UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA MARIA
CENTRO DE CIÊNCIAS NATURAIS E EXATAS
PROGRAMA DE MESTRADO EM MATEMÁTICA

Nathan Kellermann

HIPOELIPTICIDADE PARA OPERADORES LINEARES COM COEFICIENTES CONSTANTES

Santa Maria, RS
2022

Nathan Kellermann

HIPOELIPTICIDADE PARA OPERADORES LINEARES COM COEFICIENTES CONSTANTES

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM, RS), como requisito parcial para obtenção do grau de **Mestre em Matemática**.

ORIENTADOR: Prof. Maurício Fronza da Silva

Santa Maria, RS
2022

Kellermann, Nathan Kellermann
Hipoelipticidade para Operadores Lineares com Coeficientes Constantes / Nathan Kellermann Kellermann.- 2022.
102 p.; 30 cm

Orientador: Maurício Fronza da Silva da Silva
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Santa Maria, Centro de Ciências Naturais e Exatas, Programa de Pós-Graduação em Matemática, RS, 2022

1. Equações Diferenciais 2. Regularidade 3. Operadores Hipoelípticos I. da Silva, Maurício Fronza da Silva II. Título.

Sistema de geração automática de ficha catalográfica da UFSM. Dados fornecidos pelo autor(a). Sob supervisão da Direção da Divisão de Processos Técnicos da Biblioteca Central. Bibliotecária responsável Paula Schoenfeldt Patta CRB 10/1728.

Declaro, NATHAN KELLERMANN KELLERMANN, para os devidos fins e sob as penas da lei, que a pesquisa constante neste trabalho de conclusão de curso (Dissertação) foi por mim elaborada e que as informações necessárias objeto de consulta em literatura e outras fontes estão devidamente referenciadas. Declaro, ainda, que este trabalho ou parte dele não foi apresentado anteriormente para obtenção de qualquer outro grau acadêmico, estando ciente de que a inveracidade da presente declaração poderá resultar na anulação da titulação pela Universidade, entre outras consequências legais.

Nathan Kellermann

HIPOELIPTICIDADE PARA OPERADORES LINEARES COM COEFICIENTES CONSTANTES

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM, RS), como requisito parcial para obtenção do grau de **Mestre em Matemática**.

Aprovado em 06 de dezembro de 2022:

Maurício Fronza da Silva

Maurício Fronza da Silva, Dr. (UFSM)
(Presidente/Orientador)
(Videoconferência)

Juliano Damião Bittencourt de Godoi, Dr. (UFSM)
(Videoconferência)

Leonardo Prange Bonorino

Leonardo Prange Bonorino, Dr. (UFRGS)
(Videoconferência)

Santa Maria, RS
2022

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente aos meus pais e à minha irmã, pelos conselhos, apoio e incentivo.

Agradeço à minha namorada, pelo carinho, atenção e paciência.

Agradeço ao meu orientador, por toda dedicação prestada, o que contribuiu imensamente para meu desenvolvimento durante o mestrado.

Agradeço aos meus amigos, pelo apoio, incentivo e momentos de descontração.

Agradeço aos professores da UFSM que, de forma direta ou indireta, contribuíram para minha formação.

RESUMO

HIPOELIPTICIDADE PARA OPERADORES LINEARES COM COEFICIENTES CONSTANTES

AUTOR: Nathan Kellermann
ORIENTADOR: Maurício Fronza da Silva

Nesta dissertação, desejamos apresentar a demonstração do Teorema da Regularidade Elíptica e do Teorema de Hörmander de caracterização de operadores lineares hipoelípticos de coeficientes constantes.

Palavras-chave: Equações Diferenciais. Regularidade. Operadores Hipoelípticos.

ABSTRACT

HYPOELLIPTICITY FOR LINEAR OPERATORS WITH CONSTANT COEFFICIENTS

AUTHOR: Nathan Kellermann
ADVISOR: Maurício Fronza da Silva

In this dissertation, we wish to present the proof of the Elliptic Regularity Theorem and the characterization of hypoelliptic linear operators with constant coefficients due to Lars Hörmander's.

Keywords: Differential Equations. Regularity. Hypoelliptic Operators.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Duas das principais Equações Diferenciais Parciais (EDP's) da Física-Matemática são as equações de Laplace e da onda,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \text{ e } \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0,$$

respectivamente. Embora as equações sejam muito parecidas, elas possuem propriedades significativamente diferentes. Enquanto as soluções da equação de Laplace, chamadas funções harmônicas (AXLER; BOURDON; RAMEY, 2001), possuem derivadas de todas as ordens, as soluções da equação da onda incluem funções da forma $u(t,x) = g(t-x)$, onde g pode ser qualquer função de classe C^2. Uma EDP de segunda ordem, como estas, pode ser escrita de uma forma mais geral:

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

a qual pode ser associada à cônica $Ax^2 + Bxy + Cy^2 = 0$.Quando $B^2 > 4AC$, $B^2 = 4AC$ e $B^2 < 4AC$ obtemos uma elipse, uma parábola ou uma hipérbole, respectivamente. Por analogia, as EDP's correspondentes recebem os nomes de elípticas, parabólicas ou hiperbólicas sob estas respectivas condições.

Assim, a equação de Laplace e da onda são os primeiros exemplos de EDP's elípticas e hiperbólicas, respectivamente. Para completar, temos a equação do calor

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0,$$

que é uma EDP parabólica.

Mesmo que a equação de Laplace e a do Calor pertençam a classes diferentes de EDP's, ambas possuem uma propriedade de regularidade em comum, chamada de hipoelipticidade. Um operador L é hipoelíptico quando, dada f e u uma solução de $Lu = f$, se f é suave então u também é suave.

Dentre os principais problemas associados ao estudo de EDP's podemos salientar a existência e a regularidade de soluções. Como vimos, a hipoelipticiade está associada ao segundo tipo de problema.

Em 1950, o matemático francês Laurent Schwartz recebeu a Medalha Fields pelo desenvolvimento da Teoria das Distribuições. Nas décadas seguintes as distribuições constituíram o ambiente de estudo de muitos problemas de EDP's. Como as distribuições formam um espaço fechado pela multiplicação por funções diferenciáveis, a teoria das EDP's lineares com coeficientes suaves teve grande impulso. Um dos mais importantes pesquisadores desta área foi o matemático sueco Lars Hörmander, que recebeu a Medalha Fields em 1962.

O objetivo deste texto é expor o teorema de caracterização dos operadores lineares hipoelípticos de coeficientes constantes de Lars Hörmander. O resultado apresenta cinco condições equivalentes à hipoelipticidade no caso de coeficientes constantes. Algumas delas são descrições algébricas e uma em termos de Espaços de Sobolev. Temos assim um belo resultado de conexão entre diferentes áreas da matemática. A demonstração do item associado aos espaços de Sobolev segue as ideias da prova do Teorema da Regularidade Elíptica.

O texto é organizado do seguinte modo. No Capítulo 2 temos uma introdução a notação e resultados que envolvem multi-índice, além de alguns teoremas essenciais sobre funções teste e distribuições. A Transformada de Fourier desempenha um papel crucial no texto e é apresentada no Capítulo 3, que contém ainda resultados úteis dos Espaços de Sobolev H_s. O Capítulo 4 traz o enunciado do Teorema de Malgrange-Ehrenpries, que estabelece a existência de solução fundamental para todo operador linear de coeficientes constantes, não identicamente nulo. Apresentamos aqui a relação entre solução fundamental e hipoelipticidade no caso de operadores de coeficientes constantes. Finalmente, o capítulo 5 está dedicado ao estudo dos principais resultados do texto, a saber, o Teorema da Regularidade Elíptica e o Teorema de Hörmander de caracterização de operadores hipoelípticos de coeficientes constantes. O Apêndice traz o enunciado do Teorema de Tarski-Seidenberg e uma de suas consequências, que tem papel importante na prova do Teorema de Hörmader.

2 PRELIMINARES

Este capítulo introduz a notação de multi-índice e alguns resultados sobre convolução de funções. Depois apresentamos os resultados úteis sobre as distribuições.

2.1 MULTI-ÍNDICE

Introduzimos agora a notação de multi-índice de Laurent Schwartz, que simplifica a escrita de derivadas e polinômios em várias variáveis. Chamamos de multi-índice os elementos $\alpha \in \mathbb{N}^n$, nesse caso, consideremos $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$. Deste modo, se $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, então definimos

$$|\alpha| := \sum_{j=1}^{n} \alpha_j.$$

Também incorporamos definições de análise combinatória:

$$\alpha! := \alpha_1! \dots \alpha_n!,$$

$$\binom{\alpha}{\beta} := \frac{\alpha!}{\beta!(\alpha - \beta)!}.$$

Ainda, definiremos $\alpha \leq \beta$ quando $\alpha_j \leq \beta_j$ para todo $1 \leq j \leq n$ e $\alpha < \beta$ quando $\alpha \leq \beta$ e existe $1 \leq j \leq n$ tal que $\alpha_j < \beta_j$. Além disso, para $x = (x_1, \dots, x_n)$, definimos $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot x_n^{\alpha_n}$. Com isso é possível obter a formulação do teorema binomial para multi-índice.

Teorema 2.1.1 [Teorema Binomial]. *Se $x, y \in \mathbb{C}^n$ e $\alpha \in \mathbb{N}^n$, então*

$$(x+y)^\alpha = \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} x^\beta y^{\alpha - \beta}.$$

Vale observar que $|x^\alpha| \leq |x|^{|\alpha|}, x \in \mathbb{R}^n, \alpha \in \mathbb{N}^n$. Podemos também obter uma desigualdade útil:

Observação 2.1.1 [GRUBB]. *Para todo $k \in \mathbb{N}$ existe $C_k > 0$ tal que para todo $x \in \mathbb{R}^n$ temos*

$$\sum_{|\alpha| \leq k} |x^\alpha|^2 \leq (1+|x|^2)^k \leq C_k \sum_{|\alpha| \leq k} |x^\alpha|^2, x \in \mathbb{R}^n. \tag{2.1}$$

Por fim, introduzimos uma notação conveniente para derivadas parciais. Se $f : \Omega \to \mathbb{C}^n$ é diferenciável no aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ então para $i = 1,2,\ldots$, $j = 1,2,\ldots,n$ se $x \in \Omega$ definimos $\partial_j^i f(x) := \frac{\partial^i f}{\partial x_j}(x)$. Mais geralmente, se f é de classe C^k então para cada $\alpha \in \mathbb{N}^n$ tal que $|\alpha| \leq k$ definimos $\partial^\alpha f(x) = \partial_1^{\alpha_1} \cdots \partial_n^{\alpha_n} f(x), x \in \Omega$. Com essa notação, estendemos resultados clássicos, como a Regra de Leibniz, para funções de várias variáveis.

Teorema 2.1.2 [Regra de Leibniz]. *Se $\alpha \in \mathbb{N}^n$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um aberto e $f,g \in C^{|\alpha|}(\Omega)$ então $fg \in C^{|\alpha|}(\Omega)$ e*

$$\partial^\alpha (fg) = \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \partial^\beta f \partial^{\alpha-\beta} g.$$

2.2 FUNÇÕES TESTE

Definição 2.2.1. *Seja X um espaço topológico e $f \in C(X)$, o* ***suporte*** *de f, denotado por* $\operatorname{supp} f$, *é definido como*

$$\operatorname{supp} f = \overline{\{x \in X : f(x) \neq 0\}}.$$

Observação 2.2.1. *Verifica-se que* $\operatorname{supp} f$ *é o menor conjunto fechado fora do qual f se anula, mais precisamente,*

$$\operatorname{supp} f = \bigcap \{F : F \textit{ é fechado e } f(x) = 0,\ \forall x \in X \setminus F\}.$$

Definição 2.2.2. *Dado um aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ e $k \in \mathbb{N}$, definimos o espaço vetorial complexo $C_c^k(\Omega)$ como o conjunto de todas as funções (reais ou complexas)*

$\varphi \in C^k(\Omega)$ que têm suporte compacto, considerado com as operações usuais de soma e multiplicação por escalar. Com isso, definimos também o espaço vetorial

$$C_c^\infty(\Omega) = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} C_c^k(\Omega),$$

*das funções infinitamente diferenciáveis com suporte compacto em Ω. Os elementos de $C_c^\infty(\Omega)$ serão chamados de **funções teste**. Denotamos por $C_c^\infty(K)$ o subconjunto de $C_c^\infty(\Omega)$ cujos elementos possuem suporte em $K \subset\subset \Omega$.*

Exemplo 2.2.1. *A função $\psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definida por*

$$\psi(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{|x|^2-1}} & se \ |x| < 1, \\ 0 & se \ |x| \geq 1. \end{cases}$$

pertence a $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ sendo $\operatorname{supp}(\psi) = B[0;1]$. Como $\int_{\mathbb{R}^n} \psi \mathrm{d}x > 0$, a função $\varphi = \psi / \int_{\mathbb{R}^n} \psi \mathrm{d}x$ também é uma função teste que tem as propriedades $0 \leq \varphi \leq 1$, $\operatorname{supp}(\varphi) = B[0;1]$ e $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi \mathrm{d}x = 1$.

Observação 2.2.2. *Para cada $\varepsilon > 0$, podemos utilizar a aplicação φ do exemplo anterior para definir a função φ_ε dada por $\varphi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n}\varphi(x/\varepsilon)$, $x \in \mathbb{R}^n$. Temos assim uma aplicação com as seguintes propriedades:*

1. $\varphi_\varepsilon \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$;
2. $\operatorname{supp}(\varphi_\varepsilon) = B[0;\varepsilon]$;
3. $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \varphi_\varepsilon \mathrm{d}x = 1$.

Utilizaremos a notação φ_ε para nos referirmos a funções que possuem as propriedades acima.

Com o resultado da observação anterior, é possível também provar que para todo aberto Ω e $K \subset\subset \Omega$, existe função $\psi \in C_c^\infty(\Omega)$ tal que $0 \leq \psi \leq 1$, com $\psi = 1$ em uma vizinhança de K. Mais geralmente temos o seguinte resultado.

Teorema 2.2.1. *Seja $K \subset\subset \mathbb{R}^n$ e sejam $V_1, \ldots, V_N$ conjuntos abertos e limitados tais que $K \subset \cup_{j=1}^N V_j$. Então existem funções $\varphi_1, \ldots, \varphi_k \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ tais que* *(i)* $0 \leq \varphi_j \leq 1$ *para* $1 \leq j \leq N$*;*

(ii) $\operatorname{supp} \varphi_j \subset V_i$ *para algum* $i \in \{1, \ldots, N\}$*;*

(iii) $\sum_{i=1}^{k} \varphi_j(x) = 1$ *para* $x \in K$*.*

Assim, nos referimos a $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_k\}$ *como a* ***partição da unidade*** *que está* ***subordinada*** *à* $\{V_1, \ldots, V_N\}$*.*

O estudo da topologia do espaço $C_c^\infty(\Omega)$ vai além dos objetivos deste trabalho. Assim adotamos a convergência em $C_c^\infty(\Omega)$ como uma definição.

Definição 2.2.3. *Seja* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *um aberto. Diremos que a sequência* $(\varphi_j) \subset C_c^\infty(\Omega)$ *converge para* φ *em* $C_c^\infty(\Omega)$ *quando*

1. $\exists K \subset\subset \Omega : \operatorname{supp}(\varphi_j) \subset K, \ \forall j \in \mathbb{Z}^+$*;*

2. $\forall \alpha \in \mathbb{N}^n, \ \partial^\alpha \varphi_j \to \partial^\alpha \varphi$ *uniformemente.*

Introduzimos a seguir uma ferramenta útil para regularizar funções.

Definição 2.2.4. *Se* f, g *são mensuráveis em* $\mathbb{R}^n$*, então a* ***convolução de*** f *e* g *é a função* $f * g$ *definida por*

$$(f * \varphi)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)\mathrm{d}y, \ \forall x \in \mathbb{R}^n \tag{2.2}$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x-y)\mathrm{d}y, \ \forall x \in \mathbb{R}^n. \tag{2.3}$$

para todo x *para o qual a integral exista.*

Algumas restrições podem ser impostas sobre f e g para garantir que a integral exista ao menos q.t.p., o teorema a seguir fornece uma delas.

Teorema 2.2.2 [Desigualdade de Young]. *Se* $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ *e* $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ *onde* $1 \leq p \leq \infty$*, então* $f * g(x)$ *existe para quase todo ponto* $x \in \mathbb{R}^n$*,* $f * g \in L^p$ *e* $\|f * g\|_p \leq \|f\|_1 \|g\|_p$*.*

Observação 2.2.3. *Quando uma das funções em* (2.2) *for uma função* φ_ε *para* $\varepsilon > 0$*, do Exemplo 2.2.2, obtemos a família de funções* $f_\varepsilon = f * \varphi_\varepsilon$*, chamadas de* ***regularizadas de*** f*.*

O próximo resultado justifica a nomenclatura.

Teorema 2.2.3 [EVANS]. *Dada* $f \in L^p_{loc}(\mathbb{R}^n), 1 \leq p < +\infty$, *e* $\varepsilon > 0$ *temos:*

(i) $f_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$*;*

(ii) $\operatorname{supp} f_\varepsilon \subset \operatorname{supp} f + B[0,\varepsilon]$. *Em particular* $f_\varepsilon \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ *caso* $\operatorname{supp} f \subset\subset \mathbb{R}^n$*; e*

(iii) Se $f \in C_c(\mathbb{R}^n)$ *então* $f_\varepsilon \to f$ *uniformemente quando* $\varepsilon \to 0$.

Corolário 2.2.1 [EVANS]. *Se* $1 \leq p < \infty$ *e* $f \in L^p_{loc}(\mathbb{R}^n)$*, então suas regularizadas têm as seguintes propriedades adicionais:*

(i) $\|f_\varepsilon\|_{L^p(K)} \leq \|f\|_{L^p(K)}$, $\forall K \subset\subset \mathbb{R}^n$, $\forall \varepsilon > 0$*;*

(ii) $\lim_{\varepsilon \to 0} \|f_\varepsilon - f\|_{L^p(K)} = 0$.

Corolário 2.2.2. *Sejam* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *aberto e* $1 \leq p < \infty$*, então* $C_c^\infty(\Omega)$ *é denso em* $L^p(\Omega)$.

2.3 DISTRIBUIÇÕES

Apresentaremos nesta seção a definição e propriedades das distribuições. As operações serão apresentadas de forma heurística, sem se aprofundar em questões como a topologia de C_c^∞. Para mais detalhes, pode-se consultar: (HOUNIE, 1979; RUDIN, 1991; GRUBB, 2009; HORVÁTH, 1966; SCHWARTZ, 1950-51; TREVES, 2016).

Definição 2.3.1. *Seja* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *aberto. Um funcional linear* $u : C_c^\infty(\Omega) \to \mathbb{C}$ *é* ***contínuo*** *quando, para toda sequência* $(\varphi_j)_{j\in\mathbb{N}} \subset C_c^\infty(\Omega)$ *tal que* $\varphi_j \to 0$*, temos* $\langle u, \varphi_j \rangle \to 0$*. Neste caso u é chamada de uma* ***distribuição*** *em* Ω*. O espaço vetorial das distribuições em* Ω *se denota por* $\mathscr{D}'(\Omega)$.

Exemplo 2.3.1. *Toda* $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ *define uma distribuição* $T_f : C_c^\infty(\Omega) \to \mathbb{C}$ *da forma*

$$\langle T_f, \varphi \rangle = \int_\Omega f\varphi, \ \varphi \in C_c^\infty(\Omega).$$

Observação 2.3.1. *A partir do exemplo anterior, faremos a identificação entre f e T_f, de modo que representaremos T_f apenas por f. Desse modo, cometemos o abuso de notação $L^1_{loc}(\Omega) \subset \mathscr{D}'(\Omega)$.*

Em alguns casos, podemos definir também uma distribuição associada a uma função que não é localmente integrável. A função $f(x) = 1/x$ não é localmente integrável nas vizinhanças da origem. No entanto, usando integração por partes e o teorema do Valor Médio, definimos a distribuição como o **valor principal** de $1/x$ que é denotada por $v.p.1/x$ e dada por

Exemplo 2.3.2.

$$\left\langle v.p.\frac{1}{x}, \varphi \right\rangle = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|x|>\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} \mathrm{d}x.$$

Exemplo 2.3.3. *Seja μ uma medida definida na σ-álgebra dos abertos de $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Supondo que $\mu(K) < \infty$ para todo compacto $K \subset \Omega$. Então, se $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$, temos que*

$$\langle \mu, \varphi \rangle = \int_\Omega \varphi \mathrm{d}\mu,$$

define uma distribuição.

A seguir apresentamos um importante exemplo de distribuição que não é definida por funções localmente integráveis.

Exemplo 2.3.4. *O funcional $\delta : C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{C}$, definido por $\langle \delta, \varphi \rangle = \varphi(0)$ é a distribuição conhecida como **Delta de Dirac**.*

Observação 2.3.2. $\delta \notin L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$

Suponha que existe $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ tal que $\langle \delta, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} f\varphi \mathrm{d}x, \forall \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. Então considere $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que $0 \leq \varphi \leq 1$, $\varphi(0) = 1$ e $\mathrm{supp}(\varphi) \subset B[0;r]$ para $r > 0$ arbitrário. Logo,

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{R}^n} f\varphi \mathrm{d}x \right| &\leq \int_{B[0,r]} |f| \, |\varphi| \, \mathrm{d}x \\ &\leq \int_{B[0,r]} |f| \, \mathrm{d}x, \end{aligned}$$

Neste caso, tomando r suficientemente pequeno, de modo que $\int_{B[0,r]} |f|\,\mathrm{d}x < 1$ (o que é possível pois $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$), obtemos uma contradição pois $\langle \delta, \varphi \rangle = \varphi(0) = 1$.

Apresentamos a seguir uma caracterização útil da continuidade de um funcional linear em $C_c^\infty(\Omega)$.

Teorema 2.3.1. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto e u um funcional linear em $C_c^\infty(\Omega)$. As seguintes condições são equivalentes:*

(i) u é contínuo.

(ii) Para cada $K \subset\subset \Omega$, existe $m \in \mathbb{Z}^+$ e $C \geq 0$ tais que

$$|\langle u, \varphi \rangle| \leq C \sum_{|\alpha| \leq m} \sup_{x \in K} |\partial^\alpha \varphi(x)|,$$

onde $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ com $\operatorname{supp} \varphi \subset K$.

2.4 OPERAÇÕES COM DISTRIBUIÇÕES

As operações de soma e produto por escalar são definidas de modo usual, tornando $\mathscr{D}'(\Omega)$ um espaço vetorial complexo. Ou seja, sendo $u, v \in \mathscr{D}'(\Omega)$ definimos:

(i) **Soma:** $\langle u + v, \varphi \rangle = \langle u, \varphi \rangle + \langle v, \varphi \rangle$ e

(ii) **Produto por escalar:** $\langle \lambda u, \varphi \rangle = \langle u, \lambda \varphi \rangle$, $\lambda \in \mathbb{C}, \varphi \in C_c^\infty(\Omega)$.

Já as outras operações, como as do cálculo, são definidas utilizando operadores adjuntos. Isto é, para cada transformação linear contínua L, deseja-se encontrar seu adjunto L^* de modo seja satisfeita a igualdade

$$\langle L\varphi, \psi \rangle = \langle \varphi, L^* \psi \rangle.$$

Com isso, dadas $u \in \mathscr{D}'(\Omega)$ e $f \in C^\infty(\Omega)$ definimos

(iii) **Produto por função C^∞:** $\langle fu, \varphi \rangle = \langle u, f\varphi \rangle$, $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$.

No caso das operações encontradas em cálculo integral, a inspiração vem da representações dos operadores adjuntos em forma integral,

$$\int_\Omega (L\varphi)\psi = \int_\Omega \varphi(L^*\psi),$$

Então se $u \in \mathscr{D}'(\Omega)$ e $j = 1, \ldots, n$ definimos:

(iv) **Derivação:** $\left\langle \partial_j u, \varphi \right\rangle = -\left\langle u, \partial_j \varphi \right\rangle$, $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$.

Mais geralmente, para cada $\alpha \in \mathbb{N}^n$ definimos

$$\langle \partial^\alpha u, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle u, \partial^\alpha \varphi \rangle, \varphi \in C_c^\infty(\Omega).$$

A mudança de variáveis para distribuições também é baseada na mudança de variáveis para a integração. Aqui denotamos por Jf a matriz jacobiana de uma função diferenciável f. Portanto, se $f : \Omega \to \Omega'$ for um difeomorfismo entre os abertos $\Omega, \Omega' \subset \mathbb{R}^n$, e $u \in \mathscr{D}'(\Omega')$, então definimos

(v) **Mudança de Variáveis:** $\langle u \circ f, \varphi \rangle = \left\langle u, \left(\varphi \circ f^{-1}\right) \left|J(f^{-1})\right| \right\rangle$, $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$.

Em particular, fixado $a \in \Omega$ consideramos a aplicação $\tau_a : x \mapsto x - a, x \in \Omega$, cuja inversa é dada por τ_{-a}. Podemos então definir a translação de distribuições $u \in \mathscr{D}'(\Omega)$ usando a regra da mudança de variáveis:

(vi) **Translação:** $\langle u \circ \tau_a, \varphi \rangle = \langle u, \varphi \circ \tau_{-a} \rangle$, $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$.

Por simplicidade, adotaremos $\varphi_a = \varphi \circ \tau_a$. De modo semelhante, utilizamos a mudança de variáveis $x \mapsto -x$ para definir $\check{\varphi}(x) = \varphi(-x), x \in \Omega$. Temos então a reflexão de $u \in \mathscr{D}'(\Omega)$:

(vii) **Reflexão** $\langle \check{u}, \varphi \rangle = \langle u, \check{\varphi} \rangle$, $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$.

Note que a definição de derivada distribucional permite obter derivadas de funções que não são diferenciáveis no sentido clássico.

Exemplo 2.4.1. *A função de* ***Heaviside*** $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *é definida por*

$$H(x) = \begin{cases} 0 & se\ x < 0, \\ 1 & se\ x \geq 0. \end{cases}$$

Identificando H com a distribuição por ela definida, temos que a derivada de H é igual a δ.

Considere $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$. Logo, $\varphi(x) \to 0$ quando $|x| \to \infty$, então

$$\left\langle H', \varphi \right\rangle = -\left\langle H, \varphi' \right\rangle = -\int_{-\infty}^{+\infty} H\varphi' \mathrm{d}x = -\int_0^{+\infty} \varphi' \mathrm{d}x = -\varphi\Big|_0^{+\infty} = \varphi(0) = \langle \delta, \varphi \rangle .$$

De modo similar ao exemplo anterior, podemos mostrar que a derivada, no sentido das distribuições, da função constante é nula.

Exemplo 2.4.2. *Fixada $c \in \mathbb{C}$ considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = c, x \in \mathbb{R}$. Dada $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ temos*

$$\left\langle c', \varphi \right\rangle = -\left\langle c, \varphi' \right\rangle = -\int_{-\infty}^{+\infty} c\varphi' \mathrm{d}x = c\varphi\Big|_{-\infty}^{+\infty} = 0 = \langle 0, \varphi \rangle .$$

Nosso próximo objetivo é identificar o dual de $C^\infty(\Omega)$ com um subespaço do conjunto das distribuições. Para isso, necessitamos da noção de suporte de uma distribuição.

Sejam U, Ω abertos de $\mathbb{R}^n$ tais que $U \subset \Omega$. Dada $\varphi \in C_c^\infty(U)$, definindo $\tilde{\varphi}(x) = \varphi(x)$, se $x \in U$, e $\tilde{\varphi}(x) = 0$ se $x \in \Omega \setminus U$, obtemos $\tilde{\varphi} \in C_c^\infty(\Omega)$ que é uma extensão de φ. Identificando φ com $\tilde{\varphi}$ utilizamos o símbolo $C_c^\infty(U) \subset C_c^\infty(\Omega)$ quando $U \subset \Omega$.

Definição 2.4.1. *Duas distribuições $u_1, u_2 \in \mathscr{D}'(\Omega)$ são iguais em um aberto $U \subset \Omega$ quando $\langle u_1, \varphi \rangle = \langle u_2, \varphi \rangle$, para toda $\varphi \in C_c^\infty(U)$.*

Definição 2.4.2. *O suporte de uma distribuição $u \in \mathscr{D}'(\Omega)$ é a interseção de todos os fechados de Ω fora dos quais temos $u = 0$. Isto é:*

$$\operatorname{supp} u = \bigcap \{F : F \textit{ é fechado e } \langle u, \varphi \rangle = 0, \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega \setminus F)\} .$$

Observação 2.4.1. $\operatorname{supp} f \subset \operatorname{supp} T_f$ *mas pode ocorrer que* $\operatorname{supp} T_f \not\subset \operatorname{supp} f$.

De fato, para verificar que $\operatorname{supp} f \subset \operatorname{supp} T_f$, considere $\varphi \in C_c^\infty(\Omega \setminus \operatorname{supp} f)$, nesse caso, $\operatorname{supp} \varphi \cap \operatorname{supp} f = \varnothing$. Então

$$\left\langle T_f, \varphi \right\rangle = \int_\Omega f\varphi \mathrm{d}x = \int_{\Omega \setminus \operatorname{supp} f} f\varphi \mathrm{d}x + \int_{\operatorname{supp} f} f\varphi \mathrm{d}x = 0.$$

Portanto $\Omega \setminus \operatorname{supp} f \subset \Omega \setminus \operatorname{supp} T_f$. Como contra-exemplo para a inclusão contrária, considere

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x = 0, \\ 0 & \text{se } x \neq 0. \end{cases}$$

Claramente, $f = 0$ q.t.p., portanto

$$\langle T_f, \varphi \rangle = \int_\Omega f \varphi \mathrm{d}x = 0,$$

para toda $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$, ou seja, $T_f = 0$. Logo $\operatorname{supp} T_f = \varnothing$, mas $\operatorname{supp} f = \{0\} \neq \varnothing$.

Exemplo 2.4.3. $\operatorname{supp} \delta = \{0\}$

Por $\{0\}$ ser fechado e $\langle \delta, \varphi \rangle = 0$ se $\varphi \in C_c^\infty(\Omega \setminus \{0\})$ segue, por definição, que $\operatorname{supp} \delta \subset \{0\}$. Por outro lado, considere $F \subset \Omega$, fechado e que $\langle \delta, \varphi \rangle = 0$ para $\varphi \in C_c^\infty(\Omega \setminus F)$. Certamente $\{0\} \subset F$, caso contrário deveríamos ter $\{0\} \subset \Omega \setminus F$ e, por existir $K \subset\subset \Omega \setminus F$ tal que $\{0\} \subset K$ podemos obter uma função $\psi \in C_c^\infty(\Omega \setminus F)$ com $\psi = 1$ em uma vizinhança de K. Nesse caso, teríamos $\langle \delta, \psi \rangle = \psi(0) = 1$ que é um contradição.

Definição 2.4.3. *Considere $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto. Dizemos que $u \in \mathscr{D}'(\Omega)$ é C^∞ no aberto $U \subset \Omega$ quando existe $f \in C^\infty(U)$ tal que $\langle u, \varphi \rangle = \langle f, \varphi \rangle$, para todo $\varphi \in C_c^\infty(U)$. Se $u \in \mathscr{D}'(\Omega)$, denominamos de **suporte singular** de u, simbolicamente* $\operatorname{singsupp}(u)$*, como a interseção de todos os subconjuntos fechados F de Ω tais que $u \in C^\infty(\Omega \setminus F)$.*

Observação 2.4.2. *Para toda $u \in \mathscr{D}'(\Omega)$, temos* $\operatorname{singsupp} u \subset \operatorname{supp} u$.

De fato, considere $\varphi \in C_c^\infty(\Omega \setminus \operatorname{supp} u)$, então $\langle u, \varphi \rangle = \langle 0, \varphi \rangle = 0$. Assim, por $0 \in C^\infty(\Omega \setminus \operatorname{supp} u)$ e como $\operatorname{supp} u$ é um dos conjuntos da interseção que define $\operatorname{singsupp} u$, temos $\operatorname{singsupp} u \subset \operatorname{supp} u$.

Exemplo 2.4.4. $\operatorname{singsupp} \delta = \{0\}$.

Da observação anterior, precisamos apenas verificar que $\{0\} \subset \operatorname{singsupp} \delta$. Assim, considere $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$. Seja F fechado tal que $\delta \in C^\infty(\mathbb{R}^n \setminus F)$. Logo, existe $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n \setminus F)$ tal que

$$\begin{aligned}\langle \delta, \varphi \rangle &= \langle f, \varphi \rangle \\ &= \int_{\mathbb{R}^n \setminus F} f(x)\varphi(x)\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

para toda $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n \setminus F)$. Se $\{0\} \subset \mathbb{R}^n \setminus F$, então pela Observação 2.3.2, isto não é possível. Logo $\{0\} \subset F$. Daí, $\{0\} \subset \operatorname{singsupp} \delta$.

Lema 2.4.1. *Suponha que f e g são distribuições em $\mathbb{R}^n$, que f é C^∞ em $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, e g tem suporte compacto. Então $f * g$ é C^∞ em $\mathbb{R}^n \setminus \operatorname{supp} g$.*

Definição 2.4.4. *Denotaremos por $\mathscr{E}'(\Omega)$ o subespaço de $\mathscr{D}'(\Omega)$ das distribuições com suporte compacto.*

Teorema 2.4.1. *Se $u \in \mathscr{E}'(\Omega)$, então existe um único funcional linear $\tilde{u} : C^\infty(\Omega) \to \mathbb{C}$ tal que*

(i) $\langle \tilde{u}, \varphi \rangle = \langle u, \varphi \rangle$, $\forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega)$;

(ii) $\langle \tilde{u}, \varphi \rangle = 0$, *se* $\varphi \in C^\infty(\Omega)$ *e* $\operatorname{supp}(\varphi) \cap \operatorname{supp}(u) = \varnothing$.

O estudo detalhado da topologia de $C^\infty(\Omega)$ está além dos objetivos deste trabalho. Adotaremos a convergência neste espaço como definição.

Definição 2.4.5. *Dizemos que uma sequência $(\varphi_j)_{j \in \mathbb{Z}^+} \subset C^\infty(\Omega)$ converge para φ em $C^\infty(\Omega)$ quando, para todo $K \subset\subset \Omega$ e todo $\alpha \in \mathbb{N}^n$, a sequência $(\partial^\alpha \varphi_j)_{j \in \mathbb{Z}^+}$ converge uniformemente para $\partial^\alpha \varphi$ em K.*

Definição 2.4.6. *Um funcional linear $u : C^\infty(\Omega) \to \mathbb{C}$ é dito* ***contínuo*** *quando, para toda sequência $(\varphi_j)_{j \in \mathbb{N}} \subset C^\infty(\Omega)$ tal que $\varphi_j \to 0$, temos $\langle u, \varphi_j \rangle \to 0$.*

Apresentamos a seguir uma caracterização dos elementos do dual de $C^\infty(\Omega)$.

Teorema 2.4.2. *Seja u um funcional linear em $C^\infty(\Omega)$. As seguintes condições são equivalentes:*

(i) *u é contínuo.*

(ii) Para cada $K \subset\subset \Omega$, existe $m \in \mathbb{Z}^+$ e $C \geq 0$ tais que

$$|\langle u, \varphi \rangle| \leq C \sum_{|\alpha| \leq m} \sup_{x \in K} |D^\alpha \varphi(x)|,$$

onde $\varphi \in C^\infty(\Omega)$ com $\operatorname{supp} \varphi \subset K$.

Teorema 2.4.3. *Para $u \in \mathscr{D}'(\Omega)$, as seguintes condições são equivalentes:*

(i) $u \in \mathscr{E}'(\Omega)$;

(ii) Existe um funcional linear contínuo $v : C^\infty(\Omega) \to \mathbb{C}$ tal que $v|_{C_c^\infty(\Omega)} = u$.

Observação 2.4.3. *Com os dois teoremas acima, é possível identificar $\mathscr{E}'(\Omega)$ com o espaço dos funcionais lineares contínuos em $C^\infty(\Omega)$.*

Adotamos a convergência pontual no espaço das distribuições. Com isso verificamos que toda distribuição é limite de uma sequência de distribuições de suporte compacto.

Definição 2.4.7. *Dizemos que uma sequência $(u_j)_{j \in \mathbb{Z}^+} \subset \mathscr{D}'(\Omega)$ converge a $u \in \mathscr{D}'(\Omega)$ se $\langle u_j, \varphi \rangle \to \langle u, \varphi \rangle$ para toda $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$. Neste caso escrevemos $u_j \to u$ em $\mathscr{D}'(\Omega)$.*

Teorema 2.4.4. *$\mathscr{E}'(\Omega)$ é denso em $\mathscr{D}'(\Omega)$.*

De modo similar as operações com distribuições, podemos nos inspirar na definição de convolução de funções para definir a convolução de uma distribuição com uma função.

Definição 2.4.8. *Seja $u \in \mathscr{D}'(\Omega)$ e $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$. Denotaremos por $u * \varphi : \Omega \to \mathbb{C}$ a função definida por $u * \varphi(x) = \langle u, \check{\varphi}_x \rangle$.*

A definição acima pode ser aplicada também para $u \in \mathscr{E}'(\Omega)$ e $\varphi \in C^\infty(\Omega)$.

Teorema 2.4.5. *Sejam $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$, $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. Então*

(i) $u * \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ e suas derivadas são dadas por

$$D^\alpha(u * \varphi) = (D^\alpha u) * \varphi = u * D^\alpha \varphi.$$

(ii) $\operatorname{supp}(u*\varphi) \subset \operatorname{supp}(u)+\operatorname{supp}(\varphi)$.

Os resultados do teorema acima também são válidos para $u \in \mathscr{E}'(\mathbb{R}^n)$ e $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Teorema 2.4.6. *Se $\varphi, \psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ e $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$*

$$(u*\varphi)*\psi = u*(\varphi*\psi).$$

Com este resultado, podemos obter a forma de $u*\varphi$ como distribuição:

$$\langle u*\varphi, \psi\rangle = ([u*\varphi]*\check{\psi})(0) = \langle u, (\varphi*\check{\psi})\check{}\rangle = \langle u, \check{\varphi}*\psi\rangle .$$

Além disso, podemos definir as regularizadas de uma distribuição e assim obter um resultado de aproximação.

Teorema 2.4.7. *Se $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$, então $u_\varepsilon \to u$ em $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$, quando $\varepsilon \to 0$.*

Exemplo 2.4.5. *$\varphi_\varepsilon \to \delta$ quando $\varepsilon \to 0$.*

Utilizando as regularizadas de uma distribuição obtemos o resultado de densidade que segue.

Corolário 2.4.1. *$C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ é denso em $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$.*

Teorema 2.4.8. *Seja $U : C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \to C^\infty(\mathbb{R}^n)$ um operador contínuo que comuta com todas as translações T_h, $h \in \mathbb{R}^n$. Então existe uma única $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ tal que $U\varphi = u*\varphi$, $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$.*

Do resultado anterior segue que a convolução entre duas distribuições, sendo uma delas de suporte compacto, está bem definida.

Definição 2.4.9. *Sejam $u_1, u_2 \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ e suponhamos que uma das duas tem suporte compacto. Definimos $v = u_1 * u_2$ como a única distribuição v tal que $u_1*(u_2*\varphi) = v*\varphi$.*

Teorema 2.4.9. *Sejam $u_1 \in \mathscr{E}'(\mathbb{R}^n)$, $u_2 \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$. Então $\operatorname{supp}(u_1*u_2) \subset \operatorname{supp}(u_1)+\operatorname{supp}(u_2)$ e $u_1*u_2 = u_2*u_1$.*

3 TRANSFORMADA DE FOURIER

A Transformada de Fourier constitui uma das ferramentas mais importantes para os capítulos que seguem, sendo utilizada para definir os Espaços de Sobolev, existência de solução fundamental para operadores de coeficientes constantes e demonstração dos teoremas principais do texto.

3.1 A TRANSFORMADA DE FOURIER DE FUNÇÕES INTEGRÁVEIS

As séries de Fourier estão entre as primeiras ferramentas utilizadas para a resolução EDP's. Sob certas condições, para uma função f definida no intervalo $[-L,L]$ podemos escrever

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} hc(\xi_k)e^{i\xi_k x}, x \in [-L,L],$$

sendo $h = \pi/L$, $\xi_k = kh$, $k \in \mathbb{Z}$ e

$$c(\xi_k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-L}^{L} e^{-ix\xi_k} f(x)\,\mathrm{dx}\,.$$

Formalmente, quando f está definida em toda a reta real, podemos tomar $L \to +\infty$ e $h \to 0$, de modo que obtemos

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} c(\xi)e^{i\xi x}\,\mathrm{d}\xi, x \in \mathbb{R},$$

e

$$c(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ix\xi} f(x)\,\mathrm{dx}\,.$$

Isso motiva a seguinte definição.

Definição 3.1.1. *Se $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, então a **Transformada de Fourier** de f é a* *função $\hat{f}:\mathbb{R}^n\to\mathbb{C}$ definida por:*

$$\hat{f}(\xi) := \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\cdot\xi} f(x)\mathrm{d}x,\ \xi\in\mathbb{R}^n,$$

onde $\cdot$ representa o produto interno canônico de $\mathbb{R}^n$.

Teorema 3.1.1. *A Transformada de Fourier $\hat{f}$ está bem definida, é uma função uniformemente contínua e limitada.*

Demonstração. A boa definição e a limitação seguem por $\left|\hat{f}(\xi)\right| \leq \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}$, para todo $\xi\in\mathbb{R}^n$. Para verificar a continuidade, considere $\varepsilon>0$ e observe que

$$\begin{aligned}\left|\hat{f}(\xi+\eta)-\hat{f}(\xi)\right| &\leq \int_{\mathbb{R}^n}\left|e^{-ix\cdot(\xi+\eta)}-e^{-ix\cdot\xi}\right||f(x)|\,\mathrm{d}x\\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n}\left|e^{-ix\cdot\eta}-1\right||f(x)|\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Então, por $\left|e^{-ix\cdot\eta}-1\right|\leq 2$ e $f\in L^1(\mathbb{R}^n)$, existe um conjunto $K\subset\subset\mathbb{R}^n$ tal que

$$\int_{\mathbb{R}^n\setminus K}\left|e^{-ix\cdot\eta}-1\right||f(x)|\,\mathrm{d}x<\frac{\varepsilon}{2}.$$

Além disso, existe $C>0$ tal que $|x|\leq C$ para todo $x\in K$. Portanto, por Cauchy-Schwarz, $|x\cdot\eta|\leq C|\eta|$ e assim, sendo $z\mapsto e^z$ contínua, existe $\delta>0$ tal que $\left|e^{-ix\cdot\eta}-1\right|<\varepsilon/(2[1+\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}])$ sempre que $|\eta|<\delta$. Deste modo

$$\begin{aligned}\left|\hat{f}(\xi+\eta)-\hat{f}(\xi)\right| &\leq \int_K\left|e^{-ix\cdot\eta}-1\right||f(x)|\,\mathrm{d}x+\int_{\mathbb{R}^n\setminus K}\left|e^{-ix\cdot\eta}-1\right||f(x)|\,\mathrm{d}x\\ &< \frac{\varepsilon}{2}\frac{\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}}{1+\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}}+\frac{\varepsilon}{2}\\ &\leq\varepsilon.\end{aligned}$$

Exemplo 3.1.1. *Se $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ é dada por $f(x)=e^{-a|x|}$ onde $a>0$ então, para $\xi\in\mathbb{R}^n$:*

$$\hat{f}(\xi)=\frac{2a}{\xi^2+a^2}.$$

De fato, basta calcular diretamente

$$\begin{aligned}
\hat{f}(\xi) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ix\xi} e^{-a|x|} \mathrm{d}x \\
&= \int_{-\infty}^{0} e^{-(i\xi - a)x} \mathrm{d}x + \int_{0}^{+\infty} e^{-(i\xi + a)x} \mathrm{d}x \\
&= -\frac{1}{i\xi - a} + \frac{1}{i\xi + a} \\
&= \frac{2a}{\xi^2 + a^2}.
\end{aligned}$$

□

Exemplo 3.1.2. *Se* $f(x) = e^{-a|x|^2}$ *onde* $a > 0$, *então*

$$\hat{f}(\xi) = \left[\frac{\pi}{a}\right]^{n/2} e^{-a^{-1}|\xi|^2/4}, \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Fazendo a mudança de variável $x \mapsto \sqrt{a}x$ e utilizando o Teorema de Fubini-Tonelli (TFT) (FOLLAND, 2013, p. 67, Teorema 2.37):

$$\begin{aligned}
\hat{f}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\cdot\xi} e^{-a|x|^2} \mathrm{d}x \\
&= a^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\cdot\xi/\sqrt{a} - |x|^2} \mathrm{d}x \\
&= a^{-n/2} \prod_{j=1}^{n} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ix_j\xi_j/\sqrt{a} - x_j^2} \mathrm{d}x_j.
\end{aligned}$$

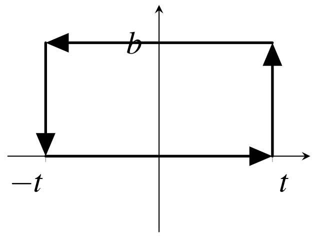
Completando quadrado no argumento do expoente:

$$i\frac{x_j\xi_j}{\sqrt{a}} + x_j^2 = \left[x_j + i\frac{\xi_j}{\sqrt{4a}}\right]^2 + \frac{\xi_j^2}{4a}.$$

Assim, cada integral fica na forma

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ix_j\xi_j/\sqrt{a} - x_j^2} \mathrm{d}x_j = e^{-a^{-1}\xi_j^2/4} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left[x_j + i\xi_j/\sqrt{4a}\right]^2} \mathrm{d}x_j.$$

Figura 3.1 – Representação do caminho para $b > 0$.



Por e^{-z^2} ser analítica, a integral sobre o contorno da figura 3.1 é zero, isto é:

$$\begin{aligned}\oint e^{-z^2}\mathrm{d}z &= \int_{-t}^{t} e^{-x^2}\mathrm{d}x + \int_0^b e^{-(t+iy)^2}\mathrm{d}y + \\ &+ \int_t^{-t} e^{-(x+ib)^2}\mathrm{d}x + \int_b^0 e^{-(-t+iy)^2}\mathrm{d}y \\ &= 0.\end{aligned}$$

Então, quando $t \to \infty$, temos

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x+ib)^2}\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}.$$

Assim,

$$\hat{f}(\xi) = a^{-n/2}\prod_{j=1}^{n} e^{-a^{-1}\xi_j^2/4}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left[x_j+i\xi_j/\sqrt{4a}\right]^2}\mathrm{d}x_j = \left[\frac{\pi}{a}\right]^{n/2} e^{-a^{-1}|\xi|^2/4}.$$

Apresentamos à seguir uma classe de funções que é invariante sob a Transformada de Fourier.

Definição 3.1.2. *O espaço vetorial*

$$\mathscr{S}(\mathbb{R}^n) = \left\{\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n) : \sup_{x\in\mathbb{R}^n}\left|x^\alpha\partial^\beta\varphi(x)\right| < \infty,\ \forall\alpha,\beta \in \mathbb{N}^n\right\}, \tag{3.1}$$

é chamado de espaço de ***Schwartz*** *ou espaço das* ***funções de decrescimento rápido****. Quando a dimensão estiver subentendida, utilizaremos apenas $\mathscr{S}$ para denotá-lo.*

Observação 3.1.1. *Para simplificar a notação, dado $\alpha \in \mathbb{N}^n$, a função $x \mapsto x^\alpha$, $x \in \mathbb{R}^n$ será denotada por x^α.*

Definição 3.1.3. *Dizemos que $(\varphi_j)_{j\in\mathbb{Z}^+} \subset \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ converge para φ em $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$*

quando $x^\alpha \partial^\beta \varphi_j \to x^\alpha \partial^\beta \varphi$ *uniformemente para todo* $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$.

Observação 3.1.2. *Observe que* $C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \subset \mathscr{S}$ *e se* $(\varphi_j) \subset C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ *e* $\varphi_j \to 0$ *em* $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ *então* $\varphi_j \to 0$ *em* $\mathscr{S}$. *Desse modo a inclusão de* $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ *em* $\mathscr{S}$ *é uma aplicação contínua.*

A inclusão no outro sentido não ocorre, como mostra o exemplo a seguir.

Exemplo 3.1.3. *Seja* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *definida por* $f(x) = e^{-|x|^2}$, *então* $f \in \mathscr{S}$ *mas* $f \notin C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Apresentamos a seguir maneiras alternativas de verificar que uma dada função de classe C^∞ tem decaimento rápido no infinito.

Lema 3.1.1. *Se* $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, *então as seguintes condições são equivalentes:*

(i) $\varphi \in \mathscr{S}$;

(ii) $\forall k \in \mathbb{N}$, $\forall \beta \in \mathbb{N}^n$ *vale* $\sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left(1 + |x|^2\right)^{k/2} \left|\partial^\beta \varphi(x)\right| < \infty$;

(iii) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$ *vale* $\lim_{|x| \to +\infty} \left|x^\alpha \partial^\beta \varphi(x)\right| = 0$.

Demonstração. i $\Rightarrow$ ii) Seja $\varphi \in \mathscr{S}$, então para todo $\alpha \in \mathbb{N}^n$ tal que $|\alpha| \leq k$, temos

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha| \left|\partial^\beta \varphi(x)\right| < \infty, \forall \beta \in \mathbb{N}^n.$$

Logo, por (2.1) e a desigualdade triangular, temos

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left(1 + |x|^2\right)^{k/2} \left|\partial^\beta \varphi(x)\right| \leq \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left(C_k^{1/2} \sum_{|\alpha| \leq k} |x^\alpha|\right) \left|\partial^\beta \varphi(x)\right| < \infty.$$

ii $\Rightarrow$ i) Se φ satisfaz (ii), então novamente por (2.1), temos

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha| \left|D^\beta \varphi(x)\right| \leq \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left(1 + |x|^2\right)^{|\alpha|/2} \left|D^\beta \varphi(x)\right| < \infty.$$

i $\Rightarrow$ iii) Observe que para $x \in \mathbb{R}^n$ vale $|x| \leq n^{1/2} \max_{1 \leq j \leq n} \left|x_j\right|$. Então, para $x \neq 0$, tomando x_k tal que $|x_k| = \max_{1 \leq j \leq n} \left|x_j\right|$, temos $n^{1/2} |x_k| / |x| \geq 1$. Logo, para $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$, $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ e $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ segue,

$$\begin{aligned}
\left|x^\alpha D^\beta \varphi(x)\right| &\leq \frac{n^{1/2}\,|x_k|}{|x|}\left|x^\alpha D^\beta \varphi(x)\right| \\
&= \frac{n^{1/2}}{|x|}\left|x^{\alpha+e_k} D^\beta \varphi(x)\right| \\
&\leq \frac{n^{1/2}}{|x|}\sup_{y\in\mathbb{R}^n}\left|y^{\alpha+e_k} D^\beta \varphi(y)\right|. \qquad (3.2)
\end{aligned}$$

Como (3.2) vale para todo $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, então $\lim_{|x|\to+\infty}\left|x^\alpha D^\beta \varphi(x)\right| = 0$.

iii) $\Rightarrow$ i) Seja $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$ temos $\lim_{|x|\to+\infty}\left|x^\alpha D^\beta \varphi(x)\right| = 0$. Logo existe $N > 0$ tal que $|x| > N$ implica $\left|x^\alpha D^\beta \varphi(x)\right| \leq 1$. Além disso, como $x^\alpha D^\beta \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, existe $A(\alpha,\beta) > 0$ tal que $\left|x^\alpha D^\beta \varphi(x)\right| \leq A(\alpha,\beta)$ para $|x| \leq N$. Portanto se $M(\alpha,\beta) = \max\{1, A(\alpha,\beta)\}$, então

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n}\left|x^\alpha D^\beta \varphi(x)\right| \leq M(\alpha,\beta) < \infty.$$

□

Teorema 3.1.2. *O espaço $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ é invariante sob derivação, multiplicação por polinômios e está contido em $L^p(\mathbb{R}^n)$ para $1 \leq p \leq \infty$.*

Demonstração. As duas primeiras afirmações seguem por $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \subset C^\infty(\mathbb{R}^n)$ e da regra de Leibniz. Para verificar a última afirmação, considere $1 \leq p < +\infty$ e $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, então

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} |\varphi|^p \,\mathrm{d}x &= \int_{\mathbb{R}^n}\left|\left(1+|x|^2\right)^{(n+1)/2}\varphi(x)\right|^p\left(1+|x|^2\right)^{-p(n+1)/2}\mathrm{d}x \\
&\leq \sup_{x\in\mathbb{R}^n}\left|\left(1+|x|^2\right)^{(n+1)/2}\varphi(x)\right|^p\int_{\mathbb{R}^n}\left(1+|x|^2\right)^{-p(n+1)/2}\mathrm{d}x \\
&< \infty.
\end{aligned}$$

onde a última desigualdade segue pelo Corolário 2.52 (FOLLAND, 2013, p. 79).

Para provar que $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \subset L^\infty(\mathbb{R}^n)$ basta tomar $\alpha = \beta = 0$ em (3.1). □

O próximo teorema diz que a Transformada de Fourier troca derivação por multiplicação polinomial.

Teorema 3.1.3. *Sejam* $\xi \in \mathbb{R}^n, \alpha \in \mathbb{N}^n$ *e* $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$*, então*

(i) $\mathcal{F}(\partial^\alpha \varphi)(\xi) = (i\xi)^\alpha \hat{\varphi}(\xi)$*;*

(ii) $\mathcal{F}(x^\alpha \varphi)(\xi) = i^{|\alpha|}\partial^\alpha \hat{\varphi}(\xi)$.

Demonstração. Fixe $\xi \in \mathbb{R}^n$ e considere $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, então $\partial_j \varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ para todo $j \in \{1,\ldots,n\}$ e, por $\varphi \in L^1(\mathbb{R}^n)$, vale o (TFT) (FOLLAND, 2013, p. 67, Teorema 2.37). Neste caso, sem perda de generalidade, considere $j = n$, então

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\cdot\xi}\partial_n \varphi(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ix_1\xi_1}\ldots e^{-ix_n\xi_n}\partial_n\varphi(x)\mathrm{d}x_1\ldots\mathrm{d}x_n.$$

Da integração por partes, temos

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ix_n\xi_n}\partial_n\varphi(x)\mathrm{d}x_n = i\xi_n\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ix_n\xi_n}\varphi(x)\mathrm{d}x_n.$$

Logo,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\cdot\xi}\partial_n \varphi(x)\mathrm{d}x &= i\xi_n\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ix_1\xi_1}\ldots e^{-ix_n\xi_n}\varphi(x)\mathrm{d}x_1\ldots\mathrm{d}x_n\\ &= i\xi_n\int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\cdot\xi}\partial_n\varphi(x)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Isto é, $\mathcal{F}(\partial^n\varphi)(\xi) = i\xi_n\hat{\varphi}(\xi)$. Em geral, dado $\alpha \in \mathbb{N}^n$ com $|\alpha| > 1$, escrevemos $\alpha = \beta + e_j$ sendo $\beta \in \mathbb{N}^n, |\beta| = |\alpha| - 1, j = 1,2,\ldots,n$ apropriados. Substituindo φ por $\partial^\beta\varphi$ no parágrafo acima provamos o item (i) por indução em $|\alpha|$.

Além disso, também podemos derivar sob o sinal de integração, logo

$$\partial_j\int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\cdot\xi}\varphi(x)\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n}(-ix_j)e^{-ix\cdot\xi}\varphi(x)\mathrm{d}x = -i\int_{\mathbb{R}^n} x_j e^{-ix\cdot\xi}\varphi(x)\mathrm{d}x.$$

Ou seja, $i\partial_j\hat{\varphi} = \mathcal{F}(x_j\varphi)(\xi)$. Por fim, basta utilizar indução e o item (ii) está provado. □

O espaço $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ é invariante sob a Transformada de Fourier.

Corolário 3.1.1. *Se* $\varphi \in \mathscr{S}$ *então* $\hat{\varphi} \in \mathscr{S}$.

Demonstração. De fato, para $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, o Teorema 3.1.3 garante que

$$\left|x^\alpha \partial^\beta \hat{\varphi}\right| = \left|x^\alpha \mathcal{F}(x^\beta \varphi)\right| = \left|\mathcal{F}(\partial^\alpha (x^\beta \varphi))\right|.$$

Então, pelo Teorema 3.1.2,

$$\left|\mathcal{F}(\partial^\alpha (x^\beta \varphi))(x)\right| \leq \left\|\partial^\alpha (x^\beta \varphi)\right\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} < \infty,$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$. Portanto $\sup_{x\in\mathbb{R}^n} \left|x^\alpha \partial^\beta \hat{\varphi}(x)\right| < \infty$. $\square$

Lema 3.1.2 [Riemann-Lebesgue]. *Se* $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ *então* $\lim_{|\xi|\to\infty} \hat{f}(\xi) = 0$.

Demonstração. Para todo $j \in \mathbb{Z}^+$, defina $f_j = \chi_{B(0,j)} f$. Logo $\left|f_j\right| \leq |f|$, então $(f_j)_{j\in\mathbb{Z}^+} \subset L^1(\mathbb{R}^n)$. Por $f_j \to f$ pontualmente, o Teorema da Convergência Dominada (TCD) (FOLLAND, 2013, p. 54, Teorema 2.24) garante que $f_j \to f$ em L^1. Com isso e a desigualdade

$$\left|\hat{f}_j(\xi) - \hat{f}(\xi)\right| \leq \int_{\mathbb{R}^n} \left|f_j(x) - f(x)\right| \mathrm{d}x,$$

que vale para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$, implica que $\hat{f}_j \to \hat{f}$ uniformemente. Por densidade, para todo $j \in \mathbb{Z}^+$, existe $(\varphi_{jk})_{k\in\mathbb{Z}^+} \subset C_c^\infty$ tal que $\varphi_{jk} \to f_j$ em L^1 quando $k \to +\infty$. Assim, por

$$\left|\hat{\varphi}_{jk}(\xi) - \hat{f}_j(\xi)\right| \leq \int_{\mathbb{R}^n} \left|\varphi_{jk}(x) - f_j(x)\right| \mathrm{d}x,$$

temos $\hat{\varphi}_{jk} \to \hat{f}_j$ uniformemente quando $k \to \infty$. Além disso, por $\hat{\varphi}_{jk}(\xi) \to 0$ quando $|\xi| \to +\infty$ e

$$\left|\hat{f}_j(\xi)\right| \leq \left|\hat{f}_j(\xi) - \hat{\varphi}_{jk}(\xi)\right| + \left|\hat{\varphi}_{jk}(\xi)\right|,$$

então $\hat{f}_j(\xi) \to 0$ quando $|\xi| \to \infty$. Por fim, temos

$$\lim_{|\xi|\to\infty} \left|\hat{f}(\xi)\right| = \lim_{|\xi|\to\infty} \lim_{m\to\infty} \left|\hat{f}_j(\xi)\right| = \lim_{m\to\infty} \lim_{|\xi|\to\infty} \left|\hat{f}_j(\xi)\right| = 0.$$

$\square$

Teorema 3.1.4. *A Transformada de Fourier* $\mathcal{F} : \mathscr{S} \to \mathscr{S}$ *é continuamente inver-*

sível, sendo $\mathcal{F}^{-1}$ dada por

$$\mathcal{F}^{-1}\varphi(x) = (2\pi)^{-n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{ix\cdot\xi}\varphi(\xi)\mathrm{d}\xi,\; x \in \mathbb{R}^n,\; \varphi \in \mathscr{S}.$$

Demonstração. Note que não é possível calcular $\mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}\varphi$ diretamente pois

$$\begin{aligned}\mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}\varphi(x) &= (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\xi\cdot x} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-iy\cdot\xi}\varphi(y)\mathrm{d}y\mathrm{d}\xi \\ &= (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-i(y-x)\cdot\xi}\varphi(y)\mathrm{d}y\mathrm{d}\xi.\end{aligned}$$

Logo, para $x = y$, não podemos trocar a ordem de integração porque $\varphi(y)$ não é integrável em ξ. O que impede o passo seguinte desse método. Portanto, prosseguiremos de outro modo: seja $\psi(x) = e^{-|x|^2/2}$. Então, para $0 < \varepsilon < 1$, defina $\psi_\varepsilon(x) = \psi(\varepsilon x)$. Logo, do exemplo 3.1.2, temos

$$\hat{\psi}_\varepsilon(\xi) = \left[\frac{\sqrt{\pi}}{\varepsilon^2}\right]^{n/2} e^{-\varepsilon^{-2}|\xi|^2/4} = \left[\frac{\sqrt{\pi}}{\varepsilon^2}\right]^{n/2} \psi\left(\frac{\xi}{\sqrt{2}\varepsilon}\right).$$

Ainda, para $g \in \mathscr{S}$, vale

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left|\psi_\varepsilon(\xi)e^{ix\cdot\xi}\hat{g}(\xi)\right| \mathrm{d}\xi \leq \int_{\mathbb{R}^n} |\hat{g}(\xi)|\,\mathrm{d}\xi < \infty.$$

logo, por $\psi_\varepsilon \to 1$ pontualmente quando $\varepsilon \to 0$ e pelo TCD, temos

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\cdot\xi}\hat{g}(\xi)\mathrm{d}\xi = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\mathbb{R}^n} \psi_\varepsilon(\xi)e^{ix\cdot\xi}\hat{g}(\xi)\mathrm{d}\xi.$$

Ainda, podemos reescrever a integral da direita utilizando o TFT (FOLLAND, 2013, p. 67, Teorema 2.37):

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} \psi_\varepsilon(\xi)e^{ix\cdot\xi}\hat{g}(\xi)\mathrm{d}\xi &= \int_{\mathbb{R}^n} \psi_\varepsilon(\xi)e^{ix\cdot\xi}\left[\int_{\mathbb{R}^n} e^{-iy\cdot\xi}g(y)\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^n}\left[\int_{\mathbb{R}^n} e^{-i(y-x)\cdot\xi}\psi_\varepsilon(\xi)\mathrm{d}\xi\right]g(y)\mathrm{d}y \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \hat{\psi}_\varepsilon(y-x)g(y)\mathrm{d}y \\ &= \int_{\mathbb{R}^n}\left[\frac{\sqrt{\pi}}{\varepsilon^2}\right]^{n/2}\psi\left(\frac{y-x}{\sqrt{2}\varepsilon}\right)g(y)\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

Com a mudança de variável $z = \varepsilon^{-1}(y-x)/\sqrt{2}$, obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^n} \psi_\varepsilon(\xi) e^{ix\cdot\xi} \hat{g}(\xi) \mathrm{d}\xi = (2\pi)^{n/2} \int_{\mathbb{R}^n} \psi(z)\, g(\sqrt{2}\varepsilon z + x) \mathrm{d}z.$$

Portanto, por continuidade:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\cdot\xi} \hat{g}(\xi) \mathrm{d}\xi &= (2\pi)^{n/2} \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\mathbb{R}^n} \psi(z)\, g(\sqrt{2}\varepsilon z + x) \mathrm{d}z \\
&= (2\pi)^{n/2} g(x) \int_{\mathbb{R}^n} \psi(z)\, \mathrm{d}z \\
&= (2\pi)^n g(x).
\end{aligned}$$

Isto prova a inversibilidade. Em virtude das definições de $\mathcal{F}$ e $\mathcal{F}^{-1}$ a prova da continuidade de $\mathcal{F}^{-1}$ é similar a da continuidade de $\mathcal{F}$. $\square$

Observação 3.1.3. *Da expressão para $\mathcal{F}^{-1}$ e uma mudança de variável $x \mapsto -x$, temos que $\mathcal{F}^{-1}\varphi = (2\pi)^{-n}\check{\hat{\varphi}}$.*

Teorema 3.1.5. *Se $\varphi, \psi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, então:*

(i) $\int_{\mathbb{R}^n} \hat{\varphi}\psi \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi\hat{\psi} \mathrm{d}x$;

(ii) $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi\overline{\psi} \mathrm{d}x = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{\varphi}\overline{\hat{\psi}} \mathrm{d}x$;

(iii) $\mathcal{F}(\varphi * \psi) = \hat{\varphi}\hat{\psi}$;

(iv) $\mathcal{F}(\varphi\psi) = (2\pi)^{-n}\hat{\varphi} * \hat{\psi}$.

Demonstração. O item (i) segue do TFT (FOLLAND, 2013, p. 67, Teorema 2.37):

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} \hat{\varphi}\psi \mathrm{d}x &= \int_{\mathbb{R}^n} \left[\int_{\mathbb{R}^n} e^{-iy\cdot x} \varphi(y) \mathrm{d}y\right] \psi(x) \mathrm{d}x \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(y) \left[\int_{\mathbb{R}^n} e^{-iy\cdot x} \psi(x) \mathrm{d}x\right] \mathrm{d}y \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \varphi\hat{\psi} \mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Da inversibilidade de $\mathcal{F}$ e do resultado em (i), temos

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi\overline{\psi} \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi\mathcal{F}\mathcal{F}^{-1}\overline{\psi} \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{\varphi}\mathcal{F}^{-1}\overline{\psi} \mathrm{d}x.$$

Observe que para todo $x \in \mathbb{R}^n$ temos

$$\mathcal{F}^{-1}\overline{\psi}(x) = (2\pi)^{-n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{iy\cdot x}\overline{\psi}(y)\mathrm{d}y = (2\pi)^{-n}\overline{\int_{\mathbb{R}^n} e^{-iy\cdot x\psi(y)}\mathrm{d}y} = (2\pi)^{-n}\overline{\hat{\psi}}(x).$$

Portanto (ii) está provado. Para o item (iii), observe que $\varphi * \psi \in L^1$ pois $\varphi, \psi \in \mathscr{S}$. Então, pelo Teorema de TFT (FOLLAND, 2013, p. 67, Teorema 2.37), para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$ temos

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(\varphi * \psi)(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\cdot\xi}\left[\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x-y)\psi(y)\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x \\ &= \int_{\mathbb{R}^n}\left[\int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\cdot\xi}\varphi(x-y)\mathrm{d}x\right]\psi(y)\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

Fazendo a mudança de variável $z = x - y$, temos

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(\varphi * \psi)(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^n}\left[\int_{\mathbb{R}^n} e^{-iz\cdot\xi}\varphi(z)\mathrm{d}z\right]e^{-iy\cdot\xi}\psi(y)\mathrm{d}y \\ &= \hat{\varphi}(\xi)\hat{\psi}(\xi).\end{aligned}$$

Por fim, para provar o item (iv), utilizamos a obervação 3.1.3 e o item (iii):

$$\begin{aligned}\mathcal{F}^{-1}\varphi(x)\mathcal{F}^{-1}\psi(x) &= (2\pi)^{-2n}\hat{\varphi}(-x)\hat{\psi}(-x) \\ &= (2\pi)^{-2n}\mathcal{F}(\varphi * \psi)(-x) \\ &= (2\pi)^{-n}\mathcal{F}^{-1}(\varphi * \psi)(x),\end{aligned}$$

portanto,

$$\mathcal{F}(\varphi\psi) = \mathcal{F}(\mathcal{F}^{-1}\hat{\varphi}\mathcal{F}^{-1}\hat{\psi}) = (2\pi)^{-n}\hat{\varphi} * \hat{\psi}.$$

$\square$

3.2 DISTRIBUIÇÕES TEMPERADAS

Nesta seção descrevemos uma classe de distribuições para as quais podemos definir a Transformada de Fourier.

Definição 3.2.1. *Uma* ***distribuição temperada*** *é um funcional linear contínuo em $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. A continuidade é definida sequencialmente, isto é, se u é um funcional contínuo em $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, então para toda sequência $(\varphi_j)_{j\in\mathbb{N}}$ tal que $\varphi_j \to 0$ em $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, segue que $\langle u, \varphi_j \rangle \to 0$. O espaço das distribuições temperadas será denotado por $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$.*

Teorema 3.2.1 [GRUBB]. *$C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ é denso em $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$.*

Demonstração. Considere $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que $0 \leq \varphi \leq 1$ e

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in B[0;1] \\ 0 & \text{se } x \in \mathbb{R}^n \setminus B[0;2] \end{cases}.$$

Defina $\varphi_j(x) = \varphi(x/j)$ para todo $j \in \mathbb{Z}^+, x \in \mathbb{R}^n$. Então $\varphi_j \to 1$ pontualmente quando $j \to \infty$. Assim, dada $\psi \in \mathscr{S}$, temos que $\varphi_j\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\varphi_j\psi = \psi$ quando $|x| \leq j$ e $\varphi_j\psi = 0$ quando $|x| \geq 2j$.

Resta verificar que $\varphi_j\psi \to \psi$ em $\mathscr{S}$. Pela regra de Leibniz, para cada $\beta \in \mathbb{N}^n, x \in \mathbb{R}^n$, temos

$$\partial^\beta \left(\left[\varphi_j(x) - 1 \right] \psi(x) \right) = \left[\varphi_j(x) - 1 \right] \partial^\beta \psi(x) + \\ + \sum_{0<\gamma\leq\beta} \binom{\beta}{\gamma} j^{-|\gamma|} \partial^\gamma \varphi(x/j) \partial^{\beta-\gamma} \psi(x).$$

Observe que $\left|\varphi_j(x) - 1\right| = 0$ para $|x| \leq j$ e $\left|\varphi_j(x) - 1\right| \leq 1$ para $|x| > j$. Além disso, $\operatorname{supp} \partial^\gamma \varphi(\cdot/j) \subset \mathbb{R}^n \setminus B[0;j]$ porque $\varphi(\cdot/j)$ é constante em $B[0;j]$. Assim, para $k \in \mathbb{N}$:

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n} (1+|x|^2)^{k/2} \left| \partial^\beta \left([\varphi_\varepsilon(x) - 1] \, \psi(x) \right) \right| = \sup_{|x|>j} (1+|x|^2)^{k/2} \\ \cdot \left| \partial^\beta \left([\varphi_\varepsilon(x) - 1] \, \psi(x) \right) \right|.$$

Agora, considere

$$C_1 = \sup_{|x|>j} (1+|x|^2)^{(k+1)/2} \left| \partial^\beta \psi(x) \right|,$$

$$C_2 = n \sup_{\gamma\leq\beta} \sup_{|x|>j} \binom{\beta}{\gamma} (1+|x|^2)^{k/2} \left| \partial^\gamma \varphi(x/j) \partial^{\beta-\gamma} \psi(x) \right|.$$

Logo, por $1 < (1+|x|^2)^{1/2}/j$ para $|x| > j$ e $j^{-|\gamma|} \leq j^{-1}$,

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n} \left| (1+|x|^2)^{k/2} \partial^\beta \left([\varphi_\varepsilon(x) - 1] \, \psi(x) \right) \right| \leq \frac{1}{j} [C_1 + C_2],$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Portanto $\varphi_j \psi \to \psi$ em $\mathscr{S}$ quando $j \to \infty$. □

Observação 3.2.1. *Devido a densidade de $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ em $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, podemos identificar $\mathscr{S}'$ com um subespaço de $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$.*

Apresentamos a seguir uma caracterização dos elementos de $\mathscr{S}'$, cuja demonstração será omitida por ser similar à do teorema 2.4.2.

Teorema 3.2.2. *Se u é um funcional linear em $\mathscr{S}$, então são equivalentes:*

(i) $u \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$*;*

(ii) Existem $M > 0$ e $m \in \mathbb{N}$ tais que

$$|\langle u, \varphi \rangle| \leq M \sum_{|\alpha|\leq m} \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \left| \left(1+|x|^2\right)^m \mathrm{D}^\alpha \varphi(x) \right|, \ \varphi \in \mathscr{S}, \ \alpha \in \mathbb{N}^n.$$

Segue dos Teoremas 2.4.2 e 3.2.2.

Observação 3.2.2. *$\mathscr{E}'(\mathbb{R}^n) \subset \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$, sendo que a inclusão de $\mathscr{E}'(\mathbb{R}^n)$ em $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ é uma aplicação contínua.*

Observação 3.2.3. *Se $p \geq 1$, então $L^p(\mathbb{R}^n) \subset \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$, sendo que a inclusão de $L^p(\mathbb{R}^n)$ em $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ é uma aplicação contínua. Isso segue da representação das funções $L^p(\mathbb{R}^n)$ como distribuição. Com isso, e do fato que $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \subset L^q(\mathbb{R}^n)$, a desigualdade de Hölder (FOLLAND, 2013, p. 182, Teorema 6.2) garante ao mesmo tempo a continência $L^p(\mathbb{R}^n) \subset \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ e a continuidade da inclusão.*

Definição 3.2.2. *Se $u \in \mathscr{S}'$ então a* ***transformada de Fourier*** *$\hat{u}$ de u, é a distribuição temperada definida da seguinte forma:*

$$\langle \hat{u}, \varphi \rangle = \langle u, \hat{\varphi} \rangle, \ \varphi \in \mathscr{S}.$$

Observe que a continuidade de $\hat{u}$ segue da continuidade de u. Quando for conveniente denotaremos a Transformada de Fourier da distribuição temperada u por $\mathcal{F}(u)$.

Exemplo 3.2.1. $\hat{\delta} = 1$.

Basta utilizar as definições da transformada de Fourier em $\mathscr{S}'$ e de δ:

$$\left\langle \hat{\delta}, \varphi \right\rangle = \langle \delta, \hat{\varphi} \rangle = \hat{\varphi}(0) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\mathrm{d}x = \langle 1, \varphi \rangle.$$

Apresentamos a seguir propriedades úteis da Transformada de Fourier em $\mathscr{S}'$.

Teorema 3.2.3.

(i) Se $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, então a Transformada de Fourier de f coincide com a Transformada de Fourier de f como distribuição temperada;

(ii) Se $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$, então $\hat{f} \in L^2(\mathbb{R}^n)$ e $\|f\|_2^2 = (2\pi)^{-n} \left\|\hat{f}\right\|_2^2$;

(iii) Se $u \in \mathscr{E}'(\mathbb{R}^n)$, então $\hat{u}$ é uma função $C^\infty(\mathbb{R}^n)$, definida por

$$\hat{u}(\xi) = \left\langle u, e^{-ix\cdot\xi} \right\rangle, \xi \in \mathbb{R}^n;$$

(iv) Se $\alpha \in \mathbb{N}^n$ e $u \in \mathscr{S}'$, então

(a) $\mathcal{F}(\partial^\alpha u) = (i\xi)^\alpha \hat{u}$;

(b) $\mathcal{F}(x^\alpha u) = i^{|\alpha|}\partial^\alpha \hat{u}$; e

(c) $\hat{\hat{u}} = (2\pi)^n \check{u}$.

Demonstração. Nesta demonstração denotamos $L^p(\mathbb{R}^n)$ por $L^p, p = 1,2$.

(i) Se $f \in L^1$ então do corolário 2.2.2 segue que existe uma sequência $(\varphi_j)_{j\in\mathbb{Z}^+} \subset \mathscr{S}$ tal que $\varphi_j \to f$ em L^1. Pelo TCD resulta $\hat{\varphi}_j \to \hat{f}$ em L^1. Assim, temos

$$\langle \hat{f}, \psi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} f\hat{\psi}\mathrm{d}x = \lim \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_j \hat{\psi}\mathrm{d}x = \lim \int_{\mathbb{R}^n} \hat{\varphi}_j \psi \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}\psi \mathrm{d}x.$$

(ii) Se $f \in L^2$ então do corolário 2.2.2 segue que existe uma sequência $(\varphi_j)_{j\in\mathbb{Z}^+} \subset \mathscr{S}$ tal que $\varphi_j \to f$ em L^2.

Precisamos provar que $\hat{\varphi}_j \to \hat{f}$ em L^2. Para isso veja que $\forall j \in \mathbb{N}$, pelo teorema 3.1.5 (ii) temos

$$\|\varphi_j\|_2^2 = \int_{\mathbb{R}^n} |\varphi_j|^2 \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_j \overline{\varphi}_j \mathrm{d}x = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{\varphi}_j \overline{\hat{\varphi}}_j \mathrm{d}x = (2\pi)^{-n} \|\hat{\varphi}_j\|_2^2.$$

Portanto, por continuidade da norma, sendo $(\varphi_j)_{j\in\mathbb{Z}^+}$ de Cauchy em L^2, então $(\hat{\varphi}_j)_{j\in\mathbb{Z}^+}$ também é de Cauchy em L^2. Nesse caso, por completitude, existe $g \in L^2$ tal que $\hat{\varphi}_j \to g$ em L^2.

Verifiquemos que $g = \hat{f}$. Considere $\psi \in \mathscr{S}$, então da desigualdade de Hölder (FOLLAND, 2013, p. 182, Teorema 6.2) e por $\mathscr{S} \subset L^2$, segue $\|\varphi_j\psi - f\psi\|_1 \to 0$. Assim,

$$\langle \hat{f}, \psi \rangle = \langle f, \hat{\psi} \rangle = \lim \langle \varphi_j, \hat{\psi} \rangle = \lim \langle \hat{\varphi}_j, \psi \rangle = \langle g, \psi \rangle. \tag{3.3}$$

Por ψ ser arbitrária, de (3.3) temos que $g = \hat{f}$. Logo,

$$\|f\|_2^2 = \lim \|\varphi_j\|_2^2 = (2\pi)^{-n} \lim \|\hat{\varphi}_j\|_2^2 = (2\pi)^{-n} \|\hat{f}\|_2^2.$$

(iii) Como $u \in \mathscr{E}'(\mathbb{R}^n)$ resulta que $u_\varepsilon = u * \varphi_\varepsilon \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n), \forall \varepsilon > 0$. Então pelo teorema 2.4.7 obtemos que $u_\varepsilon \to u$ em $\mathscr{E}'(\mathbb{R}^n)$. Em particular, temos $u_\varepsilon \to u$ em $\mathscr{S}'$, logo $\hat{u}_\varepsilon \to \hat{u}$ em $\mathscr{S}'$ pois: $\langle \hat{u}_\varepsilon, \varphi \rangle = \langle u_\varepsilon, \hat{\varphi} \rangle \to \langle u, \hat{\varphi} \rangle = \langle \hat{u}, \varphi \rangle$ quando $\varepsilon \to 0$. Por $\hat{u}_\varepsilon \in \mathscr{S} \subset L^1$ de (i) segue que

$$\hat{u}_\varepsilon(\xi) = \left\langle u * \varphi_\varepsilon, e^{-ix\cdot\xi} \right\rangle = \left\langle u, \check{\varphi}_\varepsilon * e^{-ix\cdot\xi} \right\rangle,$$

para $\xi \in \mathbb{R}^n$ e $\varepsilon > 0$. Além disso,

$$\check{\varphi}_\varepsilon * e^{-ix\cdot\xi}(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \check{\varphi}_\varepsilon(y) e^{-i\xi\cdot(x-y)} \mathrm{d}y = e^{-i\xi\cdot x} \int_{\mathbb{R}^n} \check{\varphi}_\varepsilon(y) e^{i\xi\cdot y} \mathrm{d}y = \hat{\varphi}_\varepsilon(\xi) e^{-ix\cdot\xi}.$$

Observando que $\hat{\varphi}_\varepsilon(\xi) = \hat{\varphi}(\varepsilon\xi)$ e como $\hat{\varphi}(0) = 1$, segue que $\hat{\varphi}_\varepsilon \to 1$ em $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ quando $\varepsilon \to 0$. Logo, $\hat{u}_\varepsilon(\xi) \to \left\langle u, e^{-ix\cdot\xi} \right\rangle = \hat{u}(\xi)$. Ainda, por continuidade e linearidade, temos indutivamente que

$$\partial_\xi^\alpha \left\langle \hat{u}, e^{-ix\cdot\xi} \right\rangle = \left\langle \hat{u}, \partial_\xi^\alpha e^{-ix\cdot\xi} \right\rangle,$$

para todo $\alpha \in \mathbb{N}^n$, o que implica $\hat{u} \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. (iv) (a) e (b) seguem do teorema 3.1.3 e da definição da transformada de Fourier em $\mathscr{S}'$. Por fim, (c) segue da observação 3.1.3. $\square$

Observação 3.2.4. *O resultado (iii) do Teorema 3.2.3 permite definir a transformada de Fourier para medidas sobre conjuntos compactos de uma maneira interessante. Por exemplo, dada uma medida μ_K sobre um compacto K, temos que*

$$\left\langle \mu_K, e^{-ix\cdot\xi} \right\rangle = \int_K e^{-ix\cdot\xi} \mathrm{d}\mu(x).$$

Exemplo 3.2.2. *Com a observação anterior em mente, vemos que a medida de superfície sobre o compacto $S[0,r]$, representada por σ_r, tem transformada de Fourier dada por:*

$$\hat{\sigma}_r(\xi) = \left\langle \sigma_r, e^{-ix\cdot\xi} \right\rangle = \int_{|x|=r} e^{-ix\cdot\xi} \mathrm{d}\sigma_r(x).$$

Para o caso particular $n = 3$ observamos que podemos escrever $x \cdot \xi = r|\xi|\cos(\theta)$ sendo θ o ângulo definido pelos vetores x e ξ. Considerando ξ como a direção *z, temos para* $\xi \neq 0$:

$$\begin{aligned}
\hat{\sigma}_r(\xi) &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} e^{-i|\xi|r\cos(\theta)} r^2 \operatorname{sen}(\theta) \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\phi \\
&= \frac{-2i\pi r}{|\xi|} \int_0^{\pi} e^{-i|\xi|r\cos(\theta)} \left(-i|\xi| r \operatorname{sen}(\theta)\right) \mathrm{d}\theta \\
&= \frac{-2i\pi r}{|\xi|} e^{-i|\xi|r\cos(\theta)} \Big|_0^{\pi} \\
&= \frac{-2i\pi r}{|\xi|} \left[e^{i|\xi|r} - e^{-i|\xi|r}\right] \\
&= 4\pi r \frac{\operatorname{sen}(|\xi| r)}{|\xi|}.
\end{aligned} \tag{3.4}$$

Finalizamos esta seção com mais algumas propriedades úteis da transformada de Fourier em $\mathscr{S}'$.

Teorema 3.2.4. *Se* $u \in \mathscr{S}'$ *e* $\varphi \in \mathscr{S}$*, então*

(i) $\langle u, \varphi \rangle = (2\pi)^{-n} \left\langle \hat{u}, \check{\hat{\varphi}} \right\rangle$*; e*

(ii) $\mathcal{F}(\varphi u) = (2\pi)^{-n} \hat{\varphi} * \hat{u}$.

Demonstração. De fato, considere $\varphi \in \mathscr{S}$. Então da Observação 3.1.3, segue (i):

$$\langle u, \varphi \rangle = \left\langle u, \mathcal{F}\mathcal{F}^{-1}\varphi \right\rangle = \left\langle \hat{u}, \mathcal{F}^{-1}\varphi \right\rangle = (2\pi)^{-n} \left\langle \hat{u}, \check{\hat{\varphi}} \right\rangle,$$

e (ii):

$$\begin{aligned}
\langle \mathcal{F}(\varphi u), \psi \rangle &= \langle \varphi u, \hat{\psi} \rangle \\
&= \langle u, \varphi \hat{\psi} \rangle \\
&= \left\langle u, \mathcal{F}\left(\mathcal{F}^{-1}\varphi\right) * \psi \right\rangle \\
&= \left\langle \hat{u}, \mathcal{F}^{-1}\varphi * \psi \right\rangle \\
&= \left\langle \hat{u} * (\mathcal{F}^{-1}\varphi)\check{}, \psi \right\rangle \\
&= (2\pi)^{-n} \langle \hat{u} * \hat{\varphi}, \psi \rangle .
\end{aligned}$$

$\square$

3.3 OS ESPAÇOS DE SOBOLEV H_s

Nesta seção utilizamos a transformada de Fourier para introduzir os Espaços de Sobolev H_s, começando pelo caso em que s é um inteiro positivo.

Definição 3.3.1. *Se $k \in \mathbb{Z}^+$, definimos o* ***espaço de Sobolev*** *$H_k = H_k(\mathbb{R}^n)$* ***de ordem k*** *como o conjunto de todas funções $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ cujas derivadas parciais (no sentido das distribuições) de ordem menores ou iguais k pertencem a $L^2(\mathbb{R}^n)$. De outra forma:*

$$H_k = \left\{ f \in L^2 : \partial^\alpha f \in L^2 \text{ para } |\alpha| \leq k \right\}.$$

O conjunto H_k é um espaço vetorial normado quando considerado com as operações usuais e a norma dada por

$$f \mapsto \left[\sum_{|\alpha| \leq k} \|\partial^\alpha f\|_{L^2}^2 \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Vejamos agora uma caracterização de H_k em termos da transformada de Fourier.

Teorema 3.3.1. *$f \in H_k$ se e somente se $(1+|\xi|^2)^{k/2}\hat{f} \in L^2$ e as normas em H_k, $\|\cdot\|$ e*

$$f \mapsto \left[\int_{\mathbb{R}^n} \left|\hat{f}(\xi)\right|^2 (1+|\xi|^2)^k \mathrm{d}\xi \right]^{1/2}$$

são equivalentes.

Demonstração. Se $f \in H_k$ então $\|\partial^\alpha f\|_{L^2}^2 < \infty$ para todo $|\alpha| \leq k$. Logo, pelos teoremas 3.2.3 (ii) e 3.1.3, temos

$$\begin{aligned}\sum_{|\alpha|\leq k} \|\partial^\alpha f\|_{L^2}^2 &= \sum_{|\alpha|\leq k} (2\pi)^{-n} \left\|(-i\xi)^\alpha \hat{f}\right\|_{L^2}^2 \\ &= (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \left(\sum_{|\alpha|\leq k} |\xi^\alpha|^2 \right) \left|\hat{f}\right|^2 \mathrm{d}\xi.\end{aligned}$$

Logo por (2.1), temos que existe $C_k > 0$ tal que

$$\frac{1}{C_k(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \left|\hat{f}(\xi)\right|^2 (1+|\xi|^2)^k \mathrm{d}\xi \leq \sum_{|\alpha|\leq k} \|\partial^\alpha f\|_{L^2}^2$$

e

$$\leq \sum_{|\alpha|\leq k} \|\partial^\alpha f\|_{L^2}^2 \leq \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \left|\hat{f}(\xi)\right|^2 (1+|\xi|^2)^k \mathrm{d}\xi$$

o que garante a equivalência das normas e que $(1+|\xi|)^{k/2}\hat{f} \in L^2$.

Analogamente, supondo $(1+|\xi|)^{k/2}\hat{f} \in L^2$ obtemos que $f \in H_k$. □

O Teorema 3.3.1 motiva a introdução dos Espaços de Sobolev com expoente fracionário.

Observação 3.3.1. *Se $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é tal que $(1+|x|^2)^{s/2} f \in L^2$, onde $s \in \mathbb{R}$, então para cada $\varphi \in \mathscr{S}$ segue que $f\varphi \in L^1$. Logo f define a distribuição temperada dada por*

$$\langle f, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x)\mathrm{d}x,$$

onde $\varphi \in \mathscr{S}$.

De fato, veja que por Hölder (FOLLAND, 2013, p. 182, Teorema 6.2):

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)\varphi(x)|\,\mathrm{d}x &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|\,(1+|x|^2)^{s/2}\,|\varphi(x)|\,(1+|x|^2)^{-s/2}\mathrm{d}x \\ &\leq \left[\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^2 (1+|x|^2)^s \mathrm{d}x\right]^{1/2} \left[\int_{\mathbb{R}^n} |\varphi(x)|^2 (1+|x|^2)^{-s} \mathrm{d}x\right]^{1/2} \\ &\leq C_1 \left[\int_{\mathbb{R}^n} |\varphi(x)|^2 (1+|x|^2)^{-s} \mathrm{d}x\right]^{1/2}.\end{aligned}$$

Onde $C_1 = \left\| f(1+|x|^2)^{s/2} \right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} < \infty$ por hipótese. Além disso,

$$(1+|x|^2)^{-s} \leq (1+|x|^2)^{|s|}.$$

Assim, tome $k \in \mathbb{Z}^+$ tal que $|s| \leq (k+1)$, logo

$$(1+|x|^2)^{-s} \leq (1+|x|^2)^{n(k+1)} = (1+|x|^2)^{2n(k+1)}(1+|x|^2)^{-n(k+1)}.$$

Portanto,

$$|\varphi(x)|^2\,(1+|x|^2)^{-s} \leq \sup_{y\in\mathbb{R}^n} \left|\varphi(y)(1+|y|^2)^{n(k+1)}\right|^2 (1+|x|^2)^{-n(k+1)}.$$

Do Corolário 2.52 (FOLLAND, 2013, p. 79), segue que $C_2 = \int_{\mathbb{R}^n}(1+|x|^2)^{-n(k+1)} < \infty$. Deste modo, considerando $M = C_1C_2$, temos:

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)\varphi(x)|\,\mathrm{d}x \leq M \sup_{y\in\mathbb{R}^n} \left|\varphi(y)(1+|y|^2)^{n(k+1)}\right|^2.$$

Ou seja, $u\varphi \in L^1(\mathbb{R}^n)$ para toda $\varphi \in \mathscr{S}$ e ainda, por $|\langle f,\varphi\rangle| \leq \int_{\mathbb{R}^n}|f\varphi|$, segue que $f \in \mathscr{S}'$. Da observação 3.3.1 temos $\hat{f} \in \mathscr{S}'$. Com esse resultados, motivamos a seguinte definição:

Definição 3.3.2. *Se $s \in \mathbb{R}$, $f \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ e $\hat{f}$ é uma função então definimos a* ***norma Sobolev de ordem s*** *por:*

$$\|f\|_s^2 := \int_{\mathbb{R}^n} \left|\hat{f}(\xi)\right|^2 (1+|\xi|^2)^s \mathrm{d}\xi.$$

Definição 3.3.3. *Se $s \in \mathbb{R}$, definimos o* **espaço de Sobolev** *$H_s = H_s(\mathbb{R}^n)$* ***de ordem s*** *como o subconjunto de $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ cujos elementos tem como transformada de Fourier funções com norma de Sobolev finitas, isto é:*

$$H_s = \left\{ f \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n) : \hat{f} \ \textit{é uma função e} \ \ \|f\|_s^2 < \infty \right\}.$$

A seguir estendemos o Teorema 3.3.1 para expoentes fracionários.

Teorema 3.3.2. *Suponha que $k \in \mathbb{Z}^+$, $s \in \mathbb{R}$ e $f \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$. Então $f \in H_s$ se, e* *somente se,* $\partial^\alpha f \in H_{s-k}$ *para* $|\alpha| \le k$*, e as normas em* H_s *dadas por*

$$f \mapsto \|f\|_s \text{ e } f \mapsto \left[\sum_{|\alpha|\le k} \|\partial^\alpha f\|_{s-k}^2\right]^{1/2}, f \in H_s,$$

são equivalentes. Em particular, para todo $s \in \mathbb{R}$ *temos que* $\partial^\alpha : H_s \to H_{s-k}$ *é um operador limitado quando* $|\alpha| \le k$*.*

Demonstração. Conforme a prova do teorema 3.3.1, observamos que

$$\begin{aligned}
\sum_{|\alpha|\le k} \|\partial^\alpha f\|_{s-k}^2 &= \sum_{|\alpha|\le k} \int_{\mathbb{R}^n} |\mathcal{F}(\partial^\alpha f)(\xi)|^2 (1+|\xi|^2)^{s-k} \mathrm{d}\xi \\
&= \sum_{|\alpha|\le k} \int_{\mathbb{R}^n} \left|\hat{f}(\xi)\right|^2 (1+|\xi|^2)^s |\xi^\alpha|^2 (1+|\xi|^2)^{-k} \mathrm{d}\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \left|\hat{f}(\xi)\right|^2 (1+|\xi|^2)^s \left(\sum_{|\alpha|\le k} |\xi^\alpha|^2\right) (1+|\xi|^2)^{-k} \mathrm{d}\xi.
\end{aligned}$$

Por (2.1) temos que

$$\frac{1}{C_k} \le \left(\sum_{|\alpha|\le k} |\xi^\alpha|^2\right) (1+|\xi|^2)^{-k} \le 1.$$

Nesse caso,

$$\frac{1}{C_k} \int_{\mathbb{R}^n} \left|\hat{f}(\xi)\right|^2 (1+|\xi|^2)^s \mathrm{d}\xi \le \sum_{|\alpha|\le k} \|\partial^\alpha f\|_{s-k}^2 \le \int_{\mathbb{R}^n} \left|\hat{f}(\xi)\right|^2 (1+|\xi|^2)^s \mathrm{d}\xi.$$

Ou seja,

$$\frac{1}{C_k} \|f\|_s^2 \le \sum_{|\alpha|\le k} \|\partial^\alpha f\|_{s-k}^2 \le \|f\|_s^2.$$

Portanto $f \in H_s$ se e somente se $\partial^\alpha f \in H_{s-k}$ para todo $|\alpha| \le k$. A limitação do operador $\partial^\alpha : H_s \to H_{s-k}$ segue da equivalência das duas normas em H_s consideradas acima. □

Observação 3.3.2. *Para todo* $s \in \mathbb{R}$*,* H_s *é um espaço de Hilbert com produto interno definido por:*

$$\langle f|g\rangle_s := \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi)\overline{\hat{g}(\xi)} \mathrm{d}\mu,$$

onde $f,g \in H_s$ *e* $\mathrm{d}\mu = (1+|\xi|^2)^s \mathrm{d}\xi$.

Observação 3.3.3. *Consideremos a medida definida por* $\mathrm{d}\mu(\xi) = (1+|\xi|^2)^s \mathrm{d}\xi$, *onde* $s \in \mathbb{R}$ *é fixo. Então* $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ *é denso em* $L^2(\mu)$ *e* $\mathcal{F} : H_s \to L^2(\mu)$ *é um isomorfismo tal que* $\|f\|_s^2 = (2\pi)^n \|\hat{f}\|_{L^2(\mu)}^2$.

Observação 3.3.4. *Sendo* H_s *um espaço de Hilbert, ele é naturalmente isomorfo ao seu dual* $(H_s)^*$. *No entanto, existe um anti-isomorfismo igualmente natural entre* $(H_s)^*$ *e* H_{-s}.

Teorema 3.3.3. *Se* $s \leq t$ *então* $H_t \subset H_s$ *e a inclusão de* H_t *em* H_s *é uma aplicação contínua.*

Demonstração. Basta observar que $(1+|\xi|^2)^s \leq (1+|\xi|^2)^t$, então $\|f\|_s \leq \|f\|_t$, onde a última desigualdade garante também a continuidade da inclusão. $\square$

Exemplo 3.3.1. *A função* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *definida por* $f(x) = (2\pi x)^{-1} \operatorname{sen}(ax)$, *para* $a > 0$, *pertence a* $H_s(\mathbb{R})$, *para todo* $s \in \mathbb{R}$.

De fato, observe que para cada $x \in \mathbb{R}^n$ temos

$$\mathcal{F}^{-1}\left(\chi_{[-a,a]}\right)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\xi}\chi_{[-a,a]}\mathrm{d}\xi = \frac{1}{2\pi}\int_{-a}^{a} e^{ix\xi}\mathrm{d}\xi$$
$$= \frac{1}{2\pi i x} e^{ix\xi}\Big|_{-a}^{a} = \frac{1}{2\pi x}\operatorname{sen}(ax).$$

Por $\chi_{[-a,a]} \in \mathscr{S}'$ e $\hat{f} = \chi_{[-a,a]}$ resulta $\hat{f}(1+|\xi|^2)^s \in L^2(\mathbb{R})$, para todo $s \in \mathbb{R}$. Logo, f é um exemplo de função que não decai rapidamente no infinito mas está em $H_s(\mathbb{R})$.

Exemplo 3.3.2. *Temos* $\delta \in H_s$ *se e somente se* $s < -n/2$.

De fato, como $\hat{\delta} = 1$ então

$$\|\delta\|_s^2 = \int_{\mathbb{R}^n} \left|\hat{\delta}(\xi)\right|^2 (1+|\xi|^2)^s \mathrm{d}\xi = \int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^2)^s \mathrm{d}\xi,$$

que é integrável se, e somente, se $s < -n/2$.

Lema 3.3.1 [Sobolev]. *Se $k \in \mathbb{Z}^+$ e $s > k + n/2$, então $H_s \subset C^k(\mathbb{R}^n)$ e existe uma constante $C = C_{s,k} > 0$ tal que*

$$\sup_{|\alpha| \leq k} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |\partial^\alpha f(x)| \leq C \|f\|_s, \forall f \in H_s.$$

Demonstração. Pela fórmula de inversão da transformada de Fourier, se $\alpha \in \mathbb{N}^n$ e $f \in \mathscr{S}'$ são tais que $\mathcal{F}(\partial^\alpha f) \in L^1$, então

$$\partial^\alpha f(x) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\cdot\xi} \mathcal{F}(\partial^\alpha f)(\xi) \mathrm{d}\xi,\ x \in \mathbb{R}^n,$$

portanto, pelo Teorema 3.1.4, resulta que $\partial^\alpha f$ é contínua e, além disso,

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} |\partial^\alpha f(x)| \leq (2\pi)^{-n} \|\mathcal{F}(\partial^\alpha f)\|_{L^1}.$$

Então, para concluir a demonstração do teorema é suficiente provar que se $s > k + n/2$ e $f \in H_s$ então $\mathcal{F}(\partial^\alpha f) \in L^1$. Para isso, observe que por $s > k + n/2$ e $\partial^\alpha f \in H_{s-k}$ temos, pela desigualdade de Hölder (FOLLAND, 2013, p. 182, Teorema 6.2):

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{F}(\partial^\alpha f)\|_{L^1} &\leq \left\|\mathcal{F}(\partial^\alpha f)(1+|\xi|^2)^{(s-k)/2}\right\|_{L^2} \left\|(1+|\xi|^2)^{(k-s)/2}\right\|_{L^2} \\
&= C \|\partial^\alpha f\|_{s-k},
\end{aligned}$$

onde, pelo Corolário 2.52 (FOLLAND, 2013, p. 79), temos $C = \left\|(1+|\xi|^2)^{(k-s)/2}\right\|_{L^2} < \infty$. Note que $\|\partial^\alpha f\|_{s-k} \leq \sum_{|\beta| \leq k} \left\|\partial^\beta f\right\|_{s-k}$ e da equivalência das normas em H_s (Teorema 3.3.2), existe $C' > 0$ tal que $\|\mathcal{F}(\partial^\alpha f)\|_{L^1} \leq C' \|f\|_s$ para todo $|\alpha| \leq k$, o que conclui a prova. $\square$

Corolário 3.3.1. *Se $f \in H_s$ para todo $s \in \mathbb{R}$, então $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.*

Demonstração. De fato, pois nesse caso, para todo $k \in \mathbb{Z}^+$ existe $s \in \mathbb{R}$ tal que $s > k + n/2$. Logo, do teorema anterior, $f \in C^k$. $\square$

A seguir mostramos que toda distribuição com suporte compacto pertence a algum espaço de Sobolev.

Corolário 3.3.2. *$\mathscr{E}'(\mathbb{R}^n) \subset H_s$ para algum $s \in \mathbb{R}$.*

Demonstração. De fato, seja $u \in \mathscr{E}'(\mathbb{R}^n)$ e $\varphi \in C^\infty$. Então existem $k \in \mathbb{Z}^+$, $K \subset\subset \mathbb{R}^n$ e $C > 0$ tais que

$$|\langle u, \varphi \rangle| \leq C \sum_{|\alpha| \leq k} \sup_{x \in K} |\partial^\alpha \varphi(x)| \leq C' \|\varphi\|_s,$$

onde a última desigualdade segue direto do teorema anterior para $s = k + n/2 + 1$. Mas, a desigualdade acima implica que u pode ser estendido a um funcional linear limitado em H_s, isto é $u \in H_s^*$. Então, pelo Teorema 3.3.4, segue que $u \in H_{-s}$. □

Apresentamos a seguir uma desigualdade útil para os resultados que seguem.

Lema 3.3.2. *Para todo* $\xi, \eta \in \mathbb{R}^n$ *e todo* $s \in \mathbb{R}$ *vale*

$$\left(\frac{1 + |\xi|^2}{1 + |\eta|^2} \right)^s \leq 2^{|s|} (1 + |\xi - \eta|^2)^{|s|}.$$

Demonstração. Pela desigualdade triangular, $|\xi| \leq |\xi - \eta| + |\eta|$, logo

$$|\xi|^2 \leq |\xi - \eta|^2 + |\eta|^2 + 2|\xi - \eta||\eta| \leq 2|\xi - \eta|^2 + 2|\eta|^2.$$

Assim,

$$\begin{aligned} 1 + |\xi|^2 &\leq 2 + 2|\xi - \eta|^2 + 2|\eta|^2 + 2|\xi - \eta|^2 |\eta|^2 \\ &= 2(1 + |\xi - \eta|^2)(1 + |\eta|^2). \end{aligned}$$

Se $s \geq 0$, basta elevar ambos os lados na potência s. Se $s < 0$, utilizamos o resultado acima trocando ξ por η e trocando s por $|s| = -s$. □

Lema 3.3.3. *Sejam* $r < s < t$. *Para todo* $\varepsilon > 0$ *existe* $C > 0$ *tal que,*

$$\|f\|_s^2 \leq \varepsilon \|f\|_t^2 + C \|f\|_r^2, \; \forall f \in H_t.$$

Demonstração. Para dado $\varepsilon > 0$, tome $A > 0$ suficientemente grande para que

$(1+A^2)^s \leq \varepsilon(1+A^2)^t$ e defina $C = (1+A^2)^{s-r}$. Logo, se $|\xi| \leq A$, temos

$$(1+|\xi|^2)^s = (1+|\xi|^2)^{s-r}(1+|\xi|^2)^r \leq C(1+|\xi|^2)^r,$$

e se $|\xi| \geq A$, temos

$$(1+|\xi|^2)^s \leq \varepsilon(1+|\xi|^2)^t.$$

Portanto,

$$(1+|\xi|^2)^s \leq C(1+|\xi|^2)^r + \varepsilon(1+|\xi|^2)^t.$$

Então,

$$\begin{aligned}
\|f\|_s^2 &= \left\|\hat{f}(1+|\xi|^2)^{s/2}\right\|_{L^2}^2 \\
&\leq \left\|\hat{f}\left[C(1+|\xi|^2)^r + \varepsilon(1+|\xi|^2)^t\right]^{1/2}\right\|_{L^2}^2 \\
&\leq C\left\|\hat{f}(1+|\xi|^2)^{r/2}\right\|_{L^2}^2 + \varepsilon\left\|\hat{f}(1+|\xi|^2)^{t/2}\right\|_{L^2}^2 \\
&= C\|f\|_r + \varepsilon\|f\|_t.
\end{aligned}$$

□

Mostramos a seguir que H_s é fechado pelo produto de funções em $\mathscr{S}$.

Teorema 3.3.4. *Suponha $s \in \mathbb{R}$ e $\varphi \in \mathscr{S}$.*

i) Se $f \in H_s$ então $\varphi f \in H_s$.

ii) A aplicação $f \mapsto \varphi f$ é limitada em H_s.

Demonstração. De fato, se $\varphi \in \mathscr{S}$, pelo Teorema 3.2.4 (ii), temos

$$(1+|\xi|^2)^{s/2}\mathcal{F}(\varphi f)(\xi) = (1+|\xi|^2)^{s/2}(2\pi)^{-n}\hat{\varphi} * \hat{f}(\xi).$$

Logo, por definição de convolução de funções:

$$\begin{aligned}
(1+|\xi|^2)^{s/2}\mathcal{F}(\varphi f)(\xi) &= (2\pi)^{-n}\int_{\mathbb{R}^n}(1+|\xi|^2)^{s/2}\hat{\varphi}(\xi-\eta)\hat{f}(\eta)\mathrm{d}\eta \\
&= (2\pi)^{-n}\int_{\mathbb{R}^n}K(\xi,\eta)(1+|\eta|^2)^{s/2}\hat{f}(\eta)\mathrm{d}\eta.
\end{aligned}$$

onde $K(\xi,\eta) = \left[(1+|\xi|^2)/(1+|\eta|^2)\right]^{s/2} \hat{\varphi}(\xi-\eta)$. Pelo Lema 3.3.2

$$|K(\xi,\eta)| \leq 2^{|s|/2}(1+|\xi-\eta|^2)^{|s|/2}\,|\hat{\varphi}(\xi-\eta)|,$$

para quaisquer $\xi,\eta \in \mathbb{R}^n$. Então defina

$$C_1(\xi) = \left\|K(\xi,\,\cdot\,)^{1/2}\right\|_{L^2} \text{ e } C_2(\eta) = \left\|K(\,\cdot\,,\eta)^{1/2}\right\|_{L^2}.$$

Então C_1 e C_2 são limitadas, pois

$$\begin{aligned}
C_1(\xi) &= \left\|K(\xi,\,\cdot\,)^{1/2}\right\|_{L^2} \\
&\leq 2^{|s|/2}\int_{\mathbb{R}^n}(1+|\xi-\eta|^2)^{|s|/2}\,|\hat{\varphi}(\xi-\eta)|\,\mathrm{d}\eta \\
&= 2^{|s|/2}\int_{\mathbb{R}^n}(1+|\eta|^2)^{|s|/2}\,|\hat{\varphi}(\eta)|\,\mathrm{d}\eta,
\end{aligned}$$

e, por $\hat{\varphi} \in \mathscr{S}$, segue que $C_1(\xi) \leq C_3 := 2^{|s|/2}\int_{\mathbb{R}^n}(1+|\eta|^2)^{|s|/2}\,|\hat{\varphi}(\eta)|\,\mathrm{d}\eta < \infty$. O mesmo vale para C_2. Pela desigualdade de Hölder (FOLLAND, 2013, p. 182, Teorema 6.2):

$$\left\|K(\xi,\,\cdot\,)\hat{f}(1+|\eta|^2)^{s/2}\right\|_{L^1} \leq C_1\left\||K(\xi,\,\cdot\,)|^{1/2}\hat{f}(1+|\eta|^2)^{s/2}\right\|_{L^2}. \tag{3.5}$$

Finalmente,

$$\begin{aligned}
\|\varphi f\|_s &= \int_{\mathbb{R}^n}|\mathcal{F}(\varphi f)(\xi)|^2\,(1+|\xi|^2)^s\mathrm{d}\xi \\
&= (2\pi)^{-2n}\int_{\mathbb{R}^n}\left|\int_{\mathbb{R}^n}K(\xi,\eta)\hat{f}(\eta)(1+|\eta|^2)^{s/2}\mathrm{d}\eta\right|^2\mathrm{d}\xi \\
&\leq (2\pi)^{-2n}\int_{\mathbb{R}^n}\left[\int_{\mathbb{R}^n}|K(\xi,\eta)|\,\left|\hat{f}(\eta)\right|(1+|\eta|^2)^{s/2}\mathrm{d}\eta\right]^2\mathrm{d}\xi.
\end{aligned}$$

Pela desigualdade 3.5, TFT (FOLLAND, 2013, p. 67, Teorema 2.37) e a definição de C_2, temos

$$\begin{aligned}
\|\varphi f\|_s &\leq (2\pi)^{-2n} C_3^2 \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} |K(\xi,\eta)| \left|\hat{f}(\eta)\right|^2 (1+|\eta|^2)^s \mathrm{d}\eta \mathrm{d}\xi \\
&= (2\pi)^{-2n} C_3^2 \int_{\mathbb{R}^n} \left|\hat{f}(\eta)\right|^2 (1+|\eta|^2)^s \int_{\mathbb{R}^n} |K(\xi,\eta)| \mathrm{d}\xi \mathrm{d}\eta \\
&\leq (2\pi)^{-2n} C_3^3 \int_{\mathbb{R}^n} \left|\hat{f}(\eta)\right|^2 (1+|\eta|^2)^s \mathrm{d}\eta \\
&= (2\pi)^{-2n} C_3^3 \|f\|_s^2 .
\end{aligned}$$

Logo $\varphi f \in H_s$ e $f \mapsto \varphi f$ é limitado em H_s. □

Definição 3.3.4. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto, o* ***espaço de Sobolev local*** *$H_s^{loc}(\Omega)$ é o conjunto de todas as distribuições f em Ω tais que, para todo aberto limitado Ω_0, com $\overline{\Omega_0} \subset \Omega$, existe $g \in H_s$, tal que $f = g$ em Ω_0.*

Teorema 3.3.5. *$f \in H_s^{loc}(\Omega)$ se, e somente se, $\varphi f \in H_s$ para toda $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$. Além disso, $H_s \subset H_s^{loc}(\Omega)$ para todo aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.*

Demonstração. Sejam $f \in H_s^{loc}(\Omega)$ e $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$. Então, considere um aberto limitado Ω_0 tal que $\operatorname{supp}\varphi \subset \Omega_0 \subset\subset \Omega$. Logo, por definição de $H_s^{loc}(\Omega)$, existe $g \in H_s$ tal que $f = g$ em Ω_0. Assim, pelo Teorema 3.3.4, $\varphi f = \varphi g \in H_s$.

Por outro lado, se Ω_0 é um aberto tal que $\Omega_0 \subset\subset \Omega$, escolha $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ com $\varphi = 1$ em Ω_0, então $f = f\varphi \in H_s$ em Ω_0. □

4 SOLUÇÕES FUNDAMENTAIS

Este capítulo trata das soluções fundamentais de operadores diferenciais lineares de coeficientes constantes, e o resultado de existência de solução fundamental de Malgrange-Ehrenpreis será comentado. Além disso, serão obtidas soluções fundamentais de alguns operadores. Introduziremos ainda a definição de operadores elípticos e hipoelípticos.

4.1 SOLUÇÕES FUNDAMENTAIS

Para iniciarmos a discussão dessa seção primeiro será dada a definição de solução fundamental e em seguida apresentaremos alguns exemplos.

Definição 4.1.1. *Um operador diferencial parcial linear de coeficientes C^∞ e grau $m = 0, 1, \ldots$ no aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, é uma aplicação linear $L : \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n) \to \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ da forma*

$$Lu = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x)\partial^\alpha u,\ u \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n),$$

sendo $a_\alpha \in \mathbb{C}^\infty(\Omega)$ satisfazendo $\sum_{|\alpha|=m} |a_\alpha(x)| \neq 0$ para algum $x \in \Omega$. Quando cada a_α é constante dizemos que L é um ***operador linear de coeficientes constantes****. O polinômio em n variáveis complexas de grau m definido por*

$$\sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x)\xi^\alpha, \xi \in \mathbb{R}^n,$$

é chamado de ***símbolo*** *do operador L, e também será denotado por L.*

Vale a pena notar os símbolos para alguns operadores conhecidos:

Exemplo 4.1.1. *Temos $L(\xi) = \sum_{j \leq n} \xi_j^2$ para o operador de Laplace, $L(\xi) = \sum_{j \leq n} \xi_j^2 - \xi_{n+1}$ para o operador do calor e $L(\xi) = \sum_{j \leq n} \xi_j^2 - \xi_{n+1}^2$ para o operador da onda.*

Observação 4.1.1. *Seja $u \in \mathscr{S}'$ e L um operador de coeficientes constantes tal que*

$$Lu = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha \partial^\alpha u.$$

Então a Transformada de Fourier de Lu é dada por:

$$\mathcal{F}(Lu)(\xi) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha \mathcal{F}(\partial^\alpha u) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha (i\xi)^\alpha \hat{u} = L(i\xi)\hat{u}(\xi).$$

Definição 4.1.2. *Uma* ***solução fundamental*** *para um operador linear com coeficientes constantes L é uma distribuição E em $\mathbb{R}^n$ tal que $LE = \delta$, sendo δ a distribuição delta de Dirac.*

Podemos sintetizar a importância das soluções fundamentais no estudo da existência e regularidade de soluções de equações diferenciais parciais de coeficientes constantes pelas fórmulas

$$L(E * f) = (LE) * f = \delta * f = f, f \in \mathscr{E}'(\mathbb{R}^n)$$

e

$$E * (Lu) = (LE) * u = \delta * u = u, u \in \mathscr{E}'(\mathbb{R}^n).$$

A primeira dela significa que $E * f$ é uma solução da equação $Lu = f$, enquanto que a segunda torna possível obter informação sobre a regularidade de u a partir da regularidade de Lu. Maiores detalhes em (HÖRMANDER, 2015).

É imediato da definição que o operador nulo não possui solução fundamental. Veremos agora alguns exemplos de soluções fundamentais.

Exemplo 4.1.2. *Fixada $c \in \mathbb{C}$ com $c \neq 0$, a única solução fundamental do operador constante $L : \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n) \to \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ dado por $L = c$ é $E = \delta/c$.*

Em particular, o exemplo acima mostra que uma solução fundamental pode não ser uma função localmente integrável.

Exemplo 4.1.3. *A solução fundamental do operador $L : \mathscr{D}'(\mathbb{R}) \to \mathscr{D}'(\mathbb{R})$ dado por $L = \mathrm{d}/dt$ é a função de Heaviside.*

De fato, vimos no exemplo 2.4.1 que $H' = \delta$, logo H é a solução fundamental do operador $\mathrm{d}/\mathrm{d}t$. Além disso, note que qualquer distribuição da forma $E = H + c$, sendo $c \in \mathbb{C}$ uma constante, é uma solução fundamental de L.

Mais geralmente, dado um operador $L = \sum\limits_{|\alpha| \leq m} a_\alpha \partial^\alpha$ de ordem ≥ 1, do Teorema Fundamental da Álgebra resulta que existe $\eta = (\eta_1, \eta_2, ..., \eta_n) \in \mathbb{C}^n$ que é uma solução da equação polinomial $L(\eta) = 0$. Considere a distribuição u definida pela função $u(x) = e^{x\eta} = e^{x_1\eta_1 + x_2\eta_2 + ... + x_n\eta_n}, x \in \mathbb{R}^n$. Então

$$Lu = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha \partial^\alpha e^{x\eta} = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha \eta^\alpha \partial^\alpha e^{x\eta} = e^{x\eta} L(\eta) = 0.$$

Isso mostra que u é solução da equação homogênea $L(\partial)u = 0$. Logo, se existe uma solução fundamental E de L então $E + u$ também é solução fundamental de L. Dos exemplos anteriores segue que, se um operador possui solução fundamental, então ela não é única.

Exemplo 4.1.4. *Seja* $\omega_n = 2\pi^{n/2}/\Gamma(n/2)$ *e*

$$E_n(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2\pi} \ln |x| & se\ n = 2, \\ \frac{1}{(n-2)\omega_n |x|^{n-2}} & se\ n > 2. \end{cases}$$

Então E_n *é solução fundamental de* $-\Delta$.

Desejamos encontrar $E \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$-\Delta E = \delta.$$

Para isso, aplicamos a transformada de Fourier na equação conforme observação 4.1.1, deste modo, obtemos:

$$|\xi|^2 \hat{E} = 1,$$

logo, uma solução fundamental deve ser dada, em algum sentido, pela transformada de Fourier inversa de $1/|\xi|^2$. Do Corolário 2.52 (FOLLAND, 2013, p. 79) segue que $1/|\xi|^2$ não é localmente integrável em uma vizinhança da origem quando $n = 2$, mas é localmente integrável quando $n > 2$.

Então, quando $n > 2$ a função $1/|\xi|^2$ define uma distribuição temperada, logo, $\mathscr{F}^{-1}(1/|\xi|^2)$ é uma solução fundamental que é distribuição temperada. Encontraremos $\mathscr{F}^{-1}(1/|\xi|^2)$ buscando uma função E que satisfaça:

$$\int_{\mathbb{R}^n} E(x)\hat{\varphi}(x)\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^{-2}\varphi(\xi)\mathrm{d}\xi,$$

para toda $\varphi \in \mathscr{S}$. Para isso, do exemplo 3.1.2 e teorema 3.1.5 obtemos para cada $\tau > 0$:

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\tau|x|^2}\hat{\varphi}(x)\mathrm{d}x = \left[\frac{\pi}{\tau}\right]^{n/2}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-|\xi|^2/4\tau}\varphi(\xi)\mathrm{d}\xi,$$

multiplicando ambos os lados por $\tau^{n/2-2}$ e integrando em τ de 0 a $+\infty$:

$$\int_0^\infty \tau^{n/2-2}\left[\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\tau|x|^2}\hat{\varphi}(x)\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}\tau = \pi^{n/2}\int_0^\infty \tau^{-2}\left[\int_{\mathbb{R}^n} e^{-|\xi|^2/4\tau}\varphi(\xi)\mathrm{d}\xi\right]\mathrm{d}\tau.$$

Pelo TFT (FOLLAND, 2013, p. 67, Teorema 2.37):

$$\int_{\mathbb{R}^n}\left[\int_0^\infty \tau^{n/2-2}e^{-\tau|x|^2}\mathrm{d}\tau\right]\hat{\varphi}(x)\mathrm{d}x = \pi^{n/2}\int_{\mathbb{R}^n}\left[\int_0^\infty \tau^{-2}e^{-|\xi|^2/4\tau}\mathrm{d}\tau\right]\varphi(\xi)\mathrm{d}\xi.$$

Agora, para trabalhar as integrais internas, é possível realizar as mudanças de variáveis: $\sigma = |x|^2\tau$, $\sigma' = |\xi|^2/4\tau$ logo, para a integral da esquerda:

$$\int_0^\infty \tau^{n/2-2}e^{-\tau|x|^2}\mathrm{d}\tau = |x|^{2-n}\int_0^\infty \sigma^{(n/2-1)-1}e^{-\sigma}\mathrm{d}\sigma = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}n-1\right)}{|x|^{n-2}},$$

e para a integral da direita:

$$\int_0^\infty \tau^{-2}e^{-|\xi|^2/4\tau}\mathrm{d}\tau = 4|\xi|^{-2}\int_0^\infty e^{-\sigma'}\mathrm{d}\sigma' = 4|\xi|^{-2}.$$

Por fim, temos a igualdade desejada:

$$\int_{\mathbb{R}^n}\left[\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}n-1\right)}{4\pi^{n/2}|x|^{n-2}}\right]\hat{\varphi}(x)\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n}|\xi|^{-2}\varphi(\xi)\mathrm{d}\xi.$$

Assim, lembrando que $\Gamma\left(\frac{1}{2n}-1\right)=2\Gamma\left(\frac{1}{2n}\right)/(n-2)$ temos:

$$E_n(x)=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}n\right)}{2\pi^{n/2}(n-2)\left|x\right|^{n-2}}=\frac{1}{(n-2)\omega_n\left|x\right|^{n-2}},$$

para todo $n>2$.

Para encontrar a solução fundamental no caso $n=2$, procederemos por limite. Observando que, se E_n é uma solução fundamental, então E_n+c_n, onde c_n é uma constante, também é uma solução fundamental. Logo, se $c_n=-\frac{1}{(n-2)\omega_n}$ temos

$$E_n+c_n=\frac{1}{\omega_n}\left[\frac{\left|x\right|^{-(n-2)}-1}{n-2}\right].$$

Veja que a função está definida para todo $n>2$, inclusive não inteiro. Tomando o limite $n\to 2$ no termo entre colchetes e aplicando L'Hospital:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to 2}\frac{\left|x\right|^{-(n-2)}-1}{n-2}&=-\lim_{n\to 2}\left|x\right|^{-(n-2)}\ln\left|x\right|\\&=-\ln\left|x\right|,\end{aligned}$$

e por $\omega_2=2\pi$, temos:

$$E_n(x)=\begin{cases}-\frac{1}{2\pi}\ln\left|x\right| & \text{se } n=2,\\ \frac{1}{(n-2)\omega_n\left|x\right|^{n-2}} & \text{se } n>2.\end{cases}$$

Exemplo 4.1.5. *Seja*

$$E(x,t)=\frac{1}{2\left(\pi t\right)^{n/2}}H(t)e^{-\left|x\right|^2/4t}.$$

Então E é solução fundamental do operador do calor $\partial_t-\Delta$.

Desejamos encontrar $E\in\mathscr{D}'(\mathbb{R}^{n+1})$ tal que

$$(\partial_t-\Delta)E=\delta.$$

Aplicando a transformada de Fourier em relação a x:

$$\mathcal{F}_x(\Delta E(x,t)) + \mathcal{F}_x(\partial_t E(x,t)) = \mathcal{F}_x(\delta(x,t))$$
$$|\xi|^2 \hat{E}(\xi,t) + \partial_t \hat{E}(\xi,t) = \delta(t),$$

assim, para $t > 0$, $\hat{E}(\xi,t) = H(t)e^{-|\xi|^2 t}$ satisfaz a equação diferencial. Logo, por $\hat{E}(\,\cdot\,,t)$ ser integrável, podemos aplicar o teorema de inversão e o exemplo 3.1.2, logo:

$$E(x,t) = \mathcal{F}^{-1}\left(H(t)e^{-|\xi|^2 t}\right) = \frac{1}{2\,(\pi t)^{n/2}} H(t) e^{-|x|^2/4t}.$$

Exemplo 4.1.6. *Seja*

$$E_n(x) = \begin{cases} H(t-|x|) & se\ n = 1, \\ \frac{1}{2\pi}\frac{H(t-|x|)|}{\sqrt{t^2-|x|^2}} & se\ n = 2 \\ \frac{1}{4\pi t} H(t)\sigma_t(x) & se\ n = 3. \end{cases}$$

Então E_n é solução do operador da onda $\partial^2/\partial t^2 - \Delta$ para $n = 1,2,3$.

Consideremos:

$$\partial_t^2 E(x,t) - \Delta E(x,t) = \delta(x,t).$$

A transformada de Fourier em relação a x fica:

$$\partial_t^2 \hat{E}(\xi,t) + |\xi|^2 \hat{E}(\xi,t) = \delta(t).$$

Reconhecendo a EDO, temos que a solução para $t > 0$ deve ter a forma

$$\hat{E}(\xi,t) = H(t)\frac{\operatorname{sen}(|\xi|t)}{|\xi|}.$$

Para o caso $n = 1$, do fato de $\operatorname{sen}(|\xi|t)/|\xi| = \operatorname{sen}(\xi t)/\xi$ e do exemplo 3.3.1, temos

$$E(x,t) = H(t)\chi_{[-t,t]}(x) = H(t-|x|).$$

Para o caso $n=3$, o resultado obtido no exemplo 3.2.2, nos fornece:

$$E(x,t)=\frac{1}{4\pi t}H(t)\sigma_t(x).$$

Para o caso $n=2$, se $\xi,x\in\mathbb{R}^2$ consideremos $\xi',x'\in\mathbb{R}^3$ tal que $\xi'=(\xi,0)$. Então, por 3.4:

$$\frac{\operatorname{sen}(|\xi|t)}{|\xi|}=\frac{\operatorname{sen}(|\xi'|t)}{|\xi'|}=\frac{1}{4\pi t}\int_{|x'|=t}e^{-ix'\cdot\xi'}\mathrm{d}\sigma(x').$$

Observando que a integral é simétrica em relação a coordenada x_3, a integral pode ser calculada utilizando a esfera acima do plano formado por x_1 e x_2. Assim, utilizando a parametrização $x'=(x,\sqrt{t^2-|x|^2})$ para $|x|\leq t$, temos $|\partial x'/\partial x_1\times\partial x'/\partial x_2|=t/\sqrt{t^2-|x|^2}$. Por $x'\cdot\xi'=x\cdot\xi$, segue

$$\begin{aligned}\frac{\operatorname{sen}(|\xi|t)}{|\xi|}&=\frac{1}{2\pi t}\int_{|x|\leq t}\frac{t}{\sqrt{t^2-|x|^2}}e^{-ix\cdot\xi}\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{2\pi}\int_{|x|\leq t}\frac{1}{\sqrt{t^2-|x|^2}}e^{-ix\cdot\xi}\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2}\frac{\chi_{|x|\leq t}}{\sqrt{t^2-|x|^2}}e^{-ix\cdot\xi}\mathrm{d}x\\&=\mathcal{F}\left(\frac{\chi_{|x|\leq t}}{\sqrt{t^2-|x|^2}}\right).\end{aligned}$$

Assim, temos:

$$\begin{aligned}E(x,t)&=\frac{1}{2\pi}H(t)\frac{\chi_{|x|\leq t}}{\sqrt{t^2-|x|^2}}\\&=\frac{1}{2\pi}\frac{H(t-|x|)}{\sqrt{t^2-|x|^2}}.\end{aligned}$$

Depois de apresentarmos esses exemplos, enunciamos dois teoremas principais: um que fornece uma forma de obter soluções de operadores diferenciais quando existe, e outro que garante a existência de solução para estes operadores.

Teorema 4.1.1. *Se E é uma solução fundamental de $L(\partial)$ e $v \in \mathscr{E}'(\mathbb{R}^n)$ então a equação $L(\partial)u = v$ tem uma solução dada por $E * v$. Além disso, se $u \in \mathscr{E}'(\mathbb{R}^n)$ e $L(\partial)u = v$ então $u = E * v$.*

O primeiro resultado geral sobre existência de soluções fundamentais foi publicado por (EHRENPREIS, 1954) e depois em (MALGRANGE, 1956). Segundo (HORVÁTH, 1966, p. 395), esse foi um dos primeiros grandes triunfos da Teoria das Distribuições que havia sido recentemente formalizada por L. Schwartz.

Teorema 4.1.2 [Malgrange-Ehrenpreis]. *Todo operador diferencial com coeficientes constantes que não é identicamente nulo tem uma solução fundamental.*

A prova do Teorema de Malgrange-Ehrenpreis está além dos objetivos deste trabalho. Além dos artigos originais de Malgrange e Ehrenpreis já citados, outras demonstrações podem ser encontradas em (HÖRMANDER, 2004, p. 17, Teorema 10.2.1) ou (ORTNER; WAGNER, 1997, p. 107, Teorema 2.3).

4.2 SOLUÇÕES FUNDAMENTAIS E HIPOELIPTICIDADE

Nesta seção exploramos a relação entre a regularidade das soluções fundamentais e a hipoelipticidade.

Definição 4.2.1. *Seja $L = \sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha(x)\partial^\alpha$ um operador de classe C^∞ e grau $k = 0, 1, 2, \ldots$ no aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Dizemos que L é* ***elíptico*** *em $x_0 \in \Omega$ se*

$$\sum_{|\alpha|=k} a_\alpha(x_0)\xi^\alpha \neq 0, \ \forall \xi \in \mathbb{R}^n, \ \xi \neq 0.$$

Se L é elíptico em todos os pontos de um conjunto $X \subset \Omega$ então dizemos que L é elíptico em X.

Observação 4.2.1. *Se L é elíptico em x_0, por homogeneidade segue que existe*

$A > 0$ tal que

$$\left| \sum_{|\alpha|=k} a_\alpha(x_0)\xi^\alpha \right| \geq A\,|\xi|^k.$$

Se L é elíptico em um compacto K, então podemos escolher A independente de $x_0 \in K$.

Definição 4.2.2. *Um operador diferencial L com coeficientes em $C^\infty(\Omega)$ é chamado de* ***hipoelíptico*** *se para toda distribuição u no conjunto aberto Ω, tal que $Lu \in C^\infty(\Omega)$, também temos $u \in C^\infty(\Omega)$.*

Temos então o resultado que descreve a hipoelipticidade de um operador de coeficientes constantes em termos das singularidades de sua solução fundamental.

Teorema 4.2.1. *Se L é um operador com coeficientes constantes não identicamente nulo, as seguintes afirmações são equivalentes:*

1. *Existe solução fundamental de L em $C^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$;*
2. *Toda solução fundamental de L é $C^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$;*
3. *L é hipoelíptico.*

Demonstração. $(3 \Rightarrow 2)$ Se E é uma solução fundamental de L, então $LE = \delta \in C^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$. Logo, se L é hipoelíptico, temos que $E \in C^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$.
$(2 \Rightarrow 1)$ Trivial.
$(1 \Rightarrow 3)$ Seja E uma solução fundamental para L em $C^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$. Suponha que u é uma distribuição em um aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ tal que $Lu \in C^\infty(\Omega)$. Se $x \in \Omega$, tome $\varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon(x) \subset \Omega$, provaremos que $u \in C^\infty(B_{\varepsilon/2}(x))$. Para isso, escolha $\varphi \in C_c^\infty(B_\varepsilon(x))$ com $\varphi = 1$ em $B_{\varepsilon/2}(x)$. Então pela regra de Leibniz:

$$L(\varphi u) = \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha \varphi \partial^\alpha u + \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha \sum_{0<\beta\leq\alpha} \binom{\alpha}{\beta} \partial^\beta \varphi \partial^{\alpha-\beta} u.$$

Veja que o primeiro termo do lado direito é φLu, além disso defina por v o segundo termo do lado direito. Observando que todo termo de v possui ao menos uma derivada de φ, temos $v = 0$ em $B_{\varepsilon/2}(x)$ (pois $\varphi = 1$ em $B_{\varepsilon/2}(x)$), além disso, $v = 0$ fora de $B_\varepsilon(x)$ (pois $\operatorname{supp}\varphi \subset B_\varepsilon(x)$), assim:

$$\operatorname{supp} v \subset B_\varepsilon(x) \setminus B_{\varepsilon/2}(x).$$

Temos que $E * (\varphi Lu) \in C^\infty(\Omega)$, pois $\varphi Lu \in C_c^\infty(\Omega)$. Além disso, pelo lema 2.4.1, $E * v \in C^\infty(B_{\varepsilon/2}(x))$ pois $B_{\varepsilon/2}(x) \subset \Omega \setminus \operatorname{supp} v$. Agora, observando que

$$\varphi u = E * L(\varphi u) = E * (\varphi Lu + v) = E * (\varphi Lu) + E * v.$$

portanto em $B_{\varepsilon/2}(x)$, $u = \varphi u \in C^\infty(\Omega)$. $\square$

Observação 4.2.2. *Segue do teorema acima e dos exemplos 4.1.3, 4.1.4 e 4.1.5, que o operadores d/dt, de Laplace e do Calor são hipoelípticos.*

5 REGULARIDADE DE SOLUÇÕES E AS CARACTERIZAÇÕES DE HIPOELIPTICIDADE

Os teoremas principais desta dissertação serão desenvolvidos neste capítulo. O primeiro deles, é conhecido como o Teorema da Regularidade Elíptica (TRE) e o segundo, devido a L. Hörmander, apresenta uma lista de cinco condições equivalentes a hipoelipticidade no caso de operadores lineares de coeficientes constantes.

Sob certas condições, o TRE garante um ganho no número de derivadas para a solução de um operador elíptico, isto é, a solução é mais regular do que o contradomínio do operador. O teorema pode ser enunciado da seguinte maneira:

Teorema 5.0.1 [**Regularidade Elíptica**]. *Considere Ω um aberto em $\mathbb{R}^n$ e L um operador elíptico de ordem k com coeficientes em $C^\infty(\Omega)$. Sejam u e f distribuições em Ω satisfazendo $Lu = f$. Se $f \in H_s^{loc}(\Omega)$ para algum $s \in \mathbb{R}$, então $u \in H_{s+k}^{loc}(\Omega)$.*

Observe que se L é um operador linear de coeficientes constantes e $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ satisfaz $Lu \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ então $Lu \in H_s^{loc}(\mathbb{R}^n), \forall s \in \mathbb{R}$. Do TRE resulta que $u \in H_s^{loc}(\mathbb{R}^n), \forall s \in \mathbb{R}$, logo, $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Isso prova que

Corolário 5.0.1. *Todo operador linear elíptico de coeficientes constantes é hipoelíptico.*

Observe que o operador do calor mostra que a recíproca não é válida. Para demonstrar o TRE serão necessárias estimativas 'a priori' para um operador elíptico e suas aproximações.

Já o segundo resultado é uma caracterização dos operadores hipoelípticos com coeficientes constantes sem a necessidade de conhecer a solução fundamental do operador, diferente do que é feito no teorema 4.2.1. No caso de coeficientes constantes, L. Hörmander apresenta descrições da hipoelipticidade em termos algébricos e também sob o ponto de vista dos espaços de Sobolev, utilizando técnicas similares às utilizadas no TRE.

Dado um polinômio L em n variáveis complexas, a descrição algébrica da hipoelipticidade envolve o conjunto $\mathcal{Z}(L)$ dos zeros de L, isto é,

$$\mathcal{Z}(L) = \{\zeta \in \mathbb{C}^n; L(\zeta) = 0\},$$

e a distância $d_L(\xi)$ de um ponto $\xi \in \mathbb{R}^n$ a $\mathcal{Z}(L)$, definida do modo usual por

$$d_L(\xi) = \inf\{|\zeta - \xi|; \zeta \in \mathcal{Z}(L)\}.$$

Além disso, dado $\alpha \in \mathbb{N}^n$ definimos $L^{(\alpha)} = \partial^\alpha L$. Identificando o polinômio $L^{(\alpha)}$ com o operador cujo símbolo é $L^{(\alpha)}$, temos a seguinte identidade

$$L(fg) = \sum_{|\alpha| \geq 0} \frac{1}{\alpha!} (\partial^\alpha f)(L^{(\alpha)} g). \tag{5.1}$$

O principal teorema deste trabalho é:

Teorema 5.0.2. ***[Hörmander]*** *Se L é um polinômio de coeficientes constantes de grau $k > 0$ em $\mathbb{R}^n$, então as seguintes afirmações são equivalentes:*

(H1) $|\mathrm{Im}\,\zeta| \to \infty$ *quando* $\zeta \to \infty$ *no conjunto* $\mathcal{Z}(L)$.

(H2) $d_L(\xi) \to \infty$ *quando* $\xi \to \infty$ *em* $\mathbb{R}^n$.

(H3) *Existem* δ, C, $R > 0$, *tais que* $d_L(\xi) \geq C|\xi|^\delta$ *quando* $\xi \in \mathbb{R}^n$, $|\xi| > R$.

(H4) *Existem* δ, C, $R > 0$, *tais que* $\left|L^{(\alpha)}(\xi)\right| \geq C|\xi|^{-\delta|\alpha|}|L(\xi)|$, *para todo* $\alpha \in \mathbb{N}^n$ *quando* $\xi \in \mathbb{R}^n$ *satisfaz* $|\xi| > R$.

(H5) *Existe* $\delta > 0$ *tal que, se* $f \in H_s^{loc}(\Omega)$ *para algum* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *e* $s \in \mathbb{R}$, *então toda solução* $u \in \mathscr{D}'(\Omega)$ *de* $Lu = f$ *pertence a* $H_{s+k\delta}^{loc}(\Omega)$.

(H6) *O operador* $L(-i\partial)$ *é hipoelíptico.*

Se L é o polinômio dado por $L(\xi) = \sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha \xi^\alpha$, então o operador $L(-i\partial)$ em (H6) é definido por $L(-i\partial) = \sum_{|\alpha| \leq k} (-i)^{|\alpha|} a_\alpha \partial^\alpha$. Com as condições (H1)-(H5) temos formas alternativas de descobrir o caráter hipoelíptico de operadores de coeficientes constantes: as duas primeiras observam o comportamento das raízes do símbolo do operador no infinito ou a distância delas do eixo real no infinito. A terceira fornece uma estimativa para o comportamento assintótico com que as raízes do símbolo principal se afastam do eixo real. O quarto item do teorema está relacionado à homogeneidade do símbolo principal e a quinta condição incorpora de certa forma o TRE. A demonstração de algumas implicações são mais simples, já outras mais complicadas, por exemplo, uma delas fará uso de dois resultados algébricos, consequências do Teorema de Tarski-Seidenberg enquanto para algumas é suficiente noções básicas de análise.

Antes dos resultados essenciais para demonstrarmos o Teorema 5.0.2, iremos ilustrar as condições (H1)-(H4) com os operadores d/dt, de Laplace e da Onda. Em conformidade com a Observação 4.2.2, estamos verificando de vários modos distintos que os operadores d/dt e de Laplace são hipoelípticos, e que o operador da Onda não é hipoelíptico.

Exemplo 5.0.1 [$d/\mathrm{d}t$]**.**

Neste caso escolhemos $L(\xi) = i\xi, \xi \in \mathbb{R}$ pois $L(-i\partial) = d/dt$. Então $\mathcal{Z}(L) = \{0\}$.

(H1) Por $L(\zeta) = 0$, se e somente se, $\zeta = 0$ temos então que a condição **(H1)** é satisfeita por vacuidade.

(H2) Por $d_L(\xi) = |\xi|$ temos que $\lim_{|\xi|\to\infty} d_L(\xi) = \lim_{|\xi|\to\infty} |\xi| = \infty$.

(H3) Tome $\delta = C = R = 1$, então $d_L(\xi) = |\xi| = C|\xi|^{\delta}$, $\forall \xi \in \mathbb{R}$, em particular para $|\xi| > R$.

(H4) Observe que para $\alpha \in \mathbb{N}$ temos

$$L^{(\alpha)}(\xi) = \begin{cases} i\xi & \text{se } \alpha = 0, \\ i & \text{se } \alpha = 1, \\ 0 & \text{se } \alpha > 1. \end{cases}$$

Por outro lado, tomando $\delta = C = 1$ resulta $|L^{(\alpha)}(\xi)| \leq C|\xi|^{-\delta|\alpha|}|L(\xi)|, \xi \in \mathbb{R}^n$, de onde segue (H4).

Exemplo 5.0.2 [Laplaciano Δ]**.**

Neste caso escolhemos $L(\xi) = -|\xi|^2, \xi \in \mathbb{R}^n$ pois $L(-i\partial) = \Delta$. Para

$\zeta \in \mathbb{C}^n$ temos

$$\zeta \in \mathcal{Z}(L) \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n} (\operatorname{Re}\zeta_k^2 - \operatorname{Im}\zeta_k^2) = 0 \text{ e } \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Re}\zeta_k \operatorname{Im}\zeta_k = 0.$$

ou seja

$$\zeta \in \mathcal{Z}(L) \Leftrightarrow |\operatorname{Re}\zeta| = |\operatorname{Im}\zeta| \text{ e } \langle \operatorname{Re}\zeta, \operatorname{Im}\zeta \rangle_{\mathbb{R}^n} = 0. \tag{5.2}$$

(H1) Seja $(\zeta_j) \subset \mathcal{Z}(L)$ tal que $\left|\zeta_j\right| \to \infty$ mas $\left|\operatorname{Im}\zeta_j\right| \leq M < \infty$, para todo $j \in \mathbb{Z}^+$, então $\left|\operatorname{Re}\zeta_j\right| \to \infty$. Escrevemos $\zeta_j = (\zeta_{1j}, \zeta_{2j}, \ldots, \zeta_{nj}), j \in \mathbb{Z}^+$. Por (5.2)

$$|\operatorname{Re}(\zeta_j)| = |\operatorname{Im}(\zeta_j)|, j \in \mathbb{Z}^+.$$

Mas $\left|\operatorname{Re}\zeta_j\right| \to \infty$, portanto, uma contradição com o fato de $(\operatorname{Im}\zeta_j)$ ser uma sequência limitada.

(H2) Para todo $\zeta \in \mathbb{C}^n$ e $\xi \in \mathbb{R}^n$ temos

$$|\zeta - \xi|^2 = \sum_{j=1}^{n} (\operatorname{Re}\zeta_j - \xi_j)^2 + \sum_{j=1}^{n} (\operatorname{Im}\zeta_j)^2,$$

logo

$$|\zeta - \xi|^2 = |\operatorname{Re}\zeta|^2 - 2\langle \operatorname{Re}\zeta, \xi \rangle + |\xi|^2 + |\operatorname{Im}\zeta|^2.$$

Da desigualdade de Cauchy-Schwarz resulta então

$$|\zeta - \xi|^2 \geq |\operatorname{Re}\zeta|^2 - 2|\operatorname{Re}\zeta||\xi| + |\xi|^2 + |\operatorname{Im}\zeta|^2.$$

Para $\zeta \in \mathcal{Z}(L)$ obtemos, de (5.2), que

$$|\zeta - \xi|^2 \geq 2|\operatorname{Re}\zeta|^2 - 2|\operatorname{Re}\zeta||\xi| + |\xi|^2, \zeta \in \mathcal{Z}. \tag{5.3}$$

Computando o valor mínimo da função $f(x) = 2x^2 - 2|\xi|x + |\xi|^2, x \in \mathbb{R}$, obtemos $f(x) \geq |\xi|^2/2, \forall x \in \mathbb{R}$. De (5.3) segue

$$|\zeta - \xi| \geq \frac{|\xi|}{\sqrt{2}},\ \zeta \in \mathcal{Z}(L),$$

logo,

$$d_L(\xi) \geq \frac{|\xi|}{\sqrt{2}}. \tag{5.4}$$

Portanto, se $|\xi| \to \infty$ temos $d_L(\xi) \to \infty$.

(H3) Segue da equação (5.4) para $R > 0$ arbitrário, $C = 1/\sqrt{2}$ e $\delta = 1$.

(H4) Observe que dado $\alpha \in \mathbb{N}^n$ temos

$$L^{(\alpha)}(\xi) = \begin{cases} L(\xi) & \text{se } |\alpha| = 0, \\ -2\xi_j & \text{se } |\alpha| = 1, \\ -2 & \text{se } |\alpha| = 2 \text{ e } \alpha = 2e_j, \text{ para } 1 \leq j \leq n, \\ 0 & \text{se } |\alpha| \geq 2 \text{ e } \alpha \neq 2e_j, \text{ para } 1 \leq j \leq n. \end{cases}$$

Se $\alpha = e_j, j = 1, 2, ..., n$ e $\xi \neq 0$ temos

$$\frac{|L^{(\alpha)}(\xi)}{|L(\xi)|} = 2\frac{|\xi_j|}{|\xi|^2} \leq \frac{2}{|\xi|} = 2|\xi|^{-1}.$$

Se $\alpha = 2e_j, j = 1, 2, ..., n$ e $\xi \neq 0$ temos

$$\frac{|L^{(\alpha)|}(\xi)}{|L(\xi)|} = 2|\xi|^{-2}.$$

Portanto, se $C = 2$ e $\delta = 1$, então $|L^{(\alpha)}(\xi)| \leq C|\xi|^{-\delta|\alpha|}|L(\xi)|, \xi \in \mathbb{R}^n$, de onde segue (H4).

Chegamos agora ao exemplo do operador da Onda, neste caso, incluiremos a verificação da não validade das condições (H5) e (H6).

Exemplo 5.0.3 [Operador da Onda $\partial^2/\partial t^2 - \Delta$]**.**

Neste caso escolhemos $L(\xi) = \sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k^2 - \xi_{n+1}^2, \xi \in \mathbb{R}^{n+1}$ pois $L(-i\partial) = \partial^2/\partial t^2 - \Delta$. Para $\zeta = (\zeta', \zeta_{n+1}) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}$ temos

$$\zeta \in \mathcal{Z}(L) \Leftrightarrow \begin{array}{l} \sum\limits_{j=1}^{n} ((\operatorname{Re} \zeta_k')^2 - (\operatorname{Im} \zeta_k')^2) = \operatorname{Re} \zeta_{n+1}^2 - \operatorname{Im} \zeta_{n+1}^2 \text{ e} \\ \sum\limits_{k=1}^{n} \operatorname{Re} \zeta_k' \operatorname{Im} \zeta_k' = \operatorname{Re} \zeta_{n+1} \operatorname{Im} \zeta_{n+1}, \end{array}$$

logo

$$\zeta \in \mathcal{Z}(L) \Leftrightarrow \begin{array}{l} |\operatorname{Re}\zeta'|^2 - |\operatorname{Im}\zeta'|^2 = (\operatorname{Re}\zeta_{n+1})^2 - (\operatorname{Im}\zeta_{n+1})^2 \text{ e} \\ \langle \operatorname{Re}\zeta', \operatorname{Im}\zeta' \rangle = \operatorname{Re}\zeta_{n+1} \operatorname{Im}\zeta_{n+1}. \end{array} \tag{5.5}$$

(H1) Considere $(\zeta_j) \subset \mathbb{C}^n$ tal que $\zeta'_j = (j, 0, \ldots, 0)$ e $\zeta_{j,n+1} = j$, $\forall j \in \mathbb{Z}^+$. Observe que (5.5) resulta $\zeta_j \in \mathcal{Z}(L), \forall j \in \mathbb{Z}^+, |\zeta_j| \to +\infty$ mas $\operatorname{Im}\zeta_j = 0, \forall j \in \mathbb{Z}^+$.
(H2) e (H3). Considere a mesma sequência da verificação de **(H1)** e tome $\xi_j = \zeta_j, j \in \mathbb{Z}^+$. Temos que $d_L(\xi_j) = 0$, $\forall j \in \mathbb{Z}^+$ mas $|\xi_j| \to +\infty$, negando **(H2)** e **(H3)**.
(H4) Observe que a condição **(H4)** implica que se $L^{(\alpha)}(\xi) = 0$ para algum $\alpha \in \mathbb{Z}^+$ e $|\xi| > R$ então $L(\xi) = 0$. Para a sequência (ξ_j) definida por $\xi'_j = (j, 0, \ldots, 0), \xi_{j,n+1} = 0, j \in \mathbb{Z}^+$, temos $|\xi_j| \to +\infty, L^{(e_2)}(\xi_j) = 0$, mas por (5.5) resulta $L(\xi_j) \neq 0, j \in \mathbb{Z}^+$.
(H5) Considere $\xi \in \mathbb{R}^{n+1}$ da forma $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n, t)$. Seja $u(\xi, t) = |\xi_n + t|$, nesse caso, $u \in L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}^{n+1})$. Então para $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$, considere u no sentido das distribuições, então calculemos suas derivadas parciais:

$$\begin{aligned} \langle \partial_j u, \varphi \rangle &= -\langle u, \partial_j \varphi \rangle \\ &= -\int_{-\infty}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^n} |\xi_n + t|\, \partial_j \varphi(\xi, t) \mathrm{d}\xi \mathrm{d}t \\ &= -\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} |\xi_n + t|\, \partial_j \varphi(\xi, t) \mathrm{d}\xi_1 \ldots \mathrm{d}\xi_n \mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Observe que se $j < n$ a integral se anula. Para verificar, sem perda de generalidade, considere $j = 1$, então

$$\begin{aligned} \langle \partial_1 u, \varphi \rangle &= -\langle u, \partial_1 \varphi \rangle \\ &= -\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |\xi_n + t| \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \partial_1 \varphi(\xi, t) \mathrm{d}\xi_1 \ldots \mathrm{d}\xi_{n-1} \mathrm{d}\xi_n \mathrm{d}t, \end{aligned}$$

logo, por $\int_{-\infty}^{\infty} \partial_1 \varphi(\xi, t) \mathrm{d}\xi_1 = 0$, temos $\langle \partial_1 u, \varphi \rangle = 0$. Assim, resta verificar o caso $j = n$ e $j = t$. Os dois casos serão similares. Verifiquemos para o caso $j = n$. Assim, usando a definição de módulo:

$$
\begin{aligned}
\langle \partial_n u, \varphi \rangle &= -\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty} |\xi_n + t|\,\partial_j \varphi(\xi,t)\mathrm{d}\xi_1 \ldots \mathrm{d}\xi_n \mathrm{d}t \\
&= -\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-t}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty} (\xi_n + t)\partial_j \varphi(\xi,t)\mathrm{d}\xi_1 \ldots \mathrm{d}\xi_n \mathrm{d}t \\
&\quad + \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{-t}\cdots\int_{-\infty}^{\infty} (\xi_n + t)\partial_j \varphi(\xi,t)\mathrm{d}\xi_1 \ldots \mathrm{d}\xi_n \mathrm{d}t.
\end{aligned}
$$

Veja que, se calcularmos as integrais em relação a ξ_n por partes, obtemos

$$
\begin{aligned}
\langle \partial_n u, \varphi \rangle &= -\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty} \left[2H(\xi_n + t) - 1\right] \varphi(\xi,t)\mathrm{d}\xi_1 \ldots \mathrm{d}\xi_n \mathrm{d}t \\
&= \langle 2H \circ f - 1, \varphi \rangle,
\end{aligned}
$$

onde $f(\xi,t) = \xi_n + t$. Agora, para a derivada segunda:

$$
\begin{aligned}
\left\langle \partial_n^2 u, \varphi \right\rangle &= \langle \partial_n (2H \circ f - 1), \varphi \rangle \\
&= -2 \langle H \circ f, \partial_n \varphi \rangle \\
&= -2\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty} H(\xi_n + t)\partial_n \varphi(\xi,t)\mathrm{d}\xi_1 \ldots \mathrm{d}\xi_n \mathrm{d}t \\
&= -2\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-t}^{\infty} \partial_n \varphi(\xi,t)\mathrm{d}\xi_1 \ldots \mathrm{d}\xi_n \mathrm{d}t.
\end{aligned}
$$

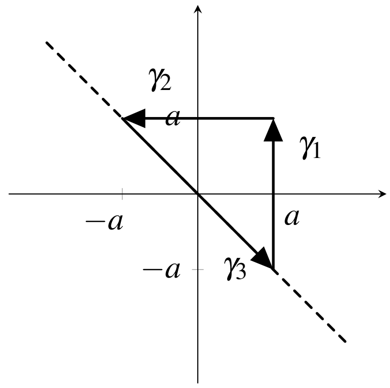
Agora, podemos calcular as integrais em relação a ξ e t primeiro. Assim, escrevendo elas na forma do limite:

$$
\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-t}^{\infty} \partial_n \varphi(\xi,t)\mathrm{d}\xi_n \mathrm{d}t = \lim_{a\to\infty}\int_{-a}^{a}\int_{-t}^{a} \partial_n \varphi(\xi,t)\mathrm{d}\xi_n \mathrm{d}t,
$$

Podemos parametrizar os caminhos γ_1, γ_2 e γ_3 indicados na Figura 5.1 e utilizar o Teorema de Green. Além disso, considere $\xi' = (\xi_1, \ldots, \xi_{n-1})$ para simplificar a escrita. Então

$$
\begin{aligned}
\int_{-a}^{a}\int_{-t}^{a} \partial_n \varphi(\xi,t)\mathrm{d}\xi_n \mathrm{d}t &= \int_{\gamma_1} \varphi(\xi,t)\mathrm{d}s + \int_{\gamma_2} \varphi(\xi,t)\mathrm{d}s + \int_{\gamma_3} \varphi(\xi,t)\mathrm{d}s \\
&= \int_{-a}^{a} [\varphi(\xi',a,s) + \sqrt{2}\varphi(\xi',s,-s) + \varphi(\xi',s,a)]\mathrm{d}s.
\end{aligned}
$$

Figura 5.1 – Representação do caminho.



Quando aplicarmos o limite $a \to \infty$ a primeira e terceira integral irão se anular. Portanto,

$$\left\langle \partial_n^2 u, \varphi \right\rangle = -2\sqrt{2} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi', s, -s) \mathrm{d}s \mathrm{d}\xi'.$$

De modo equivalente, temos

$$\left\langle \partial_t^2 u, \varphi \right\rangle = -2\sqrt{2} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi', s, -s) \mathrm{d}s \mathrm{d}\xi'.$$

Portanto, $(\Delta - \partial_t^2)u = 0$. Além disso, observe que $\partial_n^2 u \notin L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^{n+1})$: considere $\varphi'_\varepsilon \in C_c^\infty(\mathbb{R}^{n-1})$, $\varphi_\varepsilon \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ do tipo dada pela observação 2.2.2. Então defina

$$\psi_\varepsilon(\xi, t) = \varphi'_1\left(\xi'\right) \varphi_\varepsilon\left(\xi_n + t\right).$$

Assim, $\lim_{\varepsilon \to 0} \psi_\varepsilon = 0$ q.t.p. e $\psi_\varepsilon \leq \chi_{[-1,1]}$, logo, se existisse $g \in L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^{n+1})$ tal que $\left\langle \partial_n^2 u, \psi \right\rangle = \int_{\mathbb{R}^{n+1}} g\psi$, $\forall \psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$ então, pela desigualdade de Hölder (FOLLAND, 2013, p. 182, Teorema 6.2):

$$\begin{aligned} \left|\left\langle \partial_n^2 u, \psi_\varepsilon \right\rangle\right| &\leq \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^n} |g(\xi, t)\psi_\varepsilon(\xi, t)| \mathrm{d}\xi \mathrm{d}t \\ &\leq \|g\|_{L^2(B[0;\varepsilon])} \|\psi_\varepsilon\|_{L^2(B[0;\varepsilon])}, \end{aligned}$$

portanto, $\left\langle \partial_n^2 u, \psi_\varepsilon \right\rangle \to 0$ quando $\varepsilon \to 0$, mas

$$\begin{aligned} \left\langle \partial_n^2 u, \psi_\varepsilon \right\rangle &= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_{-1}^{1} \psi_\varepsilon(\xi', s, -s) \mathrm{d}s \mathrm{d}\xi' \\ &= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \varphi'_1\left(\xi'\right) \mathrm{d}\xi' \int_{-1}^{1} \varphi_\varepsilon(0) \mathrm{d}s \end{aligned}$$

$$= 2,$$

para todo $\varepsilon > 0$. Logo, temos uma contradição, portanto $u \notin H_k^{\text{loc}}(\mathbb{R}^{n+1})$ para $2 < k \in \mathbb{Z}$. Por $(\Delta - \partial_t^2)u = 0 \in H_k^{\text{loc}}(\mathbb{R}^{n+1})$, temos que a condição **H5** não pode ser satisfeita.

(H6) O operador da onda não é hipoelíptico. Para verificar isto, observe que se $f \in C^2(\mathbb{R})$, então $g(\xi,t) = f(\xi_{n+1} + t)$ satisfaz $(\Delta - \partial_t^2)g = 0$, ou seja $(\Delta - \partial_t^2)g \in C^\infty(\mathbb{R})$ mas g pode não ser $C^\infty(\mathbb{R})$: considere $f(t) = |t|^3$, então $(\mathrm{d}f/\mathrm{d}t)(t) = 3\,|t|\,t$, $(\mathrm{d}^2 f/\mathrm{d}t^2)(t) = 6\,|t|$, mas $(\mathrm{d}^3 f/\mathrm{d}t^3)(0)$ não existe.

Vejamos agora os resultados fundamentais para a demonstração dos teoremas da Regularidade Elíptica e de Hörmander.

5.1 DESIGUALDADES DE SOBOLEV

Podemos expressar a norma nos espaços H_s em termos do operador Λ^s definido abaixo.

Definição 5.1.1. *Seja $s \in \mathbb{R}$, definimos o operador linear $\Lambda^s : \mathscr{S}' \to \mathscr{S}'$ por $\Lambda^s f = \mathcal{F}^{-1}\left((1+|\xi|^2)^{s/2}\hat{f}\right)$.*

Veja que Λ^s está bem definido pois se $f \in \mathscr{S}'$, então $\hat{f} \in \mathscr{S}'$, consequentemente $(1+|\xi|^2)^{s/2}\hat{f} \in \mathscr{S}'$. Por $\mathcal{F}^{-1}$ estar definida para todo elemento de $\mathscr{S}'$ segue a boa definição de Λ^s.

Observação 5.1.1. *Para todo $s,t \in \mathbb{R}$ temos que $\Lambda^s \circ \Lambda^t = \Lambda^{s+t}$. Em particular Λ^s é inversível com inversa dada por Λ^{-s}.*

De fato, dada $f \in \mathscr{S}'$, da definição 5.1.1 temos $\mathcal{F}(\Lambda^t f) = (1+|\xi|^2)^{t/2}\hat{f}$,

logo

$$
\begin{aligned}
\Lambda^s(\Lambda^t(f)) =& \mathcal{F}^{-1}\left((1+|\xi|^2)^{s/2}\mathcal{F}(\Lambda^t f)\right)\\
&= \mathcal{F}^{-1}\left((1+|\xi|^2)^{s/2}(1+|\xi|^2)^{t/2}\hat{f}\right)\\
&= \mathcal{F}^{-1}\left((1+|\xi|^2)^{(s+t)/2}\hat{f}\right)\\
&= \Lambda^{s+t}(f).
\end{aligned}
$$

Observação 5.1.2. *Seja $s \in \mathbb{R}$, assim $f \in H_s$ se e somente se $\Lambda^s f \in L^2$ e*

$$||f||_s = (2\pi)^n ||\Lambda^s f||_{L^2}. \tag{5.6}$$

De fato,

$$||f||_s^2 = ||(1+|\xi|^2)^{s/2}\hat{f}||_{L^2}^2 = ||\mathcal{F}(\Lambda^s f)||_{L^2}^2.$$

Então, do Teorema 3.2.3 (ii) e (iv) (c) segue que $||\mathcal{F}(\Lambda^s f)||_{L^2}^2 = (2\pi)^{2n}||\Lambda^s f||_{L^2}^2$. Ou seja $||f||_s = (2\pi)^{2n}||\Lambda^s f||_{L^2}^2$.

Observação 5.1.3. *Fixado $s \in \mathbb{R}$, para todo $t \in \mathbb{R}$ a aplicação $\Lambda^s : H_t \to H_{t-s}$ está bem definida e é uma isometria sobrejetora.*

De fato, dada $f \in H_t$, tomando $s = t$ em (5.6) temos que $\Lambda^t f \in L^2$ e

$$||f||_t^2 = (2\pi)^n ||\Lambda^t f||_{L^2}. \tag{5.7}$$

Novamente por (5.6), mas substituindo agora s por $t-s$ e f por $\Lambda^s f$, da observação 5.1.1 temos

$$||\Lambda^s f||_{t-s} = (2\pi)^n ||\Lambda^{t-s}(\Lambda^s f)||_{L^2}^2 = (2\pi)^n ||\Lambda^t f||_{L^2}. \tag{5.8}$$

De (5.7) e (5.8) segue que Λ^s está bem definido e é uma isometria. A sobrejetividade segue da observação 5.1.1.

Observação 5.1.4. $\Lambda^s : H_t \to H_{t-s}$ *é contínuo.*

Por Λ^s ser linear e por $||\Lambda^s f||_{t-s} = ||f||_s$ segue que Λ^s é limitada, portanto é contínua.

Definição 5.1.2. *Para $s \in \mathbb{R}$, definimos o espaço $H_s^0(\Omega)$ como o fecho de $C_c^\infty(\Omega)$ em $H_s(\Omega)$ na respectiva topologia.*

Lema 5.1.1. *Para todo $a, b \geq 0$ e $s \in \mathbb{R}$, vale a desigualdade:*

$$\frac{\left|(1+a^2)^{s/2} - (1+b^2)^{s/2}\right|}{(1+a^2)^{(s-1)/2} + (1+b^2)^{(s-1)/2}} \leq |s|\,|a-b|$$

Demonstração. Considere $t \in [a,b]$ e observe que

$$\left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(1+t^2)^{s/2}\right| = |st|(1+t^2)^{(s-2)/2} \leq |s|(1+t^2)^{(s-1)/2}.$$

Então, pelo teorema do valor médio:

$$\left|(1+b^2)^{s/2} - (1+a^2)^{s/2}\right| = |b-a|\,|sc|(1+c^2)^{(s-2)/2},$$

para algum $c \in (a,b)$. Além disso,

$$\left|(1+b^2)^{s/2} - (1+a^2)^{s/2}\right| \leq |b-a|\,|s| \sup_{a \leq t \leq b} (1+t^2)^{(s-1)/2}.$$

Por $(1+t^2)^{(s-1)/2}$ ser não decrescente quando $s \geq 1$ e decrescente quando $s < 1$, vale

$$(1+t^2)^{(s-1)/2} \leq \begin{cases} (1+b^2)^{(s-1)/2} & \text{se } s \geq 1 \\ (1+a^2)^{(s-1)/2} & \text{se } s < 1. \end{cases}$$

Logo,

$$\left|(1+b^2)^{s/2} - (1+a^2)^{s/2}\right| \leq |b-a|\,|s| \left[(1+b^2)^{(s-1)/2} + (1+a^2)^{(s-1)/2}\right].$$

□

Teorema 5.1.1. *Seja Ω um conjunto limitado e k um inteiro positivo. Então as normas $f \mapsto \|f\|_k$ e $f \mapsto \sum_{|\alpha|=k} \|\partial^\alpha f\|_0$ são equivalentes em $H_k^0(\Omega)$.*

Definição 5.1.3. *Se A, B são operadores, definimos o comutador de A e B por*

$$[A,B] = AB - BA.$$

Se B for um operador que multiplica por uma função φ, utilizaremos o abuso de notação $[A,\varphi]$, de modo que

$$[A,\varphi]f = A(\varphi f) - \varphi A f.$$

Lema 5.1.2. *Se $s \in \mathbb{R}$ e $\sigma > n/2$, então existe uma constante $C = C_{s,\sigma}$ tal que, para toda $\varphi \in \mathscr{S}$ e toda $f \in H_{s-1}$ temos que $[\Lambda^s,\varphi]f \in H_0$ e*

$$\|[\Lambda^s,\varphi]f\|_0 \leq C\|\varphi\|_{|s-1|+1+\sigma}\|f\|_{s-1}.$$

Demonstração. Da observação 5.1.3 segue que a aplicação $\Lambda^{s-1}: H_{s-1} \to H_0$ é sobrejetora. Logo, podemos tomar $f \in H_{s-1}$ da forma $f = \Lambda^{1-s}g$ com $g \in H_0 = L^2$ arbitrária. Deste modo, o que precisamos provar é a seguinte desigualdade:

$$\left\|[\Lambda^s,\varphi]\Lambda^{1-s}g\right\|_0 \leq C\|\varphi\|_{|s-1|+1+\sigma}\|g\|_0,$$

para toda função $g \in H_0 = L^2$. Como a transformada de Fourier converte multiplicação em convolução, por definição de $[\Lambda^s,\varphi]$, temos

$$\mathcal{F}\left([\Lambda^s,\varphi]\Lambda^{1-s}g\right)(\xi) = \mathcal{F}\left(\Lambda^s\left(\varphi\Lambda^{1-s}g\right) - \varphi\Lambda g\right)(\xi).$$

Da linearidade de $\mathcal{F}$, da definição de Λ^s e pelo Teorema 3.2.4 (ii), vale

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\left([\Lambda^s,\varphi]\Lambda^{1-s}g\right)(\xi) = {} & (1+|\xi|^2)^{s/2}\mathcal{F}\left(\varphi\Lambda^{1-s}g\right)(\xi) + \\ & -(2\pi)^{-n}\hat{\varphi}(\xi) * \mathcal{F}(\Lambda g)(\xi).\end{aligned}$$

Novamente, da definição de Λ e do Teorema 3.2.4 (ii):

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\left([\Lambda^s,\varphi]\Lambda^{1-s}g\right)(\xi) = {} & (2\pi)^{-n}(1+|\xi|^2)^{s/2}\left[\hat{\varphi}(\xi) * \mathcal{F}\left(\Lambda^{1-s}g\right)(\xi)\right] + \\ & -(2\pi)^{-n}\hat{\varphi}(\xi) * \left[(1+|\xi|^2)^{1/2}\hat{g}(\xi)\right]\end{aligned}$$

Mais uma vez, a definição de Λ^{1-s} e por $(1+|\xi|^2)^{1/2} = (1+|\xi|^2)^{(1-s)/2}(1+$

$|\xi|^2)^{s/2}$, segue que

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\left([\Lambda^s,\varphi]\Lambda^{1-s}g\right)(\xi) &= (2\pi)^{-n}(1+|\xi|^2)^{s/2}\left[\hat{\varphi}(\xi)*\left((1+|\xi|^2)^{(1-s)/2}\hat{g}(\xi)\right)\right]+\\
&\quad-(2\pi)^{-n}\hat{\varphi}(\xi)*\left[(1+|\xi|^2)^{(1-s)/2}(1+|\xi|^2)^{s/2}\hat{g}(\xi)\right]\\
&= (2\pi)^{-n}\left[(1+|\xi|^2)^{s/2}\left(\hat{\varphi}*\left[(1+|\xi|^2)^{(1-s)/2}\hat{g}\right]\right)+\right.\\
&\quad\left.-\left(\hat{\varphi}*\left[(1+|\xi|^2)^{(1-s)/2+s/2}\hat{g}\right]\right)\right].
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\left([\Lambda^s,\varphi]\Lambda^{1-s}g\right)(\xi) &= (2\pi)^{-n}\int\left[(1+|\xi|^2)^{s/2}\hat{\varphi}(\xi-\eta)\,(1+|\eta|^2)^{(1-s)/2}\hat{g}(\eta)+\right.\\
&\quad\left.-\hat{\varphi}(\xi-\eta)(1+|\eta|^2)^{(1-s)/2+s/2}\hat{g}(\eta)\right]\mathrm{d}\eta\\
&= (2\pi)^{-n}\int K(\xi,\eta)\hat{g}(\eta)\mathrm{d}\eta,
\end{aligned}$$

onde,

$$K(\xi,\eta)=\left[(1+|\xi|^2)^{s/2}-(1+|\eta|^2)^{s/2}\right]\hat{\varphi}(\xi-\eta)(1+|\eta|^2)^{(1-s)/2}.$$

Pelo lema 5.1.1, temos:

$$\begin{aligned}
(1+|\xi|^2)^{s/2}-(1+|\eta|^2)^{s/2} &\le |s|\,|\xi-\eta|\times\\
&\quad\times\left[(1+|\xi|^2)^{(s-1)/2}+(1+|\eta|^2)^{(s-1)/2}\right]
\end{aligned}$$

e, com o lema 3.3.2, temos

$$\begin{aligned}
|K(\xi,\eta)| &\le |s|\,|\hat{\varphi}(\xi-\eta)|\,|\xi-\eta|\times\\
&\quad\times\left[(1+|\xi|^2)^{(s-1)/2}(1+|\eta|^2)^{-(s-1)/2}+1\right]\\
&\le 2^{|s-1|/2}|s|\,|\hat{\varphi}(\xi-\eta)|\,|\xi-\eta|\left[(1+|\xi-\eta|^2)^{|s-1|/2}+1\right]
\end{aligned}$$

Note que para todo $t>0$, temos que a função

$$x\mapsto\frac{x((1+x^2)^{t/2}+1)}{(1+x^2)^{(t+1)/2}},x>0,$$

é limitada superiormente por 2. Então

$$|K(\xi,\eta)| \leq C_2\,|\hat{\varphi}(\xi-\eta)|\,(1+|\xi-\eta|^2)^{(|s-1|+1)/2},$$

onde $C_2 = |s|\,2^{|s-1|/2+1}$.

Fazendo a mudança de variável $\lambda = \xi - \eta$ e utilizando a desigualdade de Hölder (FOLLAND, 2013, p. 182, Teorema 6.2):

$$\begin{aligned}
\int |K(\xi,\eta)|\,\mathrm{d}\xi &\leq C_2 \int |\hat{\varphi}(\xi-\eta)|\,(1+|\xi-\eta|^2)^{(|s-1|+1)/2}\mathrm{d}\xi \\
&= C_2 \int |\hat{\varphi}(\lambda)|\,(1+|\lambda|^2)^{(|s-1|+1)/2}\mathrm{d}\lambda \\
&\leq C_2 \left[\int |\hat{\varphi}(\lambda)|^2\,(1+|\lambda|^2)^{|s-1|+1+\sigma}\mathrm{d}\lambda\right]^{1/2} \times \\
&\quad \times \left[\int (1+|\lambda|)^{-\sigma}\right]^{1/2}\mathrm{d}\lambda \\
&= C_3\,\|\varphi\|_{|s-1|+1+\sigma}, \qquad (5.9)
\end{aligned}$$

onde $C_3^2 = \int (1+|\lambda|)^{-\sigma}\mathrm{d}\lambda$, que é finita pois $\sigma > n/2$. De modo semelhante, obtemos que

$$\int |K(\xi,\eta)|\,\mathrm{d}\eta \leq C_3\,\|\varphi\|_{|s-1|+1+\sigma}. \qquad (5.10)$$

Então,

$$|\mathcal{F}([\Lambda^s,\varphi]\Lambda^{1-s}g)(\xi)|^2 \leq (2\pi)^{-2n}\left[\int |K(\xi,\eta)||\hat{g}(\eta)|\mathrm{d}\eta\right]^2.$$

Pela desigualdade de Hölder (FOLLAND, 2013, p. 182, Teorema 6.2) e por 5.10, vale

$$\begin{aligned}
|\mathcal{F}([\Lambda^s,\varphi]\Lambda^{1-s}g)(\xi)|^2 &\leq (2\pi)^{-2n}\left[\int |K(\xi,\eta)|\mathrm{d}\eta\right]\left[\int |K(\xi,\eta)||\hat{g}(\eta)|^2\mathrm{d}\eta\right] \\
&\leq (2\pi)^{-2n}C_3\,\|\varphi\|_{|s-1|+1+\sigma}\int |K(\xi,\eta)||\hat{g}(\eta)|^2\mathrm{d}\eta.
\end{aligned}$$

Logo, pelo Teorema de Fubini-Tonelli (FOLLAND, 2013, p. 67, Teorema 2.37) e 5.9:

$$\int |\mathcal{F}([\Lambda^s,\varphi]\Lambda^{1-s}g)(\xi)|^2 \mathrm{d}\xi \leq (2\pi)^{-2n} C_3^2 \|\varphi\|_{|s-1|+1+\sigma} \int |\hat{g}(\eta)|^2 \mathrm{d}\eta$$
$$= (2\pi)^{-2n} C_3^2 \|\varphi\|_{|s-1|+1+\sigma} ||\hat{g}||_0^2.$$

Ou seja

$$||[\Lambda^s,\varphi]\Lambda^{1-s}g||_0 \leq (2\pi)^{-n} C_3 \|\varphi\|_{|s-1|+1+\sigma} ||\hat{g}||_0.$$

□

Utilizando e equivalência $\|\cdot\|_0$ com a norma de L^2, bem como o lema anterior, obtemos o seguinte resultado.

Teorema 5.1.2. *Se $s \in \mathbb{R}$ e $\sigma > n/2$, então existe uma constante $C = C_{s,\sigma}$ tal que para toda $\varphi \in \mathscr{S}$ e toda $f \in H_s$ vale*

$$\|\varphi f\|_s \leq \left[\sup_{x\in\mathbb{R}^n} |\varphi(x)|\right] \|f\|_s + C\|\varphi\|_{|s-1|+1+\sigma} \|f\|_{s-1}.$$

Demonstração. Observe que:

$$\begin{aligned} \|\varphi f\|_s &= \|\Lambda^s(\varphi f)\|_0 \\ &= \|\Lambda^s(\varphi f) + \varphi\Lambda^s f - \varphi\Lambda^s f\|_0 \\ &\leq \|[\Lambda^s,\varphi] f\|_0 + \|\varphi\Lambda^s f\|_0. \end{aligned}$$

Assim, pelo Teorema anterior:

$$\begin{aligned} \|\varphi f\|_s &\leq C\|\varphi\|_{|s-1|+1+\sigma} \|f\|_{s-1} + \left[\sup_{x\in\mathbb{R}^n} |\varphi(x)|\right] \|\Lambda^s f\|_0 \\ &= C\|\varphi\|_{|s-1|+1+\sigma} \|f\|_{s-1} + \left[\sup_{x\in\mathbb{R}^n} |\varphi(x)|\right] \|f\|_s. \end{aligned}$$

□

Definição 5.1.4. *Seja $\{e_1,\ldots,e_n\}$ a base canônica de $\mathbb{R}^n$. Se $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$, $h \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ e $j \in \{1,\ldots,n\}$, definimos o **quociente diferença** $\Delta_h^j u$ por*

$$\Delta_h^j u = h^{-1}(u_{he_j} - u).$$

Também definiremos uma notação para os produtos de coeficientes diferenças. Se $\alpha \in \mathbb{N}^n$ e $\boldsymbol{h} = \{h_{jk} : 1 \leq j \leq n, 1 \leq k \leq \alpha_j\}$ é um conjunto de $|\alpha|$ números reais não nulos, definimos

$$\Delta_{\boldsymbol{h}}^{\alpha} = \prod_{j=1}^{n} \prod_{k=1}^{\alpha_j} \Delta_{h_{jk}}^{j}.$$

Além disso, também definimos

$$|\boldsymbol{h}| = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{\alpha_j} \left|h_{jk}\right|.$$

Observação 5.1.5. *Observe que para $\varphi \in C^1(\mathbb{R}^n)$ e $j = 1, 2, ..., n$ temos que*

$$\lim_{h \to +0} \Delta_h^j \varphi(x) = \partial_j \varphi(x), \forall x \in \mathbb{R}^n,$$

e do Teorema do Valor Médio segue que a convergência é uniforme caso $\nabla\varphi$ seja limitado.

A seguir, mostramos que a norma do quociente diferencial aproxima norma de derivadas arbitrárias em H_s.

Teorema 5.1.3. *Considere $f \in H_s$ para algum $s \in \mathbb{R}$ e $\alpha \in \mathbb{N}^n$. Então*

$$\|\partial^\alpha f\|_s = \limsup_{|h| \to 0} \left\|\Delta_{\boldsymbol{h}}^{\alpha} f\right\|_s$$

(onde ambos os lados da igualdade são finitos ou infinitos). Em particular, $\partial^\alpha f \in H_s$ se e somente se $\Delta_{\boldsymbol{h}}^{\alpha} f$ é limitado em H_s quando $|h| \to 0$.

Demonstração. Considere inicialmente o caso $|\alpha| = 1$, isto é, $\Delta_{\boldsymbol{h}}^{\alpha} = \Delta_h^j$, com $h \in \mathbb{R}$ não nulo e $j = 1, 2, ..., n$ arbitrários. Para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$ temos

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(\Delta_h^j f)(\xi) &= h^{-1}\left(\hat{f}_{he_j}(\xi) - \hat{f}(\xi)\right) \\
&= h^{-1}\left(e^{ih\xi_j} - 1\right)\hat{f}(\xi) \\
&= e^{(ih\xi_j)/2} h^{-1}\left(e^{(ih\xi_j)/2} - e^{-(ih\xi_j)/2}\right)\hat{f}(\xi) \\
&= 2ie^{ih\xi_j} h^{-1} \operatorname{sen}\left(\frac{h\xi_j}{2}\right)\hat{f}(\xi).
\end{aligned}$$

Suponha $\left\|\partial_j f\right\|_s^2 < \infty$. Note que por $|\operatorname{sen}(h\xi_j/2)| \leq |h\xi_j|/2$, para todo $h \in \mathbb{R}$, segue

$$\begin{aligned}
\left\|\Delta_h^j f\right\|_s^2 &= \int_{\mathbb{R}^n} \left|2ie^{ih\xi_j}\hat{f}(\xi)\right|^2 \left|h^{-1}\operatorname{sen}\left(\frac{h\xi_j}{2}\right)\right|^2 (1+|\xi|^2)^s \mathrm{d}\xi \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^n} \left|\xi_j \hat{f}(\xi)\right|^2 (1+|\xi|^2)^s \mathrm{d}\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} |\mathcal{F}(\partial_j f)(\xi)|^2 (1+|\xi|^2)^s \mathrm{d}\xi.
\end{aligned}$$

Ou seja,

$$\left\|\Delta_h^j f\right\|_s \leq ||\partial_j f||_s. \tag{5.11}$$

Mais precisamente, pelo Teorema da Convergência Dominada (FOLLAND, 2013, p. 54, Teorema 2.24), temos

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \left\|\Delta_h^j f\right\|_s^2 &= \lim_{h\to 0} \int_{\mathbb{R}^n} \left|2ie^{ih\xi_j}\hat{f}(\xi)\right|^2 \left|h^{-1}\operatorname{sen}\left(\frac{h\xi_j}{2}\right)\right|^2 (1+|\xi|^2)^s \mathrm{d}\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \lim_{h\to 0} \left|2ie^{ih\xi_j}\hat{f}(\xi)\right|^2 \left|h^{-1}\operatorname{sen}\left(\frac{h\xi_j}{2}\right)\right|^2 (1+|\xi|^2)^s \mathrm{d}\xi.
\end{aligned}$$

Por $\lim_{h\to 0} e^{ih\xi_j} = 1$ e $\lim_{h\to 0} h^{-1}\operatorname{sen}(h\xi_j/2) = \xi_j/2$, segue

$$\lim_{h\to 0} \left\|\Delta_h^j f\right\|_s^2 = \int_{\mathbb{R}^n} \left|\xi_j \hat{f}(\xi)\right|^2 (1+|\xi|^2)^s \mathrm{d}\xi.$$

Então

$$\lim_{h\to 0} \left\|\Delta_h^j f\right\|_s^2 = \left\|\partial_j f\right\|_s^2.$$

Suponha $\left\|\partial_j f\right\|_s^2 = \infty$. Como $\left|h^{-1}\operatorname{sen}(h\xi_j/2)\right| \leq \left|\xi_j\right|/2$ temos

$$\begin{aligned}
\limsup_{h\to 0} \left\|\Delta_h^j f\right\|_s^2 &= \limsup_{h\to 0} \int_{\mathbb{R}^n} \left|2ie^{ih\xi_j}\hat{f}(\xi)\right|^2 \left|h^{-1}\operatorname{sen}\left(\frac{h\xi_j}{2}\right)\right|^2 \times \\
&\quad \times (1+|\xi|^2)^s \mathrm{d}\xi \\
&\leq \limsup_{h\to 0} \int_{\mathbb{R}^n} \left|2ie^{ih\xi_j}\hat{f}(\xi)\right|^2 \left|\frac{\xi_j}{2}\right|^2 (1+|\xi|^2)^s \mathrm{d}\xi \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^n} \left|\xi_j \hat{f}(\xi)\right|^2 (1+|\xi|^2)^s \mathrm{d}.
\end{aligned}$$

logo

$$\limsup_{h\to 0}\left\|\Delta_h^j f\right\|_s^2 \leq \left\|\partial_j f\right\|_s^2.$$

Como $\left\|\partial_j f\right\|_s = \infty$, para dado $N > 0$, existe $R > 0$ tal que

$$\int_{|\xi|\leq R}(1+|\xi|^2)^s \left|2i\xi_j \hat{f}(\xi)\right|^2 \mathrm{d}\xi > 4N,$$

assim, para h suficientemente pequeno tal que

$$\left|h^{-1}\operatorname{sen}\left(\frac{h\xi_j}{2}\right)-\frac{\xi_j}{2}\right| < \left|\frac{\xi_j}{4}\right|,$$

teremos,

$$\begin{aligned}
\left\|\Delta_h^j f\right\|_s^2 &= \int_{\mathbb{R}^n}(1+|\xi|^2)^s \left|2h^{-1}\operatorname{sen}\left(\frac{h\xi_j}{2}\right)\right|^2 \left|\hat{f}(\xi)\right|^2 \mathrm{d}\xi \\
&\geq \int_{|\xi|\leq R}(1+|\xi|^2)^s \left|2h^{-1}\operatorname{sen}\left(\frac{h\xi_j}{2}\right)\right|^2 \left|\hat{f}(\xi)\right|^2 \mathrm{d}\xi \\
&\geq \int_{|\xi|\leq R}(1+|\xi|^2)^s \left|2\frac{\xi_2}{4}\right|^2 \left|\hat{f}(\xi)\right|^2 \mathrm{d}\xi \\
&= \frac{1}{4}\int_{|\xi|\leq R}(1+|\xi|^2)^s \left|2i\xi_j\hat{f}(\xi)\right|^2 \mathrm{d}\xi \\
&> N.
\end{aligned}$$

Logo, $\left\|\Delta_h^j f\right\|_s^2 \to \infty$ quando $h \to 0$. Para o caso $|\alpha| > 1$ a argumentação é similar pois

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(\Delta_{\boldsymbol{h}}^{\alpha} f)(\xi) &= \mathcal{F}\left(\prod_{j=1}^{n}\prod_{k=1}^{\alpha_j}\Delta_{h_{jk}}^{j} f\right)(\xi) \\
&= \prod_{j=1}^{n}\prod_{k=1}^{\alpha_j}\left[2ie^{ih_{jk}\xi_j}h_{jk}^{-1}\operatorname{sen}\left(\frac{h_{jk}\xi}{2}\right)\right]\hat{f}(\xi),
\end{aligned}$$

e quando quando $|\boldsymbol{h}| \to 0$ temos que $h_{jk} \to 0$. Então basta aplicar os argumentos anteriores para cada termo do produto. $\square$

Teorema 5.1.4. *Se $s \in \mathbb{R}$ e $\varphi \in \mathscr{S}$, o operador $\left[\Delta_{\boldsymbol{h}}^{\alpha}, \varphi\right] : H_s \to H_{s-|\alpha|+1}$ é limitado com cota superior independente de h.*

Demonstração. Considere $|\alpha| = 1$, então $\Delta_{\boldsymbol{h}}^{\alpha} = \Delta_h^j$, sendo $j = 1, 2, ...n$, e $h \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Assim,

$$\begin{aligned}
\left[\Delta_h^j, \varphi\right] f &= \Delta_h^j(\varphi f) - \varphi \Delta_h^j f \\
&= h^{-1}\left[(\varphi f)_{he_j} - \varphi f - (\varphi f_{he_j} - \varphi f)\right] \\
&= h^{-1}\left[(\varphi f)_{he_j} - \varphi f_{he_j}\right] \\
&= h^{-1}\left[\varphi_{he_j} - \varphi\right] f_{he_j},
\end{aligned}$$

logo

$$\left[\Delta_h^j, \varphi\right] f = (\Delta_h^j \varphi) f_{he_j}. \tag{5.12}$$

Mas a translação $f \mapsto f_{he_j}$ é uma isometria, como provaremos abaixo: veja que,

$$\left\|f_{he_j}\right\|_s = \int \left|\mathcal{F}(f_{he_j})(\xi)\right|^2 (1 + |\xi|^2)^s \mathrm{d}\xi$$

sendo

$$\mathcal{F}(f_{he_j})(\xi) = \int f_{he_j}(x) e^{-ix\cdot\xi} \mathrm{d}x = \int f(x + he_j) e^{-ix\cdot\xi} \mathrm{d}x,$$

com a mudança de variável $y = x + he_j$, segue que

$$\mathcal{F}(f_{he_j})(\xi) = \int f(y) e^{-iy\cdot\xi} e^{ihe_j\cdot\xi} \mathrm{d}y = e^{ihe_j\cdot\xi} \hat{f}(\xi).$$

Portanto,

$$\left\|f_{he_j}\right\|_s = \int |e^{ihe_j\cdot\xi} \hat{f}(\xi)|^2 (1 + |\xi|^2)^s \mathrm{d}\xi = \int |\hat{f}(\xi)|^2 (1 + |\xi|^2)^s \mathrm{d}\xi$$

Logo

$$||f_{he_j}||_s = ||f||_s. \tag{5.13}$$

Com isso, considerando $\sigma > n/2$, do teorema 5.1.2 segue:

$$\begin{aligned}
\left\|\left[\Delta_h^j, \varphi\right] f\right\|_s &= \left\|(\Delta_h^j \varphi) f_{he_j}\right\|_s \\
&\leq \left[\sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left|\Delta_h^j \varphi(x)\right|\right] \left\|f_{he_j}\right\|_s + C \left\|\Delta_h^j \varphi\right\|_{|s-1|+1+\sigma} \left\|f_{he_j}\right\|_{s-1}.
\end{aligned}$$

Agora, de (5.12) temos:

$$\left\| \left[\Delta_h^j, \varphi\right] f \right\|_s = \left[\sup_{x\in\mathbb{R}^n} \left|\Delta_h^j \varphi(x)\right|\right] \|f\|_s + C \left\|\Delta_h^j \varphi\right\|_{|s-1|+1+\sigma} \|f\|_{s-1}.$$

Por fim, utilizando (5.13) segue

$$\left\| \left[\Delta_h^j, \varphi\right] f \right\|_s \leq \left[\sup_{x\in\mathbb{R}^n} \left|\Delta_h^j \varphi(x)\right|\right] \|f\|_s + C \left\|\Delta_h^j \varphi\right\|_{|s-1|+1+\sigma} \|f\|_s, \forall h \neq 0.$$

Da Observação 5.1.5 resulta que $\Delta_h^j \varphi$ converge uniformemente para $\partial_j \varphi$ quando $h \to 0$. Portanto,

$$\left\| \left[\Delta_h^j, \varphi\right] f \right\|_s \leq C' \|f\|_s + C \left\|\Delta_h^j \varphi\right\|_{|s-1|+1+\sigma} \|f\|_s.$$

onde $C' = \sup_h \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \left|\Delta_h^j \varphi(x)\right|$. Então tomando $C'' = 2\max\left\{C', C\left\|\Delta_h^j \varphi\right\|_{|s-1|+1+\sigma}\right\}$ vale:

$$\left\| \left[\Delta_h^j, \varphi\right] f \right\|_s \leq C''||f||_s. \tag{5.14}$$

Se $|\alpha| > 1$ temos $[\Delta_h^\alpha, \varphi] = [\prod_{j=1}^n \prod_{k=1}^{\alpha_j} \Delta_{h_{jk}}^j, \varphi]$. Sabendo que para dados operadores A, B, C, D, vale a seguinte identidade:

$$[ABC, D] = AB[C,D] + A[B,D]C + [A,D]BC,$$

fica claro que para obtermos uma cota para $[\Delta_h^\alpha, \varphi]$ basta provar que os termos da forma $\Delta_{h'}^{\alpha'}\left[\Delta_h^j, \varphi\right]\Delta_{h''}^{\alpha''}$ onde $\alpha' + e_j + \alpha'' = \alpha$ são limitados. De fato, se $f \in H_s$, por 5.11 e da equivalência das normas nos espaços de Sobolev (Teorema 3.3.2), temos:

$$\begin{aligned}\left\|\Delta_{h'}^{\alpha'}\left[\Delta_h^j, \varphi\right]\Delta_{h''}^{\alpha''} f\right\|_{s-|\alpha|+1} &\leq \left\|\partial^{\alpha'}\left[\Delta_h^j, \varphi\right]\Delta_{h''}^{\alpha''} f\right\|_{s-|\alpha|+1} \\ &\leq C_1 \left\|\left[\Delta_h^j, \varphi\right]\Delta_{h''}^{\alpha''} f\right\|_{s-|\alpha|+|\alpha'|+1}.\end{aligned}$$

Agora, por 5.14:

$$\left\|\Delta_{h'}^{\alpha'}\left[\Delta_h^j, \varphi\right]\Delta_{h''}^{\alpha''} f\right\|_{s-|\alpha|+1} \leq C_2 \left\|\Delta_{h''}^{\alpha''} f\right\|_{s-|\alpha|+|\alpha'|+1}.$$

Novamente, por 5.11 e o Teorema 3.3.2 segue

$$\left\| \Delta_{h'}^{\alpha'} \left[\Delta_h^j, \varphi \right] \Delta_{h''}^{\alpha''} f \right\|_{s-|\alpha|+1} \le C_3 \| f \|_{s-|\alpha|+|\alpha'|+|\alpha''|+1} .$$

Por fim, por $|\alpha'| + |\alpha''| + 1 = |\alpha|$, temos

$$\left\| \Delta_{h'}^{\alpha'} \left[\Delta_h^j, \varphi \right] \Delta_{h''}^{\alpha''} f \right\|_{s-|\alpha|+1} \le C_3 \| f \|_{s} .$$

$\square$

Corolário 5.1.1. *Se $L = \sum_{|\beta| \le k} a_\beta \partial^\beta$ é um operador diferencial de ordem k com coeficientes em $\mathscr{S}$, então para todo $s \in \mathbb{R}$, o operador $\left[\Delta_h^\alpha, L \right] : H_s \to H_{s-k-|\alpha|+1}$é limitado, com cota superior independente de h.*

Demonstração. Observe que $\Delta_{\boldsymbol{h}}^\alpha$ comuta com ∂^β em H_s. De fato, dada $f \in H_s$ temos

$$\Delta_h^j \partial^\beta f = h^{-1} \left[\partial^\beta f_{he_j} - \partial^\beta f \right] = \partial^\beta \left(h^{-1} \left[f_{he_j} - f \right] \right) = \partial^\beta \Delta_h^j f.$$

Consequentemente, $\left[\Delta_{\boldsymbol{h}}^\alpha, \partial^\beta \right] = 0$ e

$$\left[\Delta_{\boldsymbol{h}}^\alpha, L \right] = \left[\Delta_h^j, \sum_{|\beta| \le k} a_\beta \partial^\beta \right] = \sum_{|\beta| \le k} \left[\Delta_{\boldsymbol{h}}^\alpha, a_\beta \right] \partial^\beta .$$

Logo, para $f \in H_s$, da desigualdade triangular:

$$\left\| \left[\Delta_h^j, L \right] f \right\|_{s-k-|\alpha|+1} \le \sum_{|\beta| \le k} \left\| \left[\Delta_h^j, a_\beta \right] \partial^\beta f \right\|_{s-k-|\alpha|+1} .$$

Agora, pelo teorema anterior e do Teorema 3.3.2:

$$\begin{aligned} \left\| \left[\Delta_h^j, L \right] f \right\|_{s-k-|\alpha|+1} &\le C \sum_{|\beta| \le k} \left\| \partial^\beta f \right\|_{s-k} \\ &\le C' \| f \|_{s} . \end{aligned}$$

$\square$

5.2 O TEOREMA DA REGULARIDADE ELÍPTICA

Nesta seção utilizamos os resultados anteriores para obter o Teorema da Regularidade Elíptica. O método consiste em, inicialmente, obter estimativas a priori, ou seja, estimativas para as derivadas de uma função u em termos das derivadas do Lu. Depois disso, utilizando tais estimativas, demonstramos que a regularidade de Lu implica na regularidade de u.

A desigualdade abaixo será útil.

Observação 5.2.1. *Para $a, b \in \mathbb{R}$ e $p \geq 1$, vale*

$$|a+b|^p \leq 2^{p-1}(|a|^p + |b|^p).$$

Teorema 5.2.1. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto limitado e $L = \sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha \partial^\alpha$ um operador linear com coeficientes de classe C^∞ elíptico em uma vizinhança de $\overline{\Omega}$. Então para cada $s \in \mathbb{R}$ existe uma constante $C > 0$ tal que para todo $u \in H_s^0(\Omega)$,*

$$\|u\|_s \leq C\left(\|Lu\|_{s-k} + \|u\|_{s-1}\right).$$

Demonstração. Basta considerar o caso $k \geq 1$. A prova do teorema é dividido em três partes. Na primeira, será considerado a_α constante quando $|\alpha| = k$ e $a_\alpha = 0$ quando $|\alpha| < k$. Na segunda, supomos que cada a_α é constante quando $|\alpha| < k$. Na terceira e última parte será analisado o caso geral.

Etapa 1. Se $L = \sum_{|\alpha|=k} a_\alpha \partial^\alpha$ é um operador elíptico de coeficientes constantes então, para cada $s \in \mathbb{R}$ existe uma constante $C > 0$ tal que para todo $u \in H_s^0(\Omega)$ vale

$$\|u\|_s \leq C\left(\|Lu\|_{s-k} + \|u\|_{s-1}\right).$$

De fato, se $u \in H_s$ então podemos expressar Lu pela sua transformada de Fourier:

$$\mathcal{F}(Lu)(\xi) = i^k \sum_{|\alpha|=k} a_\alpha \xi^\alpha \hat{u}(\xi).$$

Agora, pelas observações 5.2.1 e 4.2.1:

$$\begin{aligned}
(1+|\xi|^2)^s\,|\hat{u}(\xi)|^2 &= (1+|\xi|^2)^{s-k}(1+|\xi|^2)^k\,|\hat{u}(\xi)|^2\\
&\leq 2^k(1+|\xi|^2)^{s-k}(1+|\xi|^{2k})\,|\hat{u}(\xi)|^2\\
&\leq 2^k(1+|\xi|^2)^{s-k}\left(1+A^{-1}\left|\sum_{|\alpha|=k} a_\alpha\xi^\alpha\right|^2\right)|\hat{u}(\xi)|^2\\
&= 2^k(1+|\xi|^2)^{s-k}\left[|\hat{u}(\xi)|^2+A^{-1}\left|\sum_{|\alpha|=k} a_\alpha\xi^\alpha\hat{u}(\xi)\right|^2\right]\\
&= 2^k(1+|\xi|^2)^{s-k}\left[|\hat{u}(\xi)|^2+A^{-1}\left|i^k\sum_{|\alpha|=k} a_\alpha\xi^\alpha\hat{u}(\xi)\right|^2\right]\\
&= 2^k(1+|\xi|^2)^{s-k}\left[|\hat{u}(\xi)|^2+|\mathcal{F}(Lu)(\xi)|^2A^{-1}\right].
\end{aligned}$$

Integrando em ambos os lados e lembrando que $\|u\|_{s-k}\leq\|u\|_{s-1}$, obtemos

$$\|u\|_s^2\leq 2^kA^{-1}\,\|Lu\|_{s-k}^2+2^k\,\|u\|_{s-1}^2\,,$$

o que fornece:

$$\|u\|_s^2\leq C_0\left(\|Lu\|_{s-k}+\|u\|_{s-1}\right),$$

onde $C_0=2^k\max\{A^{-1/2},1\}$.

Etapa 2. Se $L=\sum_{|\alpha|=k} a_\alpha\partial^\alpha$ é um operador elíptico com coeficientes de classe C^∞. Então, para cada $s\in\mathbb{R}$ existe uma constante $C>0$ tal que para todo $u\in H_s^0(\Omega)$ vale

$$\|u\|_s\leq C\left(\|Lu\|_{s-k}+\|u\|_{s-1}\right).$$

De fato, para cada $x_0\in\Omega$, considere

$$L_{x_0}=\sum_{|\alpha|=k} a_\alpha(x_0)\partial^\alpha.$$

Sendo $\overline{\Omega}$ compacto (pois Ω é limitado), podemos tomar a constante A da desigualdade da observação 4.2.1 independente de $x_0\in\Omega$. Aplicando a conclusão da Etapa 1 ao operador L_{x_0} vale,

$$\|u\|_s \leq C_0 \left(\|L_{x_0}u\|_{s-k} + \|u\|_{s-1} \right), \ \forall u \in H_s, \tag{5.15}$$

onde C_0 independe de x_0. A estratégia consiste em estimar

$$\|Lu - L_{x_0}u\|_{s-k} = \left\| \sum_{|\alpha|=k} [a_\alpha(\cdot) - a_\alpha(x_0)] \, \partial^\alpha u \right\|_{s-k},$$

para u com suporte em uma vizinhança pequena de x_0, e então utilizar partição da unidade.

Observe que não há problema em considerar $a_\alpha \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, pois podemos multiplicar as funções a_α por uma função $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que $\varphi = 1$ em $\overline{\Omega}$, sem alterar Lu para $u \in H_s^0(\Omega)$. Assim, por $a_\alpha \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, a desigualdade do valor médio garante a existência de uma constante $C_1 > 0$ tal que

$$|a_\alpha(x) - a_\alpha(x_0)| \leq C_1 \, |x - x_0| \, , \ |\alpha| = k, \ x \in \mathbb{R}^n, \ x_0 \in \Omega. \tag{5.16}$$

Agora, defina $\delta = (4n^k C_0 C_1)^{-1}$ e fixe $\varphi \in C_c^\infty(B_{2\delta}(0))$ com $0 \leq \varphi \leq 1$ e $\varphi = 1$ em $B_\delta(0)$. Para cada $x_0 \in \Omega$ e $u \in H_s^0(\Omega)$ tal que $\operatorname{supp} u \subset B_\delta(x_0)$ temos,

$$[a_\alpha(\cdot) - a_\alpha(x_0)] \, \partial^\alpha u = \psi_{x_0,\alpha}(\cdot) \partial^\alpha u, \tag{5.17}$$

onde $\psi_{x_0,\alpha} = \varphi(x - x_0) \, [a_\alpha(x) - a_\alpha(x_0)]$. Além disso, de (5.16) segue

$$\begin{aligned} \sup_{x \in B_{2\delta}(x_0)} |\psi_{x_0,\alpha}(x)| &= \sup_{x \in B_{2\delta}(x_0)} |\varphi(x - x_0) \, [a_\alpha(x) - a_\alpha(x_0)]| \\ &\leq \sup_{x \in B_{2\delta}(x_0)} |a_\alpha(x) - a_\alpha(x_0)| \\ &\leq 2\delta C_1, \end{aligned}$$

logo

$$\sup_{x \in B_{2\delta}(x_0)} |\psi_{x_0,\alpha}(x)| \leq \left[2n^k C_0 \right]^{-1}. \tag{5.18}$$

Portanto, por (5.17), (5.18) e pelo Teorema 5.1.2:

$$\begin{aligned}\|[a_\alpha(\,\cdot\,)-a_\alpha(x_0)]\,\partial^\alpha u\|_{s-k} &= \|\psi_{x_0,\alpha}\partial^\alpha u\|_{s-k}\\ &\le \left[\sup_{x\in B_{2\delta}(x_0)}|\psi_{x_0,\alpha}(x)|\right]\|\partial^\alpha u\|_{s-k}+\\ &\quad +C\,\|\psi_{x_0,\alpha}\|_{|s-k-1|+n+1}\,\|\partial^\alpha u\|_{s-k-1},\end{aligned}$$

então

$$\|[a_\alpha(\,\cdot\,)-a_\alpha(x_0)]\,\partial^\alpha u\|_{s-k} \le (2n^kC_0)^{-1}\,\|\partial^\alpha u\|_{s-k}+C_2\,\|\partial^\alpha u\|_{s-k-1}, \quad (5.19)$$

onde C_2 é uma constante que depende apenas de $\|\psi_{x_0,\alpha}(x)\|_{|s-k-1|+n+1}$. Além disso, como $\overline{\Omega}$ é compacto, a constante C_2 pode ser tomada independente de x_0.

Por outro lado

$$\begin{aligned}\|\partial^\alpha u\|^2_{s-k} &= \int_{\mathbb{R}^n}|\mathcal{F}(\partial^\alpha u)|^2\,(1+|x|^2)^{s-k}\mathrm{d}x\\ &= \int_{\mathbb{R}^n}|\hat{u}|^2\,|x^\alpha|^2\,(1+|x|^2)^{s-k}\\ &\le \int_{\mathbb{R}^n}|\hat{u}|^2\,(1+|x|^2)^{|\alpha|}(1+|x|^2)^{s-k},\end{aligned}$$

segue que

$$\|\partial^\alpha u\|^2_{s-k}\le\|u\|^2_s\,. \quad (5.20)$$

Portanto, de (5.19) e (5.20) resulta

$$\|a_\alpha(\,\cdot\,)-a_\alpha(x_0))\partial^\alpha u\|_{s-k}\le(2n^kC_0)^{-1}\,\|u\|_s+C_2\,\|u\|_{s-1}\,. \quad (5.21)$$

Assim, como existem menos que n^k multi-índices $\alpha\in\mathbb{N}^n$ com $|\alpha|=k$, de (5.21) temos que

$$\begin{aligned}\|Lu-L_{x_0}u\|_{s-k} &\le \sum_{|\alpha|=k}\|[a_\alpha(\,\cdot\,)-a_\alpha(x_0)]\partial^\alpha u\|_{s-k}\\ &\le \sum_{|\alpha|=k}\left[(2n^kC_0)^{-1}\,\|u\|_s+C_2\,\|u\|_{s-1}\right],\end{aligned}$$

logo

$$\|Lu - L_{x_0}u\|_{s-k} \leq (2C_1)^{-1}\|u\|_s + n^k C_2 \|u\|_{s-1}.$$

Combinando este resultado com a estimativa (5.15), obtemos

$$\begin{aligned}
\|u\|_s &\leq C_0\left[\|L_{x_0}u\|_{s-k} + \|u\|_{s-1}\right] \\
&\leq C_0\left[\|Lu\|_{s-k} + \|L_{x_0}u - Lu\|_{s-k} + \|u\|_{s-1}\right] \\
&\leq C_0\|Lu\|_{s-k} + \frac{1}{2}\|u\|_s + \left[n^k C_2 + 1\right] C_0 \|u\|_{s-1}.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\|u\|_s \leq C_3\left[\|Lu\|_{s-k} + \|u\|_{s-1}\right], u \in H_s^0(\Omega), \operatorname{supp} u \subset B_\delta(x_0), \tag{5.22}$$

onde $C_3 = 2\left[n^k C_2 + 1\right] C_0$ é independente de x_0.

Observe que a estimativa (5.22) é válida para u, com $\operatorname{supp} u \subset B_\delta(x_0)$ e uniforme em x_0. Por Ω ser limitado, podemos cobrir $\overline{\Omega}$ com uma quantidade finita de bolas $B_\delta(x_1), \ldots, B_\delta(x_N)$ com $x_j \in \Omega$. Seja $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_N\}$, uma partição da unidade subordinada a esta cobertura. Então para toda $u \in H_s^0(\Omega)$, temos $\varphi_j u \in H_s^0(\Omega)$ e $\operatorname{supp} \varphi u \subset B_\delta(x_j)$, então por (5.22)

$$\|u\|_s = \left\|\sum_{j=1}^{N} \varphi_j u\right\|_s \leq \sum_{j=1}^{N} \left\|\varphi_j u\right\|_s,$$

e, daí

$$\|u\|_s \leq C_3 \sum_{j=1}^{N} \left[\left\|L(\varphi_j u)\right\|_{s-k} + \left\|\varphi_j u\right\|_{s-1}\right]. \tag{5.23}$$

Mas,

$$L(\varphi_j u) = \varphi_j Lu - \varphi_j Lu + L(\varphi_j u) = \varphi_j Lu + \left[L, \varphi_j\right] u. \tag{5.24}$$

Observe que $\left[L, \varphi_j\right]$ é um operador diferencial de ordem menor ou igual a $k-1$

com coeficientes em $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, como provaremos abaixo.

$$
\begin{aligned}
\left[L,\varphi_j\right]u &= L(\varphi_j u)-\varphi_j Lu\\
&= \sum_{|\alpha|=k} a_\alpha \partial^\alpha(\varphi_j u)-\varphi_j\sum_{|\alpha|=k} a_\alpha\partial^\alpha u\\
&= \sum_{|\alpha|=k} a_\alpha\left[\sum_{\beta\leq\alpha}\binom{\alpha}{\beta}\partial^{\alpha-\beta}\varphi_j\partial^\beta u\right]-\sum_{|\alpha|=k}\varphi_j a_\alpha\partial^\alpha u\\
&= \sum_{|\alpha|=k} a_\alpha\left[\sum_{\beta<\alpha}\binom{\alpha}{\beta}\partial^{\alpha-\beta}\varphi_j\partial^\beta u\right]+\\
&\quad+\sum_{|\alpha|=k}\varphi_j a_\alpha\partial^\alpha u-\sum_{|\alpha|=k}\varphi_j a_\alpha\partial^\alpha u,
\end{aligned}
$$

então

$$\left[L,\varphi_j\right]u=\sum_{|\alpha|=k}\sum_{\beta<\alpha}\binom{\alpha}{\beta}a_\alpha\partial^{\alpha-\beta}\varphi_j\partial^\beta u.$$

Observe que no segundo somatório à direita temos $\beta<\alpha$, logo, $|\alpha-\beta|<|\alpha|=k$ e $|\beta|<|\alpha|=k$, então a ordem de $[L,\varphi_j]$ é no máximo $k-1$.

Além disso, por $\partial^\beta\varphi_j\in C_c^\infty$, resulta que os coeficientes de $[L,\varphi_j]$ são funções em $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. Assim, dos teoremas 3.3.2 e 3.3.4, temos

$$
\begin{aligned}
\left\|[L,\varphi_j]u\right\|_{s-k} &= \left\|\sum_{|\alpha|=k}\sum_{\beta<\alpha}\binom{\alpha}{\beta}a_\alpha\partial^{\alpha-\beta}\varphi_j\partial^\beta u\right\|_{s-k}\\
&\leq \sum_{|\alpha|=k}\sum_{\beta<\alpha}\binom{\alpha}{\beta}\left\|(a_\alpha\partial^{\alpha-\beta}\varphi)\partial^\beta u\right\|_{s-k}\\
&\leq \sum_{|\alpha|=k}\sum_{\beta<\alpha}\binom{\alpha}{\beta}C_{\alpha,\beta}\left\|u\right\|_{s-k+|\beta|},
\end{aligned}
$$

logo

$$\left\|[L,\varphi_j]u\right\|_{s-k}\leq C'\left\|u\right\|_{s-1}, \tag{5.25}$$

sendo $C'>$ constante. Além disso

$$\left\|\varphi_j Lu\right\|_{s-k}\leq C''\left\|Lu\right\|_{s-k} \text{ e } \left\|\varphi_j u\right\|_{s-1}\leq C'''\left\|u\right\|_{s-1}. \tag{5.26}$$

Portanto, de (5.23), (5.24), (5.25) e (5.26) resulta

$$\begin{aligned}\|u\|_s &\le C_3 \sum_{j=1}^{N} \left[\left\|\varphi_j L u\right\|_{s-k} + \left\|[L,\varphi_j]u\right\|_{s-k} + \left\|\varphi_j u\right\|_{s-1}\right] \\ &\le C_4 \left[\|Lu\|_{s-k} + \|u\|_{s-1}\right],\end{aligned}$$

sendo $C_3 > 0, C_4 > 0$ constantes apropriadas.

Etapa 3. Se $L = \sum_{|\alpha|\le k} a_\alpha \partial^\alpha$ é um operador elíptico com coeficientes de classe C^∞. Então, para cada $s \in \mathbb{R}$ existe uma constante $C > 0$ tal que para todo $u \in H_s^0(\Omega)$ vale

$$\|u\|_s \le C\left(\|Lu\|_{s-k} + \|u\|_{s-1}\right).$$

De fato, escrevemos $L = L^0 + L^1$, onde

$$L^0 = \sum_{|\alpha|=k} a_\alpha \partial^\alpha, \quad L^1 = \sum_{|\alpha|<k} a_\alpha \partial^\alpha.$$

Da Etapa 2 sabemos que existe $C_4 > 0$ tal que, para dada $u \in H_s^0(\Omega)$,

$$\|u\|_s \le C_4 \left[\left\|L^0 u\right\|_{s-k} + \|u\|_{s-1}\right]. \tag{5.27}$$

Por outro lado, conforme argumento apresentados na demonstração da Etapa 2, podemos supor que os coeficientes de L^1 pertencem a C_c^∞, então pelos teoremas 3.3.2 e 3.3.4, temos que existe $C_5 > 0$ tal que

$$\left\|L^1 u\right\|_{s-k} \le C_5 \|u\|_{s-1.} \tag{5.28}$$

Portanto, de (5.26) e (5.28) resulta

$$\begin{aligned}\|u\|_s &\le C_4 \left[\|Lu\|_{s-k} + \left\|L^1 u\right\|_{s-k} + \|u\|_{s-1}\right] \\ &\le C\left[\|Lu\|_{s-k} + \|u\|_{s-1}\right].\end{aligned}$$

onde $C = C_4(C_5 + 1)$. $\square$

Corolário 5.2.1. *Para todo $t \leq s-1$, existe $C_t > 0$ tal que*

$$\|u\|_s \leq C_t \left(\|Lu\|_{s-k} + \|u\|_t \right), \; \forall u \in H_s^0(\Omega).$$

Demonstração. Pelo lema 3.3.3, existe $C_t' > 0$ tal que

$$\|u\|_{s-1} \leq (2C)^{-1} \|u\|_s + C_t' \|u\|_t ,$$

onde C é a constante da desigualdade do teorema anterior. Além disso, pelo teorema 5.2.1, temos

$$\|u\|_s \leq C \left(\|Lu\|_{s-k} + \|u\|_{s-1} \right).$$

Unindo, os dois resultados:

$$\|u\|_s \leq C \left(\|Lu\|_{s-k} + (2C)^{-1} \|u\|_s + C_t' \|u\|_t \right),$$

consequentemente:

$$\|u\|_s \leq 2C \left(\|Lu\|_{s-k} + C_t' \|u\|_t \right).$$

□

Lema 5.2.1. *Considere Ω um aberto em $\mathbb{R}^n$ e L um operador elíptico de ordem k com coeficientes em $C^\infty(\Omega)$. Se $u \in H_s^{loc}(\Omega)$ e $Lu \in H_{s-k+1}^{loc}(\Omega)$, então $u \in H_{s+1}^{loc}(\Omega)$.*

Demonstração. Considere $\psi \in C_c^\infty(\Omega)$, portanto $\psi u \in H_s(\Omega)$ e $\psi Lu \in H_{s-k+1}(\Omega)$. Além disso, $[L, \psi]$ é um operador diferencial de ordem $k-1$ com coeficientes em $C_c^\infty(\Omega)$, então pelos teoremas 3.3.4 e 3.3.2, $[L, \psi]\, u \in H_{s-k+1}$. Assim,

$$L(\psi u) = \psi Lu + [L, \psi]\, u \in H_{s-k+1}(\Omega).$$

Agora, consideremos que $1 \leq j \leq n$ e $h \neq 0$ mas é suficientemente pequeno, deste modo, as distribuições $\Delta_h^j(\psi u)$ tem suporte em um compacto comum Ω'

de Ω, então pelo teorema 5.2.1:

$$\begin{aligned}\left\|\Delta_h^j(\psi u)\right\|_s &\leq C\left(\left\|L\Delta_h^j(\psi u)\right\|_{s-k} + \left\|\Delta_h^j(\psi u)\right\|_{s-1}\right)\\ &\leq C\left(\left\|\Delta_h^j L(\psi u)\right\|_{s-k} + \left\|\left[L,\Delta_h^j\right](\psi u)\right\|_{s-k} + \right.\\ &\left. + \left\|\Delta_h^j(\psi u)\right\|_{s-1}\right),\end{aligned}$$

e do corolário 5.1.1:

$$\begin{aligned}\left\|\Delta_h^j(\psi u)\right\|_s \leq C&\left(\left\|\Delta_h^j L(\psi u)\right\|_{s-k} + C'\left\|\psi u\right\|_{s-k} + \right.\\ &\left. + \left\|\Delta_h^j(\psi u)\right\|_{s-1}\right).\end{aligned}$$

Observe que por $L(\psi u) \in H_{s-k+1}(\Omega)$, $\partial_j(L\psi u)$ deve estar em $H_{s-k}(\Omega)$, assim pelo teorema 5.1.3 $\Delta_h^j L(\psi u)$ fica limitado em $H_{s-k}(\Omega)$ quando $|h| \to 0$. Já $\psi u \in H_s(\Omega)$, o que equivale a $\partial_j(\psi u) \in H_{s-1}(\Omega)$, nesse caso, também pelo teoremas 5.1.3, temos $\Delta_h^j(\psi u)$ limitado em $H_{s-1}(\Omega)$ quando $|h| \to 0$. Portanto, $\Delta_h^j(\psi u)$ é limitada em $H_s(\Omega)$ quando $|h| \to 0$ o que equivale a $\partial_j(\psi u) \in H_s(\Omega)$, que por sua vez equivale a $\psi u \in H_{s+1}(\Omega)$. $\square$

Demonstração do Teorema da Regularidade Elíptica:

Demonstração. Dado $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$, semelhante ao que foi feito no lema anterior, queremos provar que $\varphi u \in H_{s+k}$. Assim, escolha $\psi_0 \in C_c^\infty(\Omega)$ tal que $\psi_0 = 1$ em uma vizinhança de $\operatorname{supp}\varphi$. Do Corolário 3.3.2, $\psi_0 u \in H_t$ para algum $t \in \mathbb{R}$. Assumindo que $N = s+k-t \in \mathbb{Z}^+$ (diminuindo t, caso necessário). Escolhendo funções $\psi_1, \ldots, \psi_{N-1}$ tais que ψ_j seja suportada no conjunto onde $\psi_{j-1} = 1$ e $\psi_j = 1$ em uma vizinhança de $\operatorname{supp}\varphi$. Por fim, defina $\psi_N = \varphi$. Queremos provar que $\psi_j u \in H_{t+j}$, assim quando $j = N$, o teoremas estará provado. O caso $j = 0$ é assumido válido. Suponha agora que $\psi_j u \in H_{t+j}$ onde $0 \leq j < N$. Então

$\psi_{j+1}u = \psi_{j+1}\psi_j u \in H_{t+j}$ e $L(\psi_j u) = Lu = f$ em supp ψ_{j+1}. Ainda,

$$\begin{aligned} L(\psi_{j+1}u) &= L(\psi_{j+1}\psi_j u) \\ &= L(\psi_{j+1}\psi_j u) + \psi_{j+1}L(\psi_j u) - \psi_{j+1}L(\psi_j u) \\ &= \psi_{j+1}f + \left[L, \psi_{j+1}\right](\psi_j u). \end{aligned}$$

Por $f \in H_s^{\mathrm{loc}}(\Omega)$, então $\psi_{j+1}f \in H_s(\Omega)$ e por $\psi_j u \in H_{t+j}$ então $\left[L, \psi_{j+1}\right](\psi_j u) \in H_{t+j-k+1}$, assim, por $H_s \subset H_{t+j-k+1}$, temos que $L(\psi_{j+1}u) \in H_{t+j-k+1}$. Pelo lema 5.2.1, $\psi_{j+1}u \in H_{j+t+1}^{\mathrm{loc}}(\Omega)$ e por ter suporte compacto $\psi_{j+1}u \in H_{j+t+1}(\Omega)$. Valendo para todo j, quando $j = N$, temos $\varphi u \in H_{s+k}$. □

5.3 HIPOELIPTICIDADE DE OPERADORES COM COEFICIENTES CONSTANTES

Demonstração do Teorema 5.0.2

A demonstração segue argumentos similares aos da prova do TRE e de resultados do apêndice.

Demonstração. **(H1)⇒(H2)**) Supondo que **(H2)** não é válida, existe $M > 0$ e $(\xi_j) \subset \mathbb{R}^n$ tal que $\xi_j \to \infty$ e que $d_L(\xi_j) < M$ para todo $j \in \mathbb{Z}^+$. Agora considere a sequência $(\zeta_j) \subset \mathcal{Z}(L)$ tal que $\left|\xi_j - \zeta_j\right| < d_L(\xi_j) + 1/j$, $j \in \mathbb{Z}^+$ (o que é possível por definição de ínfimo). Logo,

$$\left|\xi_j - \zeta_j\right| < M + 1 \Rightarrow \left|\xi_j\right| - (M+1) < \left|\zeta_j\right|, j \in \mathbb{Z}^+,$$

então $\left|\zeta_j\right| \to \infty$. Da hipótese **(H1)** resulta $\left|\operatorname{Im}\zeta_j\right| \to \infty$, mas $\forall j \in \mathbb{Z}^+$:

$$\left|\operatorname{Im}\zeta_j\right| \leq [(\operatorname{Re}\xi_j - \operatorname{Re}\zeta_j)^2 + \operatorname{Im}\zeta_j^2]^{1/2} \leq \left|\xi_j - \zeta_j\right| < M + 1,$$

uma contradição. Portanto

$$\lim_{|\xi| \to \infty} d_L(\xi) = \infty.$$

(H2)⇒(H1)) Supondo que **(H1)** não seja válida segue que existem $M>0$ e $(\zeta_j)\subset \mathcal{Z}(L)$ tal que $\left|\zeta_j\right|\to\infty$, mas $\left|\operatorname{Im}\zeta_j\right|<M$, $\forall\in\mathbb{Z}^+$. Assim, considere a sequência $(\xi_j)\subset\mathbb{R}^n$ onde $\xi_j=\operatorname{Re}\zeta_j$, $j\in\mathbb{Z}^+$. Logo,

$$d_L(\xi)\le\left|\xi_j-\zeta_j\right|=\left|\operatorname{Im}\zeta_j\right|<M, j\in\mathbb{Z}^+.$$

Da hipótese **(H2)** segue que $\left|\xi_j\right|<M, j\in\mathbb{Z}^+$, o que equivale a $\left|\operatorname{Re}\zeta_j\right|<M, j\in\mathbb{Z}^+$ e com isso,

$$\left|\zeta_j\right|\le\left|\operatorname{Re}\zeta_j\right|+\left|\operatorname{Im}\zeta_j\right|<2M, j\in\mathbb{Z}^+,$$

um absurdo. Portanto $\lim\limits_{\zeta\to\infty}\operatorname{Im}\zeta=\infty$ em $\mathcal{Z}(L)$.
(H3)⇒(H2)) Imediato do Teorema do Confronto.
(H2)⇒(H3)) Observe que a aplicação $\xi\mapsto d_L(\xi)$ é contínua. Para cada $R>0$ definimos $M(R)=\min_{|\xi|=R}d_L(\xi)$, então temos

$$M(R)^2=\inf_{|\xi|=R}\inf_{\zeta\in\mathcal{Z}(L)}|\xi-\zeta|^2, \tag{5.29}$$

como provaremos: seja $A\subset\mathbb{R}^+$ limitado e $0\le a=\inf A$, então verifica-se que $a^2=\inf\{x^2 : x\in A\}$. Em particular

$$d_L(\xi)^2=\inf_{\zeta\in\mathcal{Z}(L)}|\xi-\zeta|^2,$$

de onde resulta (5.29). Portanto, por $\mathcal{Z}(L)$ ser semi-algébrico (Definição A.0.1), segue dos Corolários A.0.1 e A.0.2 que existem constantes $a\in\mathbb{Q}$ e $A\neq 0$ tais que

$$M(R)=AR^a(1+o(1)), \tag{5.30}$$

para R suficientemente grande. Se vale **(H2)**, então $a>0$ e daí resulta **(H3)**.
(H3)⇒(H4)) Afirmamos que

$$|L(\xi+\zeta)|\le 2^k|L(\xi)| \text{ se } |\zeta|\le d_L(\xi). \tag{5.31}$$

Para a prova, fixamos $\xi\in\mathbb{R}^n, \zeta\in\mathbb{C}^n$ e consideramos o polinômio de uma variável definido por $g(\tau)=L(\xi+\tau\zeta), \tau\in\mathbb{C}$. Supondo $|\zeta|\le d_L(\xi)$ resulta que os zeros $\tau_1,\ldots,\tau_k$ de g satisfazem $|\tau_j| \geq 1$, para $j = 1,2,\ldots,k$ pois, se $\eta = \xi + \tau\zeta$ é raiz de L, então

$$|\tau\zeta| = |\eta - \xi| \geq d_L(\xi) \geq |\zeta| \Rightarrow |\tau| \geq 1.$$

Então

$$\left|\frac{L(\xi+\zeta)}{L(\xi)}\right| = \left|\frac{g(1)}{g(0)}\right| = \frac{a_0}{a_0}\prod_{j=1}^{k}\frac{\tau_{j-1}}{\tau_j} = \prod_{j=1}^{k}\frac{\tau_{j-1}}{\tau_j} \leq 2^k,$$

o que prova (5.31). Para todo $\alpha \in \mathbb{N}^n$, aplicando a Fórmula integral de Cauchy à função L, em cada variável, temos

$$L^{(\alpha)}(\xi) = \frac{\alpha!}{(2\pi i)^n}\int\limits_{|\zeta_1|=r}\cdots\int\limits_{|\zeta_n|=r}\frac{L(\xi+\zeta)}{\prod\limits_{j=1}^{n}\zeta_j^{\alpha_j+1}}\mathrm{d}\zeta_1\ldots\mathrm{d}\zeta_n, \xi \in \mathbb{R}^n, \tag{5.32}$$

para todo $r > 0$. Se tomarmos $r = n^{-1/2}d_L(\xi)$, então $|\zeta_1| = |\zeta_2| = \cdots |\zeta_n| = r$ implica que

$$|\zeta| = \left(\sum_{j=1}^{n}|\zeta_j|^2\right)^{1/2} = \left(\sum_{j=1}^{n}\frac{d_p(\xi)^2}{n}\right)^{1/2} = d_p(\xi),$$

logo, de (5.31) e (5.32) temos:

$$\begin{aligned}
\left|L^{(\alpha)}(\xi)\right| &\leq \frac{\alpha!}{|2\pi i|^n}\int\limits_{|\zeta_1|=r}\cdots\int\limits_{|\zeta_n|=r} 2^k\frac{|L(\xi)|}{\prod\limits_{j=1}^{n}\left|\zeta_j^{\alpha_j+1}\right|}\mathrm{d}\zeta_1\ldots\mathrm{d}\zeta_n \\
&\leq \alpha!2^k|L(\xi)|\prod_{j=1}^{n}\int_{|\zeta_j|=r}|\zeta_j|^{-(a_j+1)}\mathrm{d}\zeta_j \\
&= \alpha!2^k|L(\xi)|\prod_{j=1}^{n}\frac{1}{\alpha_j}\frac{1}{\left[n^{-1/2}d_L(\xi)\right]^{\alpha_j}},
\end{aligned}$$

e daí

$$\left|L^{(\alpha)}(\xi)\right| \leq \alpha!2^k\frac{|L(\xi)|}{\left[n^{-1/2}d_L(\xi)\right]^{|\alpha|}}, \xi \in \mathbb{R}^n. \tag{5.33}$$

Certamente $L^{(\alpha)} \equiv 0$ para $|\alpha| > k$. Assim, de **(H3)**, temos que existe δ, C, $R > 0$

tais que $d_L(\xi) \geq C|\xi|^{\delta}$ quando $\xi \in \mathbb{R}^n$, $|\xi| > R$. Portanto, de (5.33) obtemos:

$$\left|L^{(\alpha)}(\xi)\right| \leq \frac{\alpha!2^k|L(\xi)|}{n^{-|\alpha|/2}C^{|\xi|^{\delta|\alpha|}}} = C'|\xi|^{-\delta|\alpha|}|L(\xi)|, |\xi| > R,$$

sendo $C' = \alpha!2^k/(n^{-|\alpha|/2}C^{|\alpha|})$.

(H4)$\Rightarrow$**(H5)**) É similar à demonstração do teorema 5.0.1 (Regularidade Elíptica), mas com algumas modificações. Considere $f \in H_s^{\text{loc}}(\Omega)$ e $L(\partial)u = f$. Seja $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$, desejamos provar que $\varphi u \in H_{s+k\delta}$. Escolha $\psi_0 \in C_c^\infty(\Omega))$ de modo que $\psi_0 = 1$ em uma vizinhança de $\operatorname{supp}\varphi$. Pelo corolário 3.3.2, $\psi_0 u \in H_t(\Omega)$ para algum $t \in \mathbb{R}$, e reduzindo t caso necessário, podemos supor que $t = s+k-1-M\delta$ para algum inteiro positivo M. Escolha funções $\psi_1,\ldots,\psi_M \in C^\infty(\Omega)$ indutivamente de modo que ψ_m está suportada no conjunto onde $\psi_{m-1} = 1$ e $\psi_m = 1$ em um vizinhança de $\operatorname{supp}\varphi$, e por fim considere $\psi_{M+1} = \varphi$. Por $\psi_0 = 1$ em $\operatorname{supp}\psi_1$, por 5.1, nós temos

$$L[\psi_1 u] = \psi_1 Lu + \sum_{\alpha\neq 0}\frac{1}{\alpha!}(\partial^\alpha\psi_1)L^{(\alpha)}[\psi_0 u],$$

Por $\psi_1 Lu \in H_s \subset H_{t-k+1}(\Omega)$, e $L^{(\alpha)}[\psi_0 u] \in H_{t-k+|\alpha|}(\Omega) \subset H_{t-k+1}(\Omega)$ segue que

$$\int_\Omega (1+|\xi|^2)^{t-k+1}|L(\xi)\mathcal{F}(\psi_1 u)(\xi)|^2 d\xi < \infty,$$

assim, a condição **(H4)** garante,

$$\int_\Omega (1+|\xi|^2)^{t-k+1+\delta|\alpha|}\left|L^{(\alpha)}(\xi)\mathcal{F}(\psi_1 u)(\xi)\right|^2 d\xi < \infty,$$

o que implica que $L^{(\alpha)}[\psi_1 u] \in H_{t-k+1+\delta|\alpha|}$. Além disso, por $\psi_1 = 1$ em $\operatorname{supp}\psi_2$, por (5.1), temos

$$L[\psi_2 u] = \psi_2 Lu + \sum_{\alpha\neq 0}\frac{1}{\alpha!}(\partial^\alpha\psi_2)L^{(\alpha)}[\psi_1 u],$$

e por $\psi_2 Lu \in H_s(\Omega) \subset H_{t-k+1\delta}$ e $\partial^\alpha\psi_2)L^{(\alpha)}(\partial)[\psi_1 u] \in H_{t-k+1+\delta|\alpha|}(\Omega) \subset H_{t-k+1+\delta}$, temos $L[\psi_2 u] \in H_{t-k+1+\delta}$. Logo o argumento mostra que $L^{(\alpha)}[\psi_2 u] \in$

$H_{t-k+1+\delta(1+|\alpha|)}$. De forma indutiva, teremos

$$L^{(\alpha)}[\psi_2 u] \in H_{t-k+1+\delta(m-1+|\alpha|)},$$

então, para $m = M+1$,

$$L^{(\alpha)}[\varphi u] = L^{(\alpha)}[\psi_{M+1} u] \in H_{t-k+1+\delta(m-1+|\alpha|)} = H_{s+\delta|\alpha|},$$

Agora, se $L(\xi) = \sum_{|\alpha|\leq k} c_\alpha \xi^\alpha$, tome α tal que $|\alpha| = k$ e $c_\alpha \neq 0$. Então $L^{(\alpha)}(\xi) = \alpha! c_\alpha \neq 0$, então $\varphi u = (\alpha! c_\alpha)^{-1} L^{(\alpha)}[\varphi u] \in H_{s+k\delta}$, o que prova a implicação.
(H5)⇒(H6)) Se $Lu = f \in C^\infty(\Omega)$, então para $\varphi \in C_c^\infty$ segue que $f\varphi \in C_c^\infty(\Omega) \subset \mathscr{S}(\Omega)$. Logo, pelo Corolário 3.1.1, $\mathcal{F}(f\varphi) \in \mathscr{S}(\Omega)$, logo $\mathcal{F}(f\varphi)(1+|\xi|^2)^{s/2} \in \mathscr{S}(\Omega)$ também. Então, para $s \in \mathbb{R}$, segue que $f\varphi \in H_s(\Omega)$ (pelo Teorema 3.1.2). Logo, $f \in H_s^{loc}(\Omega)$ para todo $s \in \mathbb{R}$. Por hipótese, existe $\delta > 0$ tal que $u \in H_{s+\delta k}^{loc}(\Omega)$. Mas isto vale para todo $s \in \mathbb{R}$, ou seja, $u \in H_s(\Omega)$ para qualquer $s \in \mathbb{R}$. Portanto, pelo Corolário 3.3.1, $u \in C^\infty(\Omega)$. Ou seja, L é hipoelíptico.
(H6)⇒(H1)) Suponha que $L(-i\partial)$ é hipoelíptico. Defina

$$\mathcal{N} = \left\{ f \in L^2(\mathbb{R}^n) : f = 0 \text{ em } \mathbb{R}^n \setminus B(0;1) \text{ e } L(-i\partial) f = 0 \text{ em } B(0;1) \right\}.$$

Os elementos de $\mathcal{N}$ são funções C^∞ (pois $L(-i\partial)$ é hipoelíptico) em $\mathbb{R}^n \setminus \partial B(0;1)$, mas em geral descontínuas em $\partial B(0;1)$. Por exemplo, se g for alguma solução de $L(-i\partial)g = 0$ em uma vizinhança de $B[0;1]$, então $g\chi_B(0;1) \in \mathcal{N}$ mas $\partial_j g \chi_{B(0;1)}$ não existe em $\partial B(0;1)$.

Seja $(f_m) \subset \mathcal{N}$ tal que $f_m \to f$ em L^2, então $f = 0$ em $\mathbb{R}^n \setminus B(0;1)$ (pois $f_m = 0$ em $\mathbb{R}^n \setminus B(0;1)$, $\forall m \in \mathbb{Z}^+$) e $L(-i\partial) f$ é uma distribuição suportada em $\partial B(0;1)$ pois $\operatorname{supp} L(-i\partial) f_m \subset \partial B(0;1), \forall m \in \mathbb{Z}^+$, logo $f \in \mathcal{N}$. Então $\mathcal{N}$ é fechado em L^2.

Os elementos de $\mathcal{N}$ são C^∞ em $B[0;1/2] \subset B(0;1)$. Em particular, se $f \in \mathcal{N}$, então $\partial_j f \in L^2(B(0;1/2))$ para $1 \leq j \leq n$. Afirmamos que $f \mapsto \partial_j f|_{B(0;1)}$ é um funcional linear limitado do espaço de Hilbert $\mathcal{N}$ para $L^2(B(0;1/2))$, portanto,

$$\sum_{j=1}^n \int_{B(0;1/2)} \left|\partial_j f(x)\right|^2 \mathrm{d}x \leq C \int_{B(0;1)} |f(x)|^2 \mathrm{d}x, \; f \in \mathcal{N}. \tag{5.34}$$

De fato, se $f_m \to f$ em $\mathcal{N}$ e $\partial_j f_m \to g$ em $L^2(B(0;1/2))$, temos que $\partial_j F_m \to \partial_j f$ e $\partial_j f_m \to g$ quando $m \to \infty$ no sentido das distribuições em $B(0;1/2)$, portanto $g = \partial_j f$ em $B(0;1/2)$. Logo, do teorema do Gráfico Fechado, $f \to \partial_j f|_{B(0;1/2)}$, é contínuo, portanto limitado. Agora, dado $\zeta \in \mathcal{Z}(L)$, considere $f(x) = e^{i\zeta\cdot x}\chi_{B(0;1)}(x)$. Então,

$$L(-i\partial)f(x) = L(\zeta)e^{i\zeta\cdot x}\chi_{B(0;1)}(x) = 0,$$

pois $\zeta \in \mathcal{Z}(L)$. Portanto $f \in \mathcal{N}$. Por $\partial_j f(x) = i\zeta_j e^{i\zeta\cdot x}$ para $x \in B(0;1)$, então

$$\int |\partial_j e^{i\zeta\cdot x}|^2 \mathrm{d}x = \int |\xi_j e^{\mathrm{Im}\,\zeta\cdot x} e^{i\,\mathrm{Re}\,\zeta\cdot x}|^2 \mathrm{d}x = \int |\xi_j|^2 e^{2\,\mathrm{Im}\,\zeta\cdot x}\mathrm{d}x.$$

Logo, por 5.34, para $\zeta \in \mathcal{Z}(L)$:

$$\sum_{j=1}^{n} |\zeta_j|^2 \int_{B(0;1/2)} e^{-2\,\mathrm{Im}\,\zeta\cdot x}\mathrm{d}x \leq C\int_{B(0;1)} e^{-2\,\mathrm{Im}\,\zeta\cdot x}\mathrm{d}x.$$

Se $|\mathrm{Im}\,\zeta| \leq R$, temos que

$$|\zeta|^2 \leq C\frac{\displaystyle\int_B e^{2R|x|}\mathrm{d}x}{\displaystyle\int_{B'} e^{-2R|x|}\mathrm{d}x}.$$

Portanto, se ζ variar em $\mathcal{Z}(L)$ mas $\mathrm{Im}\,\zeta$ for limitado, então ζ fica limitado, o que equivale a contra positiva de **(H1)**.

□

6 CONCLUSÃO

No presente trabalho, foram estudados o teorema da regularidade elíptica e a classificação de Hörmander para operadores hipoelípticos. O primeiro garante uma regularidade maior para a solução u do que Lu quando L é elíptico. O segundo fornece uma maneira de identificar a hipoelipticidade de um dado operador. Os espaços de Sobolev e as estimativas para distribuições nesses espaços, juntamente com a transformada de Fourier, são as principais ferramentas utilizadas nas demonstrações desses dois teoremas.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

AXLER, S.; BOURDON, P.; RAMEY, W. **Harmonic Function Theory**. Springer New York, 2001. v. 137. ISBN 978-1-4419-2911-2. Disponível em: <http://link.springer.com/10.1007/978-1-4757-8137-3>.

EHRENPREIS, L. Solution of some problems of division: Part i. division by a polynomial of derivation. **American Journal of Mathematics**, v. 76, p. 883, 10 1954. ISSN 00029327. Disponível em: <https://www.jstor.org/stable/2372662?origin=crossref>.

EVANS, L. C. **Partial differential equations**. [S.l.]: American Mathematical Society, 2010. v. 19.

FOLLAND, G. **Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications**. [S.l.]: Wiley, 2013.

GRUBB, G. **Distributions and operators**. [S.l.]: Springer, 2009. v. 252.

HÖRMANDER, L. **The Analysis of Linear Partial Differential Operators II: Differential Operators with Constant Coefficients**. Springer, 2004. (Classics in Mathematics). ISBN 9783540225164. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=gooxPWEYucAC>.

____. **The Analysis of Linear Partial Differential Operators I: Distribution Theory and Fourier Analysis**. [S.l.]: Springer, 2015.

HORVÁTH, J. **Topological vector spaces and distributions**. [S.l.]: Addison-Wesley, 1966.

HOUNIE, J. **Teoria elementar das distribuições**. [S.l.]: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1979.

MALGRANGE, B. Existence et approximation des solutions des équations aux dérivées partielles et des équations de convolution. **Annales de l'institut Fourier**, v. 6, p. 271–355, 1956. ISSN 0373-0956. Disponível em: <https://aif.centre-mersenne.org/item/AIF_1956__6__271_0/>.

ORTNER, N.; WAGNER, P. A survey on explicit representation formulae for fundamental solutions of linear partial differential operators. **Acta Applicandae Mathematicae**, v. 47, p. 101–124, 1997. ISSN 01678019.

RUDIN, W. **Functional Analysis**. [S.l.]: McGraw-Hill, 1991.

SCHWARTZ, L. **Théorie des Distributions I, II**. [S.l.]: Hermann, 1950–51.

TREVES, F. **Topological Vector Spaces, Distributions and Kernels**. [S.l.]: Elsevier, 2016.

APÊNDICE A – O TEOREMA DE TARSKI-SEIDENBERG

Definição A.0.1. *Um subconjunto de $\mathbb{R}^n$ é chamado semi-algébrico se é uma união finita de interseções finitas de conjuntos definidos por uma equação ou inequação polinomial.*

Teorema A.0.1 [Tarski-Seidenberg]. *Se A é um subconjunto semi-algébrico de $\mathbb{R}^{n+m} = \mathbb{R}^n \bigoplus \mathbb{R}^m$, então a projeção A' de A em $\mathbb{R}^m$ também é semi-algébrico.*

Teorema A.0.2. *Se $P_1(x,y),\ldots,P_s(x,y)$ são polinômios de grau no máximo m com respeito a x, então*

$$E = \{y \in \mathbb{R}^n : SGN(P_1(.,y),\ldots,P_s(.,y)) = w\}$$

é semi-algébrico para todo $w \in W$.

Lema A.0.1. *Sejam $p_1,\ldots,p_s$ polinômios de grau no máximo m em uma variável. Considere que p_s é exato de grau $m > 0$ e que nunca se anula. Se $g_1,\ldots,g_s$ são restos obtidos quando p_s é dividido por $p_1,\ldots,p_{s-1},p'_s$ então $SGN(p_1,\ldots,p_{s-1},p'_s,g_1,\ldots,g_s) = w$ determina $SGN(p_1,\ldots,p_s)$.*

Corolário A.0.1. *Se E é um conjunto semi-algébrico em $\mathbb{R}^{2+n}$, então a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por*

$$f(x) = \sup\{y \in E : \exists z \in \mathbb{R}^n,\ (x,y,z) \in E\}$$

é semi-algébrica, isto é, o subgráfico

$$F = \{(x,y) : y \leq f(x)\}$$

é semi-algébrico.

Teorema A.0.3. *Se f é uma função semi-algébrica em $\mathbb{R}$, então $\mathbb{R}$ pode ser decomposto em um número finito de intervalos (que poderá ser reduzido a pontos) onde f é $+\infty, -\infty$ ou igual a uma função algébrica contínua. Se f é* *finita para x grande e não identicamente nula, então*

$$f(x) = Ax^a(1+o(1)),\ x \to +\infty, \tag{A.1}$$

onde $A \neq 0$ e a é um número racional.

Corolário A.0.2. *Se E é um conjunto semi-algébrico em $\mathbb{R}^{2+n}$ e*

$$f(x) = \sup\{y \in E : \exists z \in \mathbb{R}^n,\ (x,y,z) \in E\},$$

é definido e finito para x grande e positivo, então f é identicamente 0 para x grande ou vale A.1 para $A \neq 0$ e $a \in \mathbb{Q}$.