

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA MARIA  
CENTRO DE CIÊNCIAS NATURAIS E EXATAS  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

Bruno da Silva Lopes

**O ÁXION EM CONDIÇÕES EXTREMAS: MATÉRIA DE QUARKS  
QUENTE E MAGNETIZADA, MEIOS DENSOS E ESTRELAS  
COMPACTAS**

Santa Maria, RS  
2023

Bruno da Silva Lopes

**O ÁXION EM CONDIÇÕES EXTREMAS: MATÉRIA DE QUARKS QUENTE E  
MAGNETIZADA, MEIOS DENSOS E ESTRELAS COMPACTAS**

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física, Área de Concentração em Ciências Exatas e da Terra, da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM, RS), como requisito parcial para obtenção do grau de **Mestre em Física**. Defesa realizada por videoconferência.

Orientador: Prof. Ricardo Luciano Sonego Farias

Santa Maria, RS  
2023

This study was financed in part by the Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Finance Code 001

Lopes, Bruno

O áxion em condições extremas: matéria de quarks quente e magnetizada, meios densos e estrelas compactas / Bruno Lopes.- 2023.  
58 p.; 30 cm

Orientador: Ricardo Farias

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Santa Maria, Centro de Ciências Naturais e Exatas, Programa de Pós-Graduação em Física, RS, 2023

1. Cromodinâmica quântica 2. Diagrama de fases 3. Modelo efetivo 4. Áxion 5. Estrelas de Nêutrons I. Farias, Ricardo II. Título.

Sistema de geração automática de ficha catalográfica da UFSM. Dados fornecidos pelo autor(a). Sob supervisão da Direção da Divisão de Processos Técnicos da Biblioteca Central. Bibliotecária responsável Paula Schoenfeldt Patta CRB 10/1728.

Declaro, BRUNO LOPES, para os devidos fins e sob as penas da lei, que a pesquisa constante neste trabalho de conclusão de curso (Dissertação) foi por mim elaborada e que as informações necessárias objeto de consulta em literatura e outras fontes estão devidamente referenciadas. Declaro, ainda, que este trabalho ou parte dele não foi apresentado anteriormente para obtenção de qualquer outro grau acadêmico, estando ciente de que a inveracidade da presente declaração poderá resultar na anulação da titulação pela Universidade, entre outras consequências legais.

**Bruno da Silva Lopes**

**O ÁXION EM CONDIÇÕES EXTREMAS: MATÉRIA DE QUARKS QUENTE E  
MAGNETIZADA, MEIOS DENSOS E ESTRELAS COMPACTAS**

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física, Área de Concentração em Ciências Exatas e da Terra, da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM, RS), como requisito parcial para obtenção do grau de **Mestre em Física**.

**Aprovado em 31 de julho de 2023:**

---

**Ricardo Luciano Sonogo Farias, Dr. (UFSM)**  
**(Presidente/Orientador)**

---

**Dyana Cristine Duarte, Dra. (UFSM)**

---

**Manuel Máximo Bastos Malheiro de Oliveira, Dr. (ITA)**

Santa Maria, RS  
2023

## **AGRADECIMENTOS**

Agradeço primeiramente aos meus pais, Rogério e Simone, e ao meu irmão Alexandre por todo apoio contínuo e incondicional que sempre me deram.

Agradeço ao professor Ricardo, meu orientador desde o primeiro semestre de graduação, por se mostrar sempre disponível para discussões e pela condução do meu caminho acadêmico até aqui.

Aos membros da banca examinadora, Dra. Dyana Duarte e Dr. Manuel Malheiro, agradeço por aceitarem o convite e dedicar o seu tempo para a análise desse trabalho.

Também agradeço aos demais professores com quem colaborei durante o mestrado e aos colegas do grupo de pesquisa.

Por fim, meu agradecimento à CAPES pelo apoio financeiro durante essa etapa.

## RESUMO

# O ÁXION EM CONDIÇÕES EXTREMAS: MATÉRIA DE QUARKS QUENTE E MAGNETIZADA, MEIOS DENSOS E ESTRELAS COMPACTAS

AUTOR: Bruno da Silva Lopes

Orientador: Ricardo Luciano Sonogo Farias

Investigamos o diagrama de fases da cromodinâmica quântica através do modelo efetivo de Nambu-Jona-Lasinio, incluindo as contribuições do áxion - partícula que emerge como solução do problema carga-paridade (CP) forte e é candidata à descrição da matéria escura. Inicialmente estudamos a matéria de quarks em um meio quente e magnetizado, observando seus efeitos nos mecanismos de quebra espontânea e restauração das simetrias quiral e de carga-paridade. Também verificamos os fenômenos da catálise magnética e catálise magnética inversa através de um acoplamento dependente do meio, e calculamos quantidades relacionadas ao áxion como sua massa e auto-acoplamento. Posteriormente, verificamos os efeitos de densidade finita no modelo NJL com o intuito de aplicação no estudo de estrelas híbridas, formadas por uma crosta de hádrons e núcleo de quarks desconfiados. Para objetivo de generalização dos resultados, são considerados dois modelos hadrônicos. Constatamos que a presença do áxion auxilia a manter a estabilidade das estrelas de nêutrons híbridas, enfraquecendo a transição entre as fases e a levando para menores densidades. Com isso, os resultados satisfazem as restrições provenientes da detecção de ondas gravitacionais e observação de pulsares.

**Palavras-chave:** Cromodinâmica quântica. Diagrama de fases. Modelo efetivo. Áxion. Estrelas de nêutrons.

## ABSTRACT

### THE AXION UNDER EXTREME CONDITIONS: HOT AND MAGNETIZED QUARK MATTER, DENSE MEDIUMS AND COMPACT STARS

AUTHOR: Bruno da Silva Lopes

ADVISOR: Ricardo Luciano Sonego Farias

We investigate the phase diagram of quantum chromodynamics by means of the Nambu-Jona-Lasinio effective model, including the axion - a particle which emerges as a solution of the strong charge-parity (CP) problem and may describe dark matter - contributions. Initially we study quark matter in a hot and magnetized medium, observing their effects on the mechanisms of chiral symmetry and charge-parity spontaneous breaking and restoration. We also verify the magnetic catalysis and inverse magnetic catalysis phenomena via a medium dependent coupling, and calculate quantities related to the axion such as its mass and self-coupling. Afterwards, we verify the effects of finite density in the NJL model with the goal of applying it to the study of hybrid stars, composed by a hadronic crust and deconfined quark matter at its core. For purposes of generalization of our results, two hadron models are considered. We find that the axion presence helps maintaining the stability of hybrid neutron stars, by weakening the transition between phases and bringing it to lower densities. As such, the results satisfy the constraints coming from gravitational wave detections and pulsar observations.

**Keywords:** Quantum chromodynamics. Phase diagram. Effective model. Axion. Neutron stars.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Possível estrutura do diagrama de fases da QCD. ....	13
Figura 2 – Restrições para a massa e o raio de estrelas de nêutrons, conforme observações de LIGO e NICER e análises de diferentes grupos. ....	15
Figura 3 – Diagrama massa-raio de estrelas de híbridas obtido em um modelo de quarks e mésons. ....	16
Figura 4 – Comportamento da temperatura pseudocrítica $T_{pc}$ para a restauração da simetria quiral com o aumento do campo magnético, considerando um acoplamento $G$ fixo (esquerda) e $G(B, T)$ (direita). ....	17
Figura 5 – O diagrama de fases $T - c_{\min}$ para três intensidades do campo magnético externo, no conjunto I de parâmetros com $G_s$ fixo (a) e $G_s(eB, T)$ (b). Valor esperado no vácuo da razão $a/f_a$ fixado em $\pi$ . ....	28
Figura 6 – Comportamento dos condensados $\sigma$ e $\eta$ com variações na razão $a/f_a$ , para duas diferentes temperaturas e campo magnético $B = 0$ . ....	29
Figura 7 – Comportamento da susceptibilidade topológica com variações na temperatura para diferentes parametrizações, na ausência de campo magnético externo. ....	30
Figura 8 – Comportamento do potencial termodinâmico efetivo conforme variações na razão $a/f_a$ para diferentes intensidades do campo magnético externo, em dois regimes de temperatura e com acoplamento $G_s$ fixo. ....	31
Figura 9 – Comportamento do potencial termodinâmico efetivo conforme variações na razão $a/f_a$ para diferentes intensidades do campo magnético externo, em dois regimes de temperatura e com o acoplamento dependente do meio $G_s(eB, T)$ . ....	32
Figura 10 – Variação da massa efetiva dos quarks $M$ com a temperatura para diferentes intensidades do campo magnético externo, em dois valores da razão $a/f_a$ e com o acoplamento fixo $G_s$ . ....	33
Figura 11 – Variação da massa efetiva dos quarks $M$ com a temperatura para diferentes intensidades do campo magnético externo, em dois valores da razão $a/f_a$ e com o acoplamento dependente do meio $G_s(eB, T)$ . ....	33
Figura 12 – Comportamento da massa do áxion normalizada - painel (a) - e auto-acoplamento do áxion normalizado - painel(b) - com a temperatura, para diferentes intensidades do campo magnético externo e com o acoplamento dependente do meio $G_s(eB, T)$ . ....	34
Figura 13 – Comportamento da susceptibilidade topológica com a temperatura - painel (a) - e com o campo magnético - painel (b). ....	34
Figura 14 – Comportamento da densidade bariônica $n_B$ com o potencial químico bari-	

ônico $\mu_B$ , no regime $a/f_a = \pi$ e $G_V = 0$ . . . . .	41
Figura 15 – Comportamento da massa efetiva dos quarks com o aumento da densidade bariônica $n_B$ , nos regimes $a/f_a = (0, \pi)$ e $G_V = 0$ . . . . .	42
Figura 16 – Comportamento das densidades de número das partículas com o aumento da densidade bariônica, nos regimes $a/f_a = (0, \pi)$ e $G_V = 0$ . . . . .	42
Figura 17 – Comportamento da energia por bárion $\epsilon/n_B$ com o aumento da densidade bariônica, para os regimes $a/f_a = (0, \pi)$ e dois valores do acoplamento $G_V$ . . . . .	43
Figura 18 – Diagrama massa-raio para estrelas de nêutrons híbridas, utilizando a crosta $NL3_{\omega\rho}$ , para diferentes valores do acoplamento vetorial $G_V$ e campo redimensionado do áxion $a/f_a$ . . . . .	44
Figura 19 – Equação de estado das estrelas híbridas com a crosta $NL3_{\omega\rho}$ , para diferentes valores de $a/f_a$ e acoplamento vetorial $G_V$ . . . . .	45
Figura 20 – Compacidade por densidade de número central normalizada utilizando a crosta $NL3_{\omega\rho}$ , para diferentes valores de $a/f_a$ e $G_V$ . . . . .	46
Figura 21 – Velocidade do som por densidade bariônica normalizada utilizando a crosta $NL3_{\omega\rho}$ , para diferentes valores de $a/f_a$ e $G_V$ . . . . .	47
Figura 22 – Resultados usando o modelo $CMF_{\omega\rho,\omega^4}$ para a crosta de hádrons: diagrama massa-raio no painel (a), equação de estado no painel (b), compacidade por densidade de número central normalizada no painel (c) e velocidade do som $c_s^2$ por densidade bariônica normalizada no painel (d). . . . .	47

## LISTA DE TABELAS

TABELA 1 – Simetrias, transformações, correntes conservadas e manifestações para um sistema de dois sabores. ....	18
TABELA 2 – Lista de conjuntos de parâmetros usados ao longo de nosso estudo, por diferentes autores. ....	26
TABELA 3 – Parâmetros para o acoplamento $G_s(eB, T)$ . ....	26
TABELA 4 – Conjunto de parâmetros HK adotado no modelo NJL SU(3). ....	40

## LISTA DE SIGLAS

CEP	<i>Critical endpoint</i> - (ponto crítico)
CP	<i>Charge-parity</i> - (carga-paridade)
EOS	<i>Equation of state</i> - (equação de estado)
FAIR	<i>Facility for antiproton and ion research</i>
IMC	<i>Inverse magnetic catalysis</i> - (catálise magnética inversa)
LHC	<i>Large hadron collider</i> - (grande colisor de hádrons)
LIGO	<i>Laser interferometer gravitational wave observatory</i> (observatório de ondas gravitacionais por interferômetro laser)
MC	<i>Magnetic catalysis</i> - (catálise magnética)
MFIR	<i>Magnetic field independent regularization</i> - (regularização independente do campo magnético)
NICA	<i>Nuclotron-based Ion Collider fAcility</i>
NICER	<i>Neutron star interior composition explorer</i> - (explorador da composição interna de estrelas de nêutrons)
NJL	Nambu-Jona-Lasinio
QCD	<i>Quantum chromodynamics</i> - (cromodinâmica quântica)
QED	<i>Quantum electrodynamics</i> - (eletrodinâmica quântica)
QGP	<i>Quark-gluon plasma</i> - (plasma de quarks e glúons)
TOV	Tolman-Oppenheimer-Volkoff

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>11</b>
1.1	O DIAGRAMA DE FASES DA QCD	13
1.2	ESTRELAS DE NÊUTRONS	14
1.3	CAMPOS MAGNÉTICOS	16
1.4	A LAGRANGIANA DA QCD	17
1.5	O PROBLEMA DE SINAL	19
<b>2</b>	<b>MODELO NJL SU(2) - MATÉRIA DE QUARKS QUENTE E MAGNETIZADA</b>	<b>20</b>
2.1	A CONTRIBUIÇÃO DO ÁXION	20
2.2	O POTENCIAL TERMODINÂMICO	21
2.3	CAMPO MAGNÉTICO EXTERNO	23
2.4	PARAMETRIZAÇÃO	25
2.5	RESULTADOS	27
<b>3</b>	<b>MODELO NJL SU(3) - MEIOS DENSOS E ESTRELAS COMPACTAS</b>	<b>35</b>
3.1	O POTENCIAL TERMODINÂMICO	35
3.2	EQUILÍBRIO BETA E NEUTRALIDADE DE CARGA	38
3.3	EQUAÇÃO DE TOLMAN-OPPENHEIMER-VOLKOFF	39
3.4	RESULTADOS I - MATÉRIA DE QUARKS A DENSIDADE FINITA	40
3.5	RESULTADOS II - ESTRELAS DE NÊUTRONS HÍBRIDAS	43
<b>4</b>	<b>CONCLUSÃO</b>	<b>48</b>
	<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS</b>	<b>50</b>
	<b>APÊNDICE A – UNIDADES, NOTAÇÃO DE VETORES E MATRIZES DE DIRAC</b>	<b>56</b>

## 1 INTRODUÇÃO

A cromodinâmica quântica (QCD)<sup>1</sup> é uma teoria de calibre responsável pela descrição da interação forte entre quarks e glúons. Seu estabelecimento é um dos avanços mais importantes no contexto da física teórica dada a vasta gama de sistemas físicos por ela descritos, como o universo primordial, estrelas compactas e colisões de íons pesados. Ao contrário da eletrodinâmica quântica (QED), a QCD é uma teoria não-abeliana, o que permite que os mediadores da interação possuam o que conhecemos por carga de cor. Além disso, o acoplamento da teoria é forte em baixas energias, e por isso é necessário buscar métodos alternativos à teoria de perturbação para o estudo de suas propriedades nesse regime.

Uma das propriedades centrais da QCD é o confinamento. As partículas livres encontradas na natureza devem ser neutras de cor, e por isso os quarks e glúons existem em estados ligados, formando os hádrons - por sua vez divididos em bárions (estados de três quarks) e mésons (par quark-antiquark). Com o aumento da escala de energia, a QCD apresenta outra característica de extrema importância conhecida como liberdade assintótica. O acoplamento da teoria diminui, por exemplo, conforme o aumento da temperatura ou densidade. A descoberta desse efeito característico de teorias de calibre não-abelianas (GROSS; WILCZEK, 1973; POLITZER, 1973) rendeu o prêmio Nobel de Física aos autores no ano de 2004. Portanto, para energias muito altas, é possível pensar na utilização da teoria de perturbação.

No regime de acoplamento forte, no entanto, é necessária uma abordagem não-perturbativa para o estudo da QCD. Um método bem sucedido é a QCD na rede, que busca solucionar a teoria em uma rede discreta no espaço-tempo (WILSON, 1974). Com o avanço dos supercomputadores ao longo dos anos aliado ao refinamento dos algoritmos utilizados, os resultados de rede se tornaram cada vez mais confiáveis (UKAWA, 2015). No entanto, ainda existem desafios. Para densidade bariônica finita, cálculos de rede sofrem do problema de sinal (FORCRAND, 2009), que impossibilita a realização de simulações de Monte Carlo. Então precisamos recorrer a outros métodos para obter resultados nesse regime. Uma alternativa interessante é o uso de modelos efetivos, que visam reproduzir propriedades e simetrias da QCD mantendo um tratamento simplificado. Ao longo deste trabalho estudaremos um desses modelos, o de Nambu-Jona-Lasinio (NJL). O modelo NJL foi inicialmente proposto como uma teoria efetiva para descrever núcleons e mésons (NAMBU; JONA-LASINIO, 1961b; NAMBU; JONA-LASINIO, 1961a), e posteriormente reinterpretado com quarks como seus graus de liberdade fundamentais (ASAKAWA; YAZAKI, 1989; KLEVANSKY, 1992; HATSUDA; KUNIHIRO, 1994). Seu uso ajudou a compreender os mecanismos da quebra e restauração da simetria quiral, responsável pela

---

<sup>1</sup>As siglas seguirão a forma usualmente encontrada na literatura, em inglês.

geração de massa para os quarks, culminando no prêmio Nobel de Física de 2008 para Yoichiro Nambu.

Embora a QCD seja uma teoria bem estabelecida, existem questões de caráter fundamental ainda não resolvidas. Uma delas está relacionada ao problema da violação das simetrias de conjugação de carga e paridade (CP). Apesar da densidade Lagrangiana da QCD permitir a violação de CP através de um parâmetro angular  $\theta \neq 0$ , resultados obtidos através do estudo de mésons pseudoescalares (KAWARABAYASHI; OHTA, 1981), momentos de dipolo elétrico (BALUNI, 1979; CREWETHER et al., 1979; PENDLEBURY et al., 2015) e simulações de QCD na rede (GUO et al., 2015; BHATTACHARYA et al., 2015) indicam que  $\theta$  deve ser muito próximo de zero na natureza. Uma das soluções mais elegantes para a ausência de efeitos violadores da simetria CP (conhecido como problema CP forte) é dada pelo áxion, o bóson de Goldstone associado à simetria quebrada espontaneamente, através do mecanismo de Peccei-Quinn (PECCEI; QUINN, 1977). Os autores mostraram que a invariância CP da interação forte é uma consequência natural de uma teoria em que férmions adquirem massa através de um acoplamento do tipo Yukawa com um campo escalar que possui valor esperado não-nulo no vácuo. Uma rotação dos campos fermiônicos por  $\exp[i\gamma^5\theta/2]$  resulta em um ângulo efetivo  $\theta_{eff} = 0$ , solucionando o problema CP forte. O mecanismo é o mesmo utilizado por 't Hooft para tratar a anomalia axial relacionada à simetria  $U_A(1)$  (HOOFT, 1976b; HOOFT, 1976a), que explica por exemplo a separação entre a massa dos mésons  $\eta$  e  $\eta'$ . É então natural esperar que o áxion contribua no modelo NJL através do determinante de 't Hooft.

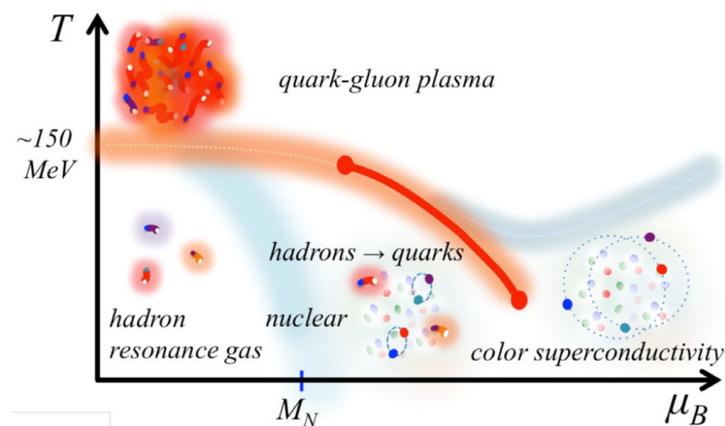
Enquanto a quebra espontânea da simetria quiral explica a maior parte da massa visível do universo, sabemos que uma porção de massa invisível ainda maior não é levada em conta sem alterações na física do modelo padrão - a matéria escura. Por possuir um acoplamento fraco com a matéria bariônica e ser extremamente leve (PRESKILL; WISE; WILCZEK, 1983; ABBOTT; SIKIVIE, 1983; DINE; FISCHLER, 1983), o áxion, proposto como partícula por Weinberg e Wilczek de forma independente (WEINBERG, 1978; WILCZEK, 1978), é um dos principais candidatos à descrição da matéria escura fria (CHADHA-DAY; ELLIS; MARSH, 2022). Em respeito a sua fenomenologia, é conhecido que pode ocorrer a termalização e formação de um condensado de Bose-Einstein (BEC) (SIKIVIE; YANG, 2009). O efeito de campos magnéticos é relevante para a elaboração de experimentos que visam a sua detecção. Para densidade finita, a motivação é decorrente da possibilidade de que os áxions participem do transporte de energia em estrelas de nêutrons, afetando sua evolução térmica (HARRIS et al., 2020). Também se imagina que esses objetos possam conter uma quantidade significativa de matéria escura capturada pela interação gravitacional durante sua formação. Assim, os áxions teriam efeitos visíveis nas medidas de massa máxima e deformabilidade dessas estrelas (KARKEVANDI et al., 2022). Por todos esses fatores, julgamos relevante o estudo das propriedades do áxion nos contextos de um meio quente e magnetizado e também em meios densos, utilizando

o modelo NJL como fizemos anteriormente (BANDYOPADHYAY et al., 2019; LOPES et al., 2022). Antes de uma exposição mais detalhada, comentamos algumas das características centrais da QCD e também dedicamos uma seção à discussão de efeitos gerados pela presença de campos magnéticos na matéria de quarks.

### 1.1 O DIAGRAMA DE FASES DA QCD

A riqueza de sistemas físicos descritos pela QCD pode ser sintetizada em seu diagrama de fases. Sua construção é um processo iterativo, passando por algumas mudanças ao longo dos anos. Uma representação moderna no plano de temperatura  $T$  e potencial químico bariônico  $\mu_B$  finitos é apresentada na figura 1.

Figura 1 – Possível estrutura do diagrama de fases da QCD.



Fonte: Baym et al. (2018).

Para densidade bariônica  $n_B$  zero e temperatura finita, a QCD não sofre do problema de sinal e portanto resultados de rede são confiáveis. Além disso, é nesse regime que atua o grande colisor de hádrons (LHC). É bem estabelecido, portanto, que a matéria de hádrons passa por uma transição de fase para o plasma de quarks e glúons (QGP) - no qual os constituintes estão desconfinados e interagem fracamente - conforme o aumento da temperatura. Além do desconfinamento (linha cinza sombreada)<sup>2</sup>, ocorre também a restauração da simetria quiral (linha vermelha sombreada), quebrada espontaneamente no vácuo físico da teoria (COSTA, 2005). É conhecido que a transição ocorre de forma suave, através de um *crossover*. Ainda, sabe-se que ao menos nesse regime as temperaturas para restauração da simetria quiral e para o desconfinamento devem coincidir.

Um leque de possibilidades é aberto na região de densidade bariônica finita. Como mencionado anteriormente, cálculos de rede sofrem do problema de sinal e só podem ex-

<sup>2</sup>Nos referimos aqui à linha cinza da direita, cuja separação da linha vermelha é especulada por modelos teóricos, ocorrendo em valores mais altos de  $\mu_B$ .

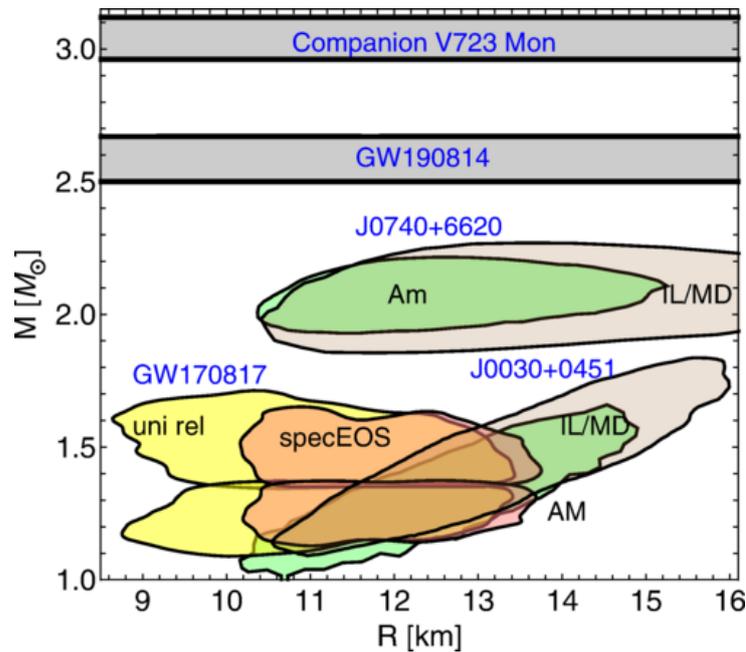
plorar a região de baixas densidades, através de expansões em torno de potencial químico zero (ALLTON et al., 2005). As fases mostradas no diagrama são portanto oriundas de previsões de modelos efetivos, ou teoria de perturbação em energias muito altas. É postulada a existência de um ponto crítico (CEP) (ASAKAWA; YAZAKI, 1989), no qual a transição quiral passa a ser de primeira ordem, em alguma localização ao longo da linha vermelha cheia. A figura também exhibe a possibilidade de existência da fase Quarquiônica - definida por quarks confinados mas com densidade bariônica não nula (MCLERRAN; PISARSKI, 2007; MCLERRAN; REDLICH; SASAKI, 2009). Outra fase interessante é a supercondutora de cor, na qual as altíssimas densidades permitem a formação dos chamados *diquarks*, de forma análoga aos pares de Cooper no eletromagnetismo (COLLINS; PERRY, 1975; BUBALLA, 2005). As estrelas de nêutrons também são exemplos de sistemas que ocupam a região de altas densidades, e tratamos o assunto com mais detalhes na próxima seção. Como motivação adicional, novos colisores de partículas como FAIR (*facility for antiproton and ion research*) e NICA (*nuclotron-based ion collider facility*) atuarão na região de densidades elevadas e temperaturas moderadas. Assim, nos próximos anos teremos dados experimentais que podem servir como referência para a fenomenologia que modelos efetivos devem reproduzir.

## 1.2 ESTRELAS DE NÊUTRONS

Estrelas de nêutrons são formadas como remanescentes de estrelas de alta massa e explosões de supernovas. Esses objetos podem possuir massas da ordem de  $2 M_{\odot}$  (massas solares) e raios da ordem de 10 km, e são portanto extremamente densos. Com os dados recentes oriundos da detecção de ondas gravitacionais e observação de pulsares pelos experimentos do LIGO/Virgo e NICER para a massa e raio dessas estrelas, temos ótimas referências para os resultados que a equação de estado (EOS, relação entre a pressão  $p$  e densidade de energia  $\epsilon$ ) que as governa deve reproduzir. Na figura 2 (TAN et al., 2022), estão postas análises de diferentes grupos para esses dados. As primeiras ondas gravitacionais com emissão confirmada por um sistema binário de estrelas de nêutrons correspondem ao evento GW170817 (ABBOTT et al., 2017), cujos constituintes possuem massas estimadas em  $1,5 M_{\odot}$  e  $1,3 M_{\odot}$ . A região em amarelo é obtida através de uma análise da equação de estado via relações universais, e a região em laranja via EOS espectral. Também estão na figura 2 os pulsares J0030+0451 (MILLER et al., 2019; RILEY et al., 2019) e J0740+6620 (MILLER et al., 2021; RILEY et al., 2021), com interpretação dos grupos de Illinois/Maryland (cinza) e Amsterdã (verde) para os dados do NICER. As regiões de incerteza ainda são consideráveis, mas espera-se que para  $1,4 M_{\odot}$  o raio máximo desses objetos seja compatível com a sobreposição entre os setores de GW170817 e J0030+0451. Os desafios são ainda maiores para o evento GW190814 (ABBOTT et al.,

2020), composto por um buraco negro de  $23 M_{\odot}$  e um objeto compacto de massa estimada entre  $2,5 M_{\odot}$  e  $2,67 M_{\odot}$  - a maior diferença de massa verificada por ondas gravitacionais. Ainda não há uma definição se o objeto mais leve corresponde a uma estrela de nêutrons supermassiva ou outro buraco negro. O caso é similar ao de Companion V723 Mon (JAYA-SINGHE et al., 2021), com massa estimada em  $3,04 \pm 0,06 M_{\odot}$ , apesar da hipótese do buraco negro ser mais provável uma vez que o objeto excede o limite de massa previsto teoricamente (LATTIMER; PRAKASH, 2001).

Figura 2 – Restrições para a massa e o raio de estrelas de nêutrons, conforme observações de LIGO e NICER e análises de diferentes grupos.

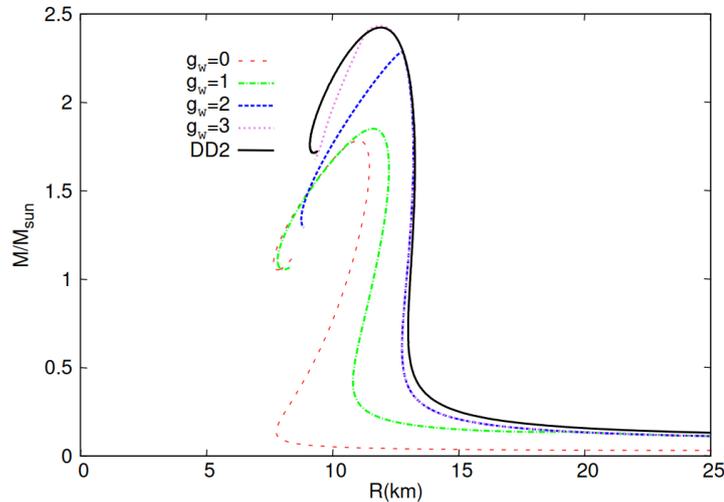


Fonte: Tan et al. (2022).

A descrição de objetos com massas maiores que  $2 M_{\odot}$  é uma dificuldade para a EOS da matéria nuclear (BAYM et al., 2018). São necessárias equações de estado mais duras, isto é, que suportem uma pressão maior em determinada densidade de energia. Uma medida da dureza dessas EOSs é dada pelo quadrado da velocidade do som,  $c_s^2 = dp/d\epsilon$ . Para um estudo aprofundado de como a presença de diferentes estruturas na velocidade do som podem afetar o diagrama massa raio de objetos compactos, ver o trabalho de Tan et al. (2022). Outra questão é saber quais fases estão presentes no interior dessas estrelas. Por conta das altas densidades, é plausível que a matéria nuclear sofra um desconfinamento, formando um núcleo de quarks. É esperado que a EOS nuclear domine até densidades próximas de duas vezes a densidade de saturação da matéria nuclear ( $n_0 = 0,17 \text{ fm}^{-3}$ ), enquanto as interações entre quarks tornam-se relevantes na região de  $4 - 7 n_0$ . A interpolação entre as equações de estado desses dois modelos pode ser feita de diferentes maneiras, e ao longo desse trabalho optamos pela construção de Maxwell. Esta consiste em buscar a máxima pressão para cada potencial químico, e como

no ponto em que  $p$  é igual para as duas fases ocorre uma descontinuidade na densidade, a transição é de primeira ordem. Encontrar equações de estado que descrevam estrelas

Figura 3 – Diagrama massa-raio de estrelas híbridas obtido em um modelo de quarks e mésons.



Fonte: Zacchi, Hanauske e Schaffner-Bielich (2016).

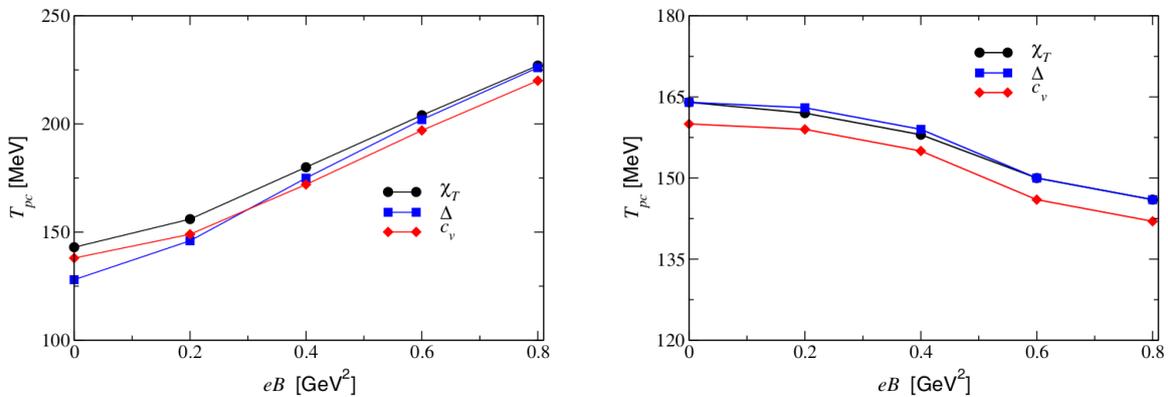
híbridas estáveis não é uma tarefa fácil (ZACCHI; HANAUSKE; SCHAFFNER-BIELICH, 2016). No diagrama massa-raio, partindo do canto direito inferior (baixa densidade), a estabilidade é garantida até que a massa atinja um extremo em que a curva se movimenta no sentido anti-horário - isto é, a massa deve ser uma função crescente da densidade. O que normalmente ocorre é que a partir do ponto de transição para a matéria de quarks a estrela se torna instável. Isso pode ser verificado na figura 3, na qual Zacchi, Hanauske e Schaffner-Bielich (2016) apresentam o diagrama de estrelas híbridas obtidas com a EOS de um modelo de quarks e mésons, variando o acoplamento de caráter vetorial  $g_\omega$ . As curvas que geram configurações estáveis,  $g_\omega = 0$  e  $g_\omega = 1$ , não atingem duas massas solares. As demais tornam-se instáveis no momento em que ocorre a transição da matéria de hádrons (curva preta) para a fase de quarks. Por todos esses motivos, julgamos importante estudar novos efeitos na EOS de objetos compactos, e fazemos isso através da introdução do áxion no modelo NJL.

### 1.3 CAMPOS MAGNÉTICOS

O problema se torna ainda mais interessante quando consideramos o efeito de campos magnéticos. Para densidade zero e baixas temperaturas, é conhecido que o aumento do campo magnético gera um aumento na massa efetiva dos quarks, fenômeno conhecido como catálise magnética (MC). No entanto, ainda em densidade zero mas para temperaturas intermediárias, resultados de QCD na rede mostram a existência da catálise magnética

inversa (IMC) - a temperatura crítica para restauração da simetria quiral diminui com o campo magnético. Esse efeito não é capturado pela grande maioria dos modelos efetivos. Para uma discussão recente, ver o artigo de revisão de Bandyopadhyay e Farias (2021). No entanto, é conhecido que o acoplamento da teoria deve sentir os efeitos de meio. Ao propor um acoplamento dependente do campo magnético e da temperatura, com justificativas baseadas em resultados de QCD na rede, os autores Farias et al. (2017) mostraram que o modelo NJL pode apresentar a catálise magnética inversa. Adotaremos a parametrização proposta pelos autores no próximo capítulo, comparando as situações  $G$  fixo e  $G(B, T)$ . Na figura 4 eles apresentam a temperatura pseudocrítica  $T_{pc}$  para restauração

Figura 4 – Comportamento da temperatura pseudocrítica  $T_{pc}$  para a restauração da simetria quiral com o aumento do campo magnético, considerando um acoplamento  $G$  fixo (esquerda) e  $G(B, T)$  (direita).



Fonte: Farias et al. (2017).

da simetria quiral, definida utilizando a susceptibilidade quiral  $\chi_T$ , medida da interação  $\Delta$  e calor específico  $c_v$ . Usando  $G_s$  fixo, percebe-se um aumento de  $T_{pc}$  com o campo magnético. Já no painel da direita, com o acoplamento dependente do meio, a temperatura pseudocrítica diminui com o aumento do campo, caracterizando a IMC.

#### 1.4 A LAGRANGIANA DA QCD

Uma formulação moderna para a densidade Lagrangiana da interação forte foi proposta no ano de 1973 (WEINBERG, 1973; FRITZSCH; GELL-MANN; LEUTWYLER, 1973). Aqui revemos algumas de suas propriedades e simetrias, seguindo (COSTA, 2005; DUARTE, 2018). Escrevemos a Lagrangiana da QCD por

$$\mathcal{L}_{QCD} = \bar{\psi} (i\gamma^\mu D_\mu - \hat{m}) \psi - \frac{1}{4} G_{\mu\nu}^a G_a^{\mu\nu}, \quad (1.1)$$

sendo  $\psi$  o espinor dos férmions referente aos seis sabores de quarks ( $u, d, s, c, b, t$ ) e às três possíveis cargas de cor,  $\gamma^\mu$  as matrizes de Dirac, e  $\hat{m} = \text{diag}(m_u, m_d, m_s, \dots)$  uma matriz cujas entradas são dadas pela massa de corrente dos quarks. A derivada covariante é  $D_\mu = \partial_\mu - ig\lambda_a A_\mu^a$  ( $a = 1, 2, \dots, 8$ ), e a soma é feita nas matrizes de Gell-Mann  $\lambda_a$ , geradores do grupo SU(3). A constante de acoplamento é denotada por  $g$ , e o campo gluônico  $A_\mu^a$  é introduzido através do tensor de campo dos glúons,

$$G_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + gf^{abc} A_\mu^b A_\nu^c. \quad (1.2)$$

O termo  $f^{abc}$  corresponde às constantes de estrutura de SU(3), tais que  $[\lambda_a, \lambda_b] = if^{abc}\lambda^c$ .

Como mencionamos anteriormente, o confinamento, liberdade assintótica e simetria quiral são algumas das propriedades mais importantes da QCD. Do teorema de Noether, simetrias na Lagrangiana estão associadas à correntes conservadas. Na tabela 1, vemos algumas dessas manifestações na interação forte (KLEVANSKY, 1992) considerando apenas os sabores de quarks leves  $u, d$ . As simetrias  $U_V(1)$  e  $SU_V(2)$  são associadas a

Tabela 1 – Simetrias, transformações, correntes conservadas e manifestações para um sistema de dois sabores.

Simetria	Transformação	Corrente	Nome	Manifestação
$SU_V(2)$	$\psi \rightarrow e^{-i\tau\cdot\omega/2}\psi$	$J_\mu^k = \psi\gamma_\mu\tau^k\psi$	Isospin	Aproximadamente conservada
$U_V(1)$	$\psi \rightarrow e^{-i\alpha}\psi$	$j_\mu = \bar{\psi}\gamma_\mu\psi$	Bariônica	Sempre conservada
$SU_A(2)$	$\psi \rightarrow e^{-i\tau\cdot\theta\gamma_5/2}\psi$	$J_{5\mu}^k = \bar{\psi}\gamma_\mu\gamma_5\tau^k\psi$	Quiral	Quebrada espontaneamente
$U_A(1)$	$\psi \rightarrow e^{-i\beta\gamma_5}\psi$	$j_{5\mu} = \bar{\psi}\gamma_\mu\gamma_5\psi$	Axial	Anomalia axial

Fonte: Adaptado de (KLEVANSKY, 1992; COSTA, 2005).

conservação dos números de bariônico e de isospin, respectivamente. Já  $SU_A(2)$  e  $U_A(1)$  envolvem transformações com a matriz  $\gamma^5$ , e são chamadas de simetrias quiral e axial respectivamente. Por conter  $\gamma^5$ , essas transformações alteram a paridade do estado  $\psi$ . A realização de  $SU_A(2)$  na natureza implicaria na existência dos chamados parceiros quirais - existência de um multiplete de paridade oposta para cada multiplete de isospin (COSTA, 2005). Como isso não se verifica, a simetria quiral deve ser quebrada espontaneamente no estado fundamental. A situação é similar para  $U_A(1)$ , cuja realização implicaria na existência de um parceiro de paridade oposta para cada hádron. Entretanto, o teorema de Goldstone diz que a quebra espontânea de uma simetria contínua e global implica a existência de uma partícula associada de massa zero. Para  $SU_A(2)$ , o pseudo bóson de Goldstone é o pión, que adquire uma pequena massa devido ao termo  $\hat{m}$  na densidade Lagrangiana - a simetria quiral é aproximada, não exata. Caso ocorresse o mesmo para  $U_A(1)$ , também deveríamos observar a existência do modo de Goldstone, nunca detectado. Essa questão ficou conhecida como anomalia axial, e só foi resolvida por 't Hooft (HOOFT, 1976b; HOOFT, 1976a) ao sugerir que  $U_A(1)$  é quebrada a nível quântico e não deve gerar manifestações físicas. Como o áxion é introduzido pelo mecanismo de Peccei-Quinn via

uma rotação dos campos  $\psi$  envolvendo  $\gamma^5$ , esperamos que sua contribuição também se dê via determinante de 't Hooft.

## 1.5 O PROBLEMA DE SINAL

Para a discussão do problema de sinal, seguimos a argumentação da referência (FORCRAND, 2009). Escrevendo as integrais de caminho para os campos fermiônicos, encontramos expressões acompanhadas do determinante do inverso do propagador dos férmions,  $\det(\not{D} + m + \mu\gamma^0)$ . O operador de Dirac  $\not{D}$  obedece a relação  $\gamma^5 \not{D} \gamma^5 = \not{D}^\dagger$ , e portanto

$$\begin{aligned} \gamma^5 (\not{D} + m + \mu\gamma^0) \gamma^5 &= \not{D}^\dagger + m + \mu\gamma^5\gamma^0\gamma^5 = \not{D}^\dagger + m - \mu\gamma^0, \\ &= (\not{D} + m - \mu^*\gamma^0)^\dagger. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Tomando o determinante em ambos os lados na equação 1.3,

$$\begin{aligned} \det(\not{D} + m + \mu\gamma^0) &= \det [(\not{D} + m - \mu^*\gamma^0)^\dagger], \\ &= [\det(\not{D} + m - \mu^*\gamma^0)]^*. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Dessa forma, a única maneira para que esse determinante seja real é através de um potencial químico  $\mu$  nulo ou puramente imaginário. Como consequência, qualquer ensemble de Monte-Carlo cujos pesos são reais e positivos apresenta um valor esperado do número de bárions também zero ou puramente imaginário. Por isso, simulações diretas de QCD na rede não podem ser realizadas no regime de densidade finita, um grande motivador para o estudo de modelos efetivos nesse regime. Concluída a exposição dos conceitos introdutórios, iniciamos o estudo do modelo NJL em um meio quente e magnetizado com a contribuição do áxion.

## 2 MODELO NJL SU(2) - MATÉRIA DE QUARKS QUENTE E MAGNETIZADA

Este capítulo é dedicado a uma revisão de trabalho publicado em 2019 com participação do autor dessa dissertação (BANDYOPADHYAY et al., 2019). Estudamos o modelo de Nambu-Jona-Lasinio de dois sabores (quarks leves  $u, d$ ), verificando os efeitos da presença de um campo magnético externo e da temperatura na matéria de quarks junto ao campo do áxion. As técnicas aqui introduzidas darão uma boa base para a análise do regime de densidade finita em um modelo de três sabores no próximo capítulo.

### 2.1 A CONTRIBUIÇÃO DO ÁXION

O termo violador da simetria CP presente na Lagrangiana da QCD depende de um parâmetro  $\theta$ , introduzido através de

$$\mathcal{L}_\theta = \frac{\theta g^2}{32\pi^2} G_{\mu\nu} \tilde{G}^{\mu\nu}, \quad (2.1)$$

sendo  $g$  o acoplamento da interação forte,  $G_{\mu\nu}$  o tensor de campo dos glúons e  $\tilde{G}^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} G_{\alpha\beta}$  o seu dual (omitimos o índice de cor). O mecanismo de Peccei-Quinn consiste em dar um caráter dinâmico ao parâmetro  $\theta$ , elevando-o ao status de um campo, o áxion  $a(x)$ . Redefinimos um ângulo efetivo  $\theta_{eff}(x) = \theta + a(x)/f_a$  e usamos que uma rotação quiral nos campos fermiônicos equivale a uma translação em  $a$ , conforme Peccei e Quinn (1977), Peccei (2008):

$$a(x) \rightarrow a(x) + \alpha f_a, \quad (2.2)$$

em que  $f_a$  representa a constante de decaimento do áxion. Levando em conta os novos termos cinéticos e de interação do campo  $a(x)$  na densidade Lagrangiana e considerando flutuações em torno de um valor esperado através de  $a(x) \rightarrow a(x) + \langle a \rangle$ , é possível escrever um potencial efetivo devido ao áxion (PECCEI, 2008), proporcional a

$$V_{eff} \sim \cos \left[ \theta + \frac{\langle a \rangle}{f_a} \right]. \quad (2.3)$$

Minimizando esse potencial em relação ao valor esperado  $\langle a \rangle$ , obtemos  $\langle a \rangle = -\theta f_a$ , e a Lagrangiana não depende mais do termo  $\theta$  violador de CP. Efetivamente, a interação

depende agora do campo dinâmico normalizado  $a(x)/f_a$ :

$$\mathcal{L}_a = \frac{g^2}{32\pi^2} \frac{a(x)}{f_a} G\tilde{G}. \quad (2.4)$$

Ao longo desse trabalho, o tratamos como um campo de fundo através da razão fixa  $a/f_a$ , estudando seus efeitos na termodinâmica do modelo NJL. Como mencionamos ao motivar o mecanismo de Peccei-Quinn, o áxion é tratado por uma rotação quirial dos campos  $\psi$  e portanto contribui através do determinante de 't Hooft (HOOFT, 1976a; HOOFT, 1986),

$$\mathcal{L}_a = 8G_2 [e^{ia/f_a} \det(\psi_R\psi_L) + e^{-ia/f_a} \det(\psi_L\psi_R)] . \quad (2.5)$$

Aqui,  $\psi_R$  e  $\psi_L$  são as componentes de mão direita e mão esquerda do espinor fermiônico  $\psi$ , respectivamente, e  $G_2$  é uma constante de acoplamento a ser analisada adiante. Ainda vale mencionar que embora a densidade Lagrangiana seja invariante frente à transformações CP para  $\theta = 0$  ou múltiplo de  $\pi$ , a simetria pode ser quebrada espontaneamente nesse último caso (BOER; BOOMSMA, 2008).

## 2.2 O POTENCIAL TERMODINÂMICO

A densidade Lagrangiana efetiva do modelo NJL de dois sabores (quarks  $u, d$ ), na aproximação de isospin e com a presença do termo referente ao áxion, é dada por

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m_0)\psi + G_1 [(\bar{\psi}\psi)^2 + (\bar{\psi}\tau_k i\gamma_5\psi)^2] + \mathcal{L}_a. \quad (2.6)$$

Aqui,  $\psi$  é o campo dos quarks e  $m_0 = m_0^u = m_0^d$  a massa de corrente. O acoplamento  $G_1$  é associado ao termo de interação entre os quarks,  $\tau_k$  são as matrizes de Pauli geradoras de SU(2) e  $\mathcal{L}_a$  é o termo devido ao áxion. Consideramos que as constantes  $G_1$  e  $G_2$  estão associadas ao acoplamento escalar usual do modelo NJL,  $G_s$ , como feito em estudos sobre mistura de sabores (FRANK; BUBALLA; OERTEL, 2003). Isto é,

$$G_1 = (1 - c)G_s, \quad G_2 = cG_s, \quad (2.7)$$

de forma que  $c$  seja um parâmetro indicativo da intensidade da interação com o áxion como veremos posteriormente.

Com a densidade Lagrangiana do modelo definida, podemos calcular o potencial termodinâmico na aproximação de campo médio (KLEVANSKY, 1992). Reescrevemos os

termos de interação através de flutuações ao redor de seus valores esperados

$$\begin{aligned} \langle \bar{\psi}\psi \rangle &= \langle \bar{\psi}\psi \rangle + \delta(\bar{\psi}\psi) = \sigma + \delta(\bar{\psi}\psi), \\ \langle \bar{\psi}i\gamma_5\psi \rangle &= \langle \bar{\psi}i\gamma_5\psi \rangle + \delta(\bar{\psi}i\gamma_5\psi) = \eta + \delta(\bar{\psi}i\gamma_5\psi), \end{aligned} \quad (2.8)$$

e definimos os condensados escalar  $\sigma = \langle \bar{\psi}\psi \rangle$  e pseudoescalar  $\eta = \langle \bar{\psi}i\gamma_5\psi \rangle$ . Podemos iterar as expressões acima tomando o quadrado e mantendo apenas flutuações de primeira ordem, isto é,

$$\begin{aligned} (\bar{\psi}\psi)^2 &= -\sigma^2 + 2\sigma(\bar{\psi}\psi), \\ (\bar{\psi}i\gamma_5\psi)^2 &= -\eta^2 + 2\eta(\bar{\psi}i\gamma_5\psi). \end{aligned} \quad (2.9)$$

Substituindo na equação 2.6 para obter a Lagrangiana efetiva, escrevemos em acordo com Lu e Ruggieri (2019) o potencial termodinâmico

$$\Omega = \Omega_q + G_1(\eta^2 + \sigma^2) - G_2(\eta^2 - \sigma^2) \cos \frac{a}{f_a} - 2G_2\sigma\eta \sin \frac{a}{f_a}, \quad (2.10)$$

sendo a contribuição do potencial de quarks  $\Omega_q$  dada por

$$\Omega_q = -8N_c \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \left[ \frac{E_p}{2} + T \ln(1 + e^{-E_p/T}) \right], \quad (2.11)$$

com  $N_c = 3$  o número de cores,  $T$  a temperatura e  $E_p = \sqrt{p^2 + M^2}$  a relação de dispersão. A massa efetiva dos quarks  $M$  é gerada pela quebra espontânea da simetria quiral, e pode ser escrita como

$$M = \sqrt{(m_0 + \alpha_0)^2 + \beta_0^2}, \quad (2.12)$$

com os termos  $\alpha_0$  e  $\beta_0$  relacionados aos condensados e ao campo do áxion por

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= -2 \left( G_1 + G_2 \cos \frac{a}{f_a} \right) \sigma + 2G_2\eta \sin \frac{a}{f_a}, \\ \beta_0 &= -2 \left( G_1 - G_2 \cos \frac{a}{f_a} \right) \eta + 2G_2\sigma \sin \frac{a}{f_a}. \end{aligned} \quad (2.13)$$

A integral do primeiro termo em colchetes na equação 2.11 é divergente e precisa ser regularizada. O termo dependente da temperatura não sofre desse problema - termos de meio são finitos (BELLAC, 2011) - e pode ser integrado em todo o espaço de momento. Utilizamos aqui o regulador *cutoff* 3D ultravioleta,  $\Lambda$ :

$$\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{E_p}{2} \rightarrow \frac{1}{4\pi^2} \int_0^\Lambda dp p^2 E_p. \quad (2.14)$$

Os valores físicos dos condensados  $\sigma$  e  $\eta$  são aqueles que minimizam o potencial termodinâmico. Dada uma razão  $a/f_a$ , os encontramos através das equações de gap:

$$\frac{\partial\Omega}{\partial\sigma} = \frac{\partial\Omega}{\partial\eta} = 0. \quad (2.15)$$

Por se tratar de um pseudo bóson de Goldstone relacionado à simetria CP, o áxion adquire uma massa  $m_a$  devido à quebra espontânea da simetria quiral. Visto que tratamos  $a/f_a$  como um campo de fundo,  $m_a$  é definida como a segunda derivada do potencial efetivo calculada em  $a = 0$ :

$$m_a^2 = \left. \frac{d^2\Omega}{da^2} \right|_{a=0} = \frac{\chi_t}{f_a^2}. \quad (2.16)$$

Definimos também a susceptibilidade topológica  $\chi_t$ , uma vez que o áxion está relacionado a uma simetria e portanto a uma carga conservada (ASAKAWA; KITAZAWA, 2016). A quantidade  $\chi_t$  é independente do valor de  $f_a$ , visto que podemos reescrever a derivada em termos da razão  $a/f_a$ . Sua importância também pode ser vista através de sua relação com a massa dos mésons  $\eta$ ,  $\eta'$  e  $K$  (FUKUSHIMA; OHNISHI; OHTA, 2001):

$$\frac{6}{f_\pi^2}\chi_t = m_\eta^2 + m_{\eta'}^2 - 2m_K^2. \quad (2.17)$$

Portanto,  $\chi_t$  pode ser relevante para o estudo da anomalia axial  $U_A(1)$ .

Também definimos o auto-acoplamento do áxion como a quarta derivada do potencial termodinâmico tomada em  $a = 0$ :

$$\lambda_a = \left. \frac{d^4\Omega}{da^4} \right|_{a=0}. \quad (2.18)$$

Vale destacar que as expressões de  $m_a$  e  $\lambda_a$  são justificadas pelo fato de que o áxion é um campo escalar, e portanto possui um potencial que pode ser expandido na forma

$$V(a) \sim \frac{m_a^2}{2}a^2 + \frac{\lambda_a^4}{4!}a^4. \quad (2.19)$$

Devido a isso, o cálculo da massa do áxion e de seu acoplamento envolve derivadas calculadas em  $a = 0$ .

### 2.3 CAMPO MAGNÉTICO EXTERNO

Podemos estudar o modelo NJL na presença de um campo magnético externo introduzindo o potencial eletromagnético  $A_\mu$ , de forma que a densidade Lagrangiana é escrita

por

$$\mathcal{L}_{\text{EM}} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu D_\mu - m_0)\psi + \mathcal{L}_q + \mathcal{L}_a - \frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + g_{\gamma a}\frac{a}{4}F^{\mu\nu}\tilde{F}_{\mu\nu}, \quad (2.20)$$

com o tensor eletromagnético dado por  $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A_\nu - \partial_\nu A^\mu$  e  $\tilde{F}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}F_{\alpha\beta}$  sendo o seu dual. A derivada covariante é modificada tal que  $D_\mu = \partial_\mu - iqA_\mu$ , com  $q$  referindo-se à carga elétrica. O último termo inclui o acoplamento fóton-áxion  $g_{\gamma a}$  (CORTONA et al., 2016), que pode ser importante para a difícil tarefa de detectar o áxion experimentalmente. No entanto, trataremos aqui de um campo magnético externo  $B$  fixo na direção  $z$ , de modo que esse termo não contribui (proporcional ao produto escalar dos campos elétrico e magnético). A densidade Lagrangiana efetiva é então

$$\mathcal{L}_B = \bar{\psi}(i\gamma^\mu D_\mu - m_0)\psi + \mathcal{L}_q + \mathcal{L}_a - \frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}. \quad (2.21)$$

Devido à presença do campo externo, o espaço de momentos no plano perpendicular ao eixo  $z$  é quantizado, modificando a relação de dispersão para (EBERT et al., 2000)

$$E'_p(B) = [M^2 + p_z^2 + (2n + 1 - s)q_f B]^{1/2}, \quad (2.22)$$

onde  $n$  e  $s$  representam os níveis de Landau e o spin, respectivamente, e  $q_f$  é a carga do quark de sabor  $f = u, d$ . Ainda trabalhamos na aproximação de massas iguais para os férmions, mas haverá uma soma nos sabores no potencial termodinâmico visto que as cargas elétricas são diferentes. Redefinindo os níveis de Landau para  $l$  tal que  $2l = (2n + 1 - s)$ , obtemos  $E_p(B) = [M^2 + p_z^2 + 2lq_f B]^{1/2}$ . Dessa maneira, as expressões podem ser escritas em termos do fator de degenerescência  $(2 - \delta_{l,0})$ , contando os dois possíveis estados de spin exceto para o nível mais baixo. Com essas considerações, as integrais no espaço de momento de uma função arbitrária  $f(E_p)$  tornam-se

$$\begin{aligned} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} f(E_p) &\rightarrow \frac{q_f B}{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp_z}{2\pi} f(E'_p(B)) \\ &\rightarrow \frac{q_f B}{2\pi} \sum_{l=0}^{\infty} (2 - \delta_{l,0}) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp_z}{2\pi} f(E_p(B)). \end{aligned} \quad (2.23)$$

O potencial termodinâmico sofrerá modificações apenas na contribuição dos quarks, de modo que

$$\Omega_q(B, T) = -\frac{N_c}{\pi^2} \sum_{l,f} q_f B (2 - \delta_{l,0}) \int_{-\infty}^{\infty} dp_z \left\{ \frac{E_p(B)}{2} + T \ln [1 + e^{-E_p(B)/T}] \right\}, \quad (2.24)$$

e o potencial total torna-se

$$\Omega = \Omega_q(B, T) + G_1(\eta^2 + \sigma^2) - G_2(\eta^2 - \sigma^2) \cos \frac{a}{f_a} - 2G_2\sigma\eta \operatorname{sen} \frac{a}{f_a}. \quad (2.25)$$

Essa forma, porém, não é a ideal. A integral envolvendo a relação de dispersão  $E_p(B)$  é divergente, mas mencionamos que as divergências da teoria devem estar apenas no vácuo e não nos termos de meio. Uma forma de contornar esse problema é através do método de regularização independente do campo magnético (MFIR) (EBERT et al., 2000; MENEZES et al., 2009; FARIAS et al., 2017). Este consiste na separação do potencial termodinâmico nos termos de vácuo  $\Omega_V$ , magnético  $\Omega_B(B)$  e termomagnético  $\Omega_M(T, B)$

$$\Omega(B, T) = \Omega_V + \Omega_B(B) + \Omega_M(T, B). \quad (2.26)$$

A única integral divergente estará portanto em  $\Omega_V$ , dado por

$$\Omega_V = G_1(\eta^2 + \sigma^2) - G_2(\eta^2 - \sigma^2) \cos \frac{a}{f_a} - 2G_2\sigma\eta \operatorname{sen} \frac{a}{f_a} - 4N_c \int_{\Lambda} \frac{d^3p}{(2\pi)^3} E_p, \quad (2.27)$$

sendo que o subíndice  $\Lambda$  indica o uso do *cutoff* 3D indicado na equação 2.14. As contribuições de meio são (FARIAS et al., 2017)

$$\begin{aligned} \Omega_B(B) &= -\frac{N_c}{2\pi^2} \sum_f (q_f B)^2 \left[ \zeta'(-1, x_f) - \frac{1}{2}(x_f^2 - x_f) \ln x_f + \frac{x_f^2}{4} \right], \\ \Omega_M(B, T) &= -\frac{N_c}{2\pi^2} \sum_{l,f} (2 - \delta_{l,0}) q_f B \int_{-\infty}^{\infty} dp_z T \ln [1 + e^{-E_p(B)/T}], \end{aligned} \quad (2.28)$$

onde definiu-se o parâmetro adimensional  $x_f = M^2/(2q_f B)$  e  $\zeta'(-1, x_f)$  é a primeira derivada da função zeta de Hurwitz.

## 2.4 PARAMETRIZAÇÃO

Ainda existem algumas quantidades a se definir antes dos cálculos do potencial termodinâmico serem efetivados. O acoplamento escalar/pseudoescalar  $G_s$ , o regulador das integrais  $\Lambda$  e a massa de corrente dos quarks  $m_0$  são parâmetros livres do modelo e precisam ser determinados de alguma maneira. O critério adotado é que eles devem reproduzir os valores físicos no vácuo para a massa do pión  $m_\pi$ , a constante de decaimento do pión  $f_\pi$  e o condensado de quarks  $\langle \bar{\psi}\psi \rangle$ . Alguns dos mais utilizados na literatura são dados na tabela 2.

Ao motivar o estudo de campos magnéticos na matéria de quarks, mencionamos os efeitos conhecidos como catálise magnética e catálise magnética inversa. A MC se refere

Tabela 2 – Lista de conjuntos de parâmetros usados ao longo de nosso estudo, por diferentes autores.

Conjunto	Entrada	Saída
I Refs. (FARIAS et al., 2014) e (FARIAS et al., 2017)	$f_\pi = 93 \text{ MeV}$ $m_\pi = 140 \text{ MeV}$ $\langle \bar{\psi}\psi \rangle^{\frac{1}{3}} = -250 \text{ MeV}$	$\Lambda = 650 \text{ MeV}$ $G_s = 2, 122/\Lambda^2$ $m_0 = 5, 5 \text{ MeV}$
II Refs. (FRANK; BUBALLA; OERTEL, 2003) e (LU; RUGGIERI, 2019)	$f_\pi = 92, 6 \text{ MeV}$ $m_\pi = 140.2 \text{ MeV}$ $\langle \bar{\psi}\psi \rangle^{\frac{1}{3}} = -241, 5 \text{ MeV}$	$\Lambda = 590 \text{ MeV}$ $G_s = 2, 435/\Lambda^2$ $m_0 = 6 \text{ MeV}$
III Ref. (BUBALLA, 2005)	$f_\pi = 92, 4 \text{ MeV}$ $m_\pi = 135 \text{ MeV}$ $\langle \bar{\psi}\psi \rangle^{\frac{1}{3}} = -250, 8 \text{ MeV}$	$\Lambda = 664, 3 \text{ MeV}$ $G_s = 2, 06/\Lambda^2$ $m_0 = 5 \text{ MeV}$

Fonte: Próprio autor e colaboradores, em Bandyopadhyay et al. (2019).

à potencialização da quebra espontânea da simetria quiral conforme o aumento do campo - isto é, ocorre um aumento na massa efetiva dos quarks (GUSYNIN; MIRANSKY; SHOVKOVY, 1996). O resultado obtido inicialmente através de modelos efetivos é corroborado por simulações de QCD na rede no regime de baixas temperaturas. Entretanto, também se verificou que os condensados (e portanto as massas) dos quarks leves diminuem com o aumento do campo ao se aproximar de  $T_c$  (BALI et al., 2012b; BALI et al., 2012a), temperatura crítica para restauração da simetria quiral. Esse fenômeno ficou conhecido como IMC. Diversos esforços foram feitos para reproduzir a IMC através de modelos efetivos, e discutimos aqui uma possibilidade. A introdução de um acoplamento que depende da intensidade do campo magnético e também da temperatura,  $G_s(B, T)$ , permite incorporar esses efeitos. Seguimos as propostas de Farias et al. (2017), no contexto do modelo NJL com simetria SU(2) de sabor. Para o conjunto de parâmetros I, o acoplamento é dado por<sup>1</sup>

$$G_s(eB, T) = b(eB) \left\{ 1 - \frac{1}{1 + e^{\beta(eB)[T_a(eB) - T]}} \right\} + s(eB). \quad (2.29)$$

Os valores de  $b$ ,  $\beta$ ,  $T_a$  e  $s$  são calculados de modo a reproduzir os dados de Bali et al. (2012a), e são apresentados na tabela 3 para diferentes intensidades do campo magnético. Contudo, devido à escassez de dados de rede na região de  $T < 110 \text{ MeV}$ , é necessária

Tabela 3 – Parâmetros para o acoplamento  $G_s(eB, T)$ .

$eB$ (GeV)	$b$ (GeV)	$T_a$ (GeV)	$s$ (GeV)	$\beta$ (GeV)
0,0	0,900	0,168	3,731	40,000
0,2	1,226	0,168	3,262	34,117
0,4	1,769	0,169	2,294	22,988

Fonte: Adaptado de (FARIAS et al., 2017).

<sup>1</sup>Escrevemos o campo magnético multiplicado pela carga elétrica elementar  $e$ , visto que o termo sempre aparece acompanhado de  $q_f$  nas expressões.

uma reparametrização para estudar o caso  $G_s(eB, T = 0)$ . Usando um outro conjunto de dados, também por Bali et al. (2012a) mas considerando outro regime de temperatura, os autores Avancini et al. (2017) propuseram uma nova forma:

$$G_0(eB) = \alpha + \beta e^{-\gamma(eB)^2}, \quad (2.30)$$

sendo  $\alpha = 1,44373 \text{ GeV}^{-2}$ ,  $\beta = 3,06 \text{ GeV}^{-2}$  e  $\gamma = 1,31 \text{ GeV}^{-4}$ . Resta então definir o parâmetro  $c$ , que controla a intensidade da interação com o áxion através do acoplamento  $G_2$ . Como veremos posteriormente o modelo NJL com simetria SU(3) no espaço de sabor não depende dessa escolha, uma vez que o áxion interage via determinante associado ao acoplamento  $K$  de Kobayashi-Maskawa-'t Hooft (KOBAYASHI; MASKAWA, 1970; HO-OFT, 1976a). Uma comparação entre as densidades Lagrangianas efetivas indica que (BUBALLA, 2005)

$$c \approx \frac{-K\sigma_s}{4G_s - K\sigma_s}, \quad (2.31)$$

sendo  $\sigma_s$  o condensado referente ao quark estranho. Para um determinado conjunto de parâmetros, o autor encontra  $c \sim 0,21$ . Na maior parte de nossos resultados, utilizamos  $c = 0,2$  de acordo com Frank, Buballa e Oertel (2003), Lu e Ruggieri (2019).

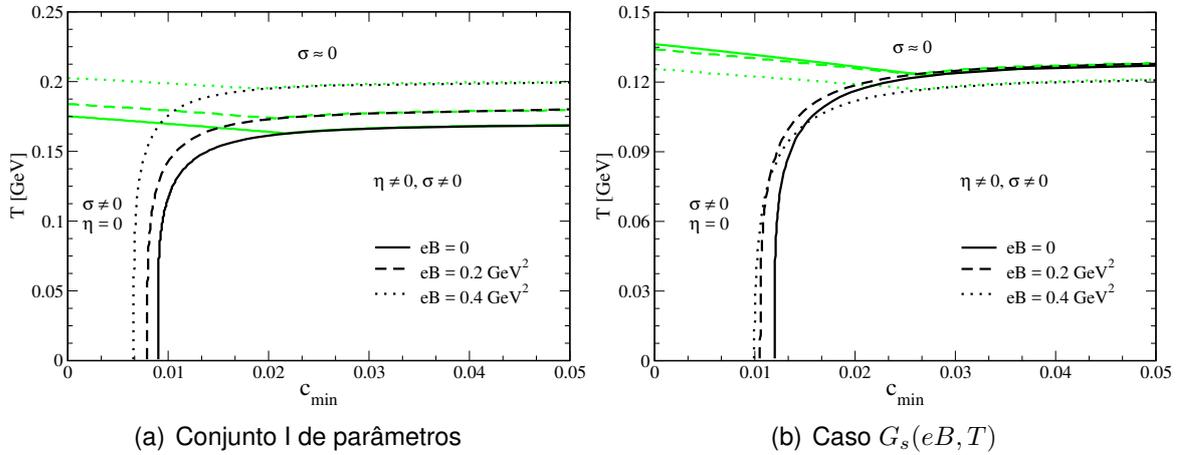
## 2.5 RESULTADOS

Começamos a discussão com uma análise dos valores mínimos que o parâmetro  $c$  ( $c_{min}$ ) deve atingir para que a condensação de  $\sigma$  e  $\eta$  ocorra. Como o caso  $a/f_a = 0$  corresponde ao modelo NJL usual de dois sabores, o condensado pseudoescalar seria sempre nulo. Consideramos então o caso  $a/f_a = \pi$ , permitindo a observação da quebra espontânea das simetrias quiral e CP relacionadas a valores não-nulos de  $\sigma$  e  $\eta$  respectivamente. Na figura 5 apresentamos o diagrama  $T - c_{min}$  para três valores do campo magnético externo, identificando três fases distintas. Em verde estão as linhas correspondentes à temperatura para restauração da simetria quiral, separando as regiões de  $\sigma \approx 0^2$  e  $\sigma \neq 0$ . Em preto estão as linhas correspondentes à transição entre as fases em que a simetria CP é ou não espontaneamente quebrada, do tipo segunda-ordem já que o parâmetro  $\eta$  é exatamente nulo na fase simétrica. Sumarizando, para os menores valores de  $T$  e  $c$  (canto inferior esquerdo,  $\sigma \neq 0$  e  $\eta = 0$ ) temos uma fase em que a simetria quiral é quebrada, mas

---

<sup>2</sup>Para um valor da massa de corrente dos quarks finito,  $m_0$ , a simetria quiral não é exata. No limite quiral ( $m_0 = 0$ ), teríamos valores do condensado escalar  $\sigma$  exatamente nulos após a restauração. No limite físico  $m_0 \neq 0$  as massas efetivas não vão a zero na fase restaurada. Nesse caso definimos a temperatura pseudo-crítica  $T_{pc}$  como o ponto de maior variação da massa (ou condensado) com mudanças na temperatura, isto é, o extremo de  $|d\sigma/dT|$ .

Figura 5 – O diagrama de fases  $T - c_{\min}$  para três intensidades do campo magnético externo, no conjunto I de parâmetros com  $G_s$  fixo (a) e  $G_s(eB, T)$  (b). Valor esperado no vácuo da razão  $a/f_a$  fixado em  $\pi$ .

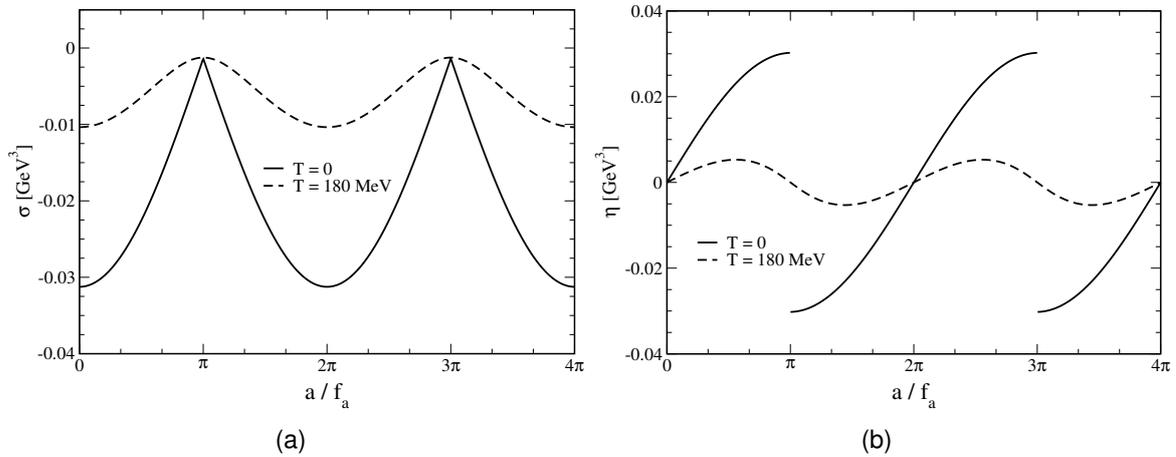


Fonte: Próprio autor.

a CP é restaurada. A partir de valores de  $c_{\min} \approx 0,01$  e até temperaturas intermediárias (canto inferior direito), temos a fase em que ambas simetrias são quebradas espontaneamente. Para altas temperaturas (parte superior) as simetrias quiral e CP são parcialmente e totalmente restauradas, respectivamente. No painel (a) vemos que  $c_{\min}$  para a condensação de  $\eta$  diminui com o aumento da intensidade do campo magnético externo, enquanto a temperatura crítica  $T_c$  para restauração da simetria quiral aumenta - efeito decorrente da catálise magnética. No painel (b), onde consideramos o acoplamento  $G_s(eB, T)$ , o comportamento é similar apenas na região de baixa temperatura. Podemos ver que  $T_c$  diminui com o aumento do campo - efeito decorrente da catálise magnética inversa -, e que para temperaturas mais altas  $c_{\min}$  aumenta com campos magnéticos mais intensos. Concluímos então que o valor adotado  $c = 0,2$  é razoável, permitindo a existência das fases em que as simetrias CP e quiral são restauradas ou espontaneamente quebradas no modelo.

Na figura 6 apresentamos o comportamento dos condensados  $\sigma$  e  $\eta$  com variações no campo do áxion redimensionado  $a/f_a$  para as temperaturas  $T = 0$  e  $T = 180$  MeV, na ausência de campo magnético ( $B = 0$ ). Como a razão  $a/f_a$  contribui no potencial termodinâmico através das funções trigonométricas  $\text{sen}(a/f_a)$  e  $\text{cos}(a/f_a)$ , é de se esperar a característica senoidal. Analisemos primeiro o condensado escalar  $\sigma$  no painel (a). Em valores absolutos,  $\sigma$  tem seus maiores valores quando  $a/f_a$  é um múltiplo inteiro de  $2\pi$ , isto é, quando a simetria CP é explicitamente conservada (não ocorre quebra espontânea). Para os múltiplos ímpares  $a/f_a = (2j + 1)\pi$ ,  $j$  inteiro,  $\sigma$  atinge seu valor mínimo e portanto a maior contribuição para a massa dos quarks deve vir do condensado pseudoescalar. Ainda em (a) podemos ver a restauração da simetria quiral através da redução da magnitude de  $\sigma$  no caso  $T = 180$  MeV. Percebe-se que para o condensado  $\eta$ , no painel (b), o comportamento é diferente. Em temperatura zero, o mesmo apresenta descontinuidades para  $a/f_a = (2j + 1)\pi$  e é zero quando  $a/f_a = 2j\pi$ . Esse resultado é conectado a dois efeitos

Figura 6 – Comportamento dos condensados  $\sigma$  e  $\eta$  com variações na razão  $a/f_a$ , para duas diferentes temperaturas e campo magnético  $B = 0$ .



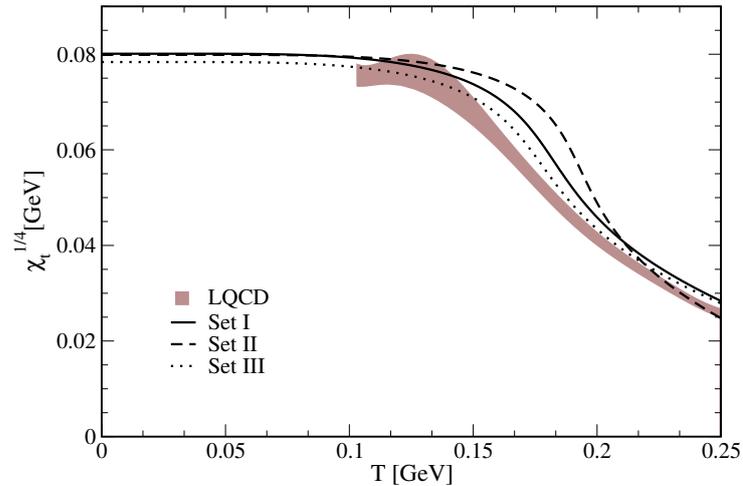
Fonte: Próprio autor.

interessantes. O primeiro é o fenômeno de Dashen (DASHEN, 1971), que prevê a existência de dois vácuos degenerados em  $T = 0$  e  $a/f_a = (2j+1)\pi$  devido à quebra espontânea da simetria de carga-paridade. A mudança de sinal entre as duas soluções para  $\eta$  indica que elas diferem por uma inversão de CP. O segundo efeito é relacionado ao teorema de Vafa-Witten (VAFA; WITTEN, 1984), que afirma a conservação explícita e espontânea da simetria CP em  $a/f_a = 2j\pi$ . Para múltiplos ímpares de  $\pi$ , a densidade Lagrangiana ainda conserva CP, mas pode haver quebra espontânea dinamicamente. Verifica-se também que o aumento da temperatura reduz os efeitos do fenômeno de Dashen. Em  $T = 180$  MeV, por exemplo, já encontramos a fase  $\sigma \approx 0, \eta = 0$  discutida anteriormente.

Antes de partir para os efeitos de um campo magnético finito, discutimos na figura 7 um pouco sobre o comportamento da susceptibilidade topológica conforme o aumento da temperatura. Temos aqui uma oportunidade importante de comparação entre nosso modelo efetivo e dados de QCD na rede (BORSANYI et al., 2016), e testamos os três conjuntos de parâmetros apresentados na tabela 2. Percebe-se que os conjuntos I e III são os mais próximos dos dados de rede. Todas as curvas começam ao redor de  $\chi_t^{1/4} = 0.08$  GeV em  $T = 0$ , e sofrem uma redução a partir do ponto em que a simetria quiral é parcialmente restaurada ( $T_{pc} \sim 170$  MeV).

Iniciamos agora a investigação dos casos em que  $eB \neq 0$ . A partir daqui utilizamos apenas o conjunto I de parâmetros, alternando as situações de  $G_s$  fixo e  $G_s(eB, T)$ . Na figura 8, verificamos o comportamento do potencial termodinâmico efetivo com variações no campo do áxion através de  $a/f_a$ , adotando a normalização  $\Omega(T, eB, a/f_a) - \Omega(T, eB, 0)$ . Consideramos três intensidades para o campo magnético externo, e os regimes de temperatura  $T = 0$  - painel (a) - e  $T = 180$  MeV - painel (b) - para um acoplamento  $G_s$  fixo. Em ambos valores de  $T$ , percebemos que o efeito do campo magnético é aumentar a magnitude do potencial efetivo. Os mínimos ocorrem em  $a/f_a = 2j\pi$ , enquanto o regime de

Figura 7 – Comportamento da susceptibilidade topológica com variações na temperatura para diferentes parametrizações, na ausência de campo magnético externo.

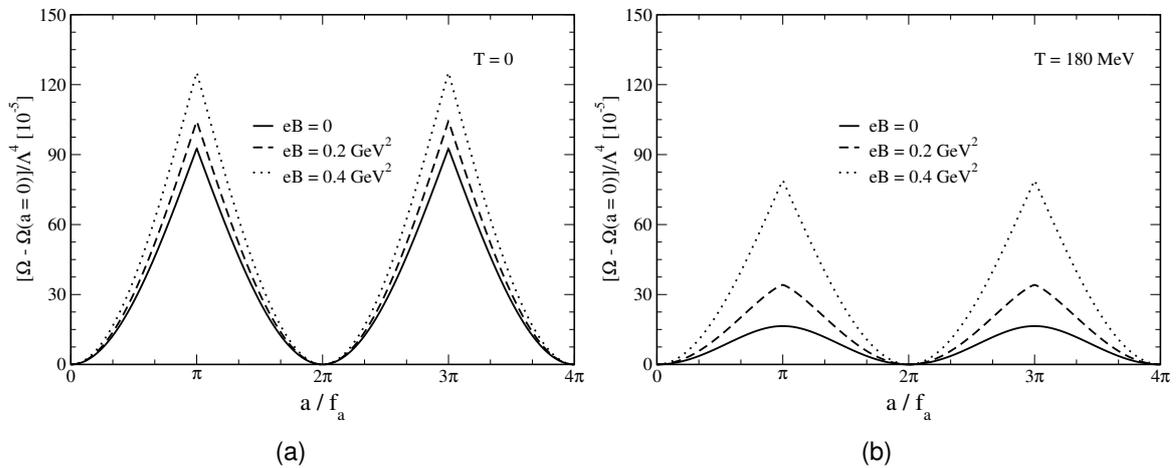


Fonte: Próprio autor. Região sombreada por simulações QCD na rede (BORSANYI et al., 2016).

quebra espontânea de CP  $a/f_a = (2j + 1)\pi$  corresponde aos máximos. Comparando (a) e (b) percebemos também que o efeito da temperatura é reduzir a amplitude da contribuição do áxion. Já na figura 9, comparamos as mesmas quantidades utilizando o acoplamento dependente do meio  $G_s(eB, T)$ . Enquanto para  $T = 0$  no painel (a) as conclusões são similares, percebemos uma inversão dos efeitos ao observar o painel (b), referente a  $T = 180$  MeV. Ao longo de toda a extensão dos valores de  $a/f_a$ , o aumento no campo magnético causa uma redução na magnitude do potencial termodinâmico efetivo, consequência da catálise magnética inversa. Ainda, a suavização dos picos nas duas figuras ocorre devido à restauração da simetria quiral.

Os fenômenos da MC e IMC são vistos de forma mais explícita pelo seu efeito na massa efetiva dos quarks,  $M$ . Na figura 10 apresentamos o comportamento de  $M$  com a temperatura, considerando novamente três intensidades do campo magnético externo  $eB$  e o acoplamento fixo  $G_s$ . O painel (a) apresenta a situação  $a/f_a = 0$ , e o painel (b)  $a/f_a = 2\pi/3$ . O cenário é similar em ambos os painéis. Para  $T = 0$ , os quarks adquirem uma massa efetiva muito maior que suas massas de corrente  $m_0 = 5,5$  MeV devido à quebra espontânea da simetria quiral. O aumento da temperatura restaura parcialmente essa simetria, reduzindo o valor de  $M$ . O efeito do campo magnético aqui é o crescimento da massa ao longo de toda a extensão do regime de temperatura - a catálise magnética. O caso  $a/f_a = 2\pi/3$  causa uma pequena redução na massa comparado a  $a/f_a = 0$ . Na figura 11 introduzimos o acoplamento dependente do meio  $G_s(eB, T)$  e estudamos as mesmas quantidades. O comportamento é claramente diferente ao caso anterior, tanto quantitativamente como qualitativamente. Para baixas temperaturas ( $T < 50$  MeV), a catálise magnética continua visível já que o aumento da intensidade do campo  $eB$  gera o crescimento da massa efetiva dos quarks. Todavia, há uma mudança nos efeitos com o aumento da temperatura, até que ao redor de  $T_c$  eles se tornam completamente opostos.

Figura 8 – Comportamento do potencial termodinâmico efetivo conforme variações na razão  $a/f_a$  para diferentes intensidades do campo magnético externo, em dois regimes de temperatura e com acoplamento  $G_s$  fixo.



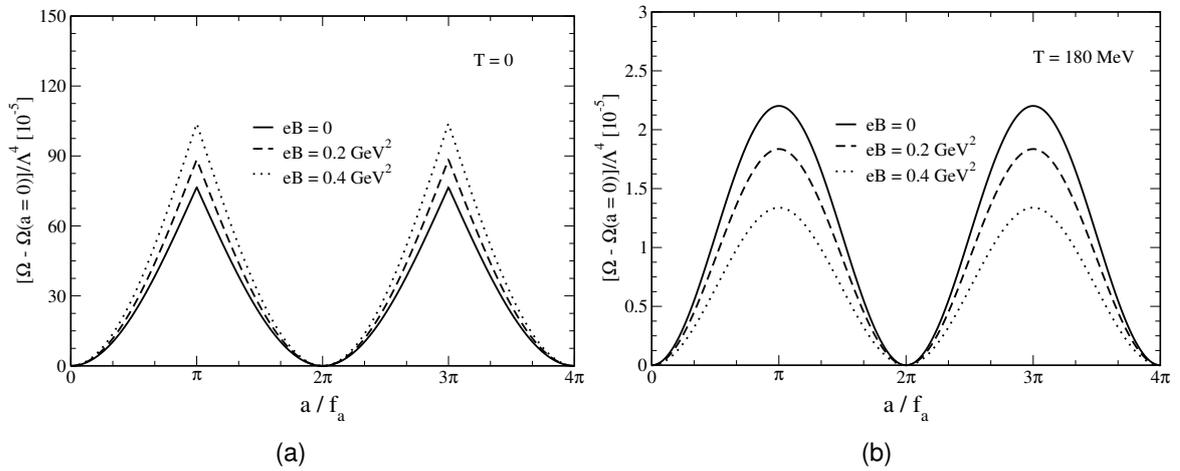
Fonte: Próprio autor.

Maiores intensidades do campo magnético causam uma redução em  $M$ , caracterizando a catálise magnética inversa nesse regime.

Agora, mostramos na figura 12 as variações da massa do áxion  $m_a$  - painel (a) - e do acoplamento  $\lambda_a$  - painel (b) - com a temperatura, para três intensidades do campo magnético. Consideramos apenas o caso  $G_s(eB, T)$ , pois o julgamos mais próximo da realidade física uma vez que permite a visualização da MC e IMC conjuntamente. Tanto  $m_a(T)$  quanto  $\lambda_a(T)$  estão normalizados por seus valores em temperatura zero, como forma de cancelar suas dependências explícitas com a constante de decaimento  $f_a$  para a qual não assumimos nenhum valor durante o trabalho. A catálise magnética inversa se torna visível na massa do áxion com o aumento da temperatura, e campos magnéticos mais intensos também correspondem a menores valores do acoplamento  $\lambda_a(T)$ . Nos dois painéis, as quantidades sofrem de modo geral uma redução com o crescimento de  $T$ , mais evidente próximo de  $T_{pc}$ . O acoplamento ainda apresenta um máximo local nessa região. Os comportamentos estão dentro do esperado para uma teoria de um campo escalar - como o áxion - em temperatura finita (LU; RUGGIERI, 2019).

Para concluir a seção de resultados, verificamos na figura 13 a variação da susceptibilidade topológica  $\chi_t$  com a temperatura - painel (a) - e com o campo magnético - painel (b). Consideramos em (a) três intensidades do campo magnético e o acoplamento  $G_s(eB, T)$ . Tanto a MC no regime de baixas temperaturas quanto a IMC para temperaturas moderadas ou altas são identificadas. O resultado do painel (b) é obtido em  $T = 0$ , e portanto consideramos o acoplamento  $G_0(eB)$  pelos motivos apontados na seção anterior. A curva cheia se refere ao caso  $G_0(eB = 0)$ , um valor fixo, enquanto a curva tracejada se refere ao caso  $G_0(eB \neq 0)$ . A previsão é um crescimento de  $\chi_t$  com o aumento da intensidade do campo magnético. Também percebemos que a dependência do acoplamento

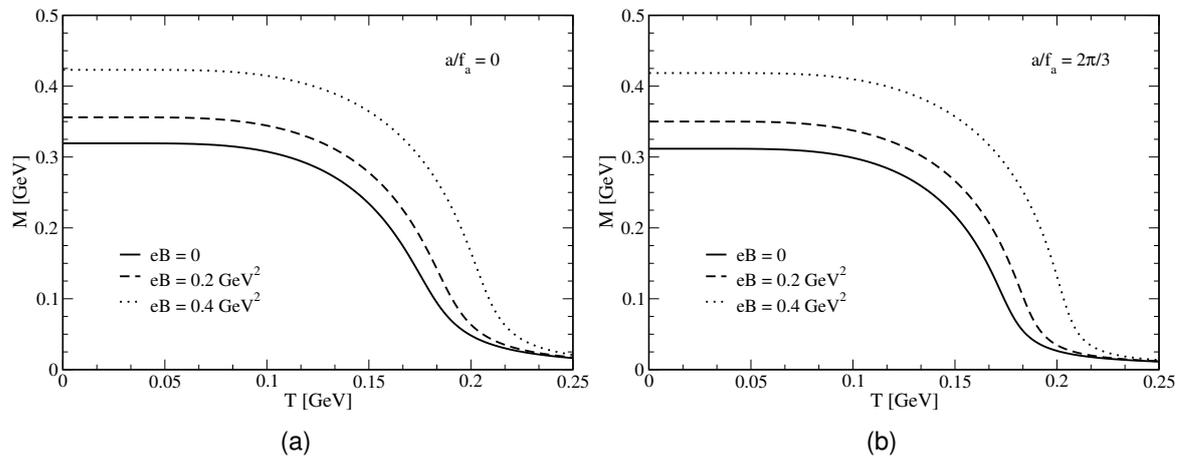
Figura 9 – Comportamento do potencial termodinâmico efetivo conforme variações na razão  $a/f_a$  para diferentes intensidades do campo magnético externo, em dois regimes de temperatura e com o acoplamento dependente do meio  $G_s(eB, T)$ .



Fonte: Próprio autor.

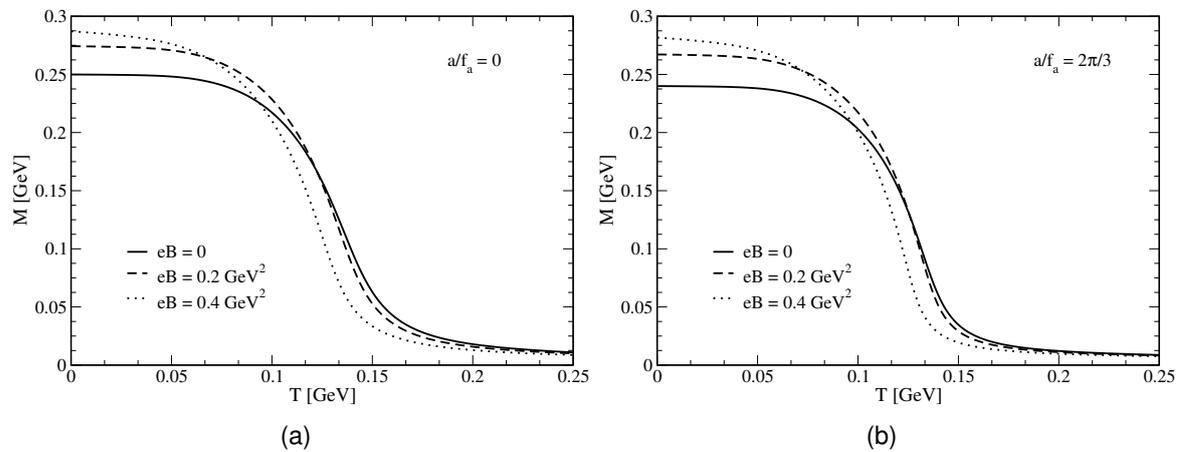
com o campo diminui a magnitude de  $\chi_t$  em um  $eB$  específico, resultado válido ao longo de toda extensão de intensidades do campo consideradas.

Figura 10 – Variação da massa efetiva dos quarks  $M$  com a temperatura para diferentes intensidades do campo magnético externo, em dois valores da razão  $a/f_a$  e com o acoplamento fixo  $G_s$ .



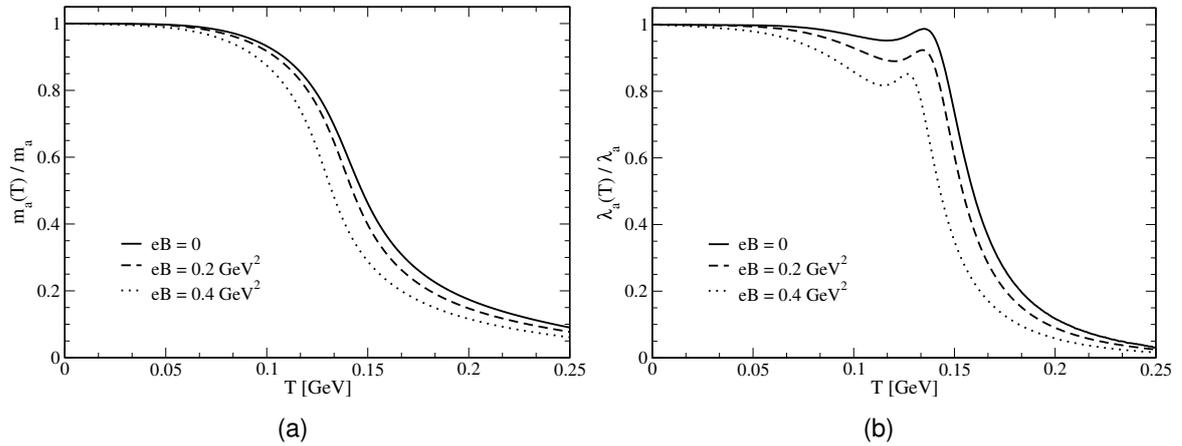
Fonte: Próprio autor.

Figura 11 – Variação da massa efetiva dos quarks  $M$  com a temperatura para diferentes intensidades do campo magnético externo, em dois valores da razão  $a/f_a$  e com o acoplamento dependente do meio  $G_s(eB, T)$ .



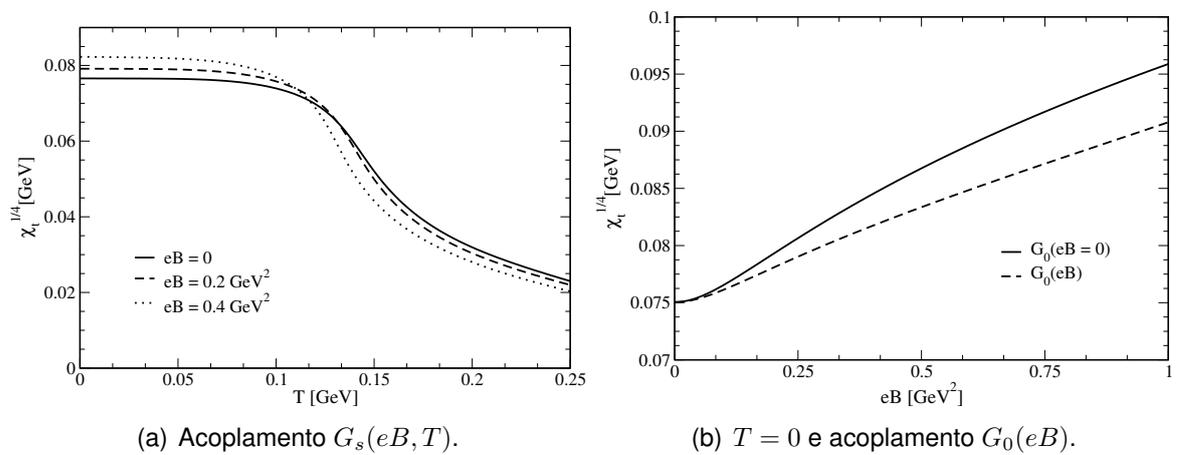
Fonte: Próprio autor.

Figura 12 – Comportamento da massa do áxion normalizada - painel (a) - e auto-acoplamento do áxion normalizado - painel(b) - com a temperatura, para diferentes intensidades do campo magnético externo e com o acoplamento dependente do meio  $G_s(eB, T)$ .



Fonte: Próprio autor.

Figura 13 – Comportamento da susceptibilidade topológica com a temperatura - painel (a) - e com o campo magnético - painel (b).



(a) Acoplamento  $G_s(eB, T)$ .

(b)  $T = 0$  e acoplamento  $G_0(eB)$ .

Fonte: Próprio autor.

### 3 MODELO NJL SU(3) - MEIOS DENSOS E ESTRELAS COMPACTAS

Neste capítulo conduzimos uma revisão dos conceitos necessários para o estudo do modelo NJL SU(3) (três sabores  $u, d, s$ ) no regime de densidade finita, considerando as interações devido ao campo do áxion. A inclusão do quark estranho se justifica pelo objetivo final, que é o estudo de estrelas de nêutrons híbridas - com um núcleo de matéria de quarks e uma crosta hadrônica. As altíssimas densidades desses objetos permitem que o quark  $s$  popule o sistema, gerando efeitos importantes na equação de estado. Ainda há a conjectura de Witten (WITTEN, 1984), que infere a existência da matéria estranha como o verdadeiro estado fundamental da matéria fortemente interagente. A análise é feita no regime de  $T = 0$ , já que as estrelas são relativamente frias na escala de temperaturas da interação forte<sup>1</sup>. Por serem estrelas de nêutrons, precisamos incluir as condições de neutralidade de carga e equilíbrio  $\beta$  na teoria. O diagrama massa-raio desses objetos é obtido através da solução da equação de Tolman-Oppenheimer-Volkoff (TOV) (TOLMAN, 1939; OPPENHEIMER; VOLKOFF, 1939), por sua vez solução das equações de campo de Einstein para um fluido ideal, isotrópico, relativístico e esfericamente simétrico. Por fim, como motivamos anteriormente, é difícil obter equações de estado híbridas que descrevam estrelas estáveis e de alta massa ( $\sim 2 M_{\odot}$ ). Por isso estudamos a influência do áxion na matéria densa do modelo NJL, buscando efeitos que auxiliem na questão da estabilidade. Um resumo de nossas descobertas pode ser visto em (LOPES et al., 2022). Aqui, iniciamos com uma discussão sobre a Lagrangiana efetiva e o potencial termodinâmico.

#### 3.1 O POTENCIAL TERMODINÂMICO

No capítulo anterior introduzimos o áxion de Peccei-Quinn e verificamos que a sua inclusão na densidade Lagrangiana do modelo NJL se dá através do determinante de 't Hooft, pois a contribuição ocorre via uma rotação quiral dos campos fermiônicos. O mesmo acontece para o modelo de três sabores, e portanto escrevemos a Lagrangiana efetiva (BOER; BOOMSMA, 2008; CHATTERJEE; MISHRA; MISHRA, 2012) como

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \bar{\psi} (i\gamma^{\mu}\partial_{\mu} - \hat{m}_0) \psi + G_s \sum_{b=0}^8 \left[ (\bar{\psi}\lambda^b\psi)^2 + (\bar{\psi}i\gamma_5\lambda^b\psi)^2 \right] - G_V (\bar{\psi}\gamma^{\mu}\psi)^2 \\ & - K \left\{ e^{i\frac{a}{f_a}} \det [\bar{\psi} (1 + \gamma^5) \psi] + e^{-i\frac{a}{f_a}} \det [\bar{\psi} (1 - \gamma^5) \psi] \right\}. \end{aligned} \quad (3.1)$$

<sup>1</sup>No sistema de unidades naturais (apêndice A),  $1 \text{ MeV} = 1,16 \times 10^{10} \text{ K}$ . Mesmo assim, as contribuições podem ser importantes nos casos mais extremos, e o assunto é estudado atualmente na literatura.

Aqui,  $\psi = (u, d, s)^T$  é o campo dos quarks com três sabores<sup>2</sup>, e  $\hat{m}_0 = \text{diag}(m_0^u, m_0^d, m_0^s)$  a matriz diagonal das massas de corrente. Novamente,  $\gamma^\mu$  são as matrizes de Dirac e  $\partial_\mu$  a derivada covariante. O acoplamento  $G_s$  acompanha as contribuições escalar e pseudoescalar, que contribuem com a soma nas matrizes de Gell-Mann  $\lambda^b$  devido à simetria SU(3) no espaço de sabor. O determinante de 't Hooft é acompanhado do acoplamento  $K$ , e inclui o áxion novamente através de rotações por  $a/f_a$ . Também incluímos o termo vetorial (MENEZES et al., 2014), acompanhado da constante de acoplamento  $G_V$ , a fim de estudar sua atuação na equação de estado.

Ao contrário do que fizemos no modelo SU(2), consideramos aqui as contribuições dos condensados dos quarks leves ( $u, d$ ) separadamente. A justificativa é que, ao implementar as condições de neutralidade de carga e equilíbrio beta, seus potenciais químicos já não são mais idênticos. Com isso as massas efetivas  $M_u$  e  $M_d$  serão diferentes, mesmo que  $m_0^u = m_0^d$  a nível da Lagrangiana. O quark estranho  $s$  é obrigatoriamente tratado dessa maneira, visto que possui uma massa nua  $m_0^s$  maior. Então, prosseguindo via aproximação de campo médio, temos para o sabor  $j = u, d, s$

$$\begin{aligned} (\bar{\psi}_j \psi_j) &= \langle \bar{\psi}_j \psi_j \rangle + \delta(\bar{\psi}_j \psi_j) = -\sigma_j + \delta(\bar{\psi}_j \psi_j), \\ (\bar{\psi}_j i\gamma_5 \psi_j) &= \langle \bar{\psi}_j i\gamma_5 \psi_j \rangle + \delta(\bar{\psi}_j i\gamma_5 \psi_j) = -\eta_j + \delta(\bar{\psi}_j i\gamma_5 \psi_j), \end{aligned} \quad (3.2)$$

onde definimos<sup>3</sup> os condensados escalar  $\sigma_j = -\langle \bar{\psi}_j \psi_j \rangle$  e pseudoescalar  $\eta_j = -\langle \bar{\psi}_j i\gamma_5 \psi_j \rangle$ . Como no capítulo anterior, tomamos o quadrado e iteramos as opções para obter

$$\begin{aligned} (\bar{\psi}_j \psi_j)^2 &= -\sigma_j^2 - 2\sigma_j \delta(\bar{\psi}_j \psi_j), \\ (\bar{\psi}_j i\gamma_5 \psi_j)^2 &= -\eta_j^2 - 2\eta_j \delta(\bar{\psi}_j i\gamma_5 \psi_j). \end{aligned} \quad (3.3)$$

Levando as expressões à densidade Lagrangiana, obtemos o potencial termodinâmico efetivo com a contribuição do áxion no modelo NJL de três sabores

$$\begin{aligned} \Omega &= \Omega_q + 2G_s \sum_j (\sigma_j^2 + \eta_j^2) + 4K \left( \sigma_u \sigma_d \sigma_s \cos \frac{a}{f_a} + \eta_u \eta_d \eta_s \sin \frac{a}{f_a} \right) - G_V n^2 \\ &\quad - 4K \left[ \cos \frac{a}{f_a} (\eta_u \eta_d \sigma_s + \eta_u \eta_s \sigma_d + \eta_d \eta_s \sigma_u) + \sin \frac{a}{f_a} (\sigma_u \sigma_d \eta_s + \sigma_u \sigma_s \eta_d + \sigma_d \sigma_s \eta_u) \right]. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Notamos que  $\Omega$  agora também é função explícita da densidade total  $n = \sum_j \langle \psi_j^\dagger \psi_j \rangle$  devido ao acoplamento vetorial. Para ver que esse termo representa a densidade, lembramos que o potencial químico  $\mu$  entra como multiplicador de Lagrange na ação efetiva através de  $\mu \psi^\dagger \psi$  (BUBALLA, 2005). Assim, pode-se esperar uma translação em  $\mu$  devido à presença de  $G_V$ , como veremos posteriormente. A contribuição das interações entre os quarks é

<sup>2</sup>A operação  $T$  representa a transposição.

<sup>3</sup>Invertamos os sinais na definição para manter a notação do trabalho de Chatterjee, Mishra e Mishra (2012), e que também utilizamos em Lopes et al. (2022).

dada por

$$\Omega_q = -2N_c \sum_j \left[ \int_{\Lambda} \frac{d^3k}{(2\pi)^3} E_k^j + \int_{k_F^j} \frac{d^3k}{(2\pi)^3} (\tilde{\mu}_j - E_k^j) \right], \quad (3.5)$$

onde  $E_k^j = \sqrt{k^2 + M^j{}^2}$  é a relação de dispersão e  $M^j = \sqrt{M_s^j{}^2 + M_{ps}^j{}^2}$  a massa efetiva do quark de sabor  $j$ . Os termos  $M_s^j$  e  $M_{ps}^j$  são as contribuições devido a parte escalar e pseudoescalar, respectivamente, e são descritas em termos dos condensados (similar a  $\alpha_0$  e  $\beta_0$  no modelo SU(2)) por

$$M_s^j = m_0^j + 4G_s\sigma_j + 2K \left[ \cos \frac{a}{f_a} (\sigma_k\sigma_l - \eta_k\eta_l) - \sin \frac{a}{f_a} (\sigma_k\eta_l + \eta_k\sigma_l) \right], \quad (3.6)$$

$$M_{ps}^j = 4G_s\eta_j - 2K \left[ \cos \frac{a}{f_a} (\sigma_k\eta_l + \eta_k\sigma_l) - \sin \frac{a}{f_a} (\eta_k\eta_l - \sigma_k\sigma_l) \right], \quad (3.7)$$

nas quais  $j, k, l = u, d, s$  ou suas permutações cíclicas. Ainda na equação 3.5, vemos que um dos efeitos da interação vetorial é a translação no potencial químico  $\mu_j$  dos quarks, gerando o chamado potencial químico efetivo  $\tilde{\mu}_j = \mu_j - 2G_V n$ . A integral do termo de vácuo é novamente divergente, e a regularizamos pelo mesmo método visto na eq. 2.14, como indicado pelo subíndice do *cutoff* 3D  $\Lambda$ . A integral do termo de meio ainda é finita e não necessita de regularização, mas adquire um limite superior naturalmente devido à condição de temperatura zero através do momento de Fermi  $k_F^j = \sqrt{\tilde{\mu}_j^2 - (M^j)^2} \Theta(\tilde{\mu}_j^2 - (M^j)^2)$ , sendo  $\Theta$  a função degrau.

Para o cálculo das variáveis termodinâmicas precisamos obter os valores físicos dos condensados, minimizando o potencial efetivo. Tais valores são as soluções das equações de gap:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \sigma_j} = \frac{\partial \Omega}{\partial \eta_j} = \frac{\partial \Omega}{\partial n} = 0. \quad (3.8)$$

A última equação deve ser considerada para que haja consistência termodinâmica, uma vez que o potencial é função explícita de  $n$  (AVANCINI et al., 2018). Tem-se então um sistema de sete equações acopladas a serem resolvidas de maneira auto-consistente. Com as soluções, obtemos o potencial termodinâmico efetivo a densidade finita  $\Omega(a, \mu)$ , que também depende do valor esperado do campo do áxion  $a$ . Definimos a normalização  $\Omega_N = \Omega(a, \mu) - \Omega(a, \mu = 0)$ , de modo que seu valor seja zero no vácuo. As demais quantidades termodinâmicas relevantes para a equação de estado podem ser obtidas do

potencial por

$$\begin{aligned}
 p_{NJL} &= -\Omega_N, \\
 \epsilon_{NJL} &= -p_{NJL} + \sum_j \mu_j n_j, \\
 n_B &= \frac{1}{3} \sum_j n_j = \frac{1}{3\pi^2} \left( k_F^u{}^3 + k_F^d{}^3 + k_F^s{}^3 \right), \tag{3.9}
 \end{aligned}$$

em que  $p_{NJL}$  é a pressão,  $\epsilon_{NJL}$  a densidade de energia e  $n_B$  a densidade de número bariônico.

### 3.2 EQUILÍBRIO BETA E NEUTRALIDADE DE CARGA

Estamos interessados no estudo de estrelas de nêutrons híbridas e sua estabilidade. Esses objetos são equilibrados via interação fraca, e precisamos levar em conta processos como o decaimento  $\beta$  (BUBALLA, 2005) - um nêutron decai em um próton através da emissão de um elétron e um antineutrino. Em termos do conteúdo de quarks dessas partículas, o balanço a ser considerado é

$$d \leftrightarrow u + e^- + \bar{\nu}_e. \tag{3.10}$$

Essa condição impõe restrições nos valores dos potenciais químicos que os quarks podem adquirir. Sendo  $\mu_B, \mu_Q$  os potenciais químicos relacionados as quantidades conservadas número bariônico e carga elétrica, respectivamente, sem considerar restrições na estranheza ( $\mu_S = 0$ ), devemos ter

$$\mu_u = \frac{\mu_B}{3} + \frac{2}{3}\mu_Q, \quad \mu_d = \frac{\mu_B}{3} - \frac{1}{3}\mu_Q, \quad \mu_s = \frac{\mu_B}{3} - \frac{1}{3}\mu_Q, \quad \mu_e = -\mu_Q, \tag{3.11}$$

em que  $\mu_e$  é o potencial químico do elétron. Implementando o processo da equação 3.10, obtemos

$$\begin{aligned}
 \mu_u &= \frac{\mu_B}{3} - \frac{2}{3}\mu_e, \\
 \mu_d &= \frac{\mu_B}{3} + \frac{1}{3}\mu_e = \mu_u + \mu_e, \\
 \mu_s &= \frac{\mu_B}{3} + \frac{1}{3}\mu_e = \mu_d. \tag{3.12}
 \end{aligned}$$

Dessa forma, somente um dos potenciais químicos é independente.

A outra condição a ser imposta é a neutralidade de carga - afinal, tratamos aqui de

estrelas de nêutrons. Então, nosso modelo deve satisfazer

$$\sum_j q_j n_j = \frac{2}{3}n_u - \frac{1}{3}n_d - \frac{1}{3}n_s - n_e = 0, \quad (3.13)$$

sendo  $q_j$  a carga da partícula  $j = u, d, s, e$ . Ainda, como a matéria descrita está agora em equilíbrio com um gás livre de elétrons, haverá contribuições adicionais para a pressão e densidade de energia. Com a densidade desse gás dada por  $n_e = \mu_e^3/3\pi^2$ , a pressão total  $p$  e densidade de energia total  $\epsilon$  são

$$\begin{aligned} p &= p_{NJL} + \frac{\mu_e^4}{12\pi^2}, \\ \epsilon &= \epsilon_{NJL} + \frac{\mu_e^4}{4\pi^2}. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Concluindo a seção, mencionamos que a condição de neutralidade de carga adiciona mais uma equação a ser resolvida de maneira auto-consistente - a equação (3.13) - junto às sete equações de gap em (3.8).

### 3.3 EQUAÇÃO DE TOLMAN-OPPENHEIMER-VOLKOFF

Por consequência das altas densidades em estrelas de nêutrons, uma descrição precisa de sua estrutura deve levar em conta os efeitos da relatividade geral. De forma independente, Tolman (1939), Oppenheimer e Volkoff (1939) encontraram uma solução para as equações de campo de Einstein considerando distribuições esfericamente simétricas e estáticas de um fluido ideal e isotrópico. A equação de TOV indica como a pressão varia dentro desses objetos com o aumento do raio e da massa englobada, e é escrita por<sup>4</sup>

$$\frac{dp(r)}{dr} = -\frac{G\epsilon(r)m(r)}{c^2 r^2} \left(1 + \frac{p(r)}{\epsilon(r)}\right) \left(1 + \frac{4\pi r^3 p(r)}{m(r)c^2}\right) \left(1 - \frac{2Gm(r)}{c^2 r}\right)^{-1}, \quad (3.15)$$

onde  $G$  é a constante gravitacional e  $c$  a velocidade da luz no vácuo. A pressão  $p$ , massa  $m$  e densidade de energia  $\epsilon$  são então funções do raio da estrela. Resolvemos junto à equação de TOV a equação de continuidade da massa:

$$\frac{dm(r)}{dr} = \frac{4\pi r^2}{c^2} \epsilon(r). \quad (3.16)$$

Tem-se então um sistema de duas equações que, quando fomentado por uma equação de estado  $p(\epsilon)$ , permite a obtenção do diagrama massa-raio de objetos compactos. Ainda,

---

<sup>4</sup>Particularmente nessa seção não utilizamos o sistema de unidades naturais a fim de evidenciar o caráter relativístico das expressões.

podemos inferir da equação (3.15) que a pressão é uma função decrescente do raio, uma vez que os termos do lado direito são positivos a exceção do sinal global. Da equação (3.16), vemos que a massa é uma função crescente do raio pois os termos do lado direito são positivos. As condições iniciais do sistema são então  $m(r = 0) = 0$ , dada uma pressão central  $p_0$ . Integrando as equações diferenciais, o raio aumenta até que em dado momento a pressão é zero. Aqui determinamos o final da estrela, de raio  $R$ , com massa máxima  $M = m(R)$ .

### 3.4 RESULTADOS I - MATÉRIA DE QUARKS A DENSIDADE FINITA

Antes de partir para a discussão de estrelas híbridas, comentamos algumas características gerais do modelo NJL de três sabores e em densidade finita, já com as condições de equilíbrio beta e neutralidade de carga implementadas. Assim como no caso de dois sabores, existem parâmetros livres que devem ser fixados - o *cutoff*  $\Lambda$ , o acoplamento escalar  $G_s$ , o acoplamento de 't Hooft  $K$ , a massa de corrente dos quarks leves  $m_0^{u,d}$  e do quark estranho  $m_0^s$ . Na literatura usualmente se fixa  $m_0^{u,d}$  em determinado valor, e os demais são escolhidos de modo satisfazer os valores físicos para a massa do pión  $m_\pi$ , constante de decaimento do pión  $f_\pi$  e as massas do kaon  $m_K$  e méson  $\eta'$  (BUBALLA, 2005). Adotamos aqui o conjunto HK, de Hatsuda e Kunihiro (1994), fixando  $m_0^{u,d} = 5,5$  MeV de modo que os parâmetros restantes são postos na tabela 4. O valor de  $G_V$  é variado ao longo da apresentação dos resultados para que verifiquemos seus efeitos.

Tabela 4 – Conjunto de parâmetros HK adotado no modelo NJL SU(3).

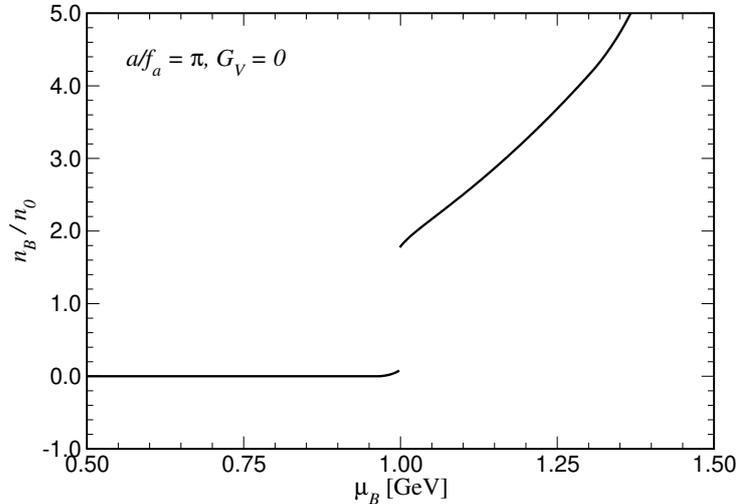
Entrada	Saída
$f_\pi = 93$ MeV	$\Lambda = 631,4$ MeV
$m_\pi = 138$ MeV	$G_s = 1,835/\Lambda^2$
$m_K = 496$ MeV	$K = 9,29/\Lambda^5$
$m_{\eta'} = 958$ MeV	$m_0^s = 135,7$ MeV

Fonte: Hatsuda e Kunihiro (1994).

Ao longo de nossa análise, tratamos a densidade bariônica  $n_B$  como parâmetro livre. Com isso, acabamos acessando alguns estados metaestáveis, que não correspondem ao mínimo global do potencial termodinâmico. O valor físico de  $\Omega$  é definido pelo mínimo global em um determinado potencial químico  $\mu_B$ , não em  $n_B$ . No entanto, as duas abordagens coincidem no regime de densidades altas, após um certo potencial químico crítico. Por esse motivo, não afetarão nenhum de nossos resultados para estrelas híbridas concebidas via construção de Maxwell. Isso pode ser visto na figura 14, na qual analisamos o comportamento da densidade bariônica normalizada pela densidade de saturação da matéria nuclear com o potencial químico, com razão do campo do áxion  $a/f_a = \pi$  e

sem presença do acoplamento vetorial. A seleção dos mínimos globais do potencial efe-

Figura 14 – Comportamento da densidade bariônica  $n_B$  com o potencial químico bariônico  $\mu_B$ , no regime  $a/f_a = \pi$  e  $G_V = 0$ .



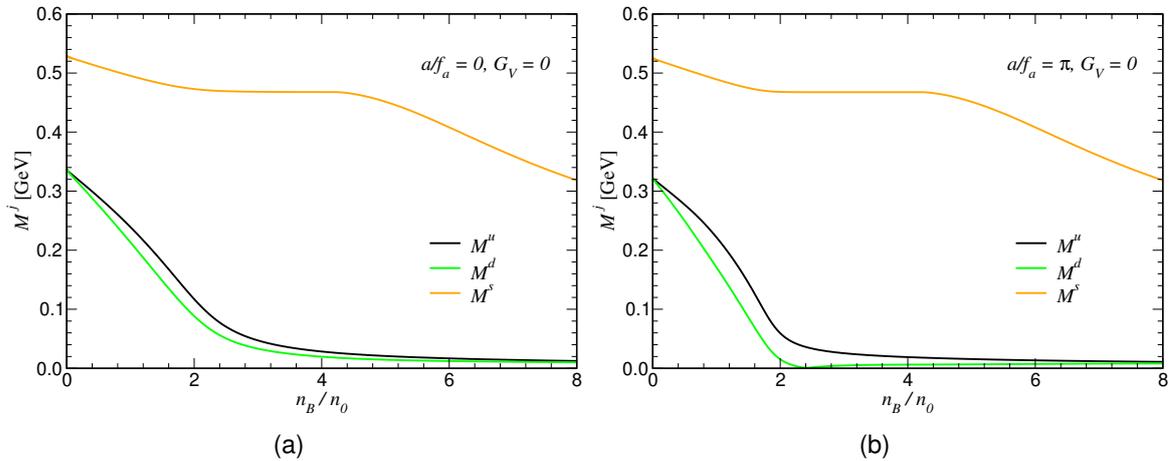
Fonte: Próprio autor.

tivo levam a uma transição de primeira ordem em  $n_B$ , por volta de  $\mu_B \sim 1000$  MeV. Ao variarmos a densidade bariônica  $n_B$ , acessamos toda a região de soluções metaestáveis que se estende até  $n_B \sim 2n_0$ . Novamente, quando tratarmos de estrelas híbridas, veremos que as transições da crosta hadrônica para o núcleo de quarks ocorre em densidades acima desse valor.

Esclarecida a metodologia, apresentamos na figura 15 o comportamento da massa efetiva dos quarks com o aumento da densidade bariônica. Ainda consideramos  $G_V = 0$ , comparando os casos de  $a/f_a = 0$ , painel (a), e  $a/f_a = \pi$ , painel (b). Imediatamente se percebe que mesmo considerando  $m_0^u = m_0^d$  ao nível da Lagrangiana, os quarks leves  $u, d$  possuem massas distintas geradas pela quebra da simetria quiral. A diferença decorre das condições de neutralidade de carga e equilíbrio beta, que quando satisfeitas implicam em  $\mu_u \neq \mu_d$ . Também verificamos que a simetria quiral é restaurada no regime de altas densidades, quando as massas efetivas se aproximam das massas de corrente. Na comparação entre os painéis, percebemos uma redução de  $M$  no caso  $a/f_a = \pi$ , especialmente evidente em  $M^d$  por volta de  $n_B = 2n_0$ . Lembramos do capítulo anterior que essa é a fase de simetria CP quebrada espontaneamente, em que o condensado  $\eta$  atinge o seu maior e  $\sigma$  o seu menor valor em magnitude. Por fim, verificamos que o quark estranho possui uma massa efetiva maior, e que no regime de densidades considerado ainda não se aproxima de  $m_0^s$ .

Na figura 16 apresentamos as variações das densidades de número  $n_j$  dos quarks e do elétron com a densidade bariônica. Temos assim uma ideia de em que regimes cada partícula passa a popular o sistema. O quark  $d$  tem a maior densidade em toda a extensão de  $n_B$  considerada, um pouco acima do quark  $u$ . Já o quark estranho contribui apenas

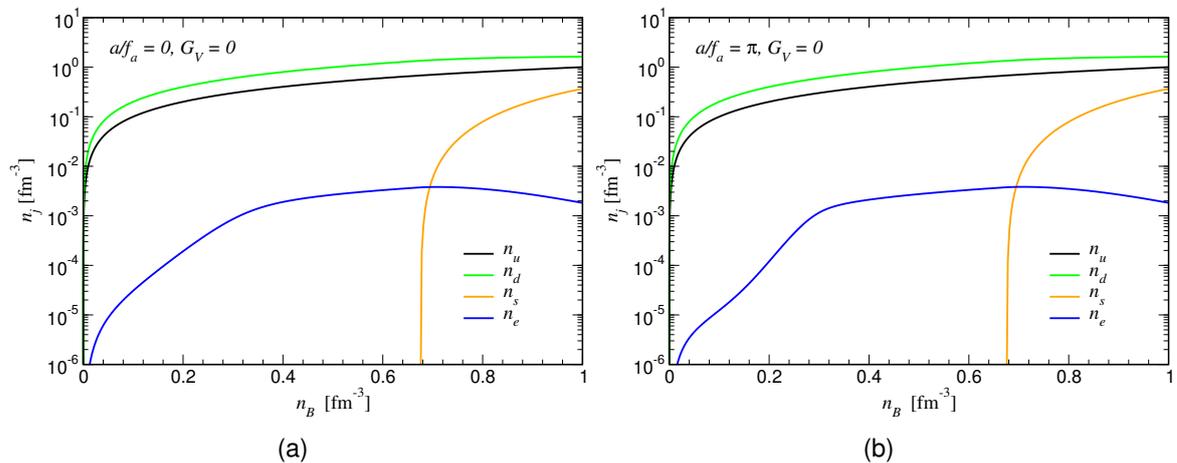
Figura 15 – Comportamento da massa efetiva dos quarks com o aumento da densidade bariônica  $n_B$ , nos regimes  $a/f_a = (0, \pi)$  e  $G_V = 0$ .



Fonte: Próprio autor.

em densidades mais altas, próximo a  $n_B \sim 0,68 \text{ fm}^{-3}$ . Isso é decorrência de sua massa elevada, uma vez que  $n_s$  é proporcional ao momento de Fermi. Há poucas modificações na comparação entre os painéis, sendo a mais evidente delas na densidade dos elétrons, porém não tão relevante levando em conta sua posição na escala logarítmica.

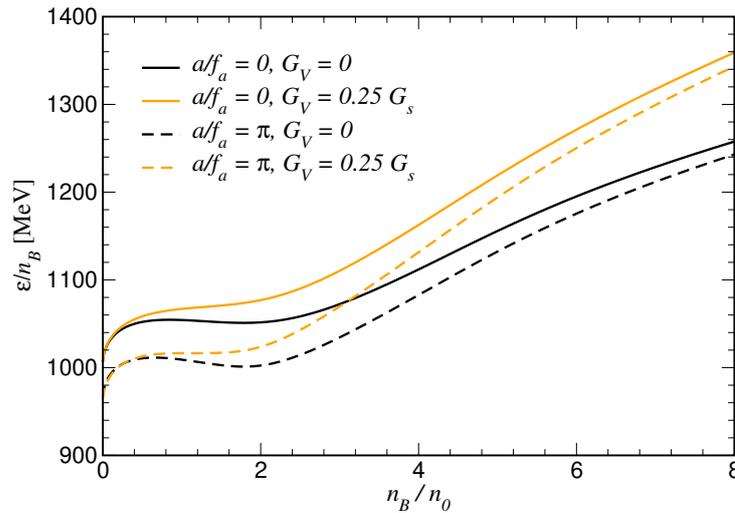
Figura 16 – Comportamento das densidades de número das partículas com o aumento da densidade bariônica, nos regimes  $a/f_a = (0, \pi)$  e  $G_V = 0$ .



Fonte: Próprio autor.

Concluindo a seção, apresentamos na figura 17 a variação da energia por número de bárions (ou equivalentemente  $\epsilon/n_B$ ) com a densidade bariônica, para os regimes  $a/f_a = (0, \pi)$  e dois valores do acoplamento vetorial,  $G_V = 0$  e  $G_V = 0,25G_s$ . Para que o sistema descrito corresponda a uma matéria estável, precisamos que o mínimo nessa curva esteja abaixo de  $\sim 930 \text{ MeV}$ , valor referente a um núcleo de Ferro (BUBALLA, 1996). Percebemos que isso não acontece em nenhum dos casos, indicando que a matéria puramente de quarks do modelo NJL não é adequada caso queiramos descrever estrelas estáveis. Mas

Figura 17 – Comportamento da energia por bárion  $\epsilon/n_B$  com o aumento da densidade bariônica, para os regimes  $a/f_a = (0, \pi)$  e dois valores do acoplamento  $G_V$ .



Fonte: Próprio autor.

o efeito do áxion através da razão  $a/f_a = \pi$  é positivo nesse sentido, trazendo o mínimo para valores mais baixos de  $\epsilon/n_B$ . Já o acoplamento vetorial tem efeito contrário, elevando a posição do mínimo até que no caso  $a/f_a = 0, G_V = 0, 25G_s$  ele não exista. Por isso, encontrar um balanço entre esses efeitos pode ser importante no estudo da equação de estado. O problema da estabilidade de um sistema descrito puramente por quarks não afetará nossa análise em estrelas híbridas, pois no regime de baixas densidades a EOS é dominada pela crosta hadrônica.

### 3.5 RESULTADOS II - ESTRELAS DE NÊUTRONS HÍBRIDAS

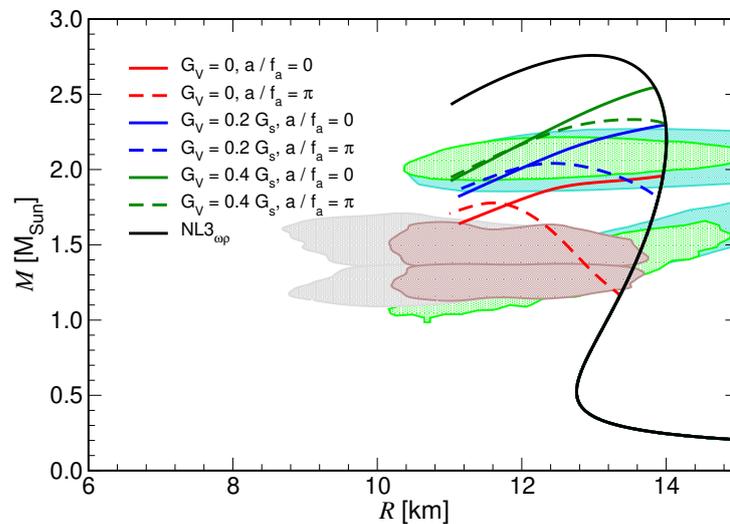
Tratemos agora das quantidades relacionadas às estrelas compactas. Pelas dificuldades previamente apresentadas, é evidente a necessidade de considerar as contribuições de uma crosta hadrônica na equação de estado. Trabalhamos com dois modelos: o  $NL3_{\omega\rho}$  (HOROWITZ; PIEKAREWICZ, 2001a; HOROWITZ; PIEKAREWICZ, 2001b; LALAZISSIS; KONIG; RING, 1997) e o  $CMF_{\omega\rho,\omega^4}$  (DEXHEIMER; SCHRAMM, 2008; CLEVINGER et al., 2022). O primeiro é um modelo de Walecka contendo o mínimo de ingredientes necessários para satisfazer as restrições observacionais conforme a figura 2. O subíndice  $\omega\rho$  se refere ao termo vetorial-isovetorial devido à interação com os mésons  $\omega$  e  $\rho$ , que ajuda a reduzir o valor da deformabilidade de maré em  $1,4 M_{\text{Sun}}$ <sup>5</sup> satisfazendo as medidas de LIGO/Virgo (ABBOTT et al., 2018) ( $\Lambda_{1,4} = 190^{+390}_{-120}$  com 90% de confiança). Já o modelo  $CMF_{\omega\rho,\omega^4}$  inclui mecanismos para restauração da simetria quiral, e o subíndice  $\omega^4$  se refere a uma interação vetorial que permite a reprodução de estrelas com massas  $M > 2 M_{\text{Sun}}$

<sup>5</sup>Mudamos a notação para massas solares de  $M_{\odot}$  para  $M_{\text{Sun}}$ , seguindo o utilizado no artigo.

incluindo os graus de liberdade dos híperons. A equação de estado de ambos os modelos hadrônicos estão disponíveis no repositório CompOSE (TYPEL; OERTEL; KLÄHN, 2015; OERTEL et al., 2017; TYPEL et al., 2022).

Apresentamos na figura 18 o diagrama massa-raio obtido via solução da equação de TOV para a crosta do modelo NL3 <sub>$\omega\rho$</sub> . Analisamos os casos  $a/f_a = 0$  e  $a/f_a = \pi$ , isto é, na ausência dos efeitos do áxion e também em sua máxima contribuição. Para o acoplamento vetorial, adotamos os valores  $G_V = 0$ ,  $G_V = 0,2G_s$  e  $G_V = 0,4G_s$ . As regiões sombreadas (TAN et al., 2022) correspondem aos dados observacionais de LIGO/Virgo e NICER, conforme comentamos na introdução. A estabilidade das estrelas é garantida até que, partindo de baixas densidades (canto inferior direito), a curva da massa atinja um extremo e passe a fazer um movimento no sentido anti-horário. Percebemos então que somente através de um valor esperado de  $a/f_a \neq 0$  reproduzimos estrelas híbridas estáveis. O aumento do acoplamento vetorial  $G_V$  permite que essas estrelas suportem massas maiores. Com  $a/f_a = \pi$ , encontramos ramos estáveis de massas  $M > 2 M_{\text{Sun}}$  após a transição para a matéria de quarks nos casos  $G_V = 0,2G_s$  e  $G_V = 0,4G_s$ . Mas devemos tomar cuidado, pois um aumento muito grande em  $G_V$  pode remover as regiões de estabilidade.

Figura 18 – Diagrama massa-raio para estrelas de nêutrons híbridas, utilizando a crosta NL3 <sub>$\omega\rho$</sub> , para diferentes valores do acoplamento vetorial  $G_V$  e campo redimensionado do áxion  $a/f_a$ .

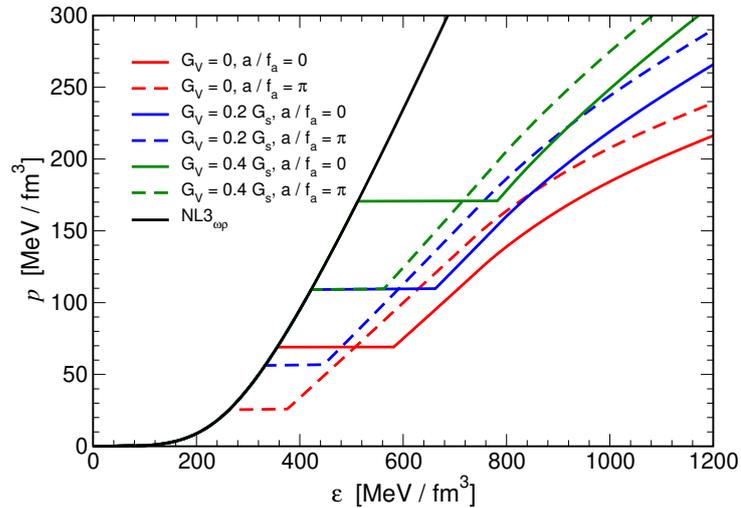


Fonte: Próprio autor. Regiões sombreadas obtidas de restrições observacionais conforme dados de LIGO/Virgo (marrom e cinza) e NICER (diferentes tons de verde) (TAN et al., 2022).

A causa desses efeitos pode ser compreendida examinando a equação de estado. Na figura 19 e para uma razão  $a/f_a$  fixa, percebemos que a transição da crosta hadrônica (curva preta) para a matéria de quarks acontece em densidades de energia maiores com o aumento do acoplamento vetorial. Além disso, o salto no valor de  $\epsilon$  também aumenta, indicando o fortalecimento da transição de primeira ordem. Agora considerando um acoplamento  $G_V$  fixo, percebe-se que o acréscimo na razão  $a/f_a$  tem efeito contrário, enfraquecendo a transição e a trazendo para densidades de energia menores. É conhe-

cido que essas características auxiliam na manutenção da estabilidade de estrelas híbridas (ALFORD; HAN; PRAKASH, 2013).

Figura 19 – Equação de estado das estrelas híbridas com a crosta NL3 $_{\omega\rho}$ , para diferentes valores de  $a/f_a$  e acoplamento vetorial  $G_V$ .



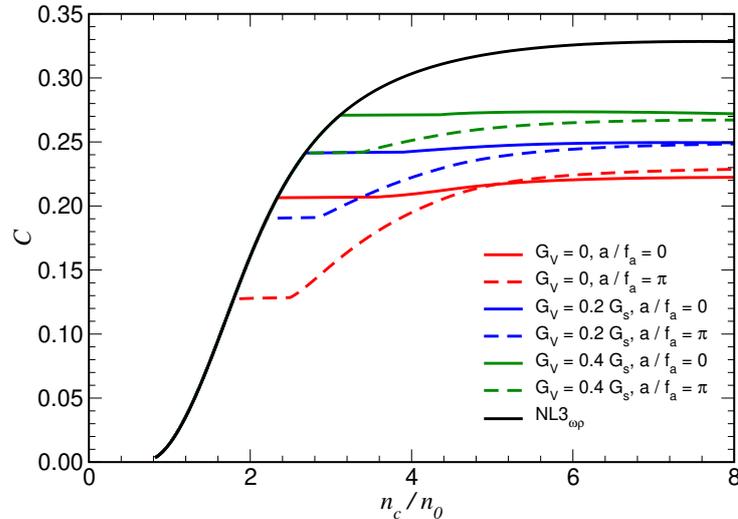
Fonte: Próprio autor.

Na figura 20, apresentamos a compactidade (*compactness*)  $C = M/R$  em função da densidade de número central normalizada  $n_c/n_0$ . Especificamente para essa quantidade, utilizamos o sistema de unidades gravitacionais  $G = c = 1$ . Como diz o próprio nome,  $C$  é uma medida do quão compacta/densa é a estrela descrita. Vemos que os valores de  $C$  aumentam com  $G_V$  dada uma razão  $a/f_a$  fixa. Já com o acoplamento vetorial fixado, percebe-se que a compactidade diminui com o aumento de  $a/f_a$  em baixas densidades. O comportamento se inverte no regime de densidades centrais mais altas, especialmente visível no caso de  $G_V = 0$  por questões da escala adotada.

Para finalizar o estudo com a crosta de hádrons do modelo NL3 $_{\omega\rho}$ , verificamos o comportamento do quadrado da velocidade do som  $c_s^2 = dp/d\varepsilon$  como função da densidade bariônica normalizada  $n_B/n_0$ . Havíamos mencionado brevemente como a magnitude de  $c_s^2$  pode ser considerada uma medida da dureza da EOS. Então, enquanto o aumento do acoplamento vetorial  $G_V$  torna a EOS mais dura, a mudança na razão  $a/f_a$  não altera a velocidade do som longe da transição. Entretanto, o efeito é visível durante a transição, quando  $c_s^2$  vai a zero (afinal  $c_s^2$  é a derivada da equação de estado). O comportamento de queda durante a fase de quarks, por volta de  $n_B = 3,6 \sim 4,4 n_0$ , corresponde ao momento em que o quark estranho passa a popular o sistema.

Partimos agora para a crosta hadrônica dada pelo modelo CMF $_{\omega\rho,\omega^4}$ . Na figura 22 apresentamos o diagrama massa-raio no painel (a), equação de estado no painel (b), compactidade por  $n_c/n_0$  no painel (c) e velocidade do som por  $n_B/n_0$  no painel (d). Comparando o perfil de  $c_s^2$  com o do modelo anterior, percebe-se que as equações de estado tem comportamentos consideravelmente diferentes. Aqui, precisamos adotar valores mais

Figura 20 – Compacidade por densidade de número central normalizada utilizando a crosta NL3 $_{\omega\rho}$ , para diferentes valores de  $a/f_a$  e  $G_V$ .

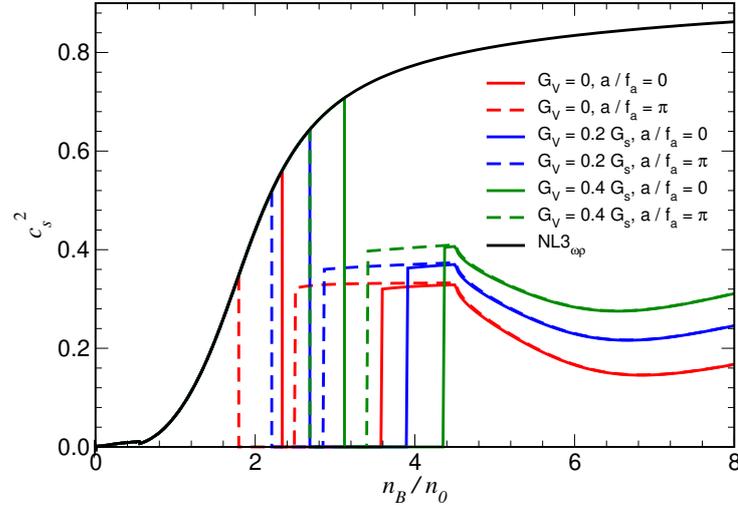


Fonte: Próprio autor.

baixos de  $G_V$  para que haja ramos de estrelas híbridas estáveis. As transições entre as fases hadrônica e a matéria de quarks acontecem para densidades de energia maiores e são menos intensas (os saltos em  $\epsilon$  são menores). Mesmo assim, as conclusões gerais permanecem válidas. Ainda reproduzimos estrelas híbridas estáveis com massas  $M > 2 M_{\text{Sun}}$  considerando a contribuição do áxion via razão  $a/f_a = \pi$  para  $G_V = 0, 1G_s$  e  $G_V = 0, 15G_s$ , apesar do núcleo de quarks ser um pouco menor. Como antes, os objetos descritos com  $a/f_a = 0$  ainda se tornam instáveis após a transição.

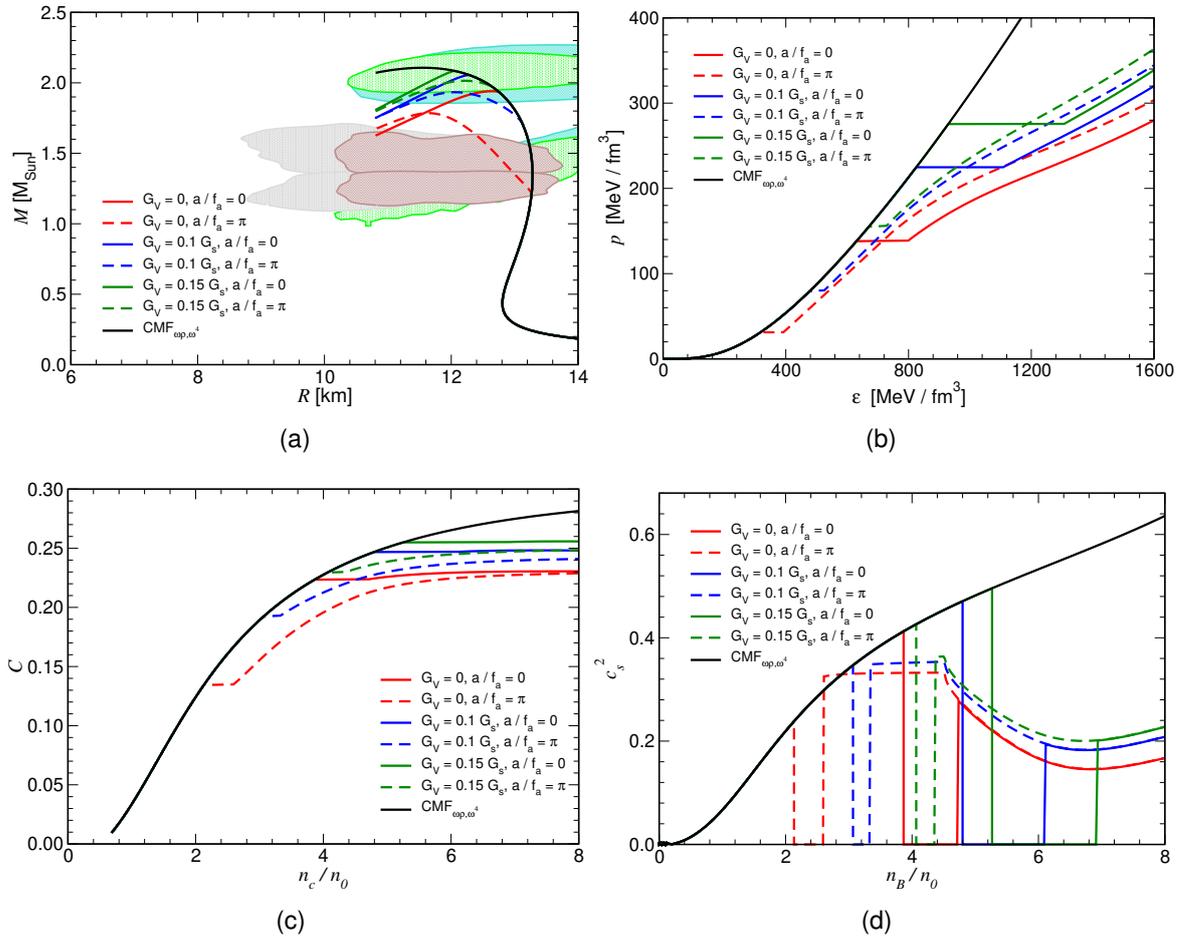
Por fim, entendemos que as equações de estado híbridas, tanto com os modelos hadrônicos NL3 $_{\omega\rho}$  quanto CMF $_{\omega\rho,\omega^4}$ , satisfazem as restrições observacionais de LIGO/Virgo e NICER em um certo regime de parâmetros. As regiões de menor massa (correspondentes ao evento GW170817 e ao pulsar J0030+0451) são satisfeitas tanto por estrelas puramente hadrônicas quanto por híbridas com  $G_V = 0$  no regime  $a/f_a \neq 0$ , mas como as últimas não atingem  $2 M_{\text{Sun}}$ , concluímos que estas são provavelmente estrelas de hádrons. Já as regiões de massas mais altas são satisfeitas tanto por estrelas puramente hadrônicas quanto por híbridas nos regimes de  $G_V \neq 0$  e  $a/f_a \neq 0$ , consequência da incerteza considerável nos valores de raio que as observações atuais compreendem.

Figura 21 – Velocidade do som por densidade bariônica normalizada utilizando a crosta NL3 $_{\omega\rho}$ , para diferentes valores de  $a/f_a$  e  $G_V$ .



Fonte: Próprio autor.

Figura 22 – Resultados usando o modelo CMF $_{\omega\rho,\omega^4}$  para a crosta de hádrons: diagrama massa-raio no painel (a), equação de estado no painel (b), compactidade por densidade de número central normalizada no painel (c) e velocidade do som  $c_s^2$  por densidade bariônica normalizada no painel (d).



Fonte: Próprio autor. Regiões sombreadas obtidas de restrições observacionais conforme dados de LIGO/Virgo (marrom e cinza) e NICER (diferentes tons de verde) (TAN et al., 2022).

## 4 CONCLUSÃO

Ao longo deste trabalho revisamos alguns dos temas atualmente relevantes no estudo do diagrama de fases da cromodinâmica quântica. Buscamos compreender as principais propriedades da teoria, como o confinamento, liberdade assintótica e simetria quiral. Mencionamos a necessidade de uma abordagem não-perturbativa, justificando a utilidade dos modelos efetivos devido ao seu tratamento simplificado e especialmente devido ao problema de sinal, que impossibilita cálculos de rede no regime de densidade finita. Ainda se espera que em um futuro próximo os experimentos do NICA e FAIR possam verificar a validade das previsões obtidas através de modelos teóricos, indicando se há ou não a necessidade de inclusão de novos ingredientes para uma descrição correta do diagrama de fases. Adotamos o modelo de Nambu-Jona-Lasinio e adicionamos a contribuição do áxion da QCD - o pseudo bóson de Goldstone decorrente da solução do problema CP forte através do mecanismo de Peccei-Quinn. Sua inclusão se dá via determinante de 't Hooft, uma vez que envolve uma rotação quiral dos campos fermiônicos. Mencionamos também a possibilidade do áxion descrever a matéria escura fria, por ser uma partícula extremamente leve e que acopla fracamente com a matéria bariônica. Sua participação na termodinâmica pode envolver efeitos como a condensação de Bose-Einstein e evolução térmica da estrelas compactas.

Nesse sentido, propusemos inicialmente o estudo do modelo NJL de dois sabores em um meio quente e magnetizado, com contribuição do áxion. Verificamos os fenômenos da catálise magnética e catálise magnética inversa, incluída através de um acoplamento dependente do meio. Nos resultados, pudemos verificar os mecanismos de restauração e quebra espontânea das simetrias quiral e de carga-paridade. Também calculamos quantidades como a susceptibilidade topológica, a massa e o acoplamento relacionados ao áxion.

Com as bases do estudo anterior, introduzimos o modelo NJL de três sabores em densidade finita e com a contribuição do áxion. Pelo objetivo final de aplicação no contexto de estrelas de nêutrons híbridas - formadas por uma crosta de hádrons e um núcleo de quarks desconfinados - precisamos incluir as condições de neutralidade de carga e equilíbrio beta. Vimos que como consequência a massa efetiva dos quarks leves não é mais a mesma, devido às diferenças nos potenciais químicos. Também constatamos que a matéria puramente de quarks no modelo NJL não descreve sistemas estáveis, por possuir um mínimo na energia por bárion maior que o do núcleo de Ferro. Assim, justificou-se a importância da inclusão das crostas para tratar a região de baixas densidades. Utilizando dois modelos para a equação de estado hadrônica, obtivemos o diagrama massa-raio de estrelas híbridas através da solução da equação de Tolman-Oppenheimer-Volkoff. Também apresentamos a EOS, a compactidade e o perfil da velocidade do som desses objetos.

Analisando as restrições experimentais trazidas por LIGO/Virgo e NICER, observamos que os objetos nas regiões de menor massa - correspondentes ao evento GW170817 e pulsar PSR J0030+0451 - são provavelmente estrelas puramente hadrônicas, uma vez que a EOS híbrida nesse regime não descreve as regiões de massas maiores. Porém, como resultado principal, verificamos que através de uma razão  $a/f_a \neq 0$  para o campo do áxion podemos obter estrelas híbridas estáveis mesmo para as massas mais altas ( $\sim 2 M_{\text{Sun}}$ ), através de um acoplamento vetorial  $G_V \neq 0$ , satisfazendo a região experimental correspondente ao pulsar PSR J0740+6620.

De modo geral, consideramos que o trabalho realizado esclarece conceitos importantes na física da interação forte. Como perspectivas futuras, pretendemos investigar efeitos além da aproximação de campo médio aqui utilizada e também os efeitos de uma assimetria de isospin no modelo NJL estendido com o loop de Polyakov, simulando o papel do confinamento de cor.

## REFERÊNCIAS

ABBOTT, B. P. et al. GW170817: Observation of Gravitational Waves from a Binary Neutron Star Inspiral. **Phys. Rev. Lett.**, v. 119, n. 16, p. 161101, 2017.

\_\_\_\_\_. GW170817: Measurements of neutron star radii and equation of state. **Phys. Rev. Lett.**, v. 121, n. 16, p. 161101, 2018.

ABBOTT, L. F.; SIKIVIE, P. A Cosmological Bound on the Invisible Axion. **Phys. Lett. B**, v. 120, p. 133–136, 1983.

ABBOTT, R. et al. GW190814: Gravitational Waves from the Coalescence of a 23 Solar Mass Black Hole with a 2.6 Solar Mass Compact Object. **Astrophys. J. Lett.**, v. 896, n. 2, p. L44, 2020.

ALFORD, M. G.; HAN, S.; PRAKASH, M. Generic conditions for stable hybrid stars. **Phys. Rev. D**, v. 88, n. 8, p. 083013, 2013.

ALLTON, C. R. et al. Thermodynamics of two flavor QCD to sixth order in quark chemical potential. **Phys. Rev. D**, v. 71, p. 054508, 2005.

ASAKAWA, M.; KITAZAWA, M. Fluctuations of conserved charges in relativistic heavy ion collisions: An introduction. **Prog. Part. Nucl. Phys.**, v. 90, p. 299–342, 2016.

ASAKAWA, M.; YAZAKI, K. Chiral Restoration at Finite Density and Temperature. **Nucl. Phys. A**, v. 504, p. 668–684, 1989.

AVANCINI, S. S. et al. Anisotropy in the equation of state of strongly magnetized quark matter within the Nambu–Jona-Lasinio model. **Phys. Rev. C**, v. 97, n. 3, p. 035207, 2018.

\_\_\_\_\_.  $\pi_0$  pole mass calculation in a strong magnetic field and lattice constraints. **Phys. Lett. B**, v. 767, p. 247–252, 2017.

BALI, G. S. et al. QCD quark condensate in external magnetic fields. **Phys. Rev. D**, v. 86, p. 071502, 2012.

\_\_\_\_\_. The QCD phase diagram for external magnetic fields. **JHEP**, v. 02, p. 044, 2012.

BALUNI, V. CP Violating Effects in QCD. **Phys. Rev. D**, v. 19, p. 2227–2230, 1979.

BANDYOPADHYAY, A.; FARIAS, R. L. S. Inverse magnetic catalysis: how much do we know about? **Eur. Phys. J. ST**, v. 230, n. 3, p. 719–728, 2021.

BANDYOPADHYAY, A. et al. Quantum chromodynamics axion in a hot and magnetized medium. **Phys. Rev. D**, v. 100, n. 7, p. 076021, 2019.

BAYM, G. et al. From hadrons to quarks in neutron stars: a review. **Rept. Prog. Phys.**, v. 81, n. 5, p. 056902, 2018.

BELLAC, M. L. **Thermal Field Theory**. [S.l.]: Cambridge University Press, 2011. (Cambridge Monographs on Mathematical Physics). ISBN 978-0-511-88506-8, 978-0-521-65477-7.

BHATTACHARYA, T. et al. Neutron Electric Dipole Moment and Tensor Charges from Lattice QCD. **Phys. Rev. Lett.**, v. 115, n. 21, p. 212002, 2015.

BOER, D.; BOOMSMA, J. K. Spontaneous CP-violation in the strong interaction at  $\theta = \pi$ . **Phys. Rev. D**, v. 78, p. 054027, 2008.

BORSANYI, S. et al. Calculation of the axion mass based on high-temperature lattice quantum chromodynamics. **Nature**, v. 539, n. 7627, p. 69–71, 2016.

BUBALLA, M. The Problem of matter stability in the Nambu-Jona-Lasinio model. **Nucl. Phys. A**, v. 611, p. 393–408, 1996.

\_\_\_\_\_. NJL model analysis of quark matter at large density. **Phys. Rept.**, v. 407, p. 205–376, 2005.

CHADHA-DAY, F.; ELLIS, J.; MARSH, D. J. E. Axion dark matter: What is it and why now? **Sci. Adv.**, v. 8, n. 8, p. abj3618, 2022.

CHATTERJEE, B.; MISHRA, H.; MISHRA, A. Strong CP violation and chiral symmetry breaking in hot and dense quark matter. **Phys. Rev. D**, v. 85, p. 114008, 2012.

CLEVINGER, A. et al. Hybrid equations of state for neutron stars with hyperons and deltas. **Eur. Phys. J. A**, v. 58, n. 5, p. 96, 2022.

COLLINS, J. C.; PERRY, M. J. Superdense Matter: Neutrons Or Asymptotically Free Quarks? **Phys. Rev. Lett.**, v. 34, p. 1353, 1975.

CORTONA, G. Grilli di et al. The QCD axion, precisely. **JHEP**, v. 01, p. 034, 2016.

COSTA, P. F. Simões. **Restauração de simetrias quirais em meios quentes e densos e suas manifestações em propriedades mesônicas**. 2005. Tese (Doutorado) — Coimbra U., 2005.

CREWETHER, R. J. et al. Chiral Estimate of the Electric Dipole Moment of the Neutron in Quantum Chromodynamics. **Phys. Lett. B**, v. 88, p. 123, 1979. [Erratum: Phys.Lett.B 91, 487 (1980)].

DASHEN, R. F. Some features of chiral symmetry breaking. **Phys. Rev. D**, v. 3, p. 1879–1889, 1971.

DEXHEIMER, V.; SCHRAMM, S. Proto-Neutron and Neutron Stars in a Chiral SU(3) Model. **Astrophys. J.**, v. 683, p. 943–948, 2008.

DINE, M.; FISCHLER, W. The Not So Harmless Axion. **Phys. Lett. B**, v. 120, p. 137–141, 1983.

DUARTE, D. C. **Estrutura de fases da matéria de quarks quente, densa e magnetizada no modelo de Nambu-Jona-Lasinio**. 2018. Tese (Doutorado) — Universidade Federal de Santa Maria, 2018.

EBERT, D. et al. Magnetic oscillations in dense cold quark matter with four fermion interactions. **Phys. Rev. D**, v. 61, p. 025005, 2000.

FARIAS, R. L. S. et al. Importance of asymptotic freedom for the pseudocritical temperature in magnetized quark matter. **Phys. Rev. C**, v. 90, n. 2, p. 025203, 2014.

\_\_\_\_\_. Thermo-magnetic effects in quark matter: Nambu–Jona-Lasinio model constrained by lattice QCD. **Eur. Phys. J. A**, v. 53, n. 5, p. 101, 2017.

FORCRAND, P. de. Simulating QCD at finite density. **PoS**, LAT2009, p. 010, 2009.

FRANK, M.; BUBALLA, M.; OERTEL, M. Flavor mixing effects on the QCD phase diagram at nonvanishing isospin chemical potential: One or two phase transitions? **Phys. Lett. B**, v. 562, p. 221–226, 2003.

FRITZSCH, H.; GELL-MANN, M.; LEUTWYLER, H. Advantages of the Color Octet Gluon Picture. **Phys. Lett. B**, v. 47, p. 365–368, 1973.

FUKUSHIMA, K.; OHNISHI, K.; OHTA, K. Topological susceptibility at zero and finite temperature in the Nambu-Jona-Lasinio model. **Phys. Rev. C**, v. 63, p. 045203, 2001.

GROSS, D. J.; WILCZEK, F. Ultraviolet Behavior of Nonabelian Gauge Theories. **Phys. Rev. Lett.**, v. 30, p. 1343–1346, 1973.

GUO, F. K. et al. The electric dipole moment of the neutron from 2+1 flavor lattice QCD. **Phys. Rev. Lett.**, v. 115, n. 6, p. 062001, 2015.

GUSYNIN, V. P.; MIRANSKY, V. A.; SHOVKOVY, I. A. Dimensional reduction and catalysis of dynamical symmetry breaking by a magnetic field. **Nucl. Phys. B**, v. 462, p. 249–290, 1996.

HARRIS, S. P. et al. Axions in neutron star mergers. **JCAP**, v. 07, p. 023, 2020.

HATSUDA, T.; KUNIHITO, T. QCD phenomenology based on a chiral effective Lagrangian. **Phys. Rept.**, v. 247, p. 221–367, 1994.

HOOFT, G. 't. Computation of the Quantum Effects Due to a Four-Dimensional Pseudoparticle. **Phys. Rev. D**, v. 14, p. 3432–3450, 1976. [Erratum: Phys.Rev.D 18, 2199 (1978)].

\_\_\_\_\_. Symmetry Breaking Through Bell-Jackiw Anomalies. **Phys. Rev. Lett.**, v. 37, p. 8–11, 1976.

\_\_\_\_\_. How Instantons Solve the U(1) Problem. **Phys. Rept.**, v. 142, p. 357–387, 1986.

HOROWITZ, C. J.; PIEKAREWICZ, J. Neutron star structure and the neutron radius of Pb-208. **Phys. Rev. Lett.**, v. 86, p. 5647, 2001.

\_\_\_\_\_. The Neutron radii of Pb-208 and neutron stars. **Phys. Rev. C**, v. 64, p. 062802, 2001.

JAYASINGHE, T. et al. A unicorn in monoceros: the  $3M_{\odot}$  dark companion to the bright, nearby red giant V723 Mon is a non-interacting, mass-gap black hole candidate. **Mon. Not. Roy. Astron. Soc.**, v. 504, n. 2, p. 2577–2602, 2021.

KARKEVANDI, D. R. et al. Bosonic dark matter in neutron stars and its effect on gravitational wave signal. **Phys. Rev. D**, v. 105, n. 2, p. 023001, 2022.

KAWARABAYASHI, K.; OHTA, N. On the Partial Conservation of the U(1) Current. **Prog. Theor. Phys.**, v. 66, p. 1789, 1981.

KLEVANSKY, S. P. The Nambu-Jona-Lasinio model of quantum chromodynamics. **Rev. Mod. Phys.**, v. 64, p. 649–708, 1992.

KOBAYASHI, M.; MASKAWA, T. Chiral symmetry and eta-x mixing. **Prog. Theor. Phys.**, v. 44, p. 1422–1424, 1970.

LALAZISSIS, G. A.; KONIG, J.; RING, P. A New parametrization for the Lagrangian density of relativistic mean field theory. **Phys. Rev. C**, v. 55, p. 540–543, 1997.

LATTIMER, J. M.; PRAKASH, M. Neutron star structure and the equation of state. **Astrophys. J.**, v. 550, p. 426, 2001.

LOPES, B. S. et al. Axion effects in the stability of hybrid stars. **Phys. Rev. D**, v. 106, n. 12, p. L121301, 2022.

LU, Z.-Y.; RUGGIERI, M. Effect of the chiral phase transition on axion mass and self-coupling. **Phys. Rev. D**, v. 100, n. 1, p. 014013, 2019.

MCLERRAN, L.; PISARSKI, R. D. Phases of cold, dense quarks at large  $N(c)$ . **Nucl. Phys. A**, v. 796, p. 83–100, 2007.

MCLERRAN, L.; REDLICH, K.; SASAKI, C. Quarkyonic Matter and Chiral Symmetry Breaking. **Nucl. Phys. A**, v. 824, p. 86–100, 2009.

MENEZES, D. P. et al. Quark matter under strong magnetic fields in the Nambu-Jona-Lasinio Model. **Phys. Rev. C**, v. 79, p. 035807, 2009.

\_\_\_\_\_. Repulsive Vector Interaction in Three Flavor Magnetized Quark and Stellar Matter. **Phys. Rev. C**, v. 89, n. 5, p. 055207, 2014.

MILLER, M. C. et al. PSR J0030+0451 Mass and Radius from *NICER* Data and Implications for the Properties of Neutron Star Matter. **Astrophys. J. Lett.**, v. 887, n. 1, p. L24, 2019.

\_\_\_\_\_. The Radius of PSR J0740+6620 from *NICER* and *XMM-Newton* Data. **Astrophys. J. Lett.**, v. 918, n. 2, p. L28, 2021.

NAMBU, Y.; JONA-LASINIO, G. Dynamical Model of Elementary Particles Based on an Analogy with Superconductivity. I. **Phys. Rev.**, v. 122, p. 345–358, 1961.

\_\_\_\_\_. Dynamical model of elementary particles based on an analogy with superconductivity. II. **Phys. Rev.**, v. 124, p. 246–254, 1961.

OERTEL, M. et al. Equations of state for supernovae and compact stars. **Rev. Mod. Phys.**, v. 89, n. 1, p. 015007, 2017.

OPPENHEIMER, J. R.; VOLKOFF, G. M. On massive neutron cores. **Phys. Rev.**, v. 55, p. 374–381, 1939.

PECCEI, R. D. The Strong CP problem and axions. **Lect. Notes Phys.**, v. 741, p. 3–17, 2008.

PECCEI, R. D.; QUINN, H. R. CP Conservation in the Presence of Instantons. **Phys. Rev. Lett.**, v. 38, p. 1440–1443, 1977.

PENDLEBURY, J. M. et al. Revised experimental upper limit on the electric dipole moment of the neutron. **Phys. Rev. D**, v. 92, n. 9, p. 092003, 2015.

PESKIN, M. E.; SCHROEDER, D. V. **An Introduction to quantum field theory**. Reading, USA: Addison-Wesley, 1995. ISBN 978-0-201-50397-5.

POLITZER, H. D. Reliable Perturbative Results for Strong Interactions? **Phys. Rev. Lett.**, v. 30, p. 1346–1349, 1973.

PRESKILL, J.; WISE, M. B.; WILCZEK, F. Cosmology of the Invisible Axion. **Phys. Lett. B**, v. 120, p. 127–132, 1983.

RILEY, T. E. et al. A *NICER* View of PSR J0030+0451: Millisecond Pulsar Parameter Estimation. **Astrophys. J. Lett.**, v. 887, n. 1, p. L21, 2019.

\_\_\_\_\_. A *NICER* View of the Massive Pulsar PSR J0740+6620 Informed by Radio Timing and XMM-Newton Spectroscopy. **Astrophys. J. Lett.**, v. 918, n. 2, p. L27, 2021.

SIKIVIE, P.; YANG, Q. Bose-Einstein Condensation of Dark Matter Axions. **Phys. Rev. Lett.**, v. 103, p. 111301, 2009.

TAN, H. et al. Extreme matter meets extreme gravity: Ultraheavy neutron stars with phase transitions. **Phys. Rev. D**, v. 105, n. 2, p. 023018, 2022.

TOLMAN, R. C. Static solutions of Einstein's field equations for spheres of fluid. **Phys. Rev.**, v. 55, p. 364–373, 1939.

TYPEL, S.; OERTEL, M.; KLÄHN, T. CompOSE CompStar online supernova equations of state harmonising the concert of nuclear physics and astrophysics [compose.obspm.fr](http://compose.obspm.fr). **Phys. Part. Nucl.**, v. 46, n. 4, p. 633–664, 2015.

TYPEL, S. et al. CompOSE Reference Manual. **Eur. Phys. J. A**, v. 58, n. 11, p. 221, 2022.

UKAWA, A. Kenneth Wilson and lattice QCD. **J. Statist. Phys.**, v. 160, p. 1081, 2015.

VAFA, C.; WITTEN, E. Parity Conservation in QCD. **Phys. Rev. Lett.**, v. 53, p. 535, 1984.

WEINBERG, S. Nonabelian Gauge Theories of the Strong Interactions. **Phys. Rev. Lett.**, v. 31, p. 494–497, 1973.

\_\_\_\_\_. A New Light Boson? **Phys. Rev. Lett.**, v. 40, p. 223–226, 1978.

WILCZEK, F. Problem of Strong  $P$  and  $T$  Invariance in the Presence of Instantons. **Phys. Rev. Lett.**, v. 40, p. 279–282, 1978.

WILSON, K. G. Confinement of Quarks. **Phys. Rev. D**, v. 10, p. 2445–2459, 1974.

WITTEN, E. Cosmic Separation of Phases. **Phys. Rev. D**, v. 30, p. 272–285, 1984.

ZACCHI, A.; HANAUSKE, M.; SCHAFFNER-BIELICH, J. Stable hybrid stars within a SU(3) Quark-Meson-Model. **Phys. Rev. D**, v. 93, n. 6, p. 065011, 2016.

## APÊNDICE A – UNIDADES, NOTAÇÃO DE VETORES E MATRIZES DE DIRAC

Ao longo do trabalho, seguimos a notação de Peskin e Schroeder (1995). Utilizamos o sistema de unidades naturais  $\hbar = c = k_B = 1$ , sendo  $\hbar$  a constante reduzida de Planck,  $c$  a velocidade da luz no vácuo e  $k_B$  a constante de Boltzmann. O tensor métrico de Minkowski é dado por

$$g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.1})$$

Também utilizamos a convenção de soma de Einstein e a notação *slash* de Feynman. Sendo  $a^\mu = (a^0, \vec{a})$  um quadrivetor arbitrário, tem-se

$$\begin{aligned} a^\mu b_\mu &= g_{\mu\nu} a^\mu b^\nu = a^0 b^0 - \vec{a} \cdot \vec{b}, \\ p_\mu \gamma^\mu &= \not{p}. \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

As matrizes de Dirac são caracterizadas pelas relações de anti-comutação

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}. \quad (\text{A.3})$$

Adotando a representação dada pela base de Weyl (ou base quirial), sendo cada entrada um bloco  $2 \times 2$ , as matrizes gama tomam a forma (com  $k = 1, 2, 3$ )

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^k = \begin{pmatrix} 0 & \tau^k \\ -\tau^k & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.4})$$

$$\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \begin{pmatrix} -I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}, \quad (\text{A.5})$$

sendo  $\tau^k$  as matrizes de Pauli

$$\tau^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.6})$$