

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA MARIA  
CENTRO DE CIÊNCIAS NATURAIS E EXATAS  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Moisés Rutkoski

**A SOLUÇÃO FUNDAMENTAL NA OBTENÇÃO DAS FREQUÊNCIAS  
NATURAIS E AUTOFUNÇÕES DE UM SISTEMA DE VIGA DUPLA  
EULER-BERNOULLI COM CAMADA ELÁSTICA E FORÇA AXIAL**

Santa Maria, RS  
2022

**Moisés Rutkoski**

**A SOLUÇÃO FUNDAMENTAL NA OBTENÇÃO DAS FREQUÊNCIAS NATURAIS E  
AUTOFUNÇÕES DE UM SISTEMA DE VIGA DUPLA EULER-BERNOULLI COM  
CAMADA ELÁSTICA E FORÇA AXIAL**

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, Área de Concentração em Equações Diferenciais Aplicadas, da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM, RS), como requisito parcial para obtenção do grau de **Mestre em Matemática**. Defesa realizada por videoconferência.

ORIENTADORA: Prof.<sup>a</sup> Rosemaira Dalcin Copetti

Santa Maria, RS  
2022

Rutkoski, Moisés

A solução fundamental na obtenção das frequências naturais e autofunções de um sistema de viga dupla Euler Bernoulli com camada elástica e força axial / Moisés Rutkoski.- 2022.

70 p.; 30 cm

Orientadora: Rosemaira Dalcin Copetti

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Santa Maria, Centro de Ciências Naturais e Exatas, Programa de Pós-Graduação em Matemática, RS, 2022

1. Viga dupla Euler-Bernoulli 2. Força axial 3. Análise modal 4. Solução fundamental matricial 5. Modos de vibração I. Dalcin Copetti, Rosemaira II. Título.

Sistema de geração automática de ficha catalográfica da UFSM. Dados fornecidos pelo autor(a). Sob supervisão da Direção da Divisão de Processos Técnicos da Biblioteca Central. Bibliotecária responsável Paula Schoenfeldt Patta CRB 10/1728.

Declaro, MOISÉS RUTKOSKI, para os devidos fins e sob as penas da lei, que a pesquisa constante neste trabalho de conclusão de curso (Dissertação) foi por mim elaborada e que as informações necessárias objeto de consulta em literatura e outras fontes estão devidamente referenciadas. Declaro, ainda, que este trabalho ou parte dele não foi apresentado anteriormente para obtenção de qualquer outro grau acadêmico, estando ciente de que a inveracidade da presente declaração poderá resultar na anulação da titulação pela Universidade, entre outras consequências legais.

Moisés Rutkoski

**A SOLUÇÃO FUNDAMENTAL NA OBTENÇÃO DAS FREQUÊNCIAS NATURAIS E  
AUTOFUNÇÕES DE UM SISTEMA DE VIGA DUPLA EULER-BERNOULLI COM  
CAMADA ELÁSTICA E FORÇA AXIAL**

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, Área de Concentração em Equações Diferenciais Aplicadas, da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM, RS), como requisito parcial para obtenção do grau de **Mestre em Matemática**.

**Aprovado em 18 de agosto de 2022:**



---

**Rosemaira Dalcin Copetti, Dra. (UFSM)**  
(Presidenta/Orientadora)



---

**Leticia Tonetto, Dra. (UFPEL)**



---

**João Batista Carvalho, Dr. (UFRGS)**

Santa Maria, RS  
2022

## **AGRADECIMENTOS**

*Inicialmente, gostaria de agradecer a Deus por ter iluminado com suas bênçãos na minha trajetória acadêmica.*

*A toda minha família, em especial a meus pais Pedro Rutkoski e Romilda Gotz Rutkoski, as minhas irmãs, Adriana Fátima Rutkoski e Eliane Paludo pela confiança, carinho, incentivo e suporte nesses três anos de estudos. Sem vocês eu não seria nada.*

*A minha orientadora Rosemaira Dalcin Copetti pelos seus ensinamentos, conselhos, só tenho a agradecer por esses sete anos de orientação e amizade.*

*A todos os docentes do PPGMAT que compartilharam seus conhecimentos e experiências, e meu muito obrigado a UFSM pelo ensino gratuito e de qualidade. Agradeço também a Central de Tutoria do CCNE pela oportunidade de ter sido tutor de Matemática nesses três anos, me proporcionando muito crescimento pessoal e profissional.*

*Aos meus amigos, em especial as minhas colegas Luiza Santos Morin e Maisa Iora por esses sete anos de amizade, de alegrias, conversas, companheirismo e vitórias, vocês são muito especiais para mim.*

*Meu muito obrigado a todos vocês!*

*A persistência é o caminho do êxito.*

*(Charlie Chaplin)*

## RESUMO

### A SOLUÇÃO FUNDAMENTAL NA OBTENÇÃO DAS FREQUÊNCIAS NATURAIS E AUTOFUNÇÕES DE UM SISTEMA DE VIGA DUPLA EULER-BERNOULLI COM CAMADA ELÁSTICA E FORÇA AXIAL

AUTOR: Moisés Rutkoski

ORIENTADORA: Rosemaira Dalcin Copetti

Neste trabalho abordamos um sistema de viga dupla Euler-Bernoulli com força axial acoplado por uma camada elástica. Realizamos uma formulação matricial para o sistema de equações e para as condições de contorno, a qual permite relacionar o sistema de viga dupla com a viga simples de Euler-Bernoulli com força axial. Através da análise modal e com o uso da base matricial fundamental escrevemos a solução da equação modal, determinamos a equação característica, as frequências naturais e os modos de vibração. Além das condições de contorno clássicas, consideramos o caso de um sistema de viga dupla com força axial e com uma extremidade restrita. Com o intuito de realizar comparações obtemos as frequências naturais e representamos graficamente os modos de vibração de vigas simples de Euler-Bernoulli com força axial, e comparamos as frequências naturais para diversos valores da camada elástica e da força axial.

**Palavras-chave:** Viga dupla Euler-Bernoulli. Força axial. Análise modal. Solução fundamental matricial. Frequências naturais. Modos de vibração.

## ABSTRACT

### THE FUNDAMENTAL SOLUTION IN OBTAINING THE NATURAL FREQUENCIES AND SELF-FUNCTIONS OF AN EULER-BERNOULLI DOUBLE BEAM SYSTEM WITH ELASTIC LAYER AND AXIAL FORCE

AUTHOR: Moisés Rutkoski

ADVISOR: Rosemaira Dalcin Copetti

In this work we approach a double Euler-Bernoulli beam system with axial force coupled by an elastic layer. We performed a matrix formulation for the system of equations and for the boundary conditions, which allows relating the double beam system with the single Euler-Bernoulli beam with axial force. Through modal analysis and using the matrix fundamental solution we write the solution of the modal equation, we determine the characteristic equation, the natural frequencies and the vibration modes. In addition to the classical boundary conditions, we consider the case of a double beam system with axial force and a restrained end. In order to make comparisons, we obtain the natural frequencies and graphically represent the vibration modes of single Euler-Bernoulli beams with axial force, and we compared the natural frequencies for various values of elastic layer and axial force.

**Keywords:** Euler-Bernoulli double beam. Axial force. Modal analysis. Matrix fundamental solution. Natural frequencies. Vibration modes.

## LISTA DE FIGURAS

|   |    |
|---|----|
| Figura 2.1 – Viga Euler-Bernoulli sob a ação de uma força axial $P(t, x)$ .....   | 15 |
| Figura 2.2 – Forças que atuam em um elemento da viga .....  | 15 |
| Figura 2.3 – Viga livre na extremidade $x = 0$ .....  | 19 |
| Figura 2.4 – Viga fixa na extremidade $x = 0$ .....   | 19 |
| Figura 2.5 – Viga apoiada na extremidade $x = 0$ .....  | 20 |
| Figura 2.6 – Viga com extremidade deslizante em $x = 0$ .....   | 20 |
| Figura 2.7 – Viga com restrição elástica na extremidade $x = 0$ .....   | 21 |
| Figura 2.8 – Viga com um amortecedor na extremidade $x = 0$ .....   | 21 |
| Figura 2.9 – Viga com uma massa anexada na extremidade $x = 0$ .....  | 21 |
| Figura 2.10 – Viga com uma massa anexada ( $M$ ) e com momento de inércia ( $J_0$ ) na extremidade $x = 0$ .....  | 22 |
| Figura 3.1 – Viga dupla Euler-Bernoulli com acoplamento elástico e força axial .....  | 23 |
| Figura 3.2 – Viga dupla biapoiada Euler-Bernoulli com força axial e com uma camada elástica .....   | 36 |
| Figura 3.3 – Viga dupla fixa-livre Euler-Bernoulli com força axial e com uma camada elástica .....  | 39 |
| Figura 3.4 – Viga dupla Euler-Bernoulli com força axial, com uma camada elástica e com massa anexada na viga inferior em $x = L$ .....  | 41 |
| Figura 4.1 – Modos de vibração de uma viga biapoiada Euler-Bernoulli com força axial (AA). (a) Primeiro modo de vibração (b) Segundo modo de vibração ....                          | 49 |
| Figura 4.2 – Modos de vibração de uma viga biapoiada Euler-Bernoulli com força axial (AA). (a) Terceiro modo de vibração (b) Quarto modo de vibração .....                          | 49 |
| Figura 4.3 – Primeiro modo de vibração da viga dupla com força axial apoiada nas extremidades (AA-AA). (a) viga superior ( $V_{11}$ ), (b) Viga inferior ( $V_{21}$ ). ...          | 51 |
| Figura 4.4 – Segundo modo de vibração da viga dupla com força axial apoiada nas extremidades (AA-AA). (a) viga superior ( $V_{12}$ ), (b) Viga inferior ( $V_{22}$ ). ...           | 51 |
| Figura 4.5 – Terceiro modo de vibração da viga dupla com força axial apoiada nas extremidades (AA-AA). (a) viga superior ( $V_{13}$ ), (b) Viga inferior ( $V_{23}$ ). ...          | 52 |
| Figura 4.6 – Quarto modo de vibração da viga dupla com força axial apoiada nas extremidades (AA-AA). (a) viga superior ( $V_{14}$ ), (b) Viga inferior ( $V_{24}$ ). .....          | 52 |
| Figura 4.7 – Quinto modo de vibração da viga dupla com força axial apoiada nas extremidades (AA-AA). (a) viga superior ( $V_{15}$ ), (b) Viga inferior ( $V_{25}$ ). .....          | 53 |
| Figura 4.8 – Sexto modo de vibração da viga dupla com força axial apoiada nas extremidades (AA-AA). (a) viga superior ( $V_{16}$ ), (b) Viga inferior ( $V_{26}$ ). .....           | 53 |
| Figura 4.9 – Sétimo modo de vibração da viga dupla com força axial apoiada nas extremidades (AA-AA). (a) viga superior ( $V_{17}$ ), (b) Viga inferior ( $V_{27}$ ). .....          | 54 |
| Figura 4.10 – Oitavo modo de vibração da viga dupla com força axial apoiada nas extremidades (AA-AA). (a) viga superior ( $V_{18}$ ), (b) Viga inferior ( $V_{28}$ ). ...           | 54 |
| Figura 4.11 – Primeiro modo de vibração da viga dupla com força axial (FL-FL) e da viga dupla restrita (FL-FR). (a) viga superior ( $V_{11}$ ), (b) Viga inferior ( $V_{21}$ ). ... | 57 |
| Figura 4.12 – Segundo modo de vibração da viga dupla com força axial (FL-FL) e da viga dupla restrita (FL-FR). (a) viga superior ( $V_{12}$ ), (b) Viga inferior ( $V_{22}$ ). ...  | 57 |
| Figura 4.13 – Terceiro modo de vibração da viga dupla com força axial (FL-FL) e da viga dupla restrita (FL-FR). (a) viga superior ( $V_{13}$ ), (b) Viga inferior ( $V_{23}$ ). ... | 58 |
| Figura 4.14 – Quarto modo de vibração da viga dupla com força axial (FL-FL) e da viga   |    |

|   |   |    |
|---|---|----|
|   | dupla restrita (FL-FR). (a) viga superior ( $V_{14}$ ), (b) Viga inferior ( $V_{24}$ ). . . . . | 58 |
| Figura 4.15 – Quinto modo de vibração da viga dupla com força axial (FL-FL) e da viga dupla restrita (FL-FR). (a) viga superior ( $V_{15}$ ), (b) Viga inferior ( $V_{25}$ ). . . . . |   | 59 |
| Figura 4.16 – Sexto modo de vibração da viga dupla com força axial (FL-FL) e da viga dupla restrita (FL-FR). (a) viga superior ( $V_{16}$ ), (b) Viga inferior ( $V_{26}$ ). . . . .  |   | 59 |

## LISTA DE TABELAS

|   |    |
|---|----|
| Tabela 4.1 – Parâmetros utilizados nas simulações .....   | 47 |
| Tabela 4.2 – Frequências naturais da viga biapoiada Euler-Bernoulli com força axial e viga dupla biapoiada Euler-Bernoulli com acoplamento elástico e força axial .....                 | 48 |
| Tabela 4.3 – Frequências naturais da viga fixa-livre Euler-Bernoulli com força axial e viga dupla fixa-livre Euler-Bernoulli com acoplamento elástico e força axial                     | 55 |
| Tabela 4.4 – Frequências naturais (rad/s) da viga dupla restrita com viga superior fixa-livre, e viga inferior fixa $x = 0$ e com massa $M$ anexada em $x = L$ ...                      | 56 |
| Tabela 4.5 – Frequências naturais (rad/s) para diferentes valores da camada elástica $k$ ( $\text{Nm}^{-2}$ ) de um sistema de viga dupla biapoiada Euler-Bernoulli com força axial .   | 61 |
| Tabela 4.6 – Frequências naturais (rad/s) para diferentes valores da camada elástica $k$ ( $\text{Nm}^{-2}$ ) de um sistema de viga dupla fixa-livre Euler-Bernoulli com força axial .. | 61 |
| Tabela 4.7 – Frequências naturais (rad/s) para diferentes valores da força axial de um sistema de viga dupla biapoiada Euler-Bernoulli com camada elástica .....                        | 62 |
| Tabela 4.8 – Frequências naturais (rad/s) para diferentes valores da força axial de um sistema de viga dupla fixa-livre Euler-Bernoulli com camada elástica .....                       | 62 |

## SUMÁRIO

|          |   |           |
|----------|---|-----------|
| <b>1</b> | <b>INTRODUÇÃO</b> .....   | <b>11</b> |
| <b>2</b> | <b>VIBRAÇÃO TRANSVERSAL DE UMA VIGA EULER-BERNOULLI SUJEITA A UMA FORÇA AXIAL</b> .....   | <b>14</b> |
| 2.1      | FORMULAÇÃO DO MODELO .....  | 14        |
| 2.2      | CONDIÇÕES DE CONTORNO GERAIS .....  | 18        |
| 2.2.1    | <b>Condições de contorno clássicas</b> .....  | <b>19</b> |
| 2.2.2    | <b>Condições de contorno não-clássicas</b> .....  | <b>20</b> |
| <b>3</b> | <b>SISTEMA DE VIGA DUPLA EULER-BERNOULLI COM ACOPLAMENTO ELÁSTICO E FORÇA AXIAL</b> .....   | <b>23</b> |
| 3.1      | FORMULAÇÃO MATRICIAL .....  | 25        |
| 3.2      | ANÁLISE MODAL .....   | 26        |
| 3.3      | BASE DE SOLUÇÕES .....  | 27        |
| 3.4      | BASE MATRICIAL FUNDAMENTAL OU BASE DINÂMICA .....   | 28        |
| 3.5      | DETERMINANDO A SOLUÇÃO FUNDAMENTAL .....  | 30        |
| 3.5.1    | <b>Fórmula fechada</b> .....  | <b>30</b> |
| 3.5.2    | <b>Transformada de Laplace</b> .....  | <b>32</b> |
| 3.6      | EQUAÇÃO CARACTERÍSTICA: CASOS CONSIDERADOS .....  | 35        |
| 3.6.1    | <b>Viga dupla Euler-Bernoulli biapoiada com acoplamento elástico e força axial</b> .....  | <b>35</b> |
| 3.6.2    | <b>Viga dupla fixa-livre Euler-Bernoulli com acoplamento elástico e com força axial</b> .....   | <b>38</b> |
| 3.6.3    | <b>Viga dupla Euler-Bernoulli com uma camada elástica, com força axial e condição de contorno não clássica</b> .....                            | <b>41</b> |
| <b>4</b> | <b>SIMULAÇÕES</b> .....   | <b>45</b> |
| 4.1      | VIGA SIMPLES BIAPOIADA COM FORÇA AXIAL (AA) E VIGA DUPLA BIAPOIADA COM FORÇA AXIAL (AA-AA) .....  | 47        |
| 4.2      | VIGA SIMPLES FIXA-LIVRE COM FORÇA AXIAL (FL), VIGA DUPLA FIXA-LIVRE COM FORÇA AXIAL (FL-FL) E VIGA DUPLA RESTRITA COM FORÇA AXIAL (FL-FR) ..... | 55        |
| 4.3      | FREQUÊNCIAS NATURAIS PARA DIVERSOS VALORES DA CAMADA ELÁSTICA E DA FORÇA AXIAL .....  | 60        |
| 4.3.1    | <b>Variando o valor da constante <math>k</math> da camada elástica</b> .....  | <b>61</b> |
| 4.3.2    | <b>Variando o valor da constante <math>F_0</math> na força axial <math>P = \frac{EI}{L^2}F_0</math></b> .....                                   | <b>62</b> |
| <b>5</b> | <b>CONCLUSÃO</b> .....  | <b>63</b> |
|          | <b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS</b> .....   | <b>64</b> |
| <b>6</b> | <b>APÊNDICE</b> .....   | <b>66</b> |
| 6.1      | MÉTODO DE CARDANO - TARTAGLIA E O MÉTODO DE FERRARI .....   | 66        |
| 6.2      | DETERMINANDO A SOLUÇÃO DINÂMICA DE UMA VIGA EULER-BERNOULLI COM FORÇA AXIAL .....   | 68        |
| 6.2.1    | <b>Viga Euler-Bernoulli biapoiada com força axial</b> .....   | <b>69</b> |
| 6.2.2    | <b>Viga Euler-Bernoulli fixa-livre com força axial</b> .....  | <b>70</b> |

## 1 INTRODUÇÃO

Uma viga é definida como uma estrutura que tem uma de suas dimensões muito maior que as outras duas. O eixo da viga é definido ao longo dessa dimensão mais longa, e supõe-se que uma seção transversal normal a esse eixo varie suavemente ao longo do vão ou comprimento da viga. Um grande número de peças de máquinas também são estruturas semelhantes a vigas: braços de alavanca, eixos, etc. Várias estruturas aeronáuticas, como asas e fuselagens, também podem ser tratadas como vigas de paredes finas. (O.A.BAUCHAU; J.I.CRAIG, 2009)

Essas estruturas são amplamente utilizadas em muitos campos, como engenharia mecânica, civil e aeroespacial. As características de vibração, frequências, forma dos modos e as respostas dinâmicas sob várias forças excitantes são um assunto de grande interesse para acadêmicos e engenheiros há muitas décadas. (GANTMAKHER, 1970; INMAN, 1994; MEIROVITCH, 2001; RAO, 2007; KELLY, 2007)

Várias teorias de vigas foram desenvolvidas com base em várias suposições e levam a diferentes níveis de precisão. Uma das mais simples e úteis dessas teorias foi descrita pela primeira vez por Euler e Bernoulli e é comumente chamada de teoria da viga de Euler-Bernoulli. Uma suposição fundamental desta teoria é que a seção transversal é infinitamente rígida em seu próprio plano, ou seja, não ocorrem deformações no plano da seção transversal. Mais especificamente, o modelo de vibração Euler-Bernoulli considera a contribuição da deformação por momento fletor na equação do movimento, mas desconsidera os efeitos de inércia rotatória e tensão por cisalhamento. Já o modelo desenvolvido por Rayleigh, além de considerar as hipóteses da Teoria de Euler-Bernoulli adiciona os efeitos de inércia rotativa. O modelo *Shear Beam*, que também parte das mesmas hipótese do modelo de Euler-Bernoulli acrescenta os efeitos causados pelo cisalhamento. Finalmente, o modelo de Timoshenko incorpora tanto os efeitos causados pela inércia rotativa quanto os efeitos devido ao cisalhamento. Estes efeitos, segundo (RUGE; BIRK, 2007), devem ser considerados em vigas sob efeito de excitações transientes arbitrárias, especialmente para o cálculo de frequências altas.

Em Abul Hihal (ABU-HILAL; MOHSEN, 2000) uma forma fechada, através da análise modal, é obtida para a solução de vigas Euler-Bernoulli com amortecimento interno e externo, sujeitas a uma força harmônica e para diferentes condições de contorno.

Gurgoze (GÜRGÖZE, 1996) obtém numericamente uma equação para as frequências de uma viga Euler-Bernoulli com uma massa anexada em uma das extremidades. A viga em questão é segmentada com uma mola e uma massa presas.

Vigas Euler-Bernoulli segmentadas com massas anexadas também são consideradas no trabalho de (NAGULESWARAN, 2001). A equação para as frequências é resolvida através de um processo iterativo baseado em interpolação linear.

Comparado com vigas simples, o sistema de vigas duplas tem algumas vantagens. Primeiro, a viga adicional e a camada elástica podem servir como redutores de vibração da viga principal. O sistema de viga dupla pode reduzir significativamente a deflexão das vigas simples e fornecer uma margem de segurança maior. Em segundo lugar, uma viga paralela adicional pode ser necessária para muitos propósitos, por exemplo, coleta de energia e detecção de danos estruturais. (ZHAO; CHANG, 2021)

No trabalho de (VU; ORDÓÑEZ; KARNOPP, 2000) é considerado um sistema de viga dupla acoplada viscoelasticamente onde a solução para uma excitação harmônica é obtida considerando uma mudança de variáveis para desacoplar as equações. Depois a análise modal é aplicada para o sistema de duas vigas apoiadas nas duas extremidades.

As respostas livres e forçadas de uma sistema composto por duas vigas Euler-Bernoulli paralelas acopladas elasticamente pela teoria de Winkler são obtidas em (ONISZCZUK, 2000; ONISZCZUK, 2003), respectivamente. No sistema em questão não foram consideradas forças axiais e as condições de contorno nos dois casos é de vigas apoiadas nas duas extremidades.

No trabalho de (ZHANG; LU; WANG; LIU, 2008), a resposta forçada de um sistema de viga dupla Euler-Bernoulli com força axial é obtida. É considerada uma força externa do tipo harmônica uniformemente distribuída e harmônica concentrada no meio da viga. Nos dois casos a condição de contorno é de vigas apoiadas nas duas extremidades.

A vibração transversal de um sistema de viga dupla acoplado elasticamente e com força axial é estudado. O sistema considerado possui molas anexadas em uma das extremidades da viga e uma combinação de forças axial e *follower*. (MAO; WATTANASAKULPONG, 2015)

No presente trabalho consideramos um sistema de duas vigas acopladas por uma camada elástica modeladas pela teoria Euler-Bernoulli e com força axial. O nosso objetivo é obter as frequências naturais e os modos de vibração para o sistema com condições de contorno clássicas e não clássicas. Determinamos a resposta livre usando a análise modal em uma formulação matricial tanto para o sistema de equações quanto para as condições de contorno e utilizamos a base dinâmica ou base fundamental composta pela solução fundamental e suas derivadas até terceira ordem para escrever a solução da equação modal e assim determinar as frequências naturais e os modos de vibrar ou autofunções.

A base fundamental tem sido utilizada em vários outros trabalhos para o cálculo de respostas livres e forçadas de vigas Euler-Bernoulli ou Timoshenko com condições de contorno clássicas e não-clássicas, vigas com dispositivos intermediários, considerando ou não o efeito não-local. (CLAEYSSSEN; CANAHUALPA; JUNG, 1999; CLAEYSSSEN; COSTA, 2006; CLAEYSSSEN; TSUKAZAN; COPETTI, 2013; CLAEYSSSEN; TSUKAZAN; COPETTI, 2013)

Em trabalhos mais recentes, (COPETTI; CLAEYSSSEN; TOLFO; PAVLACK, 2022) a solução fundamental é obtida para um sistema de dupla viga de Timoshenko acoplada

por uma camada elástica. Ondas planas e modais são caracterizadas em função da solução fundamental para a viga de Timoshenko, em (CLAEYSSEN; TOLFO; TONETTO, 2016) e no estudo de linhas de transmissão de multicondutores em (CLAEYSSEN; COPETTI; TOLFO, 2022). O segundo espectro de frequências é estudado em (CLAEYSSEN; TOLFO; COPETTI, 2020) para uma viga de Timoshenko considerando efeitos não-locais. Em (CLAEYSSEN; COPETTI; TONETTO; CARVALHO, 2018) são caracterizadas as respostas livres e forçadas para os modelos de Euler-Bernoulli e Timoshenko aplicados em nanovigas com microscopia de força atômica sujeitas a efeitos piezoelétricos e de escala de superfície.

A solução fundamental também foi utilizada para resolver problemas que envolvem a força axial. Mais especificamente, no trabalho de (GIARETA, 2001) foi obtida a resposta forçada de uma viga Euler-Bernoulli para diversas condições de contorno clássicas e em (CLAEYSSEN; SODER, 2003) foram obtidos os modos para vigas Euler-Bernoulli com força axial e Timoshenko. Neste último trabalho, as duas equações de segunda ordem de Timoshenko foram escritas como uma equação de quarta ordem, desta forma a equação modal foi escrita de modo unificado.

O presente trabalho está dividido da seguinte forma:

No capítulo 2, apresentamos a equação de uma viga de Euler-Bernoulli sujeita a força axial. A formulação do modelo matemático é obtida usando o princípio estendido de Hamilton. São apresentadas algumas condições de contorno clássicas e não-clássicas.

No capítulo 3 consideramos um sistema de viga dupla Euler-Bernoulli com acoplamento elástico e força axial. Através de uma formulação matricial para o sistema de equações e para as condições de contorno usamos análise modal para obter a solução do problema, sendo que a solução da equação modal é escrita em termos da solução matricial fundamental. A formulação matricial permite relacionar o sistema de viga dupla com a viga simples de Euler-Bernoulli com força axial. A seguir, para as condições de contorno: viga dupla biapoada, viga dupla fixa-livre e viga dupla com condição de contorno não-clássica, obtemos a equação característica.

No capítulo 4, apresentamos simulações para as condições de contorno dadas no capítulo 3, determinamos as frequências naturais e os modos de vibração (autofunções). Também para efeitos de comparação, calculamos as frequências naturais e os respectivos modos de vibração de uma viga simples Euler-Bernoulli com força axial. Também fizemos comparações entre as frequências naturais para o caso de viga dupla com diversos valores da camada elástica e da força axial.

## 2 VIBRAÇÃO TRANSVERSAL DE UMA VIGA EULER-BERNOULLI SUJEITA A UMA FORÇA AXIAL

Neste capítulo, obtemos a equação da viga Euler-Bernoulli com força axial através do Princípio de Hamilton, obtendo também quatro condições de contorno em relação as extremidades da viga, ou seja, duas condições em  $x = 0$  e duas condições em  $x = L$ .

Tal princípio nos diz que, considerando todas as possíveis trajetórias ao longo das quais um sistema dinâmico pode se mover, de um ponto para outro dentro de um intervalo de tempo específico, a trajetória escolhida é a que minimiza a integral de tempo da diferença entre as energias cinética e potencial. (THORNTON; MARION, 2011)

A utilização de vigas como componentes estruturais na engenharia civil, aeronáutica, mecânica, entre outras, é uma prática comum. A vibração de flexão de vigas pode ser afetada por diversos fatores como a carga axial, apoios intermediários, massas fixadas ou molas. A determinação da influência desses parâmetros na vibração de vigas é de interesse prático em inúmeras aplicações de engenharia. Assim, um grande número de trabalhos tem sido realizados para se obter as frequências naturais e as formas modais de vigas sob carregamento axial. (SAKAR, 2013)

O problema da vibração transversal de vigas submetidas a esforços axiais encontra aplicação também no estudo da vibração de cabos, cabos de sustentação e pás de turbinas. Nas turbinas, as falhas das pás estão associadas a cargas transversais combinadas devido a fluidos fluindo em altas velocidades e cargas axiais devido à ação centrífuga. (RAO, 2007)

Após a formulação do modelo, apresentamos as condições de contorno clássicas e algumas condições de contorno não-clássicas para uma viga Euler-Bernoulli sem força axial.

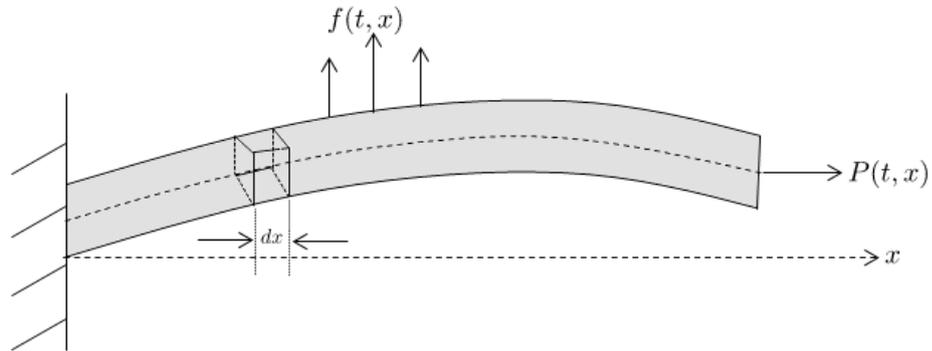
### 2.1 FORMULAÇÃO DO MODELO

Consideremos uma viga que está submetida a vibração transversal sob a ação de uma força axial, como mostrado na Figura 2.1.

A viga Euler-Bernoulli é um modelo que inclui a energia de deformação devido à flexão e à energia cinética devido ao deslocamento lateral, mas ignora os efeitos de distorção por cisalhamento e inércia rotacional. (RAO, 2007; KELLY, 2007)

A força axial é uma força que atua diretamente no eixo central de um objeto, quando aplicada, por exemplo, em vigas. Tais forças podem ser de alongamento ou força de compressão, dependendo da sua direção. A força axial de compressão ocorre quando estiver atuando com o sentido dirigido para o interior do objeto e a força axial de alongamento

Figura 2.1 – Viga Euler-Bernoulli sob a ação de uma força axial  $P(t, x)$

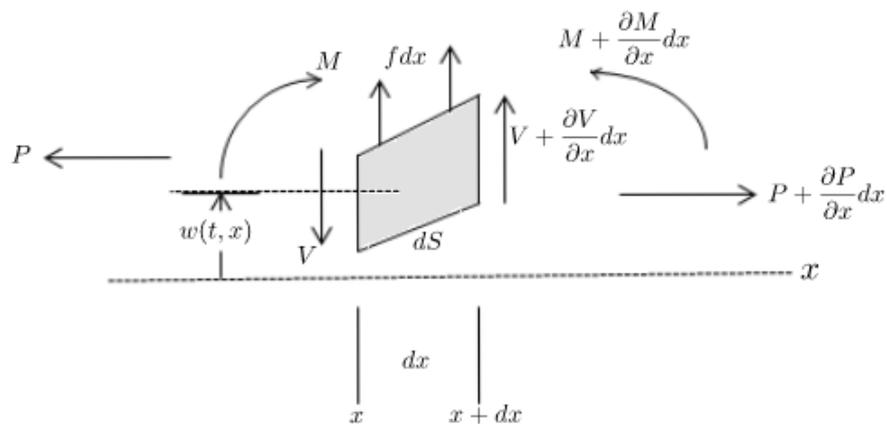


Fonte: Autor.

atua no sentido dirigido para o exterior do objeto.

As forças que atuam sobre um elemento da viga de comprimento  $dx$  são mostrados na Figura 2.2:

Figura 2.2 – Forças que atuam em um elemento da viga



Fonte: Autor.

$M$  indica o momento fletor na seção transversal;

$V$  é a componente vertical do esforço na seção transversal;

$P(t, x)$  indica a componente horizontal do esforço na seção transversal;

$w(t, x)$  indica o deslocamento transversal da viga;

$f(t, x)$  indica a carga transversal distribuída.

A mudança no comprimento da viga é dado por

$$dS - dx = \sqrt{(dx)^2 + \left(\frac{\partial w(t, x) dx}{\partial x}\right)^2} - dx. \quad (2.1)$$

O trabalho devido a força axial da viga pode ser expresso como

$$W_P = -\frac{1}{2} \int_0^L P(t, x) \left( \frac{\partial w(t, x)}{\partial x} \right)^2 dx. \quad (2.2)$$

O trabalho realizado pela carga transversal  $f(t, x)$  é dado por

$$W_f = \int_0^L f(t, x) w(t, x) dx. \quad (2.3)$$

Assim, o trabalho total realizado ( $W$ ) é dado por

$$W = W_P + W_f = -\frac{1}{2} \int_0^L P(t, x) \left( \frac{\partial w(t, x)}{\partial x} \right)^2 dx + \int_0^L f(t, x) w(t, x) dx. \quad (2.4)$$

A tensão e a energia cinética da viga, respectivamente, são dadas por

$$\pi = \frac{1}{2} \int_0^L EI(x) \left( \frac{\partial^2 w(t, x)}{\partial x^2} \right)^2 dx, \quad (2.5)$$

$$T = \frac{1}{2} \int_0^L \rho A(x) \left( \frac{\partial w(t, x)}{\partial t} \right)^2 dx, \quad (2.6)$$

com  $EI(x)$  sendo a rigidez de flexão da viga e  $\rho A(x)$  a constante de massa.

Pelo Princípio de Hamilton, temos que

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (T - \pi + W) dt = 0. \quad (2.7)$$

Substituindo as expressões (2.4), (2.5) e (2.6) em (2.7), vamos calcular os termos da integral em três casos. Para a primeira integral, temos

$$\begin{aligned} \delta \int_{t_1}^{t_2} T dt &= \delta \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{2} \int_0^L \rho A \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 dx dt \\ &= \int_0^L \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{2} \rho A \left[ \delta \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right] dt dx \\ &= \int_0^L \int_{t_1}^{t_2} \rho A \frac{\partial w}{\partial t} \frac{\partial}{\partial t} (\delta w) dt dx. \end{aligned}$$

Por integração por partes em relação à  $t$ ,

$$\begin{aligned} \delta \int_{t_1}^{t_2} T dt &= \int_0^L \left[ \rho A \frac{\partial w}{\partial t} (\delta w) \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial}{\partial t} \left( \rho A \frac{\partial w}{\partial t} \right) \delta w dt \right] dx \\ &= - \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \delta w dx dt, \end{aligned} \quad (2.8)$$

uma vez que  $\delta w = 0$  em  $t = t_1$  e  $t = t_2$ .

Calculando a segunda integral, temos que

$$\begin{aligned} \delta \int_{t_1}^{t_2} \pi dt &= \delta \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{2} \int_0^L EI \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 dx dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \frac{1}{2} EI \left[ \delta \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 \right] dx dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\delta w) dx dt. \end{aligned}$$

Calculando a integral ao longo do comprimento da viga no intervalo  $0 < x < L$ , por partes em relação à  $x$ , obtemos

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[ EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial}{\partial x} (\delta w) \Big|_0^L - \int_0^L \frac{\partial}{\partial x} \left( EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \frac{\partial}{\partial x} (\delta w) dx \right] dt. \quad (2.9)$$

Calculando novamente por integração por partes ao longo do comprimento da viga na eq.(2.9), ficamos com

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \pi dt = \int_{t_1}^{t_2} \left[ EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial}{\partial x} (\delta w) \Big|_0^L - \frac{\partial}{\partial x} \left( EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \delta w \Big|_0^L + \int_0^L \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \delta w dx \right] dt. \quad (2.10)$$

E por fim, calculando a terceira integral

$$\begin{aligned} \delta \int_{t_1}^{t_2} W dt &= \delta \int_{t_1}^{t_2} \left[ -\frac{1}{2} \int_0^L P \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx + \int_0^L f w dx \right] dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \left[ -\int_0^L \frac{1}{2} P \left[ \delta \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] dx + \int_0^L f \delta w dx \right] dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \left[ -\int_0^L P \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} (\delta w) dx + \int_0^L f \delta w dx \right] dt. \end{aligned}$$

E, novamente, por integração por partes em relação à  $x$ , ficamos com

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} W dt = \int_{t_1}^{t_2} \left[ -P \frac{\partial w}{\partial x} \delta w \Big|_0^L + \int_0^L \frac{\partial}{\partial x} \left( P \frac{\partial w}{\partial x} \right) \delta w dx + \int_0^L f \delta w dx \right] dt. \quad (2.11)$$

Substituindo as eqs. (2.8), (2.9) e (2.11) no Princípio de Hamilton (eq. (2.7)) e organizando os termos, nos leva a

$$-\int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \left[ \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left( P \frac{\partial w}{\partial x} \right) - f \right] \delta w dt - \int_{t_1}^{t_2} EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \delta \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right) \Big|_0^L dt +$$

$$+ \int_{t_1}^{t_2} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) - P \frac{\partial w}{\partial x} \right] \delta w \Big|_0^L dt = 0. \quad (2.12)$$

Pelo Lema de Du Bois-Reymond (HILDEBRAND, 1952; KELLY, 2007), aplicado na eq. (2.12) e uma vez que  $\delta w$  é assumido como uma variação arbitrária em  $0 < x < L$ , vem que

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left( P \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = f(t, x), \quad (2.13)$$

em  $x = 0$ , temos

$$EI \frac{\partial^2 w(t, 0)}{\partial x^2} = 0 \quad \text{ou} \quad \delta \left( \frac{\partial w(t, 0)}{\partial x} \right) = 0, \quad (2.14)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( EI \frac{\partial^2 w(t, 0)}{\partial x^2} \right) - P \frac{\partial w(t, 0)}{\partial x} = 0 \quad \text{ou} \quad \delta w(t, 0) = 0, \quad (2.15)$$

e, em  $x = L$ , segue

$$EI \frac{\partial^2 w(t, L)}{\partial x^2} = 0 \quad \text{ou} \quad \delta \left( \frac{\partial w(t, L)}{\partial x} \right) = 0, \quad (2.16)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( EI \frac{\partial^2 w(t, L)}{\partial x^2} \right) - P \frac{\partial w(t, L)}{\partial x} = 0 \quad \text{ou} \quad \delta w(t, L) = 0. \quad (2.17)$$

A equação (2.13) é a equação de Euler-Bernoulli para vigas quando aplicada uma força axial  $P(t, x)$ , e as eqs. (2.14)-(2.17) são as condições de contorno clássicas para a viga.

## 2.2 CONDIÇÕES DE CONTORNO GERAIS

Nesta seção, considere uma viga Euler-Bernoulli sem força axial, de modo que  $P(t, x) = 0$  em (2.13). As condições de contorno clássicas e não-clássicas são descritas nas extremidades da viga, onde:

- $w = w(t, x)$  indica o deslocamento da viga;
- $\frac{\partial w(t, x)}{\partial x}$  refere-se ao giro;
- $EI \frac{\partial^2 w(t, x)}{\partial x^2}$  indica o momento fletor;
- $\frac{\partial}{\partial x} \left( EI \frac{\partial^2 w(t, x)}{\partial x^2} \right)$  refere-se a força de cisalhamento da viga.

### 2.2.1 Condições de contorno clássicas

As condições de contorno clássicas são os efeitos de deslocamento, giro, momento fletor e cisalhamento aplicados nos extremos da viga e surgem diretamente na dedução da Equação de Euler-Bernoulli quando esta não possui dispositivos anexados em suas extremidades, por exemplo, um bloco de massa, molas, amortecedores, mola e amortecedores torcionais, entre outros. A seguir, listamos alguns casos de condições de contorno na extremidade  $x = 0$  da viga. As condições de contorno na extremidade  $x = L$  podem ser encontradas em (RAO, 2007).

#### a) Viga Euler-Bernoulli livre

Figura 2.3 – Viga livre na extremidade  $x = 0$



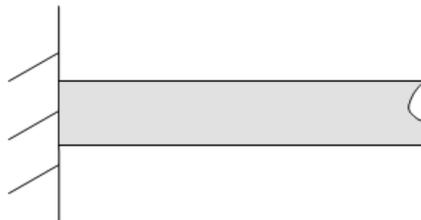
Fonte: Autor.

Para a viga livre na extremidade  $x = 0$ , temos que as condições de contorno são dadas por

$$EI \frac{\partial^2 w(t, 0)}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x} \left( EI \frac{\partial^2 w(t, 0)}{\partial x^2} \right) = 0.$$

#### b) Viga Euler-Bernoulli fixa

Figura 2.4 – Viga fixa na extremidade  $x = 0$



Fonte: Autor.

Para o caso de uma viga fixa, as condições de contorno são

$$w(t, 0) = 0, \quad \frac{\partial w(t, 0)}{\partial x} = 0.$$

#### c) Viga Euler-Bernoulli apoiada

Figura 2.5 – Viga apoiada na extremidade  $x = 0$



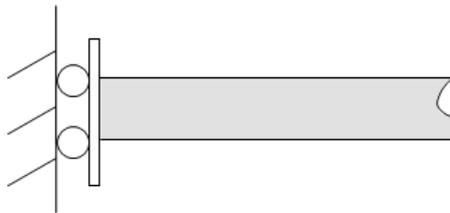
Fonte: Autor.

A viga apoiada tem as seguintes condições de contorno

$$w(t, 0) = 0, \quad EI \frac{\partial^2 w(t, 0)}{\partial x^2} = 0.$$

#### d) Viga Euler-Bernoulli com extremidade deslizante

Figura 2.6 – Viga com extremidade deslizante em  $x = 0$



Fonte: Autor.

Neste caso, temos que as condições de contorno são:

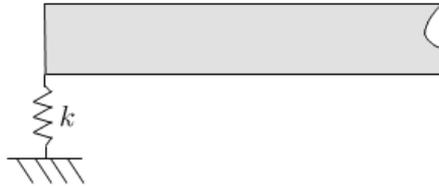
$$\frac{\partial w(t, 0)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x} \left( EI \frac{\partial^2 w(t, 0)}{\partial x^2} \right) = 0.$$

### 2.2.2 Condições de contorno não-clássicas

Denominamos condições de contorno não-clássicas para uma viga, quando, por exemplo ela possuir dispositivos anexados em uma, ou nas duas extremidades. Abaixo apresentamos alguns exemplos e suas respectivas condições de contorno, as quais são: viga restrita com um dispositivo de mola, com amortecedor, com uma massa e com uma massa anexada e considerando o momento de inércia.

**a) Viga restrita: com um dispositivo de mola**

Figura 2.7 – Viga com restrição elástica na extremidade  $x = 0$



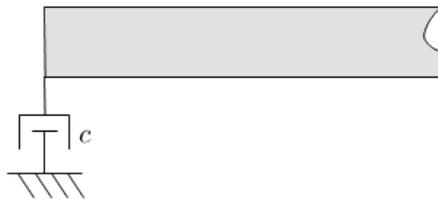
Fonte: Autor.

As condições de contorno para a viga restrita considerando uma mola em  $x = 0$  são dadas por

$$EI \frac{\partial^2 w(t, 0)}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x} \left( EI \frac{\partial^2 w(t, 0)}{\partial x^2} \right) = -kw(t, 0).$$

**b) Viga restrita: com um amortecedor**

Figura 2.8 – Viga com um amortecedor na extremidade  $x = 0$



Fonte: Autor.

As condições de contorno para a viga que suporta um amortecedor viscoso em  $x = 0$  são dadas por

$$EI \frac{\partial^2 w(t, 0)}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x} \left( EI \frac{\partial^2 w(t, 0)}{\partial x^2} \right) = -c \frac{\partial w(t, 0)}{\partial t}.$$

**c) Viga restrita: com uma massa**

Figura 2.9 – Viga com uma massa anexada na extremidade  $x = 0$



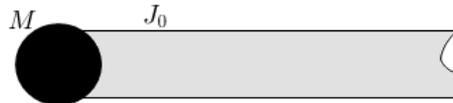
Fonte: Autor.

As condições de contorno para a viga que carrega uma massa em  $x = 0$  são dadas por

$$EI \frac{\partial^2 w(t, 0)}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x} \left( EI \frac{\partial^2 w(t, 0)}{\partial x^2} \right) = -M \frac{\partial^2 w(t, 0)}{\partial t^2}.$$

**d) Viga restrita: com uma massa anexada e considerando o momento de inércia**

Figura 2.10 – Viga com uma massa anexada ( $M$ ) e com momento de inércia ( $J_0$ ) na extremidade  $x = 0$



Fonte: Autor.

Se além da massa anexada na extremidade  $x = 0$  da viga considerarmos também o efeito do momento de inércia neste extremo, temos

$$EI \frac{\partial^2 w(t, 0)}{\partial x^2} = -J_0 \frac{\partial^3 w(t, 0)}{\partial x \partial t^2}, \quad \frac{\partial}{\partial x} \left( EI \frac{\partial^2 w(t, 0)}{\partial x^2} \right) = -M \frac{\partial^2 w(t, 0)}{\partial t^2}.$$

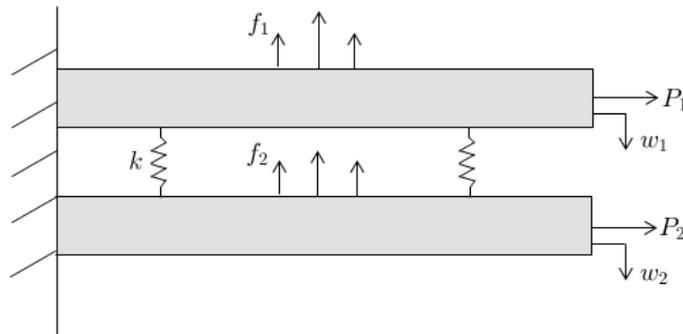
### 3 SISTEMA DE VIGA DUPLA EULER-BERNOULLI COM ACOPLAMENTO ELÁSTICO E FORÇA AXIAL

Neste capítulo, apresentamos o sistema de equações que descrevem o deslocamento transversal do sistema composto por duas vigas Euler-Bernoulli acoplado por uma camada elástica e com força axial. A partir de uma formulação matricial e da análise modal, obtemos a equação modal associada. Escrevemos a equação modal de quarta ordem em termos da base dinâmica que é composta pela solução fundamental matricial do problema e suas derivadas até terceira ordem.

As condições de contorno também são escritas na forma matricial e a equação característica, em função da solução fundamental matricial, é obtida para os seguintes casos: sistema de viga dupla biapoada, sistema de viga dupla fixa-livre e sistema de viga dupla restrita, com a viga superior fixa livre e a viga inferior fixa na extremidade  $x = 0$  e com uma massa anexada em  $x = L$ . Em todos os casos consideramos o sistema de viga dupla Euler-Bernoulli com acoplamento elástico e força axial.

Consideremos um sistema de viga dupla Euler-Bernoulli acoplado elasticamente e com força axial, conforme a Figura 3.1:

Figura 3.1 – Viga dupla Euler-Bernoulli com acoplamento elástico e força axial



Fonte: Autor.

As equações que descrevem o deslocamento transversal desse sistema, são dadas por (RAO, 2007)

$$\begin{cases} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( E_1 I_1 \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} \right) + k(w_1 - w_2) - \frac{\partial}{\partial x} \left( P_1 \frac{\partial w_1}{\partial x} \right) + \rho_1 A_1 \frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2} = f_1(t, x), \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( E_2 I_2 \frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2} \right) + k(w_2 - w_1) - \frac{\partial}{\partial x} \left( P_2 \frac{\partial w_2}{\partial x} \right) + \rho_2 A_2 \frac{\partial^2 w_2}{\partial t^2} = f_2(t, x), \end{cases} \quad (3.1)$$

onde,

$E_i$ : módulo de Elasticidade de Young;

$I_i(x)$ : momento de inércia;

$E_i I_i(x)$ : rigidez de flexão;

$\rho_i$ : densidade linear de massa;

$A_i(x)$ : área da seção transversal da viga;

$\rho_i A_i$ : constante de massa por unidade de comprimento;

$f_i(t, x)$ : força externa aplicadas as vigas;

$w_i(t, x)$ : deslocamento da viga;

$P_i(t, x)$ : força axial;

$k$ : constante da mola no acoplamento das vigas;

$t$ : unidade temporal  $t > 0$ ;

$x$ : unidade espacial com  $0 < x < L$ ;

$L$ : comprimento da viga;

$i$ , com  $i = 1$  indicando a viga superior e  $i = 2$  indicando a viga inferior.

As condições de contorno clássicas para o sistema de viga dupla Euler-Bernoulli com força axial são dadas por,

$$E_i I_i \frac{\partial^2 w_i(t, 0)}{\partial x^2} = 0 \text{ ou } \delta \left( \frac{\partial w_i(t, 0)}{\partial x} \right) = 0 \quad (3.2)$$

$$E_i I_i \frac{\partial^2 w_i(t, L)}{\partial x^2} = 0 \text{ ou } \delta \left( \frac{\partial w_i(t, L)}{\partial x} \right) = 0 \quad (3.3)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( E_i I_i \frac{\partial^2 w_i(t, 0)}{\partial x^2} \right) - P_i \frac{\partial w_i(t, 0)}{\partial x} = 0 \text{ ou } \delta w_i(t, 0) = 0 \quad (3.4)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( E_i I_i \frac{\partial^2 w_i(t, L)}{\partial x^2} \right) - P_i \frac{\partial w_i(t, L)}{\partial x} = 0 \text{ ou } \delta w_i(t, L) = 0, \quad (3.5)$$

com  $i = 1, 2$ .

Neste trabalho, vamos considerar uma viga uniforme com força axial  $P$  constante. Assim as equações (3.1), que descrevem o deslocamento transversal desse sistema (ZHANG; LU; MA, 2008), são dadas por

$$\begin{cases} \rho_1 A_1 \frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2} + k(w_1 - w_2) - P_1 \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} + E_1 I_1 \frac{\partial^4 w_1}{\partial x^4} = f_1, \\ \rho_2 A_2 \frac{\partial^2 w_2}{\partial t^2} + k(w_2 - w_1) - P_2 \frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2} + E_2 I_2 \frac{\partial^4 w_2}{\partial x^4} = f_2. \end{cases} \quad (3.6)$$

Considerando o sistema de viga dupla dada na Figura 3.1, onde as duas vigas são

fixas em  $x = 0$  e livres em  $x = L$ , as condições de contorno são dadas por

$$w_i(t, 0) = 0, \quad \frac{\partial w_i(t, 0)}{\partial x} = 0 \quad (3.7)$$

$$E_i I_i \frac{\partial^2 w_i(t, L)}{\partial x^2} = 0, \quad E_i I_i \frac{\partial^3 w_i(t, L)}{\partial x^3} - P_i \frac{\partial w_i(t, L)}{\partial x} = 0, \quad (3.8)$$

com  $i = 1, 2$ .

### 3.1 FORMULAÇÃO MATRICIAL

Matricialmente o sistema dado em (3.6) pode ser escrito da seguinte forma,

$$\mathbb{M} \frac{\partial^2 \mathbf{w}}{\partial t^2} + \mathbb{K} \mathbf{w} = \mathbb{F}, \quad (3.9)$$

onde,

$$\mathbb{M} = \begin{pmatrix} \rho_1 A_1 & 0 \\ 0 & \rho_2 A_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{K} = \begin{pmatrix} E_1 I_1 \frac{\partial^4}{\partial x^4} - P_1 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + k & -k \\ -k & E_2 I_2 \frac{\partial^4}{\partial x^4} - P_2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + k \end{pmatrix}, \quad (3.10)$$

$$\mathbb{F} = \mathbb{F}(t, x) = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{w} = \mathbf{w}(t, x) = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}. \quad (3.11)$$

Observe que a matriz  $\mathbb{K}$  é um operador diferencial espacial matricial de quarta ordem. A matriz  $\mathbb{K}$  pode ser decomposta como soma de três operadores,

$$\mathbb{K} = -\mathbb{A} \frac{\partial^4}{\partial x^4} + \mathbb{P} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \mathbb{B}, \quad (3.12)$$

com

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} -E_1 I_1 & 0 \\ 0 & -E_2 I_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{P} = \begin{pmatrix} -P_1 & 0 \\ 0 & -P_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{B} = \begin{pmatrix} -k & k \\ k & -k \end{pmatrix}. \quad (3.13)$$

### 3.2 ANÁLISE MODAL

Consideremos o sistema dado em (3.9) sem força externa ( $\mathbb{F}(t, x) = \mathbf{0}$ ), dado por

$$\mathbb{M} \frac{\partial^2 \mathbf{w}}{\partial t^2} + \mathbb{K} \mathbf{w} = \mathbf{0}, \quad (3.14)$$

onde  $\mathbf{0}$  indica a matriz nula de ordem  $(2 \times 1)$

$$\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (3.15)$$

Desta forma, vamos supor que a solução do sistema dado em (3.14) é

$$\mathbf{w}(t, x) = e^{\lambda t} \mathbb{V}(x), \quad (3.16)$$

com

$$\mathbf{w}(t, x) = \begin{pmatrix} w_1(t, x) \\ w_2(t, x) \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbb{V}(x) = \begin{pmatrix} V_1(x) \\ V_2(x) \end{pmatrix}, \quad (3.17)$$

de tal forma que a matriz  $\mathbb{V}(x)$  é composta por  $V_i$ ,  $i = 1, 2$  chamados de autofunções ou modos de vibração correspondentes ao autovalor  $\lambda$ .

Substituindo (3.16) no sistema (3.14) com  $\mathbb{K}$  dado em (3.12), se obtém

$$\mathbb{A} \mathbb{V}^{(iv)}(x) - \mathbb{P} \mathbb{V}''(x) + (-\lambda^2 \mathbb{M} + \mathbb{B}) \mathbb{V}(x) = \mathbf{0}, \quad (3.18)$$

onde  $\mathbb{A}$ ,  $\mathbb{P}$  e  $\mathbb{B}$  são matrizes de ordem  $(2 \times 2)$  dadas em (3.13) e  $\mathbf{0}$  é a matriz nula de ordem  $(2 \times 1)$ .

A equação dada em (3.18) é chamada de *equação modal*. As condições de contorno clássicas ou não-clássicas, a partir de (3.16) e (3.17), podem ser descritas da seguinte forma,

- Em  $x = 0$ :

$$\begin{aligned} a_{11}^0 V_1(0) + b_{11}^0 V_1'(0) + c_{11}^0 V_1''(0) + d_{11}^0 V_1'''(0) &= 0 \\ a_{12}^0 V_2(0) + b_{12}^0 V_2'(0) + c_{12}^0 V_2''(0) + d_{12}^0 V_2'''(0) &= 0 \\ a_{21}^0 V_1(0) + b_{21}^0 V_1'(0) + c_{21}^0 V_1''(0) + d_{21}^0 V_1'''(0) &= 0 \\ a_{22}^0 V_2(0) + b_{22}^0 V_2'(0) + c_{22}^0 V_2''(0) + d_{22}^0 V_2'''(0) &= 0. \end{aligned} \quad (3.19)$$

- Em  $x = L$ :

$$\begin{aligned} a_{11}^L V_1(L) + b_{11}^L V_1'(L) + c_{11}^L V_1''(L) + d_{11}^L V_1'''(L) &= 0 \\ a_{12}^L V_2(L) + b_{12}^L V_2'(L) + c_{12}^L V_2''(L) + d_{12}^L V_2'''(L) &= 0 \\ a_{21}^L V_1(L) + b_{21}^L V_1'(L) + c_{21}^L V_1''(L) + d_{21}^L V_1'''(L) &= 0 \\ a_{22}^L V_2(L) + b_{22}^L V_2'(L) + c_{22}^L V_2''(L) + d_{22}^L V_2'''(L) &= 0. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Podemos escrever (3.19) e (3.20) na forma matricial, assim

$$\begin{aligned}
\mathbb{A}_1^0 \mathbb{V}(0) + \mathbb{B}_1^0 \mathbb{V}'(0) + \mathbb{C}_1^0 \mathbb{V}''(0) + \mathbb{D}_1^0 \mathbb{V}'''(0) &= 0 \\
\mathbb{A}_2^0 \mathbb{V}(0) + \mathbb{B}_2^0 \mathbb{V}'(0) + \mathbb{C}_2^0 \mathbb{V}''(0) + \mathbb{D}_2^0 \mathbb{V}'''(0) &= 0 \\
\mathbb{A}_1^L \mathbb{V}(L) + \mathbb{B}_1^L \mathbb{V}'(L) + \mathbb{C}_1^L \mathbb{V}''(L) + \mathbb{D}_1^L \mathbb{V}'''(L) &= 0 \\
\mathbb{A}_2^L \mathbb{V}(L) + \mathbb{B}_2^L \mathbb{V}'(L) + \mathbb{C}_2^L \mathbb{V}''(L) + \mathbb{D}_2^L \mathbb{V}'''(L) &= 0,
\end{aligned} \tag{3.21}$$

onde

$$\mathbb{A}_i^z = \begin{pmatrix} a_{i1}^z & 0 \\ 0 & a_{i2}^z \end{pmatrix}, \mathbb{B}_i^z = \begin{pmatrix} b_{i1}^z & 0 \\ 0 & b_{i2}^z \end{pmatrix}, \mathbb{C}_i^z = \begin{pmatrix} c_{i1}^z & 0 \\ 0 & c_{i2}^z \end{pmatrix} \text{ e } \mathbb{D}_i^z = \begin{pmatrix} d_{i1}^z & 0 \\ 0 & d_{i2}^z \end{pmatrix}, \tag{3.22}$$

com  $z = 0, L$  e  $i = 1, 2$ .

### 3.3 BASE DE SOLUÇÕES

Considere  $\beta = \{\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4\}$  uma base qualquer de soluções para a equação modal dada em (3.18), escrevemos

$$\mathbb{V}(x) = \psi_1(x)e_1 + \psi_2(x)e_2 + \psi_3(x)e_3 + \psi_4(x)e_4 = \Psi \mathbf{e}, \tag{3.23}$$

onde,

$$\Psi = \begin{pmatrix} \psi_1(x) & \psi_2(x) & \psi_3(x) & \psi_4(x) \end{pmatrix}, \quad \psi_j = \begin{pmatrix} \psi_{j1}(x) & \psi_{j2}(x) \\ \psi_{j3}(x) & \psi_{j4}(x) \end{pmatrix}, \tag{3.24}$$

$$\mathbf{e} = \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \end{pmatrix}^T \quad \text{e} \quad e_j = \begin{pmatrix} e_{j1} & e_{j2} \end{pmatrix}^T, \tag{3.25}$$

com  $j = 1, 2, 3, 4$ , e é um vetor a ser determinado pelas condições de contorno e  $j$  indica o elemento da base.

Com a substituição de (3.23) nas condições de contorno dadas em (3.21), obtemos o seguinte sistema matricial,

$$\Upsilon \mathbf{e} = \mathbf{0}, \tag{3.26}$$

onde  $\mathbf{0}$  é uma matriz de ordem  $(8 \times 1)$  e

$$\Upsilon = \mathcal{B}\Psi_{0,L}, \tag{3.27}$$

onde,

$$\mathcal{B} = \begin{pmatrix} \mathcal{B}^0 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathcal{B}^L \end{pmatrix}, \quad \text{com } \mathcal{B}^0 = \begin{pmatrix} \mathbb{A}_1^0 & \mathbb{B}_1^0 & \mathbb{C}_1^0 & \mathbb{D}_1^0 \\ \mathbb{A}_2^0 & \mathbb{B}_2^0 & \mathbb{C}_2^0 & \mathbb{D}_2^0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{B}^L = \begin{pmatrix} \mathbb{A}_1^L & \mathbb{B}_1^L & \mathbb{C}_1^L & \mathbb{D}_1^L \\ \mathbb{A}_2^L & \mathbb{B}_2^L & \mathbb{C}_2^L & \mathbb{D}_2^L \end{pmatrix}, \quad (3.28)$$

$$\Psi_{0,L} = \begin{pmatrix} \psi_1(0) & \psi_2(0) & \psi_3(0) & \psi_4(0) \\ \psi_1'(0) & \psi_2'(0) & \psi_3'(0) & \psi_4'(0) \\ \psi_1''(0) & \psi_2''(0) & \psi_3''(0) & \psi_4''(0) \\ \psi_1'''(0) & \psi_2'''(0) & \psi_3'''(0) & \psi_4'''(0) \\ \psi_1(L) & \psi_2(L) & \psi_3(L) & \psi_4(L) \\ \psi_1'(L) & \psi_2'(L) & \psi_3'(L) & \psi_4'(L) \\ \psi_1''(L) & \psi_2''(L) & \psi_3''(L) & \psi_4''(L) \\ \psi_1'''(L) & \psi_2'''(L) & \psi_3'''(L) & \psi_4'''(L) \end{pmatrix}, \quad (3.29)$$

$$\mathbf{e} = \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \end{pmatrix}^T \quad \mathbf{e} \quad e_j = \begin{pmatrix} e_{j1} & e_{j2} \end{pmatrix}^T, \quad (3.30)$$

de tal forma que,

$\mathcal{B}$  é uma matriz por blocos, de ordem  $(8 \times 16)$ , é composta pelos coeficientes associados as condições de contorno;

$\mathcal{B}^0$  é uma matriz de ordem  $(4 \times 8)$ , a qual caracteriza uma matriz com as condições de contorno em  $x = 0$ ;

$\mathcal{B}^L$  é uma matriz de ordem  $(4 \times 8)$ , a qual caracteriza uma matriz com as condições de contorno em  $x = L$ ;

$\mathbf{0}$  é a matriz nula de ordem  $(4 \times 8)$ ;

$\Psi_{0,L}$  matriz de ordem  $(16 \times 8)$ , é composta pelos termos da base de soluções nas extremidades  $x = 0$  e  $x = L$ ;

$\mathbf{e}$  é um vetor de ordem  $(8 \times 1)$ ;

$\Upsilon$  matriz de ordem  $(8 \times 8)$ .

O sistema  $\Upsilon \mathbf{e} = \mathbf{0}$  possui soluções não-nulas quando

$$\det(\Upsilon) = \det(\mathcal{B}\Psi_{0,L}) = 0, \quad (3.31)$$

a qual é denominada *equação característica*.

### 3.4 BASE MATRICIAL FUNDAMENTAL OU BASE DINÂMICA

Utilizamos a base matricial fundamental ou base dinâmica para a obtenção dos modos e das frequências naturais de vibração. A base matricial fundamental é composta pela solução fundamental de um problema de valor inicial e suas derivadas. As condições

iniciais do problema de valor inicial simplificam o cálculo das constantes a serem obtidas em (3.23).

Considere

$$\gamma = \{\mathbf{h}, \mathbf{h}', \mathbf{h}'', \mathbf{h}'''\}$$

a base de soluções para a eq. (3.18). Então

$$\mathbb{V}(x) = \mathbf{h}(x)e_1 + \mathbf{h}'(x)e_2 + \mathbf{h}''(x)e_3 + \mathbf{h}'''(x)e_4 = \mathbb{H}\mathbf{e}, \quad (3.32)$$

os quais  $e_1, e_2, e_3$  e  $e_4$  são vetores constantes de ordem  $(2 \times 1)$ , dados em (3.30), a serem determinados.

A matriz  $\mathbf{h}$ , de ordem  $(2 \times 2)$ , é conhecida como *solução fundamental matricial*, e é solução do seguinte Problema de Valor Inicial (P.V.I.)

$$\begin{cases} \mathbb{A}\mathbf{h}^{(iv)}(x) - \mathbb{P}\mathbf{h}''(x) + (-\lambda^2\mathbb{M} + \mathbb{B})\mathbf{h}(x) = \mathbf{0} \\ \mathbf{h}(0) = \mathbf{0}, \mathbf{h}'(0) = \mathbf{0}, \mathbf{h}''(0) = \mathbf{0}, \mathbb{A}\mathbf{h}'''(0) = \mathbb{I}, \end{cases} \quad (3.33)$$

onde, as matrizes  $\mathbb{A}$ ,  $\mathbb{P}$ ,  $\mathbb{M}$  e  $\mathbb{B}$  foram dadas em (3.10) e (3.13), a matriz nula dada por  $\mathbf{0}$  e a matriz identidade  $\mathbb{I}$  são de ordem  $(2 \times 2)$ .

A matriz  $\mathbf{h}$  é formada por

$$\mathbf{h}(x) = \begin{pmatrix} h_{11}(x) & h_{12}(x) \\ h_{21}(x) & h_{22}(x) \end{pmatrix}, \quad (3.34)$$

de tal forma que, a solução da eq.(3.18) pode ser escrita com o uso da expressão dada em (3.32). Desta forma, considere

$$\mathbb{V}(x) = \mathbb{H}(x)\mathbf{e}, \quad (3.35)$$

com,

$$\mathbb{H}(x) = \begin{pmatrix} \mathbf{h}(x) & \mathbf{h}'(x) & \mathbf{h}''(x) & \mathbf{h}'''(x) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e} = \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \end{pmatrix}^T \quad \mathbf{e} \quad e_j = \begin{pmatrix} e_{j1} & e_{j2} \end{pmatrix}^T,$$

onde  $j = 1, 2, 3, 4$ .

Substituindo a eq. (3.32) nas condições de contorno dadas em (3.21), encontramos o seguinte sistema matricial

$$\xi(\lambda)\mathbf{e} = \mathbf{0}, \quad (3.36)$$

com  $\xi$  matriz de ordem  $(8 \times 8)$  e  $\mathbf{0}$  matriz  $(8 \times 1)$ , a qual podemos escrever

$$\xi = \mathcal{B}\mathbb{H}_{0,L}, \quad (3.37)$$

onde  $\mathbb{H}_{0,L}$ , de ordem  $(16 \times 8)$ , é a matriz da base de soluções aplicada nas extremidades da viga, isto é,

$$\mathbb{H}_{0,L} = \begin{pmatrix} \mathbf{h}(0) & \mathbf{h}'(0) & \mathbf{h}''(0) & \mathbf{h}'''(0) \\ \mathbf{h}'(0) & \mathbf{h}''(0) & \mathbf{h}'''(0) & \mathbf{h}^{(iv)}(0) \\ \mathbf{h}''(0) & \mathbf{h}'''(0) & \mathbf{h}^{(iv)}(0) & \mathbf{h}^{(v)}(0) \\ \mathbf{h}'''(0) & \mathbf{h}^{(iv)}(0) & \mathbf{h}^{(v)}(0) & \mathbf{h}^{(vi)}(0) \\ \mathbf{h}(L) & \mathbf{h}'(L) & \mathbf{h}''(L) & \mathbf{h}'''(L) \\ \mathbf{h}'(L) & \mathbf{h}''(L) & \mathbf{h}'''(L) & \mathbf{h}^{(iv)}(L) \\ \mathbf{h}''(L) & \mathbf{h}'''(L) & \mathbf{h}^{(iv)}(L) & \mathbf{h}^{(v)}(L) \\ \mathbf{h}'''(L) & \mathbf{h}^{(iv)}(L) & \mathbf{h}^{(v)}(L) & \mathbf{h}^{(vi)}(L) \end{pmatrix}. \quad (3.38)$$

Do P.V.I. dado em (3.33), a matriz  $\mathbb{H}_{0,L}$  é dada por

$$\mathbb{H}_{0,L} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbb{A}^{-1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbb{A}^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbb{A}^{-1} & \mathbf{0} & \mathbb{A}^{-1}\mathbb{P}\mathbb{A}^{-1} \\ \mathbb{A}^{-1} & \mathbf{0} & \mathbb{A}^{-1}\mathbb{P}\mathbb{A}^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{h}(L) & \mathbf{h}'(L) & \mathbf{h}''(L) & \mathbf{h}'''(L) \\ \mathbf{h}'(L) & \mathbf{h}''(L) & \mathbf{h}'''(L) & \mathbf{h}^{(iv)}(L) \\ \mathbf{h}''(L) & \mathbf{h}'''(L) & \mathbf{h}^{(iv)}(L) & \mathbf{h}^{(v)}(L) \\ \mathbf{h}'''(L) & \mathbf{h}^{(iv)}(L) & \mathbf{h}^{(v)}(L) & \mathbf{h}^{(vi)}(L) \end{pmatrix}, \quad (3.39)$$

onde  $\mathbf{0}$  é uma matriz de ordem dois. Observe que as condições iniciais do problema de valor inicial acarretam que a matriz da base de soluções é esparsa, de modo que o cálculo das constantes para a obtenção dos modos de vibração é simplificado.

### 3.5 DETERMINANDO A SOLUÇÃO FUNDAMENTAL

#### 3.5.1 Fórmula fechada

Segundo Claeysen (CLAEYSSEN; CANAHUALPA; JUNG, 1999), tem-se que a solução fundamental dada pela matriz  $\mathbf{h}$ , a qual é solução de (3.33), é dada por

$$\mathbf{h}(x) = \sum_{j=1}^{4N} \sum_{i=0}^{j-1} b_i d^{(j-1-i)}(x) \mathbf{h}_{(4N-j)}, \quad (3.40)$$

onde no nosso estudo temos que  $N = 2$ , e os  $b_i$ 's sendo os coeficientes do polinômio característico

$$\begin{aligned} p(\lambda, s) &= \det[s^4\mathbb{A} - s^2\mathbb{P} + (-\lambda^2\mathbb{M} + \mathbb{B})] \\ &= \sum_{i=0}^{4N} b_i s^{(4N-i)}, \end{aligned} \quad (3.41)$$

com  $d(x)$  sendo solução do Problema de Valor Inicial

$$\begin{cases} b_0 d^{(8)}(x) + b_1 d^{(7)}(x) + b_2 d^{(6)}(x) + \dots + b_7 d^{(1)}(x) + b_8 d(x) = 0 \\ d(0) = d^{(1)}(0) = \dots = d^{(6)}(0) = 0, \quad b_0 d^{(7)}(0) = 1, \end{cases} \quad (3.42)$$

onde  $b_0, b_1, \dots, b_8$  coeficientes de (3.41) e  $h_l, l = 0, 1, 2, 3, 4$ , solução da equação matricial a diferenças

$$\begin{cases} \mathbb{A}h_{l+4} - \mathbb{P}h_{l+2} + (-\lambda^2\mathbb{M} + \mathbb{B})h_l = \mathbf{0}, \\ \mathbf{h}_0 = \mathbf{h}_1 = \mathbf{h}_2 = \mathbf{0}, \quad \mathbb{A}h_3 = \mathbb{I}, \end{cases} \quad (3.43)$$

com as matrizes  $\mathbf{0}, \mathbb{I}$  e  $\mathbf{h}$  de ordem  $(2 \times 2)$ .

Da eq. (3.41), obtemos os coeficientes do polinômio característico

$$b_1 = b_3 = b_5 = b_7 = 0, \quad (3.44)$$

$$b_0 = E_1 I_1 E_2 I_2,$$

$$b_2 = -P_1 E_2 I_2 - P_2 E_1 I_1,$$

$$b_4 = (\rho_1 A_1 E_2 I_2 + \rho_2 A_2 E_1 I_1) \lambda^2 + k(E_1 I_1 + E_2 I_2) + P_1 P_2,$$

$$b_6 = (-\rho_1 A_1 P_2 - \rho_2 A_2 P_1) \lambda^2 - k(P_1 + P_2),$$

$$b_8 = \rho_1 A_1 \rho_2 A_2 \lambda^4 + k(\rho_1 A_1 + \rho_2 A_2) \lambda^2.$$

Desta forma,  $p(s)$  é dado por

$$p(s) = b_0 s^8 + b_2 s^6 + b_4 s^4 + b_6 s^2 + b_8. \quad (3.45)$$

Substituindo (3.44) em (3.42), temos que  $d(x)$  é solução do seguinte Problema de Valor Inicial

$$\begin{cases} b_0 d^{(8)}(x) + b_2 d^{(6)}(x) + b_4 d^{(4)}(x) + b_6 d^{(2)}(x) + b_8 d(x) = 0 \\ d(0) = d^{(1)}(0) = \dots = d^{(6)}(0) = 0, \quad b_0 d^{(7)}(0) = 1. \end{cases} \quad (3.46)$$

Depois de determinada a solução  $d(x)$  de (3.46), usamos a equação a diferenças dada em (3.43) e obtemos as seguintes matrizes

$$\mathbf{h}_0 = \mathbf{h}_1 = \mathbf{h}_2 = \mathbf{h}_4 = \mathbf{h}_6 = \mathbf{0}, \quad (3.47)$$

$$\mathbf{h}_3 = \mathbb{A}^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{E_1 I_1} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{E_2 I_2} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{h}_5 = \begin{pmatrix} -\frac{P_1}{E_1^2 I_1^2} & 0 \\ 0 & -\frac{P_2}{E_2^2 I_2^2} \end{pmatrix}, \quad (3.48)$$

$$\mathbf{h}_7 = \begin{pmatrix} -\frac{P_1^2}{E_1^3 I_1^3} - \frac{-\lambda^2 \rho_1 A_1 - k}{E_1^2 I_1^2} & -\frac{k}{E_1 I_1 E_2 I_2} \\ -\frac{k}{E_1 I_1 E_2 I_2} & -\frac{P_2^2}{E_2^3 I_2^3} - \frac{-\lambda^2 \rho_2 A_2 - k}{E_2^2 I_2^2} \end{pmatrix}, \quad (3.49)$$

sendo  $\mathbf{0}$  matriz nula de ordem dois.

Portanto, após obter os  $\mathbf{h}_l$ ,  $l = 0, 1, 2, 3, 4$ , resolvendo (3.43), os  $b'_i s$ ,  $i = 0, 1, \dots, 8$  dados em (3.44) e a função  $d(x)$ , assim substituindo em (3.40), tem-se

$$\mathbf{h}(x) = b_0 d^{(iv)}(x) \mathbf{h}_3 + (b_0 \mathbf{h}_5 + b_2 \mathbf{h}_3) d''(x) + b_0 \mathbf{h}_7 + b_2 \mathbf{h}_5 + b_4 \mathbf{h}_3. \quad (3.50)$$

Observe que para determinar a solução  $d(x)$  do PVI (3.46) devemos encontrar as oito raízes da equação característica dada por

$$b_0 r^8 + b_2 r^6 + b_4 r^4 + b_6 r^2 + b_8 = 0. \quad (3.51)$$

Embora esta equação só apresente potências pares de modo que se  $r_1$  é raiz,  $r_2 = -r_1$  também é, os coeficientes dependem de  $\lambda$ , isto é,  $b'_i s = b'_i s(\lambda)$ , de modo que as oito raízes são dependentes dos autovalores  $\lambda$ , os quais são desconhecidos.

O método de Cardano - Tartaglia e o método de Ferrari (LI; HUA, 2007) podem ser usados para determinar as raízes, no entanto devido a dependência dos coeficientes em relação a  $\lambda$ , neste trabalho o cálculo da solução fundamental matricial  $\mathbf{h}(x)$  será obtido através da Transformada de Laplace.

Para mais detalhes sobre o método de Cardano - Tartaglia e o método de Ferrari, veja o Apêndice.

### 3.5.2 Transformada de Laplace

Antes de determinarmos a solução matricial  $\mathbf{h}(x)$ , vejamos a definição da Transformada de Laplace de uma função.

**Definição 3.5.1.** *Seja  $f(t)$  uma função definida nos reais não negativos. Quando a integral*

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt$$

*for convergente, dizemos que  $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$  é a Transformada de Laplace da função*

$f(t)$ .

Com o objetivo de relacionar a solução fundamental matricial associada a viga dupla de Euler-Bernoulli com força axial e a viga simples de Euler-Bernoulli com força axial, vamos supor que

$$\mathbf{h}(x) = \mathbf{h}_{EB}(x) + \mathbf{h}_k(x), \quad (3.52)$$

onde  $\mathbf{h}_{EB}$  é a resposta fundamental matricial correspondente a viga dupla Euler-Bernoulli com força axial sem a constante elástica  $k$ , ou seja,  $\mathbf{h}_{EB}$  satisfaz o PVI

$$\begin{cases} \mathbb{A}\mathbf{h}_{EB}^{(iv)}(x) - \mathbb{P}\mathbf{h}_{EB}''(x) - \lambda^2\mathbb{M}\mathbf{h}_{EB}(x) = \mathbf{0} \\ \mathbf{h}_{EB}(0) = \mathbf{0}, \mathbf{h}'_{EB}(0) = \mathbf{0}, \mathbf{h}''_{EB}(0) = \mathbf{0}, \mathbb{A}\mathbf{h}_{EB}'''(0) = \mathbb{I}, \end{cases} \quad (3.53)$$

e  $\mathbf{h}_k(x)$  dependente dos elementos da camada elástica  $k$  e satisfaz

$$\begin{cases} \mathbb{A}\mathbf{h}_k^{(iv)}(x) - \mathbb{P}\mathbf{h}_k''(x) + (-\lambda^2\mathbb{M} + \mathbb{B})\mathbf{h}_k(x) = -\mathbb{B}\mathbf{h}_{EB}(x), \\ \mathbf{h}_k(0) = \mathbf{0}, \mathbf{h}'_k(0) = \mathbf{0}, \mathbf{h}''_k(0) = \mathbf{0}, \mathbb{A}\mathbf{h}_k'''(0) = \mathbf{0}. \end{cases} \quad (3.54)$$

Observe que, como as matrizes  $\mathbb{A}$ ,  $\mathbb{P}$  e  $\mathbb{M}$ , todas de ordem dois, dadas na eq. (3.53) são matrizes diagonais, segue que a matriz  $\mathbf{h}_{EB}(x)$  também será de ordem dois e diagonal.

Note que o problema dado pela eq. (3.54) é um problema forçado com condições iniciais nulas, cuja solução pode ser expressa pela convolução ou, como usado na teoria de vibrações, pela integral de Duhamel,

$$\begin{aligned} \mathbf{h}_k(x) &= -\int_0^L \mathbf{h}(x-\xi)\mathbb{B}\mathbf{h}_{EB}(\xi)d\xi \\ &= -\mathbf{h}(x) * \mathbb{B}\mathbf{h}_{EB}(x), \end{aligned} \quad (3.55)$$

\* indica a convolução do termo forçado  $-\mathbb{B}\mathbf{h}_{EB}(x)$  com  $\mathbf{h}(x)$ , onde essa última satisfaz

$$\begin{cases} \mathbb{A}\mathbf{h}^{(iv)}(x) - \mathbb{P}\mathbf{h}''(x) + (-\lambda^2\mathbb{M} + \mathbb{B})\mathbf{h}(x) = \mathbf{0} \\ \mathbf{h}(0) = \mathbf{0}, \mathbf{h}'(0) = \mathbf{0}, \mathbf{h}''(0) = \mathbf{0}, \mathbb{A}\mathbf{h}'''(0) = \mathbb{I}, \end{cases} \quad (3.56)$$

sendo que as matrizes  $\mathbb{A}$ ,  $\mathbb{P}$ ,  $\mathbb{M}$  e  $\mathbb{B}$  foram dadas em (3.10) e (3.13), e  $\mathbf{h}(x)$ , a matriz nula e a matriz identidade  $\mathbb{I}$  são todas de ordem dois.

Observe que o P.V.I. dado em (3.56) é equivalente ao P.V.I. dado em (3.33), portanto  $\mathbf{h}(x) = \mathbf{h}(x)$ , onde  $\mathbf{h}(x)$  é a solução fundamental matricial do problema dado em (3.33). Portanto, da eq. (3.55) temos que

$$\mathbf{h}_k(x) = -\mathbf{h}(x) * \mathbb{B}\mathbf{h}_{EB}(x). \quad (3.57)$$

Sendo assim, supondo que  $\mathcal{L}\{\mathbf{h}_k(x)\} = \mathbf{H}_k(s)$ ,  $\mathcal{L}\{\mathbf{h}(x)\} = \mathbf{H}(s)$  e que  $\mathcal{L}\{\mathbf{h}_{EB}(x)\} =$

$\mathbf{H}_{EB}(s)$ , tomando a Transformada de Laplace na eq. (3.57), obtemos

$$\mathbf{H}_k(s) = -\mathbf{H}(s)\mathbb{B}\mathbf{H}_{EB}(s). \quad (3.58)$$

Agora, aplicando também a Transformada de Laplace na eq. (3.52) encontramos que  $\mathbf{H}(s) = \mathbf{H}_{EB}(s) + \mathbf{H}_k(s)$ , e substituindo na eq. (3.58), concluimos que

$$\mathbf{H}(s) = \mathbf{H}_{EB}(s)(\mathbb{I} + \mathbb{B}\mathbf{H}_{EB}(s))^{-1}, \quad (3.59)$$

com  $\mathbf{H}_{EB}$ ,  $\mathbb{B}$  e  $\mathbb{I}$  matrizes de ordem dois. Por Transformada Inversa de Laplace obtemos a solução fundamental matricial correspondente a viga dupla Euler-Bernoulli com força axial,  $\mathbf{h}(x)$ .

No cálculo da matriz inversa  $(\mathbb{I} + \mathbb{B}\mathbf{H}_{EB}(s))^{-1}$  na eq. (3.59), temos que  $\mathbb{B}$  é a matriz que carrega as componentes da camada elástica dada na eq. (3.13) e

$$\mathbf{H}_{EB}(s) = (\mathbb{A}s^4 - \mathbb{P}s^2 - \lambda^2\mathbb{M})^{-1} = \begin{pmatrix} -H_{(EB)_1}(s) & 0 \\ 0 & -H_{(EB)_2}(s) \end{pmatrix}, \quad (3.60)$$

sendo,  $H_{(EB)_i}(s)$ ,  $i = 1, 2$  as transformadas de Laplace de  $h_{(EB)_i}(x)$ ,  $i = 1, 2$  que satisfazem os problemas de valores iniciais

$$\begin{cases} E_i I_i h_{(EB)_i}^{(iv)}(x) - P_i h_{(EB)_i}''(x) + \lambda^2 \rho_i A_i h_{(EB)_i}(x) = 0, \\ h_{(EB)_i}(0) = 0, h'_{(EB)_i}(0) = 0, h''_{(EB)_i}(0) = 0, E_i I_i h'''_{(EB)_i}(0) = 1, \end{cases} \quad (3.61)$$

de modo que

$$H_{(EB)_1}(s) = \frac{1}{E_1 I_1 s^4 - P_1 s^2 + \lambda^2 \rho_1 A_1} \quad \text{e} \quad H_{(EB)_2}(s) = \frac{1}{E_2 I_2 s^4 - P_2 s^2 + \lambda^2 \rho_2 A_2}. \quad (3.62)$$

Observe que  $h_{(EB)_i}(x)$ ,  $i = 1, 2$  na eq. (3.61) são as respostas fundamentais referentes a viga superior e a viga inferior de Euler-Bernoulli com força axial e sem acoplamento elástico, respectivamente. Para mais detalhes, veja o Apêndice.

Considere  $D_i(s) = E_i I_i s^4 - P_i s^2 + \lambda^2 \rho_i A_i$ ,  $i = 1, 2$ , os polinômios associados a viga simples de Euler-Bernoulli com força axial, então da eq. (3.59) segue

$$(\mathbb{I} + \mathbb{B}\mathbf{H}_{EB}(s)) = \begin{pmatrix} \frac{D_1 + k}{D_1} & -\frac{k}{D_2} \\ -\frac{k}{D_1} & \frac{D_2 + k}{D_2} \end{pmatrix} \quad (3.63)$$

e,

$$(\mathbb{I} + \mathbb{B}\mathbf{H}_{EB}(s))^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{D_1(D_2 + k)}{D_1D_2 + k(D_1 + D_2)} & \frac{kD_1}{D_1D_2 + k(D_1 + D_2)} \\ \frac{kD_2}{D_1D_2 + k(D_1 + D_2)} & \frac{D_2(D_1 + k)}{D_1D_2 + k(D_1 + D_2)} \end{pmatrix}. \quad (3.64)$$

Assim

$$\mathbf{H}(s) = \mathbf{H}_{EB}(s)(\mathbb{I} + \mathbb{B}\mathbf{H}_{EB}(s))^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{D_2 + k}{D_1D_2 + k(D_1 + D_2)} & -\frac{k}{D_1D_2 + k(D_1 + D_2)} \\ -\frac{k}{D_1D_2 + k(D_1 + D_2)} & -\frac{D_1 + k}{D_1D_2 + k(D_1 + D_2)} \end{pmatrix}. \quad (3.65)$$

Tomando a transformada inversa de Laplace  $\mathcal{L}^{-1}\{\mathbf{H}(s)\} = \mathbf{h}(x)$  temos a resposta fundamental do sistema de duas vigas Euler-Bernoulli com força axial e acopladas por uma camada elástica.

### 3.6 EQUAÇÃO CARACTERÍSTICA: CASOS CONSIDERADOS

A seguir, obtemos a equação característica para o sistema de viga dupla Euler-Bernoulli com acoplamento elástico e força axial para algumas condições de contorno clássicas e não-clássicas.

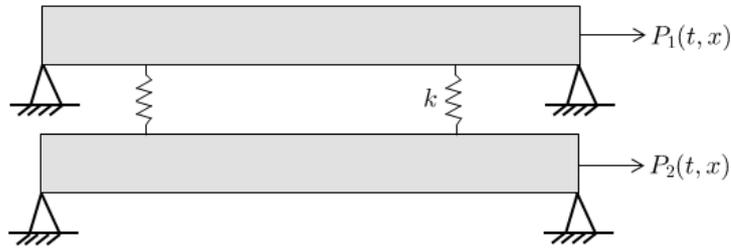
Como exemplo de condições de contorno clássicas, obtemos a equação característica de um sistema de viga dupla biapoada e um sistema de viga dupla fixa-livre, ambos os casos Euler-Bernoulli com camada elástica e força axial. Para a condição de contorno não-clássicas, consideramos um sistema de viga dupla Euler-Bernoulli com acoplamento elástico e força axial, onde a viga superior é fixa-livre e a viga inferior é fixa em  $x = 0$  e com uma massa  $M$  anexada na extremidade  $x = L$ .

#### 3.6.1 Viga dupla Euler-Bernoulli biapoada com acoplamento elástico e força axial

Temos como objetivo a obtenção das frequências naturais e das autofunções (modos de vibrar) através da base dinâmica, para o sistema de viga dupla Euler-Bernoulli, acopladas elasticamente e apoiadas em ambas as extremidades da viga, dada pela Figura 3.2.

As condições de contorno para a viga dupla biapoada Euler-Bernoulli com uma camada elástica são dadas por

Figura 3.2 – Viga dupla biapoiada Euler-Bernoulli com força axial e com uma camada elástica



Fonte: Autor.

- Em  $x = 0$  :

$$w_1(t, 0) = 0, \quad E_1 I_1 \frac{\partial^2 w_1(t, 0)}{\partial x^2} = 0, \quad (3.66)$$

$$w_2(t, 0) = 0, \quad E_2 I_2 \frac{\partial^2 w_2(t, 0)}{\partial x^2} = 0, \quad (3.67)$$

os quais aplicando as condições (3.66) e (3.67) em (3.16), os modos de vibração em  $x = 0$  são dados como

$$V_1(0) = 0, \quad E_1 I_1 V_1''(0) = 0, \quad (3.68)$$

$$V_2(0) = 0, \quad E_2 I_2 V_2''(0) = 0. \quad (3.69)$$

- Em  $x = L$  :

$$w_1(t, L) = 0, \quad E_1 I_1 \frac{\partial^2 w_1(t, L)}{\partial x^2} = 0, \quad (3.70)$$

$$w_2(t, L) = 0, \quad E_2 I_2 \frac{\partial^2 w_2(t, L)}{\partial x^2} = 0, \quad (3.71)$$

onde aplicando as condições (3.70) e (3.71) em (3.16), temos que em  $x = L$  os modos de vibração são

$$V_1(L) = 0, \quad E_1 I_1 V_1''(L) = 0, \quad (3.72)$$

$$V_2(L) = 0, \quad E_2 I_2 V_2''(L) = 0. \quad (3.73)$$

A matriz abaixo carrega as informações das constantes de rigidez de flexão é descrita por

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} -E_1 I_1 & 0 \\ 0 & -E_2 I_2 \end{pmatrix}, \quad (3.74)$$

a qual é uma matriz de ordem dois, conforme a equação (3.13).

Matricialmente, podemos escrever (3.66), (3.67), (3.70) e (3.71) da seguinte forma

$$\mathbf{w}(t, 0) = -\mathbb{A} \frac{\partial^2 \mathbf{w}(t, 0)}{\partial x^2} = \mathbf{0}, \quad (3.75)$$

$$\mathbf{w}(t, L) = -\mathbb{A} \frac{\partial^2 \mathbf{w}(t, L)}{\partial x^2} = \mathbf{0}. \quad (3.76)$$

Da mesma forma, podemos escrever matricialmente (3.68), (3.69), (3.72) e (3.73) e aplicando as condições (3.75) e (3.76) em (3.16), obtemos

$$\mathbb{V}(0) = -\mathbb{A} \mathbb{V}''(0) = \mathbf{0}, \quad (3.77)$$

$$\mathbb{V}(L) = -\mathbb{A} \mathbb{V}''(L) = \mathbf{0}, \quad (3.78)$$

com  $\mathbf{0}$  vetor nulo de ordem  $(2 \times 1)$ .

Aplicando as condições de contorno (3.77) em (3.32) e usando (3.33), obtemos

$$e_2 = e_4 = \mathbf{0}, \quad (3.79)$$

onde  $\mathbf{0}$  vetor nulo de ordem  $(2 \times 1)$ .

Desta forma, os modos de vibração  $\mathbb{V}(x)$  são descritos como

$$\mathbb{V}(x) = \mathbf{h}(x)e_1 + \mathbf{h}''(x)e_3. \quad (3.80)$$

Utilizando as condições de contorno dadas em (3.77) em (3.19), resultará nas seguintes matrizes,

$$\mathbb{A}_1^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{B}_1^0 = \mathbb{C}_1^0 = \mathbb{D}_1^0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.81)$$

$$\mathbb{A}_2^0 = \mathbb{B}_2^0 = \mathbb{D}_2^0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{C}_2^0 = \begin{pmatrix} E_1 I_1 & 0 \\ 0 & E_2 I_2 \end{pmatrix}. \quad (3.82)$$

Da mesma maneira, utilizando as condições de contorno dadas em (3.78) em (3.20), resultará nas matrizes,

$$\mathbb{A}_1^L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{B}_1^L = \mathbb{C}_1^L = \mathbb{D}_1^L = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.83)$$

$$\mathbb{A}_2^L = \mathbb{B}_2^L = \mathbb{D}_2^L = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{C}_2^L = \begin{pmatrix} E_1 I_1 & 0 \\ 0 & E_2 I_2 \end{pmatrix}. \quad (3.84)$$

Com isso, a matriz  $\mathcal{B}$  que é composta pelas condições de contorno em  $x = 0$  e  $x = L$  é dada por

$$\mathcal{B} = \begin{pmatrix} \mathcal{B}^0 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathcal{B}^L \end{pmatrix}, \quad \text{com } \mathcal{B}^0 = \begin{pmatrix} \mathbb{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mathbb{A} & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{B}^L = \begin{pmatrix} \mathbb{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mathbb{A} & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad (3.85)$$

$$\mathcal{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & E_1 I_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_2 I_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_1 I_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_2 I_2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.86)$$

onde na matriz  $\mathcal{B}$ ,  $\mathbf{0}$  é a matriz nula de ordem  $(4 \times 8)$  e em  $\mathcal{B}^0$  e  $\mathcal{B}^L$  são de ordem dois,  $\mathbb{I}$  matriz identidade e  $\mathbb{A}$  matriz de rigidez de flexão também de ordem dois.

De (3.39), (3.79) e (3.86), temos que o sistema

$$\mathcal{B}\mathbb{H}_{0,L}\mathbf{e} = \mathbf{0}, \quad (3.87)$$

onde  $\mathbf{0}$  vetor de ordem  $(4 \times 1)$  resulta em

$$\begin{pmatrix} \mathbf{h}(L) & \mathbf{h}''(L) \\ -\mathbb{A}\mathbf{h}''(L) & -\mathbb{A}\mathbf{h}^{(iv)}(L) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (3.88)$$

Note que, para uma solução não trivial de  $e_1$  e  $e_3$ , impomos que

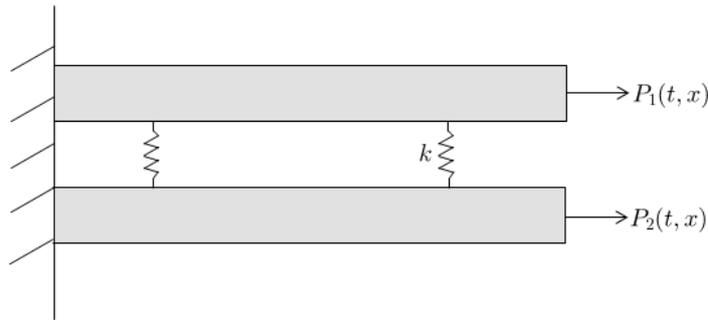
$$\det \begin{pmatrix} \mathbf{h}(L) & \mathbf{h}''(L) \\ -\mathbb{A}\mathbf{h}''(L) & -\mathbb{A}\mathbf{h}^{(iv)}(L) \end{pmatrix} = 0, \quad (3.89)$$

que é a equação característica para viga dupla Euler-Bernoulli biapoiada com força axial e acoplada por uma camada elástica.

### 3.6.2 Viga dupla fixa-livre Euler-Bernoulli com acoplamento elástico e com força axial

Considere um sistema de viga dupla fixa-livre Euler-Bernoulli com força axial e com acoplamento elástico, dada pela Figura 3.3.

Figura 3.3 – Viga dupla fixa-livre Euler-Bernoulli com força axial e com uma camada elástica



Fonte: Autor.

As condições de contorno para viga dupla fixa-livre Euler-Bernoulli com acoplamento elástico são dadas por

- Em  $x = 0$  :

$$w_1(t, 0) = 0, \quad \frac{\partial w_1(t, 0)}{\partial x} = 0, \quad (3.90)$$

$$w_2(t, 0) = 0, \quad \frac{\partial w_2(t, 0)}{\partial x} = 0. \quad (3.91)$$

Aplicando as condições (3.90) e (3.91) em (3.16), os modos de vibração em  $x = 0$  satisfazem

$$V_1(0) = 0, \quad V_1'(0) = 0, \quad (3.92)$$

$$V_2(0) = 0, \quad V_2'(0) = 0. \quad (3.93)$$

- Em  $x = L$  :

$$E_1 I_1 \frac{\partial^2 w_1(t, L)}{\partial x^2} = 0, \quad E_2 I_2 \frac{\partial^2 w_2(t, L)}{\partial x^2} = 0, \quad (3.94)$$

$$E_1 I_1 \frac{\partial^3 w_1(t, L)}{\partial x^3} - P_1 \frac{\partial w_1(t, L)}{\partial x} = 0, \quad E_2 I_2 \frac{\partial^3 w_2(t, L)}{\partial x^3} - P_2 \frac{\partial w_2(t, L)}{\partial x} = 0. \quad (3.95)$$

Aplicando as condições (3.94) e (3.95) em (3.16), temos que em  $x = L$  os modos de vibração satisfazem

$$E_1 I_1 V_1''(L) = 0, \quad E_2 I_2 V_2''(L) = 0, \quad (3.96)$$

$$E_1 I_1 V_1'''(L) - P_1 V_1'(L) = 0, \quad E_2 I_2 V_2'''(L) - P_2 V_2'(L) = 0. \quad (3.97)$$

Matricialmente, podemos escrever (3.90), (3.91), (3.94) e (3.95) da seguinte forma

$$\mathbf{w}(t, 0) = \frac{\partial \mathbf{w}(t, 0)}{\partial x} = \mathbf{0}, \quad (3.98)$$

$$-\mathbb{A} \frac{\partial^2 \mathbf{w}(t, L)}{\partial x^2} = \mathbf{0}, \quad (3.99)$$

$$-\mathbb{A} \frac{\partial^3 \mathbf{w}(t, L)}{\partial x^3} + \mathbb{P} \frac{\partial \mathbf{w}(t, L)}{\partial x} = \mathbf{0}. \quad (3.100)$$

Da mesma forma, podemos escrever matricialmente (3.92), (3.93), (3.96) e (3.97) e aplicando as condições (3.98), (3.99) e (3.100) em (3.16), obtém-se

$$\mathbb{V}(0) = \mathbb{V}'(0) = \mathbf{0}, \quad (3.101)$$

$$-\mathbb{A} \mathbb{V}''(L) = \mathbf{0}, \quad (3.102)$$

$$-\mathbb{A} \mathbb{V}'''(L) + \mathbb{P} \mathbb{V}'(L) = \mathbf{0}, \quad (3.103)$$

com  $\mathbf{0}$  vetor nulo ( $2 \times 1$ ).

Aplicando as condições de contorno (3.101) em (3.32) e usando (3.33), obtemos

$$e_3 = e_4 = \mathbf{0}, \quad (3.104)$$

onde  $\mathbf{0}$  vetor nulo de ordem ( $2 \times 1$ ).

Desta forma, os modos de vibração  $\mathbb{V}(x)$  são descritos como

$$\mathbb{V}(x) = \mathbf{h}(x)e_1 + \mathbf{h}'(x)e_2. \quad (3.105)$$

Utilizando as condições de contorno dadas em (3.101)-(3.103), resultará que a matriz  $\mathcal{B}$ , dada em (3.28), torna-se

$$\mathcal{B} = \begin{pmatrix} \mathcal{B}^0 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathcal{B}^L \end{pmatrix}, \quad \text{com } \mathcal{B}^0 = \begin{pmatrix} \mathbb{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbb{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{B}^L = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mathbb{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbb{P} & \mathbf{0} & -\mathbb{A} \end{pmatrix}, \quad (3.106)$$

$$\mathcal{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_1 I_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_2 I_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -P_1 & 0 & 0 & 0 & E_1 I_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -P_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_2 I_2 \end{pmatrix}, \quad (3.107)$$

onde na matriz  $\mathcal{B}$ ,  $\mathbf{0}$  é a matriz nula de ordem ( $4 \times 8$ ) e em  $\mathcal{B}^0$  e  $\mathcal{B}^L$  são de ordem dois,  $\mathbb{I}$  matriz identidade,  $\mathbb{P}$  matriz que carrega as forças axiais e  $\mathbb{A}$  matriz de rigidez de flexão, todas também de ordem dois.

De (3.39), (3.104) e (3.107), temos que o sistema

$$\mathcal{B}\mathbb{H}_{0,L}\mathbf{e} = \mathbf{0}, \quad (3.108)$$

onde  $\mathbf{0}$  vetor de ordem  $(4 \times 1)$  resulta em

$$\begin{pmatrix} -\mathbb{A}\mathbf{h}''(L) & -\mathbb{A}\mathbf{h}'''(L) \\ \mathbb{P}\mathbf{h}'(L) - \mathbb{A}\mathbf{h}'''(L) & \mathbb{P}\mathbf{h}''(L) - \mathbb{A}\mathbf{h}^{(iv)}(L) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (3.109)$$

Note que, para uma solução não trivial de  $e_1$  e  $e_2$ , impomos que

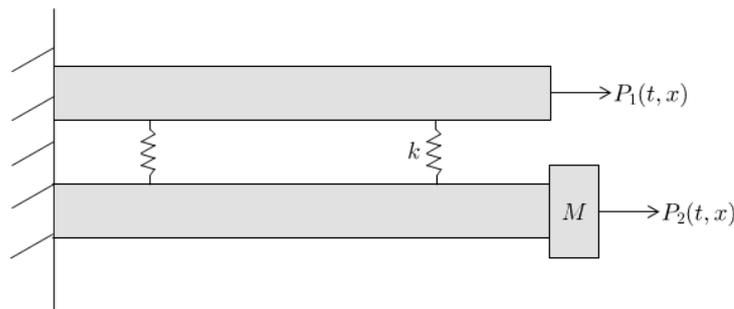
$$\det \begin{pmatrix} -\mathbb{A}\mathbf{h}''(L) & -\mathbb{A}\mathbf{h}'''(L) \\ \mathbb{P}\mathbf{h}'(L) - \mathbb{A}\mathbf{h}'''(L) & \mathbb{P}\mathbf{h}''(L) - \mathbb{A}\mathbf{h}^{(iv)}(L) \end{pmatrix} = 0, \quad (3.110)$$

que é a equação característica para a viga dupla fixa-livre Euler-Bernoulli com camada elástica e força axial.

### 3.6.3 Viga dupla Euler-Bernoulli com uma camada elástica, com força axial e condição de contorno não clássica

Considere um sistema de viga dupla Euler-Bernoulli com uma camada elástica, com força axial e restrita. O sistema de viga dupla considerado tem a viga superior fixa-livre e a viga inferior fixa em  $x = 0$  e na extremidade  $x = L$  possui uma massa  $M$  anexada, conforme Figura 3.4.

Figura 3.4 – Viga dupla Euler-Bernoulli com força axial, com uma camada elástica e com massa anexada na viga inferior em  $x = L$



Fonte: Autor.

Para a viga superior, vamos considerar as condições de contorno em  $x = 0$  e  $x = L$ , dadas por

$$w_1(t, 0) = \frac{\partial w_1(t, 0)}{\partial x} = 0, \quad (3.111)$$

$$E_1 I_1 \frac{\partial^2 w_1(t, L)}{\partial x^2} = 0, \quad (3.112)$$

$$E_1 I_1 \frac{\partial^3 w_1(t, L)}{\partial x^3} - P_1 \frac{\partial w_1(t, L)}{\partial x} = 0. \quad (3.113)$$

Agora, para a viga inferior, as condições de contorno para a viga fixa-restrita com massa  $M$  anexada em  $x = L$  são, (RAO, 2007),

$$w_2(t, 0) = \frac{\partial w_2(t, 0)}{\partial x} = 0, \quad (3.114)$$

$$E_2 I_2 \frac{\partial^2 w_2(t, L)}{\partial x^2} = 0, \quad (3.115)$$

$$E_2 I_2 \frac{\partial^3 w_2(t, L)}{\partial x^3} - P_2 \frac{\partial w_2(t, L)}{\partial x} = M \frac{\partial^2 w_2(t, L)}{\partial t^2}. \quad (3.116)$$

Aplicando as condições (3.111)-(3.113) em (3.16), obtemos

$$V_1(0) = V_1'(0) = 0, \quad (3.117)$$

$$E_1 I_1 V_1''(L) = 0, \quad (3.118)$$

$$E_1 I_1 V_1'''(L) - P_1 V_1'(L) = 0. \quad (3.119)$$

Da mesma forma, aplicando as condições (3.114)-(3.116) em (3.16), obtemos

$$V_2(0) = V_2'(0) = 0, \quad (3.120)$$

$$E_2 I_2 V_2''(L) = 0, \quad (3.121)$$

$$E_2 I_2 V_2'''(L) - P_2 V_2'(L) - \lambda^2 M V_2(L) = 0. \quad (3.122)$$

Pelo fato do sistema de vigas ser fixo em  $x = 0$ , (3.101) e pelas condições iniciais dadas em (3.33), temos que os modos de vibração  $\mathbb{V}(x)$  são dados por

$$\mathbb{V}(x) = \mathbf{h}(x)e_1 + \mathbf{h}'(x)e_2. \quad (3.123)$$

Utilizando as condições de contorno dadas em (3.117) e (3.120) em (3.19), resultará nas seguintes matrizes,

$$\mathbb{A}_1^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{B}_1^0 = \mathbb{C}_1^0 = \mathbb{D}_1^0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.124)$$

$$\mathbb{A}_2^0 = \mathbb{C}_2^0 = \mathbb{D}_2^0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{B}_2^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.125)$$

Da mesma maneira, utilizando as condições de contorno dadas em (3.118), (3.119), (3.121) e (3.122) em (3.20), resultará nas matrizes,

$$\mathbb{A}_1^L = \mathbb{B}_1^L = \mathbb{D}_1^L = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{C}_1^L = \begin{pmatrix} E_1 I_1 & 0 \\ 0 & E_2 I_2 \end{pmatrix}, \quad (3.126)$$

$$\mathbb{A}_2^L = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\lambda^2 M \end{pmatrix}, \quad \mathbb{B}_2^L = \begin{pmatrix} -P_1 & 0 \\ 0 & -P_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{C}_2^L = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{D}_2^L = \begin{pmatrix} E_1 I_1 & 0 \\ 0 & E_2 I_2 \end{pmatrix}. \quad (3.127)$$

Com isso, a matriz  $\mathcal{B}$  que é composta pelas condições de contorno em  $x = 0$  e  $x = L$  é dada por,

$$\mathcal{B} = \begin{pmatrix} \mathcal{B}^0 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathcal{B}^L \end{pmatrix}, \quad \text{com } \mathcal{B}^0 = \begin{pmatrix} \mathbb{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbb{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad (3.128)$$

onde, em  $x = 0$

$$\mathcal{B}^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.129)$$

na matriz  $\mathcal{B}$ ,  $\mathbf{0}$  é a matriz nula de ordem  $(4 \times 8)$  e em  $\mathcal{B}^0$  é de ordem dois, dadas em (3.129).

Em  $x = L$ , temos a matriz

$$\mathcal{B}^L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & E_1 I_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_2 I_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -P_1 & 0 & 0 & 0 & E_1 I_1 & 0 \\ 0 & -\lambda^2 M & 0 & -P_2 & 0 & 0 & 0 & E_2 I_2 \end{pmatrix}. \quad (3.130)$$

A matriz  $\mathcal{B}$  de ordem  $(8 \times 16)$  completa, ficará

$$\mathcal{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_1 I_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_2 I_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -P_1 & 0 & 0 & 0 & E_1 I_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda^2 M & 0 & -P_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_2 I_2 \end{pmatrix}. \quad (3.131)$$

De (3.39), (3.104) e (3.131), temos que o sistema

$$\mathcal{B}\mathbb{H}_{0,L}\mathbf{e} = \mathbf{0}, \quad (3.132)$$

onde os vetores  $\mathbf{0}$  e  $\mathbf{e}$  são de ordem  $(8 \times 1)$  e  $\mathbb{H}_{0,L}$  matriz de ordem  $(16 \times 8)$ , resulta em

$$\begin{pmatrix} -\mathbb{A}\mathbf{h}''(L) & -\mathbb{A}\mathbf{h}'''(L) \\ \mathbb{A}_2^L \mathbf{h}(L) + \mathbb{P}\mathbf{h}'(L) - \mathbb{A}\mathbf{h}'''(L) & \mathbb{A}_2^L \mathbf{h}'(L) + \mathbb{P}\mathbf{h}''(L) - \mathbb{A}\mathbf{h}^{(iv)}(L) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (3.133)$$

Note que, para uma solução não trivial de  $e_1$  e  $e_2$ , impomos que

$$\det \begin{pmatrix} -\mathbb{A}\mathbf{h}''(L) & -\mathbb{A}\mathbf{h}'''(L) \\ \mathbb{A}_2^L \mathbf{h}(L) + \mathbb{P}\mathbf{h}'(L) - \mathbb{A}\mathbf{h}'''(L) & \mathbb{A}_2^L \mathbf{h}'(L) + \mathbb{P}\mathbf{h}''(L) - \mathbb{A}\mathbf{h}^{(iv)}(L) \end{pmatrix} = 0, \quad (3.134)$$

que é a equação característica para viga dupla Euler-Bernoulli com camada elástica e força axial. A viga superior é fixa-livre e a viga inferior é fixa em  $x = 0$  e com massa  $M$  anexada na extremidade  $x = L$ .

## 4 SIMULAÇÕES

Nesta seção, vamos apresentar simulações para um sistema de viga dupla Euler-Bernoulli com uma camada elástica e força axial para condições de contorno clássicas e não clássicas. Para efeitos de comparação entre as frequências e os modos de vibração, obtivemos as frequências naturais e apresentamos os gráficos dos respectivos modos de vibração também para vigas simples com força axial.

As simulações foram realizadas para os seguintes condições de contorno: Para condições de contorno clássicas consideramos o sistema de viga dupla biapoada (AA-AA) e fixa-livre (FL-FL), ambas Euler-Bernoulli com força axial e camada elástica; Como condição de contorno não-clássica, consideramos um sistema de viga dupla sendo a viga superior fixa-livre e a viga inferior fixa na extremidade  $x = 0$  e com uma massa  $M$  anexada na extremidade  $x = L$ , para diversos valores da massa  $M$ . Finalmente, realizamos simulações para diversos valores da camada elástica e da força axial com o intuito de observar o efeito desses parâmetros nas frequências naturais.

As simulações foram realizadas no software Maple 16.

Considere, nas simulações, duas vigas iguais e denotamos  $\rho = \rho_1 = \rho_2$ ,  $A = A_1 = A_2$ ,  $m = \rho A$ ,  $E = E_1 = E_2$ ,  $I = I_1 = I_2$  e  $P = P_1 = P_2$ . Assim  $D_1(s) = D_2(s) = D(s) = EIs^4 - Ps^2 + \lambda^2 m$ .

A matriz dada na eq. (3.65) é

$$\mathbf{H}(s) = \mathbf{H}_{EB}(s)(\mathbb{I} + \mathbb{B}\mathbf{H}_{EB}(s))^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{D+k}{D(D+2k)} & -\frac{k}{D(D+2k)} \\ -\frac{k}{D(D+2k)} & -\frac{D+k}{D(D+2k)} \end{pmatrix}. \quad (4.1)$$

Observe que a matriz  $\mathbf{H}(s)$  é uma matriz simétrica com os elementos da diagonal principal iguais, isto é,

$$\mathbf{H}(s) = \begin{pmatrix} H_{11}(s) & H_{12}(s) \\ H_{12}(s) & H_{11}(s) \end{pmatrix}, \quad (4.2)$$

onde

$$H_{11}(s) = -\frac{EIs^4 - Ps^2 + \lambda^2 m + k}{(EIs^4 - Ps^2 + \lambda^2 m)(EIs^4 - Ps^2 + \lambda^2 m + 2k)}, \quad (4.3)$$

$$H_{12}(s) = -\frac{k}{(EIs^4 - Ps^2 + \lambda^2 m)(EIs^4 - Ps^2 + \lambda^2 m + 2k)}. \quad (4.4)$$

De (3.60) para vigas iguais, temos

$$\mathbf{H}_{EB}(s) = \begin{pmatrix} -H_{EB}(s) & 0 \\ 0 & -H_{EB}(s) \end{pmatrix}, \quad (4.5)$$

onde

$$h_{EB}(s) = \frac{1}{EI s^4 - P s^2 + \lambda^2 m} = \frac{1}{D(s)} \quad (4.6)$$

e  $D(s) = EI s^4 - P s^2 + \lambda^2 m$  é o polinômio associado a viga simples de Euler-Bernoulli com força axial cujas raízes são dependentes dos autovalores  $\lambda$ . Para  $\lambda = i\omega$ , onde  $i$  é a unidade imaginária e  $\omega$  é a frequência natural, este polinômio possui duas raízes reais e duas imaginárias puras, que são  $\pm\epsilon$ ,  $\pm i\delta$ . Logo podemos escrever

$$D(s) = EI(s - \epsilon)(s + \epsilon)(s^2 + \delta^2), \quad (4.7)$$

onde

$$\epsilon = \sqrt{\frac{P + \sqrt{-4m\lambda^2 EI + P^2}}{2EI}} \quad (4.8)$$

e

$$\delta = \sqrt{-\frac{P - \sqrt{-4m\lambda^2 EI + P^2}}{2EI}}. \quad (4.9)$$

Para  $Q(s) = EI s^4 - P s^2 + \lambda^2 m + 2k$  temos as raízes  $\pm\alpha$ ,  $\pm\beta$  podemos escrever

$$Q(s) = EI(s - \alpha)(s + \alpha)(s - \beta)(s + \beta), \quad (4.10)$$

onde

$$\alpha = \sqrt{\frac{P + \sqrt{-4EI(m\lambda^2 + 2k) + P^2}}{2EI}} \quad (4.11)$$

e

$$\beta = \sqrt{\frac{P - \sqrt{-4EI(m\lambda^2 + 2k) + P^2}}{2EI}}. \quad (4.12)$$

Tomando a Transformada de Laplace Inversa na eq. (4.2), cujas componentes são dadas nas eqs. (4.3) e (4.4), obtemos a solução fundamental matricial para o sistema de dupla viga Euler-Bernoulli acoplado elasticamente e com força axial,

$$\mathbf{h}(x) = \begin{pmatrix} h_{11}(x) & h_{12}(x) \\ h_{12}(x) & h_{11}(x) \end{pmatrix}, \quad (4.13)$$

onde

$$h_{11}(x) = \frac{1}{2EI} \left( \frac{\alpha \sinh(\beta x) - \beta \sinh(\alpha x)}{\alpha\beta(\alpha^2 - \beta^2)} + \frac{\delta \sinh(\epsilon x) - \epsilon \sinh(\delta x)}{\epsilon\delta(-\epsilon^2 + \delta^2)} \right), \quad (4.14)$$

e

$$h_{12}(x) = \frac{1}{2EI} \left( \frac{-\alpha \sinh(\beta x) + \beta \sinh(\alpha x)}{\alpha\beta(\alpha^2 - \beta^2)} + \frac{\delta \sinh(\epsilon x) - \epsilon \sinh(\delta x)}{\epsilon\delta(-\epsilon^2 + \delta^2)} \right). \quad (4.15)$$

Nas simulações, foram utilizados os parâmetros dados na Tabela 4.1. Para a força axial foi considerado  $P = \frac{EI}{L^2} F_0$  (N),  $F_0 = 10$ , uma constante. (MAO; WATTANASAKULPONG, 2015; ZHANG; LU; MA, 2008).

As frequências naturais ( $\omega_j$ ), foram obtidas resolvendo a equação característica associada a cada condição de contorno. Para melhor entendimento, para os modos de vibração,  $\mathbb{V}(x)$ , da viga dupla usamos a notação  $V_{ij}(x)$ , onde  $i = 1, 2$  indica a viga superior e inferior, respectivamente, e  $j = 1, 2, 3, \dots$  o modo associado a frequência  $\omega_j$ .

Tabela 4.1 – Parâmetros utilizados nas simulações

| Parâmetro                         | Símbolo | Valor Numérico     | Unidade            |
|-----------------------------------|---------|--------------------|--------------------|
| Comprimento da viga               | $L$     | 10                 | m                  |
| Constante no acoplamento elástico | $k$     | $1 \times 10^5$    | $\text{Nm}^{-2}$   |
| Densidade linear de massa         | $\rho$  | $2 \times 10^3$    | $\text{kg m}^{-3}$ |
| Momento de inércia                | $I$     | $4 \times 10^{-4}$ | $\text{m}^4$       |
| Módulo de Elasticidade de Young   | $E$     | $1 \times 10^{10}$ | $\text{Nm}^{-2}$   |
| Área da seção transversal         | $A$     | $5 \times 10^{-2}$ | $\text{m}^2$       |

Fonte: Dados da tabela (MAO; WATTANASAKULPONG, 2015).

#### 4.1 VIGA SIMPLES BIAPOIADA COM FORÇA AXIAL (AA) E VIGA DUPLA BIAPOIADA COM FORÇA AXIAL (AA-AA)

As simulações realizadas nesta seção foram para uma viga simples (AA) e para um sistema de viga dupla (AA-AA) ambas Euler-Bernoulli, com força axial e biapoizadas.

A equação característica para a viga simples encontra-se no apêndice Eq. (6.31). Para a viga dupla é dada pela Eq. (3.89). Na Tabela 4.2, estão listadas as frequências naturais para estes casos. As primeiras frequências de cada par da viga dupla se repetem na viga simples, como podemos observar em negrito na tabela. Esse padrão continua a se repetir para as frequências mais altas.

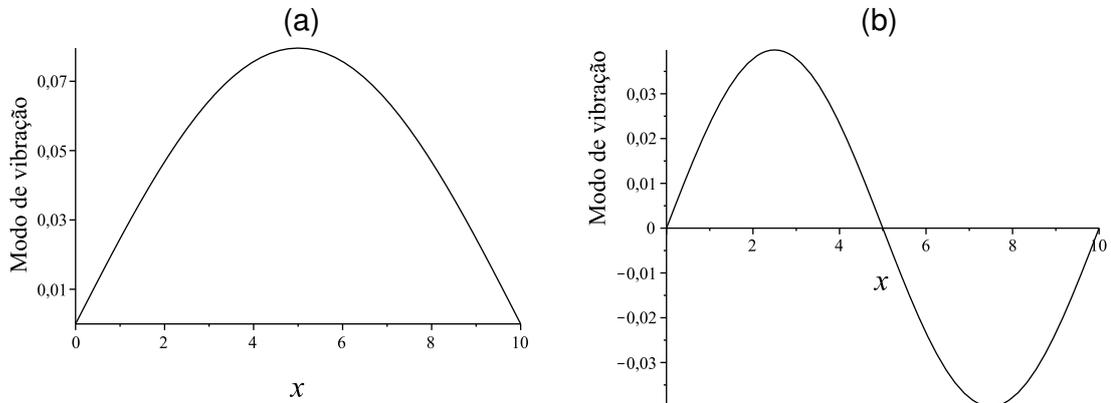
Tabela 4.2 – Frequências naturais da viga biapoiada Euler-Bernoulli com força axial e viga dupla biapoiada Euler-Bernoulli com acoplamento elástico e força axial

|            | Viga biapoiada (AA)    | Viga dupla biapoiada (AA-AA) |
|------------|------------------------|------------------------------|
| $\omega_1$ | <b>28,00750</b> rad/s  | <b>28,00750</b> rad/s        |
| $\omega_2$ | <b>88,39297</b> rad/s  | 52,76760 rad/s               |
| $\omega_3$ | <b>187,38624</b> rad/s | <b>88,39297</b> rad/s        |
| $\omega_4$ | <b>325,67384</b> rad/s | 99,06219 rad/s               |
| $\omega_5$ | 503,38090 rad/s        | <b>187,38624</b> rad/s       |
| $\omega_6$ | 720,54212 rad/s        | 192,64891 rad/s              |
| $\omega_7$ | 977,17006 rad/s        | <b>325,67384</b> rad/s       |
| $\omega_8$ | 1273,27009 rad/s       | 328,73006 rad/s              |

Fonte: Autor.

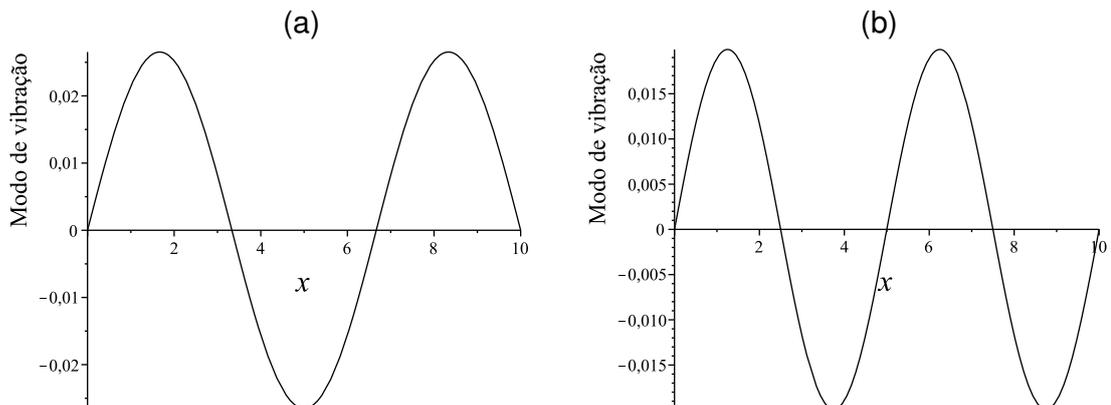
Nas Figura 4.1 e Figura 4.2, temos os quatro primeiros modos referentes as quatro primeiras frequências (Tabela 4.2) de uma viga biapoiada com força axial.

Figura 4.1 – Modos de vibração de uma viga biapoada Euler-Bernoulli com força axial (AA). (a) Primeiro modo de vibração (b) Segundo modo de vibração



Fonte: Autor.

Figura 4.2 – Modos de vibração de uma viga biapoada Euler-Bernoulli com força axial (AA). (a) Terceiro modo de vibração (b) Quarto modo de vibração



Fonte: Autor.

Nas Figuras 4.3 a 4.10 apresentamos os oito primeiros modos de vibração correspondentes as oito primeiras frequências naturais,  $\omega_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, 8$ . dadas na Tabela 4.2.

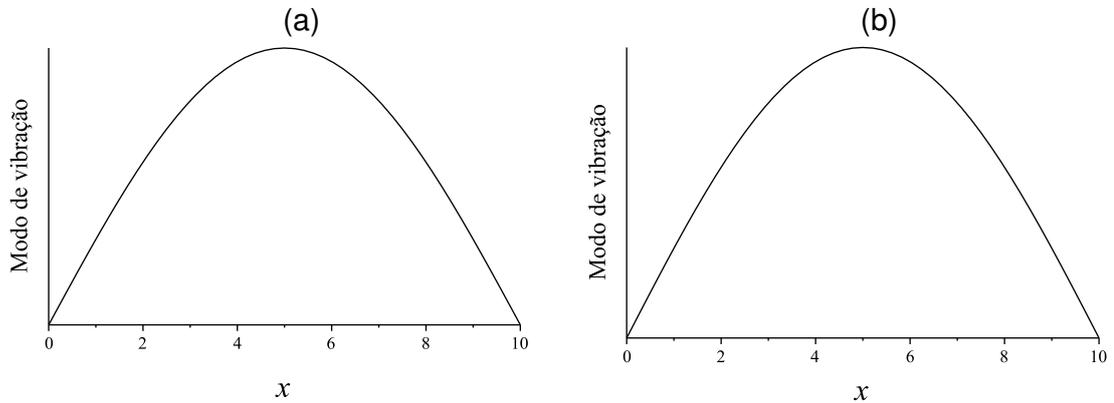
Observe que para a primeira frequência  $\omega_1$ , Figura 4.3, temos o mesmo comportamento dos modos de vibração, tanto para a viga superior quanto para a viga inferior, o qual denominamos de modos síncronos. Isso também ocorre para as frequências  $\omega_3$  (Figura 4.5),  $\omega_5$  (Figura 4.7) e  $\omega_7$  (Figura 4.9).

Agora, para as frequências  $\omega_2$  (Figura 4.4),  $\omega_4$  (Figura 4.6),  $\omega_6$  (Figura 4.8) e  $\omega_8$  (Figura 4.10), comparando os modos da viga superior com os modos da viga inferior, perceberemos que ocorre uma reflexão em torno do eixo  $x$ , neste caso dizemos que os modos de vibração são assíncronos.

Note também que em relação ao número de nós em cada modo de vibração, o sistema de viga dupla Euler Bernoulli com acoplamento elástico e força axial preserva o comportamento dos modos de vibração da viga simples biapoiada e viga dupla biapoiada com acoplamento elástico e sem força axial, isto é: Para o primeiro par de frequência,  $\omega_1$  (Figura 4.3) e  $\omega_2$  (Figura 4.4) os modos de vibração não apresentam nenhum nó ao longo da viga, tanto superior quanto da viga inferior. Para  $\omega_3$  (Figura 4.5) e  $\omega_4$  (Figura 4.6) os modos de vibração geram um nó; Para  $\omega_5$  (Figura 4.7) e  $\omega_6$  (Figura 4.8) os modos de vibração geram dois nós; E para  $\omega_7$  (Figura 4.9) e  $\omega_8$  (Figura 4.10) os modos de vibração geram três nós.

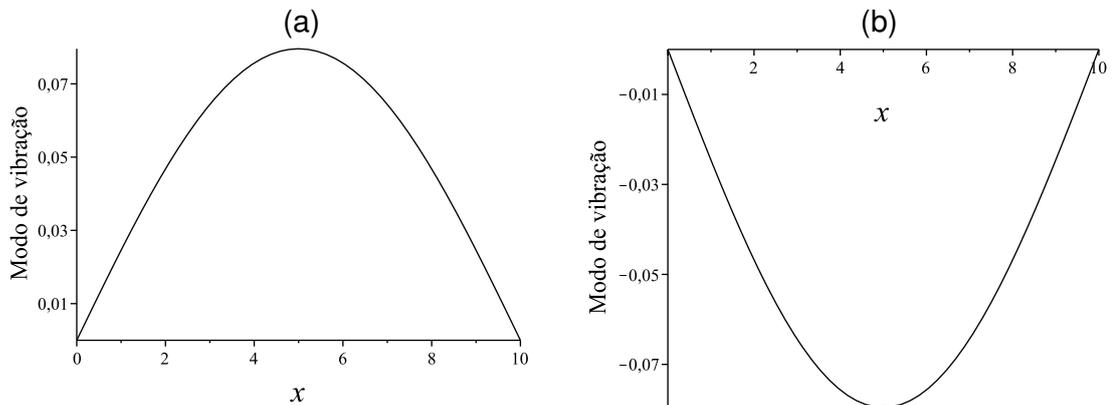
A partir destas observações, vemos que cada par de frequências  $(\omega_j, \omega_{j+1})$ ,  $j = 1, 3, 5, \dots$  geram  $(j - 1)/2$  nós nos respectivos modos de vibração.

Figura 4.3 – Primeiro modo de vibração da viga dupla com força axial apoiada nas extremidades (AA-AA). (a) viga superior ( $V_{11}$ ), (b) Viga inferior ( $V_{21}$ ).



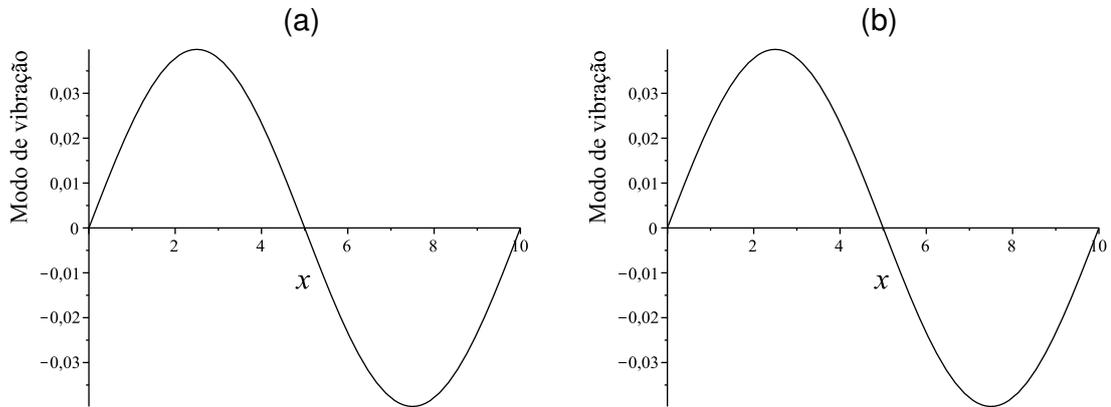
Fonte: Autor.

Figura 4.4 – Segundo modo de vibração da viga dupla com força axial apoiada nas extremidades (AA-AA). (a) viga superior ( $V_{12}$ ), (b) Viga inferior ( $V_{22}$ ).



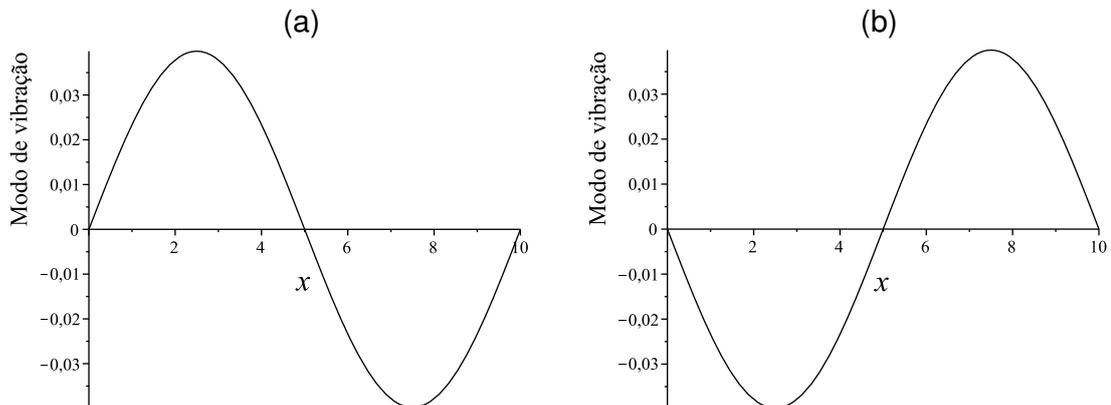
Fonte: Autor.

Figura 4.5 – Terceiro modo de vibração da viga dupla com força axial apoiada nas extremidades (AA-AA). (a) viga superior ( $V_{13}$ ), (b) Viga inferior ( $V_{23}$ ).



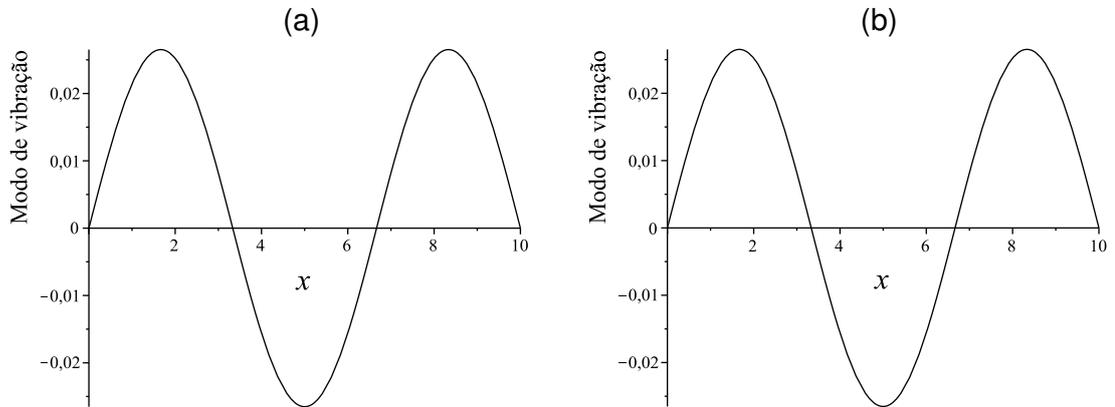
Fonte: Autor.

Figura 4.6 – Quarto modo de vibração da viga dupla com força axial apoiada nas extremidades (AA-AA). (a) viga superior ( $V_{14}$ ), (b) Viga inferior ( $V_{24}$ ).



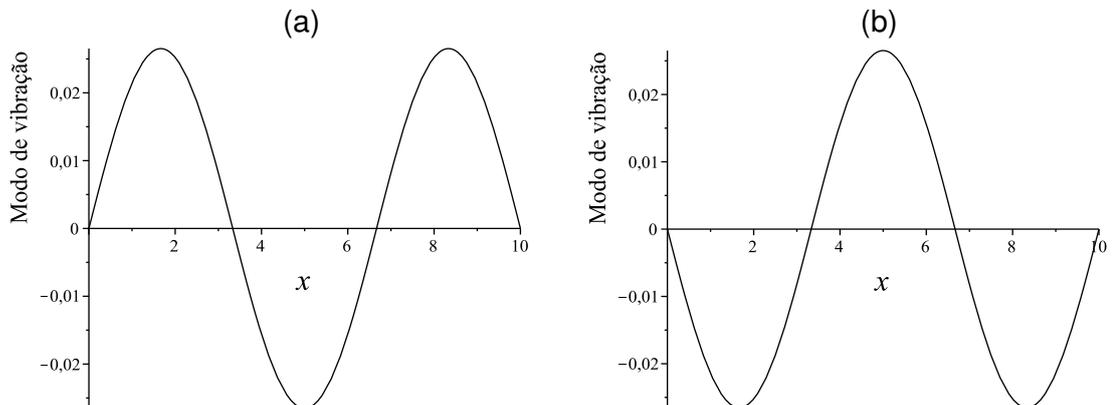
Fonte: Autor.

Figura 4.7 – Quinto modo de vibração da viga dupla com força axial apoiada nas extremidades (AA-AA). (a) viga superior ( $V_{15}$ ), (b) Viga inferior ( $V_{25}$ ).



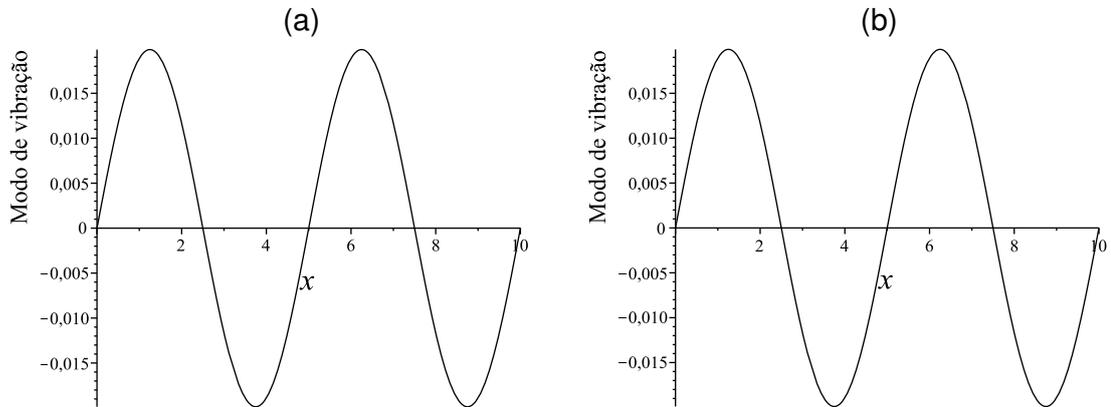
Fonte: Autor.

Figura 4.8 – Sexto modo de vibração da viga dupla com força axial apoiada nas extremidades (AA-AA). (a) viga superior ( $V_{16}$ ), (b) Viga inferior ( $V_{26}$ ).



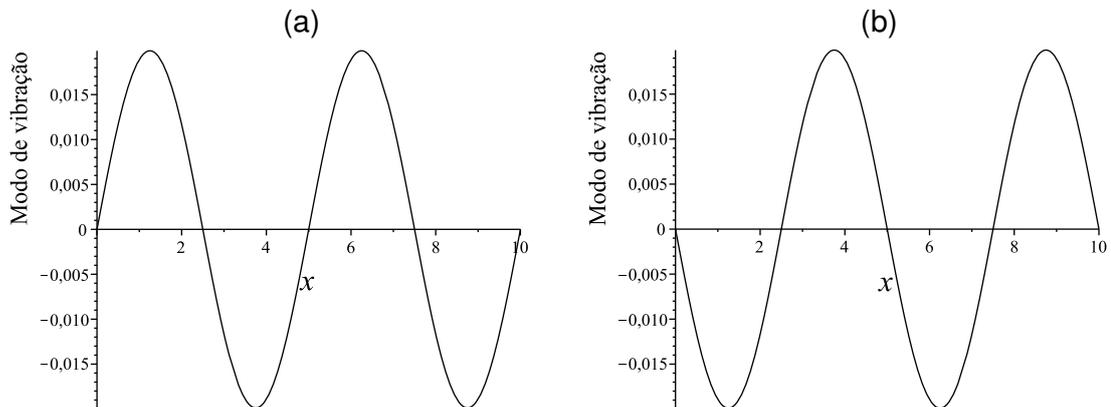
Fonte: Autor.

Figura 4.9 – Sétimo modo de vibração da viga dupla com força axial apoiada nas extremidades (AA-AA). (a) viga superior ( $V_{17}$ ), (b) Viga inferior ( $V_{27}$ ).



Fonte: Autor.

Figura 4.10 – Oitavo modo de vibração da viga dupla com força axial apoiada nas extremidades (AA-AA). (a) viga superior ( $V_{18}$ ), (b) Viga inferior ( $V_{28}$ ).



Fonte: Autor.

#### 4.2 VIGA SIMPLES FIXA-LIVRE COM FORÇA AXIAL (FL), VIGA DUPLA FIXA-LIVRE COM FORÇA AXIAL (FL-FL) E VIGA DUPLA RESTRITA COM FORÇA AXIAL (FL-FR)

Nesta seção, calculamos e comparamos as frequências naturais de uma viga simples fixa-livre (FL), cuja equação característica encontra-se no Apêndice Eq. (6.39), de um sistema de viga dupla fixa-livre (FL-FL) e de um sistema de viga dupla restrita (FL-FR), sendo a viga superior fixa-livre e a viga inferior fixa em  $x = 0$  e com massa ( $M$ ) anexada na extremidade  $x = L$ . Todas as vigas são do tipo Euler-Bernoulli, com força axial e as vigas duplas possuem acoplamento elástico. Para o caso da viga restrita, obtivemos as frequências naturais para vários valores de  $M$ . Além das frequências naturais, também obtivemos e comparamos os modos de vibração das vigas duplas fixa-livre e fixa restrita.

Na Tabela 4.3, reproduzimos os valores das oito primeiras frequências naturais de uma viga simples fixa-livre (FL) com força axial e das frequências do sistema de viga dupla fixa-livre (FL-FL), com acoplamento elástico e força axial.

Em negrito destacamos as frequências comuns entre os dois casos. Para a viga dupla fixa-livre as frequências naturais se repetem de duas em duas quando comparamos com as frequências de uma viga fixa-livre. A medida que as frequências da viga dupla aumentam, as frequências em cada par ficam mais próximas.

Tabela 4.3 – Frequências naturais da viga fixa-livre Euler-Bernoulli com força axial e viga dupla fixa-livre Euler-Bernoulli com acoplamento elástico e força axial

|            | Viga fixa-livre (FL)   | Viga dupla fixa-livre (FL-FL) |
|------------|------------------------|-------------------------------|
| $\omega_1$ | <b>14,33493</b> rad /s | <b>14,33493</b> rad/s         |
| $\omega_2$ | <b>56,58870</b> rad/s  | 46,96264 rad/s                |
| $\omega_3$ | <b>135,31649</b> rad/s | <b>56,58870</b> rad/s         |
| $\omega_4$ | <b>253,34001</b> rad/s | 72,12683 rad/s                |
| $\omega_5$ | 410,97264 rad/s        | <b>135,31649</b> rad/s        |
| $\omega_6$ | 608,16512 rad/s        | 142,51510 rad/s               |
| $\omega_7$ | 844,88912 rad/s        | <b>253,34001</b> rad/s        |
| $\omega_8$ | 1121,12655 rad/s       | 257,25700 rad/s               |

Fonte: Autor.

Tabela 4.4 – Frequências naturais (rad/s) da viga dupla restrita com viga superior fixa-livre, e viga inferior fixa  $x = 0$  e com massa  $M$  anexada em  $x = L$ .

|            | Caso 1         | Caso 2         | Caso 3    | Caso 4    | Caso 5      |
|------------|----------------|----------------|-----------|-----------|-------------|
|            | $M = 10^{-2}m$ | $M = 10^{-1}m$ | $M = m$   | $M = 10m$ | $M = 10^2m$ |
| $\omega_1$ | 14,32352       | 14,22163       | 13,27717  | 8,44936   | 3,12662     |
| $\omega_2$ | 46,92510       | 46,57473       | 42,58905  | 31,38254  | 28,31628    |
| $\omega_3$ | 56,53086       | 56,03200       | 53,17204  | 51,30721  | 51,09725    |
| $\omega_4$ | 72,05351       | 71,45036       | 68,55661  | 66,46288  | 66,15883    |
| $\omega_5$ | 135,17434      | 133,79500      | 123,81787 | 114,32893 | 112,74443   |
| $\omega_6$ | 142,37115      | 141,39303      | 139,63918 | 139,26665 | 139,22759   |
| $\omega_7$ | 253,06575      | 249,93393      | 233,01405 | 221,49403 | 219,75950   |
| $\omega_8$ | 257,01288      | 255,99839      | 255,44451 | 255,37948 | 255,37294   |

Fonte: Autor.

Na Tabela 4.4 temos as oito primeiras frequências naturais de viga dupla restrita sendo a viga superior fixa-livre e a viga inferior com massa  $M$  anexada na extremidade  $x = L$ . As frequências naturais foram obtidas para cinco valores de  $M$ , sendo seu valor proporcional a  $m = m_1 = m_2 = \rho_1 A_1 = \rho_2 A_2$ .

Comparando as frequências, podemos observar que na primeira coluna da Tabela 4.4, para  $M = 10^{-2}m$ , os valores das frequências são muito próximos daqueles da segunda coluna da Tabela 4.3, que é o caso de uma viga dupla fixa-livre ( $M = 0$ ). Além disso, vemos que a medida que a massa  $M$  aumenta as frequências diminuem, em todos os casos, para as respectivas frequências, além de que o padrão observado na Tabela 4.3, segunda coluna, não é observado aqui, isto é, a medida que as frequências da viga dupla aumentam, as frequências em cada par não se aproximam.

Nas Figuras 4.11 a 4.16 são apresentados os modos de vibração  $\mathbb{V}(x)$ , da viga dupla fixa-livre (FL-FL) e da viga dupla restrita (FL-FR) para diversos valores de  $M$ . As frequências naturais  $\omega_j$ ,  $j = 1, 2, 3, \dots, 8$  da viga fixa-livre encontram-se na Tabela 4.3 e da viga fixa restrita na Tabela 4.4, sendo o  $j$ -ésimo modo de vibração denotado por  $V_{ij}(x)$ , onde  $i = 1, 2$  indica a viga superior e inferior, respectivamente.

Analisando os modos de vibração da viga dupla fixa-livre (linha contínua preta nos gráficos) e da viga dupla restrita, ambos os casos com camada elástica e força axial, percebemos que:

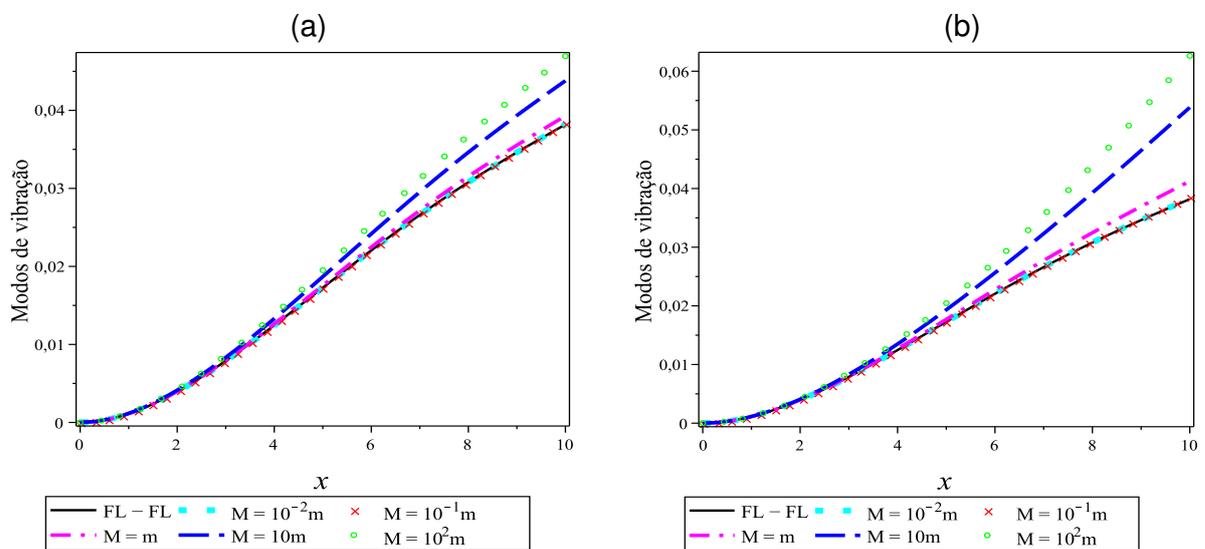
- Em todos os modos apresentados podemos observar que quanto menor o valor da massa  $M$  anexada na viga dupla fixa-restrita, mais próximo está o modo de vibração quando comparado com o da viga dupla fixa-livre. Este comportamento também foi observado nas frequências naturais conforme observamos acima.

- Por outro lado, observamos que a partir do segundo modo associados a viga inferior, a medida que a massa  $M$  aumenta o comportamento dos modos se aproximam,

respectivamente, do comportamento dos modos de uma viga apoiada-apoiada ou de uma viga fixa-fixa. Veja as Figuras 4.3-4.8 quando comparadas com as Figuras 4.12-4.16, dadas na coluna a direita.

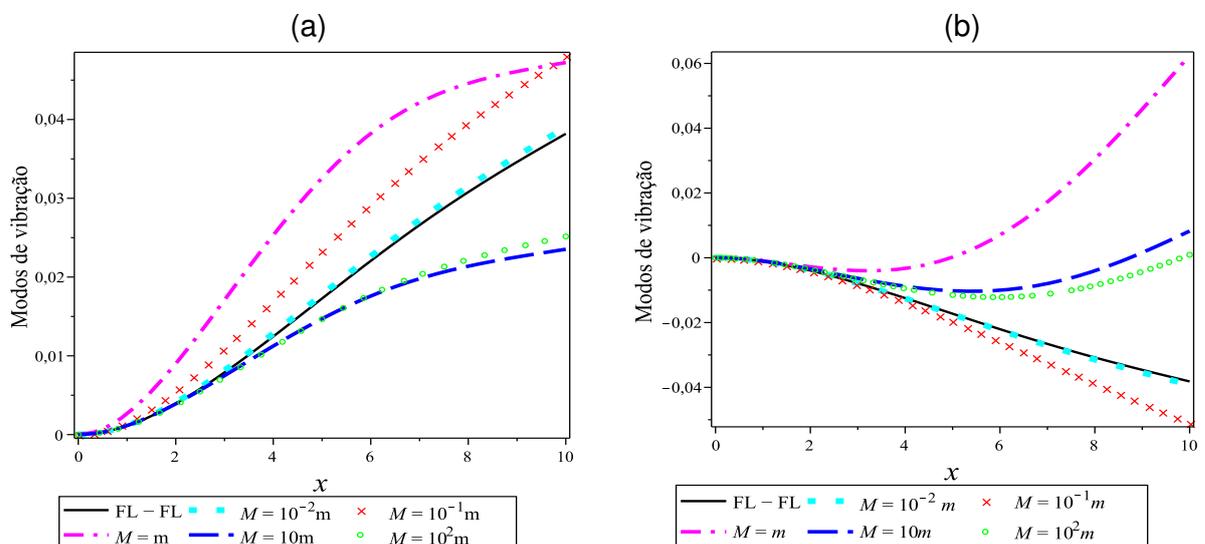
- O efeito da massa  $M$  anexada na viga inferior do sistema de dupla viga (FL-FR) também pode ser observado na viga superior, ficando mais evidente a partir da quarto modo de vibração, como pode ser observado na coluna a esquerda das Figuras 4.14-4.16. Observe que a linha contínua representa o modo de vibração do sistema de dupla viga fixa-livre (FL-FL).

Figura 4.11 – Primeiro modo de vibração da viga dupla com força axial (FL-FL) e da viga dupla restrita (FL-FR). (a) viga superior ( $V_{11}$ ), (b) Viga inferior ( $V_{21}$ ).



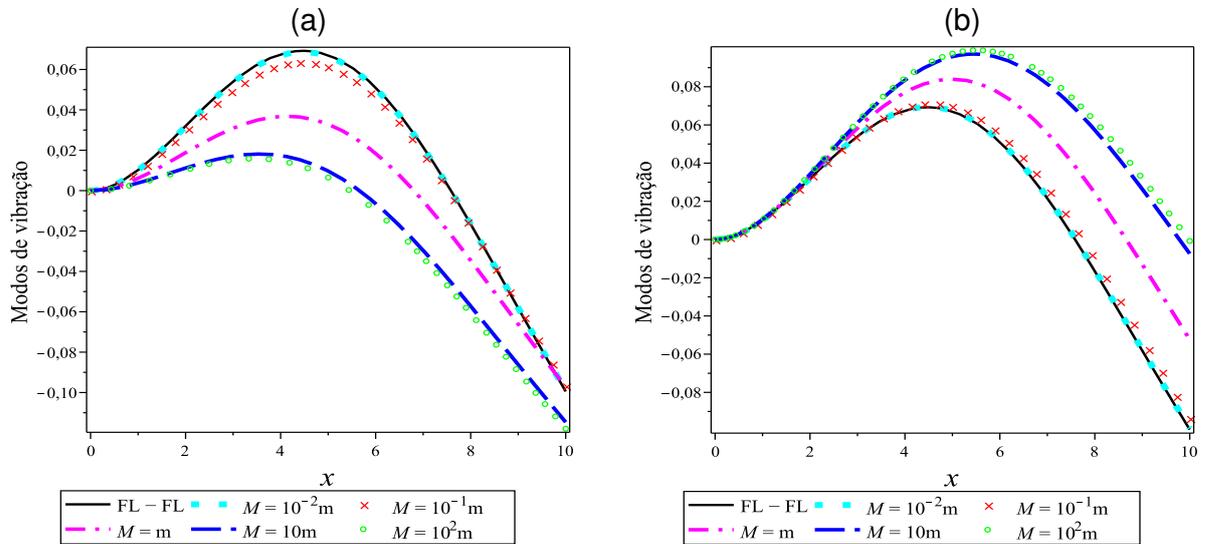
Fonte: Autor.

Figura 4.12 – Segundo modo de vibração da viga dupla com força axial (FL-FL) e da viga dupla restrita (FL-FR). (a) viga superior ( $V_{12}$ ), (b) Viga inferior ( $V_{22}$ ).



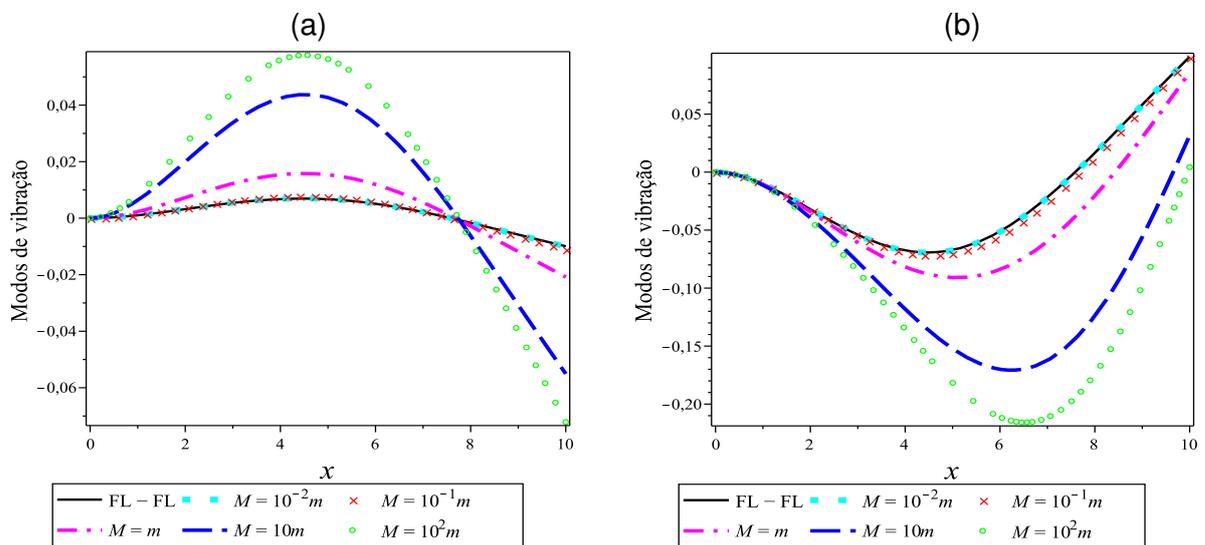
Fonte: Autor.

Figura 4.13 – Terceiro modo de vibração da viga dupla com força axial (FL-FL) e da viga dupla restrita (FL-FR). (a) viga superior ( $V_{13}$ ), (b) Viga inferior ( $V_{23}$ ).



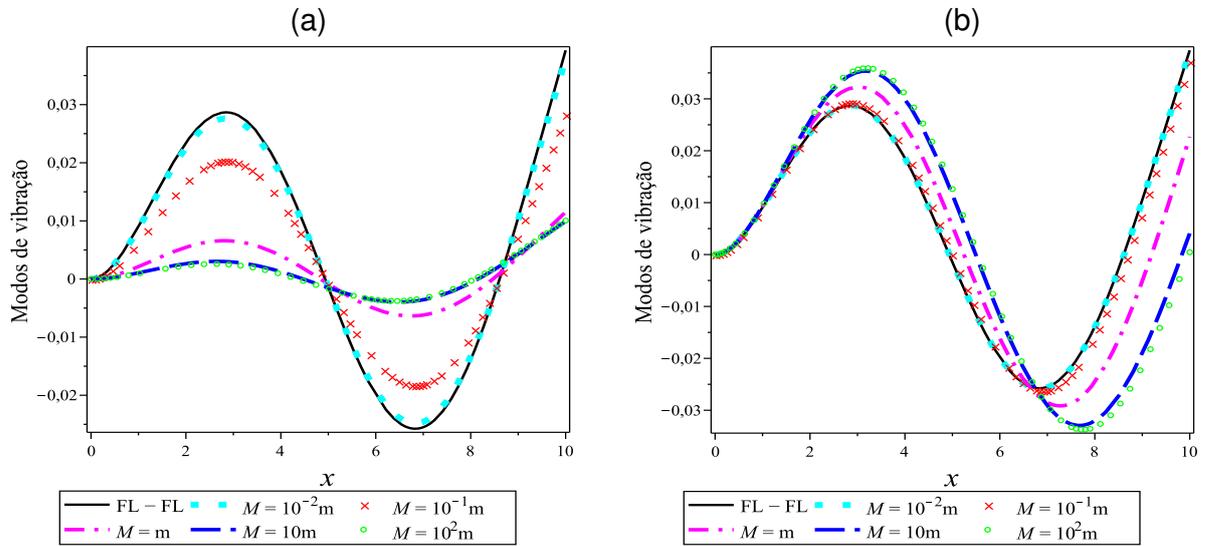
Fonte: Autor.

Figura 4.14 – Quarto modo de vibração da viga dupla com força axial (FL-FL) e da viga dupla restrita (FL-FR). (a) viga superior ( $V_{14}$ ), (b) Viga inferior ( $V_{24}$ ).



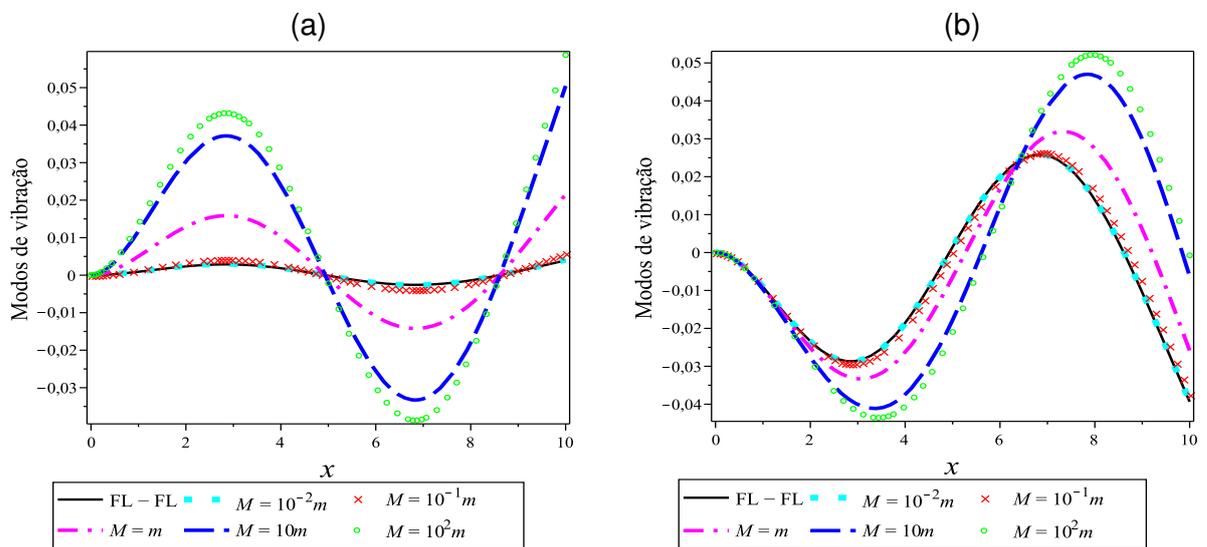
Fonte: Autor.

Figura 4.15 – Quinto modo de vibração da viga dupla com força axial (FL-FL) e da viga dupla restrita (FL-FR). (a) viga superior ( $V_{15}$ ), (b) Viga inferior ( $V_{25}$ ).



Fonte: Autor.

Figura 4.16 – Sexto modo de vibração da viga dupla com força axial (FL-FL) e da viga dupla restrita (FL-FR). (a) viga superior ( $V_{16}$ ), (b) Viga inferior ( $V_{26}$ ).



Fonte: Autor.

### 4.3 FREQUÊNCIAS NATURAIS PARA DIVERSOS VALORES DA CAMADA ELÁSTICA E DA FORÇA AXIAL

Nesta seção, para efeitos de comparação, obtivemos as frequências naturais de um sistema de viga dupla Euler-Bernoulli com acoplamento elástico e força axial para diversos valores da constante  $k$  no acoplamento elástico e da constante  $F_0$  na força axial. Consideramos um sistema de viga dupla biapoiada (AA-AA) e um sistema de viga dupla fixa-livre (FL-FL).

Nas Tabelas 4.5 e 4.6 obtivemos as primeiras oito frequências naturais para vários valores do coeficiente  $k$  da camada elástica com força axial  $P = \frac{EI}{L^2} F_0$  (N), sendo  $E$ ,  $I$  e  $L$  parâmetros da viga dados na Tabela 4.1, e  $F_0 = 10$ . Na Tabela 4.5 apresentamos as frequências para um sistema de viga dupla biapoiada (AA-AA) e na Tabela 4.6 para o caso de um sistema de viga dupla fixa-livre (FL-FL).

Podemos observar na Tabela 4.5 que para os valores da camada elástica iguais a  $k = 0, 2 \times 10^5, 0,5 \times 10^5, 1,0 \times 10^5, 1,5 \times 10^5$  e  $k = 2 \times 10^5$  ( $\text{Nm}^{-2}$ ) as frequências ímpares,  $\omega_i, i = 1, 3, 5$  e  $7$  aparecem em todos os casos. Para as frequências pares  $\omega_i, i = 2, 4, 6$  e  $8$ , vemos que elas aumentam conforme o coeficiente da camada elástica aumenta. Observe, também, que para  $k = 5 \times 10^5$  ( $\text{Nm}^{-2}$ ), as frequências ímpares dos casos anteriores estão presentes, no entanto a terceira frequência dos casos anteriores aparece como sendo a segunda frequência.

Quando consideramos o sistema de viga dupla fixa-livre, Tabela 4.6, as frequências naturais apresentam o mesmo padrão do caso anterior, no entanto a terceira frequência  $\omega_3$ , para  $k = 0, 2 \times 10^5, 0,5 \times 10^5$  e  $1,0 \times 10^5$  ( $\text{Nm}^{-2}$ ) aparece como sendo a segunda frequência para  $k = 1,5 \times 10^5, 2 \times 10^5$  e  $5 \times 10^5$  ( $\text{Nm}^{-2}$ ).

Em todos os casos apresentados, o padrão das frequências aparecerem aos pares se mantém, ficando mais evidente nos pares de frequências mais altas.

Nas Tabelas 4.7 e 4.8 obtivemos as primeiras oito frequências naturais para os valores da constante da camada elástica fixa e igual a  $k = 1 \times 10^5$  ( $\text{Nm}^{-2}$ ), e para diversos valores da força axial  $P = \frac{EI}{L^2} F_0$  (N), onde  $F_0$  é uma constante dada. Podemos observar que a medida que  $F_0$  aumenta, as frequências correspondentes também aumentam, para os dois casos de condições de contorno considerados.

O comportamento das frequências naturais aparecerem aos pares se mantém, no entanto, as frequências naturais ímpares não se repetem, como no nos casos apresentados nas Tabelas 4.5 e 4.6.

A partir dos resultados apresentados nas Tabelas 4.5, 4.6, 4.7 e 4.8, vemos que existem frequências, em geral as primeiras frequências em cada par de frequências, que não dependem do valor da camada elástica e são as frequências do sistema de uma viga simples com força axial, já as outras frequências aumentam conforme  $k$  aumenta. No entanto, variando o valor da força axial não obtivemos frequências naturais repetidas,

mas observamos que as frequências correspondentes aumentam conforme a força axial aumenta.

#### 4.3.1 Variando o valor da constante $k$ da camada elástica

Tabela 4.5 – Frequências naturais (rad/s) para diferentes valores da camada elástica  $k$  ( $\text{Nm}^{-2}$ ) de um sistema de viga dupla biapoiada Euler-Bernoulli com força axial

|            | $k = 0,2 \times 10^5$ | $k = 0,5 \times 10^5$ | $k = 1,0 \times 10^5$ | $k = 1,5 \times 10^5$ | $k = 2 \times 10^5$ | $k = 5 \times 10^5$ |
|------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|---------------------|---------------------|
| $\omega_1$ | <b>28,00750</b>       | <b>28,00750</b>       | <b>28,00750</b>       | <b>28,00750</b>       | <b>28,00750</b>     | <b>28,00750</b>     |
| $\omega_2$ | 34,41541              | 42,24240              | 52,76760              | 61,51764              | 69,16950            | <b>88,39297</b>     |
| $\omega_3$ | <b>88,39297</b>       | <b>88,39297</b>       | <b>88,39297</b>       | <b>88,39297</b>       | <b>88,39297</b>     | 103,84806           |
| $\omega_4$ | 90,62736              | 93,87927              | 99,06219              | 103,98710             | 108,68909           | 133,46654           |
| $\omega_5$ | <b>187,38624</b>      | <b>187,38624</b>      | <b>187,38624</b>      | <b>187,38624</b>      | <b>187,38624</b>    | <b>187,38624</b>    |
| $\omega_6$ | 188,45053             | 190,03579             | 192,64891             | 195,22705             | 197,77159           | 212,39963           |
| $\omega_7$ | <b>325,67384</b>      | <b>325,67384</b>      | <b>325,67384</b>      | <b>325,67384</b>      | <b>325,67384</b>    | <b>325,67384</b>    |
| $\omega_8$ | 326,28738             | 327,20552             | 328,73006             | 330,24756             | 331,75812           | 340,68087           |

Fonte: Autor.

Tabela 4.6 – Frequências naturais (rad/s) para diferentes valores da camada elástica  $k$  ( $\text{Nm}^{-2}$ ) de um sistema de viga dupla fixa-livre Euler-Bernoulli com força axial

|            | $k = 0,2 \times 10^5$ | $k = 0,5 \times 10^5$ | $k = 1,0 \times 10^5$ | $k = 1,5 \times 10^5$ | $k = 2 \times 10^5$ | $k = 5 \times 10^5$ |
|------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|---------------------|---------------------|
| $\omega_1$ | <b>14,33493</b>       | <b>14,33493</b>       | <b>14,33493</b>       | <b>14,33493</b>       | <b>14,33493</b>     | <b>14,33493</b>     |
| $\omega_2$ | 24,60671              | 34,72017              | 46,96264              | <b>56,58870</b>       | <b>56,58870</b>     | <b>56,58870</b>     |
| $\omega_3$ | <b>56,58870</b>       | <b>56,58870</b>       | <b>56,58870</b>       | 56,61704              | 64,84975            | 101,02222           |
| $\omega_4$ | 60,01900              | 64,82500              | 72,12683              | 78,75456              | 84,86625            | 114,90117           |
| $\omega_5$ | <b>135,31649</b>      | <b>135,31649</b>      | <b>135,31649</b>      | <b>135,31649</b>      | <b>135,31649</b>    | <b>135,31649</b>    |
| $\omega_6$ | 136,78653             | 138,96242             | 142,51510             | 145,98135             | 149,36718           | 168,25740           |
| $\omega_7$ | <b>253,34001</b>      | <b>253,34001</b>      | <b>253,34001</b>      | <b>253,34001</b>      | <b>253,34001</b>    | <b>253,34001</b>    |
| $\omega_8$ | 254,12824             | 255,30602             | 257,25700             | 259,19329             | 261,11523           | 272,36219           |

Fonte: Autor.

### 4.3.2 Variando o valor da constante $F_0$ na força axial $P = \frac{EI}{L^2} F_0$

Tabela 4.7 – Frequências naturais (rad/s) para diferentes valores da força axial de um sistema de viga dupla biapoiada Euler-Bernoulli com camada elástica

|            | $F_0 = 0, 1$ | $F_0 = 1$ | $F_0 = 5$ | $F_0 = 10$ | $F_0 = 20$ |
|------------|--------------|-----------|-----------|------------|------------|
| $\omega_1$ | 19,83895     | 20,71508  | 24,22867  | 28,00750   | 34,33955   |
| $\omega_2$ | 48,92427     | 49,28605  | 50,86283  | 52,76760   | 56,38443   |
| $\omega_3$ | 79,05677     | 79,95058  | 83,80781  | 88,39297   | 96,91468   |
| $\omega_4$ | 90,82936     | 91,60838  | 94,99342  | 99,06219   | 106,73544  |
| $\omega_5$ | 177,75285    | 178,65008 | 182,58443 | 187,38624  | 196,63840  |
| $\omega_6$ | 183,29232    | 184,16256 | 187,98157 | 192,64891  | 201,65976  |
| $\omega_7$ | 315,92732    | 316,82576 | 320,78837 | 325,67384  | 335,23126  |
| $\omega_8$ | 319,07691    | 319,96650 | 323,89069 | 328,7300   | 338,20112  |

Fonte: Autor.

Tabela 4.8 – Frequências naturais (rad/s) para diferentes valores da força axial de um sistema de viga dupla fixa-livre Euler-Bernoulli com camada elástica

|            | $F_0 = 0, 1$ | $F_0 = 1$ | $F_0 = 5$ | $F_0 = 10$ | $F_0 = 20$ |
|------------|--------------|-----------|-----------|------------|------------|
| $\omega_1$ | 7,16265      | 8,22048   | 11,53639  | 14,33493   | 18,32164   |
| $\omega_2$ | 44,21582     | 45,47060  | 46,18537  | 46,96264   | 48,32890   |
| $\omega_3$ | 45,29131     | 45,51313  | 50,81181  | 56,58870   | 66,25664   |
| $\omega_4$ | 62,88910     | 63,80788  | 67,68929  | 72,12683   | 79,93711   |
| $\omega_5$ | 123,51965    | 124,64090 | 129,50248 | 135,31649  | 146,16864  |
| $\omega_6$ | 131,36629    | 132,42112 | 137,00691 | 142,51510  | 152,85702  |
| $\omega_7$ | 241,92199    | 242,98288 | 247,64167 | 253,34001  | 264,34424  |
| $\omega_8$ | 246,02084    | 247,06412 | 251,64736 | 257,25700  | 268,10050  |

Fonte: Autor.

## 5 CONCLUSÃO

Nesse trabalho foram apresentados estudos sobre a vibração transversal de um sistema de viga dupla Euler-Bernoulli com força axial acoplado elasticamente. Através da análise modal obtivemos a resposta livre do sistema onde a equação modal foi escrita em termos da solução fundamental matricial. Uma formulação matricial para o problema permitiu associar o sistema de viga dupla com a viga simples de Euler-Bernoulli e com força axial. Para algumas condições de contorno, incluindo um caso de condições de contorno não clássica, obtivemos as frequências naturais e representamos graficamente os modos de vibração.

Para as condições de contorno clássicas apresentadas neste trabalho, as frequências naturais para o sistema de viga dupla aparecem aos pares, sendo que cada par de frequências tem os seus respectivos modos cujo comportamento corresponde ao de uma das frequências da viga simples. Além disso, as primeiras frequências de cada par da viga dupla se repetem na viga simples, esse padrão continua se repetindo nas frequências mais altas. Em relação aos modos de vibração, percebemos que as frequências  $(\omega_{2j-1})$  geram modos síncronos, já as frequências  $(\omega_{2j})$  geram modos assíncronos,  $j = 1, 2, 3, \dots$

Quando consideramos a condição de contorno não clássica, sendo a viga superior fixa-livre e a viga inferior fixa em  $x = 0$  e com uma massa  $M$  anexada em  $x = L$ , percebemos que para as frequências mais altas fica mais evidente o par de frequências, no entanto a medida que o valor da massa anexada aumenta os respectivos modos perdem o padrão dos modos da viga dupla fixa-livre, o que era esperado. Embora a massa esteja anexada na viga inferior, o comportamento dos modos da viga superior também são afetados. Também observamos que a medida que a massa aumenta as respectivas frequências diminuem, e que quanto menor for a massa mais as frequências se aproximam do caso da viga dupla fixa-livre com força axial, o que também era esperado.

Para as simulações realizadas com o objetivo de comparar as frequências naturais para diversos valores da camada elástica com condições de contorno biapoiada (AA-AA) e fixa-livre (FL-FL), percebemos que existem frequências que aparecem em todos os casos, e que as outras aumentam conforme o coeficiente da camada elástica aumenta.

Quando simulamos para vários valores da força axial notamos que a medida que a força axial aumenta, as frequências correspondentes também aumentam.

Para trabalhos futuros, podemos considerar para um sistema de viga dupla Euler-Bernoulli os problemas forçado e com amortecimento, além de estender a teoria desenvolvida neste trabalho para  $N$ -vigas.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ABU-HILAL, M.; MOHSEN, M. **Vibration of beams with general boundary conditions due to a moving harmonic load.** *Journal of Sound and Vibration*, v. 232(4), p. 703–717, 2000.
- CLAEYSSSEN, J. R.; CANAHUALPA, G.; JUNG, C. **A direct approach to second-order matrix non-classical vibrating equations.** *Applied Numerical Mathematics*, v. 30, p. 65–78, 1999.
- CLAEYSSSEN, J. R.; COPETTI, R. D.; TOLFO, D. de R. **Waves and heaviside propagator in transmission lines.** *Journal of Electromagnetic Waves and Applications*, Taylor Francis, p. 1–36, 2022.
- CLAEYSSSEN, J. R.; COPETTI, R. D.; TONETTO, L.; CARVALHO, J. **Nanobeams and AFM subject to piezoelectric and surface scale effects.** *Advances in Mathematical Physics-Hindawi*, v. 2018, p. 1–25, 2018.
- CLAEYSSSEN, J. R.; COSTA, S. **Modes for the coupled Timoshenko model with a restrained end.** *Journal of Sound and Vibration*, v. 296, p. 1053–1058, 2006.
- CLAEYSSSEN, J. R.; SODER, R. A. **A dynamical basis for computing the modes of Euler-Bernoulli and Timoshenko beams.** *Journal of Sound and Vibration*, v. 259, p. 986–990, 2003.
- CLAEYSSSEN, J. R.; TOLFO, D. de R.; COPETTI, R. D. **Nonlocal Timoshenko simply supported beam: Second spectrum and modes.** *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, p. 1–18, 2020.
- CLAEYSSSEN, J. R.; TOLFO, D. de R.; TONETTO, L. **Matrix basis for plane and modal waves in a Timoshenko beam.** *Royal Society Open Science*, v. 3, p. 160825, 2016.
- CLAEYSSSEN, J. R.; TSUKAZAN, T.; COPETTI, R. **Nonlocal effects in modal analysis of forced responses with single carbon nanotubes.** *Mechanical systems and signal processing*, v. 38, p. 299–311, 2013.
- CLAEYSSSEN, J. R.; TSUKAZAN, T.; COPETTI, R. D. **Eigenanalysis of an Euler-Bernoulli model coupled with van der Waals forces for carbon nanotubes.** *IMA Journal of Applied Mathematics*, v. 78, p. 1032–1050, 2013.
- COPETTI, R. D.; CLAEYSSSEN, J. R.; TOLFO, D. de R.; PAVLACK, B. S. **The fundamental modal response of elastically connected parallel Timoshenko beams.** *Journal of Sound and Vibration*, v. 530, p. 116920, 2022.
- GANTMAKHER, F. R. **Lectures in analytical mechanics.** Moscow: Mir Publishers, 1970.
- GIARETA, M. K. **Vibrações forçadas com força axial num modelo de Euler-Bernoulli para vigas.** 2001. 77 p. Dissertação (Mestrado em Matemática Aplicada) — Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2001.
- GÜRGÖZE, M. **On the eigenfrequencies of cantilevered beams carrying a tip mass and spring-mass in-span.** *International Journal of Mechanical Sciences*, v. 38, p. 1295–1306, 1996.

HILDEBRAND, F. B. **Methods of applied mathematics**. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall, 1952.

INMAN, D. J. **Engineering vibration**. New Jersey: Prentice Hall, 1994.

KELLY, S. G. **Advanced vibration analysis**. New York: Taylor & Francis, 2007.

LI, J.; HUA, H. **Spectral finite element analysis of elastically connected double-beam systems**. *International Journal of Mechanical Sciences*, v. 43, p. 1155–1168, 2007.

MAO, Q.; WATTANASAKULPONG, N. **Vibration and stability of a double-beam system interconnected by an elastic foundation under conservative and nonconservative axial forces**. *International Journal of Mechanical Sciences*, v. 93, p. 1–7, 2015.

MEIROVITCH, L. **Fundamentals of vibrations**. New Jersey: Prentice Hall, 2001.

NAGULESWARAN, S. **Transverse vibrations of an Euler-Bernoulli uniform beam carrying two particles in-span**. *International Journal of Mechanical Sciences*, v. 43, p. 2737–2752, 2001.

O.A.BAUCHAU; J.I.CRAIG. **Structural Analysis**. New York: Springer, 2009.

ONISZCZUK. **Forced transverse vibrations of an elastically connected complex simply supported double-beam system**. *Journal of Sound and Vibration*, v. 264, p. 273–286, 2003.

ONISZCZUK, Z. **Free transverse vibrations of elastically connected simply supported double-beam complex system**. *Journal of Sound and Vibration*, v. 232(2), p. 387–403, 2000.

RAO, S. S. **Vibration of continuous systems**. New Jersey: John Wiley & Sons, 2007.

RUGE, P.; BIRK, C. **A comparison of infinite Timoshenko and Euler-Bernoulli beam models on winkler foundation in the frequency and time-domain**. *Journal of Sound and Vibration*, v. 304(35), p. 932947, 2007.

SAKAR, G. **The effect of axial force on the free vibration of an Euler-Bernoulli beam carrying a number of various concentrated elements**. *Shock and Vibration*, v. 20, p. 357–367, 2013.

THORNTON, S. T.; MARION, J. B. **Dinâmica clássica de partículas e sistemas**. Cengage Learning: Quinta edição, 2011.

VU, H. V.; ORDÓÑEZ, A. M.; KARNOPP, B. H. **Vibration of a double-beam system**. *Journal of Sound and Vibration*, v. 229(4), p. 807–822, 2000.

ZHANG, Q.; LU, Y.; MA, G. W. **Effect of compressive axial load on forced transverse vibrations of a double-beam system**. *International Journal of Mechanical Sciences*, v. 50, p. 299–305, 2008.

ZHANG, Q.; LU, Y.; WANG, S. L.; LIU, X. **Vibration and buckling of a double-beam system under compressive axial loading**. *Journal of Sound and Vibration*, v. 318, p. 341–352, 2008.

ZHAO, X.; CHANG, P. **Free and forced vibration of double beam with arbitrary and conditions connected with a viscoelastic layer and discrete points**. *International Journal of Mechanical Sciences*, v. 209, p. 1–17, 2021.

## 6 APÊNDICE

### 6.1 MÉTODO DE CARDANO - TARTAGLIA E O MÉTODO DE FERRARI

Para determinar as raízes de

$$b_0r^8 + b_2r^6 + b_4r^4 + b_6r^2 + b_8 = 0 \quad (6.1)$$

fazemos a substituição  $Z = r^2$ , e assim obtemos

$$Z^4 + a_1Z^3 + a_2Z^2 + a_3Z + a_4 = 0, \quad (6.2)$$

com  $a_1 = \frac{b_2}{b_0}$ ,  $a_2 = \frac{b_4}{b_0}$ ,  $a_3 = \frac{b_6}{b_0}$  e  $a_4 = \frac{b_8}{b_0}$ .

Podemos fatorar a eq.(6.2) da seguinte maneira

$$(Z^2 + q_1Z + g_1)(Z^2 + q_2Z + g_2) = 0, \quad (6.3)$$

onde segundo (LI; HUA, 2007), os coeficientes  $q_1$ ,  $g_1$ ,  $q_2$  e  $g_2$  são dados por

$$q_1 = \frac{1}{2} \left[ a_1 + \sqrt{a_1^2 - 4a_2 + 4\lambda_1} \right],$$

$$g_1 = \frac{1}{2} \left[ \lambda_1 + \frac{a_1\lambda_1 - 2a_3}{\sqrt{a_1^2 - 4a_2 + 4\lambda_1}} \right],$$

$$q_2 = \frac{1}{2} \left[ a_1 - \sqrt{a_1^2 - 4a_2 + 4\lambda_1} \right],$$

$$g_2 = \frac{1}{2} \left[ \lambda_1 - \frac{a_1\lambda_1 - 2a_3}{\sqrt{a_1^2 - 4a_2 + 4\lambda_1}} \right],$$

e  $\lambda_1$  é uma das raízes da seguinte equação cúbica

$$\lambda^3 - a_2\lambda^2 + (a_1a_3 - 4a_4)\lambda + (4a_2a_4 - a_3^2 - a_1^2a_4) = 0, \quad (6.4)$$

de tal forma que, as três raízes podem ser escritas como

$$\lambda_1 = \frac{a_2}{3} + 2\sqrt{-Q} \cos\left(\frac{v}{3}\right),$$

$$\lambda_2 = \frac{a_2}{3} + 2\sqrt{-Q} \cos\left(\frac{v + 2\pi}{3}\right),$$

$$\lambda_3 = \frac{a_2}{3} + 2\sqrt{-Q} \cos\left(\frac{v + 4\pi}{3}\right),$$

onde,

$$v = \cos^{-1}\left(\frac{R}{\sqrt{-Q^3}}\right),$$

$$Q = -\frac{1}{9}(a_2^2 - 3a_1a_3 + 12a_4),$$

$$R = \frac{1}{54}(2a_2^3 - 9a_1a_2a_3 + 27a_3^2 + 27a_1^2a_4 - 72a_2a_4).$$

Assim, as quatro raízes da eq. (6.2) podem ser escritas como

$$Z_1 = -\frac{q_1}{2} + \sqrt{\frac{q_1^2}{4} - g_1}, \quad (6.5)$$

$$Z_2 = -\frac{q_1}{2} - \sqrt{\frac{q_1^2}{4} - g_1}, \quad (6.6)$$

$$Z_3 = -\frac{q_2}{2} + \sqrt{\frac{q_2^2}{4} - g_2}, \quad (6.7)$$

$$Z_4 = -\frac{q_2}{2} - \sqrt{\frac{q_2^2}{4} - g_2}, \quad (6.8)$$

onde  $Z_{1,2}$  satisfazem  $(Z^2 + q_1Z + g_1)$  e  $Z_{3,4}$  satisfazem  $(Z^2 + q_2Z + g_2)$ . Como  $Z = r^2$ , temos

$$(Z^2 + q_1Z + g_1)(Z^2 + q_2Z + g_2) = (r^4 + q_1r^2 + g_1)(r^4 + q_2r^2 + g_2) = 0. \quad (6.9)$$

Finalmente, as oito raízes da eq. (6.1) são

$$r_{1,2} = \pm\sqrt{Z_1}, \quad (6.10)$$

$$r_{3,4} = \pm\sqrt{Z_2}, \quad (6.11)$$

$$r_{5,6} = \pm\sqrt{Z_3}, \quad (6.12)$$

$$r_{7,8} = \pm\sqrt{Z_4}. \quad (6.13)$$

## 6.2 DETERMINANDO A SOLUÇÃO DINÂMICA DE UMA VIGA EULER-BERNOULLI COM FORÇA AXIAL

Considere uma viga Euler-Bernoulli com força axial (Figura 2.1), dada pela equação

$$EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - P \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0. \quad (6.14)$$

Supomos a solução da eq. (6.14) por modos normais, isto é,

$$w(t, x) = e^{\lambda t} V(x), \quad \lambda = i\omega, \quad (6.15)$$

com  $V(x)$  os modos de vibração e  $\omega$  a frequência natural do sistema. Desta forma, substituindo a eq. (6.15) na eq. (6.14), obtemos

$$EIV^{(iv)}(x) - PV''(x) - \rho A \omega^2 V(x) = 0, \quad (6.16)$$

a qual é chamada de equação modal para uma viga Euler-Bernoulli com força axial.

Para determinarmos a solução de (6.16) vamos utilizar a base fundamental ou base dinâmica, isto é, podemos escrever

$$V(x) = h(x)e_1 + h'(x)e_2 + h''(x)e_3 + h'''(x)e_4, \quad (6.17)$$

com  $e_1, e_2, e_3, e_4$  constantes a serem determinadas pelas condições de contorno da viga, e  $h(x)$  a solução fundamental que satisfaz o seguinte Problema de Valor Inicial

$$\begin{cases} E Ih^{(iv)}(x) - Ph''(x) - \rho A \omega^2 h(x) = 0 \\ h(0) = 0, h'(0) = 0, h''(0) = 0, E Ih'''(0) = 1. \end{cases} \quad (6.18)$$

A equação característica do P.V.I. dado em (6.18) é

$$EIs^4 - Ps^2 - \rho A \omega^2 = 0, \quad (6.19)$$

onde as quatro raízes são

$$s_1 = \epsilon, \quad s_2 = -\epsilon, \quad (6.20)$$

$$s_3 = i\delta, \quad s_4 = -i\delta, \quad (6.21)$$

com

$$\epsilon = \sqrt{\frac{P + \sqrt{P^2 + 4\omega^2 \rho A E I}}{2EI}} \quad \text{e} \quad \delta = \sqrt{-\frac{P - \sqrt{P^2 + 4\omega^2 \rho A E I}}{2EI}}. \quad (6.22)$$

Observe que tomando  $\Delta = P^2 + 4\omega^2 \rho A E I$  temos  $\Delta > 0$ . Assim, as raízes  $s_1$  e  $s_2$  são reais, e as raízes  $s_3$  e  $s_4$  são imaginárias puras, já que  $P^2 + 4\omega^2 \rho A E I > P^2$ .

Portanto, a solução  $h(x)$  do P.V.I. dado pela eq. (6.18) será

$$h(x) = -\frac{\sin(\delta x)}{EI\delta(\epsilon^2 + \delta^2)} + \frac{\sinh(\epsilon x)}{EI\epsilon(\epsilon^2 + \delta^2)}. \quad (6.23)$$

### 6.2.1 Viga Euler-Bernoulli biapoiada com força axial

Vamos determinar as frequências naturais e os modos de vibração de uma viga Euler-Bernoulli biapoiada com força axial. As condições de contorno nos extremos da viga são dadas por

$$w(t, 0) = 0, \quad EI \frac{\partial^2 w(t, 0)}{\partial x^2} = 0, \quad (6.24)$$

$$w(t, L) = 0, \quad EI \frac{\partial^2 w(t, L)}{\partial x^2} = 0. \quad (6.25)$$

Aplicando as condições (6.24) e (6.25) em (6.15), obtemos as seguintes condições para os modos de vibração

$$V(0) = 0, \quad EIV''(0) = 0, \quad (6.26)$$

$$V(L) = 0, \quad EIV''(L) = 0. \quad (6.27)$$

A partir da eq. (6.26), (6.17) e (6.18), concluímos que

$$e_2 = e_4 = 0, \quad (6.28)$$

de tal forma que os modos de vibração para uma viga biapoiada Euler-Bernoulli com força axial serão

$$V(x) = h(x)e_1 + h''(x)e_3. \quad (6.29)$$

Agora, considerando as condições na extremidade  $x = L$ , eq. (6.27), juntamente com a eq. (6.29) resulta

$$\begin{pmatrix} h(L) & h''(L) \\ EIH''(L) & EIH^{(iv)}(L) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (6.30)$$

Note que, para uma solução não trivial de  $e_1$  e  $e_3$ , impomos que

$$\det \begin{pmatrix} h(L) & h''(L) \\ EIH''(L) & EIH^{(iv)}(L) \end{pmatrix} = 0, \quad (6.31)$$

que é a equação característica para viga Euler-Bernoulli biapoiada com força axial.

### 6.2.2 Viga Euler-Bernoulli fixa-livre com força axial

Considere uma Viga Euler-Bernoulli fixa-livre com força axial, onde as condições de contorno em  $x = 0$  e  $x = L$  são dadas por

$$w(t, 0) = 0, \quad \frac{\partial w(t, 0)}{\partial x} = 0, \quad (6.32)$$

$$EI \frac{\partial^2 w(t, L)}{\partial x^2} = 0, \quad EI \frac{\partial^3 w(t, L)}{\partial x^3} - P \frac{\partial w(t, L)}{\partial x} = 0. \quad (6.33)$$

Aplicando as condições (6.32) e (6.33) em (6.15), obtemos as seguintes condições para os modos de vibração

$$V(0) = 0, \quad V'(0) = 0, \quad (6.34)$$

$$EIV''(L) = 0, \quad EIV'''(L) - PV'(L) = 0. \quad (6.35)$$

Assim, de (6.34), (6.17) e (6.18), concluímos que

$$e_3 = e_4 = 0, \quad (6.36)$$

de tal forma que os modos de vibração para uma viga fixa-livre Euler-Bernoulli com força axial serão

$$V(x) = h(x)e_1 + h'(x)e_2, \quad (6.37)$$

com  $h(x)$  sendo a base fundamental matricial dada pela eq. (6.23).

Agora, considerando as condições na extremidade  $x = L$ , eq. (6.35), juntamente com a eq. (6.37) resulta

$$\begin{pmatrix} EIh''(L) & EIh'''(L) \\ -Ph'(L) + EIh'''(L) & -Ph''(L) + EIh^{(iv)}(L) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (6.38)$$

Note que, para uma solução não trivial de  $e_1$  e  $e_2$ , impomos que

$$\det \begin{pmatrix} EIh''(L) & EIh'''(L) \\ -Ph'(L) + EIh'''(L) & -Ph''(L) + EIh^{(iv)}(L) \end{pmatrix} = 0, \quad (6.39)$$

que é a equação característica para viga Euler-Bernoulli fixa-livre com força axial.