UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA MARIA
CENTRO DE CIÊNCIAS SOCIAIS E HUMANAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ADMINISTRAÇÃO
DOUTORADO EM ADMINISTRAÇÃO

RISCO DO DESVIO DA PERDA: UMA ALTERNATIVA À MENSURAÇÃO DO RISCO

TESE DE DOUTORADO

Marcelo Brutti Righi

Santa Maria, RS, Brasil

2015

RISCO DO DESVIO DA PERDA: UMA ALTERNATIVA À MENSURAÇÃO DO RISCO

Marcelo Brutti Righi

Tese apresentado ao Programa de Pós-Graduação em Administração da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM, RS), como requisito parcial para obtenção do grau de
Doutor em Administração.

Orientador: Prof. Dr. Paulo Sergio Ceretta

Santa Maria, RS, Brasil

2015

Universidade Federal de Santa Maria
Centro de Ciências Sociais e Humanas
Programa de pós-graduação em administração
Doutorado em administração

A Comissão Examinadora, abaixo assinada,
aprova a Tese de Doutorado

RISCO DO DESVIO DA PERDA: UMA ALTERNATIVA À MENSURAÇÃO DO RISCO

elaborado por
Marcelo Brutti Righi

como requisito parcial para obtenção do grau de
Doutor em Administração

COMISSÃO EXAMINADORA:

Paulo Sergio Ceretta, Dr. (UFSM)
(Presidente/Orientador)

Igor Bernardi Sonza, Dr. (UFSM)

Kelmara Mendes Vieira, Dra. (UFSM)

Luis Felipe Dias Lopes, Dr. (UFSM)

Marcelo Scherer Perlin, Dr. (UFRGS)

Santa Maria, Julho de 2015.

RESUMO

Tese de Doutorado
Programa de Pós-Graduação em Administração
Universidade Federal de Santa Maria

RISCO DO DESVIO DA PERDA: UMA ALTERNATIVA À MENSURAÇÃO DO RISCO

AUTOR: MARCELO BRUTTI RIGHI
ORIENTADOR: PAULO SERGIO CERETTA
Data e Local da Defesa: Santa Maria, Julho de 2015.

Esse trabalho apresenta o Risco do Desvio da Perda (*Shortfall Deviation Risk* – SDR), uma medida de risco que representa a perda esperada de resultados que ocorrem com determinada probabilidade penalizada pela dispersão de resultados piores que essa expectativa. O SDR combina a Perda Esperada (*Expected Shortfall* – ES) com o Desvio da Perda (*Shortfall Deviation* – SD), introduzido nesse trabalho, de modo a contemplar os dois pilares fundamentais do conceito de risco, que são a possibilidade de eventos ruins (ES) e a variabilidade sobre uma expectativa (SD), além de levar em conta resultados extremos. Neste estudo é demonstrado que o SD é uma medida de desvio generalizado, ao passo que o SDR é uma medida de risco coerente. A representação dual do SDR é obtida, e questões como sua representação por meio de uma ponderação da ES, conjuntos de aceitação, convexidade, continuidade e relação com dominância estocástica são discutidas. Ilustrações com simulação Monte Carlo e dados reais indicam que o SDR oferece maior proteção na mensuração do risco que outras medidas, especialmente em momentos de turbulência.

Palavras-Chave: Risco do Desvio da Perda, Gestão de Risco, Medidas de Risco, Medidas Coerentes de Risco, Medidas de Desvio Generalizado.

ABSTRACT

Doctorate Thesis
Graduate Program in Business
Federal University of Santa Maria

SHORTFALL DEVIATION RISK: AN ALTERNATIVE TO RISK MEASUREMENT

AUTHOR: MARCELO BRUTTI RIGHI
ADVISER: PAULO SERGIO CERETTA
Defense Place and Date: Santa Maria, July 2015.

We present the Shortfall Deviation Risk (SDR), a risk measure that represents the expected loss of results that occur with certain probability penalized by the dispersion of results worse than such expectation. The SDR combines the Expected Shortfall (ES) and the Shortfall Deviation (SD), which we also introduce, contemplating the two fundamental pillars of the risk concept—the probability of adverse events (ES) and the variability of an expectation (SD)—and considers extreme results. We demonstrate that the SD is a generalized deviation measure, whereas the SDR is a coherent risk measure. We achieve the dual representation of the SDR, and we discuss issues such as its representation by a weighted ES, acceptance sets, convexity, continuity and the relationship with stochastic dominance. Illustrations using Monte Carlo simulation and real data indicate that the SDR offers greater protection to measure risk than other measures, especially in turbulent times.

Key words: Shortfall Deviation Risk, Risk Management, Risk Measures, Coherent Risk Measures, Generalized Deviation Measures.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Risco está entre os conceitos financeiros mais importantes, talvez o principal pela influência que tem sobre os demais. Toda vez que uma turbulência financeira ocorre, tal como crises e colapsos no sistema financeiro, o foco na gestão de risco aumenta. Um aspecto fundamental de uma correta gestão de risco é a mensuração, especialmente a previsão de medidas de risco. A superestimação do risco pode levar um agente a reter capital que poderia ser aplicado em investimentos lucrativos, ao passo que subestimar o risco pode resultar em perdas muito grandes sem o agente estar preparado.

Após o trabalho marcante de Markowitz (1952), o risco de uma posição financeira passou a ser tratado de forma mais científica. Desse ponto se consolidou o uso de medidas de variabilidade, como variância, semi-desvio e desvio padrão para representar o risco. Com a evolução e integração dos mercados financeiros, bem como a ocorrência de eventos críticos, surgiu a necessidade de outro tipo de mensuração, baseado nas perdas maiores e menos prováveis, conhecidas como riscos de cauda. O marco nesse sentido foi o produto comercial *RiskMetrics*, introduzido pela companhia JPMorgan no início da década de 1990, onde a medida de risco é baseada no quantil da distribuição dos resultados, conhecido como o Valor em Risco (*Value at risk* – VaR). De modo menos formal, o VaR representa uma perda que só é superada dado um nível de significância durante certo período. Desde que o VaR foi sancionado pelo comitê da Basileia, que é uma entidade que funciona como conselho de práticas para gestão de risco em instituições financeiras, ele se tornou a medida padrão para risco financeiro. Trabalhos que apresentam o VaR em detalhes incluem Duffie e Pan (1997) e Jorion (2007), por exemplo.

Apesar deste amplo uso prático, havia uma falta de estudos que definissem quais características uma medida de risco desejável precisaria ter. Nesse sentido, surgiu toda uma corrente na literatura que discute, propõe e critica as propriedades teóricas que determinada medida de risco deve cumprir. Visando contornar essas deficiências, emerge a classe de medidas de risco coerentes, introduzidas por Artzner et al. (1999), que apresentam axiomas que uma medida de risco deve atender para que possa ser utilizada. Discussões teóricas sobre medidas de risco começaram a ter espaço na literatura, não se tendo mais análises apenas sob uma perspectiva empírica. Outras classes de medidas de risco surgiram, como as medidas convexas, apresentadas simultanemanete por Föllmer e Schied (2002) e Frittelli e Gianin

(2002), medidas espectrais, propostas por Acerbi (2002), e medidas de desvio generalizado, introduzidas por Rockafellar et al. (2006), para citar as de maior destaque.

Com base nos axiomas de coerência, e de outras classes de medidas de risco, o uso indiscriminado do VaR passou a sofrer fortes críticas, pois esta medida não é convexa, implicando em o risco de uma posição diversificada ser maior que a soma dos riscos individuais. Além disso, o VaR ignora completamente o potencial de resultados além do quantil de interesse, o que pode ser muito perigoso. A esse respeito, uma linha de estudos aborda a questão da falta de coerência do VaR, apresentando alternativas que atendem aos axiomas. O valor esperado de perdas que superam o VaR passou a ser defendido como medida de risco a ser utilizada. Diferentes autores propõem conceitos muito semelhantes sob nomes diferentes na literatura, uma vez que havia uma lacuna a ser preenchida. Acerbi e Tache (2002a) apresentam a Perda Esperada (*Expected Shortfall* – ES), Rockafellar e Uryasev (2002) e Pflug (2000) introduzem o Valor em Risco Condicional (*Conditional Value at Risk* – CVaR), Artzner et al. (1999) argumentam em favor da Expectativa Condicional da Cauda (*Tail Conditional Expectation* – TCE), também chamada de Valor em Risco na Cauda (*Tail Value at Risk* – TVaR) e a Pior Expectativa Condicional (*Worst Conditional Expectation* – WCE), Longin (2001) apresenta o Além do Valor em Risco (*Beyond Value at Risk* – BVaR), Föllmer e Schied (2011) chamam essa medida de Valor em Risco Médio (*Average Value at Risk* – AVaR).

Todos esses trabalhos apontam para vantagens no uso da medida que propõem sobre o VaR. Embora todas essas medidas possuam definições extremamente semelhantes, em finanças a medida de risco coerente que mais tem destaque é a ES. De fato, como mostrado por Acerbi e Tasche (2002a), essas definições levam aos mesmos resultados quando aplicadas a dados com distribuições contínuas. Esses autores mostram que a vantagem da definição da ES é ser coerente independentemente da distribuição subjacente, podendo ser estimada efetivamente mesmo em casos onde estimadores do VaR podem falhar. Corroborando, Acerbi e Tasche (2002b) discutem as propriedades de coerência da ES, além de comparar diversas representações da medida que são mais apropriadas para determinadas propostas. Complementando esta superioridade, Tasche (2002) argumenta que na busca por uma alternativa adequada ao VaR, a ES tem se caracterizado como a mais relevante medida de risco.

Todavia, apesar das vantagens a ES ainda é menos usada que o VaR. Um dos principais fatores para esta diferença na utilização é a ES ser mais complicada de prever, bem como avaliar tais previsões, devido a sua definição matemática um pouco mais complexa. Não obstante, estudos têm sido realizados de modo a comparar VaR e ES, além de outras medidas, encontrando resultados divergentes quanto a vantagem de cada uma. As conclusões são de que, embora o VaR seja falho em muitos casos, a ES possui difícil implementação ou não abrange toda definição de risco, como argumentado em Yamai e Yoshiba (2005), Dowd e Blake (2006) e Guégan e Tarrant (2012), ou mesmo que o VaR não é tão problemático e que usar a ES pode levar a resultados piores, conforme encontrdo por Alexander e Baptista (2004), Dhaene et al. (2008), Wylie et al. (2010), Bamberg e Neuhierl (2010) e Daníelsson et al. (2013).

Pela não existência de consenso sobre qual medida utilizar, existe espaço para a utilização de outras medidas de risco. Algumas outras medidas coerentes surgiram na literatura, como por exemplo o Valor em Risco Ponderado (*Weighted Value at Risk* – WVaR), proposto por Cherny (2006), que é uma versão ponderada de medidas como ES e CVaR. Föllmer e Knispel (2011) apresentam uma versão coerente da medida entrópica, baseada numa função de utilidade exponencial. Outro exemplo é o Valor em Risco Entrópico (*Entropic Value at Risk* – EVaR), proposto por Ahmadi-Javid (2012), que corresponde ao limite superior mais apertado possível obtido por uma inequação entre VaR e CVaR. Jadhav et al. (2013) apresentam a Perda Esperada Modificada (*Modified Expected Shortfall* – MES), que representa o valor esperado de perdas que estão situadas entre o VaR e outro quantil de interesse, sendo sempre menor que a ES. Fischer (2003) considera medidas unilaterais, que são uma combinação entre a média e o semi-desvio em momentos superiores, ao passo que Chen e Wang (2008) consideram medidas bilaterais, que incorporam também semi-desvio de ganhos. Krokhmal (2007) também considera momentos superiores para obter medidas de risco coerentes como soluções de problemas de otimização que levam em conta, de alguma forma, a dispersão das perdas. Já Fölmer e Schied (2002) apresentam o Risco de Perda (*Shortfall Risk* – SR), que é o valor esperado de uma função de perda convexa e crescente. Por sua vez, Belles-Sampera et al. (2014) apresentam o Valor em Risco Colado (*Glue Value at Risk* – GLUEVaR), que é uma combinação entre TVaR para dois quantis diferentes com o VaR de um dos dois quantis. Bellini et al. (2014) defendem o uso dos expectis, pois mostram que são a única representação genérica de funções quantílicas que atendem as propriedades de coerência.

Dada a necessidade de novas medidas, até mesmo abordagens que não garantem a coerência ou fogem dos enfoques tradicionais são propostas. Jarrow (2002) apresenta uma medida baseada no prêmio de opções de venda. Bertsimas et al. (2004) expõe o conceito da diferença entre o valor esperado e a ES. Chen e Yang (2011) introduzem a Perda Esperada Ponderada (*Weighted Expected Shortfall* – WES), uma versão da ES que atribui pesos não lineares diferentes para resultados que representam perdas maiores que o VaR. Belzunce et al. (2012) utilizam a razão entre ES e VaR, chamando de Perda Esperada Proporcional (*Proportional Expected Shortfall* – PES), a fim de ter uma medida universal para riscos de diferentes naturezas. Pensando em extensões para uma dimensão multivariada, Cossette et al. (2013) e Cousin e Di Bernardino (2013) apresentam o VaR ortante superior e inferior, que representam o VaR máximo e mínimo de um conjunto de ativos. Similarmente, Cousin e Di Bernardino (2014) estendem o conceito de VaR ortante superior e inferior para o caso da TCE. De modo um pouco diferente, Prékopa (2012) define o VaR multivariado como um conjunto de quantis de uma distribuição multivariada de probabilidade. Lee e Prékopa (2013) desenvolvem a teoria e metodologia de VaR e CVaR multivariados baseados em adaptações de quantis multivariados. Hamel et al. (2013) apresentam o AVaR multivariado definido em conjuntos, ao invés de um escalar ou mesmo um vetor.

Apesar da proposição de outras medidas de risco para mercados financeiros, elas não obtiveram o mesmo sucesso que o VaR ou a ES, seja por serem um pouco mais complicadas, ou mesmo por estarem demasiadamente relacionadas com a ES. O foco tem sido dado para o valor esperado de perdas. Porém, o conceito de variabilidade, um dos pilares do conceito de risco, é negligenciado nessa definição de medida de risco. O foco central deste trabalho é propor uma medida de risco que inclua o grau de dispersão de uma perda extrema, além de seu valor esperado, na mensuração do risco. Assim como duas posições financeiras com o mesmo retorno esperado podem apresentar variabilidades muito distintas considerando-se todos os dados disponíveis, pode haver também discrepância se apenas os valores extremos forem considerados.

Neste estudo se considera a dispersão mensurada pelo desvio padrão de resultados que representam perdas maiores que a ES. Tal desvio é chamado no presente estudo de Desvio da Perda (*Shortfall Deviation* – SD). Assim, utilizando os conceitos da ES e do SD, este trabalho tem como objetivo principal introduzir uma nova medida de risco, o Risco do Desvio da Perda (*Shortfall Deviation Risk* – SDR), que pode ser entendido como a perda esperada, quando esta perda supera o VaR, penalizada pela dispersão de resultados que representam perdas maiores que essa expectativa. Essa característica é ignorada pela ES e medidas relacionadas, mas o SDR a contempla. Portanto, além de juntar os dois conceitos fundamentais de risco em uma única medida, possibilidade de resultados ruins (ES) e variabilidade sobre um resultado esperado (SD), o SDR leva em conta as caudas, que representam momentos críticos, justamente onde a correta gestão de risco é mais necessária. É possível entender o SDR como sendo uma medida mais completa neste sentido. De fato, o SDR domina a ES no sentido de apresentar valores maiores devido à penalização pela dispersão, podendo funcionar como uma barreira de proteção mais sólida. Com base nessa perspectiva, definições sobre o SDR são discutidas em detalhes e suas propriedades teóricas são provadas. O componente SD se trata de uma medida de desvio generalizado, conforme proposto por Rockafellar et al. (2006), ao passo que a medida proposta SDR é uma medida de risco coerente no sentido de Artzner et al. (1999). Assim, além de concreto senso prático em sua definição, o SDR possui sólidas propriedades teóricas que garantem sua utilização sem violar pressupostos axiomáticos. Uma ilustração com simulaçoes e dados reais apresenta de maneira mais prática os conceitos propostos.

O presente trabalho contribui tanto para a academia como para a indústria financeira porquanto propõe uma nova medida de risco, o SDR. O conceito de dispersão na cauda não é novo, uma vez que a variância, e consequentemente o desvio-padrão, de uma distribuição truncada é um conceito bem estabelecido. Todavia, trabalhos como Wu e Xiao (2002) e Bali et al. (2009) não discutem nenhuma propriedade teórica para dar sustentação a sua utilização. Já Valdez (2005) e Furman e Landsman (2006a) discutem propriedades teóricas da variância na cauda, porém não a encaixam em classes de medidas de risco. Todos esses estudos consideram a variância truncada pelo VaR e não pela ES, de modo a penalizar de forma igual perdas maiores e menores que a ES. Como a ideia é justamente penalizar o risco medido pela ES, considerar a dispersão de resultados que representam perdas maiores que a ES tem mais sentido. Ainda, Wang (1998) apresenta um desvio na cauda que é a diferença entre expectativas distorcida e não distorcida, discutindo suas propriedades. Sordo (2009) considera mais formas de dispersão na cauda, além do desvio-padrão. O presente trabalho avança porquanto apresenta de maneira mais completa as características do componente SD como sendo uma medida de desvio generalizado.

Mais além, Fischer (2003) e Chen e Wang (2008) consideram juntar média e semi-desvios em diferentes potências para formar uma medida de risco coerente. Todavia, a medida SDR é definida para as caudas, enquanto aquelas propostas por esses autores não. Além disso, esses autores consideram semi-desvio, enquanto no presente trabalho o foco é no desvio padrão condicional, que leva a penalizações maiores. Krokhmal (2007) estende o conceito da ES, obtida como solução de problema de otimização, para casos com momentos superiores, mostrando que são medidas de risco coerentes e possuem relação com medidas de desvio generalizado. Contudo, as medidas obtidas pelo método proposto por esse autor não têm um significado financeiro explícito, como é o caso do SDR, de tal modo que não se pode definir de modo intuitivo o conceito por trás do valor obtido. Furman e Landsman (2006a, 2006b) propõem uma medida semelhante ao SDR, que pondera média e dispersão na cauda truncada pelo VaR, discutindo algumas propriedades teóricas. O SDR, porém, considera para penalização perdas maiores que a ES, o que implica em melhores propriedades, como por exemplo que posições com perdas maiores apresentem maior risco, ao contrário da medida apresentada pelos autores. Ainda, o esquema de ponderação da dispersão do SDR é diferente, garantindo maior penalidade pelo desvio em quantis mais extremos. Dessa maneira, a medida SDR se diferencia por ter mais propriedades teóricas, bem como sua classificação como medidas de risco coerentes demonstrada.

O restante deste trabalho, além desta seção inicial que configura uma introdução ao tema, bem como apresentação do objetivo e contribuição, está estruturado da seguinte forma: a seção 2 apresenta a literatura da teoria de medidas de risco em finanças, a fim de oferecer melhor compreensão de determinados temas contidos no restante do trabalho; a seção 3 representa a principal parte do trabalho e sua contribuição, uma vez que é onde se apresenta a medida SDR proposta, bem como provas de suas propriedades teóricas; a seção 4 expõe ilustrações compostas por simulações e dados reais, com o intuito de exemplificar como a medida se comporta em termos práticos e em relação às medidas de risco mais utilizadas na literatura; a seção 5 apresenta as conclusões do estudo, além de defender a aplicação do SDR para diferentes campos em finanças.

1.1 Notação básica

Devido ao caráter técnico do trabalho, é necessário definir alguns termos. A menos que seja explicitado de modo diferente, o conteúdo se baseia na seguinte notação. Considere um mercado de período único, o que significa que existe a data atual 0 e uma data futura T. Nenhuma transação é possível entre 0 e T. Considere o resultado aleatório X de algum ativo ou portfólio, definido em um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ sem átomos (*atomless*), onde Ω é o espaço amostral, $\mathcal{F}$ é o conjunto de eventos possíveis em Ω, e $\mathbb{P}$ é uma medida de probabilidade definida em Ω dos eventos contidos em $\mathcal{F}$. Dessa forma, $E_{\mathbb{P}}[X]$ é o valor esperado de X sob $\mathbb{P}$. Ainda, $\mathcal{P} = \{\mathbb{Q} | \mathbb{Q} \ll \mathbb{P}\}$ é um conjunto não vazio, pois $\mathbb{P} \in \mathcal{P}$, que representa medidas de probabilidade $\mathbb{Q}$ definidas em Ω que são absolutamente contínuas em relação a $\mathbb{P}$. Nesse sentido, $\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}$ é a densidade de $\mathbb{Q}$ relativa a $\mathbb{P}$, conhecida como derivada de Radon-Nikodym. Todas as igualdades e desigualdades são consideradas como quase certas em $\mathbb{P}$, ou $\mathbb{P}$ a.s. (*almost surely* – quase certamente). Tem-se que F_X é a função de probabilidade de X e F_X^{-1} sua inversa. Como $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ não tem átomos, é possível assumir F_X como sendo contínua, e é esta suposição que é feita ao longo do trabalho. Seja $L^p = L^p(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ o espaço de variáveis aleatórias do qual X é um elemento, com $1 \leq p \leq \infty$, definido pela norma $\|X\|_p = (E_{\mathbb{P}}[|X|^p])^{\frac{1}{p}}$ com p finito, e $\|X\|_p = \inf\{k : |X| \leq k\}$ para p infnito. $X \in L^p$ significa que $\|X\|_p < \infty$, ou seja, o módulo de X à potência p é limitado e integrável. Nesse contexto, medir risco é equivalente a estabelecer uma função $\rho : L^p \rightarrow \mathbb{R}$, ou seja resumir em um número o risco da posição X.

2 MEDIDAS DE RISCO

Esta seção visa apresentar de forma abrangente a literatura que dá suporte teórico aos estudos referentes à mensuração de risco em finanças, expondo as distintas classificações de medidas de risco, bem como trabalhos que discutem essas questões de ordem mais teórica. O foco dos trabalhos apresentados é para pesquisas que apresentem contribuição teórica. Estudos que focam em contribuições empíricas, como estimação e aplicações, foram evitados devido à limitação de contribuição que poderiam representar, além da necessidade de se manter o escopo do trabalho. A divisão feita aqui visa contemplar as principais classes de medidas de risco presentes na literatura. Assim, essa seção é subdividida em: i) Medidas de risco coerentes; ii) Medidas de risco convexas; iii) Medidas de risco espectrais e de distorção; iv) Medidas de desvio generalizado; v) Outras classes de medidas de risco. Para cada classe, o foco é na teoria básica e em extensões à essa estrutura fundamental.

2.1 Medidas de risco coerentes

2.1.1 Teoria básica

O primeiro trabalho sobre axiomas de medidas de risco em finanças foi o realizado por Artzner et al. (1999). Neste trabalho seminal, o termo apresentado pelos autores é o de coerência. Segundo esta classificação, uma medida de risco coerente deve satisfazer quatro axiomas. Dessa forma, temos por definição que uma medida de risco coerente, no sentido de Artzner et al. (1999), satisfaz os seguintes axiomas:

Invariância de Translação: $\rho(X + C) = \rho(X) - C, \forall\, X \in L^p, C \in \mathbb{R}$.

Subaditividade: $\rho(X + Y) \leq \rho(X) + \rho(Y), \forall\, X, Y \in L^p$.

Monotonicidade: se $X \leq Y$, então $\rho(X) \geq \rho(Y)$, $\forall\, X, Y \in L^p$.

Homogeneidade Positiva: $\rho(\lambda X) = \lambda\rho(X), \forall\, X \in L^p, \lambda \geq 0$.

O primeiro axioma quer dizer que se for adicionado um ganho certo a uma posição, o risco da mesma deve diminuir nessa exata quantidade. O segundo axioma implica em o risco de uma posição combinada ser menor que a soma dos riscos individuais, seguindo o princípio da diversificação. O terceiro axioma exige que se uma posição tem sempre resultados piores do que outra, então o risco da primeira deve ser maior que o da segunda. O quarto axioma é relacionado ao tamanho da posição, isto é, posições maiores aumentam o risco proporcionalmente, devido a problemas de liquidez e custos de corretagem.

Artzner et al. (1999) ainda consideram mais um axioma, além dos quatro que definem o conceito de coerência. Este axioma é o de relevância, como mostrado a seguir:

Relevância: se $X \leq 0$ e $X \neq 0$ então $\rho(X) > 0\,, \forall\, X \in L^p$.

Tal propriedade, semelhante a monotonicidade, mostra que se uma posição sempre gera resultados negativos (perdas), então seu risco é positivo, isto é, existe risco.

Esta definição de medida de risco coerente está intimamente ligada à questão da regulação de uma instituição, porquanto é vinculada com o que Artzner et al. (1999) definem como sendo o conjunto de aceitação. Essa questão vem diretamente do axioma de invariância da translação, implicando em uma medida de risco coerente indicar quanto de capital deve ser adicionado a uma posição a fim de torná-la aceitável. Dada uma medida de risco ρ, o conjunto de aceitação definido como $A_\rho = \{X \in L^p : \rho(X) \leq 0\}$, isto é, os resultados que levam a uma situação que não ocorram perdas, ou seja, sem risco positivo. Seja L_+^p o cone de elementos não negativos de L^p, e L_-^p sua contraparte negativa. Artzner et al. (1999) argumentam que todas as medidas de risco ρ plausíveis tem um conjunto de aceitação A_ρ que satisfaz as seguintes propriedades: contém L_+^p, não tem intersecção com L_-^p, e é um cone convexo.

Dessa forma, Artzner et al. (1999) formalmente definem que dado um conjunto de aceitação A, a medida de risco associada a esse conjunto é $\rho(X) = \inf\{m : X + m \in A_\rho\}$, isto é, o mínimo de capital que precisa ser adicionado à posição X para torná-la aceitável. Um regulador deveria escolher um conjunto de aceitação e a medida de risco informaria quanto de capital é preciso ter em reserva para evitar desastres. Vale ressaltar que os autores demonstram que se um conjunto de aceitação preenche as propriedades definidas anteriormente, então a medida de risco associada a esse conjunto é coerente. Da mesma forma, se uma medida de risco é coerente, então o conjunto de aceitação vinculada com essa medida preenche as propriedades exigidas. Artzner et al. (1999) mostram que toda medida de risco coerente pode ser expressa por uma representação dual da forma $\rho(X) = \sup_{\mathbb{Q}\in\mathcal{P}_\rho} E_{\mathbb{Q}}[-X]$, podendo ser entendida financeiramente como o pior resultado esperado de X dentre os cenários $\mathbb{Q} \in \mathcal{P}_\rho \subseteq \mathcal{P}$, para espaços de probabilidade discretos.

2.1.2 Extensões: expansão na representação

Com a consolidação dessas propriedades teóricas, o sucesso dos axiomas de coerência se tornou ainda maior. Conforme tais axiomas foram sendo mais estudados, novas discussões foram surgindo. Sobre extensão na representação, Delbaen (2002) apresenta todo o corpo teórico de medidas de risco coerentes para espaços gerais de probabilidade, não apenas os discretos. Os resultados são derivados para o espaço de variáveis limitadas, isto é, L^∞, assim como para o espaço de todas as variáveis aleatórias, ou seja, L^0. Axiomas, conjunto de aceitação, representação dual, e todas as características presentes em Artzner et al. (1999) são generalizados. Esta extensão é possível com base na caracterização $\rho(X) = \sup_{\mathbb{Q}\in\mathcal{P}_\sigma} E_{\mathbb{Q}}[-X]$, onde $\mathcal{P}_\sigma = \{\mathbb{Q} \in \mathcal{P} : E_{\mathbb{Q}}[X] < \infty\}$ são espaços convexos fechados de medidas de probabilidade que satisfazem a propriedade de que toda variável aleatória X é integrável para pelo menos uma medida de probabilidade $\mathbb{Q} \in \mathcal{P}_\sigma$. O autor mostra que tal representação é equivalente a medida de risco coerente ρ apresentar a propriedade de continuidade de Fatou, ou seja, se $\{X_n\}_{n=1}^{\infty} \subset L^\infty$ é uniformemente limitado, e $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$, isto é, converge para X em probabilidade, então $\rho(X) \leq \liminf_{n\to\infty} \rho(X_n)$. Inoue (2003) estende a teoria de medidas de risco coerentes para espaços mais gerais L^p, com $1 \leq p < \infty$, não considerando os espaços L^0 e L^∞. O autor supõe que as medidas coerentes ρ são contínuas, chegando na representação dual $\rho(X) = \sup_{g\in G} E_{\mathbb{P}}[(-X)g]$, onde $G = \{g : g \geq 0, E_{\mathbb{P}}[g] = 1, \|g\|_q < \infty\}$, com $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. G pode ser entendido como conjunto de medidas de probabilidade $\mathcal{P}_G = \{\mathbb{Q} \in \mathcal{P} \cap L^q\}$. Por sua vez, Kountzakis (2009) considera medidas de risco coerentes para posições X definidas em espaços vetoriais ordenados com norma. O autor adapta axiomas, conjuntos de aceitação e representação dual para o caso analisado.

Outra extensão é referente a questão da taxa de juros utilizada. No trabalho seminal de Artzner et al. (1999), tem-se que $\rho(X) = \inf\{m : X + m \in A_\rho\}$ é uma medida de risco definida com base no conjunto de aceitação A_ρ. Se existisse apenas uma taxa de juros r, considerando posições futuras se teria $\rho_r(X) = \inf\{m : X + mr \in A_\rho\}$. Artzner et al. (2009), visando elucidar a ligação entre mensuração de risco e eficiência de capital, introduzem a noção de custo mínimo para uma posição tornar-se aceitável quando existem diversas taxas de juros no mercado. A motivação é que podem existir no mercado posições que utilizam taxas de juros domésticas e estrangeiras, como no caso de investimentos internacionais. Assim, o conceito de representação fica sendo da forma $\rho_S(X) = \inf\{m : X + S \in A_\rho, S \in \mathcal{S}, S_0 = m\}$, onde S são portfólios compostos por diferentes taxas de juros e $\mathcal{S}$ é o subconjunto de L^0 que contém valores futuros de S. Sob certas suposições, os autores mostram que essas medidas de risco tem propriedades similares as de coerência.

Dando sequência, se tem na literatura de medidas de risco coerentes a proposição de algumas representações, sem necessariamente debater novos axiomas. Tais representações podem ser entendidas como subclasses de medidas de risco coerentes. Sobre esse respeito, Föllmer e Knispel (2011) estudam uma versão coerente de medidas entrópicas, tanto em situações de invariância de lei como de ambiguidade de modelo. Tais medidas entrópicas coerentes têm representação na forma $\rho(X) = \sup_{\mathbb{Q} \in \mathcal{P}_c} E_P[-X]$, $\mathcal{P}_c = \{\mathbb{Q} \in \mathcal{P} : H(\mathbb{Q}/\mathbb{P}) \leq c\}$, onde $H(\mathbb{Q}/\mathbb{P})$ representa e entropia relativa de $\mathbb{Q}$ em relação a $\mathbb{P}$. Em particular, os autores discutem o comportamento dessas medidas no caso de riscos independentes e sua conexão com limites. Para exercer melhor controle na cauda inferior e facilmente descrever a atitude em relação ao risco por parte do investidor, Chen e Wang (2007) propõe uma nova classe de medidas coerentes de risco minimizando p-normas, $(E_{\mathbb{P}}[|X^p|])^{\frac{1}{p}}$, das perdas mais relevantes, dado um nível de significância α, com relação a algum ponto de referência s. Essas medidas tem a forma $\rho_{\alpha,p}(X) = \inf_{s \in \mathbb{R}} \left(\frac{\{E_{\mathbb{P}}[((X-s)^-)^p]\}^{\frac{1}{p}}}{\alpha} - s \right)$. Os autores demonstram que essa nova classe de medidas tem propriedades matemáticas satisfatórias, e que resultados empíricos suportam as conclusões teóricas e a praticidade do uso dessas medidas. O uso mais comum quando do desenvolvimento de uma classe de medidas coerentes é a alocação de recursos em uma carteira de investimentos.

Nesse sentido, Fischer (2003) propõe propriedades de diferenciação para medidas de risco que garantem sua utilização em estratégias de portfólio. O autor mostra que essas propriedades são atendidas por uma ampla classe de medidas de risco coerentes baseadas em semi-desvios, diferentemente do que ocorre com o VaR. Tais medidas, se valendo do conceito de p-norma e com $0 \leq a \leq 1$, possuem uma representação matemática com forma $\rho_{a,p}(X) = -E_{\mathbb{P}}[X] + a\|\max(0, E_{\mathbb{P}}[X] - X)\|_p$. Inserido neste escopo, Chen e Wang (2008) constroem uma classe de medidas de risco coerentes bilaterais em que desvios baseados no conceito de p-normas positivos e negativos são considerados simultaneamente, conforme $\rho_{a,p}(X) = -E_{\mathbb{P}}[X] + a\|\max(0, X - E_{\mathbb{P}}[X])\|_1 + (1-a)\|\max(0, E_{\mathbb{P}}[X] - X)\|_p$. Essa inovação torna simples descrever e controlar assimetrias e caudas pesadas, que são características de retornos financeiros, permitindo descrever corretamente a atitude em relação ao risco do investidor. Também com foco em p-normas, porém analisando valores nas caudas, Krokhmal (2007) apresenta medidas de risco coerentes para momentos maiores como soluções de problemas de otimização do tipo $\rho_{a,p}(X) = \inf_{\eta \in \mathbb{R}} \left\{ \frac{1}{\alpha} \|(X-\eta)^-\|_p - \eta \right\}$, com $p \geq 1$ e $0 \leq \alpha \leq 1$. O autor mostra que o CVaR é um caso especial dessa definição, e que sua utilização em problemas de alocação de recursos é vantajosa. Complementando, Dentcheva et al. (2010) derivam representações de medidas de risco coerentes com lei invariante de ordens maiores. Dessa forma, uma representação dual é obtida conforme $\rho(X) = \sup_{\mathbb{Q} \in \mathcal{P}_q} \int_0^1 AVaR^{\alpha}(X)\mathbb{Q}(d\alpha)$, onde $\mathcal{P}_q = \left\{ \mathbb{Q} \in \mathcal{P}_{(0,1]} : \int_0^1 \left| \int_\alpha^1 \frac{\mathbb{Q}(dt)}{t} \right|^q d\alpha \leq \left(\frac{1}{\alpha}\right)^q \right\}$, com $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

2.1.3 Extensões: novos axiomas

Uma corrente teórica que ganha corpo é a inclusão de outros axiomas para medidas de risco coerentes. Talvez o axioma de extensão que tem maior destaque na literatura seja o de Invariância de Lei, proposto por Kusuoka (2001). Seja F_X a lei (ou função) de probabilidade que governa X. Tal axioma é definido como:

Invariância de Lei: se $F_X = F_Y$, então $\rho(X) = \rho(Y), \forall\, X, Y \in L^p$.

Esse axioma garante que duas posições que têm a mesma lei ou função de probabilidade possuem riscos iguais. Tal característica é muito importante na mensuração de risco na prática, quando dados reais que dependem de uma lei que os governa são utilizados. O autor mostra que toda medida de risco coerente com lei invariante que possui a propriedade de Fatou pode ser representada, para $X \in L^{\infty}$, conforme $\rho(X) = \sup_{\mathbb{Q} \in \mathcal{P}_{(0,1]}} \int_0^1 AVaR^{\alpha}(X)\mathbb{Q}(d\alpha)$, ou seja, como uma combinação da ES, onde $\mathcal{P}_{(0,1]}$ são medidas de probabilidade definidas em $(0,1]$. O autor ainda prova mais resultados, relacionando com conceitos de comonotonicidade e VaR. Inoue (2003) estende essa representação para $X \in L^p$, com $1 \leq p < \infty$, supondo continuidade. Assim, a representação dual fica sendo $\rho(X) = \sup_{\mathbb{Q} \in M} \int_0^1 AVaR^{\alpha}(X)\mathbb{Q}(d\alpha)$, com $M = \left\{\mathbb{Q} \in \mathcal{P}_{(0,1]} : \int_0^1 \left|\int_{\alpha}^1 \frac{\mathbb{Q}(dt)}{t}\right|^q d\alpha \leq \infty\right\}$, com $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Noyan e Rudolf (2014), considerando espaços com átomos, estendem os resultados de Kusuoka (2001) utilizando a noção de medidas de risco funcionalmente coerentes, que possuem ligaçao com alguma medida coerente em um espaço sem átomos. Resultados provando que tais medidas possuem representaçao como combinação da ES, além de uma extensão para funções cumulativas de probabilidade, sao apresentados.

Alguns estudos ampliam os resultados sobre o axioma de Invariância de Lei, como Leitner (2005), que prova um resultado que garante que medidas de risco coerentes com a propriedade de Fatou são lei invariantes se e somente se preservam a dominância estocástica de segunda ordem. Por sua vez, Shapiro (2013) discute representações de medidas de risco coerentes com lei invariante como integrais da ES, mostrando que essa representação existe se e somente se o conjunto da representação dual é gerado por um de seus elementos. Essa representação é definida de forma única. Porém, a usual representação como o supremo dessas integrais não é única. Ziegel (2014) investiga uma propriedade mais estrita do que Invariância de Lei, a Elicitabilidade. Elicitabilidade é a propriedade de previsões serem avaliadas e classificadas. Autores mostram que medidas com Aditividade Comonótona não tem essa propriedade, com exceção para o negativo da média. Além disso, é provado que as únicas medidas coerentes com lei invariante que possuem elicitabilidade são os expectis.

A questão de continuidade e obtenção de limites para medidas de risco coerentes é também um campo que apresenta evolução, e é diretamente ligado com a questão da Invariância de Lei. Sob esse prisma, Konovalov (2010) obtém limites e uma analogia com a lei de grandes números para medidas de risco coerentes. Com base em suposições do tipo propriedade de Fatou, convergência dominada, monotoniciadade dominada, entre outros, o autor chega aos seguintes resultados: $\lim_{n\to\infty} \rho(X_n) = \rho(X)$, $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{S_n}{n}\right) = -E_{\mathbb{P}}[X_1]$, e $\lim_{n\to\infty} \rho\left(\frac{S_n - E_{\mathbb{P}}[S_n]}{\sigma(S_n)}\right) = \rho(\varepsilon)$, onde $S_n = X_1 + \cdots X_n$ e $\varepsilon \sim N(0,1)$. Assim, algumas características, bem como testes de hipóteses em amostras convergentes se tornam possíveis. De forma semelhante, Konovalov (2011) estuda essa convergência para o caso em que o foco é na contribuição ao risco de X de determinado Y. Os resultados de convergência anteriores são praticamente os mesmos para a representação $\rho(X|Y) = \sup_{\mathbb{Q}\in\mathcal{P}|Y} E_{\mathbb{Q}}[-X]$, onde $\mathcal{P}|Y = \{E_{\mathbb{Q}}[\cdot\,|Y] : \mathbb{Q} \in \mathcal{P}\}$.

Dhaene et al. (2002), estuda o conceito de Comonotonicidade, que pode ser entendida como sendo dependência positiva perfeita entre variáveis. Essa propriedade leva a medidas de risco que respeitam o axioma de Aditividade Comonotônica, definido como:

Aditividade Comonotônica: $\rho(X+Y) = \rho(X) + \rho(Y), \forall\, X, Y \in L^p$ com X e Y comonótonos.

Esse axioma de Aditividade Comonotônica pode ser entendido como o pior caso para medidas que possuem o axioma de Subaditividade.

Stoica (2006) introduz o axioma de Relevância em um espaço vetorial, estendendo o axioma de Relevância comum, mostrando que este é equivalente à condição especial de não arbitragem. Tal axioma está ligado com medidas de probabilidade. Com base na notação estabelecida no presente trabalho, o axioma de Relevância proposto tem a seguinte representação:

$\mathbb{P}$-Relevância: se $\rho(X) \leq 0$ e $\rho(-X) \leq 0$, então $E_{\mathbb{P}}[X] = 0$.

O autor ainda apresenta uma solução para o problema de *hedging* no preço e estuda o relacionamento WCE e VaR. Por sua vez, Leitner (2004) apresenta o axioma de Monotonicidade Dilatada, estendendo o axioma de Monotonicidade comum para medidas de risco coerentes que possuem a propriedade de Fatou. Seja $\mathcal{G} \subseteq \tilde{\mathcal{G}}$, onde $\tilde{\mathcal{G}}$ é a família de todos os subespaços de eventos possíveis $\mathcal{F}$. Pode se dizer que Y é uma dilatação balayage de X, $X \preccurlyeq_{\mathcal{G}}^{b} Y$, se existe $\tilde{\mathcal{F}} \in \mathcal{G}$ de tal modo que $E_{\mathbb{P}}[X|\tilde{\mathcal{F}}] \leq Y$. Assim, se tem o axioma:

Monotonicidade Dilatada: se $X \preccurlyeq_{\mathcal{G}}^{b} Y$, então $\rho(X) \geq \rho(Y), \forall\, X, Y \in L^p$.

A extensão se dá pelo condicionamento a um subespaço de eventos possíveis $\tilde{\mathcal{F}}$, e não mais a todo o espaço $\mathcal{F}$. Esse axioma implica em $\rho(X) \geq \rho\big(E_{\mathbb{P}}[X|\tilde{\mathcal{F}}]\big)$, ou seja, o risco de uma posição não é menor que o risco de seu valor esperado. Complementando, Grigoriev e Leitner (2006) apresentam alguns resultados relacionando medidas coerentes que possuem propriedade de Fatou com os axiomas de Aditividade Comonótona e Monotonicidade Dilatada. Os autores mostram que se uma medida coerente com propriedade de Fatou respeita os axiomas de Aditividade Comonótona e Monotonicidade Dilatada, então ela deve respeitar o de Invariância de Lei, podendo ser representada conforme $\rho(X) = -\gamma \operatorname{ess\,inf} X + (1-\gamma)\rho_c(X)$, $0 \leq \gamma \leq 1$, onde ρ_c é uma medida coerente contínua com axiomas de Aditividade Comonótona e Monotonicidade Dilatada.

A inclusão de axiomas pode também ser necessária quando outro enfoque é dado ao problema. Nessa perspectiva, Jarrow e Purnanandam (2005) estendem o conceito de medida de risco coerente de modo a torná-lo mais consistente com a perspectiva da firma, e não do regulador. Para isso, eles excluem o axioma de Invariância de Translação e incluem os axiomas de Relevância e Caminho Mais Curto, considerando que a medida de risco só pode assumir valores não negativos. Esse último axioma mantém que:

Caminho Mais Curto: $\rho(X + \lambda \cdot u) = \rho(x) - \lambda,\ 0 \leq \lambda \leq \rho(X), u = \frac{X^* - X}{\|X^* - X\|}, \rho(X^*) = 0, \forall\, X, X^* \in L^p$.

Esse axioma exibe redução de risco de forma linear ao longo do caminho mais curto para o conjunto de aceitação da medida. Ainda, o ativo u adicionado à posição não precisa ser capital, mas qualquer investimento de risco. Desse modo, o conjunto de aceitação é adaptado para $A_\rho = \{X \in L^p : \rho(X) = 0\}$. Ainda, os autores mostram que medidas que satisfazem esse conceito tem a forma $\rho(X) = \inf_{X^* \in L^0_+} \{\|X - X^*\|\}$, com L^0_+ sendo o conjunto de todas as variáveis não negativas.

2.1.4 Extensões: abordagem multivariada

Outra possibilidade de extensão de medidas coerentes é levar a definição para o campo multivariado. A esse respeito, Jouini et al. (2004) definem medidas de risco como sendo funções $\rho(d,n) : L_d^p \to \mathbb{R}^n$ que satisfazem versões vetoriais dos axiomas de coerência. O argumento para a utilização destas medidas é que questões como taxas de câmbio e custos de transação são relevantes em grandes portfólios, mas desprezadas na versão padrão de medidas de risco coerentes. Questões como conjuntos de aceitação e representação dual dessas medidas vetoriais são expostos como extensões do caso padrão de medidas coerentes de risco. O caso de agregação de risco, onde $d < n$, é discutido, onde condições necessárias e suficientes para coerência são apresentadas. Complementando essa extensão multivariada, Kulikov (2008) define também medidas de risco coerentes vetoriais, mas permitindo que os custos de transação e taxas de câmbio sejam estocásticos. Os axiomas, conjuntos de aceitação e representação dual são também estendidos com base em teoremas. Exemplos de aplicação com versões multivariadas do TVaR e WVaR são investigados e problemas de alocação e contribuição de risco são analisados.

Ainda com foco multivariado, Cascos e Molchanov (2007), considerando uma estrutura topológica de cones e conjuntos, definem medidas de risco vetoriais. A relação dessas medidas com regiões truncadas é feita, com exemplos para VaR, ES e perda máxima. Molchanov e Cascos (2014) apresentam medidas de risco coerentes multivariadas definidas em conjuntos vetoriais com base em seleções, isto é, posições que são aceitaveis em todas as marginais. Resultados de definições, continuidade e representação são provados, assim como extensões para os casos de mercado cônico e números reais são apresentadas. Ainda, estabelecimento de limites e modos de computar tais medidas são apresentados. Focando em medidas coerentes com lei invariante, Ekeland et al. (2012) propõem uma extensão multivariada como funções de correlação máxima, que é uma adaptação da noção de comonotonicidade. Os autores generalizam então a questão de coerência com lei invariante e aditividade comonótona para o que chamam de coerência forte. Uma medida de risco $\rho : L_d^2 \to \mathbb{R}$ tem a característica de coerência forte se, além de contínua e convexa, ela satisfaz a igualdade $\rho(X) + \rho(Y) = \sup\{\rho(\tilde{X} + \tilde{Y}) : F_{\tilde{X}} = F_X, F_{\tilde{Y}} = F_Y, \forall X, Y \in L_d^2\}$. Os autores estendem alguns resultados de Kusuoka (2001) para o caso multivariado.

2.1.5 Extensões: abordagem dinâmica

Uma abordagem é considerar a coerência em medidas de risco que vão além da estrutura de período único. Cvitanić e Karatzas (1999) estudam medidas dinâmicas de risco no sentido de mercados completos, incorporando uma filtração em L^p, ou seja, $L^p(\Omega, \mathcal{F}; \mathcal{F}_t, P)$ ou $L^p(\mathcal{F}_t)$ com $\mathcal{F}_t = (X_1, \cdots, X_t), t = 1, \cdots, T$. Esse tipo de medida é definido sobre uma estratégia de otimização max-min sobre distribuição de probabilidades e carteiras aceitáveis compostas por ativos negociáveis em um intervalo de tempo, conforme a representação $\rho(X_T) = \sup_{\mathbb{Q}\in\mathcal{P}} \inf_{X\in A_\rho} E_{\mathbb{Q}}\left[\max\left(\frac{X_T}{r_T}\right)^-\right]$, com r_T sendo o valor da taxa de juros. Tal classe de medidas é dinâmica no sentido de que acompanharia a evolução dos preços dos ativos em questão. Outro estudo sobre medidas de risco coerentes dinâmicas é o realizado por Siu e Yang (1999), onde, primeiramente, uma representação dual é apresentada conforme a formulação $\rho(X_{t+1}|\mathcal{F}_t) = \sup_{\mathbb{Q}\in\mathcal{P}}\left\{E_{\mathbb{Q}}[-\frac{X_{t+1}}{r_t}|\mathcal{F}_t]\right\}$, mostrando que tal medida é coerente. Em seguida, considerando a perspectiva bayesiana uma definição subjetiva para a medida é apresentada, em que fórmulas fechadas para alguns casos podem ser obtidas. Mazzoleni (2004) mostra como elementos unilaterais e intertemporais tem que ser explicitamente incluídos na definição de uma medida de risco, a fim de proporcionar instrumentos flexíveis para gestores de risco. Uma nova medida dinâmica unilateral é definida de acordo com um relaxamento das condições de coerência, com representação $\rho_L(X_t) = \sup_{X_t} E[\left(\frac{L(-X_t)}{r_t}\right)^+]$, onde L é uma função de perda.

Também sobre medidas dinâmicas, Riedel (2004) argumenta que para esta classe de medidas o axioma de Invariância de Translação deve ser adaptado para levar em conta a chegada de nova informação. Em adição aos axiomas de coerência, esse autor acrescenta o axioma de Consistência Dinâmica, representado como:

Consistência Dinâmica: $\rho(X_{t+1}) = \rho(Y_{t+1})$ implica em $\rho(X_t) = \rho(Y_t), \forall\, X_t, Y_t \in L^p(\mathcal{F}_t)$;

Tal axioma requer que julgamentos baseados em uma medida de risco não sejam contraditórios ao longo do tempo, ou seja, se duas posições possuem o mesmo julgamento sobre todos os cenários possíveis no futuro, então o risco delas hoje deve ser o mesmo. Uma medida de risco com essas propriedades deve possuir uma representação dual baseada em valores futuros de X com a forma $\rho_t(X) = \sup_{\mathbb{Q} \in \mathcal{P}} E_{\mathbb{Q}}[-\sum_{s=t}^{T} \frac{X_s}{(1+r)^{s-t}} | \mathcal{F}_t]$, onde r é uma taxa de juros de desconto.

De forma um pouco distinta, Artzner et al. (2007) abordam a questão de multiperíodos, ao invés da relação dinâmico/estático. Os autores estendem a teoria de medidas de risco coerentes para um processo ao invés de um único período, abordando questões de recursividade e consistência dinâmica. De modo complementar, Roorda et al. (2005) estendem a teoria de medidas de risco coerentes para o caso multiperíodo com base no axioma de Consistência Dinâmica. Axiomas, conjuntos de aceitação e representação dual são adaptados para a estrutura proposta pelo autor. A utilização de combinação multiplicativa de medidas de probabilidade é utilizada. Delbaen (2006) relaciona tal questão com base na estabilidade de medidas de probabilidade. Assim, o autor apresenta conjuntos de probabilidade em que densidades relativas são multiplicáveis para formar informação acerca de tempos intermediários. A relação desses conjuntos com medidas de risco dinâmicas é estabelecida de modo a respeitar axiomas de Consistência Dinâmica e Recursividade. De modo mais detalhado, Roorda e Schumacher (2007) diferencia definições de consistência sequencial, condicional e dinâmica. Para o autor, tem-se que:

Consistência Sequencial: $\rho(X_{t+s}) \geq (\leq) 0$ implica em $\rho(X_t) \geq (\leq) 0$, $\forall\, X_t \in L^p(\mathcal{F}_t), s \geq 0$;

Consistência Condicional: $\rho(X_t) = \rho(E_{\mathbb{P}}[\rho(X_{t+s}) | \mathcal{F}_t]), \forall\, X_t \in L^p(\mathcal{F}_t), s \geq 0$;

Consistência Dinâmica: $\rho(X_{t+s}) = \rho(Y_{t+s})$ implica em $\rho(X_t) = \rho(Y_t), \forall\, X_t, Y_t \in L^p(\mathcal{F}_t), s \geq 0$;

Com base nesses axiomas, os autores derivam resultados para medidas de probabilidade com estabilidade que satisfazem a usual representação dual. Ainda, os autores estudam o TVaR, adaptando sua definição dual para cada caso de consistência, restringindo seu conjunto de medidas de probabilidade para satisfazer as propriedades desejadas. Complementando, Katsuki e Matsumoto (2014) estudam medidas de risco coerentes considerando um esquema multiperíodo. O papel do axioma de Consistência Dinâmica é investigado e tido como fundamental no trabalho. Todavia em sua forma estrita tal axioma penaliza muito o risco, medido pelo TVaR, então formas mais amenas são apresentadas pelos autores. Já Kusuoka e

Morimoto (2007) apresentam medidas de risco coerentes multiperíodo que são lei invariante. Com suposições de movimento browniando e demais restrições, uma representação dual e propriedades de recursividade são provadas, por meio de equações diferenciais parciais. Diversas propriedades da classe são provadas, embora sem intuição financeira. Por sua vez, Tahar e Lépinette (2014) estendem a representação de medidas coerentes multivariadas de Jouini et al. (2004) para o caso multiperíodo, considerando tempo contínuo. Com base na Consistência Dinâmica, os autores derivam teoria para os axiomas, conjuntos de aceitação e representação dual.

2.2 Medidas de risco convexas

2.2.1 Teoria básica

O conceito de medidas de risco convexas foi proposto de forma concomitante por Föllmer e Schied (2002) e Frittelli e Gianin (2002). Esses autores introduzem a noção de medida de risco convexa como uma extensão do conceito de coerência de Artzner et al. (1999). O argumento é que em muitas situações o risco de uma posição pode aumentar de maneira não linear com o tamanho do portfólio. Por exemplo, um risco de liquidez adicional pode surgir se uma posição é multiplicada por um fator de aumento. Os autores em questão sugerem relaxar os axiomas de Homogeneidade Positiva e Subaditividade por um axioma mais fraco de Convexidade. Se tem por definição que uma medida de risco convexa no sentido de Föllmer e Schied (2002) e Frittelli e Gianin (2002) satisfaz os seguintes axiomas:

Invariância de Translação: $\rho(X+C)=\rho(X)-C, \forall\, X\in L^p, C\in\mathbb{R}$.

Monotonicidade: se $X\leq Y$, então $\rho(X)\geq\rho(Y)$, $\forall\, X,Y\in L^p$.

Convexidade: $\rho(\lambda X+(1-\lambda)Y)\leq\lambda\rho(X)+(1-\lambda)\rho(Y), \forall\, X,Y\in L^p, 0\leq\lambda\leq 1$.

Convexidade significa que diversificação não aumenta o risco, isto é, o risco de uma posição diversificada é menor ou igual à média ponderada dos riscos individuais. A questão do axioma de Normalização também é apresentada. Esse axioma garante que:

Normalização: $\rho(0) = 0$

Em termos de representação dual, os autores mostram que medidas de risco convexas podem ser apresentadas conforme $\rho(X) = \sup_{\mathbb{Q} \in \mathcal{P}} \left(E_{\mathbb{Q}}[-X] - \alpha(\mathbb{Q}) \right)$, onde $\alpha : \mathcal{P} \rightarrow (-\infty, \infty]$ é uma função de penalização convexa e inferiormente semi contínua, com $\alpha(\mathbb{Q}) \geq -\rho(0)$. Essa função de penalização pode ser representada matematicamente como $\alpha(\mathbb{Q}) = \sup_{X \in A_\rho} \left(E_{\mathbb{Q}}[-X] \right)$, onde $A_\rho = \{X \in L^p : \rho(X) \leq 0\}$ é um conjunto de aceitação similar a aquele definido para as medidas coerentes de risco. Assim, A_ρ contém L^p_+, não tem intersecção com L^p_-, e é convexo. Como Subaditividade e Homogeneidade Positiva implicam Convexidade, toda medida de risco coerente é uma medida de risco convexa, embora o contrário não seja verdadeiro.

2.2.2 Extensões: expansão na representação

Assim como o ocorrido com o conceito de coerência, a definição de medidas de risco convexas também teve extensões discutidas na literatura. A definição padrão garante que medidas de risco convexas podem ser representadas por medidas de probabilidade $\mathbb{Q}$ se a medida respeitar certas propriedades de continuidade (propriedade de Fatou). Krätschmer (2005) prova em seu trabalho o caminho contrário desse resultado, se medidas de risco convexas podem ser representadas por medidas de probabilidade então essas medidas de risco convexas possuem certas propriedades de continuidade. O autor consegue isso com uma forma de representação dual menos restrita, conforme $\rho(X) = \sup_{\mathbb{Q} \in \mathcal{P}^*} (E_P[-X] - \alpha(\mathbb{Q}))$, onde $\mathcal{P}^*$ é um conjunto que permite medidas de probabilidade $\mathbb{Q}$ com propriedades menos restritivas de continuidade. O autor verifica que se a medida convexa possui representação dual então ela é contínua acima, ou seja, $\{X_n\}_{n=1}^{\infty} \downarrow X$, isto é, converge para X por valores maiores, então $\rho(X) = \lim_{n \to \infty} \inf \rho(X_n)$. Ainda, o autor prova que se a medida convexa é contínua abaixo, isto é, $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$

$\uparrow X$, ou seja, converge para X por valores menores, então $\rho(X) = \lim_{n\to\infty} \inf \rho(X_n)$, e as medidas de probabilidade utilizadas na representação dual possuem função de penalidade que são próprias.

Ainda sobre a representação de medidas de risco convexas, Kaina e Rüschendorf (2009) investigam em detalhes a questão da continuidade e propriedades dessa representação em espaços gerais de probabilidade, isto é, L^p, com p finito. Os autores encontram que a representação dual tem a forma $\rho(X) = \sup_{\mathbb{Q}\in\mathcal{P}_p} \left(E_{\mathbb{Q}}[-X] - \alpha(\mathbb{Q})\right)$, com $\mathcal{P}_p = \left\{\mathbb{Q} \in \mathcal{P} : \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} \in L^q\right\}$, onde $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, além de verificar verificam que as diversas propriedades de continuidade podem ser interpretadas como propriedades de robustez sendo úteis para aplicações. Mais especificamente, se a medida convexa é finita, então ela é contínua no sentido de Lipschitz, ou seja, existe constante C tal que $|\rho(X) - \rho(Y)| \leq C\|X - Y\|$, é contínua no sentido de Fatou, é contínua no sentido de Lebesgue, ou seja, se $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ é uniformemente limitado e $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$, então $\rho(X) = \lim_{n\to\infty} \inf \rho(X_n)$, é continua acima, é contínua abaixo e é sigma (L^p, L^q) inferiormente semicontínua. Ainda nesse tópico, Delbaen (2009) mostra que se uma medida de risco convexa é definida em um espaço sólido e invariante de variáveis aleatórias, então tal medida possui a propriedade de continuidade inferior e o espaço é composto por variáveis aleatórias integráveis. Como consequência, medidas de risco para determinadas distribuições podem precisar assumir valores infinitos.

Ainda sobre extensões na representação, Cheridito e Li (2009) estudam medidas de risco convexas, com coerentes como caso especial, quando retornos incertos são modelados por variáveis aleatórias limitadas em espaços definidos por corações de Orlicz, ligada com a questão de variáveis não limitadas de espaços L_p. Os autores provam que medidas convexas representadas nesses espaços admitem uma representação robusta com respeito a diferentes medidas de probabilidades, conforme $\rho(X) = \sup_{\mathbb{Q}\in\mathcal{P}^{\Psi}} \left(E_{\mathbb{Q}}[-X] - \alpha(P)\right)$, com $\mathcal{P}^{\Psi}$ sendo um coração de Orlicz. Cheridito e Li (2008) expandem esses resultados apresentando condições para que medidas de risco convexas definidas nesses espaços apresentem propriedades de continuidade, monotonicidade e convexidade estritas, bem como relações de dominância estocástica. Tais condições são baseadas na representação dual e na função de penalidade. Complementando essa representação, Orihuela e Galán (2012) apresentam um resultado que mostra que uma representação robusta para medidas de risco convexas em espaços de Orlicz garante a propriedade de Fatou e continuidade. Biagini e Frittelli (2009) estendem o teorema de continuidade de funções lineares e crescentes (Namioka-Klee) para medidas de risco convexas, além de mostrar que a representação dual é mantida se tais medidas tiverem a propriedade de Fatou. Extensivo estudo em espaços de Orlicz é apresentado, relacionando com conjuntos de aceitação, através de uma propriedade de convergência de sequências convexas.

Filipović e Kupper (2007), considerando espaços vetoriais, apresentam resultados para funções convexas serem monótonas e com invariância de translação, logo medidas de risco convexas. O resultado principal é que, dada qualquer função f, os autores apresentam a maior função que serve como medida de risco convexa que é majorada por f. Resultados para tipos de medidas bastante consideradas, mas que não respeitam as propriedades são mostrados, explicitando intervalos em que tais medidas são convexas. Por sua vez, Fertis et al. (2012) definem o conceito de medida de risco convexa robusta quando as medidas de probabilidade da definição padrão não são totalmente conhecidas. Para tanto, é acrescentado na definição de medidas de risco convexas um conjunto de medidas possíveis onde as probabilidades podem ser representadas. Os autores estudam como essas medidas se relacionam com os conceitos previamente apresentados, introduzindo uma versão robusta do CVaR e da medida entrópica. De maneira parecida, Bion-Nadal e Kervarec (2012) consideram um espaço onde não há medida de probabilidade de referência para representar medidas de risco convexas com base num conjunto de medidas de probabilidades de um espaço Borel. Essa discussão é feita através do conceito de capacidades, inclusive fazendo uma aplicação para g-expectativas. Não obstante, Vicig (2008) em seu trabalho generaliza definições de classes de medidas já existentes, discutindo suas propriedades de consistência através do conceito de probabilidades imprecisas. Segundo o autor, medidas de risco podem ser entendidas como limites superiores ou inferiores de previsões. Dessa forma, considerando previsões convexas, medidas de risco convexas são generalizadas, inclusive para os casos condicionais.

Corroborando com extensão de medidas de risco convexas, Laeven e Stadje (2013) introduzem medidas de risco convexas entrópicas. Diferentemente da versão clássica que computa o risco baseada na expectativa probabilística de perda, a versão entrópica considera a expectativa normalizada de perda. Essa subclasse pode ser representada como $\rho(X) = \sup_{\mathbb{Q}\in\mathcal{P}}\{C_\varphi(X,\mathbb{Q}) - \theta(\mathbb{Q})\}$, com $C_\varphi(X,\mathbb{Q}) = \gamma\log\left(E_{\mathbb{Q}}[-X/\gamma]\right)$, $0 < \gamma < \infty$, e θ é uma função de penalização definida para medidas de probabilidade $\mathbb{Q}$. Se θ for uma função indicativa de $\mathbb{Q} \in \mathcal{P}' \subseteq \mathcal{P}$, então a medida se torna coerente entrópica. Os autores provam outras propriedades desse tipo de medida, como sua relação com axiomas já mencionados e conjuntos de aceitação, bem como sua relação com questões de tomada de decisão e aversão ao risco. Frittelli e

Scandolo (2006) propõem uma generalização com base em um novo formato do requerimento de capital como medida de risco conforme $\rho_{A,C,\pi}(X) = \min\{\pi(Y) \in \mathbb{R} : Y \in M, X + Y \in A\}$, onde M representa todas as posições possíveis de serem obtidas com *heding*, π representa o custo inicial de um elemento $Y \in M$, e A é um conjunto de aceitação. Nesse contexto, uma alteração no axioma de invariância de translação é apresentada como $\rho(X + z) = \rho(X) - \pi(z)$. Resultados para representação dual são obtidos dividindo a função de penalização em duas partes, uma para A e outra para M e π. Esse arcabouço é adaptado a um contexto com vários períodos, tornado, de certa forma, a abordagem dinâmica. Farkas et al. (2014a) generalizam essa representação composta do requerimento de capital considerando que o conjunto M é composto por posições possíveis de serem obtidas se utilizando múltiplos ativos de referência. Se tal conjunto for composto por apenas 1 ativo, então a representação volta a ser aquela proposta em Frittelli e Scandolo (2006). Toda teoria de medidas convexas é apresentada para essa estrutura, desde a relação dos axiomas com espaços de aceitação e representação dual.

Um item que muitas vezes é deixado subentendido é a taxa de juros. Konstantinides e Kountzakis (2011) usam ferramentas da teoria de espaços lineares regulados parcialmente ordenados, principalmente cones, para estender resultados sobre medidas de risco coerentes e convexas. O foco principal é substituir a taxa de juros livre de risco por algum ponto pertencente ao cone do espaço de ativos com risco. Ainda a esse respeito, Filipović (2008) mostra que utilizar uma taxa de juros superior a aquela livre de risco não reduz os requerimentos de capital. Muito embora o valor presente possa ser reduzido, devido a uma taxa maior, seu maior risco compensa a diferença. De fato, o autor mostra que, sob algumas condições, não existe taxa de juros ótima no sentido de levar a menores requerimentos de capital.

2.2.3 Extensões: novos axiomas

De forma mais conceitual, El Karoui e Ravanelli (2009) relaxam o axioma de Invariância de Translação para uma forma subaditiva, com o intuito de verificar o risco de uma posição futura. Autores argumentam que quando há incerteza sobre taxas de juros, o axioma de Invariância de Translação se torna problemático. Assim, a versão relaxada do axioma, com S_T sendo a taxa de juros em T, é:

Transalação Subaditiva: $\rho(X - CS_T) \leq \rho(X) + C, \forall\, X \in L^p, C \in \mathbb{R}$.

A lógica dessa relação é que uma posição descontada de um valor futuro não pode ter seu risco atual aumentado em mais que este valor. Exemplos são apresentados para situações onde o axioma de Invariância de Translação padrão não é aplicável. A representação dual tem a forma $\rho(X) = \sup_{\mathbb{Q}\in\mathcal{P}^f}\{E_{\mathbb{Q}}[-X] - \alpha(\mathbb{Q})\}$, com $\mathcal{P}^f = \{\mathbb{Q} \in \mathcal{P} : \mathbb{Q} \text{ é fintamente aditivo}\}$, e função de penalidade $\alpha(\mathbb{Q}) = \sup_{X\in L^p}\{E_{\mathbb{Q}}[-X] - \rho(X)\}$. Ainda, exemplos para o caso dinâmico são expostos.

Corroborando, Cerreia-Vioglio et al. (2011) argumentam a favor desse relaxamento subaditivo da translação, mas mostram que a equivalência entre convexidade e diversificação não se mantém. Apenas a relação entre diversificação e quase convexidade, isto é, $\rho(\lambda X + (1-\lambda)Y) \leq \sup\{\rho(X), \rho(Y)\}\, \forall\, X, Y \in L^p, \lambda \in [0,1]$ é que fica garantida. Os autores estudam medidas que respeitam o axioma de quase convexidade no caso da versão subaditiva do axioma de translação. Assim, os autores provêm uma representação dual para este tipo de medida da forma $\rho(X) = \max_{\mathbb{Q}\in\mathcal{P}} R\big(E_{\mathbb{Q}}[-X], \mathbb{Q}\big)$, onde $R: \mathbb{R}\times\mathcal{P} \to [-\infty, \infty]$, com $R(t, \mathbb{Q}) = \inf\{\rho(X) : E_{\mathbb{Q}}[X] = t\}$, é um função semi contínua superior que é crescente e não expansiva no primeiro componente, de tal modo que $\inf_{t\in\mathbb{R}} R(t,\cdot)$ é constante. Os autores estabelecem condições necessárias para o axioma de Invariância de Lei, e o relacionamento com outros axiomas de medidas de risco. Drapeau e Kupper (2013) analisam a pluralidade de interpretações da noção subjetiva de risco, através de uma representação que permite uma interpretação diferenciada dependendo do contexto. Essa representação permite entender o efeito de variáveis aleatórias, percepção de risco e risco do modelo. Tal representação tem a forma matemática conforme $\rho(X) = \sup_{\mathbb{Q}\in\mathcal{P}} R\big(\mathbb{Q}, E_{\mathbb{Q}}[-X]\big)$, com $R(\mathbb{Q}, s) = \min\{m \in \mathbb{R} : s \leq \alpha(\mathbb{Q}, m)\}$, onde a função de penalidade é $\alpha(\mathbb{Q}, m) = \sup_{X\in A^\rho}\{E_{\mathbb{Q}}[-X]\}$. Autores mostram que a percepção de risco pode ser vista como risco de escolher a distribuição $\mathbb{Q}$ errada.

Complementando, Frittelli e Gianin (2011) focam em uma interpretação alternativa para a função de penalização na representação dual, baseada na quase convexidade. Além disso, propriedades de continuidade de medidas de risco convexas comonótonas são investigadas, de modo que se verifica que devido à perda de convexidade, continuidade local e global não são mais equivalentes. Desse modo, muitas propriedades que são verdadeiras para medidas de risco convexas deixam de ser válidas. Farkas et al. (2014b) consideram o caso em que taxas de juros são levadas em conta de um período para o outro, oferecendo uma variedade de resultados de finitude e continuidade, conforme o espaço de variáveis e conjunto de aceitação utilizado. Nessa situação, a medida de risco convexa fica definida pelo conjunto de aceitação como $\rho(X) = \inf\left\{m : X + \frac{m}{S_0}S_T \in A_\rho\right\}$, onde S_0 e S_T são os valores da taxa de juros em 0 e T. Ainda, uma versão diferente do axioma de Invariância de Translação é dado, conforme $\rho(X + CS_T) = \rho(X) - CS_0, \forall X \in L^p, C \in \mathbb{R}$. Exemplos com VaR e TVaR são apresentados. Casos em que a taxa de juros é um título de dívida ou um ativo com baixa liquidez são expostos. O caso da Translação Subaditiva é considerado, e uma representação dual é fornecida.

Da mesma forma que para medidas coerentes, o axioma de Invariância de Lei é bastante estudado na literatura de medidas de risco convexas. O conceito foi adaptado para essa classe de medidas por Frittelli e Gianin (2005), os quais mostram que a adaptação se dá pela inclusão de uma função e penalidade na representação original. A representação fica sendo $\rho(X) = \sup_{\mathbb{Q}\in\mathcal{P}_{(0,1]}} \left\{\int_0^1 AVaR^\alpha(X)\mathbb{Q}(d\alpha) - G\left(\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}\right)\right\}$, onde $G : L^1 \to \mathbb{R}$, com $\inf G\left(\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}\right) = 0$ e $G\left(\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}\right) = \sup_{\mathbb{Q}\in\mathcal{P}}\left\{\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}(-X) - \rho(X)\right\}$. Complementando esse resultado, Jouini et al. (2006) mostram que medidas de risco convexas com lei invariante, definidas em espaços padrão, possuem automaticamente a propriedade de continuidade de Fatou. Os autores provam alguns resultados para a propriedade de Lebesgue. Visando unificar esses resultados, Kusuoka (2007) apresenta uma prova simples da representação de medidas de risco convexas com lei invariante juntando as provas de Kusuoka (2001), Frittelli e Gianin (2005) e Jouini et al. (2006). Svindland (2010) generaliza o resultado de Jouini et al. (2006), que mostra que medidas de risco convexas com lei invariante tem a propriedade de Fatou, relaxando a suposição que o espaço de probabilidade é padrão, mantendo apenas a necessidade de ser não atômico. Ainda, o autor leva o resultado para medidas de risco quase convexas.

Complementando, Filipović e Svindland (2012) estabelecem uma correspondência entre medidas de risco convexas com lei invariante em L^∞ e L^1. Autores provam que o espaço canônico para esta classe de medidas é L^1, isto é, com valor esperado finito. Svindland (2009) apresenta um subgradiente (conjunto de medidas de probabilidade que otimizam a representação dual) generalizado para medidas de risco convexas com lei invariante fechadas em L^1. Resultados relacionando esse subgradiente com outras representações são apresentados, implicações para alocações e exemplos de medidas específicas são dados. Estendendo, Angelsberg et al. (2011) consideram a classe de medidas de risco convexas com lei invariante, no caso em que a função de ponderação é contínua e pode ser computada de diversas maneiras.

A representação dual tem a forma $\rho_{h,p}(X) = \sup_{\mathbb{Q}\in\mathcal{P}\cap L^p(h)} \int_0^1 [AVaR^{\alpha}(X)\mathbb{Q}(\alpha) - \mathbb{Q}^p(\alpha)h(\alpha)]d\alpha$, onde $h : (0,1] \to (0,\infty)$ é uma função positiva e estritamente decrescente, e $1 < p < \infty$. Os autores provêm condições necessárias e suficientes para que uma posição seja representada por essa classe de medidas, além de fornecer dois exemplos de medidas nessas classes. Drapeau et al. (2011) apresentam representações robustas para medidas de risco quase convexas com lei invariante que respeitam o axioma de Monotonicidade, mostrando que essas medidas possuem a propriedade de Fatou. A representação dual obtida tem a forma matemática $\rho(X) = \sup_{\mathbb{Q}\in\mathcal{P}^{\infty}} \left\{\int_0^1 AVaR^{\alpha}(X)\mathbb{Q}(d\alpha) - \alpha_{min}(\mathbb{Q})\right\}$, com $\alpha_{min}(\mathbb{Q}) = \sup_{\mathbb{Q}\in\mathcal{P}^{\infty}} \left\{\int_0^1 AVaR^{\alpha}(X)\mathbb{Q}(d\alpha) - \rho(X)\right\}$, $\mathcal{P}^{\infty} = \left\{\mathbb{Q} \in \mathcal{P} : \int_0^1 \mathbb{Q}(\alpha)d\alpha \leq 1, P \text{ é limitado}\right\}$ e $X \in L^{\infty}$. Extensão para o caso dinâmico com Consistência Dinâmica é apresentado, bem como exemplos.

Bäuerle e Müller (2006) utilizam o conceito de Invariância de Lei para estabelecer relação entre medidas de risco e ordens de dominância estocástica. Autores mostram que medidas de risco com axiomas de Monotonicidade e Invariância de Lei, definidas em espaços padrão respeitam a dominância estocástica de primeira ordem, ou seja, se $X \leq_{1std} Y$, então $\rho(X) \geq \rho(Y)$. Ainda, medidas de risco com axiomas de Monotonicidade, Convexidade e Invariância de Lei, além de possuir a propriedade de Fatou, definidas em espaços padrão respeitam a dominância estocástica de segunda ordem, isto é $X \leq_{2std} Y$ implica em $\rho(X) \geq \rho(Y)$. Assim, para medidas de risco convexas com lei invariante se t que $\rho(E_{\mathbb{P}}[X|Y]) \leq \rho(X)$. Complementando, Cherny e Grigoriev (2007) mostram que toda medida de risco convexa, definida em espaço de probabilidade não atômico, com axioma de Monotonicidade Dilatada é lei invariante e vice-versa. Nesse caso, medidas convexas com lei invariante respeitam a dominância estocástica de segunda ordem. Também relacionando com o axioma de Invariância de Lei, Acciaio e Svindland (2013) mostram que a propriedade de convexidade, que é tão desejada para medidas de risco, não é interessante quando se consideram as distribuições de probabilidade na definição das medidas, uma vez que é a concavidade de distribuições é que está conectada com a convexidade das medidas. Resultados nesse sentido são provados num contexto de invariância de lei, inclusive para o caso comonótono.

2.2.4 Extensões: abordagem multivariada

Trazendo a discussão para o campo multivariado, Hamel e Heyde (2010) apresentam definições, axiomas, conjuntos de aceitação e representação dual de medidas de risco convexas no L_D^p com resultados vetoriais, semelhantes ao de Jouini et al. (2004) para o caso de medidas coerentes. De forma complementar, Hamel et al. (2011) abordam o mesmo problema, porém o caso estudado é o de mercados cônicos considerando a atualização de informação de forma dinâmica. Por sua vez, Labuschagne e Roux (2014) estendem a teoria de medidas de risco convexas multivariadas considerando produtos de espaços vetoriais, ao invés do espaço L_D^p. A questão de axiomas, representação dual e conjuntos de aceitação é estabelecida e propriedades de continuidade determinadas. Já Ekeland e Schachermayer (2011) apresentam resultados de representação de medidas de risco convexas multivariadas com lei invariante no espaço L_D^∞, através de definições de comonotonicidade e coerência forte.

De modo um pouco diferente, Burgert e Rüschendorf (2006) apresentam resultados para medidas de risco convexas multivariadas que resultam em um número e não um vetor, considerando posições do tipo $X = (X_1 + \cdots + X_N) \in L_N^p$. Os auotres apresenta definição de composição com base nos riscos marginais, esclarecendo a relação com axiomas, conjuntos de aceitação e representação dual de medidas convexas. Em seguida, abordam a questão de invariância de lei e continuidade de Fatou para determinar resultados de dominância. De modo complementar, Rüschendorf (2006) adapta os resultados de medidas convexas com lei invariante para o caso multivariado. Com base no conceito de medida de risco de máxima correlação, representação dual de medidas convexas com lei invariante são determinadas, do mesmo jeito que são baseadas no AVaR para o caso univariado. Wei e Hu (2014) complementam essa abordagem considerando casos independentes de modelo, convertendo axiomas, conjunto de aceitação e representação dual.

2.2.5 Extensões: abordagem dinâmica

Assim como ocorre com medidas coerentes, também existe uma corrente de estudos que leva as medidas de risco convexas para uma estrutura dinâmica. A raiz desse conceito é o de risco condicional. A esse respeito, Ruszczyński e Shapiro (2006) derivam os resultados de medidas de risco convexas (coerentes) condicionais a informação anterior, adaptando todos os resultados conhecidos. A questão da multiplicidade de medidas de probabilidade é abordada para obter muitos dos resultados. Representação em função de expectativas condicionais, exemplos de medidas condicionais e sua utilização em problemas de otimização são discutidos. Kovacevic (2012) apresenta resultados sobre medidas de risco convexas condicionais em espaços L^1 generalizados. Todo o corpo é baseado na representação dual, se valendo da questão de composições através da junção de medidas de probabilidade. Medidas dinâmicas são então compostas por medidas estáticas. Cheridito et al. (2004), considerando espaços de processos càdlàg (contínuos à direita e limitados à esquerda) com tempo contínuo, estendem a teoria de medidas de risco convexas. Resultados para processos limitados R^{∞} são a base do estudo, mas uma extensão para espaços R^p é apresentada. Teoremas similares a aqueles tradicionais em espaços L^p são apresentados, estabelecendo resultados para a relação entre axiomas e conjuntos de aceitação, bem como representação dual. Complementando, Cheridito et al. (2005) generalizam todos os resultados para o espaço de processos cádlág ilimitados, ou seja, consideram o espaço R^0. Resultados para o espaço L^0 são generalizados, e exemplos são fornecidos. Estendendo, Penner e Réveillac (2014) consideram medidas de risco convexas para processos cádlág, incorporando maiores detalhes nas medidias de probabilidade da representação dual e incerteza de taxas de juros, e relaxando o axioma de Invariancia de Translação para a Transalação Subaditiva. Adaptação para o conceito de g-expectativas com equações diferenciais estocásticas recursivas também é feita, se valendo dos detalhes da etapa anterior.

Por sua vez, Frittelli e Maggis (2014) estudam medidas de risco quase convexas condicionais definidas em módulos do espaço L^0, obtendo a seguinte representação dual $\rho(X) = \sup_{\mathbb{Q} \in \mathcal{P}^{\mathcal{G}}} R\big(E_{\mathbb{Q}}[-X|\mathcal{G}], \mathbb{Q}\big)$, onde $\mathcal{P}^{\mathcal{G}} = \left\{\mathbb{Q} \in \mathcal{P} : E_{\mathbb{P}}\left[\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} |\mathcal{G}\right] = 1\right\}$ e a função de perda tem a forma $R(Y, \mathbb{Q}) = \inf_{\xi \in L^p(\mathcal{G})} \{\rho(\xi) \colon E_{\mathbb{Q}}[-X|\mathcal{G}] = Y\}$. No caso de Translação Subaditiva, a função muda para $R(Y, \mathbb{Q}) = \inf_{\xi \in L^p(\mathcal{G})} \{\rho(\xi) \colon E_{\mathbb{Q}}[-X|\mathcal{G}] \geq Y\}$. Filipović et al. (2012) consideram medidas condicionais oriundas de espaços L^p ou baseadas em módulos para definir medidas de risco convexas com invariância ou subvariância de translação. Representação dual com base em teoria convexa é o centro do trabalho. De modo análogo, Guo et al. (2014) apresentam resultados teóricos de como relacionar as definições de medidas de risco convexas condicionais definidas em espaços L^p ou em módulos. Tal relação se dá pela concatenação do envoltório convexo de espaços L^p, de tal modo que é possível unificar as definições. A representação dual baseada na teoria de convexidade é o centro do trabalho.

De modo a trazer para o campo dinâmico, Detlefsen e Scandolo (2005) abordam um contexto em que informação adicional é disponível, caracterizando essas medidas através de conjuntos de aceitação. A representação dual tem a forma $\rho(X) = \underset{\mathbb{Q}\in\mathcal{P}_{\mathcal{G}}}{\text{ess.sup}}\big(E_{\mathbb{Q}}[-X|\mathcal{G}] - \alpha(\mathbb{Q})\big)$, com $\mathcal{P}_{\mathcal{G}} = \{\mathbb{Q} \in \mathcal{P} : \mathcal{P} = \mathbb{Q} \text{ em } \mathcal{G}\}$, sendo $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$. Não obstante, um axioma de regularidade é discutido. Seja I_A uma função indicadora se determinado elemento pertence ao conjunto *A*. Tal axioma diz que:

Regularidade: se $XI_A = YI_A$, então $\rho(X)I_A = \rho(Y)I_A, \forall X, Y \in L^\infty, A \in \mathcal{G}$.

Tal axioma implica em $\forall X, Y \in L^\infty, A \in \mathcal{G}$, $\rho(XI_A) = \rho(X)I_A$ e $\rho\big(XI_A + YI_{A^C}\big) = \rho(X)I_A + \rho(Y)I_{A^C}$, onde A^C é o complemento de A. Ainda, os autores mostram que medidas convexas dinâmicas são cunhadas como uma sucessão de medidas convexas condicionais utilizando uma filtração $\mathcal{F}_t = \mathcal{G}$, satisfazendo axiomas de Consistência Dinâmica (no sentido de Riedel (2004)), Recursividade e S*upermartingale*. Os dois últimos axiomas podem ser entendidos como:

Recursividade: $\rho(X_t) = \rho\big(-\rho(X_{t+1})\big), \forall\, X_t \in L^\infty(\mathcal{F}_t)$.

Supermartingale: $\rho(X_t) \geq E_{\mathbb{P}}[\rho(X_{t+1})|\mathcal{F}_t], \forall\, X_t \in L^\infty(\mathcal{F}_t)$.

Recursividade implica em se poder obter o risco atual através do risco futuro, enquanto *Supermartingale* faz o risco atual ser maior que o risco esperado do período seguinte, dada a informação atual.

Kovacevic e Pflug (2009) discutem o axioma de Consistência Dinâmica de medidas de risco convexas, levando em conta os resultados da literatura. A relação com outros axiomas como Recursividade e Monotonicidade de Informação é investigada em um arcabouço multiperíodo. Para o autor, tais axiomas são definidos como:

Consistência Dinâmica: $\rho(X_{t+1}|\mathcal{F}_{t+1}) \geq (\leq)\rho(Y_{t+1}|\mathcal{F}_{t+1})$ implica em $\rho(X_t|\mathcal{F}_t) \geq (\leq)\rho(Y_t|\mathcal{F}_t), \forall\, X_t, Y_t \in L^p(\mathcal{F}_t)$.

Recursividade: $\rho(X_t|\mathcal{F}_t) = \rho(-\rho(X_{t+1}|\mathcal{F}_{t+1})|\mathcal{F}_t), \forall\, X_t \in L^p(\mathcal{F}_t)$.

Monotonicidade de Informação: se $\mathcal{G}_t \subseteq \mathcal{F}_t$, então $\rho(X_t|\mathcal{G}_t) \geq \rho(X_t|\mathcal{F}_t), \forall\, X_t \in L^p(\mathcal{G}_t) \subseteq L^p(\mathcal{F}_t)$.

Monotonicidade de Informação implica em um volume maior de informação não aumentar o risco em relação a um volume menor de informação. Resultados obtidos pelos autores mostram que a Consistência Dinâmica pode ser conflitante com a Monotonicidade de Informação.

Cheridito et al. (2006) derivam resultados de axiomas, conjuntos de aceitação e representação dual para medidas de risco convexas dinâmicas a tempos de parada de processos estocásticos. Esses conceitos são baseados na colagem de medidas estáticas condicionais e seus conjuntos de probabilidade da representação dual. Isso é realizado devido ao axioma de Consistência Dinâmica exposto, que possui a forma:

Consistência Dinâmica: $\rho\left(X_{t,T}\right) = \rho\left(X_{t,s} - \rho\left(X_{s,T}\right)\right), \forall\, X_t \in L^p(\mathcal{F}_t), t \leq s \leq T.$

Diversos resultados são provados com base nessa noção. Acciaio et al. (2012) ampliam esses resultados utilizando uma estrutura em que a incerteza advém da medida de probabilidade e da taxa de juros. Os autores apresentam um corpo teórico para medidas de risco convexas dinâmicas, apresentando toda a questão de axiomas, espaços de aceitação e representação dual. O caso de translação subaditiva é investigado e exemplos para AVaR e medida entrópica são analisados.

Ainda sobre medidas convexas dinâmicas, Föllmer e Penner (2006) apresentam definições e conceitos com base em resultados oriundos do axioma de Consistência Dinâmica no sentido de Riedel (2004). Fundamentalmente, os autores apresentam resultado que mostra que a evolução conjunta da medida de risco e sua função de penalidade formam um *supermartingale* sob as condições de Fatou e de Consistência Dinâmica. Por sua vez, Jobert e Rogers (2008) analisam medidas de risco convexas dinâmicas através da noção de uma família de operadores côncavos que satisfazem axiomas, ao invés da usual abordagem de conjuntos de aceitação. Já Klöppel e Schweizer (2007) apresentam resultados para medidas de risco convexas dinâmicas com algumas diferenças sobre outras abordagens existentes, como a generalização da representação dual, espaços de aceitação e Consistência Dinâmica, não exigindo o tradicional axioma de Normalização.

Tutsch (2008) discute como atualizar medidas de risco convexas, classificando a questão de Consistência dinâmica em forte e fraca, de modo a provar alguns resultados. Ainda, uma ordem reversa de consequência é apresentada, similar a implicação contrária do axioma de Monotonicidade de Informação. Resultados provados mostram que nem sempre tal ordem reversa coincide com a Consistência Dinâmica comum. Stadje (2010) estende medidas de risco convexas dinâmicas de tempos discretos para contínuos, utilizando equações diferenciais e tomando limites de diferenças entre um período e outro. Resultados de representações dual são demonstrados e discutidos, com exemplos de algumas medidas como VaR. Ainda sobre esse tópico, Cheridito e Kupper (2011) apresentam medidas de risco convexas dinâmicas com o axioma de Consistência Dinâmica como composição de medidas estáticas através de uma função dinâmica geradora. Bion-Nadal (2008) apresenta resultados para medidas de risco convexas dinâmicas com base na propriedade de estabilidade de medidas de probabilidade, refletidas na estabilidade das funções de penalização. O autor chama essa estabilidade de condição co-cíclica. Com base nessa condição, o autor constrói medidas de risco dinâmicas através de *martingales*. Já Bion-Nadal (2009) apresenta uma representação de composição de funções de penalidade que leva à Consistência Dinâmica de medidas de risco convexas contínuas acima. A relação dessa propriedade com outros axiomas, como outras versões da Consistência Dinâmica e Regularidade é investigada. Construções de famílias de medidas desse tipo são também feitas com *martingales*.

Uma corrente de estudos visa definir medidas de risco utilizando expectativas não lineares, uma vez que toda medida de risco é de certa forma uma expectativa em relação a uma medida de probabilidade (representação dual). Nesse sentido, Gianin (2006) utiliza *g*-expectativas, que são baseadas em funções não lineares de equações diferenciais estocásticas, para definir medidas de risco convexas estáticas e dinâmicas. Por meio de correspondências entre axiomas das *g*-funções e axiomas de medidas de risco, os resultados habituais sobre axiomas, conjuntos de aceitação e representação dual são provados. A questão da Consistência Dinâmica é debatida em detalhes. Complementando, Jiang (2008) estende os resultados da relação entre *g*-expectativas e medidas de risco convexas, com resultados sobre Convexidade, Subaditividade e Invariância de Translação sem supor necessariamente a continuidade da função geradora *g*. Delbaen et al. (2010) apresentam representações para a função de penalidade no caso de medidas convexas dinâmicas considerando *g*-expectativas sob uma série de suposições. As representações são obtidas para tempo contínuo, verificando axiomas e conjunto de aceitação. Mais além, Xu (2014) estende *g*-expectativas condicionais para o caso multivariado, obtendo medidas de risco convexas multivariadas dinâmicas. Resultados para axiomas, conjunto de aceitação e representação dual são apresentados, bem como aplicações para problemas financeiros. Kromer e Overbeck (2014) consideram g-expectativas, vinculadas com equações diferenciais estocásticas recursivas, em problemas de alocação, mostrando que são diretamente ligadas com medidas de risco. Rerpesentação dual para medidas de risco convexas é apresentada, com medidas coerentes como caso especial. Exemplo da medida entrópica dinâmica é investigado para ilustração.

Por sua vez, Weber (2006) caracteriza conjuntos medidas de risco convexas com lei invariante por medidas de probabilidade, que são do tipo $\Theta : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$, com $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ sendo o conjunto de medidas de probabilidade definidas na reta dos números reais. O autor mostra a relação entre esse conceito e o habitual para variáveis aleatórias, conforme $\rho : L^p \rightarrow \mathbb{R}$, é $\rho(X) = \Theta\big(\mathbb{Q}(X)\big)$, com $\mathbb{Q} \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$. Ainda, é provado que essas medidas estão relacionadas com a noção de utilidade, possuindo caracterização dual ligada e conjunto de aceitação ligado a uma função de perda convexa ℓ, com a forma $A_\Theta = \{\mathbb{Q} \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) : \Theta(\mathbb{Q}) \leq 0\} = \{\mathbb{Q} \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) : \int \ell(-\mathrm{x})\mathbb{Q}(dx) \leq z \in \mathbb{R}\}$. O autor define uma caracterização axiomática para o caso dinâmico, apresentando propriedades de Consistência Dinâmica. O autor mostra que medidas dinâmicas desse tipo podem ser representadas por vetores de medidas estáticas, dadas algumas condições. Kupper e Schachermayer (2009) mostram que se uma medida de risco tem propriedade de Fatou, é contínua, e possui axiomas de Normalização, Invariância de Lei e Monotonicidade, então ela é um equivalente certo negativo. Assim, tal medida tem a forma $\rho(X_t) - u^{-1} \circ E_{\mathbb{P}}[u(X_t)]$, onde u é uma função contínua, estritamente crescente. Complementando, a única medida de risco dinâmica com axiomas de Invariância de Lei, Relevância e Consistência Dinâmica é a entrópica, sendo convexa ou coerente conforme o valor assumido pelo parâmetro de aversão ao risco. De forma complementar, Föllmer (2014) confirma resultados de que medidas convexas com axiomas de Invariância de Lei e Consistência Dinâmica são entrópicas. Resultados para o caso espacial, quando o condicionamento é por etapa numa rede ao invés do tempo, são apresentados.

Feinstein e Rudloff (2013) estendem a teoria de medidas de risco convexas multivariadas definidas em conjuntos vetoriais para o campo dinâmico. Extensões de axiomas, conjunto de aceitação e representação dual são deduzidas em detalhes. Especial atenção é dada para a Consistência Dinâmica. Alguns exemplos vão ilustrando a abordagem ao longo das etapas do trabalho. Já Feinstein e Rudloff (2014) apresentam um corpo teórico para medidas de risco convexas multivariadas vetoriais definidas em conjuntos que são consistentes no tempo. Axiomas, conjuntos de aceitação e representação dual são expostos em detalhes, mostrando que a questão da consistência dinâmica, ligada com recursividade, é baseada na representaçao das funções de penalização e sua propriedade de co-ciclicidade. Para o caso coerente, representação dual é baseada na colagem de medidas de probabilidade.

2.3 Medidas de risco espectrais e de distorção

2.3.1 Medidas de risco espectrais

Outra categoria de medidas de risco são as medidas espectrais. Ao contrário de outras classes de medidas de risco, as medidas espectrais levam em conta a função de aversão ao risco de cada indivíduo. Mais especificamente, a ES pondera todos os cenários igualmente, ao passo que medidas espectrais tendem a dar mais peso para piores cenários. O conceito de medidas espectrais de risco é proposto por Acerbi (2002). A ideia fundamental é que toda medida de risco coerente pode ser representada por uma soma ponderada convexa de medidas de risco coerentes. Nesse contexto, considere uma medida do tipo $\rho(X) = -\int_0^1 F_X^{-1}(\alpha)\phi(\alpha)d\alpha$, onde F_X^{-1} é a função inversa da distribuição de probabilidade de X, representando o quantil dos dados e ϕ é uma função de ponderação definida do agente com domínio sobre toda amplitude de probabilidades cumulativas $0 \leq \alpha \leq 1$. ρ define a classe de medidas de risco baseadas em quantis, e cada medida de risco individual nessa classe é caracterizada por sua própria função de ponderação ϕ. Um agente que é avesso ao risco pode preferir trabalhar com uma medida de risco que considere sua aversão. Exatamente neste ponto que se encaixam as medidas de risco espectrais. ϕ reflete a aversão ao risco do agente.

Acerbi (2002) define que medidas de risco espectrais, são aquelas medidas que possuem funções geradoras ϕ que atendem as propriedades, para $0 \leq \alpha \leq 1$, de não negatividade ($\phi(\alpha) \geq 0$), normalização ($\int_0^1 \phi(\alpha)d\alpha = 1$) e não crescimento ($\phi'(\alpha) \leq 0$). A primeira propriedade requer que os pesos sejam não negativos, garantindo o axioma de Monotonicidade da medida, ao passo que a segunda exige que as ponderações somassem a unidade, garantindo o axioma de Invariância de Translação. Mas a propriedade chave é a terceira, que requer que os pesos atribuídos a maiores perdas não seja menor que os pesos atribuídos a perdas menores, a fim de refletir a aversão ao risco. Por depender diretamente da função de probabilidade dos dados, essa classe de medidas possui automaticamente o axioma de Invariância de Lei.

Complementando, Inui e Kijima (2005) mostram que qualquer medida de risco espectral que seja coerente é uma combinação convexa da ES, e que a ES fornece o valor mínimo de risco entre a classe de medidas coerentes. Kusuoka (2001) mostra que essa representação é válida para medidas de risco coerentes com axiomas de Invariância de Lei e Aditividade Comonotônica, coincidindo com $\rho(X) = \int_0^1 AVaR^{\alpha}(X)\mathbb{Q}(d\alpha)$, com $\mathbb{Q} \in \mathcal{P}_{(0,1]}$. Cherny (2006), chamando esse tipo de medidas de WVaR, mostra que esse tipo de medidas possui boas propriedades, sendo estritamente subaditiva, isto é, $\rho(X+Y) < \rho(X) + \rho(Y)$ se X e Y não são comonotônicos. A conexão entre essas representações é pela igualdade $\phi(\alpha) = \frac{1}{\alpha}\int_0^{\alpha} \mathbb{Q}(d\alpha)$. Pichler (2013) cria uma norma associada à medida de risco em questão, definida como $\|X\|_{\rho} = \rho(|X|)$, e gera um espaço L^{ρ} onde a medida é contínua com respeito a essa norma. Tem-se que $L^{\infty} \subset L^{\rho} \subset L^1$, de modo que considerar espaços maiores que o e espaços maiores que o L^1 não faz sentido. Tal caracterização se dá conforme o espaço onde a função espectral é definida. Resultados comprovando a ideia são apresentados, bem como espaços duais são derivados.

Conforme apontado por Dowd et al. (2008), um ponto fraco dessa definição é a terceira propriedade, pois ela não exclui medidas que são neutras ao risco. Esse autor cita como exemplo a ES, que se encaixa nas condições mas não acomoda essa aversão crescente. Para eliminar esses casos, Dowd et al. (2008) substituem a terceira propriedade por algo mais forte, o decrescimento ($\phi'(\alpha) < 0$). Essa nova condição garante que os pesos aumentam conforme as perdas aumentam. Dessa forma, se nota que VaR e ES não são medidas espectrais no sentido estrito, porquanto a ponderação deles é, respectivamente, todo o peso no valor do quantil e igualmente ponderado entre todos os valores após o quantil. Demais valores possíveis assumem peso zero. Em casos bem comportados, os autores esperariam que os pesos aumentassem de forma suave ao passo que aumentariam de forma mais brusca para indivíduos muito avessos ao risco. Essa classe de medidas, com a propriedade de decrescimento, conforme Acerbi (2002), não é atrativa apenas porque leva em consideração a aversão ao risco do indivíduo, mas também porque tais medidas são coerentes no sentido de Artzner et al. (1999).

Csóka et al. (2007) mostram que uma medida de risco é coerente com axiomas de Invariância de Lei e Aditividade Comonótona se e somente se ela for uma medida de risco espectral no sentido estrito, respeitando a propriedade de decrescimento. Entretanto, apesar dessas propriedades teóricas interessantes, ainda resta um grande problema para aplicações práticas: a escolha da função ϕ. Não há como estimar o modo que um indivíduo reage ao risco com precisão, caindo em um problema muito semelhante com o de funções de utilidade. Ainda assim, Dowd et al. (2008) investigam situações com funções exponenciais e de potências. Os seus resultados indicam que embora essas funções tenham características interessantes, tais como suavidade na evolução do grau de aversão, elas podem levar a resultados indesejados dependendo da parametrização escolhida. Todavia, Brandtner (2014) rebate essas críticas feitas em relação a funções espectrais exponenciais e de potências, mostrando que elas levam a respeitar graus de aversão ao risco.

2.3.2 Medidas de risco de distorção

Intimamente relacionada com o conceito de medidas espectrais está a classe de medidas de distorção, introduzidas por Wang (1996) visando problemas de seguros, que podem ser definidas basicamente como o retorno esperado sob uma transformação da função de probabilidade, nomeada função de distorção. Tal função de distorção $g : [0,1] \rightarrow [0,1]$, com $g(0) = 0$ e $g(1) = 1$, é crescente, definindo as medidas de distorção como sendo $\rho(X) = \int_0^1 F_{-X}^{-1}(u)dg(u)$. Como é originalmente para seguros, se trabalha com perdas, ou seja, $-X$ ao invés de X. Wang et al. (1997) discute as medidas de risco de distorção, argumentando em favor de questões de continuidade e mostrando que as propriedades da medida são intimamente ligadas com as da função g. Assim, a escolha dessa função de distorção vai definir a medida de risco e suas propriedades. Wirch e Hardy (2000) mostram que medidas de distorção com função g côncava são coerentes, e respeitam a dominância estocástica de segunda ordem se e somente se forem estritamente côncavas.

Gzyl e Mayoral (2008) estabelecem relacionamento direto entre medidas de risco de distorção e medidas de rico espectrais através da relação $g'(\alpha) = \phi(\alpha)$, se g for côncava. Assim como as medidas espectrais, as medidas de distorção caem no problema da definição de g. Assim, para g côncava, as medidas de risco de distorção são coerentes e possuem axiomas de Invariância de Lei e Aditividade Comonótona. Nesse sentido, Pflug (2006a) mostra que medidas de distorção podem ser representadas como combinações da ES, de modo similar a representação de Kusuoka (2001). Tal representação é da forma $\rho(X) = \int_0^1 AVaR^{\alpha}(X)g(d\alpha)$. Pode se estabelecer que existe uma conexão direta entre medidas de distorção com função g

côncava, medidas espectrais e medidas coerentes com axiomas de Invariância de Lei e Aditividade Comonótona com base no integrador da representação dual conforme $g'(\alpha) = \phi(\alpha) = \frac{1}{\alpha}\int_{1-\alpha}^{1} \mathbb{Q}(d\alpha)$.

Song e Yan (2009a) apresentam em maiores detalhes as representações duais destes e de outros tipos de medidas de risco. Dhaene et al. (2012) discutem a questão da representação de medidas de distorção por quantis, com teoremas que mostram que cuidado precisa ser tomado na definição de quantil usada no caso de distribuição de probabilidade não contínua. Por sua vez, Belles-Sampera et al. (2013) mostram que ordenadores de lógica *fuzzy* são intimamente ligados com o conceito de medidas de distorção devido a integral de Choquet na sua representação dual. Resultados nesse sentido são provados e exemplos para VaR e TVaR são oferecidos pelos autores. Balbás et al. (2009) estudam propriedades que uma medida de risco deve satisfazer a fim de evitar escolhas de portfólio inadequadas. Duas novas propriedades são apresentadas, a completude, que exige que a medida use toda a informação sobre a distribuição dos dados, e a adaptabilidade, que força a medida a usar a informação adequadamente. Autores mostram que essas propriedades são satisfeitas quando o crescimento estrito da função de distorção existe.

Uma possibilidade, assim como nas outras classes de medidas de risco, é a proposição de novos tipos de medidas de distorção, como o trabalho de Tsukahara (2009), que introduz famílias paramétricas de medidas de distorção, precisamente com um parâmetro, como extensão da representação da ES, investigando suas propriedades e discutindo seu uso. A derivação dessas medidas é baseada na representação de medidas de risco coerentes com axiomas de Invariância de Lei e Aditividade Comonótona. A abordagem do autor é visando comparações com a ES por meio de exemplos numéricos, discutindo sua estimação empírica e sua utilização na gestão de risco. Já Hürlimann (2006) apresenta uma classe de medidas de distorção, não necessariamente coerentes, que são potencias de potencias do valor esperado de diferenças de uma posição distorcida X^g com relação a algum limiar, conforme a expressão $\rho(X) = E_{\mathbb{P}}[|X^g - b|^{a}]^{\theta}$, onde $a, \theta \geq 0$ e $L \leq b \leq U$, com L e U são limiares. A variância é um caso especial dessa subclasse, por exemplo. Propriedades e representação da subclasse são apresentadas.

Zhu e Li (2012) introduzem o conceito de medida de risco de distorção na cauda, para verificar riscos de perdas excedentes ao VaR. Tais medidas têm representação conforme $\rho(X|X > VaR^{\alpha}) = \int_0^1 F^{-1}_{(-X|-X>VaR^{\alpha})}(u)dg(u)$, ou seja, apenas se adapta a distribuição de probabilidade para captar informação da cauda. Ainda, os autores derivam relações lineares assintóticas com o VaR para casos de distribuições com caudas pesadas. Exemplos envolvendo distribuições invariantes a localização, escala e formato são apresentadas para ilustrar a abordagem. Fasen e Svejda (2012) estendem o conceito de medidas de risco de distorção para o campo dinâmico. Para tanto, os autores utilizam os conceitos de Roorda e Schumacher (2007) para definições de Consistência Sequencial, Condicional e Dinâmica para medidas de risco de distorção dinâmicas, as utilizando em resultados que ligam axiomas e representação dual.

2.4 Medidas de desvio generalizado

2.4.1 Teoria básica

As classes de medidas de risco apresentadas até aqui são diretamente ligadas com o valor esperado ou monetário de uma posição. Porém, em muitas situações há interesse em tratar o quanto um ativo fica longe de seu valor esperado ao invés de quanto ele excede algum limite proposto. É nessa lacuna, de variabilidade, que se encontram as medidas de desvio generalizadas. Essa classe de medidas de risco é proposta por Rockafellar et al. (2006). Uma justificativa dada pelo autor por seu interesse em criar tais medidas, é a limitação de medidas de dispersões habituais serem simétricas, isto é, considerarem ganhos e perdas como desvios similares.

Mantendo a notação empregada inicialmente, apresentamos formalmente o que Rockafellar et al. (2006) define como sendo uma medida de desvio. Assim, $\mathcal{D} : L^2 \to \mathbb{R}_+$ é uma medida de desvio se atente aos seguintes axiomas:

Insensibilidade a Translação: $\mathcal{D}(X + C) = \mathcal{D}(X), \forall\, X \in L^p, C \in \mathbb{R}$.

Homogeneidade Positiva: $\mathcal{D}(0) = 0$ e $\mathcal{D}(\lambda X) = \lambda \mathcal{D}(X), \forall\, X \in L^p, \lambda > 0$.

Subaditividade: $\mathcal{D}(X + Y) \leq \mathcal{D}(X) + \mathcal{D}(Y), \forall\, X, Y \in L^p$.

Não Negatividade: $\mathcal{D}(X) \geq 0, \forall\, X \in L^p$, com $\mathcal{D}(X) > 0$ para X não constante.

O primeiro axioma indica que o desvio em relação ao valor esperado não muda se for adicionada uma constante. O segundo axioma é a Homogeneidade Positiva, ao passo que o terceiro é a Subaditividade. Esses dois juntos implicam que uma medida $\mathcal{D}$ de desvio é convexa. O quarto axioma é similar ao conceito de relevância, que indica que qualquer posição não constante apresenta desvio, e este não é negativo. Dessa forma, se tem que $\mathcal{D}$ captura o grau de incerteza em X, atuando como se fosse uma norma em L^p, exceto por não exigir simetria. Um outro axioma que é apresentado neste trabalho, é o de Dominância de Amplitude Inferior, definido como:

Dominância de Amplitude Inferior: $\mathcal{D}(X) \leq E[X] - \inf X, \forall X \in L^p$.

Em seu trabalho, Rockafellar et al. (2006) apresentam alguns exemplos de medidas de desvio e exploram suas propriedades, como a variância e o semi-desvio. Os autores derivam ainda uma representação dual para as medidas de desvio generalizado, que possui forma matemática da ordem $\mathcal{D}(X) = E_{\mathbb{P}}[X] - \inf_{\mathbb{Q} \in \mathcal{P}^{\mathcal{D}}} E_{\mathbb{Q}}[X]$, com $\mathcal{P}^{\mathcal{D}} \in L^2$ sendo um conjunto não vazio, fechado e convexo, de tal modo que para cada X não constante, existe $\mathbb{Q} \in \mathcal{P}^{\mathcal{D}}$ com $E_{\mathbb{Q}}[X] \leq E_{\mathbb{P}}[X]$. Dessa forma, é possível representar tal conjunto como $\mathcal{P}^{\mathcal{D}} = \left\{\mathbb{Q} \in \mathcal{P} : E_{\mathbb{P}}\left[\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}\right] = 1, \mathcal{D}(X) \geq E_{\mathbb{P}}[X] - E_{\mathbb{Q}}[X], \forall X \in L^p\right\}$. Se $\mathcal{D}$ possui o axioma de Dominância de Amplitude Inferior, então $\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} \geq 0, \forall \mathbb{Q} \in \mathcal{P}^{\mathcal{D}}$. O conjunto $\mathcal{P}^{\mathcal{D}}$ unicamente definido para uma medida de desvio generalizado $\mathcal{D}$ é chamado envelope de risco. Com base nessa notação, resultados mais gerais sobre operações com envelopes de risco são apresentados, bem como representações para diversos exemplos de medidas de risco.

Outra propriedade fundamental de medidas de desvio é que, conforme provado pelo autor, elas estão diretamente ligadas com medidas de risco coerentes no sentido de Artzner et al. (1999), e vice-versa. Formalmente, a relação entre essas duas classes de medidas é apresentada abaixo.

$$\mathcal{D}(X) = \rho(X - E_{\mathbb{P}}[X]).$$

$$\rho(X) = E_{\mathbb{P}}[-X] + \mathcal{D}(X).$$

Essa relação se mantém desde que $\mathcal{D}(X) \leq E_{\mathbb{P}}[X] - \inf\ X$, isto é, a medida de desvio generalizado possua o axioma de dominância de amplitude inferior e $\rho(X) \geq E_{\mathbb{P}}[-X]$ seja uma medida de risco coerente limitada pela expectativa. Os autores mostram que, em termos de representação dual se tem $\rho(X) = \sup_{\mathbb{Q} \in \mathcal{P}^{\mathcal{D}}} E_{\mathbb{Q}}[-X]$.

2.4.2 Extensões gerais

Pflug (2006b) investiga a relação entre a representação de subgradientes e as propriedades de medidas de desvio. Em particular, o autor mostra como propriedades de monotonicidade são refletidas pela representação de subgradiente. Mais além, o autor apresenta um corpo de representações duais para medidas de risco monetárias e de desvio, modificando em termos de notação aquelas representações clássicas propostas nos artigos seminais de cada classe de medidas. Uma lista de exemplos é fornecida. De maneira mais completa, Rockafellar e Uryasev (2013) apresentam um quadrangular teórico ligando medidas de risco, medidas de desvio, medidas de arrependimento e medidas de erro, através do que os autores chamam de uma estatística geradora. Conexões teóricas entre os quatro conceitos são propostas, bem como sua utilização em problemas de otimização e representação dual. Uma grande lista de exemplos é apresentada.

Assim como nas outras classes de medidas de risco, é possível estender a teoria principal para o axioma de Invariância de Lei. Grechuk et al. (2009), considerando espaços L^p ao invés de L^2, fazem essa expansão da teoria. O axioma diz que:

Invariância de Lei: se $F_X = F_Y$, então $\mathcal{D}(X) = \mathcal{D}(Y), \forall\ X, Y \in L^p$.

Assim como no caso das outras classes de medidas, o axioma implica em posições financeiras com a mesma distribuição de probabilidade terem o mesmo risco. Além disso, é possível estimar as medidas de desvio generalizado a partir de dados reais. Mais além, os autores apresentam diversas representações duais equivalentes, inspiradas naquelas de medidas coerentes com Invariância de Lei, medidas espectrais e medidas de distorção. Tais representações são conforme as formulações matemáticas $\mathcal{D}(X) = \sup_{1-\mathbb{Q} \in \mathcal{P}^{\mathcal{D}}} \int_0^1 q_\alpha(\mathbb{Q}) q_\alpha(X)\, d\alpha$,

$\mathcal{D}(X) = \sup_{\phi(\alpha)\in\Lambda} \int_0^1 \phi(\alpha) q_\alpha(X)\, d\alpha$, $\mathcal{D}(X) = \sup_{\phi(\alpha)\in\Lambda} \int_0^1 AVaR^\alpha(X - E_{\mathbb{P}}[X])\, d\big(\psi(\alpha)\big)$, $\mathcal{D}(X) = \sup_{g(\alpha)\in G} \int_0^1 g(\alpha)\, d(q_\alpha(X))$, onde Λ é um conjunto de funções não crescentes $\phi(\alpha) \in L^q$, $\int_0^1 \phi(\alpha)\, d\alpha = 0$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $\phi(\alpha) = \frac{1}{\alpha}\int_0^\alpha \psi(d\alpha)$, G é uma coleção de funções côncavas positivas $g : (0,1) \to \mathbb{R}$, $g'(\alpha) = -\phi(\alpha)$. Não obstante, os autores mostram que as funções $g : (0,1) \to [0,\infty)$ formam o envelope máximo de $\mathcal{D}$ lei invariante. Tal envelope máximo tem a forma $\mathrm{G}_M = \left\{ g(\alpha) \in \mathfrak{G} : \int_0^1 g(\alpha)\, d\big(q_\alpha(X)\big) \le \mathcal{D}(X), \forall\, X, Y \in L^F \right\}$, onde $\mathfrak{G}$ é o conjunto de funções côncavas $g : (0,1) \to [0,\infty)$ e $L^F \subset L^\infty$ é o espaço de variáveis finitas. Ainda, os autores apresentam o axioma de Aditividade Comonotônica, como sendo:

Aditividade Comonotônica: $\mathcal{D}(X+Y) = \mathcal{D}(X) + \mathcal{D}(Y), \forall\, X, Y \in L^p$ com X e Y comonótonos.

Da mesma forma que para o caso das outras classes, esse axioma representa o caso extremo da Subaditividade quando não há redução do risco pela diversificação quando duas posições têm associação positiva perfeita. As representações duais para medidas de desvio generalizado com axiomas de Lei Invariância e Aditividade Comonótona são as mesmas para o caso não comonótono aditivo, porém sem os operadores de supremo.

Trazendo para a ótica multivariada, Balbás et al. (2012) apresentam versões vetoriais de medidas de desvio generalizado, seguindo a abordagem de Jouini et al. (2004), bem como sua conexão com medidas coerentes vetoriais. Questões referentes aos axiomas e representação dual são debatidas. Já no caso dinâmico, Pflug (2006c) utiliza medidas de risco que consideram a informação multiperíodo. Tais medidas são compostas por um termo de expectativa e outro de desvio com base na medida de desvio generalizado $CVaR^\alpha(X - E_{\mathbb{P}}[X])$. Os axiomas e representação dual do termo de desvio são ajustados para o caso dinâmico.

2.5 Outras classes de medidas de risco

Existem algumas outras classes de medidas de risco com menor destaque na literatura de finanças do que aquelas anteriormente apresentadas. Joaquin (2009) identifica três axiomas que se aceitos em conjunto levam à aceitação do VaR como medida de risco. O autor argumenta que o VaR deve refletir fraca aversão a perdas, considerar apenas perdas realmente capazes de ocorrer, além de não ser afetado por possibilidades de ganhos. De forma complementar, Chambers (2009) caracteriza funções quantílicas como o VaR em um espaço de funções de distribuição de probabilidade. Dessa forma, o VaR deve respeitar axiomas de Covariância Ordinal, Monotonicidade com respeito a dominância estocástica de primeira ordem e semicontinuidade inferior. Já Frittelli et al. (2014), tentando se valer do conceito do VaR, determina medidas de risco definidas com funções de probabilidade nos números reais, da forma $\rho : \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R}$, $\rho(\mathbb{Q}) = -\sup\{m \in \mathbb{R} : \mathbb{Q} \in \mathcal{A}^{\mathcal{P}}\}$, com $\mathcal{A}^{\mathcal{P}} = \{\mathbb{Q} \in \mathcal{P} : F_{\mathbb{Q}} \leq F_m\}$, onde $F_m : \mathbb{R} \rightarrow [0,1]$. Essas medidas têm axiomas de Monotonicidade, Quase Convexidade, Invariância de Lei, e uma variante da Invariância de Translaçao. Representação dual é obtida conforme $\rho(\mathbb{Q}) = \sup_{f \in C_b} R(\int f d\mathbb{Q}, f)$, com C_b sendo o conjunto de funções contínuas e limitadas, e $R : \mathbb{R} \times C_b \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ tem a forma $R(t, f) = \inf_{\mathbb{Q} \in \mathcal{P}} \{\rho(\mathbb{Q}) : \int f d\mathbb{Q} \geq t\}$.

Com foco maior para seguros, cabe citar também a abordagem de limites markovianos de Goovaerts et al. (2003), que deriva medidas de risco baseadas na minimização de um regime markoviano para uma probabilidade na cauda. Uma abordagem mais flexível é adotada por Goovaerts et al. (2004a), que argumentam que não há conjunto de axiomas que defina perfeitamente uma medida de risco. Os autores discutem medidas de risco de melhores práticas ou medidas de risco consistentes, onde cada situação deve ser analisada de forma a considerar suas necessidades e peculiaridades. Goovaerts et al. (2004b) apresentam uma classe de medidas de risco que são aditivas para riscos independentes. Tais medidas possuem axiomas de Invariância de Translação e Monotonicidade com respeito a ordens de relação estocástica, além de propriedades de continuidade. A novidade é o axioma de Aditividade Independente, representado como:

Aditividade Independente: $\rho(X + Y) = \rho(X) + \rho(Y), \forall\, X, Y \in L^p$ com X e Y independentes.

Tal axioma garante que posições independentes tem seu risco somado, como é o caso da variância e de certos prêmios exponenciais para seguros. Relações com conjuntos de axiomas para medidas aditivas comonótonas são apresentados. Ainda focando em seguros, Sordo (2008) considera medidas que generalizam o desvio de cauda proposto em Wang (1998). Essas medidas são a diferença entre expectativas distorcida e não distorcida de uma variável, ou seja, $\rho(X) = E_{\mathbb{P}}[X^g] - E_{\mathbb{P}}[X]$ onde X^g é uma posição X distorcida pela função de distorção g. Esse tipo de medida possui axiomas de Insensibilidade a Translação, Homogeneidade Positiva, Não Negatividade e Aditividade Comonotônica, além de respeitar dominância estocástica de ordens dispersa e valor excedente. Sordo (2009) considera medidas de cauda do tipo $\rho_{\varphi,\alpha}(X) = E_{\mathbb{P}}[\varphi(X - E_{\mathbb{P}}[X|X < F_X^{-1}(\alpha)])|X < F_X^{-1}(\alpha)]$, onde φ é uma função convexa. A CTE e a variância na cauda são casos especiais. Autor mostra que esse tipo de medida respeita a dominância estocástica de ordem de valor excedente.

Kou et al. (2013) apresentam as medidas de risco naturais, que incorporam a robustez com respeito a erros de especificação de modelo e pequenas mudanças nos dados. O conjunto de axiomas dessa classe de medidas não exige a Subaditividade estrita, de tal modo que medidas de requerimento de capital que são baseados no VaR são incluídos. Os axiomas que essa classe de medidas deve respeitar, além dos usuais de Homogeneidade Positiva e Monotonicidade, são os seguintes:

Translação Escalonada: $\rho(X + C) = \rho(X) - sC, \forall\, X \in L^p, C \in \mathbb{R}, s > 0$.

Subaditividade Comonotônica: $\rho(X + Y) \leq \rho(X) + \rho(Y), \forall\, X, Y \in L^p$ com X e Y comonótonos.

Invariância de Lei Empírica: $F_X = F_Y$, então $\rho(\tilde{X}) = \rho(\tilde{Y}), F_{\tilde{X}} = F_X, F_{\tilde{Y}} = F_Y, \forall X, Y \in L^p$.

O primeiro axioma é uma versão escalonada da Invariância de Translação. O segundo é um relaxamento da Subaditividade comum, exigindo respeitar o princípio de diversificação apenas no caso de variáveis comonótonas. O terceiro axioma é uma versão empírica da Invariância de Lei, abrangendo qualquer permutação nos dados utilizados. Essa classe de medidas possui representação dual da forma $\rho(X) = \sup_{W \in \mathcal{W}} \{-\sum_{j=1}^{n} w_j x_{(j)}\}$, com $\mathcal{W} \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto de vetores de pesos do tipo $W = (w_1, \cdots, w_n)$, onde $X_{OS} = (x_{(1)}, \cdots, x_{(n)})$ são estatísticas de ordem de $X = (x_1, \cdots, x_n)$. Complementando, Ahmed et al. (2008) mostram que $\rho(X)$ é uma medida de risco natural se e somente se $\rho'(X_{OS})$ é uma medida de risco coerente. Ainda, esses autores apresentam condições para que $\mathcal{W}$ seja convexo e fechado. Assa e Morales (2010) estendem a teoria de medidas de risco naturais para o espaço de sequencias infinitas, ou seja, quando há infinito dados para computação. Para tanto, uma extensão vetorial da teoria padrão para espaços com dimensao infinita é feito através das ponderações $W \in \mathcal{W}$. Resultados para representação dual são provados, além de alguns exemplos fornecidos.

Ainda sobre esse tipo de medidas de risco, Tian e Suo (2012) estende a teoria de relaxando a Subaditividade Comonotônica por Convexidade Comonotônica. Representação dual é apresentada e analisada, como tendo a forma $\rho(X) = \sup_{W \in \mathcal{W}} \left\{ -\sum_{j=1}^{n} w_j x_{(j)} - \gamma(W) \right\}$, onde $\gamma : W \to [-\infty, +\infty)$ é uma função de penalização. Mais além, Tian e Jiang (2014) estendem essa definição de medidas de risco naturais mudando a Subaditividade Comonotônia para uma Quase Convexidade Comonotônica. Com isso, é obtida a seguinte representação dual $\rho(X) = \sup_{W \in \mathcal{W}} \left\{ R\left(-\sum_{j=1}^{n} w_j x_{(j)}\, , W \right) \right\}$, onde $R : \mathbb{R}^{n+1} \to (-\infty, +\infty]$ é uma função conforme $R(t, W) = \inf_X \left\{ \rho(X) : -\sum_{j=1}^{n} w_j x_{(j)} \geq t \right\}$. Outras representações nesse sentido para os casos coerentes e convexos com Invariância de Lei Empírica, bem como naturais com Subaditividade e Convexidade Comonotônicos são apresentados.

Por sua vez, Song e Yan (2009b) apresentam classes de medidas que não apenas são comonotônicas subaditivas ou convexas, mas também respeitam a dominância estocástica de primeira ordem. Os autores introduzem representações para essas medidas em termos de probabilidades distorcidas, mostrando que tais medidas têm lei invariante. A representação para o caso subaditivo é $\rho(X) = \sup_{g \in \mathcal{g}^{\rho}} (g \circ P)(-X)$, com $\mathcal{g}^{\rho} = \{ g \in \mathcal{g} : (g \circ P)(-X) \leq \rho(X), \forall X \in L^p \}$, onde $\mathcal{g}$ é o conjunto de todas as funções de distorção g. Para o caso convexo a representação fica $\rho(X) = \sup_{g \in \mathcal{g}^{cc}} \{ (g \circ P)(-X) - \alpha(g) \}$, com $\mathcal{g}^{cc} = \{ g \in \mathcal{g} : g \text{ é concava} \}$ e função de penalidade $\alpha(g) = \sup_{\rho(X) \leq 0} (g \circ P)(-X)$. Autor mostra ainda que, no caso de Ω não ter átomos, essas definições coincidem com as de medidas de risco lei invariantes coerentes ou convexas.

Outra abordagem é a de Chen e Yang (2011), que propõe uma classe de medidas de risco que satisfazem os axiomas de Convexidade e Monotonicidade. Essas medidas podem ser representadas como uma Perda Esperada Ponderada (*Weighted Expected Shortfall* – WES), definida como $WES^{\alpha} = -\frac{1}{\alpha} \int_0^{\alpha} w(F_X^{-1}(u)) F_X^{-1}(u) du$, onde w é uma função definida monotonicamente não crescente, sendo positiva e convexa para $X \leq 0$, e não negativa e côncava para $X \leq 0$. Através de uma ponderação não linear, essa classe de medidas pode flexivelmente refletir o grau de aversão ao risco do investidor, estabelecendo inclusive um modelo realista de seleção de portfólio. Resultados empíricos mostram que esse tipo de medida consegue refletir melhor as restrições do mercado, superando portfólios construídos com base na ES. Já Eichorn e Römisch (2005) apresentam a classe de medidas de risco poliédricas que servem para a solução de problemas de otimização estocásticos. Representação dual para essas medidas e sua relação com espaços de aceitação é apresentada. Propriedades para garantir que sejam convexas ou coerentes são introduzidas, e relações com o CVaR são expostas. A extensão para o caso multiperíodo é abordada, bem como a questão teórica de sua utilização em problemas de otimização. Roorda e Schumacher (2011) apresentam uma classe de medidas de risco que, dentre um conjunto de medidas de risco, uma combinação que escolhe a mais otimista é apresentada. Embora não garanta convexidade, a medida é monetária e possui o axioma de Consistência Dinâmica no caso multiperíodo.

Cont et al. (2010) introduzem medidas que só consideram perdas, e não ganhos, da forma $\rho(X) = \rho(\min(X, 0))$ e tem axioma de Monotonicidade e Normalização. Versões convexas são também expostas, e a relação com medidas convexas tradicionais é apresentada, bem como a ligação com a Subaditivade de Translação. Representação dual e o caso com Invariância de Lei são estudados de modo a adaptar os resultados usuais de medidas de risco convexas. Staum (2013) introduz o axioma de Invariância do Excesso para medidas de risco, que implica em insensibilidade à quantidade que o valor de uma carteira excede seu *benchmark*. Esse axioma substitui o de Invariância de Translação. Mais formalmente, o axioma proposto pelo autor exige que:

Invariância do Excesso: se $X^- = Y^-$, então $\rho(X) = \rho(Y)\ \forall\, X, Y \in L^p$.

Em outras palavras, o axioma garante que o risco de duas posições é igual se sua perda em relação ao *benchmark* for igual, independentemente da relação entre X^+ e Y^+. Com base neste axioma, o autor define ainda uma classe de medidas de risco de perda que são úteis quando risco é associado apenas a resultados ruins, ignorando retornos excedentes positivos. Tais medidas possuem, além do axioma de Invariância de Excesso, propriedades de Monotonicidade, Não-Negatividade e Normalização.

Medidas de risco dinâmicas permeiam todas as classes de medidas de risco. O trabalho que iniciou essa corrente foi o elaborado por Wang (1999), que estende o VaR para uma abordagem multiperíodo criando uma classe de medidas de risco que respeita axiomas de Consistência Dinâmica e Recursividade, além de outras propriedades técnicas. Alguns teoremas de representação são apresentados, bem como argumentação em favor de sua utilização. Também com ótica dinâmica, Pflug e Ruszczyński (2005) apresentam medidas multiperíodos para entradas de dinheiro como problemas de otimização, considerando a diferença entre perdas máximas de processos obtidos com informação *ex-ante* e *ex-post*. Sob certas situações, tais medidas de risco são coerentes, mas no geral não precisam ser. Ampliando esse resultado, Bäuerle e Mundt (2008) estendem essa medida de risco para entradas de dinheiro obtida como otimização incorporando a ambiguidade na definição com cenários bayesianos.

3 DESENVOLVIMENTO TEÓRICO

Nesta seção são apresentados aspectos do SD e da medida de risco proposta SDR. Dessa forma, se busca exprimir tanto o conceito, como propriedades teóricas. Visando facilitar a compreensão, o conteúdo da seção foi subdividido em duas partes: i) definições e resultados auxiliares, que compreendem conceitos e sustentações da literatura utilizados para contruir este desenvolviento teórico; e ii) os principais resultados teóricos deste trabalho, onde propriedades do SD e da medida de risco proposta SDR são provados. O corpo textual dessa seção é basicamente composto por definições, teoremas e observações, como é típico para trabalhos teóricos com fundamentação matemática.

3.1 Definições e resultados auxiliares

Como o intuito principal desta seção é demonstrar as propriedades teóricas do SDR como medida de risco, são expostos definições e resultados que permitem desenvolver o corpo teórico da medida proposta. Inicialmente, são definidos, além do SD e SDR, os conceitos do VaR e da ES, fundamentais para o entendimento da medida proposta. A classe de medidas de risco em que o SDR se encaixa é a de medidas de risco coerentes, propostas por Artzner et al. (1999). Como a medida SDR é uma composição entre ES e SD, antes de demonstrar suas características o primeiro passo é entender as propriedades teóricas do SD, uma vez que a ES já é bem definida na literatura. Por se tratar de um coeficiente de dispersão o SD se acomoda mais diretamente dentro do conceito de medidas de desvio generalizado, no sentido proposto por Rockafellar et al. (2006). Assim, definição formal sobre essa classe de medidas é exposta.

Além dos axiomas, são definidas propriedades de continuidade, uma vez que medidas de risco são basicamente funções e necessitam de tais propriedades para terem certos resultados garantidos. Dadas propriedades de continuidade, é possível representar uma medida de risco coerente como o pior resultado esperado possível de X dentre os cenários gerados pelas medidas de probabilidade $\mathbb{Q} \in \mathcal{P}$. Artzner et al. (1999) apresentam este resultado para espaços L^{∞} discretos. Delbaen (2002) generalizam para espaços L^{∞} contínuos, e Inoue (2003) considera espaços $L^{p}, 1 \leq p < \infty$. Também é possível representar medidas de desvio generalizado de maneira similar, porém com alguns ajustes, conforme demosntrado por Rockafellar et al. (2006). Resultados que garantem formalmente tais representações são apresentados.

3.1.1 Definição: VaR, ES, SD e SDR

Definição 1. *Dado um nível de significância* $0 \leq \alpha \leq 1$*:*

$$VaR^{\alpha}(X) = -\inf \{x : F_X(x) \geq \alpha\} = -F_X^{-1}(\alpha) = -q_{\alpha}(X). \tag{1}$$

$$ES^{\alpha}(X) = -E_{\mathbb{P}}[X|X \leq q_{\alpha}(X)] = -e_{\alpha}(X). \tag{2}$$

$$SD^{\alpha}(X) = (E_{\mathbb{P}}[(X - E_{\mathbb{P}}[X|X \leq e_{\alpha}(X)])^2|X \leq e_{\alpha}(X)])^{\frac{1}{2}}. \tag{3}$$

$$SDR^{\alpha}(X) = ES^{\alpha}(X) + (1-\alpha)^{\beta} SD^{\alpha}(X), \beta \geq 0. \tag{4}$$

Observação 1. O VaR é o quantil q_{α} de X, ajustado pelo sinal negativo, e representa uma perda entre 0 e *T* que só é superada com probabilidade α. O VaR não considera informação após o quantil de interesse, apenas o ponto em si. A ES supera essa dificuldade, pois representa a expectativa de *X*, ajustada pelo sinal negativo, uma vez que *X* represente uma perda maior que o VaR, ou seja, uma perda extrema. É proposto no corrente trabalho que a dispersão truncada pela ES seja considerada como um termo de penalidade. Essa medida é precisamente o SD, que é o desvio padrão de resultados que representam perdas maiores que a ES. Outras formas de desvio acima da ES poderiam ser consideradas, como o semi-desvio considerado em Fischer (2003), Krokhmal (2007) e Chen e Wang (2008). Todavia, o semi-desvio leva a valores menores de penalização que o desvio padrão. Além disso, o desvio-padrão possui um melhor sentido intuitivo devido sua ampla utilização no campo financeiro. Com base nessas definições, é possível pensar numa medida que ajuste o risco de perdas extremas esperadas através da sua dispersão. Mais além, duas posições podem apresentar a mesma perda esperada na cauda, porém diferentes dispersões. Enquanto uma leva a uma perda esperada de modo certo, outra pode apresentar dispersão de tal modo que perdas muito maiores possam ocorrer. Com esse raciocínio em mente surge o SDR.

Observação 2. O SDR contempla simultaneamente os dois pilares da definição de risco, pois considera a possibilidade de resultados ruins extremos, bem como a incerteza em relação a um valor esperado. O termo $(1-\alpha)^{\beta}$ representa quanto da dispersão deve ser incluída como penalização da ES, o que pode funcionar como uma proteção. Naturalmente, valores menores de β levam a penalizações maiores, com o caso mínimo de $(1-\alpha)^{\beta}=0$, com $\beta=\infty$, recuperando o valor original da ES, e caso máximo quando $(1-\alpha)^{\beta}=1$, com $\beta=0$, incorporando todo o SD. Ainda, a escolha de valores para β permite incorporar questões subjetivas como o grau de aversão ao risco do agente. Posteriormente é provado que o SDR leva a valores superiores em relação a ES e VaR, e inferiores à perda máxima $\sup -X$, bem como é não crescente em α, de modo que o risco aumenta em quantis mais extremos.

3.1.2 Definição: medida de risco coerente

Definição 2. *Uma função $\rho : L^p \to \mathbb{R}$ é uma medida de risco coerente se atende aos seguintes axiomas:*

Invariância de Translação: $\rho(X+C)=\rho(X)-C, \forall\, X \in L^p, C \in \mathbb{R}$.
Subaditividade: $\rho(X+Y) \leq \rho(X)+\rho(Y), \forall\, X, Y \in L^p$.
Monotonicidade: se $X \leq Y$, *então* $\rho(X) \geq \rho(Y)$, $\forall\, X, Y \in L^p$.
Homogeneidade Positiva: $\rho(\lambda X)=\lambda\rho(X), \forall\, X \in L^p, \lambda \geq 0$.

Ainda, uma medida de risco coerente pode respeitar os axiomas:

Relevância: se $X \leq 0$ *e* $X \neq 0$ *então* $\rho(X) > 0$, $\forall\, X \in L^p$.
Perda Estrita: $\rho(X) \geq -E_{\mathbb{P}}[X], \forall\, X \in L^p$.
Invariância de Lei: se $F_X = F_Y$, *então* $\rho(X)=\rho(Y), \forall\, X, Y \in L^p$.

Observação 3. O primeiro axioma garante que se for adicionado um ganho certo a uma posição, o risco da mesma deve diminuir nessa quantidade. O segundo axioma implica em o risco de uma posição combinada ser menor que a soma dos riscos individuais, seguindo o princípio da diversificação. O terceiro axioma exige que se uma posição tem sempre resultados piores do que outra, então o risco da primeira deve ser maior que o da segunda. O quarto axioma é relacionado ao tamanho da posição, isto é, o risco aumenta proporcionalmente ao tamanho da posição. O axioma de relevância garante que se uma posição sempre gera resultados negativos (perdas), então seu risco é positivo. A Perda Estrita garante que a medida é conservadora o bastante, superando a expectativa comum da perda. A Invariância de Lei, apresentada para medidas de risco coerentes por Kusuoka (2001), garante que duas posições que possuem a mesma função de probabilidade possuem riscos iguais. Tal característica é importante na mensuração de risco na prática, quando dados reais que dependem de uma lei que os governa são utilizados.

Observação 4. Dada uma medida de risco coerente ρ, Artzner et al. (1999) definem o conjunto de aceitação como $A_\rho = \{X \in L^p : \rho(X) \leq 0\}$, isto é, as posições que levam a uma situação que não ocorram perdas. Seja L_+^p o cone de elementos não negativos de L^p, e L_-^p sua contraparte negativa. Todas as medidas de risco coerentes ρ tem um conjunto de aceitação A_ρ que satisfaz as seguintes propriedades: contém L_+^p, não tem intersecção com L_-^p, é um cone convexo. Por outro lado, a medida de risco associada a esse conjunto é $\rho(X) = \inf\{m : X + m \in A_\rho\}$, isto é, o mínimo de capital que precisa ser adicionado à posição X para torná-la aceitável. Artzner et al. (1999) demonstram que se um conjunto de aceitação atende as propriedades definidas anteriormente, então a medida de risco associada a esse conjunto é coerente. Ainda, se uma medida de risco é coerente, então o conjunto de aceitação vinculada com essa medida atende as propriedades exigidas.

3.1.3 Definição: medida de desvio generalizado

Definição 3. *Uma função $\mathcal{D} : L^p \to \mathbb{R}_+$ é uma medida de desvio generalizado se atende aos seguintes axiomas:*

Insensibilidade à Translação: $\mathcal{D}(X + C) = \mathcal{D}(X), \forall\, X \in L^p, C \in \mathbb{R}$.
Homogeneidade Positiva: $\mathcal{D}(\lambda X) = \lambda \mathcal{D}(X), \forall\, X \in L^p, \lambda \geq 0$.
Subaditividade: $\mathcal{D}(X + Y) \leq \mathcal{D}(X) + \mathcal{D}(Y), \forall\, X, Y \in L^p$.
Não Negatividade: $\mathcal{D}(X) \geq 0, \forall\, X \in L^p$, *com* $\mathcal{D}(X) > 0$ *para X não constante.*

Ainda, uma medida de desvio generalizado pode respeitar os axiomas:

Dominância de Amplitude Inferior: $\mathcal{D}(X) \leq E_{\mathbb{P}}[X] - \inf X, \forall X \in L^p$.

Invariância de Lei: se $F_X = F_Y$, *então* $\mathcal{D}(X) = \mathcal{D}(Y), \forall X, Y \in L^p$.

Observação 5. O primeiro axioma indica que o desvio em relação ao valor esperado não muda se for adicionada uma constante. O segundo axioma afirma que o risco de uma posição financeira aumenta proporcionalmente com o seu tamanho. O terceiro axioma garante que o princípio de diversificação é captado pela medida. O quarto axioma é similar ao conceito de Relevância, que indica que qualquer posição não constante apresenta desvio, e este não é negativo. Dessa forma, se tem que $\mathcal{D}$ captura o grau de incerteza em X, atuando como se fosse uma norma em L^p, exceto por não exigir simetria. O axioma de Dominância de Amplitude Inferior restringe a medida de desvio a ser não maior que a amplitude entre o valor esperado e o mínimo da posição X. O axioma de Invariância de Lei implica em posições financeiras com a mesma distribuição de probabilidade terem o mesmo risco, além de tornar possível estimar medidas de desvio generalizado a partir de dados reais.

3.1.4 Definição: propriedades de continuidade

Definição 4. *Seja* $\{X_n\}_{n=1}^{\infty} \in L^p$. *Uma medida de risco* $\rho : L^p \to \mathbb{R}$ *é dita:*

Contínua no sentido de Lipschitz se existe constante $C \geq 0$ *tal que* $|\rho(X) - \rho(Y)| \leq C\|X - Y\|_p$.

Contínua acima se $X_n \downarrow X$, *isto é,* X_n *converge* $\mathbb{P}$ *a.s. para* X *por valores maiores, implica em* $\rho(X) = \lim_{n\to\infty} \rho(X_n)$.

Contínua abaixo se $X_n \uparrow X$, *isto é,* X_n *converge* $\mathbb{P}$ *a.s. para* X *por valores menores, implica em* $\rho(X) = \lim_{n\to\infty} \rho(X_n)$.

Contínua no sentido de Fatou se $|X_n| \leq Y$ *e* $X_n \to X$, *isto é,* X_n *é limitado e converge* $\mathbb{P}$ *a.s. para* X, *com* $Y \in L^p$, *então* $\rho(X) \leq \lim_{n\to\infty} \inf \rho(X_n)$.

Contínua no sentido de Lebesgue se $|X_n| \leq Y$ *e* $X_n \to X$, *isto é,* X_n *é limitado e converge* $\mathbb{P}$ *a.s. para* X, *com* $Y \in L^p$, *então* $\rho(X) = \lim_{n\to\infty} \rho(X_n)$.

3.1.5 Teorema: representação dual de medida de risco coerente

Teorema 1. Delbaen (2002), Inoue (2003). $\rho : L^p \to \mathbb{R}$ *é uma medida de risco coerente contínua no sentido de Fatou se, e somente se, ela pode ser representada conforme* $\rho(X) = \sup_{\mathbb{Q} \in \mathcal{P}_\rho} E_{\mathbb{Q}}[-X]$, *onde* $\mathcal{P}_\rho$ *é um subconjunto fechado e convexo de* $\mathcal{P}$, *de tal modo que* $\mathcal{P}_\rho = \{\mathbb{Q} \in \mathcal{P} : \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} \in L^q, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} \geq 0, E_{\mathbb{P}}\left[\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}\right] = 1\}$.

3.1.6 Teorema: representação dual de medida de desvio generalizado

Teorema 2. Rockafellar et al. (2006). *Uma função* $\mathcal{D} : L^p \to \mathbb{R}_+$ *é uma medida de desvio generalizado com a propriedade de Fatou se e somente se pode ser representada conforme* $\mathcal{D}(X) = E_{\mathbb{P}}[X] - \inf_{\mathbb{Q} \in \mathcal{P}_{\mathcal{D}}} E_{\mathbb{Q}}[X]$, *onde* $\mathcal{P}_{\mathcal{D}}$ *é um subconjunto não vazio, fechado e convexo de* L^q, *onde para qualquer X não constante existe* $\mathbb{Q} \in \mathcal{P}_{\mathcal{D}}$ *com* $E_{\mathbb{Q}}[X] < E_{\mathbb{P}}[X]$, *de tal modo que* $\mathcal{P}_{\mathcal{D}} = \left\{\mathbb{Q} \in \mathcal{P} : \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} \in L^q, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, E_{\mathbb{P}}\left[\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}\right] = 1, \mathcal{D}(X) \geq E_{\mathbb{P}}[X] - E_{\mathbb{Q}}[X], \forall X \in L^p\right\}$. *A finitude de* $\mathcal{D}$ *é equivalente à limitação de* $\mathcal{P}_{\mathcal{D}}$. *Mais além,* $\mathcal{D}$ *possui o axioma de Dominância de Amplitude Inferior se e somente se* $\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} \geq 0, \forall \mathbb{Q} \in \mathcal{P}_{\mathcal{D}}$. *O conjunto* $\mathcal{P}_{\mathcal{D}}$ *unicamente definido para uma medida de desvio generalizado* $\mathcal{D}$ *é chamado envelope de risco.*

3.2 Principais resultados

Se valendo dessas definições e resultados auxiliares, se busca provar axiomas da classe de medidas de risco coerentes para o SDR, além de outras propriedades, e também características como conjuntos de aceitação e representação dual. Para tanto, são antes provados axiomas e representações do SD como uma medida de desvio generalizado. Como o SDR é uma combinação entre ES e SD, são utilizadas as propriedades já conhecidas das duas medidas para provar os axiomas para o SDR. Questões como representações e implicações com relação a outros resultados teóricos da literatura são feitos.

Dessa forma, além de significado intuitivo financeiro e econômico, é provado que o SDR possui sólidas propriedades teóricas. Sustentando-se nessa estrutura, é possível argumentar que o SDR é uma medida de risco segura para utilização em problemas financeiros, como mensuração prática do risco, requerimento de capital, alocação de recuros e tomada de decisão, bem como em outras áreas do conhecimento. Na próxima seção são apresentadas ilustrações com dados simulados e dados reais, visando expor características práticas do SDR em relação às principais medidas de risco utilizadas na literatura.

3.2.1 Teorema: resultados teóricos do SD

Teorema 3. *A função $SD^{\alpha} : L^2 \rightarrow \mathbb{R}_+$ definida em (3) é uma medida de desvio generalizado que possui axiomas de Dominância de Amplitude Inferior e Invariância de Lei, com envelope de risco* $\mathcal{P}_{SD^{\alpha}} = \left\{\mathbb{Q} \in \mathcal{P} : \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} \in L^2, \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} \geq 0, E_{\mathbb{P}}\left[\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}\right] = 1, \frac{SD^{\alpha}(X)}{\sigma(X)} \geq \sigma\left(\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} - 1\right), \forall X \in L^2\right\}$.

Prova. Primeiramente é preciso provar que o SD respeita os axiomas. Assim, são provados um a um. Com base nos axiomas e nos resultados anteriores, o envelope de risco é obtido.

i) *Insensibilidade à Translação*. Sabendo que $q_{\alpha}(X + C) = q_{\alpha}(\mathrm{X}) + C$ e $e_{\alpha}(X + C) = e_{\alpha}(\mathrm{X}) + C$, se obtém:

$$\begin{aligned} SD^{\alpha}(X + C) &= \left(E_{\mathbb{P}}[(X + C - E_{\mathbb{P}}[X + C | X + C \leq e_{\alpha}(X + C)])^2 | X + C \leq e(X + C)]\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left(E_{\mathbb{P}}[(X + C - E_{\mathbb{P}}[X + C | X \leq e_{\alpha}(X)])^2 | X \leq e_{\alpha}(X)]\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left(E_{\mathbb{P}}[(X - E_{\mathbb{P}}[X | X \leq e_{\alpha}(X)])^2 | X \leq e_{\alpha}(X)]\right)^{\frac{1}{2}} = SD^{\alpha}(X). \end{aligned}$$

ii) *Homogeneidade Positiva*. Sabendo que $q_{\alpha}(\lambda X) = \lambda q_{\alpha}(X)$ e $e_{\alpha}(\lambda X) = \lambda e_{\alpha}(X)$ para $\lambda \geq 0$, se obtém:

$$SD^{\alpha}(\lambda X) = (E_{\mathbb{P}}[(\lambda X - E_{\mathbb{P}}[\lambda X|\lambda X \leq e_{\alpha}(\lambda X)])^2|\lambda X \leq e_{\alpha}(\lambda X)])^{\frac{1}{2}}$$
$$= (E_{\mathbb{P}}[\lambda^2(X - E_{\mathbb{P}}[X|X \leq e_{\alpha}(X)])^2|X \leq e_{\alpha}(X)])^{\frac{1}{2}}$$
$$= \lambda(E_{\mathbb{P}}[(X - E_{\mathbb{P}}[X|X \leq e_{\alpha}(X)])^2|X \leq e_{\alpha}(X)])^{\frac{1}{2}} = \lambda SD^{\alpha}(X).$$

iii) *Subaditividade*. Para esta demonstração se utiliza a notação $E_{\mathbb{P}}[X|X+Y \leq e_{\alpha}(X+Y)] = E_{\mathbb{P}}[X_{X+Y}]$. Assim, tem-se:

$$\left(SD^{\alpha}(X+Y)\right)^2 = E_{\mathbb{P}}\left[\left((X+Y) - E_{\mathbb{P}}[(X+Y)_{X+Y}]\right)^2_{X+Y}\right]$$
$$= E_{\mathbb{P}}\left[\left((X - E_{\mathbb{P}}[X_{X+Y}]) + (Y - E_{\mathbb{P}}[Y_{X+Y}])\right)^2_{X+Y}\right]$$
$$= E_{\mathbb{P}}[(X - E_{\mathbb{P}}[X_{X+Y}])^2_{X+Y}] + E_{\mathbb{P}}[(Y - E_{\mathbb{P}}[Y_{X+Y}])^2_{X+Y}] +$$
$$2cor(X_{X+Y}, Y_{X+Y})(E_{\mathbb{P}}[(X - E_{\mathbb{P}}[X_{X+Y}])^2_{X+Y}]E_{\mathbb{P}}[(Y - E_{\mathbb{P}}[Y_{X+Y}])^2_{X+Y}])^{\frac{1}{2}}$$
$$\leq \left((E_{\mathbb{P}}[(X - E_{\mathbb{P}}[X_{X+Y}])^2_{X+Y}])^{\frac{1}{2}} + (E_{\mathbb{P}}[(Y - E_{\mathbb{P}}[Y_{X+Y}])^2_{X+Y}])^{\frac{1}{2}}\right)^2$$
$$= \left(SD^{\alpha}(X_{X+Y}) + SD^{\alpha}(Y_{X+Y})\right)^2$$

Assim, $SD^{\alpha}(X+Y) \leq SD^{\alpha}(X_{X+Y}) + SD^{\alpha}(Y_{X+Y})$. Para completar a demonstração é preciso que $SD^{\alpha}(X_{X+Y}) + SD^{\alpha}(Y_{X+Y}) \leq SD^{\alpha}(X) + SD^{\alpha}(Y)$. Para tanto, há que se considerar que valores mais extremos ocorrem quando a variável é condicionada a si própria e não na sua combinação com outra variável. Nesse ponto o argumento é financeiro, pois a dispersão tende muito fortemente a aumentar com perdas mais extremas. Assim, é muito razoável supor que $SD^{\alpha}(X_{X+Y}) \leq SD^{\alpha}(X)$. Cabe ressaltar que, mesmo em casos que $SD^{\alpha}(X_{X+Y}) > SD^{\alpha}(X)$, o mesmo teria que acontecer com Y, além de $cor(X_{X+Y}, Y_{X+Y})$ ser muito próxima da unidade para que isso represente uma violação à subaditividade.

iv) *Não Negatividade*. Como por definição o SD é a raiz quadrada de um valor quadrático, ele só pode assumir valores não negativos. Para a positividade estrita no caso de X não constante, há que se perceber que dado o conjunto de valores $x = \{X_i \in X : X_i \leq e_{\alpha}(X)\}$, x não será constante se $\exists\, X_i \in x : X_i \neq E_{\mathbb{P}}[X|X \leq e_{\alpha}(X)]$. Dessa forma, $\exists\, X_i \in x : (X_i - E_{\mathbb{P}}[X|X \leq e_{\alpha}(X)])^2 > 0$, e pela definição $SD^{\alpha}(X) > 0$.

v) *Dominância de Amplitude Inferior*. Considere a sequência de inequações $E_{\mathbb{P}}[X] - \inf X \geq e_{\alpha}(X) - \inf X \geq |E_{\mathbb{P}}[X|X \leq e_{\alpha}(X)] - X|X \leq e_{\alpha}(X)|$. Sabendo que $(E_{\mathbb{P}}[(C)^2])^{\frac{1}{2}} = C$ para constante $C \geq 0$, e que realizar essas operações em ambos os lados não alteram a inequações pois ambos os termos são não negativos, tem-se que $e_\alpha(X) - \inf X \geq (E_{\mathbb{P}}[(X - E_{\mathbb{P}}[X|X \leq e_\alpha(X)])^2|X \leq e_\alpha(X)])^{\frac{1}{2}} = SD^\alpha(X)$. Logo, $SD^\alpha(X) \leq E_{\mathbb{P}}[X] - \inf X$.

vi) *Invariância de Lei*. Supondo $F_X = F_Y$, tem-se:

$$SD^\alpha(X) = \left(E_{\mathbb{P}}\left[\left(X - E_{\mathbb{P}}\left[X\middle|X \leq E_{\mathbb{P}}[X|X \leq F_X^{-1}(\alpha)]\right]\right)^2\middle|X \leq E_{\mathbb{P}}[X|X \leq F_X^{-1}(\alpha)]\right]\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left(E_{\mathbb{P}}\left[\left(Y - E_{\mathbb{P}}\left[Y\middle|Y \leq E_{\mathbb{P}}[Y|Y \leq F_Y^{-1}(\alpha)]\right]\right)^2\middle|Y \leq E_{\mathbb{P}}[Y|Y \leq F_Y^{-1}(\alpha)]\right]\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= SD^\alpha(Y).$$

Assim, $SD^\alpha(X) = SD^\alpha(Y)$ para $F_X = F_Y$.

vii) *Representação dual*. Como o SD é convexo, uma vez que satisfaz axiomas de Subatividade e Homogeneidade Positiva, o fato de também respeitar o axioma de Invariância de Lei implica em possuir a propriedade de Fatou, conforme provado em Jouini et al. (2006) para um espaço sem átomos. Dessa forma, pelo Teorema 2 é possível caracterizar o SD conforme a representação dual. Como o SD é um desvio padrão, ele está intimamente ligado com $\|\cdot\|_2$, e portanto L^2 é o espaço apropriado para considerar posições onde o SD é válido. O espaço conjugado de L^2 é ele mesmo, pois $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$. Logo $p = q = 2$. Assim, é preciso definir o envelope de risco formado pelas medidas de probabilidade $\mathbb{Q} \in \mathcal{P}$, tal que $SD^\alpha(X) \geq E_{\mathbb{P}}[X] - E_{\mathbb{Q}}[X] = E_{\mathbb{P}}\left[X\left(1 - \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}\right)\right]$. Como $E_{\mathbb{P}}[XY] = E_{\mathbb{P}}[X]E_{\mathbb{P}}[Y] + \sigma(X)\sigma(Y)cor(X, Y)$, tem-se $SD^\alpha(X) \geq E_{\mathbb{P}}[X]E_{\mathbb{P}}\left[1 - \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}\right] + \sigma(X)\sigma\left(1 - \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}\right)cor(X, 1 - \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}})$. Como, pelo Teorema 2, $E_{\mathbb{P}}\left[\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}\right] = 1$, além de $cor\big(X, M(X)\big) = 1$, onde M é uma função de X, se obtém $SD^\alpha(X) \geq \sigma(X)\sigma\left(\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} - 1\right)$, e logo $\frac{SD^\alpha(X)}{\sigma(X)} \geq \sigma\left(\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} - 1\right)$. Uma vez que o SD possui o axioma de Dominância de Amplitude Inferior, pelo Teorema 2 tem-se que $\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} \geq 0$. Portanto, se obtém a representação dual $SD^\alpha(X) = E_{\mathbb{P}}[X] - \inf_{\mathbb{Q} \in \mathcal{P}_{SD^\alpha}} E_{\mathbb{Q}}[X]$, onde o envelope de risco tem a forma $\mathcal{P}_{SD^\alpha} = \left\{\mathbb{Q} \in \mathcal{P}: \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} \geq 0, \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} \in L^2, E_{\mathbb{P}}\left[\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}\right] = 1, \frac{SD^\alpha(X)}{\sigma(X)} \geq \sigma\left(\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} - 1\right), \forall X \in L^p\right\}$. □

Observação 6. Grechuk et al. (2009) mostra que uma medida de desvio generalizado com o axioma de Invariância de Lei pode ser representada como $\mathcal{D}(X) = \sup_{\phi(\alpha) \in \Lambda} \int_0^1 (ES^\alpha(X) -$

$E_{\mathbb{P}}[X])\, d\big(\psi(\alpha)\big)$, onde Λ é um conjunto de funções não crescentes $\phi(\alpha) \in L^q$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $\int_0^1 \phi(\alpha)\, d\alpha = 0$, $\phi(\alpha) = q_\alpha\left(\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}\right) = \frac{1}{\alpha}\int_0^\alpha \psi(d\alpha)$. Essa representação é inspirada naquelas de medidas coerentes com Invariância de Lei e medidas espectrais, propostas por Kusuoka (2001) e Acerbi (2002), respectivamente. No caso do SD, tem-se que $\Lambda = \Big\{\phi(\alpha) : \phi(\alpha) \in L^2, \int_0^1 \phi(\alpha)\, d\alpha = 0, \phi(\alpha) = q_\alpha\left(\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}\right), 1 - \mathbb{Q} \in \mathcal{P}_{SD^\alpha}\Big\}$.

3.2.2 Teorema: resultados teóricos do SDR

Teorema 4. *A função* $SDR^\alpha : L^2 \to \mathbb{R}$ *definida em (4) é uma medida de risco coerente que possui axiomas de Relevância, Perda Estrita e Invariância de Lei. Mais além,* $\sup -X \geq SDR^\alpha \geq ES^\alpha \geq VaR^\alpha$ *e* SDR^α *é não crescente em* α *e* β. *Ainda, sua representação dual é da forma* $SDR^\alpha = \sup_{\mathbb{Q}\in\mathcal{P}_{SDR^\alpha}} \{E_{\mathbb{Q}}[-X]\}$, onde:

$$\mathcal{P}_{SDR^\alpha} = \left\{\mathbb{Q} \in \mathcal{P}: \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} = \frac{d\mathbb{Q}_1}{d\mathbb{P}} + \frac{d\mathbb{Q}_2}{d\mathbb{P}} - 1, \mathbb{Q}_1 \in \mathcal{P}_{ES^\alpha}, \mathbb{Q}_2 \in \mathcal{P}_{(1-\alpha)^\beta SD^\alpha}\right\};$$

$$\mathcal{P}_{(1-\alpha)^\beta SD^\alpha} = \left\{\mathbb{Q} \in \mathcal{P}: \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} = \left[1 - (1-\alpha)^\beta\right] + (1-\alpha)^\beta \frac{d\mathbb{Q}'}{d\mathbb{P}}, \frac{d\mathbb{Q}'}{d\mathbb{P}} \in \mathcal{P}_{SD^\alpha}\right\};$$

$$\mathcal{P}_{ES^\alpha} = \left\{\mathbb{Q} \in \mathcal{P}: \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} \geq 0, E_{\mathbb{P}}\left[\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}\right] = 1, \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} \leq \frac{1}{\alpha}\right\}.$$

Prova. Primeiramente é preciso provar que o SDR respeita os axiomas. Com base nos axiomas e nos resultados anteriores, a relação com outras medidas, seu não crescimento nos parâmetros e a representação dual são demonstrados.

i) *Invariância de Translação*. Sabendo que a ES possui esse axioma e que o SD respeita ao axioma de Insensibilidade a Translação, tem-se:

$$\begin{aligned} SDR^\alpha(X + C) &= ES^\alpha(X + C) + (1-\alpha)^\beta SD^\alpha(X + C) \\ &= ES^\alpha(X) + (1-\alpha)^\beta SD^\alpha(X) - C = SDR^\alpha(X) - C. \end{aligned}$$

ii) *Subaditividade*. Como tanto a ES como SD são subaditivos, se verifica que:

$$\begin{aligned} SDR^\alpha(X + Y) &= ES^\alpha(X + Y) + (1-\alpha)^\beta SD^\alpha(X + Y) \\ &\leq ES^\alpha(X) + ES^\alpha(Y) + (1-\alpha)^\beta [SD^\alpha(X) + SD^\alpha(Y)] \end{aligned}$$

$$= ES^{\alpha}(X) + (1-\alpha)^{\beta}SD^{\alpha}(X) + ES^{\alpha}(Y) + (1-\alpha)^{\beta}SD^{\alpha}(Y)$$
$$= SDR^{\alpha}(X) + SDR^{\alpha}(Y)$$

iii) *Monotonicidade*. Supondo $X \leq Y$, existe $Z \geq 0$, de tal modo que $X + Z = Y$. Devido ao axioma de Dominância de Amplitude inferior do SD, $Z \geq 0$ e $0 \leq (1-\alpha)^{\beta} \leq 1$, tem-se que $(1-\alpha)^{\beta}SD^{\alpha}(Z) \leq -ES^{\alpha}(Z)$. Logo, $SDR^{\alpha}(Z) \leq 0$. Pela subaditividade do SDR tem-se que $SDR^{\alpha}(Y) = SDR^{\alpha}(X+Z) \leq SDR^{\alpha}(X) + SDR^{\alpha}(Z) \leq SDR^{\alpha}(X)$.

iv) *Homogeneidade Positiva*. Como ambos ES e SD possuem esse axioma, para $\lambda \geq 0$ se obtém:

$$SDR^{\alpha}(\lambda X) = ES^{\alpha}(\lambda X) + (1-\alpha)^{\beta}SD^{\alpha}(\lambda X)$$
$$= \lambda\left[ES^{\alpha}(X) + (1-\alpha)^{\beta}SD^{\alpha}(X)\right] = \lambda SDR^{\alpha}(X).$$

v) *Relevância*. Como a ES possui esse axioma, já que é uma expectativa, e SD possui axioma de Não Negatividade, para $X \leq 0$ e $X \neq 0$ se obtém que $0 < ES^{\alpha}(X) \leq ES^{\alpha}(X) + (1-\alpha)^{\beta}SD^{\alpha}(X) = SDR^{\alpha}(X)$. Logo, $SDR^{\alpha}(X) > 0$.

vi) *Perda Estrita*. Por definição, $ES^{1} = -E_{\mathbb{P}}[X]$. Como a ES é decrescente em α e o e SD possui axioma de Não Negatividade, tem-se que $-E_{\mathbb{P}}[X] \leq ES^{\alpha} \leq ES^{\alpha}(X) + (1-\alpha)^{\beta}SD^{\alpha}(X) = SDR^{\alpha}(X)$. Logo, $SDR^{\alpha}(X) \geq -E_{\mathbb{P}}[X]$.

vii) *Invariância de Lei*. Como ES e SD possuem esse axioma, supondo $F_X = F_Y$, tem-se que $SDR^{\alpha}(X) = ES^{\alpha}(X) + (1-\alpha)^{\beta}SD^{\alpha}(X) = ES^{\alpha}(Y) + (1-\alpha)^{\beta}SD^{\alpha}(Y) = SDR^{\alpha}(Y)$.

viii) *Relação com outras medidas*. Como a ES é uma expectativa que considera informação do VaR em diante, é direto que $ES^{\alpha}(X) \geq VaR^{\alpha}(X)$. Como o SD possui o axioma de Não Negatividade tem-se que $SDR^{\alpha}(X) = ES^{\alpha}(X) + (1-\alpha)^{\beta}SD^{\alpha}(X) \geq ES^{\alpha}(X)$. Ainda, pelo axioma de Dominância de Amplitude Inferior $SDR^{\alpha}(X) = ES^{\alpha}(X) + (1-\alpha)^{\beta}SD^{\alpha}(X) \leq -\inf X = \sup -X$. Logo, $\sup -X \geq SDR^{\alpha}(X) \geq ES^{\alpha}(X) \geq VaR^{\alpha}(X)$.

ix) *Não crescimento nos parâmetros*. Como $(1-\alpha) \leq 1$, pelas propriedades da função exponencial $(1-\alpha)^{\beta}$ é não crescente em β. Para provar o mesmo para α, suponha o oposto, ou seja, $SDR^{\alpha_1}(X) > SDR^{\alpha_2}(X)$ para $\alpha_1 \geq \alpha_2$. Dessa forma tem-se que $SDR^{\alpha}(X) > SDR^{0}(X)$, pois $\alpha \geq 0$. Porém, $SDR^0(X) = ES^0(X) + (1-\alpha)^\beta SD^0(X) = -\inf X$, o que resulta em $SDR^\alpha(X) > -\inf X$, ou seja, um absurdo, pois $SDR^\alpha(X) \leq -\inf X$.

x) *Representação dual*. Como o SDR é convexo e respeita o axioma de Invariância de Lei, ele possui a propriedade de Fatou, conforme provado em Jouini et al. (2006). Dessa forma, pelo Teorema 1 é possível caracterizar o SDR conforme a representação dual. Assim, é preciso definir o subconjunto formado pelas medidas de probabilidade $\mathbb{Q} \in \mathcal{P}$. Conforme Rockafellar et al. (2006), medidas de desvio generalizado do tipo $\lambda\mathcal{D}(X)$, com $\lambda \geq 0$, possuem envelope de risco $\mathcal{P}_{\lambda\mathcal{D}} = \left\{\mathbb{Q} \in \mathcal{P} : \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} = (1-\lambda) + \lambda\frac{d\mathbb{Q}'}{d\mathbb{P}}, \frac{d\mathbb{Q}'}{d\mathbb{P}} \in \mathcal{P}_\mathcal{D}\right\}$. Assim, $\mathcal{P}_{(1-\alpha)^\beta SD^\alpha} = \left\{\mathbb{Q} \in \mathcal{P} : \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} = \left[1-(1-\alpha)^\beta\right] + (1-\alpha)^\beta\frac{d\mathbb{Q}'}{d\mathbb{P}}, \frac{d\mathbb{Q}'}{d\mathbb{P}} \in \mathcal{P}_{SD^\alpha}\right\}$. Delbaen (2002) mostra que $ES^\alpha(X) = \sup_{\mathbb{Q}\in\mathcal{P}_{ES^\alpha}} E_\mathbb{Q}[-X]$, $\mathcal{P}_{ES^\alpha} = \left\{\mathbb{Q} \in \mathcal{P} : \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} \geq 0, E_\mathbb{P}\left[\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}\right] = 1, \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} \leq \frac{1}{\alpha}\right\}$. Dessa forma, tem-se que:

$$\begin{aligned}
SDR^\alpha(X) &= ES^\alpha(X) + (1-\alpha)^\beta SD^\alpha(X) \\
&= \sup_{\mathbb{Q}_1\in\mathcal{P}_{ES^\alpha}} E_{\mathbb{Q}_1}[-X] + E_\mathbb{P}[X] - \inf_{\mathbb{Q}_2\in\mathcal{P}_{(1-\alpha)^\beta SD^\alpha}} E_{\mathbb{Q}_2}[X] \\
&= \sup_{\mathbb{Q}_1\in\mathcal{P}_{ES^\alpha}, \mathbb{Q}_2\in\mathcal{P}_{(1-\alpha)^\beta SD^\alpha}} \left\{E_{\mathbb{Q}_1}[-X] - E_\mathbb{P}[-X] + E_{\mathbb{Q}_2}[-X]\right\} \\
&= \sup_{\mathbb{Q}_1\in\mathcal{P}_{ES^\alpha}, \mathbb{Q}_2\in\mathcal{P}_{(1-\alpha)^\beta SD^\alpha}} \left\{E_\mathbb{P}\left[-X\left(\frac{d\mathbb{Q}_1}{d\mathbb{P}} + \frac{d\mathbb{Q}_2}{d\mathbb{P}} - 1\right)\right]\right\} \\
&= \sup_{\mathbb{Q}\in\mathcal{P}_{SDR^\alpha}} \left\{E_\mathbb{Q}[-X]\right\}.
\end{aligned}$$

Onde $\mathcal{P}_{SDR^\alpha} = \left\{\mathbb{Q} \in \mathcal{P} : \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} = \frac{d\mathbb{Q}_1}{d\mathbb{P}} + \frac{d\mathbb{Q}_2}{d\mathbb{P}} - 1, \mathbb{Q}_1 \in \mathcal{P}_{ES^\alpha}, \mathbb{Q}_2 \in \mathcal{P}_{(1-\alpha)^\beta SD^\alpha}\right\}$. Para mostrar que $\mathcal{P}_{SDR^\alpha}$ é composto por medidas válidas basta ver que, para $\mathbb{Q} \in \mathcal{P}_{SDR^\alpha}$, $\mathbb{Q}_1 \in \mathcal{P}_{ES^\alpha}$, $\mathbb{Q}_2 \in \mathcal{P}_{(1-\alpha)^\beta SD^\alpha}$, $E_\mathbb{P}\left[\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}\right] = E_\mathbb{P}\left[\frac{d\mathbb{Q}_1}{d\mathbb{P}}\right] + E_\mathbb{P}\left[\frac{d\mathbb{Q}_2}{d\mathbb{P}}\right] - E_\mathbb{P}[1] = 1$. Além disso $\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} \geq 0$, pois supondo o contrário se teria $\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} < 0$, e portando $E_\mathbb{P}\left[\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}\right] < 0$. Logo, $2 = E_\mathbb{P}\left[\frac{d\mathbb{Q}_1}{d\mathbb{P}}\right] + E_\mathbb{P}\left[\frac{d\mathbb{Q}_2}{d\mathbb{P}}\right] < E_\mathbb{P}[1] = 1$, ou seja, um absurdo. □

Observação 7. O axioma de Invariância de Lei é fundamental pois implica em a medida de risco poder ser estimada por meio de dados reais, isto é, pode ser utilizada para mensuração prática do risco. Kusuoka (2001) mostra que uma medida de risco coerente com axioma de Invariância de Lei e contínua no sentido de Fatou pode ser representada conforme $\rho(X) = \sup_{m\in\mathcal{P}_{(0,1]}} \int_0^1 ES^\alpha(X)m(d\alpha)$, onde $\mathcal{P}_{(0,1]}$ são medidas de probabilidade definidas em (0,1]. Jouini et al. (2006) mostram que medidas de risco convexas com lei invariante, definidas em espaços padrão possuem automaticamente a propriedade de continuidade de Fatou. Svindland (2010) generaliza o resultado de Jouini et al. (2006) relaxando a suposição que o espaço de probabilidade é padrão, mantendo apenas a necessidade de ser não atômico. O SDR por ser coerente e ter o axioma de Invariância de Lei pode ser representado conforme esse supremo de combinações da ES. Como estamos lidando com um espaço sem átomos, é possível definir uma variável contínua $U \sim \mathbb{U}(0,1)$, ou seja, distribuída uniformemente entre 0 e 1, de modo que $F_X^{-1}(U) = X$. Também, para $\mathbb{Q} \in \mathcal{P}_{SDR^\alpha}$, podemos representar $\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} = H(U)$, onde H é uma função monotonicamente decrescente, pois para se obter o supremo na representação dual $\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}$ deve ser antimonótona em relação a X. Fazendo $H(U) = \int_{(u,1]} \frac{1}{\alpha} dm(\alpha)$, com $m \in \mathcal{P}_{(0,1]}$ e sabendo que para distribuições contínuas $ES^\alpha(X) = -\frac{1}{\alpha}\int_0^\alpha F_X^{-1}(u)du$, partindo da representação dual se obtém:

$$
\begin{aligned}
SDR^\alpha(X) &= \sup_{\mathbb{Q}\in\mathcal{P}_{SDR^\alpha}} \left\{E_{\mathbb{Q}}[-X]\right\} = \sup_{\mathbb{Q}\in\mathcal{P}_{SDR^\alpha}} \left\{E_{\mathbb{P}}\left[-X\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}\right]\right\} \\
&= \sup_{m\in\mathcal{P}_{(0,1]}} \left\{\int_0^1 -F_X^{-1}(u)\left[\int_{(u,1]}\frac{1}{\alpha}dm(\alpha)\right]du\right\} \\
&= \sup_{m\in\mathcal{P}_{(0,1]}} \left\{\int_{(0,1]}\left[\frac{1}{\alpha}\int_0^\alpha -F_X^{-1}(u)du\right]dm(\alpha)\right\} = \sup_{m\in\mathcal{P}_{(0,1]}} \left\{\int_{(0,1]} ES^\alpha(X)dm(\alpha)\right\}.
\end{aligned}
$$

Dessa forma, basta definir as medidas $m \in \mathcal{P}_{(0,1]}$ que são candidatas. Pela mesma lógica usada antes, tem-se que $\frac{d\mathbb{Q}_1}{d\mathbb{P}} = H_1(u) = \int_{(u,1]}\frac{1}{\alpha}dm_1(\alpha)$, $\frac{d\mathbb{Q}_2}{d\mathbb{P}} = H_2(u) = \int_{(u,1]}\frac{1}{\alpha}dm_2(\alpha)$ e $\frac{d\mathbb{P}}{d\mathbb{P}} = H_3(u) = \int_{(u,1]}\frac{1}{\alpha}dm_3(\alpha) = 1$. Assim, convertendo as restrições se obtém os conjuntos:

$$M_1 = \left\{m_1 \in \mathcal{P}_{(0,1]} : \int_{(u,1]}\frac{1}{\alpha}dm_1(\alpha) \geq 0, \int_{(0,1]} dm_1(u) = 1, \int_{(u,1]}\frac{1}{\alpha}dm_1(\alpha) \leq \frac{1}{\alpha}\right\};$$

$$M_2 = \left\{m_2 \in \mathcal{P}_{(0,1]} : \int_{(u,1]}\frac{1}{\alpha}dm_2(\alpha) = \left[1-(1-\alpha)^\beta\right] + (1-\alpha)^\beta \int_{(u,1]}\frac{1}{\alpha}dm_{2'}(\alpha), m_{2'} \in M_{2'}\right\};$$

$$M_{2'} = \left\{m_{2'} \in \mathcal{P}_{(0,1]} : \int_{(u,1]}\frac{1}{\alpha}dm_{2'}(\alpha) \geq 0, \int_{(u,1]}\frac{1}{\alpha}dm_{2'}(\alpha) \in L^2, \int_{(0,1]} dm_1(u) = 1, \frac{SD^\alpha(X)}{\sigma(X)} \geq \sigma\left(\int_{(u,1]}\frac{1}{\alpha}dm_{2'}(\alpha) - 1\right), \forall X \in L^p\right\};$$

$$M_3 = \left\{m_3 \in \mathcal{P}_{(0,1]} : \int_{(u,1]}\frac{1}{\alpha}dm_3(\alpha) = 1\right\}.$$

Como $\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} = \frac{d\mathbb{Q}_1}{d\mathbb{P}} + \frac{d\mathbb{Q}_2}{d\mathbb{P}} - 1$, $\mathbb{Q}_1 \in \mathcal{P}_{ES^\alpha}$, $\mathbb{Q}_2 \in \mathcal{P}_{(1-\alpha)^\beta SD^\alpha}$, se obtém que $\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} = H(u) = \int_{(u,1]}\frac{1}{\alpha}dm(\alpha)$, com $dm(\alpha) = dm_1(\alpha) + dm_2(\alpha) - dm_3(\alpha)$. Assim, se chega na expressão

$SDR^{\alpha}(X) = \sup_{m \in M} \left\{ \int_{(0,1]} ES^{\alpha}(X) dm(\alpha) \right\}$, onde $M = \left\{ m \in \mathcal{P}_{(0,1]} : dm(\alpha) = dm_1(\alpha) + dm_2(\alpha) - dm_3(\alpha), m_1 \in M_1, m_2 \in M_2, m_3 \in M_3 \right\}$.

Observação 8. Como o SDR é uma medida de risco coerente, é possível estabelecer, conforme Artzner et al. (1999), um conjunto de aceitação que contém L_{+}^{p}, não tem intersecção com L_{-}^{p} e é um cone convexo. Tal conjunto tem a forma $A_{SDR^{\alpha}} = \{X \in L^p : SDR^{\alpha}(X) \leq 0\}$, com $SDR^{\alpha}(X) = \inf\{m : X + m \in A_{SDR^{\alpha}}\}$. Esse conceito é intimamente ligado com a questão da regulação de capital, pois permite verificar quanto recurso é necessário manter para evitar a perda medida pelo SDR, isto é, para tornar a posição aceitável, pois $SDR^{\alpha}\left(X + SDR^{\alpha}(X)\right) = 0$. Caso o valor seja negativo, ele representa o montante de capital que pode ser retirado sem a posição deixar de ser aceitável. A lógica do conjunto de aceitação vem do axioma de Invariância de Translação. El Karoui e Ravanelli (2009) relaxam o axioma de Invariância de Translação para uma forma subaditiva para lidar com incerteza sobre taxas de juros. Esse axioma diz que $\rho(X - C) \leq \rho(X) + C, \forall X \in L^p, C \in \mathbb{R}$. Naturalmente a Invariância de Translação é um caso especial, de modo que o SDR respeita tal axioma na forma subaditiva.

Observação 9. Por ser corente, o SDR também faz parte da classe de medidas de risco convexas, proposta por Föllmer e Schied (2002) e Frittelli e Gianin (2002). Essa classe relaxa os axiomas de Homogeneidade Positiva e Subaditividade, os trocando por um axioma mais fraco de Convexidade. Tal axioma significa risco de uma posição diversificada é menor ou igual à média ponderada dos riscos individuais, ou seja, $\rho(\lambda X + (1-\lambda)Y) \leq \lambda\rho(X) + (1-\lambda)\rho(Y), \forall X, Y \in L^p, 0 \leq \lambda \leq 1$. Em termos de representação dual, medidas de risco convexas podem ser definidas conforme $\rho(X) = \sup_{\mathbb{Q} \in \mathcal{P}} (E_P[-X] - \alpha(\mathbb{Q}))$, onde $\alpha : \mathcal{P} \to (-\infty, \infty]$ é uma função de penalização convexa e inferiormente semi contínua, conforme $\alpha(\mathbb{Q}) = \sup_{X \in A_{\rho}} \left(E_{\mathbb{Q}}[-X]\right)$, com $\alpha(\mathbb{Q}) \geq -\rho(0)$. Para o caso do SDR se tem que $SDR^{\alpha}(X) = \sup_{\mathbb{Q} \in \mathcal{P}_{SDR^{\alpha}}} \left\{E_{\mathbb{Q}}[-X] - \alpha(\mathbb{Q})\right\}$, com $\alpha(\mathbb{Q}) = \sup_{X \in A_{SDR^{\alpha}}} \left(E_{\mathbb{Q}}[-X]\right) = 0$. A convexidade é crucial para problemas de otimização, como praticamente todos relacionados para alocação de recursos. Assim, o SDR é uma medida válida para ser considerada dentro de aplicações de alocação de recursos.

Observação 10. Como o SDR é basicamente uma função, propriedades de continuidade se tornam interessantes. Como comentado na prova do Teorema 4, por ser convexo e ter axioma de Invariância de Lei, o resultado de Jouini et al. (2006) garante que o SDR é contínuo no sentido de Fatou. Ainda, devido aos axiomas de Invariância de Translação e Monotonicidade, $Y \leq X + \|Y - X\|_p$ implica em $SDR^{\alpha}(Y) \geq SDR^{\alpha}(X) - \|Y - X\|_p$. Logo, $SDR^{\alpha}(X) - SDR^{\alpha}(Y) \leq \|Y - X\|_p$. Invertendo os papéis de X e Y se obtém que $SDR^{\alpha}(Y) - SDR^{\alpha}(X) \leq \|X - Y\|_p$. Juntando as duas inequações se conclui que $|SDR^{\alpha}(X) - SDR^{\alpha}(Y)| \leq \|X - Y\|_p$. Portando, o SDR é contínuo no sentido de Lipschitz. Mais além, conforme resultado provado por Krätschmer (2005), por se encaixar na classe de medidas convexas e ter representação dual, o SDR é contínuo acima. Ainda, como estamos considerando apenas valores finitos, pelo resultado demostrado em Kaina e Rüschendorf (2009) para medidas convexas finitas, o SDR é contínuo abaixo e no sentido de Lebesgue.

Observação 11. Uma questão fundamental é a utilização de medidas de risco para a tomada de decisão. Nesse sentido, é importante que medidas de risco respeitem ordens de dominância estocástica. Com base em resultado provado por Leitner (2005) e Bäuerle e Müller (2006), por possuir axiomas de Invariância de Lei, Monotonicidade e Convexidade, o SDR respeita a dominância estocástica de segunda ordem, ou seja, $X \leq_{2std} Y$ implica em $\rho(X) \geq \rho(Y)$. Dessa forma, investidores que são avessos ao risco, isto é, possuem funções de utilidade côncavas, tem suas preferências refletidas pelo SDR. Assim, medidas de risco convexas com lei invariante tem a propriedade de que $\rho(E_{\mathbb{P}}[X|\mathcal{G}]) \leq \rho(X)$, isto é, o risco de uma posição é maior que o risco de seu valor esperado condicional a qualquer $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$. Essa última relação é vinculada com uma modificação do axioma de Monotonicidade, que é o axioma de Monotonicidade Dilatada, introduzido por Leitner (2004) para medidas de risco coerentes contínuas no sentido de Fatou. Seja $\mathcal{G} \subseteq \tilde{\mathcal{G}}$, onde $\tilde{\mathcal{G}}$ é a família de todos os subespaços de eventos possíveis $\mathcal{F}$. Pode se dizer que Y é uma dilatação de X, $X \preccurlyeq_{\mathcal{G}}^{b} Y$, se existe $\tilde{\mathcal{F}} \in \mathcal{G}$ de tal modo que $E_{\mathbb{P}}[X|\tilde{\mathcal{F}}] \leq Y$. Assim, se tem o axioma garante que se $X \preccurlyeq_{\mathcal{G}}^{b} Y$, então $\rho(X) \geq \rho(Y), \forall\, X, Y \in L^p$. O SDR respeita esse axioma, pois, conforme provado por Cherny e Grigoriev (2007), toda medida de risco convexa com axioma de Invariância de Lei definida em espaço de probabilidade não atômico possui o axioma de Monotonicidade Dilatada. Com base nessas propriedades, o SDR se torna uma medida muito interessante para aplicações em tomada de decisão, uma vez que reflete relações de preferência.

Observação 12. O SDR se encaixa ainda em outras classes mais flexíveis de medidas de risco que existem na literatura, como as medidas de risco naturais, introduzidas por Kou et al. (2013). Os axiomas que essa classe de medidas deve respeitar, além de Homogeneidade Positiva e Monotonicidade, são os de Translação Escalonada (uma versão escalonada da Invariância de Translação), Subaditividade Comonotônica (subaditivade exigida apenas para variáveis comonótonas, ou seja, com associação positiva perfeita) e Invariância de Lei Empírica (uma versão abrangendo qualquer permutação nos dados utilizados). Como todos esses axiomas são mais fracos que aqueles provados para o SDR, a medida proposta faz parte dessa classe. Ainda, se for feita a adaptação $SDR^{*,\alpha}(X) = SDR^{\alpha}(\min(X, 0))$, a medida resultante se inclui nas definições de Cont et al. (2010) e Staum (2013), que introduzem medidas que só consideram perdas, e não ganhos, com axiomas de Monotonicidade, Convexidade e uma adaptação da Invariância de Translação.

4 ILUSTRAÇÕES

Essa seção apresenta ilustrações para uma melhor compreensão dos conceitos e resultados teóricos apresentados sobre a medida de risco proposta SDR. Com este foco, essa seção é subdividida em três partes para melhor compreensão: i) simulações simples, onde são apresentados alguns gráficos para melhor visualização da definição da medida; ii) simulações Monte Carlo, onde esse tipo de técnica é utilizado para ilustrar o relacionamento do SDR com as medidas de risco mais utilizadas, VaR e ES, em diferentes cenários; e iii) Dados reais, em que a utilização do SDR em comparação com VaR e ES é apresentada para ume série empírica real.

Vale ressaltar que o foco não é analisar questões como modelagem, *backtesting* ou mesmo detalhes sobre diversas aplicações financeiras, mas sim exemplificar como a medida SDR se comporta em dados financeiros. Dessa forma, se utiliza nessa seção para estimação das medidas de risco analisadas o método empírico, mais conhecido como Simulação Histórica (*Historical Simulation* – HS). Esse método não paramétrico não possui suposições sobre os dados, além de ser o mais utilizado tanto em trabalhos acadêmicos como na prática da indústria financeira. De fato, Pérignon e Smith (2010) indicam que 76% das instituições que divulgam seus procedimentos de estimação de risco utilizam a HS. Apesar da HS sofrer algumas críticas, como apontado em Pritsker (2006), cabe lembrar que o foco aqui não é discutir detalhes de estimação ou mesmo comparar modelos. Logo, se opta pelo modelo mais utilizado, simples e flexível. De modo mais específico, seja F_X^E a distribuição empírica de X, então os estimadores das medidas consideradas são conforme (6):

$$\begin{aligned}
&\widehat{VaR}^{\alpha} = -(F_X^E)^{-1}(\alpha),\\
&\widehat{ES}^{\alpha} = -(N\alpha)^{-1}\textstyle\sum_{i=1}^{N}\left(\{X\}_1^N * \mathbf{1}_{\{X\}_1^N < -\widehat{VaR}^{\alpha}}\right),\\
&\widehat{SD}^{\alpha} = \left[(N\alpha)^{-1}\textstyle\sum_{i=1}^{N}\left(\left(\{X\}_1^N - \mu^{\widehat{ES}^{\alpha}}\right)^2 * \mathbf{1}_{\{X\}_1^N < -\widehat{ES}^{\alpha}}\right)\right]^{\frac{1}{2}},\\
&\mu^{\widehat{ES}^{\alpha}} = -(N\alpha)^{-1}\textstyle\sum_{i=1}^{N}\left(\{X\}_1^N * \mathbf{1}_{\{X\}_1^N < -\widehat{ES}^{\alpha}}\right),\\
&\widehat{SDR}^{\alpha} = \widehat{ES}^{\alpha} + (1-\alpha)^{\beta}\widehat{SD}^{\alpha}.
\end{aligned} \tag{5}$$

Em (5), N é o tamanho amostral, α é o nível de significância escolhido e $\mathbf{1}_p$ é a função de indicação que assume valor 1 se p é verdadeiro e 0 se p é falso. Basicamente, $\widehat{VaR}^{\alpha}$ é o negativo do quantil empírico de $\{X\}_1^N$, $\widehat{ES}^\alpha$ é o negativo da media abaixo desse quntil, $\widehat{SD}^\alpha$ é o desvio abaixo do negativo da $\widehat{ES}^\alpha$, e $\widehat{SDR}^\alpha$ é a combinação entre $\widehat{ES}^\alpha$ e $\widehat{SD}^\alpha$.

4.1 Simulações simples

Como uma primeira visualização, a Figura 1 apresenta a cauda esquerda de uma amostra hipotética $X \sim N(0,1)$ com os valores de VaR, ES e SDR, com sinal devidamente corrigido, para $\alpha = 0{,}01$ e $\beta = 1$. As medidas foram computadas com base em (5) para um tamanho amostral de $N = 10^6$ observações. Fica claro que o SDR define uma proteção superior a ES, e, consequentemente, ao VaR.

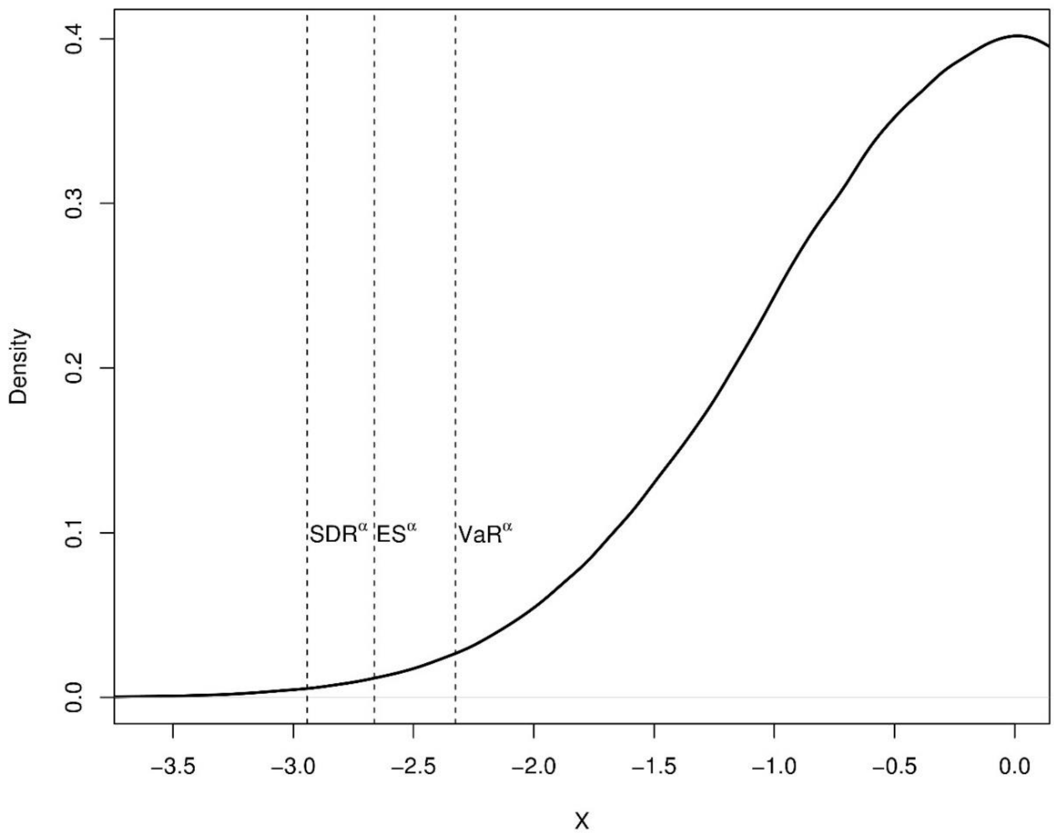

Figura 1 – VaR, ES e SDR com $\alpha = 0{,}01$ e $\beta = 1$ para $X \sim N(0,1)$.

Ainda com a intenção de mostrar o comportamento da medida SDR, são expostos nas Figuras 2 e 3 a evolução de VaR, ES, SD e SDR para diferentes níveis de significância, também computadas conforme (5). A Figura 2 representa um caso gaussiano $X \sim N(0,1)$, sem caudas pesadas, enquanto que a Figura 3 representa um caso com $X \sim t_6$, isto é, com distribuição *t* de Student com caudas pesadas, mais próximo da realidade de ativos financeiros. Também é considerado um tamanho amostral de $N = 10^6$. É possível perceber que existe um fator de evolução comum entre as medidas VaR, ES e SDR, uma vez que seus conceitos estão diretamente relacionados. Todavia, a magnitude do risco indicado por cada medida é diferente, o que pode representar uma segurança maior oferecida pelo SDR em relação as outras duas.

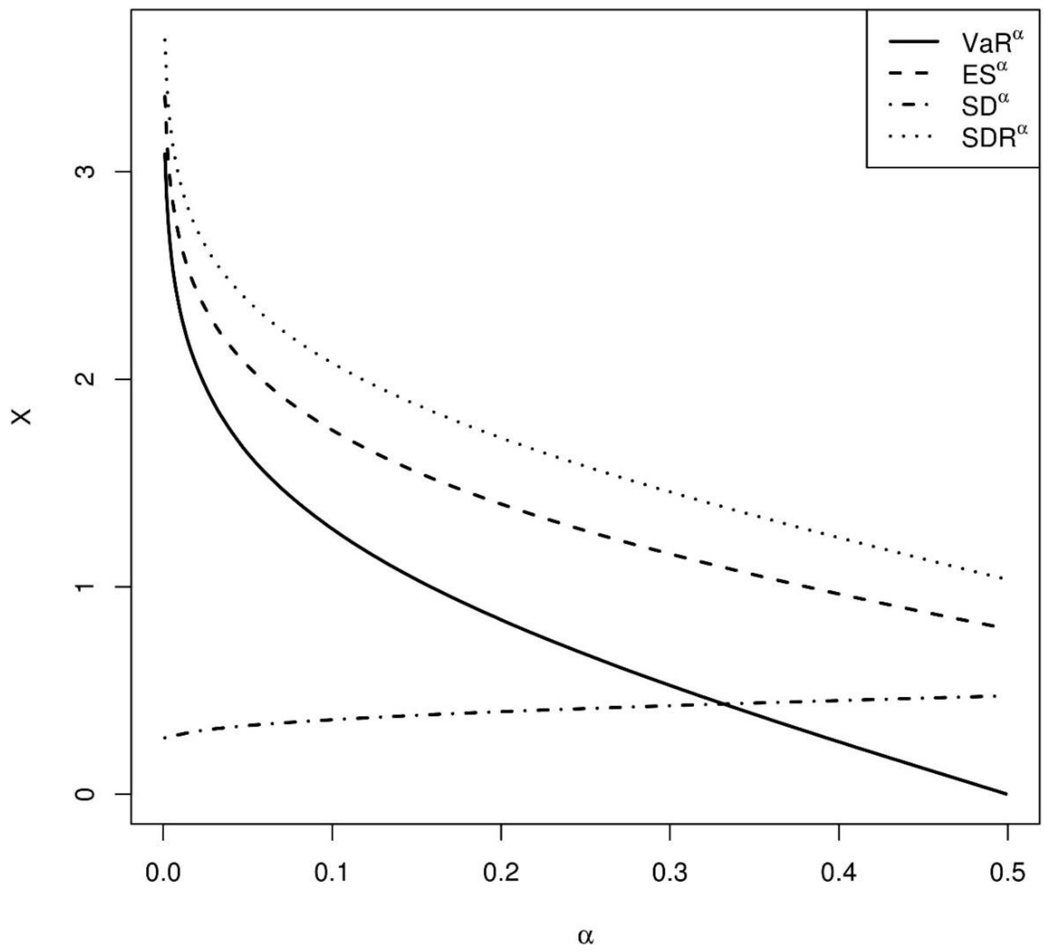

Figura 2 – VaR, ES, SD e SDR para diferentes α com $X \sim N(0,1)$ e $\beta = 1$.

Os gráficos contidos nas Figuras 2 e 3 mostram, ainda, que as medidas obtêm valores maiores quando caudas pesadas estão presentes. Mais além, a medida SDR está sempre acima da ES, que por sua vez está acima do VaR, conforme já explicado anteriormente. Essa diferença aumenta conforme se vai em direção a quantis mais extremos, no caso da distribuição *t* de Student, ao passo que comportamento contrário se observa para o caso gaussiano. Isso pode ser explicado pelo comportamento da dispersão na cauda, o SD, que aumenta em quantis extremos no caso da distribuição *t* de Student, mas diminui no caso da distribuição gaussiana, devido à probabilidade maior de ocorrência de eventos extremos da primeira em relação à segunda. Naturalmente todas as medidas tendem a valores iguais, $\sup -X = -\inf X$, quando α tende a zero.

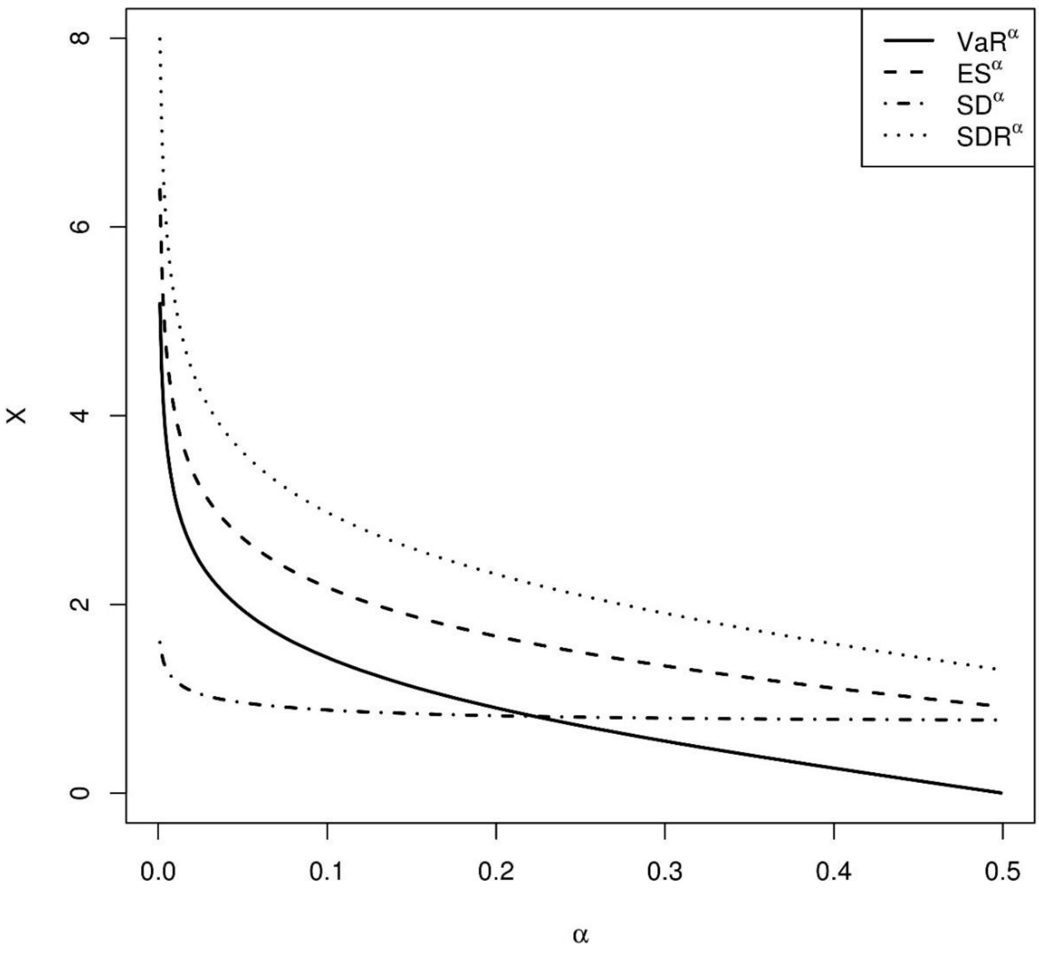

Figura 3 – VaR, ES, SD e SDR para diferentes α com $X \sim t_6$ e $\beta = 1$.

Mais especificamente acerca do SDR, a Figura 4 apresenta um gráfico de perspectiva tridimensional do valor obtido pela medida de risco proposta em relação a valores para $0 \leq \alpha \leq 0{,}50$ e $0 \leq \beta \leq 20$, para o caso $X \sim t_6$. Também se considera aqui um tamanho amostral de $N = 10^6$. É possível perceber que o valor da medida SDR aumenta para valores menores de α e β, representando quantis mais extremos e maior aversão ao risco. A Figura 4 expõe ainda um padrão de suavização exponencial, refletindo o coeficiente de penalização do SD sobre a ES, conforme (4).

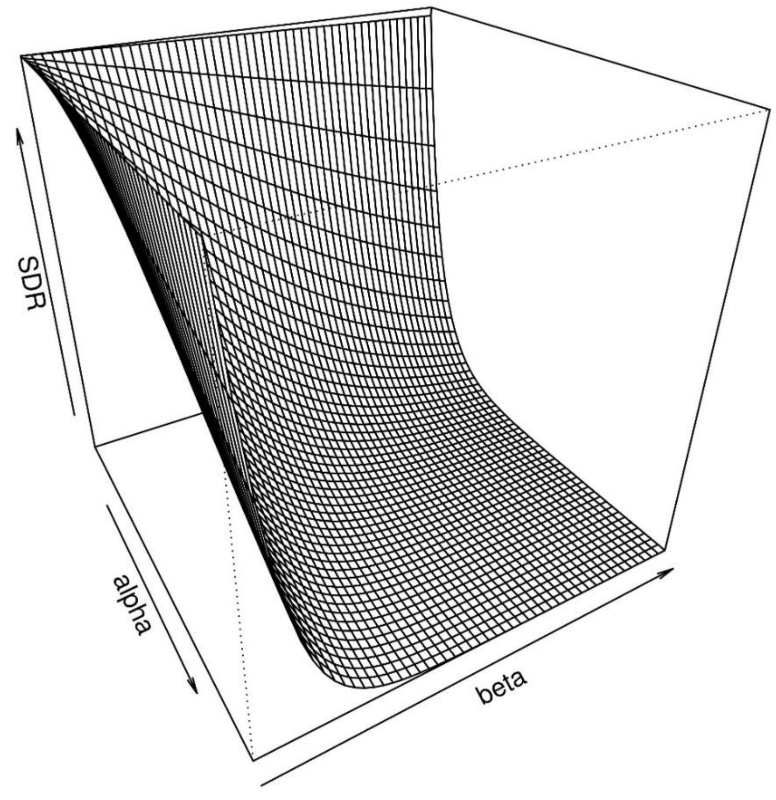

Figura 4 – SDR como função de α e β, para $0 \leq \alpha \leq 0{,}50$, $0 \leq \beta \leq 20$ e $X \sim t_6$.

4.2 Simulações Monte Carlo

Após essa visualização, para verificar o comportamento do SDR uma análise mais robusta é realizada por meio de simulações Monte Carlo. Desse modo, é considerado que o resultado X é gerado por um processo autorregressivo (*Auto Regressive* – AR) na média condicional e heteroscedástico condicional autorregressivo generalizado (*Generalized Auto Regressive Conditional Heteroscedasticity* – GARCH) na variância condicional AR (1) – GARCH (1,1). Esse tipo de especificação é frequentemente considerado para analisar medidas de risco em dados financeiros porque leva em conta fatos estilizados de retornos diários, tais como agrupamentos de volatilidade e caudas pesadas, como em Angelidis et al. (2007), entre tantos outros. O processo é parametrizado conforme (6).

$$X_t = 0{,}50X_{t-1} + \varepsilon_t, \varepsilon_t = \sigma_t z_t,\ z_t \sim t_v,$$
$$\sigma_t^2 = \sigma^2(1 - 0{,}10 - 0{,}85) + 0{,}10\varepsilon_{t-1}^2 + 0{,}85\sigma_t^2. \quad (6)$$

Em (6), X_t, σ_t^2, ε_t and z_t são, para o período *t*, respectivamente, retorno, variância condicional, inovação na expectativa e uma série ruído branco com distribuição *t* de Student com $E_{\mathbb{P}}[z_T] = 0$ e $E_{\mathbb{P}}[(z_T)^2] = 1$. Ainda, σ^2 é a variância incondicional (amostral). São considerados quatro cenários a fim de contemplar ($v = 6$) ou não ($v = \infty$, isto é, distribuição Normal) a presença de retornos extremos (caudas pesadas), bem como períodos de baixa ($\sigma = 0{,}0125$) e alta ($\sigma = 0{,}0220$) volatilidade. Os parâmetros do processo de geração dos dados são escolhidos de modo a coincidir com aqueles obtidos para retornos diários do índice de mercado Americano S&P500 (*Standard and Poor's* 500) antes e durante a crise do *sub-prime*. Essa escolha é feita devido a representatividade desse índice, que também é utilizado na ilustração com dados reais, além de ser seguidamente utilizado em estudos de simulação para medidas de risco em finanças, como em Christoffersen e Gonçalves (2005), Degiannakis et al. (2013), entre muitos outros.

Para cada cenário (distribuições Normal e *t* de Student com baixa e alta volatilidade), são simuladas 10000 réplicas com tamanho amostral igual a 2000. Esse tamanho amostral, que representa cerca de 8 anos de observações diárias, é o indicado em estudos que comparam estimadores de medidas de risco, como Kuester et al. (2006), Alexander e Sheedy (2008) e Wong et al. (2012), pois tende a levar a menores erros de estimação. Assim, para cada amostra, são estimados VaR, ES, SD e SDR através do método de HS, exposto em (5). Se considera aqui $\beta = 1$ a fim de simplificar as análises. Todos os resultados são feitos considerando 0,01 e 0,05 como valores para α, uma vez que esses são os quantis mais utilizados em estudos e na prática. Com base nessa estutura, são computados os valores médios e desvio padrão das medidas de risco estimadas com HS para todas as amostras. Ainda, a razão média entre cada medida e o SDR, bem como a correlação de Pearson entre os valores obtidos para cada medida e o SDR são também computados. Os resultados obtidos com as simulações Monte Carlo são apresentados na Tabela 1.

Tabela 1 – Média, desvio padrão, razão e correlação de Pearson para com o SDR obtidos por meio de simulação Monte Carlo com 10000 réplicas com tamanho amostral igual a 2000.

Distribuição Normal, Baixa Volatilidade									
		α = 1%					**α = 5%**		
	Média	Desvio	Razão	Pearson		Média	Desvio	Razão	Pearson
$\widehat{VaR}^{\alpha}$	0,0352	0,0031	0,7233	0,6932	$\widehat{VaR}^{\alpha}$	0,0234	0,0015	0,6181	0,6383
$\widehat{ES}^{\alpha}$	0,0431	0,0052	0,8743	0,9054	$\widehat{ES}^{\alpha}$	0,031	0,0029	0,8192	0,8752
$\widehat{SD}^{\alpha}$	0,0073	0,0046	0,1262	0,8287	$\widehat{SD}^{\alpha}$	0,007	0,0034	0,1904	0,8883
$\widehat{SDR}^{\alpha}$	0,0494	0,0071	1,0000	1,0000	$\widehat{SDR}^{\alpha}$	0,038	0,0043	1,0000	1,0000
Distribuição Normal, Alta Volatilidade									
		α = 1%					**α = 5%**		
	Média	Desvio	Razão	Pearson		Média	Desvio	Razão	Pearson
$\widehat{VaR}^{\alpha}$	0,0624	0,0054	0,7256	0,7025	$\widehat{VaR}^{\alpha}$	0,0412	0,0031	0,6191	0,6389
$\widehat{ES}^{\alpha}$	0,0766	0,0085	0,8743	0,9092	$\widehat{ES}^{\alpha}$	0,0543	0,0043	0,8202	0,8787
$\widehat{SD}^{\alpha}$	0,0113	0,0068	0,1271	0,8341	$\widehat{SD}^{\alpha}$	0,0121	0,0042	0,1895	0,8918
$\widehat{SDR}^{\alpha}$	0,0872	0,0122	1,0000	1,0000	$\widehat{SDR}^{\alpha}$	0,0675	0,0075	1,0000	1,0000
Distribuição Student, Baixa Volatilidade									
		α = 1%					**α = 5%**		
	Média	Desvio	Razão	Pearson		Média	Desvio	Razão	Pearson
$\widehat{VaR}^{\alpha}$	0,1631	0,8683	0,5623	0,9831	$\widehat{VaR}^{\alpha}$	0,0666	0,1366	0,3986	0,9432
$\widehat{ES}^{\alpha}$	0,2453	1,3468	0,7944	0,9952	$\widehat{ES}^{\alpha}$	0,1277	0,5422	0,6743	0,9978
$\widehat{SD}^{\alpha}$	0,0775	0,5587	0,2078	0,9711	$\widehat{SD}^{\alpha}$	0,0811	0,5344	0,3432	0,9972
$\widehat{SDR}^{\alpha}$	0,3217	1,8752	1,0000	1,0000	$\widehat{SDR}^{\alpha}$	0,2044	1,0461	1,0000	1,0000
Distribuição Student, Alta Volatilidade									
		α = 1%					**α = 5%**		
	Média	Desvio	Razão	Pearson		Média	Desvio	Razão	Pearson
$\widehat{VaR}^{\alpha}$	0,2792	0,5764	0,5624	0,9776	$\widehat{VaR}^{\alpha}$	0,1151	0,1073	0,3977	0,9274
$\widehat{ES}^{\alpha}$	0,4191	1,0255	0,7942	0,9932	$\widehat{ES}^{\alpha}$	0,2192	0,3922	0,6744	0,9883
$\widehat{SD}^{\alpha}$	0,1293	0,4596	0,2881	0,9684	$\widehat{SD}^{\alpha}$	0,1391	0,4711	0,3422	0,9911
$\widehat{SDR}^{\alpha}$	0,5472	1,4582	1,0000	1,0000	$\widehat{SDR}^{\alpha}$	0,3513	0,8312	1,0000	1,0000

Os resultados contidos na Tabela 1 apontam para diferentes padrões. Primeiramente, se percebe que o SDR, conforme verificado teoricamente na seção anterior, é mais parcimonioso do que VaR e ES porquanto apresenta valores médios maiores. Tal diferença, que se deve basicamente pelo componente SD, aumenta nas simulações com distribuição *t* de Student, que representam cenários com caudas pesadas, onde resultados mais extremos podem ocorrer com maior probabilidade. Ainda, o SDR é menos sensível ao quantil de interesse em relação a VaR e ES. Muito embora o risco medido pelo SDR aumente no quantil 1%, esse aumento é relativamente menor porque o SD não aumenta na mesma proporção que a ES. De fato, o SD não necessariamente aumenta em quantis mais extremos. Quanto ao desvio, o SDR apresenta valores maiores que as outras medidas, o que é natural uma vez que este é uma composição de duas variáveis, ES e SD, absorvendo as dispersões individuais. Mais além, de modo geral o desvio aumenta muito para as simulações com distribuição *t* de Student, bem como para o quantil 1%. Devido a maior presença de valores extremos nesses casos, justamente a informação utilizada para computar as medidas de risco, maiores oscilações ocorrem, o que culmina em grau elevado de dispersão.

No tocante à razão entre as medidas e o SDR, é natural se obter valores menores que a unidade, pois o SDR domina em termos de valor obtido as outras medidas. Verifica-se ainda que o componente SD assume valores menores que VaR e ES e, por consequência, possui menor participação relativa no SDR. Com relação aos cenários, devido ao aumento do SDR em relação a VaR e ES nas simulações com distribuição *t* de Student, a razão diminui. Já a razão entre o SD e o SDR aumenta, uma vez que o SD aumenta nessas situações onde mais valores extremos estão presentes. Assim, considerar o termo de penalização SD se faz muito importante, especialmente em cenários onde maior turbulência e possibilidades de grandes perdas são maiores. Logo, o uso do SDR se apresenta como de grande relevância na gestão de risco em finanças. Quanto à correlação, basicamente a menor associação com o SDR é dada pelo VaR, pois ES e SD são componentes diretos do SDR. Ainda, essa associação se torna extremamente alta nos cenários com distribuição *t* de Student. Desse modo, nos contextos de maior risco, mesmo as medidas captando informações bastante semelhantes, o SDR apresenta valores maiores que ES e VaR, podendo funcionar melhor para proteção.

4.3 Dados reais

Apesar da robustez dos resultados obtidos com simulações Monte Carlo, é interessante observar como o SDR se comporta quando se consideram dados reais. A utilização de dados reais permite considerar eventos importantes ocorridos, tais como crises e grandes perdas. Desse modo, se ilustra a aplicação do SDR em comparação com as medidas mais utilizadas na mensuração do risco do índice S&P500 desde sua criação. Como já mencionado, esse indicador é um dos mais relvantes para mercados financeiros. A Figura 5 apresenta a evolução temporal desse indicador. De modo breve, se percebe que até o final da década de 1980 o índice apresentou um crescimento suave. A partir disso uma tendência de fortes altas e bruscas quedas, ocasionadas por crises financeiras como a *dot.com* e *sub-prime*, no ínicio e final dos anos 2000, respectivamente. Não à toa, justamente a partir dessa época que as práticas e discussões sobre gestão de risco, principalmente mensuração do risco, foram intensificadas na área financeira.

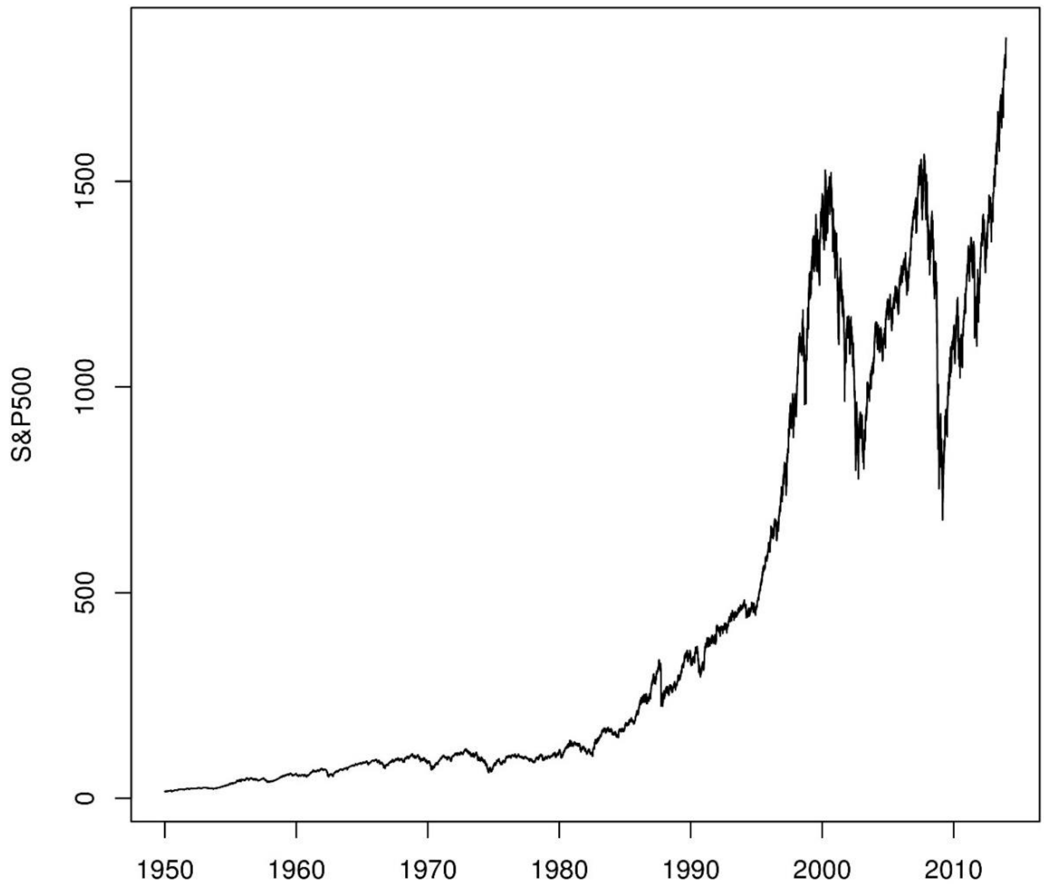

Figura 5 – Preços diários do S&P500 de Janeiro de 1950 a Dezembro de 2013.

Visando manter determinado padrão nas análises, o procedimento com os dados reais mantém basicamente a mesma estrutura utilizada para as simulações. Nesse sentido, se considera o resultado aleatório X_t como sendo a diferença de logaritmos naturais, ou log-diferença, dos preços exibidos na Figura 5. Para a estimação das medidas de risco, é utilizado método HS, conforme (5), com base numa janela de estimação de 2000 observações. Assim, para se computar as medidas para cada dia, as últimas 2000 observações são utilizadas. Novamente, se considera aqui $\beta = 1$ e 0,01 e 0,05 como valores para α. Inicialmente, se apresenta uma análise visual dos resultados obtidos. As Figuras 6 e 7 apresentam a evolução temporal dos log-retornos do S&P500, bem como as medidas de risco VaR, ES e SDR, com sinal devidamente corrigido, para os quantis 1% e 5%, respectivamente.

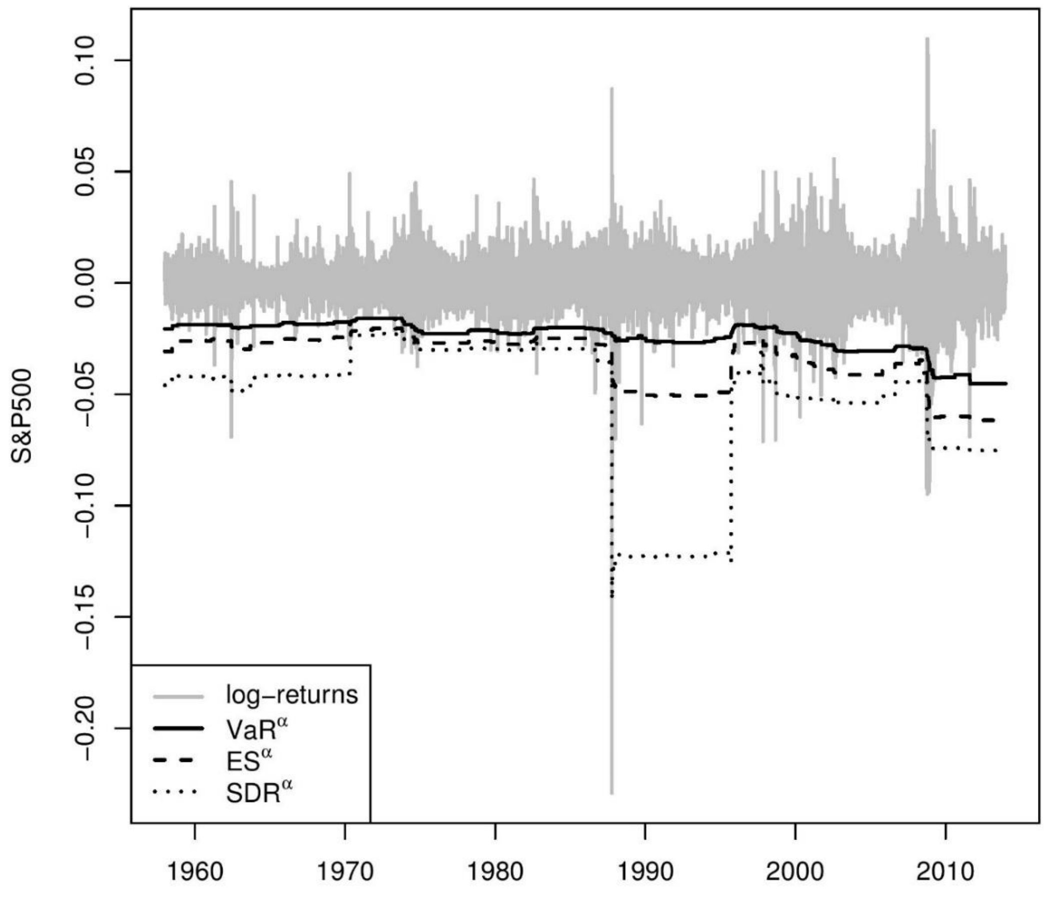

Figura 6 – Log-retornos do S&P500, VaR, ES e SDR diários de Janeiro de 1958 a dezembro de 2013 para $\alpha = 0{,}01$.

Basicamente se percebe que o padrão é muito semelhante para os dois quantis, com diferença na escala das medidas. Se nota que a diferença entre o SDR e a ES aumenta nos momentos de maiores perdas ou turbulências. Em outras palavras, por considerar o componente de dispersão SD, o SDR apresenta estimativa do risco mais parcimoniosa e maior proteção justamente em momentos mais críticos. Tal comportamento é um claro benefício do SDR como medida de risco. De modo mais detalhado, a Tabela 2 apresenta resultados descritivos de média, desvio padrão, assimetria, curtose, mínimo e máximo dos log-retornos do S&P500 e das medidas de risco estimadas com HS. Ainda, a razão média e a correlação de Pearson para com o SDR, são expostos.

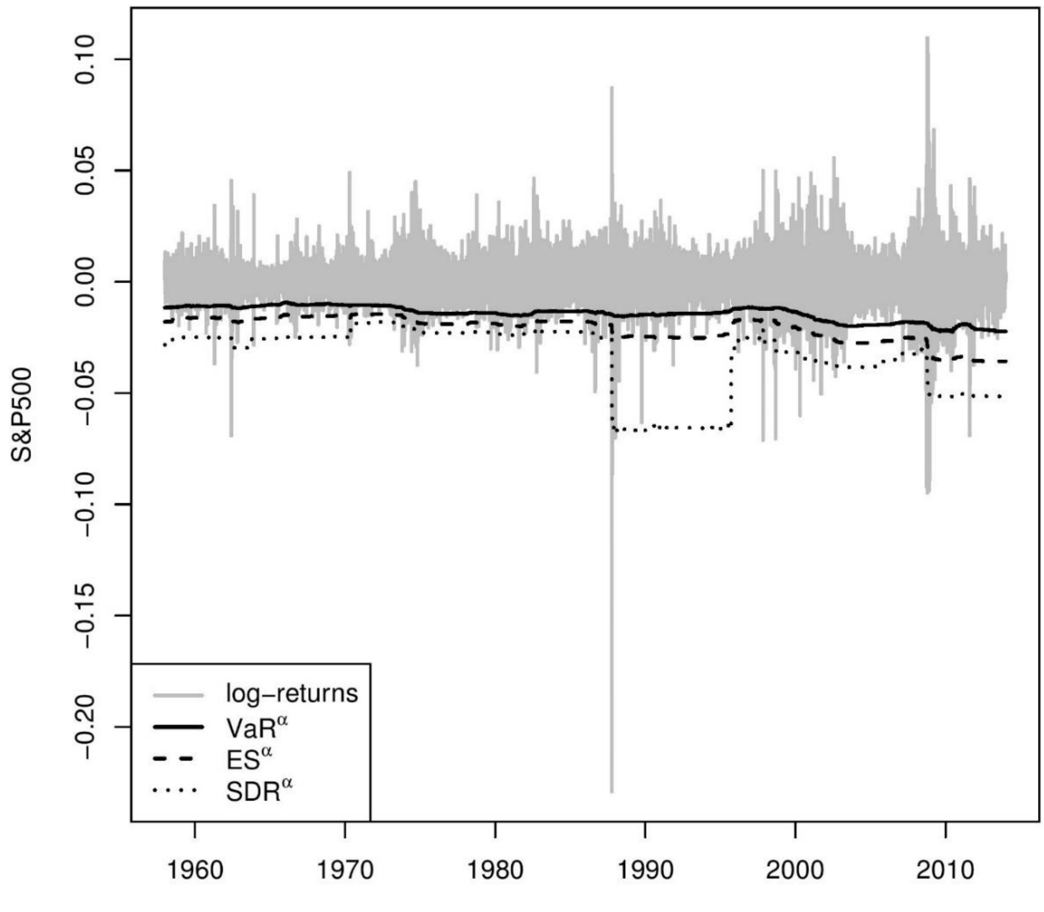

Figura 7 – Log-retornos do S&P500, VaR, ES e SDR diários de Janeiro de 1958 a dezembro de 2013 para $\alpha = 0{,}05$.

Os resultados contidos na Tabela 2 confirmam que o SDR apresenta valor médio maior que o das outras medidas de risco, porquanto é mais parcimonioso. Naturalmente, o valor médio dos log-retornos do S&P500 são praticamente zero. Ainda, a diferença entre SDR e ES é maior que a diferença entre ES e VaR, de tal modo que a penalização pelo SD representa maior proteção. Com exceção do SD, as medidas de risco apresentam valores maiores para o quantil 1%, por representar perdas mais extremas. Por este motivo, o SDR não aumenta na mesma proporção que VaR e ES no quantil mais extremo, o que é refletido pelo crescimento da razão das mesmas em relação ao SDR para o quantil 1%. Dessa forma, a participação média do SD na composição do SDR diminui para o quantil 1%, porém mantém uma proporção relevante, indicando que não pode ser ignorada.

Tabela 2 – Média, desvio padrão, assimetria, curtose, mínimo e máximo, além de razão e correlação de Pearson para com o SDR das medidas de risco para o S&P500 de Janeiro de 1958 a Dezembro de 2013.

α = 1%	**Média**	**Desvio**	**Assim.**	**Curtose**	**Mínimo**	**Máximo**	**Razão**	**Pearson**
S&P500	0,0002	0,0100	-1,0349	30,9024	-0,2289	0,1096	0,0056	0,0096
$\widehat{VaR}^{\alpha}$	0,0242	0,0072	1,5371	4,8403	0,0158	0,0451	0,5283	0,4407
$\widehat{ES}^{\alpha}$	0,0346	0,0121	0,9497	2,5967	0,0203	0,0616	0,7137	0,7987
$\widehat{SD}^{\alpha}$	0,0195	0,0227	1,8176	4,7516	0,0013	0,1027	0,2892	0,9461
$\widehat{SDR}^{\alpha}$	0,0539	0,0309	1,3893	3,6528	0,0227	0,1426	1,0000	1,0000
α = 5%	**Média**	**Desvio**	**Assim.**	**Curtose**	**Mínimo**	**Máximo**	**Razão**	**Pearson**
S&P500	0,0002	0,0100	-1,0349	30,9024	-0,2289	0,1096	0,0008	0,0092
$\widehat{VaR}^{\alpha}$	0,0143	0,0034	0,7498	2,6015	0,0093	0,0224	0,4632	0,4940
$\widehat{ES}^{\alpha}$	0,0212	0,0058	1,0308	3,2346	0,0143	0,0356	0,6699	0,7144
$\widehat{SD}^{\alpha}$	0,0196	0,0227	1,8176	4,7516	0,0013	0,1027	0,4709	0,8681
$\widehat{SDR}^{\alpha}$	0,0343	0,0154	1,1129	2,7992	0,0188	0,0674	1,0000	1,0000

No que se refere à dispersão das estimativas, se verifica que os valores aumentam para o quantil 1%, como já observado nos resultados obtidos com as simulações Monte Carlo. Esse padrão é mantido pela amplitude (diferença entre os valores máximo e mínimo). Também se verifica aumento das curtoses no quantil 1%, com exceção da ES, porém este aumento é mais suave. Cabe ressaltar que as curtoses são próximas daquelas esperadas para dados mesocúrticos, embora existam alguns desvios. Essa relação entre a dispersão, amplitude e curtose é natural pois são conceitos correlatos. Em relação aos log-retornos do S&P500, as dispersões das medidas são maiores, porém as amplitudes e curtoses são muito menores, o que é natural pois os retornos podem assumir qualquer valor dentro da distribuição empírica de probabilidade dos dados, ao passo que as medidas consideram apenas os quantis extremos.

Sobre a assimetria observada nos dados, se verifica que os log-retornos apresentam valor negativo, o que é um fato estilizado para dados financeiros, ao passo que as medidas de risco apresentam valor positivo. Como o valor das medidas tem sinal ajustado, na realidade é possível considerar que os valores de assimetria para o S&P500 e para as medidas de risco contém o mesmo indicativo de que perdas maiores ocorrem com maior frequência que ganhos maiores. Já no tocante às correlações, se verifica que não há associação linear entre S&P500 e SDR, pois o primeiro leva em conta todas as possíveis variações e o último apenas aquelas na cauda. Quanto as outras medidas, a associação com o VaR é moderada e se reduz suavemente no quantil 1%, ao passo que aquela para com ES e SD é muito alta, já que essas duas medidas compõe o SDR, e aumenta suavemente no quantil 1%.

Dessa forma, os resultados obtidos com os dados reais se assemelham bastante com aqueles verificados com simulação Monte Carlo. Como a amostra utilizada é bastante longa e heterogênea, um efeito de suavização para perdas extremas e volatilidade é observado, de tal modo que aspectos dos diferentes cenários simulados são encontrados nos resultados para os dados reais. Assim, a ilustração da utilização do SDR mostra que a medida apresenta maior proteção que a ES especialmente em momentos ou cenários de maior turbulência, precisamente quando é mais necessário. Essa vantagem é adquirida por considerar o termo de dispersão SD, de maneira a levar em conta as duas dimensões do conceito de risco. Portanto, além de possuir consistentes propriedades teóricas, o SDR apresenta também efeito prático na mensuração do risco.

5 CONCLUSÃO

O foco central deste trabalho é propor a medida de risco SDR, que considera o grau de dispersão de uma perda extrema além de seu valor esperado. O SDR é portanto uma combinação da ES com o conceito SD apresentado no trabalho, podendo ser entendido como a perda esperada quando esta supera o VaR, penalizada pela dispersão de resultados acima dessa perda esperada. Portanto, o SDR junta os dois conceitos fundamentais de risco, possibilidade de resultados ruins (ES) e variabilidade sobre um resultado esperado (SD), além de levar em conta as caudas, que representam resultados extremos. Dessa forma, pode-se entender o SDR como tendo um conceito robusto, além de funcionar como proteção mais sólida devido à penalização pela dispersão.

Dessa forma, definições e propriedades tóricas sobre o SDR são discutidas em detalhes. Como a ES é uma medida conhecida, inicialmente são demostradas as propriedades do SD. Se verifica que o SD é uma medida de desvio generalizado, possuindo axiomas de Insensibilidade à Translação, Homogeneidade Positiva, Subaditividade, Não Negatividade, Dominância de Amplitude Inferior e Invariância de Lei. Com base nesses axiomas, o envelope de risco e a representação dual do SD são deduzidos e apresentados. Com base nas propriedades do SD, resultados teóricos para a medida de risco SDR são obtidos. Assim, se observa que o SDR é uma medida de risco coerente, possuindo axiomas de Invariância de Translação, Subaditividade, Monotonicidade, Homogeneidade Positiva, Relevância, Perda Estrita e Invariância de Lei. Não obstante, o SDR leva a valores maiores que a ES, mas é limitada pela perda máxima, além de aumentar para quantis mais extremos, como é desejado para uma medida de risco na cauda. Com base nesses reultados teóricos, a representação dual do SDR é obtida. Outras questões do SDR são discutidas, tais como sua representação por meio de uma ponderação da ES em diferentes quantis, conjuntos de aceitação, convexidade e continuidade como função, e relação com ordens de dominância estocástica.

Além do desenvolvimento teórico da medida SDR, são expostas ilustrações a fim de proporcionar melhor compreensão dos conceitos debatidos, assim como explorar certas características práticas da mesuração de risco em finanças. Dessa forma, inicialmente gráficos exemplificando o SDR em relação às medidas de risco mais utilizadas, VaR e ES, são expostos, bem como o papel de escolhas de coeficientes. Não obstante, se valendo de procedimentos de simulação Monte Carlo e dados reais, se obtém resultados acerca do comportamento do SDR em diferentes cenários e momentos financeiros. Esses resultados permitem concluir que o SDR oferece maior proteção e parcimônia na mesuração do risco em relação a VaR e ES, especialmente em momentos de forte turbulência em cenários mais arriscados. Tais situações são precisamente aquelas onde uma correta gestão de risco se faz mais necessária.

Com base no desenvolvimento teórico e ilustrações, se verifica que o SDR é uma medida de rico com conceito sólido, boas propriedades teóricas que garantem sua utilização, além de ser mais eficiente que as medidas mais utilziadas especialmente em momentos de maior necessidade. Em termos práticos, naturalmente que a maior utilidade para uma medida de risco é justamente sua aplicação em problemas reais. Nesse sentido, o trabalho é encerrado com uma breve exposição de possibilidades de aplicações do SDR, que podem servir como um guia para futuros estudos.

A aplicação mais clara e direta possível é a mensuração prática do risco. A utilização do SDR pode ser interessante neste tópico devido ao fato de esta medida considerar os dois pilares principais do conceito de risco, que vem a ser a incerteza sobre uma expectativa e a possibilidade de resultados negativos extremos, além de ser coerente e possuir o axioma de Invariância de Lei, que permite que a medida seja computada por meio de dados reais. Assim, estudos que visem debater implicações práticas das propriedades teóricas do SDR, seu papel na identificação de distintos tipos de risco, ou mesmo sua consistência na gestão do risco de instituições em relação a outras medidas concorrentes são exemplos de possíveis aplicações no campo da mensuração prática do risco.

Outra aplicação é a utilização de medidas de risco no requerimento de capital de uma instituição ou mesmo de um agente. Esta aplicação é mais relacionada com o conceito de conjunto de aceitação, que representa o montante que uma instituição deve manter para tornar sua posição aceitável ou evitar quebras. Mais além, como o SD representa a dispersão em torno do valor esperado da posição quando um resultado extremo ocorre, uma proteção maior pode ser obtida ao se considerar essa dispersão sobre a ES como fator de correção, levando a menores chances de falência.

Outro campo para aplicações da medida SD é o de alocação de recursos, que tem como fundamento técnicas de construção e análises de portfólios. Um aspecto fundamental da construção de portfólios é que a função objetivo a ser otimizada possua a propriedade de convexidade. O SDR, devido aos axiomas de Homogeneidade Positiva e Subaditividade, possui tal propriedade. Assim sendo, estudos propondo a minimização do risco de um portfólio tendo o SDR como função objetivo, ou mesmo como restrição em outros tipos de estratégias, podem contribuir com a literatura da área no sentido de indicar alternativas para a análise de investimentos baseada em outras medidas de risco. Complementando, um campo promissor para aplicações é o de tomada de decisão de agentes. Devido a propriedades de continuidade e o axioma de Invariância de Lei, associado a já mencionada propriedade de convexidade, o SDR respeita a aversão ao risco de agentes. Sendo assim, é possível utilizar o SDR no desenvolvimento de modelos para identificar a tomada de decisão.

Outras aplicações possíveis para o SDR em finanças podem ser concebidas na substituição de outras medidas nos mais diversos problemas. Assim, estudos que apliquem o SDR para desenvolvimento de modelos de precificação de ativos, determinação de prêmios para opções ou outros derivativos, diagnósticos de *stress* financeiro em períodos de turbulência, entre outros são plenamente possíveis e recomendados.

6 REFERÊNCIAS

ACCIAIO, B.; FÖLLMER, H.; PENNER, I. Risk assessment for uncertain cash flows: model ambiguity, discounting ambiguity, and the role of bubbles. **Finance and Stochastics**, v. 16, n. 4, p. 669-709, 2012.

ACCIAIO, B.; SVINDLAND, G. Are law-invariant risk functions concave on distributions? **Dependence Modeling**, v. 1, p. 54-64, 2013.

ACERBI, C. Spectral measures of risk: a coherent representation of subjective risk aversion. **Journal of Banking & Finance**, v. 26, n. 7, p. 1505-1518, 2002.

ACERBI, C.; TASCHE, D. Expected Shortfall: a natural coherent alternative to value at risk. **Economic Notes**, v. 31, n. 2, p. 379-388, 2002b.

ACERBI, C.; TASCHE, D. On the coherence of expected shortfall. **Journal of Banking & Finance**, v. 26, n. 7, p. 1487-1503, 2002a.

AHMADI-JAVID, A. Entropic value-at-risk: a new coherent risk measure. **Journal of Optimization Theory and Applications**, v. 155, n. 3, p. 1105-1123, 2012.

AHMED, S.; FILIPOVIĆ, D.; SVINDLAND, G. A note on natural risk statistics. **Operations Research Letters**, v. 36, n. 6, p. 662-664, 2008.

ALEXANDER, C.; SHEEDY, E. Developing a stress testing framework based on market risk models. **Journal of Banking & Finance**, v. 32, n. 10, p. 2220-2236, 2008.

ALEXANDER, G. J.; BAPTISTA, A. M. A comparison of VaR and CVaR constraints on portfolio selection with the mean-variance model. **Management Science**, v. 50, n. 9, p. 1261-1273, 2004.

ANGELIDIS, T.; BENOS, A.; DEGIANNAKIS, S. A robust VaR model under different time periods and weighting schemes. **Review of Quantitative Finance and Accounting**, v. 28, n. 2, p. 187-201, 2007.

ANGELSBERG, G.; DELBAEN, F.; KAELIN, I.; KUPPER, M.; NÄF, J. On a class of law invariant convex risk measures. **Finance and Stochastics**, v. 15, n. 2, p. 343-363, 2011.

ARTZNER, P.; DELBAEN, F.; EBER, J.-M.; HEATH, D. Coherent measures of risk. **Mathematical Finance**, v. 9, n. 3, p. 203-228, 1999.

ARTZNER, P.; DELBAEN, F.; EBER, J.-M.; HEATH, D.; KU, H. Coherent multiperiod risk adjusted values and Bellman's principle. **Annals of Operations Research**, v. 152, n. 1, p. 5-22, 2007.

ARTZNER, P.; DELBAEN, F.; KOCH-MEDINA, P. Risk measures and efficient use of capital. **ASTIN Bulletin**, v. 39, n. 1, p. 101-116, 2009.

ASSA, H.; MORALES, M. Risk measures on the space of infinite sequences. **Mathematics and Financial Economics**, v. 2, n. 4, p. 253-275, 2010.

BALBÁS, A.; BALBÁS, R.; JIMÉNEZ-GUERRA, P. Vector risk functions. **Mediterranean Journal of Mathematics**, v. 9, n. 4, p. 563-574, 2012.

BALBÁS, A.; GARRIDO, J.; MAYORAL, S. Properties of distortion risk measures. **Methodology and Computing in Applied Probability**, v. 11, n. 3, p. 385-399, 2009.

BALI, T. G.; DEMIRTAS, K. O; LEVY, H. Is there an intertemporal relation between downside risk and expected returns? **Journal of Financial and Quantitative Analysis**, v. 44, n. 4, p. 883-909, 2009.

BAMBERG, G.; NEUHIERL, A. On the non-existence of conditional value-at-risk under heavy tails and short sales. **OR Spectrum**, v. 32, n. 1, p. 49-60, 2010.

BÄUERLE, N.; MÜLLER, A. Stochastic orders and risk measures: consistency and bounds. **Insurance: Mathematics and Economics**, v. 38, n. 1, p. 132-148, 2006.

BÄUERLE, N.; MUNDT, A. A Bayesian approach to incorporate model ambiguity in a dynamic risk measure. **Statistics & Decisions**, v. 26, n. 3, p. 219-242, 2008.

BELLES-SAMPERA, J.; GUILLÉN, M.; SANTOLINO, M. Beyond value-at-risk: GlueVaR distortion risk measures. **Risk Analysis**, v. 34, n. 1, p. 121-134, 2014.

BELLES-SAMPERA, J.; MERIGÓ, J. M.; GUILLÉN, M.; SANTOLINO, M. The connection between distortion risk measures and ordered weighted averaging operators. **Insurance: Mathematics and Economics**, v. 52, n. 2, p. 411-420, 2013.

BELLINI, F.; KLAR, B.; MÜLLER, A.; ROSAZZA GIANIN, E. Generalized quantiles as risk measures. **Insurance: Mathematics and Economics**, v. 54, p. 41-48, 2014.

BELZUNCE, F.; PINAR, J. F.; RUIZ, J. M.; SORDO, M. A. Comparison of risks based on the expected proportional shortfall. **Insurance: Mathematics and Economics**, v. 51, n. 2, p. 292-302, 2012.

BERTSIMAS, D.; LAUPRETE, G. J.; SAMAROV, A. Shortfall as a risk measure: properties, optimization and applications. **Journal of Economic Dynamics & Control**, v. 28, n. 7, p. 1353-1381, 2004.

BIAGINI, S.; FRITTELLI, M. On the extension of the Namioka-Klee theorem and on the Fatou property for risk measures. **Optimality and Risk - Modern Trends in Mathematical**, p. 1-30, 2010.

BION-NADAL, J. Dynamic risk measures: time consistency and risk measures from BMO martingales. **Finance and Stochastics**, v. 12, n. 2, p. 219-244, 2008.

BION-NADAL, J. Time consistent dynamic risk processes. **Stochastic Processes and their Applications**, v. 119, n. 2, p. 633-654, 2009.

BION-NADAL, J.; KERVAREC, M. Risk measuring under model uncertainty. **The Annals of Applied Probability**, v. 22, n. 1, p. 213-238, 2012.

BRANDTNER, M. "Spectral risk measures: properties and limitations": Comment on Dowd, Cotter, and Sorwar. **Journal of Financial Services Research**, 2014.

BURGERT, C.; RÜSCHENDORF, L. Consistent risk measures for portfolio vectors. **Insurance: Mathematics and Economics**, v. 38, n. 2, p. 289-297, 2006.

CASCOS, I.; MOLCHANOV, I. Multivariate risks and depth-trimmed regions. **Finance and Stochastics,** v. 11, n. 3, p. 373-397, 2007.

CERREIA-VIOGLIO, S.; MACCHERONI, F.; MARINACCI, M.; MONTRUCCHIO, L. Risk measures: rationality and diversification. **Mathematical Finance**, v. 4, n. 4, p. 743-774, 2011.

CHAMBERS, C. An axiomatization of quantiles on the domain of distribution functions. **Mathematical Finance**, v. 19, n. 2, p. 335-342, 2009.

CHEN, Z.; WANG, Y. A new class of coherent risk measures based on *p*-norms and their applications. **Applied Stochastic Models in Business and Industry**, v. 23, n. 1, p. 49-62, 2007.

CHEN, Z.; WANG, Y. Two-sided coherent risk measures and their application in realistic portfolio optimization. **Journal of Banking & Finance**, v. 32, n. 12, p. 2667-2673, 2008.

CHEN, Z.; YANG, L. Nonlinearly weighted convex risk measure and its application. **Journal of Banking & Finance**, v. 35, n. 7, p. 1777-1793, 2011.

CHERIDITO, P.; DELBAEN, F.; KUPPER, M. Coherent and convex monetary risk measures for bounded càdlàg processes. **Stochastic Processes and their Applications**, v. 112, n. 1, p. 1-22, 2004.

CHERIDITO, P.; DELBAEN, F.; KUPPER, M. Coherent and convex monetary risk measures for unbounded càdlàg processes. **Finance and Stochastics**, v. 9, n. 3, p. 369-387, 2005.

CHERIDITO, P.; DELBAEN, F.; KUPPER, M. Dynamic monetary risk measures for bounded discrete-time processes. **Electronic Journal of Probability**, v. 11, p. 57-106, 2006.

CHERIDITO, P.; KUPPER, M. Composition of time-consistent dynamic monetary risk measures in discrete time. **International Journal of Theoretical and Applied Finance**, v. 14, n. 1, p. 137-162, 2011.

CHERIDITO, P.; LI, T. Dual characterization of properties of risk measures on Orlicz hearts. **Mathematics and Financial Economics**, v. 2, n. 1, p. 29-55, 2008.

CHERIDITO, P.; LI, T. Risk measures on Orlicz hearts. **Mathematical Finance**, v. 19, n. 2, p. 189-214, 2009.

CHERNY, A. S. Weighted V@R and its properties. **Finance and Stochastics**, v. 10, n. 3, p. 367-393, 2006.

CHERNY, A. S.; GRIGORIEV, P. G. Dilatation monotone risk measures are law invariant. **Finance and Stochastics,** v. 11, n. 2, p. 291-298, 2007.

CHRISTOFFERSEN, P.; GONÇALVES, S. Estimation risk in financial risk management. **Journal of Risk**, v. 7, n. 3, p. 1-28, 2005.

CONT, R.; DEGUEST, R.; SCANDOLO, G. Robustness and sensitivity analysis of risk measurement procedures**. Quantitative Finance**, v. 10, n. 6, p. 593-606, 2010.

COSSETTE, H.; MAILHOT, M.; MARCEAU, É.; MESFIOUI, M. Bivariate lower and upper orthant value-at-risk. **European Actuarial Journal,** v. 3, n. 2, p. 321-357, 2013.

COUSIN, A.; DI BERNARDINO, E. On multivariate extensions of conditional-tail-expectation. **Insurance: Mathematics and Economics**, n. 55, p. 272-282. 2014.

COUSIN, A.; DI BERNARDINO, E. On multivariate extensions of value-at-risk. **Journal of Multivariate Analysis**, v. 119, p. 32-46, 2013.

CSÓKA, P.; HERINGS, P. J.-J.; KÓCZY, L. Á. Coherent measures of risk from a general equilibrium perspective. **Journal of Banking & Finance**, v. 31, n. 8, p. 2517-2534, 2007.

CVITANIĆ, J.; KARATZAS, I. On dynamic measures of risk. **Finance and Stochastics**, v. 3, n. 4, p. 451-482, 1999.

DANÍELSSON, J.; JORGENSEN, B. N.; SAMORODNITSKY, G.; SARMA, M.; DE VRIES, C. G. Fat tails, VaR and subadditivity. **Journal of Econometrics**, v. 172, n. 2, p. 283-291, 2013.

DEGIANNAKIS, S.; FLOROS, C.; DENT, P. Forecasting value-at-risk and expected shortfall using fractionally integrated models of conditional volatility: international evidence. **International Review of Financial Analysis**, v. 27, p. 21-33, 2013.

DELBAEN, F. Coherent risk measures on general probability spaces. **Advances in Finance and Stochastics,** p. 1-37, 2002.

DELBAEN, F. Risk measures for non-integrable random variables. **Mathematical Finance**, v. 19, n. 2, p. 329-333, 2009.

DELBAEN, F. The structure of m-stable sets and in particular of the set of risk neutral measures. **Lecture Notes in Mathematics**, v. 1874, n. 1, p. 215-258, 2006.

DELBAEN, F.; PENG, S.; GIANIN, E. R. Representation of the penalty term of dynamic concave. **Finance and Stochastics**, v. 14, n. 3, p. 449-472, 2010.

DENTCHEVA, D.; PENEV, S.; RUSZCZYŃSKI, A. Kusuoka representation of higher order dual risk measures. **Annals of Operations Research**, v. 181, n. 1, p. 325-335, 2010.

DETLEFSEN, K.; SCANDOLO, G. Conditional and dynamic convex risk measures. **Finance and Stochastics**, v. 9, n. 4, p. 539-561, 2005.

DHAENE, J.; DENUIT, M.; GOOVAERTS, M. J.; KAAS, R.; VYNCKE, D. The concept of comonotonicity in actuarial science and finance: theory. **Insurance: Mathematics and Economics**, v. 31, n. 1, p. 3-33, 2002.

DHAENE, J.; KUKUSH, A.; LINDERS, D.; TANG, Q. Remarks on quantiles and distortion risk measures. **European Actuarial Journal**, v. 2, n. 2, p. 319-328, 2012.

DHAENE, J.; LAEVEN, R. J. A.; VANDUFFEL, S.; DARKIEWICZ, G.; GOOVAERTS, M. J. Can a coherent risk measure be too subadditive? **The Journal of Risk and Insurance**, v. 75, n. 2, p. 365-386, 2008.

DOWD, K.; BLAKE, D. After VaR: the theory, estimation, and insurance applications of quantile-based risk measures. **The Journal of Risk and Insurance**, v. 73, n. 2, p. 193-229, 2006.

DOWD, K.; COTTER, J.; SORWAR, G. Spectral risk measures: properties and limitations. **Journal of Financial Services Research**, v. 34, n. 1, p. 61-75, 2008.

DRAPEAU, S.; KUPPER, M. Risk preferences and their robust representation. **Mathematics of Operations Research**, v. 38, n. 1, p. 28-62, 2013.

DRAPEAU, S.; KUPPER, M.; REDA, R. A note on robust representations of law-invariant quasiconvex functions. **Advances in Mathematical Economics**, v. 15, p. 27-39, 2011.

DUFFIE, D.; PAN, J. An overview of value at risk. **The Journal of Derivatives**, v. 4, n. 3, p. 7-49, 1997.

EICHHORN, A.; RÖMISCH, W. Polyhedral risk measures in stochastic programming. **SIAM Journal on Optimization**, v. 16, n. 1, p. 69-95, 2005.

EKELAND, I.; GALICHON, A.; HENRY, M. Comonotonic measures of multivariate risks. **Mathematical Finance,** v. 22, n. 1, p. 109-132, 2012.

EKELAND, I.; SCHACHERMAYER, W. Law invariant risk measures on L^{∞} ($\mathbb{R}^d$). **Statistics & Risk Modeling**, v. 28, n. 3, p. 195-225, 2011.

EL KAROUI, N.; RAVANELLI, C. Cash subadditive risk measures and interest rate ambiguity. **Mathematical Finance**, v. 19, n. 4, p. 561-590, 2009.

FARKAS, W.; KOCH-MEDINA, P.; MUNARI, C. Measuring risk with multiple eligible assets. **Mathematics and Financial Economics**, 2014a.

FARKAS, W.; KOCH-MEDINA, P.; MUNARI, C. Beyond cash-additive risk measures: when changing the numéraire fails. **Finance and Stochastics**, v. 18, n. 1, p.145-173, 2014b.

FASEN, V.; SVEJDA, A. Time consistency of multi-period distortion measures. **Statistics & Risk Modeling**, v. 29, n. 2, p. 133-153, 2012.

FEINSTEIN, Z.; RUDLOFF, R. Multi-portfolio time consistency for set-valued convex and coherent risk measures. **Finance and Stochastics**, 2014.

FEINSTEIN, Z.; RUDLOFF, B. Time consistency of dynamic risk measures in markets with transaction costs. **Quantitative Finance**, v. 13, n. 9, p. 1473-1489, 2013.

FERTIS, A.; BAES, M.; LÜTHI, H.-J. Robust risk management. **European Journal of Operational Research**, v. 222, n. 3, p. 663-672, 2012.

FILIPOVIĆ, D. Optimal numeraires for risk measures. **Mathematical Finance**, v. 18, n. 2, p. 333-336, 2008.

FILIPOVIĆ, D.; KUPPER, M.; VOGELPOTH, N. Approaches to conditional risk. **SIAM Journal on Financial Mathematics**, v. 3, n. 1, p. 402-432, 2012.

FILIPOVIĆ, D.; SVINDLAND, G. The canonical model space for law-invariant convex risk measures is L^1. **Mathematical Finance**, v. 22, n. 3, p. 585-589, 2012.

FILIPOVIĆ, D; KUPPER, M. Monotone and cash-invariant convex functions and hulls. **Insurance: Mathematics and Economics**, v. 41, n. 1, p. 1-16, 2007.

FISCHER, T. Risk capital allocation by coherent risk measures based on one-sided moments. **Insurance: Mathematics and Economics**, v. 32, n. 1, p. 135-146, 2003.

FÖLLMER, H. Spatial risk measures and their local specification: the locally law-invariant case. **Statistics & Risk Modeling**, v. 31, n. 1, p. 79-101, 2014.

FÖLLMER, H.; KNISPEL, T. Entropic risk measures: coherence vs. convexity, model ambiguity and robust large deviations. **Stochastics and Dynamics**, v. 11, n. 02-03, p. 333-351, 2011.

FÖLLMER, H.; PENNER, I. Convex risk measures and the dynamics of their penalty functions. **Statistics & Decisions**, v. 24, n. 1, p. 61-96, 2006.

FÖLLMER, H.; SCHIED, A. Convex measures of risk and trading constraints. **Finance and Stochastics**, v. 6, n. 4, p. 429-447, 2002.

FÖLLMER, H.; SCHIED, A. **Stochastic finance:** an introduction in discrete time. 3. ed. Berlin: Walter de Gruyter, 2011.

FRITTELLI, M.; GIANIN, E. Law invariant convex risk measures. **Advances in Mathematical Economics**, v. 7, p. 33-46, 2005.

FRITTELLI, M.; GIANIN, E. R. On the penalty function and on continuity properties of risk measures. **International Journal of Theoretical and Applied Finance**, v. 14, n. 01, p. 163-185, 2011.

FRITTELLI, M.; GIANIN, E. R. Putting order in risk measures. **Journal of Banking & Finance**, v. 26, n. 7, 1473-1486, 2002.

FRITTELLI, M.; MAGGIS, M. Complete duality for quasiconvex dynamic risk measures on modules of the L^p-type. **Statistics & Risk Modeling**, v. 31, n. 1, p. 103-128, 2014.

FRITTELLI, M.; MAGGIS, M.; PERI, I. Risk measures on P(R) and value at risk with probability/loss function. **Mathematical Finance**, v. 24, n. 2, p. 442-463, 2014.

FRITTELLI, M.; SCANDOLO, G. Risk measures and capital requirements for processes. **Mathematical Finance**, v. 16, n. 4, p. 589-612, 2006.

FURMAN, E.; LANDSMAN, Z. Tail variance premium with applications for elliptical portfolio of risks. **ASTIN Bulletin**, v. 36, n. 2, p. 433-462, 2006a.

FURMAN, E.; LANDSMAN, Z. On some risk-adjusted tail-based premium calculation principles. **Journal of Actuarial Practice**, v. 13, p. 175-190, 2006b.

GIANIN, E. R. Risk measures via g-expectations. **Insurance: Mathematics and Economics**, v. 39, n. 1, p. 19-34, 2006.

GOOVAERTS, M. J.; KAAS, R.; DHAENE, J. A unified approach to generate risk measures. **Astin Bulletin**, v. 33, n. 2, p. 173-191, 2003.

GOOVAERTS, M.; KAAS, R.; DHAENE, J.; TANG, Q. Some new classes of consistent risk measures. **Insurance: Mathematics and Economics**, v. 34, p. 505-516, 2004a.

GOOVAERTS, M. J.; KAAS, R.; LAEVEN, R. J. A.; TANG, Q. A comonotonic image of independence for additive risk measures. **Insurance: Mathematics and Economics**, v. 35, n. 3, p. 581-594, 2004b.

GRECHUK, B.; MOLYBOHA, A.; ZABARANKIN, M. Maximum entropy principle with general deviation measures. **Mathematics of Operations Research**, v. 34, n. 2, p. 445-467, 2009.

GRIGORIEV, P. G.; LEITNER, J. Dilatation monotone and comonotonic additive risk measures represented as Choquet integrals. **Statistics & Decisions**, v. 24, p. 27-44, 2006.

GUÉGAN, D.; TARRANT, W. On the necessity of five risk measures. **Annals of Finance**, v. 8, n. 4, p. 533-552, 2012.

GUO, T.; ZHAO, S.; ZENG, X. The relations among the three kinds of conditional risk measures. **Science China Mathematics**, v. 57, n. 8, p. 1753-1764, 2014.

GZYL, H.; MAYORAL, S. **On a relationship between distorted and spectral risk measures**. MPRA Paper, 2008.

HAMEL, A. H.; HEYDE, F.; RUDLOFF, B. Set-valued risk measures for conical market models. **Mathematics and Financial Economics**, v. 5, n. 1, p. 1-28, 2011.

HAMEL, A.; HEYDE, F. Duality for set-valued measures of risk. **SIAM Journal on Financial Mathematics**, v. 1, p. 66-95, 2010.

HAMEL, A.; RUDLOFF, B.; YANKOVA, M. Set-valued average value at risk and its computation. **Mathematics and Financial Economics**, v. 7, p. 229-246, 2013.

HÜRLIMANN, W. A note on generalized distortion risk measures. **Finance Research Letters**, v. 3, n. 4, p. 267-272, 2006.

INOUE, A. On the worst conditional expectation. **Journal of Mathematical Analysis and Applications**, v. 286, n. 1, p. 237-247, 2003.

INUI, K.; KIJIMA, M. On the significance of expected shortfall as a coherent risk measure. **Journal of Banking & Finance**, v. 29, n. 4, p. 853-864, 2005.

JADHAV, D.; RAMANATHAN, T.; NAIK-NIMBALKAR, U. Modified expected shortfall: a new robust coherent risk measure. **Journal of Risk**, v. 16, n. 1, p. 69-83. 2013.

JARROW, R. A.; PURNANANDAM, A. K. A generalized coherent risk measure: the firm's perspective. **Finance Research Letters**, v. 2, n. 1, p. 23-29, 2005.

JARROW, R. Put option premiums and coherent risk measures. **Mathematical Finance**, v. 12, n. 2, p. 135-142, 2002.

JIANG, L. Convexity, translation invariance and subadditivity for g-expectations and related risk measures. **The Annals of Applied Probability**, v. 18, n. 1, p. 245-258, 2008.

JOAQUIN, D. C. Value at risk: is a theoretically consistent axiomatic formulation possible? **The Quarterly Review of Economics and Finance**, v. 49, n. 2, p. 725-729, 2009.

JOBERT, A.; ROGERS, L. C. G. Valuations and dynamic convex risk measures. **Mathematical Finance**, v. 18, n. 1, p. 1-22, 2008.

JORION, P. **Value at risk**: the new benchmark for managing financial risk. 3. ed. Hardcover, 2007.

JOUINI, E.; MEDDEB, M.; TOUZI, N. Vector-valued coherent risk measures. **Finance and Stochastics**, v. 8, n. 4, p. 531-552, 2004.

JOUINI, E.; SCHACHERMAYER, W.; TOUZI, N. Law invariant risk measures have the Fatou property. **Advances in Mathematical Economics**, v. 9, p. 49-71, 2006.

KAINA, M.; RÜSCHENDORF, L. On convex risk measures on L^p-spaces. **Mathematical Methods of Operations Research**, v. 69, n. 3, p. 475-495, 2009.

KATSUKI, Y.; MATSUMOTO, K. Tail VaR measures in a multi-period setting. **Applied Mathematical Finance**, v. 21, n. 3, p. 270-297, 2014.

KLÖPPEL, S.; SCHWEIZER, M. Dynamic indifference valuation via convex risk measures. **Mathematical Finance**, v. 17, n. 4, p. 599-627, 2007.

KONOVALOV, L. Coherent risk measures and a limit pass. **Theory of Probability & Its Applications**, v. 54, n. 3, 403-424, 2010.

KONOVALOV, L. On one limit relation for coherent risk measures. **Theory of Probability & Its Applications**, v. 55, n. 1, p. 144-153, 2011.

KONSTANTINIDES, D. G.; KOUNTZAKIS, C. E. Risk measures in ordered normed linear spaces with non-empty cone-interior. **Insurance: Mathematics and Economics**, v. 48, n. 1, p. 111-122, 2011.

KOU, S.; PENG, X.; HEYDE, C. C. External risk measures and Basel accords. **Mathematics of Operations Research**, v. 38, n. 3, p. 393-417, 2013.

KOUNTZAKIS, C. Generalized coherent risk measures. **Applied Mathematical Sciences**, v. 3, n. 49, p. 2437-2451, 2009.

KOVACEVIC, R. M. Conditional risk and acceptability mappings as Banach-lattice valued mappings. **Statistics & Risk Modeling**, v. 29, n. 1, p. 1-18, 2012.

KOVACEVIC, R.; PFLUG, G. Time consistency and information monotonicity of multiperiod acceptability functionals. **Radon Series in Computational Applied Mathematics**, v. 8, p. 347-369, 2009.

KRÄTSCHMER, V. Robust representation of convex risk measures by probability measures. **Finance and Stochastics**, v. 9, n. 4, p. 597-608, 2005.

KROMER, E.; OVERBECK, L. Representation of BSDE-based dynamic risk measures and dynamic capital allocations. **International Journal of Theoretical and Applied Finance**, v. 17, n. 5, p. 1450032- 1450048, 2014

KROKHMAL, P. A. Higher moment coherent risk measures. **Quantitative Finance**, v. 7, n. 4, p. 373-387, 2007.

KUESTER, K.; MITTNIK, S.; PAOLELLA, M. S. Value-at-risk prediction: a comparison of alternative strategies. **Journal of Financial Econometrics**, v. 4, n. 1, p. 53-89, 2006.

KULIKOV, A. Multidimensional coherent and convex risk measures. **Theory of Probability & Its Applications**, v. 52, n. 4, p. 614-635, 2008.

KUPPER, M.; SCHACHERMAYER, W. Representation results for law invariant time consistent functions. **Mathematics and Financial Economics**, v. 2, n. 3, p. 189-210, 2009.

KUSUOKA, S. A remark on law invariant convex risk measures. **Advances in Mathematical Economics**, v. 9, p. 91-100, 2007.

KUSUOKA, S. On law invariant coherent risk measures. **Advances in Mathematical Economics**, v. 3, p. 83-95, 2001.

KUSUOKA, S.; MORIMOTO, Y. Homogeneous law invariant coherent multiperiod value measures and their limits. **Journal of Mathematical Sciences, The University of Tokyo**, v. 14, p. 117-156, 2007.

LABUSCHAGNE, C. C. A.; OFFWOOD-LE ROUX, T. M. Representations of set-valued risk measures defined on the *l*-tensor product of Banach lattices. **Positivity**, v. 18, n. 3, p. 619-639, 2014.

LAEVEN, R.; STADJE, M. Entropy coherent and entropy convex measures of risk. **Mathematics of Operations Research**, v. 38, n. 2, p. 265-293. 2013.

LEE, J.; PRÉKOPA, A. Properties and calculation of multivariate risk measures: MVaR and MCVaR. **Annals of Operations Research**, v. 211, n. 1, p. 225-254, 2013.

LEITNER, J. A short note on second-order stochastic dominance preserving coherent risk measures. **Mathematical Finance**, v. 15, n. 4, p. 649-651, 2005.

LEITNER, J. Balayage monotonous risk measures. **International Journal of Theoretical and Applied Finance**, v. 7, n. 7, p. 887-900, 2004.

LONGIN, F. M. Beyond the VaR. **The Journal of Derivatives**, v. 8, n. 4, 36-48, 2001.

MARKOWITZ, H. Portfolio selection. **The Journal of Finance**, v. 7, n. 1, p. 77-91, 1952.

MAZZOLENI, P. Risk measures and return performance: a critical approach. **European Journal of Operational Research**, v. 155, n. 2, p. 268-275, 2004.

MOLCHANOV, I.; CASCOS, I. Multivariate risk measures: a constructive approach based on selections. **Mathematical Finance**, 2014.

NOYAN, N.; RUDOLF, G. Kusuoka representations of coherent risk measures in general probability spaces. **Annals of Operations Research**, 2014.

ORIHUELA, J.; RUIZ GALÁN, M. Lebesgue property for convex risk measures on Orlicz spaces. **Mathematics and Financial Economics**, v. 6, n. 1, p. 15-35, 2012.

PENNER, I.; RÉVEILLAC, A. Risk measures for processes and BSDEs. **Finance and Stochastics**, 2014.

PÉRIGNON, C.; SMITH, D. R. The level and quality of value-at-risk disclosure by commercial banks. **Journal of Banking & Finance**, v. 34, n. 2, p. 362-377, 2010.

PFLUG, G. C. On distortion functionals. **Statistics & Decisions**, v. 24, n. 1, p. 45-60, 2006a.

PFLUG, G. Subdifferential representations of risk measures. **Mathematical Programming**, v. 108, n. 2-3, p. 339-354, 2006b.

PFLUG, G. C. A value-of-information approach to measuring risk in multi-period economic activity. **Journal of Banking & Finance**, v. 30, n. 2, p. 695-715, 2006c.

PFLUG, G. C. Some remarks on the value-at-risk and the conditional value-at-risk. **Probabilistic Constrained Optimization**, v. 49, p. 272-281, 2000.

PFLUG, G. C.; RUSZCZYŃSKI, A. Measuring risk for income streams. **Computational Optimization and Applications**, v. 32, n. 1-2, p. 161-178, 2005.

PICHLER, A. The natural Banach space for version independent risk measures. **Insurance: Mathematics and Economics**, v. 53, n. 2, p. 405-415, 2013.

PRÉKOPA, A. Multivariate value at risk and related topics. **Annals of Operations Research**, v. 193, n. 1, p. 49-69, 2012.

PRITSKER, M. The hidden dangers of historical simulation. **Journal of Banking & Finance**, v. 30, n. 2, p. 561-582, 2006.

RIEDEL, F. Dynamic coherent risk measures. **Stochastic Processes and their Applications**, v. 112, n. 2, p. 185-200, 2004.

ROCKAFELLAR, R. T.; URYASEV, S. Conditional value-at-risk for general loss distributions. **Journal of Banking & Finance**, v. 26, n. 7, p. 1443-1471, 2002.

ROCKAFELLAR, R. T.; URYASEV, S. The fundamental risk quadrangle in risk management, optimization and statistical estimation. **Surveys in Operations Research and Management Science**, v. 18, n. 1-2, p. 33-53, 2013.

ROCKAFELLAR, R. T.; URYASEV, S.; ZABARANKIN, M. Generalized deviations in risk analysis. **Finance and Stochastics**, v. 10, n. 1, p. 51-74, 2006.

ROORDA, B.; SCHUMACHER, J. M. The strictest common relaxation of a family of risk measures. **Insurance: Mathematics and Economics**, v. 48, n. 1, p. 29-34, 2011.

ROORDA, B.; SCHUMACHER, J. M. Time consistency conditions for acceptability measures, with an application to Tail Value at Risk. **Insurance: Mathematics and Economics**, v. 40, n. 2, p. 209-230, 2007.

ROORDA, B.; SCHUMACHER, J. M.; ENGWERDA, J. Coherent acceptability measures in multiperiod models. **Mathematical Finance**, v. 15, n. 4, p. 589-612, 2005.

RÜSCHENDORF, L. Law invariant convex risk measures for portfolio vectors. **Statistics & Decisions**, v. 24, n. 1, p. 97-108, 2006.

RUSZCZYŃSKI, A.; SHAPIRO, A. Conditional risk mappings. **Mathematics of Operations Research**, v. 31, n. 3, p. 544-561, 2006.

SHAPIRO, A. On Kusuoka representation of law invariant risk measures. **Mathematics of Operations Research**, v. 38, n. 1, p. 142-152, 2013.

SIU, T. K.; YANG, H. Subjective risk measures: bayesian predictive scenarios analysis. **Insurance: Mathematics and Economics**, v. 25, n. 2, p. 157-169, 1999.

SONG, Y.; YAN, J. An overview of representation theorems for static risk measures. **Science in China Series A: Mathematics**, v. 52, n. 7, p. 1412-1422, 2009a.

SONG, Y.; YAN, J.-A. Risk measures with comonotonic subadditivity or convexity and respecting stochastic orders. **Insurance: Mathematics and Economics**, v. 45, n. 3, p. 459-465, 2009b.

SORDO, M. A. Comparing tail variabilities of risks by means of the excess wealth order. **Insurance: Mathematics and Economics**, v. 45, n. 3, p. 466-469. 2009.

SORDO, M. A. Characterizations of classes of risk measures by dispersive orders. **Insurance: Mathematics and Economics**, v. 42, n. 3, p.1028-1034, 2008.

STADJE, M. Extending dynamic convex risk measures from discrete time to continuous time: a convergence approach. **Insurance: Mathematics and Economics**, v. 47, n. 3, p. 391-404, 2010.

STAUM, J. Excess invariance and shortfall risk measures. **Operations Research Letters**, v. 41, n. 1, p. 47-53, 2013.

STOICA, G. Relevant coherent measures of risk. **Journal of Mathematical Economics**, v. 42, n. 6, p. 794-806, 2006.

SVINDLAND, G. Subgradients of law-invariant convex risk measures on L^1. **Statistics & Decisions**, v. 27, n. 2, p. 169-199, 2009.

SVINDLAND, G. Continuity properties of law-invariant (quasi-)convex risk functions on L^∞. **Mathematics and Financial Economics**, v. 3, n. 1, p. 39-43, 2010.

TAHAR, I. B.; LÉPINETTE, E. Vector-valued coherent risk measure processes. **International Journal of Theoretical and Applied Finance**, v. 17, n. 02, 2014.

TASCHE, D. Expected shortfall and beyond. **Journal of Banking & Finance**, v. 26, n. 7, p. 1519-1533, 2002.

TIAN, D.; JIANG, L. Quasiconvex risk statistics with scenario analysis. **Mathematics and Financial Economics**, aceito para publicação, 2014.

TIAN, D.; SUO, X. A note on convex risk statistic. **Operations Research Letters**, v. 40, n. 6, p. 551-553, 2012.

TSUKAHARA, H. One-parameter families of distortion risk measures. **Mathematical Finance**, v. 19, n. 4, p. 691-705, 2009.

TUTSCH, S. Update rules for convex risk measures. **Quantitative Finance**, v. 8, n. 8, p. 833-843, 2008.

VALDEZ, E. A. Tail conditional variance for elliptically contoured distributions. **Belgian Actuarial Bulletin**, v. 5, n. 1, p. 26-36, 2005.

VICIG, P. Financial risk measurement with imprecise probabilities. **International Journal of Approximate Reasoning**, v. 49, n. 1, p. 159-174, 2008.

WANG, S. An actuarial index of the right-tail risk. **North American Actuarial Journal**, v. 2, n. 2, 88-101, 1998.

WANG, S. Premium calculation by transforming the layer premium density. **ASTIN Bulletin**, v. 26, n. 1, p. 71-92, 1996.

WANG, S. S.; YOUNG, V. R.; PANJER, H. H. Axiomatic characterization of insurance prices. **Insurance: Mathematics and Economics**, v. 21, n. 2, p. 173-183, 1997.

WANG, T. **A class of dynamic risk measures.** Working Paper, University of British Columbia, 1999.

WEBER, S. Distribution-invariant risk measures, information, and dynamic consistency. **Mathematical Finance**, v. 16, n. 2, p. 419-441, 2006.

WEI, L.; HU, Y. Coherent and convex risk measures for portfolios with applications. **Statistics & Probability Letters**, v. 90, p. 114-120, 2014.

WIRCH, J. L.; HARDY, M. R. **Distortion risk measures: coherence and stochastic dominance**. Working Paper, 2000.

WONG, W. K.; FAN, G.; ZENG, Y. Capturing tail risks beyond VaR. **Review of Pacific Basin Financial Markets and Policies**, v. 15, n. 03, 2012.

WU, G.; XIAO, Z. An analysis of risk measures. **Journal of Risk**, v. 4, n. 4, p. 53-76, 2002.

WYLIE, J. J.; ZHANG, Q.; KUEN SIU, T. Can expected shortfall and value-at-risk be used to statically hedge options? **Quantitative Finance**, v. 10, n. 6, p. 575-583, 2010.

XU, Y. Multidimensional dynamic risk measure via conditional g-expectation. **Mathematical Finance**, 2014.

YAMAI, Y.; YOSHIBA, T. Value-at-risk versus expected shortfall: a practical perspective. **Journal of Banking & Finance**, v. 29, n. 4, p. 997-1015, 2005.

ZHU, L.; LI, H. Tail distortion risk and its asymptotic analysis. **Insurance: Mathematics and Economics**, v. 51, n. 1, p. 115-121, 2012.

ZIEGEL, J. F. Coherence and elicitability. **Mathematical Finance**, 2014.