A. O uso de funções spline no cálculo de volumes de árvores. **Floresta**, Curitiba, v. 19, n. 1, p. 116-122, 1989.

KUŽELKA K.; MARUŠÁK R. Spline representation of irregular and malformed stem profiles of broadleaved tree species in White Carpathian Mountains. **Beskydy**, v.5, n.2, p. 111-120, 2012.

LEMONS, R.C.; AZOLIN, M.A.D.; ABRAAO, P.V.R. et al. **Levantamento e reconhecimento dos solos do Estado do Rio Grande do Sul**. Recife: Ministério da Agricultura, Departamento Nacional de Pesquisas Agropecuárias - Divisão de Pesquisas Pedológicas, Boletim Técnico, 30, 1973. 431 p.

MACHADO, S.A.; FIGUEIREDO FILHO, A. **Dendrometria**. Curitiba: UFPR, 2003. 309 p.

MACHADO, S.A.; URBANO, E.; CONCEIÇÃO, M.B.; FIGUEIREDO FILHO, A.; FIGUEIREDO, D.J. Comparação de modelos de afilamento de tronco para diferentes idades e regime de desbastes em plantações de *Pinus oocarpa* Schiede. **Bol. Pesq. Fl.** Colombo, n. 48, p. 41-64, jan./jun. 2004.

MENDONÇA, A.R. **Avaliação de uma metodologia para otimização do volume de toras comerciais de *Eucalyptus* sp. em função da qualidade do fuste**. 2006. 90f. Dissertação (Mestrado em Produção Vegetal). Universidade Federal do Espírito Santo, Alegre, 2006.

MEYER, H.A. The standard error of estimate of tree volume from the logarithmic volume equation. **J. Forestry**, v. 36, p. 340-342, 1938.

MORENO, J.A. **Clima do Rio Grande do Sul**. Porto Alegre: Secretaria da Agricultura, 1961. 42 p.

ODGERS, N.P.; LIBOHOVA, Z.; THOMPSON, J.A. Equal-area spline functions applied to a legacy soil database to create weighted-means maps of soil organic carbon at a continental scale. **Geoderma**, v.189–190, p.153–163, nov. 2012.

OLIVEIRA, D.C. **Funções spline para o estudo de curvas de crescimento em ovinos cruzados**. Dissertação (Mestrado em Estatística Aplicada e Biometria). 2011. 57f. Universidade Federal de Viçosa, Viçosa, 2011.

QUEIROZ, D. **Avaliação de funções de afilamento e sortimentos para *Mimosa scabrella* Benth em povoamentos nativos da região metropolitana de Curitiba/PR.** 2006. 117f. Dissertação (Mestrado em Ciências Florestais). Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2006.

R Core Team (2013). **R: A language and environment for statistical computing.** R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria. URL< <http://www.R-project.org/>>.

REGAZZI, A.J. Teste para verificar a igualdade de parâmetros e a identidade de modelos de regressão não-linear. **R. Ceres**, v.50, n.287, p.9-26, 2003.

ROGERS, D.F.; ADAMS, J.A. **Mathematical elements for computer graphics.** 2. ed. McGraw-Hill, 1990. 611p.

RUGGIERO, M.A.G.; LOPES, V.L.R. **Cálculo numérico: Aspectos Teóricos e Computacionais.** 2.ed. São Paulo: MAKRON Books, 1996. 406p.

SÁENZ-ROMERO, C.; REHFELDT, G.E.; CROOKSTON, N.L.; DUVAL, P.; BEAULIEU, J. Modelos “spline” de climas contemporâneo, 2030, 2060 y 2090 para Michoacán, México. Impactos en la vegetación. **R. Fitotec.** Mex. v.35, n.4, p.333-345, 2012.

SCHNEIDER, P.R. **Introdução ao manejo florestal.** Santa Maria - UFSM/CEPEF-FATEC, 1993. 348 p.

SCOLFORO, J.R.S.; RIOS, M.S.; OLIVEIRA, A.D.; MELLO, J.M.; MAESTRI, R. Acuracidade de equações de afilamento para representar o perfil do fuste de *Pinus elliottii*. **R. Cerne**, v.4, n.1, p.100-122, 1998.

SOARES, T.S.; VALE, A.B.; LEITE, H.G.; MACHADO, C.C. Otimização de multiprodutos em povoamentos florestais. **R. Árvore**, Viçosa-MG, v.27, n.6, p.811-820, 2003.

WEBER, S.H. **Desenvolvimento de uma função densidade de probabilidade multimodal aplicável à ciência florestal.** 2011. 132f. Tese (Doutorado em Engenharia Florestal). Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2011.

YOSHITANI JUNIOR, M.; NAKAJIMA, N.Y.; ARCE, J.E.; MACHADO, S.A.; DRUSZCZ, J.P. HOSOKAWA, R.T. MELLO, A.A. Funções de afilamento para plantios desbastados de *Pinus taeda*. **R. Floresta**, Curitiba, PR, v.42, n.1, p.169 - 176, jan./mar. 2012.

ANEXOS

Anexo A – Rotina do software R para gerar gráficos.

Aqui é apresentada a rotina utilizada pelo programa R versão 3.0.1 (R Core Team, 2013) para a criação dos gráficos apresentados no presente trabalho.

```
#plot
function (x, y, ...)
UseMethod("plot")
<bytecode: 0x00000000145f8128>
<environment: namespace:graphics>

#points
function (x, ...)
UseMethod("points")
<bytecode: 0x000000001461f5f8>
<environment: namespace:graphics>

#legend
function (x, y = NULL, legend, fill = NULL, col = par("col"),
  border = "black", lty, lwd, pch, angle = 45, density = NULL,
  bty = "o", bg = par("bg"), box.lwd = par("lwd"), box.lty = par("lty"),
  box.col = par("fg"), pt.bg = NA, cex = 1, pt.cex = cex, pt.lwd = lwd,
  xjust = 0, yjust = 1, x.intersp = 1, y.intersp = 1, adj = c(0,
  0.5), text.width = NULL, text.col = par("col"), text.font = NULL,
  merge = do.lines && has.pch, trace = FALSE, plot = TRUE,
  ncol = 1, horiz = FALSE, title = NULL, inset = 0, xpd, title.col = text.col,
  title.adj = 0.5, seg.len = 2)
{
  if (missing(legend) && !missing(y) && (is.character(y) ||
    is.expression(y))) {
    legend <- y
    y <- NULL
  }
  mfill <- !missing(fill) || !missing(density)
  if (!missing(xpd)) {
    op <- par("xpd")
    on.exit(par(xpd = op))
    par(xpd = xpd)
  }
  title <- as.graphicsAnnot(title)
  if (length(title) > 1)
    stop("invalid 'title'")
  legend <- as.graphicsAnnot(legend)
  n.leg <- if (is.call(legend))
    1
  else length(legend)
  if (n.leg == 0)
```



```

    stop("'legend' is of length 0")
auto <- if (is.character(x))
  match.arg(x, c("bottomright", "bottom", "bottomleft",
    "left", "topleft", "top", "topright", "right", "center"))
else NA
if (is.na(auto)) {
  xy <- xy.coords(x, y)
  x <- xy$x
  y <- xy$y
  nx <- length(x)
  if (nx < 1 || nx > 2)
    stop("invalid coordinate lengths")
}
else nx <- 0
xlog <- par("xlog")
ylog <- par("ylog")
rect2 <- function(left, top, dx, dy, density = NULL, angle,
  ...) {
  r <- left + dx
  if (xlog) {
    left <- 10^left
    r <- 10^r
  }
  b <- top - dy
  if (ylog) {
    top <- 10^top
    b <- 10^b
  }
  rect(left, top, r, b, angle = angle, density = density,
    ...)
}
segments2 <- function(x1, y1, dx, dy, ...) {
  x2 <- x1 + dx
  if (xlog) {
    x1 <- 10^x1
    x2 <- 10^x2
  }
  y2 <- y1 + dy
  if (ylog) {
    y1 <- 10^y1
    y2 <- 10^y2
  }
  segments(x1, y1, x2, y2, ...)
}
points2 <- function(x, y, ...) {
  if (xlog)
    x <- 10^x
  if (ylog)
    y <- 10^y
  points(x, y, ...)
}

```

```

}
text2 <- function(x, y, ...) {
  if (xlog)
    x <- 10^x
  if (ylog)
    y <- 10^y
  text(x, y, ...)
}
if (trace)
  catn <- function(...) do.call("cat", c(lapply(list(...),
    formatC), list("\n")))
cin <- par("cin")
Cex <- cex * par("cex")
if (is.null(text.width))
  text.width <- max(abs(strwidth(legend, units = "user",
    cex = cex, font = text.font)))
else if (!is.numeric(text.width) || text.width < 0)
  stop("'text.width' must be numeric, >= 0")
xc <- Cex * xinch(cin[1L], warn.log = FALSE)
yc <- Cex * yinch(cin[2L], warn.log = FALSE)
if (xc < 0)
  text.width <- -text.width
xchar <- xc
xextra <- 0
yextra <- yc * (y.intersp - 1)
ymax <- yc * max(1, strheight(legend, units = "user", cex = cex)/yc)
ychar <- yextra + ymax
if (trace)
  catn(" xchar=", xchar, "; (yextra,ychar)=", c(yextra,
    ychar))
if (mfill) {
  xbox <- xc * 0.8
  ybox <- yc * 0.5
  dx.fill <- xbox
}
do.lines <- (!missing(lty) && (is.character(lty) || any(lty >
  0))) || !missing(lwd)
n.legpercol <- if (horiz) {
  if (ncol != 1)
    warning(gettextf("horizontal specification overrides: Number of columns := %d",
      n.leg), domain = NA)
  ncol <- n.leg
  1
}
else ceiling(n.leg/ncol)
has.pch <- !missing(pch) && length(pch) > 0
if (do.lines) {
  x.off <- if (merge)
    -0.7
  else 0
}

```

```

}
else if (merge)
  warning("'merge = TRUE' has no effect when no line segments are drawn")
if (has.pch) {
  if (is.character(pch) && !is.na(pch[1L]) && nchar(pch[1L],
    type = "c") > 1) {
    if (length(pch) > 1)
      warning("not using pch[2..] since pch[1L] has multiple chars")
    np <- nchar(pch[1L], type = "c")
    pch <- substr(rep.int(pch[1L], np), 1L:np, 1L:np)
  }
  if (!is.character(pch))
    pch <- as.integer(pch)
}
if (is.na(auto)) {
  if (xlog)
    x <- log10(x)
  if (ylog)
    y <- log10(y)
}
if (nx == 2) {
  x <- sort(x)
  y <- sort(y)
  left <- x[1L]
  top <- y[2L]
  w <- diff(x)
  h <- diff(y)
  w0 <- w/ncol
  x <- mean(x)
  y <- mean(y)
  if (missing(xjust))
    xjust <- 0.5
  if (missing(yjust))
    yjust <- 0.5
}
else {
  h <- (n.legpercol + (!is.null(title))) * ychar + yc
  w0 <- text.width + (x.intersp + 1) * xchar
  if (mfill)
    w0 <- w0 + dx.fill
  if (do.lines)
    w0 <- w0 + (seg.len + x.off) * xchar
  w <- ncol * w0 + 0.5 * xchar
  if (!is.null(title) && (abs(tw <- strwidth(title, units = "user",
    cex = cex) + 0.5 * xchar)) > abs(w)) {
    xextra <- (tw - w)/2
    w <- tw
  }
}
if (is.na(auto)) {
  left <- x - xjust * w

```

```

    top <- y + (1 - yjust) * h
  }
  else {
    usr <- par("usr")
    inset <- rep_len(inset, 2)
    insetx <- inset[1L] * (usr[2L] - usr[1L])
    left <- switch(auto, bottomright = , topright = ,
      right = usr[2L] - w - insetx, bottomleft = ,
      left = , topleft = usr[1L] + insetx, bottom = ,
      top = , center = (usr[1L] + usr[2L] - w)/2)
    insety <- inset[2L] * (usr[4L] - usr[3L])
    top <- switch(auto, bottomright = , bottom = , bottomleft = usr[3L] +
      h + insety, topleft = , top = , topright = usr[4L] -
      insety, left = , right = , center = (usr[3L] +
      usr[4L] + h)/2)
  }
}
if (plot && bty != "n") {
  if (trace)
    catn(" rect2(", left, ", ", top, ", w=", w, ", h=",
      h, ", ...)", sep = "")
  rect2(left, top, dx = w, dy = h, col = bg, density = NULL,
    lwd = box.lwd, lty = box.lty, border = box.col)
}
xt <- left + xchar + xextra + (w0 * rep.int(0:(ncol - 1),
  rep.int(n.legpercol, ncol)))[1L:n.leg]
yt <- top - 0.5 * yextra - ymax - (rep.int(1L:n.legpercol,
  ncol)[1L:n.leg] - 1 + (!is.null(title))) * ychar
if (mfill) {
  if (plot) {
    if (!is.null(fill))
      fill <- rep_len(fill, n.leg)
    rect2(left = xt, top = yt + ybox/2, dx = xbox, dy = ybox,
      col = fill, density = density, angle = angle,
      border = border)
  }
  xt <- xt + dx.fill
}
if (plot && (has.pch || do.lines))
  col <- rep_len(col, n.leg)
if (missing(lwd) || is.null(lwd))
  lwd <- par("lwd")
if (do.lines) {
  if (missing(lty) || is.null(lty))
    lty <- 1
  lty <- rep_len(lty, n.leg)
  lwd <- rep_len(lwd, n.leg)
  ok.l <- !is.na(lty) & (is.character(lty) | lty > 0) &
    !is.na(lwd)
  if (trace)

```

```

      catn(" segments2(", xt[ok.l] + x.off * xchar, ",",
          yt[ok.l], ", dx=", seg.len * xchar, ", dy=0, ...)")
    if (plot)
      segments2(xt[ok.l] + x.off * xchar, yt[ok.l], dx = seg.len *
        xchar, dy = 0, lty = lty[ok.l], lwd = lwd[ok.l],
        col = col[ok.l])
    xt <- xt + (seg.len + x.off) * xchar
  }
  if (has.pch) {
    pch <- rep_len(pch, n.leg)
    pt.bg <- rep_len(pt.bg, n.leg)
    pt.cex <- rep_len(pt.cex, n.leg)
    pt.lwd <- rep_len(pt.lwd, n.leg)
    ok <- !is.na(pch)
    if (!is.character(pch)) {
      ok <- ok & (pch >= 0 | pch <= -32)
    }
    else {
      ok <- ok & nzchar(pch)
    }
    x1 <- (if (merge && do.lines)
      xt - (seg.len/2) * xchar
    else xt)[ok]
    y1 <- yt[ok]
    if (trace)
      catn(" points2(", x1, ",", y1, ", pch=", pch[ok],
          ", ...)")
    if (plot)
      points2(x1, y1, pch = pch[ok], col = col[ok], cex = pt.cex[ok],
        bg = pt.bg[ok], lwd = pt.lwd[ok])
  }
  xt <- xt + x.intersp * xchar
  if (plot) {
    if (!is.null(title))
      text2(left + w * title.adj, top - ymax, labels = title,
        adj = c(title.adj, 0), cex = cex, col = title.col)
    text2(xt, yt, labels = legend, adj = adj, cex = cex,
      col = text.col, font = text.font)
  }
  invisible(list(rect = list(w = w, h = h, left = left, top = top),
    text = list(x = xt, y = yt)))
}
<bytecode: 0x00000000142cc1d8>
<environment: namespace:graphics>

# lines
function (x, ...)
UseMethod("lines")
<bytecode: 0x0000000013828d78>
<environment: namespace:graphics>

```

Anexo B - Rotina do software R para determinar a função spline.

Aqui é apresentada a rotina utilizada pelo programa R, versão 3.0.1 (R Core Team, 2013), para obtenção dos coeficientes da função spline das árvores 165, 115 e 20, apresentados no presente trabalho.

```
#f
function (x, deriv = 0L)
{
  deriv <- as.integer(deriv)
  if (deriv < 0L || deriv > 3L)
    stop("'deriv' must be between 0 and 3")
  if (deriv > 0L) {
    z0 <- double(z$n)
    z[c("y", "b", "c")] <- switch(deriv, list(y = z$b, b = 2 *
      z$c, c = 3 * z$d), list(y = 2 * z$c, b = 6 * z$d,
      c = z0), list(y = 6 * z$d, b = z0, c = z0))
    z[["d"]] <- z0
  }
  res <- .splinefun(x, z)
  if (deriv > 0 && z$method == 2 && any(ind <- x <= z$x[1L]))
    res[ind] <- ifelse(deriv == 1, z$y[1L], 0)
  res
}
<bytecode: 0x0000000005ba8778>
<environment: 0x0000000013d083a8>

#splinefun
function (x, y = NULL, method = c("fmm", "periodic", "natural",
  "monoH.FC", "hyman"), ties = mean)
{
  x <- regularize.values(x, y, ties)
  y <- x$y
  x <- x$x
  nx <- as.integer(length(x))
  if (is.na(nx))
    stop("invalid value of length(x)")
  if (nx == 0)
    stop("zero non-NA points")
  method <- match.arg(method)
  if (method == "periodic" && y[1L] != y[nx]) {
    warning("spline: first and last y values differ - using y[1L] for both")
    y[nx] <- y[1L]
  }
}
```

```

if (method == "monoH.FC") {
  n1 <- nx - 1L
  dy <- y[-1L] - y[-nx]
  dx <- x[-1L] - x[-nx]
  Sx <- dy/dx
  m <- c(Sx[1L], (Sx[-1L] + Sx[-n1])/2, Sx[n1])
  m <- .Call(C_monoFC_m, m, Sx)
  return(splinefunH0(x0 = x, y0 = y, m = m, dx = dx))
}
iMeth <- match(method, c("periodic", "natural", "fmm", "monoH.FC",
  "hyman"))
if (iMeth == 5L) {
  dy <- diff(y)
  if (!(all(dy >= 0) || all(dy <= 0)))
    stop("'y' must be increasing or decreasing")
}
z <- .Call(C_SplineCoef, min(3L, iMeth), x, y)
if (iMeth == 5L)
  z <- spl_coef_conv(hyman_filter(z))
rm(x, y, nx, method, iMeth, ties)
function(x, deriv = 0L) {
  deriv <- as.integer(deriv)
  if (deriv < 0L || deriv > 3L)
    stop("'deriv' must be between 0 and 3")
  if (deriv > 0L) {
    z0 <- double(z$n)
    z[c("y", "b", "c")] <- switch(deriv, list(y = z$b,
      b = 2 * z$c, c = 3 * z$d), list(y = 2 * z$c,
      b = 6 * z$d, c = z0), list(y = 6 * z$d, b = z0,
      c = z0))
    z[["d"]] <- z0
  }
  res <- .splinefun(x, z)
  if (deriv > 0 && z$method == 2 && any(ind <- x <= z$x[1L]))
    res[ind] <- ifelse(deriv == 1, z$y[1L], 0)
  res
}
}
<bytecode: 0x0000000013f832e8>
<environment: namespace:stats>

#ls
function (name, pos = -1L, envir = as.environment(pos), all.names = FALSE,
  pattern)
{
  if (!missing(name)) {
    nameValue <- try(name, silent = TRUE)
    if (identical(class(nameValue), "try-error")) {
      name <- substitute(name)
      if (!is.character(name))

```

```

        name <- deparse(name)
        warning(gettextf("%s converted to character string",
            sQuote(name)), domain = NA)
        pos <- name
    }
    else pos <- nameValue
}
all.names <- .Internal(ls(envir, all.names))
if (!missing(pattern)) {
  if ((ll <- length(grep("[", pattern, fixed = TRUE))) &&
      ll != length(grep("]", pattern, fixed = TRUE))) {
    if (pattern == "[") {
      pattern <- "\\["
      warning("replaced regular expression pattern '[' by '\\['")
    }
    else if (length(grep("[^\\\\]\\\\[<-", pattern))) {
      pattern <- sub("\\[<-", "\\\\\\\\[<-", pattern)
      warning("replaced '['<' by '\\\\\\[<' in regular expression pattern")
    }
  }
  grep(pattern, all.names, value = TRUE)
}
else all.names
}
<bytecode: 0x0000000013ddc3c8>
<environment: namespace:base>

# environment
function (fun = NULL)
.Internal(environment(fun))
<bytecode: 0x0000000013cf3970>
<environment: namespace:base>

# get
function (x, pos = -1L, envir = as.environment(pos), mode = "any",
    inherits = TRUE)
.Internal(get(x, envir, mode, inherits))
<bytecode: 0x0000000012a272b8>
<environment: namespace:base>

# spline
function (x, y = NULL, n = 3 * length(x), method = "fmm", xmin = min(x),
    xmax = max(x), xout, ties = mean)
{
  method <- pmatch(method, c("periodic", "natural", "fmm",
    "hyman"))
  if (is.na(method))
    stop("invalid interpolation method")
  x <- regularize.values(x, y, ties)
}

```



```

y <- x$y
x <- x$x
nx <- as.integer(length(x))
if (is.na(nx))
  stop("invalid value of length(x)")
if (nx == 0)
  stop("zero non-NA points")
if (method == 1L && y[1L] != y[nx]) {
  warning("spline: first and last y values differ - using y[1] for both")
  y[nx] <- y[1L]
}
if (method == 4L) {
  dy <- diff(y)
  if (!(all(dy >= 0) || all(dy <= 0)))
    stop("'y' must be increasing or decreasing")
}
if (missing(xout))
  xout <- seq.int(xmin, xmax, length.out = n)
else n <- length(xout)
if (n <= 0L)
  stop("'spline' requires n >= 1")
xout <- as.double(xout)
z <- .Call(C_SplineCoef, min(3L, method), x, y)
if (method == 4L)
  z <- spl_coef_conv(hyman_filter(z))
list(x = xout, y = .Call(C_SplineEval, xout, z))
}
<bytecode: 0x0000000013d9aa08>
<environment: namespace:stats>

```

Anexo C – Comandos do R para determinação da função spline da árvore 165.

A seguir são apresentados os comandos, do software R versão 3.0.1 (R Core Team, 2013), que originaram o gráfico e os coeficientes da função spline para a árvore 165, centro de classe da classe com diâmetro inferior a 20 cm.

De forma análoga, obtemos os coeficientes e os gráficos para as árvores 115 e 20.

```

require (graphics)
require (stats)

```

```

x<-c(0,1.3,2.6,3.9,5.2,6.5,7.8,9.1,10.4,11.7,13,14.3,15.6,16.9,18.2,19.5,20.8,22.1,23.4)
y<-c(21,15,14.35,13.7,13.05,12.4,11.75,10.7,10,9.8,9.15,8,7.35,6.4,5.17,3.97,2.77,1.57,0.37)
n<-25
plot(x, y, xlab="Altura(m)", ylab="Diâmetro(cm)")

```

```
points(x,y, col=2, cex=1)

f <- splinefun(x, y)
ls(envir = environment(f))
splinecoef <- get("z", envir = environment(f))
points(splinecoef, col = 3, cex = 1.5)
legend(15, 21, c("Observado", "Estimado"), col = 2:3, lty = 1)
lines(spline(x, y))
```