

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA MARIA
CENTRO DE CIÊNCIAS NATURAIS E EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA E
ENSINO DE FÍSICA

Caroline dos Santos

**APRENDIZAGEM DO CONCEITO FUNÇÃO AFIM POR
ESTUDANTES DO ENSINO MÉDIO: POSSIBILIDADES DA
ORGANIZAÇÃO DO ENSINO**

Santa Maria, RS
2023

Caroline dos Santos

**APRENDIZAGEM DO CONCEITO FUNÇÃO AFIM POR ESTUDANTES DO
ENSINO MÉDIO: POSSIBILIDADES DA ORGANIZAÇÃO DO ENSINO**

Dissertação apresentada ao Curso de Pós-Graduação em Educação Matemática e Ensino de Física, da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM, RS), como requisito parcial para obtenção do título de **Mestra em Educação Matemática**.

Orientadora: Prof.^a Dr.^a Anemari Roesler Luersen Vieira Lopes
Coorientador: Prof. Dr. Ricardo Fajardo

Santa Maria, RS
2023

Santos, Caroline dos
APRENDIZAGEM DO CONCEITO FUNÇÃO AFIM POR ESTUDANTES
DO ENSINO MÉDIO: POSSIBILIDADES DA ORGANIZAÇÃO DO ENSINO
/ Caroline dos Santos.- 2023.
174 p.; 30 cm

Orientadora: Anemari Roesler Luersen Vieira Lopes
Coorientador: Ricardo Fajardo
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Santa
Maria, Centro de Ciências Naturais e Exatas, Programa de
Pós-Graduação em Educação Matemática e Ensino de Física, RS,
2023

1. Educação Matemática 2. Teoria da Atividade 3.
Atividade Orientadora de Ensino 4. Nexos Conceituais I.
Lopes, Anemari Roesler Luersen Vieira II. Fajardo,
Ricardo III. Título.

Sistema de geração automática de ficha catalográfica da UFSM. Dados fornecidos pelo autor(a). Sob supervisão da Direção da Divisão de Processos Técnicos da Biblioteca Central. Bibliotecária responsável Paula Schoenfeldt Patta CRB 10/1728.

Declaro, CAROLINE DOS SANTOS, para os devidos fins e sob as penas da lei, que a pesquisa constante neste trabalho de conclusão de curso (Dissertação) foi por mim elaborada e que as informações necessárias objeto de consulta em literatura e outras fontes estão devidamente referenciadas. Declaro, ainda, que este trabalho ou parte dele não foi apresentado anteriormente para obtenção de qualquer outro grau acadêmico, estando ciente de que a inveracidade da presente declaração poderá resultar na anulação da titulação pela Universidade, entre outras consequências legais.

© 2023

Todos os direitos autorais reservados a Caroline dos Santos. A reprodução de partes ou do todo deste trabalho só poderá ser feita mediante a citação da fonte.

E-mail: carolzinisantos@gmail.com

Caroline dos Santos

**APRENDIZAGEM DO CONCEITO FUNÇÃO AFIM POR ESTUDANTES DO
ENSINO MÉDIO: POSSIBILIDADES DA ORGANIZAÇÃO DO ENSINO**

Dissertação apresentada ao Curso de Pós-Graduação em Educação Matemática e Ensino de Física, da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM, RS), como requisito parcial para obtenção do título de **Mestra em Educação Matemática**.

Aprovado em 14 de novembro de 2023.

Anemari Roesler Luersen Vieira Lopes, Dra. (UFSM)
(Orientadora)

Ricardo Fajardo, Dr. (UFSM)
(Coorientador)

Fabiana Fiorezi de Marco, Dra. (UFU) - Videoconferência

Isabel Koltermann Battisti, Dra. (UNIJUÍ) - Videoconferência

Santa Maria, RS
2023

Dedico esta dissertação aos professores e professoras que lutam por uma Educação humanizadora e pela valorização desta profissão tão essencial.

AGRADECIMENTOS

Agradeço...

A Deus, por tantas bênçãos em minha vida, por ser força e luz no meu caminho.

À minha orientadora, Professora Anemari, pela confiança, compreensão, carinho e por cada momento de orientação no decorrer da pesquisa. És uma grande inspiração.

Ao meu coorientador, Professor Ricardo, pelo apoio, pela compreensão, pelo auxílio com a pesquisa e por todos os seus valiosos ensinamentos.

Aos membros da banca, professoras Fabiana e Isabel, pela leitura cuidadosa e importantes contribuições para a qualificação desta pesquisa.

À professora Simone, pelo aceite em participar da banca de qualificação e pelas suas importantes contribuições.

Ao GEPEMat, pela acolhida, pelo carinho, pelas interações e pelos momentos de estudo. Mesmo que de forma virtual, com poucos e preciosos momentos presenciais, vocês me fortaleceram ao dar sentido ao modo coletivo de ser GEPEMat.

À professora Fernanda, pela compreensão, disponibilidade e apoio.

Aos alunos que participaram como sujeitos desta pesquisa, por aceitarem nossa proposta, pelo envolvimento, dedicação e carinho. Vocês são essenciais.

Ao Lukas, meu amor e melhor amigo, pelo apoio diário, pela paciência e por caminhar ao meu lado, tornando esta trajetória mais leve e bonita. Te amo!

À minha mãe, Lizete, por todo amor, incentivo e compreensão. Obrigada por confiar em minhas escolhas e me apoiar em todos os momentos. Amo você!

Ao meu pai, Fabio, por sempre acreditar nos meus sonhos e me apoiar todos os dias. Amo você!

Ao meu irmão, Érick, por ser a minha fortaleza. Te admiro e te amo muito!

À Sandra Weber, minha professora preferida, pelo carinho de mãe e amiga, por ser tão atenciosa e sempre me apoiar. Você me inspira como mulher, em tudo que faz. Amo você!

Às amigas, Edwarda, Lori, Sandra Gelati, Sandra Nunes e Paola pelos conselhos, por todo incentivo e auxílio. Vocês me inspiram, como pessoas e profissionais.

Aos colegas, Andresa, Cristian, Jenifer e Marcela por compartilharmos angústias e momentos de alegria. Vocês são essenciais em minha trajetória.

Agradeço a todos que, de alguma maneira, contribuíram e me apoiaram nesta trajetória. Muito obrigada!

RESUMO

APRENDIZAGEM DO CONCEITO FUNÇÃO AFIM POR ESTUDANTES DO ENSINO MÉDIO: POSSIBILIDADES DA ORGANIZAÇÃO DO ENSINO

AUTORA: Caroline dos Santos

ORIENTADORA: Anemari Roesler Luersen Vieira Lopes

COORIENTADOR: Ricardo Fajardo

Esta pesquisa, desenvolvida no âmbito do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Ensino de Física da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM), tem como problema: no que se refere à organização do ensino de função afim no Ensino Médio alguns elementos podem ser essenciais para a aprendizagem dos estudantes? A partir deste, seu objetivo geral é investigar elementos que se mostram como essenciais para o processo de aprendizagem do conceito de função afim de estudantes de uma turma do Ensino Médio. Os sujeitos desta pesquisa são alunos do primeiro ano do Curso Técnico em Agropecuária Integrado ao Ensino Médio, de uma escola municipal de Ijuí-RS. As ações foram organizadas na perspectiva de um experimento didático, contemplando como instrumentos utilizados na apreensão do material empírico registros produzidos pelos estudantes em portfólios, gravações em áudio e vídeo das aulas desenvolvidas e um questionário. A abordagem teórica e metodológica baseia-se na Teoria Histórico-Cultural de Lev Semionovitch Vigotski, mais especificamente, na Teoria da Atividade de Alexis Nikolaevich Leontiev e na Atividade Orientadora de Ensino de Manoel Oriosvaldo de Moura. O ensino, organizado a partir dos pressupostos da Atividade Orientadora de Ensino, visa possibilitar que os estudantes se envolvam coletivamente na busca por soluções de situações de ensino, as quais devem considerar a essência dos conceitos e o seu movimento lógico-histórico. Essa organização intencional do ensino pode permitir que os estudantes entrem em atividade, uma vez que a estrutura da Atividade Orientadora de Ensino considera os possíveis motivos e as necessidades dos estudantes no desenvolvimento das situações de ensino propostas com o intuito de promover aprendizagens, neste caso, acerca da função afim, tendo em conta os nexos conceituais do conhecimento algébrico: fluência, variável, campo de variação, dependência e proporcionalidade. A primeira situação, relacionada à fluência, visou proporcionar que os alunos compreendam que tudo se transforma, iniciando com a observação de fotografias e suas mudanças pessoais. A segunda, composta pelo jogo Pega Varetas, teve como objetivo proporcionar aos alunos a compreensão de variável, dos possíveis valores que cada variável pode assumir e da relação de dependência entre grandezas, introduzindo a noção intuitiva de função. Por fim, a terceira surgiu por meio de uma demanda real no contexto escola, associada à produção leiteira e destaca a relação entre a função afim e a proporcionalidade. Como resultado são evidenciados os elementos essenciais para a apropriação do conceito função afim: o modo coletivo de organização; a proximidade com o contexto histórico-social dos alunos; a necessidade que leva a um maior envolvimento dos alunos e o motivo de encontrar soluções.

Palavras-chave: Educação Matemática. Teoria da Atividade. Atividade Orientadora de Ensino. Nexos Conceituais.

ABSTRACT

LEARNING ABOUT AFIM FUNCTION: POSSIBILITIES FOR HIGH SCHOOL

AUTHOR: Caroline dos Santos

ADVISOR: Anemari Roesler Luersen Vieira Lopes

CO-ADVISOR: Ricardo Fajardo

This research, developed within the scope of the Graduate Program in Mathematics Education and Physics Teaching at the Federal University of Santa Maria (UFSM), has the problem: With regard to the organization of related function teaching in High School, can some elements be essential for student learning? From this, its general objective is to investigate elements that may prove to be essential for the learning process of the concept of related function for students in a high school class. The subjects of this research are first-year students of the Technical Course in Agriculture Integrated into High School, at a municipal school in Ijuí-RS. The actions were organized from the perspective of a didactic experiment, considering as instruments used to capture the empirical material records produced by students in portfolios, audio and video recordings of the classes developed and a questionnaire. As for the theoretical and methodological approach, it considers the Historical-Cultural Theory of Lev Semionovitch Vigotski, more specifically, the Activity Theory of Alexis Nikolaevich Leontiev and the Teaching Guiding Activity of Manoel Oriosvaldo de Moura. Teaching organized based on the assumptions of the Teaching Guiding Activity aims to enable students to become collectively involved in the search for solutions to teaching situations, which must consider the essence of the concepts and its logical-historical movement. This intentional organization of teaching can allow students to enter into activity, since the structure of the Teaching Guiding Activity considers the possible motives and needs of students in the development of proposed teaching situations with the aim of promoting learning, in our case, about the affine function, considering the conceptual links of algebraic knowledge: fluency, variable, field of variation, dependence and proportionality. The first situation, related to fluency, aimed to enable students to understand that everything changes, starting with observing photographs and their personal changes. The second, composed of the Pega Varetas game, aimed to provide students with an understanding of variables, the possible values that each variable can assume and the dependency relationship between quantities, introducing the intuitive notion of function. Finally, the third emerged through a real demand in the school context, related to dairy production and highlights the relationship between the related function and proportionality. As a result, the following are highlighted as essential elements for the appropriation of the concept of related function: the collective mode of organization; the proximity to the students' historical-social context; the need that leads to greater student involvement and the reason for finding solutions.

Keywords: Mathematics Education. Activity Theory. Teaching Guiding Activity. Conceptual nexuses.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Questões Q.1, Q.2 e Q.3 disponibilizadas aos alunos	92
Figura 2 – Questões Q.4, Q.5, Q.6 e Q.7 disponibilizadas aos alunos	93
Figura 3 – Questões Q.1, Q.2 e Q.3 disponibilizadas aos alunos referentes ao Jogo Pega Varetas	94
Figura 4 – Exemplo de registro para o cálculo da pontuação de cada rodada.....	95
Figura 5 – Questões Q.4, Q.5, Q.6 e Q.7 disponibilizadas aos alunos referentes ao jogo Pega Varetas	95
Figura 6 – Sistematização para definição do conceito de função.....	96
Figura 7 – Problema proposto na Situação III.....	97
Figura 8 – Questões propostas aos alunos	99
Figura 9 – Respostas das questões propostas aos alunos.....	99
Figura 10 – Questões propostas aos alunos	100
Figura 11 – Sistematização para definição de proporcionalidade, função linear e função afim	102
Figura 12 - Episódios e cenas que compõem o Eixo de Análise 1	106
Figura 13 - Registro do portfólio do Aluno 35 em resposta as questões Q.1, Q.2 e Q.3	108
Figura 14 - Registro dos portfólios dos Alunos 25 e 14 em resposta às questões Q.1, Q.2 e Q.3	110
Figura 15 - Registro do portfólio da Aluna 9 em resposta as questões Q. 4-a, Q. 4-b, Q. 5 e Q. 6	113
Figura 16 – Síntese do Eixo de Análise 1.....	118
Figura 17 - Episódios e cenas que compõem o Eixo de Análise 2.....	119
Figura 18 – Registros produzidos pelos alunos na resolução do problema.....	123
Figura 19 - Registro do portfólio da Aluna 9 em resposta ao problema proposto	125
Figura 20 – Síntese do Eixo de Análise 2.....	135
Figura 21 – Carta com pedido de ajuda do agricultor	136
Figura 22 - Episódios e cenas que compõem o Eixo de Análise 3	137
Figura 23 - Registros dos portfólios das Alunas 9 e 25 em resposta ao problema da carta ...	139
Figura 24 - Registros do portfólio do Aluno 14 em resposta aos questionamentos 1 e 2	144
Figura 25 - Registros do portfólio da Aluna 12 em resposta aos questionamentos.....	145
Figura 26 - Síntese do Eixo de Análise 3	150

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 - Dados das pesquisas encontradas	27
Quadro 2 - Instrumentos utilizados na produção do material empírico	84
Quadro 3 - Organização das situações de ensino	90
Quadro 4 – Organização das aulas	91
Quadro 5 – Exemplo de resolução do problema 1	98
Quadro 6 – Exemplo de resolução da ampliação do problema	98
Quadro 7 – Exemplos de funções lineares e de funções não lineares	100
Quadro 8 – Quadro Analítico da Pesquisa.....	103
Quadro 9 - Organização dos Eixos de Análise	104
Quadro 10 - Cena 6.1.1.1: Um olhar para si.....	107
Quadro 11 - Cena 6.1.1.2: Percepções das mudanças	109
Quadro 12 - Cena 6.1.1.3: Mudanças rápidas conforme o meio	111
Quadro 13 - Cena 6.1.2.1: Mudanças em contexto próximo.....	112
Quadro 14 - Cena 6.1.2.2: Padrão em mudanças e proporção.....	114
Quadro 15 - Cena 6.1.2.3: Tudo se transforma	116
Quadro 16 – Cena 6.2.1.1: Necessidade de uma variável	120
Quadro 17 – Cena 6.2.1.2: Diferentes variáveis.....	122
Quadro 18 – Cena 6.2.2.1: Compreensão do campo de variação	126
Quadro 19 – Cena 6.2.2.2: Identificação do campo de variação	128
Quadro 20 – Cena 6.2.3.1: Identificação da relação de dependência.....	129
Quadro 21 – Cena 6.2.3.2: A compreensão de função a partir da dependência.....	130
Quadro 22 – Cena 6.3.1.1: A carta do agricultor e o cálculo do lucro	137
Quadro 23 – Cena 6.3.1.2: Diferentes opiniões na construção da solução.....	139
Quadro 24 – Cena 6.3.1.3: As grandezas diretamente proporcionais.....	141
Quadro 25 – Cena 6.3.2.1: A proporção entre o lucro e a quantidade de leite produzida.....	143
Quadro 26 – Cena 6.3.2.2: Identificando a constante de proporcionalidade.....	146
Quadro 27 – Cena 6.3.2.3: Encontrando a função afim	148

LISTA DE SIGLAS

AOE	Atividade Orientadora de Ensino
BNCC	Base Nacional Comum Curricular
CAPES	Coordenação de Aperfeiçoamento Pessoal de Nível Superior
PCN	Parâmetros Curriculares Nacionais
RCRGS	Referencial Curricular do Rio Grande do Sul
SDA	Situações Desencadeadoras de Aprendizagem
TA	Teoria da Atividade
THC	Teoria Histórico-Cultural
UFSM	Universidade Federal de Santa Maria
ZDI	Zona de Desenvolvimento Iminente

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	18
1.1 TRAJETÓRIA DA PESQUISADORA.....	19
1.2 APRESENTAÇÃO INICIAL DA PESQUISA.....	22
2 MAPEAMENTO DE PESQUISAS: SIGNIFICADO SOCIAL DA TEMÁTICA	26
2.1 APROXIMAÇÕES E DISTANCIAMENTOS.....	45
3 PRESSUPOSTOS TEÓRICOS DA PESQUISA: ALGUNS APONTAMENTOS	48
3.1 TEORIA HISTÓRICO-CULTURAL.....	48
3.2 TEORIA DA ATIVIDADE.....	54
3.2.1 Atividade de ensino e atividade de aprendizagem	60
3.3 ATIVIDADE ORIENTADORA DE ENSINO.....	63
4 FUNÇÃO AFIM: APROXIMAÇÃO AO CONCEITO	67
4.1 MOVIMENTO LÓGICO-HISTÓRICO DO CONCEITO DE FUNÇÃO.....	67
4.1.1 História da Álgebra	69
4.1.2 Ensino da Álgebra e nexos conceituais	72
4.2 FUNÇÃO AFIM E PROPORCIONALIDADE NO CONTEXTO DA EDUCAÇÃO ESCOLAR.....	74
5 METODOLOGIA: CAMINHOS DA PESQUISA	80
5.1 DIMENSÃO ORIENTADORA.....	81
5.2 DIMENSÃO EXECUTORA	83
5.2.1 Contexto da pesquisa: Curso Técnico em Agropecuária Integrado ao Ensino Médio	85
5.2.2 O Experimento Didático: organização do ensino e desenvolvimento	90
5.2.2.1 Situação I – Fotografias.....	92
5.2.2.2 Situação II – Jogo Pega Varetas	93
5.2.2.3 Situação III – Produção leiteira	96
6 APREENSÃO DA REALIDADE: PROCESSO ANALÍTICO DO MATERIAL EMPÍRICO	104
6.1 TUDO SE TRANSFORMA.....	105
6.1.1 Episódio 1: O eu	106
6.1.2 Episódio 2: O mundo	112
6.1.3 Sistematização do Eixo de Análise 1	117
6.2 A RELAÇÃO DE DEPENDÊNCIA ENTRE GRANDEZAS VARIÁVEIS.....	118
6.2.1 Episódio 3: Variável	119
6.2.2 Episódio 4: Campo de variação	126
6.2.3 Episódio 5: Dependência	129
6.2.4 Sistematização do Eixo de Análise 2	133

6.3 A PROPORCIONALIDADE NO ENSINO DA FUNÇÃO AFIM	135
6.3.1 Episódio 6: Identificando grandezas diretamente proporcionais	137
6.3.2 Episódio 7: Definindo a função afim.....	143
6.3.3 Sistematização do Eixo de Análise 3	149
6.4 SÍNTESE	151
7 CONSIDERAÇÕES FINAIS	153
REFERÊNCIAS	157
APÊNDICE A – TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO	162
APÊNDICE B – TERMO DE ASSENTIMENTO.....	164
APÊNDICE C – SITUAÇÃO DE ENSINO: FOTOGRAFIAS.....	166
APÊNDICE D – SITUAÇÃO DE ENSINO: JOGO PEGA VARETAS	167
APÊNDICE E – SITUAÇÃO DE ENSINO: PRODUÇÃO LEITEIRA.....	169
APÊNDICE F – AVALIAÇÃO DO DESEMPENHO DOS ALUNOS.....	174
APÊNDICE G – FORMULÁRIO RESPONDIDO PELOS ALUNOS	175

1 INTRODUÇÃO

A Matemática é uma ciência que teve seus conhecimentos elaborados historicamente, a partir de necessidades sociais, validados e sistematizados, para que pudessem ser apropriados pelas próximas gerações. Sua evolução foi fundamental para o avanço das tecnologias e para o desenvolvimento de diversos setores da sociedade, os quais também contribuem para que continue evoluindo.

Dessa forma, não é uma ciência que surgiu pronta e que está acabada, mas sim, que está em construção. Tais entendimentos são importantes para serem proporcionados aos estudantes, pois ela integra o currículo da Educação Básica, tanto como área do conhecimento, quanto como disciplina. Possui significativa relevância na formação do estudante, no seu desenvolvimento cognitivo e do pensamento crítico, e como uma ferramenta devido ao seu caráter utilitário. Entretanto, apesar de reconhecer sua importância, muitos alunos revelam uma aversão a ela e apresentam dificuldades de aprendizagem.

Isto posto é indispensável que o professor, ao ensinar matemática na escola, leve em consideração as particularidades dos estudantes, o contexto em que estão inseridos, suas necessidades e busque constantemente promover as condições necessárias para que eles se apropriem dos conhecimentos matemáticos. Nesse sentido, o desenvolvimento de pesquisas na área da Educação, voltadas ao ensino e aprendizagem de conceitos matemáticos, são fundamentais para que sejam encontradas maneiras de auxiliar o professor que ensina matemática na organização do ensino e na compreensão do processo de aprendizagem dos estudantes. Portanto, a presente pesquisa visa produzir contribuições para o ensino do conceito de função afim.

Por entender que o caminho percorrido pela pesquisadora tem grande relevância para compreender a escolha da temática de pesquisa, antecedendo a apresentação da pesquisa, na sequência será apresentada a sua trajetória, incluindo fatos da vida pessoal, acadêmica e profissional, os quais foram determinantes para que a presente pesquisa fosse desenvolvida.

1.1 TRAJETÓRIA DA PESQUISADORA

Desde o nascimento até meus¹ 13 anos de idade, residi na zona rural do município de Estrela Velha, no interior do estado do Rio Grande do Sul. Iniciei minha trajetória escolar na pré-escola², aos 6 anos de idade, em uma escola localizada em um distrito municipal. Da primeira até a quinta série³ do Ensino Fundamental, estudei em uma pequena escola, a poucos metros de casa, com turmas multisseriadas⁴, devido ao número reduzido de estudantes. Como não tinha acesso a recursos tecnológicos, a biblioteca da escola era minha maior fonte de descoberta, em que retirava livros para ler semanalmente.

Durante a infância, minha brincadeira preferida era brincar de “escolinha”, em que eu era sempre a professora e meu irmão mais novo assistia às minhas aulas de matemática, das quais ainda existem registros nas paredes dos velhos galpões de madeira. E foi assim que surgiu o interesse em ser professora de matemática.

Voltei a cursar a sexta e a sétima séries em uma escola no distrito municipal, pois, na anterior, só eram ofertadas turmas até a quinta série. Enquanto a oitava série e o Ensino Médio, realizei em escolas da área urbana, tendo em vista que minha família passou a residir lá. Por todos estes anos, minha escolha em ser professora de matemática permanecia, mesmo tendo surgido interesses momentâneos por outras profissões. E a matemática continuava sendo minha disciplina favorita, para a qual destinava um maior tempo de estudo e alcançava as melhores notas.

Com o passar do tempo, minha dedicação aos estudos só aumentava, pois com as dificuldades enfrentadas na infância, acreditava que poderia transformar minha vida através da educação. Isto sustentava a escolha profissional, uma vez que minha maior motivação era mostrar que a educação pode transformar o mundo, e meu desejo era mudar a vida de outras pessoas também.

Em 2016, aos 17 anos de idade, concluí o Ensino Médio e ingressei em um curso de Licenciatura em Matemática, presencial, na Universidade Regional do Noroeste do estado do Rio Grande do Sul (UNIJUÍ), em Ijuí-RS. Para isso, precisei mudar de cidade e, como não tinha

¹ Por se tratar da trajetória pessoal da pesquisadora, este subitem será escrito na primeira pessoa do singular. O restante do texto, entendido como produto do coletivo formado com orientadora e coorientador, bem como a colaboração de diferentes interações, será escrito na primeira pessoa do plural.

² Nível da Educação Infantil.

³ Naquela época, o Ensino Fundamental era composto por oito séries, o que foi alterado pela Lei n.º 11 274, de 6 de fevereiro de 2006.

⁴ Turmas compostas por alunos de diferentes séries e idades, que dividiam a mesma sala e eram atendidos pelo mesmo professor.

condições financeiras para pagar o curso, iniciei como bolsista de um projeto de extensão na Universidade.

Já no primeiro semestre, consegui uma bolsa de estudo integral PROUNI⁵, através da qual cursei toda a graduação de forma gratuita, em quatro anos. Ainda assim, devido ao interesse em ter uma dedicação exclusiva à graduação e aproveitar ao máximo as oportunidades de aprendizagem dentro da Universidade, continuei como bolsista de projetos durante os quatro anos de curso.

Inicialmente, fui bolsista do projeto Desenvolvimento e Implementação de Software Educacional para a Área de Matemática Voltado para Escolas da Rede Pública (DISEAM)⁶, no qual participei da elaboração de *softwares* educacionais destinados ao ensino de estatística e tive minha primeira inserção em escolas para o desenvolvimento com os estudantes. Posteriormente, atuei como bolsista do Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência (Pibid)⁷, da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), em uma escola estadual, por um curto período.

Do segundo ao quarto ano de curso, fui bolsista do projeto de extensão Feiras de Matemática no estado do Rio Grande do Sul (FEMAT/RS)⁸, em que tive a oportunidade de contribuir para a organização, consolidação e realização das Feiras de Matemática no estado do Rio Grande do Sul. A partir deste projeto, tive contato com práticas desenvolvidas por professores em sala de aula, envolvendo a matemática, e socializadas na Feira pelos alunos.

A inserção efetiva no ambiente escolar aconteceu, entretanto, por meio das quatro disciplinas de estágio curricular supervisionado, cursadas nos dois últimos anos da graduação. Antes de iniciar os estágios, eu acreditava numa sala de aula ideal, na qual todos os alunos queriam aprender matemática, e as aulas seriam divertidas, interativas e tudo aconteceria conforme planejado.

Todavia, defrontei-me com outra realidade. Inicialmente, em uma turma do oitavo ano do Ensino Fundamental, na qual não tive muitas dificuldades, realizei uma Feira de Matemática escolar para socializar os estudos pelos alunos. No entanto, ao realizar o segundo estágio em uma turma do primeiro ano do Ensino Médio, em outra escola, encontrei alunos desmotivados, especialmente em relação à aprendizagem de conceitos matemáticos. Eles relatavam não

⁵ Programa Universidade para Todos (PROUNI) é um programa do Governo Federal do Brasil que concede bolsas de estudo integrais ou parciais para cursos de graduação, em instituições privadas de ensino superior.

⁶ No ano em que participei do projeto, em 2017, ele era coordenado pela professora Claudia Piva.

⁷ A coordenadora institucional do PIBID era a professora Taíse Neves Possani e fui orientada pela professora Isabel Koltermann Battisti.

⁸ Projeto coordenado pelo professor Peterson Cleyton Avi.

possuir expectativas quanto ao ingresso em curso superior e não reconheciam suas próprias potencialidades.

Quanto ao terceiro estágio, as aulas foram desenvolvidas com alunos do nono ano do Ensino Fundamental, de forma *online* durante o período de isolamento social, iniciado no ano de 2020, em decorrência da pandemia de Covid-19. No último semestre da graduação, realizei o quarto estágio com uma turma do primeiro ano do Ensino Médio, também de forma *online*, para o qual foram determinados, pela professora de matemática regente da turma, os conteúdos de função afim, função quadrática e função exponencial.

Neste último estágio, na elaboração do planejamento das situações de ensino, busquei estabelecer relações entre a função afim e a progressão aritmética, conforme era apresentado em alguns livros didáticos. Entretanto, após o período de estágio, deparei-me com a relação entre a função afim e a proporcionalidade em uma conversa com a professora orientadora. Naquele momento, percebi que passei toda a Educação Básica e estava quase concluindo a graduação sem ter conhecimento de tal relação, o que me fez notar esta fragilidade e a necessidade de superá-la. Assim, foram escolhidos os conceitos matemáticos a serem abordados nesta pesquisa, a relação entre a função afim e a proporcionalidade.

O contato com a realidade escolar, por meio dos estágios, causou um grande impacto na minha vida pessoal e acadêmica, então passei a procurar maneiras de diminuir a aversão dos alunos pela matemática e contribuir para que eles quisessem aprender. Tinha a preocupação de despertar neles a criação de motivos, mas, na época, não tinha um embasamento teórico que me auxiliasse.

No entanto, concomitantemente ao quarto estágio, iniciei os estudos para a elaborar o trabalho de conclusão de curso, e minha orientadora⁹ me apresentou a Teoria da Atividade (TA), de Leontiev. Esse foi o embasamento teórico da minha pesquisa, com foco na identificação e na análise de motivos apresentados por um grupo de alunos, ao desenvolver um projeto de pesquisa que envolvia o estudo de equação polinomial do segundo grau.

Essa pesquisa desencadeou o interesse e a necessidade em aprofundar as compreensões acerca da TA pois vi ali um caminho para me ajudar a entender como os alunos aprendem e como criar motivos para eles quererem aprender. Isto me levou a ingressar no curso de mestrado do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Ensino de Física (PPGEMEF) da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM), no ano de 2021. E neste mesmo ano, iniciei minha trajetória como professora de matemática, atuando no município de Ijuí-RS na Escola

⁹ Minha orientadora foi a professora Isabel Koltermann Battisti.

Estadual de Ensino Fundamental Rui Barbosa, com turmas de sétimo ano, e em uma escola da rede privada, com aulas de reforço para estudantes dos Anos Finais do Ensino Fundamental e Ensino Médio.

Após relatar brevemente minha trajetória acadêmica e minha caminhada no processo inicial de constituição como professora de matemática, e sua importância na escolha da temática abordada, dos conceitos matemáticos e do embasamento teórico, na sequência, será realizada uma apresentação inicial da pesquisa, para contextualizar a delimitação do problema de pesquisa.

1.2 APRESENTAÇÃO INICIAL DA PESQUISA

Os processos de ensino e aprendizagem de conceitos algébricos podem representar desafios para professores e alunos na Educação Básica, os quais podem ser agravados, quando o ensino se pauta somente na formalidade dos conceitos ou apresenta-os sem conexão com elementos que possam levar os estudantes a atribuírem-lhes sentidos. Desse modo, a álgebra pode ser reduzida a somente inserção de letras em cálculos, dificultando a aprendizagem e favorecendo a reprodução de uma técnica resolutiva mecanizada e repetitiva. Entretanto, a repetição de expressões formais não representa uma aprendizagem efetiva, pois neste processo o aluno não atribui sentido.

Em vista disto, defendemos que na organização do ensino de conceitos algébricos seja levado em consideração o movimento lógico-histórico do conceito, a partir da necessidade que levou ao seu surgimento. Nesse sentido, os nexos conceituais da álgebra podem auxiliar na aprendizagem de conceitos algébricos, em sua essência. No caso da função afim, são eles: fluência, variável, campo de variação e dependência. Em relação especificamente à função linear, pode-se considerar também o nexo conceitual da proporcionalidade.

Nesta perspectiva, foram elaboradas e desenvolvidas situações de ensino, com uma turma do primeiro ano do Curso Técnico em Agropecuária Integrado ao Ensino Médio, no município de Ijuí. O curso técnico foi escolhido, devido a uma aproximação com a professora de matemática regente e tendo em conta que seria uma possibilidade de trabalhar em um curso com uma organização diferenciada.

Para a elaborar as referidas situações, consideramos os pressupostos da Atividade Orientadora de Ensino (AOE), entendida como um modo de organizar o ensino que prevê o professor e o aluno em atividade, tendo o professor a necessidade de ensinar e o aluno de

aprender. Pautada na Teoria da Atividade, a AOE é proposta inicialmente por Moura (1996), considerando a estrutura de atividade sugerida por Leontiev.

A atividade é entendida como “aqueles processos que, realizando as relações do homem com o mundo, satisfazem uma necessidade especial correspondente a ele” (LEONTIEV, 2010, p. 68). Conforme Leontiev (2010), a necessidade é desencadeadora da atividade, mas é o motivo, coincidindo com o objetivo, que impulsiona o sujeito para a realizar as ações, as quais têm como alvo o objeto e são realizadas por operações ou novas ações. Destacamos que o termo motivo utilizado nesta pesquisa não se refere simplesmente à compreensão normalmente associada a ele, de motivação. Ele será utilizado a partir do entendimento proposto por Leontiev (2010), como um dos conceitos que estruturam a atividade, juntamente com a necessidade e o objeto.

No caso dos alunos, há uma atividade específica, a atividade de aprendizagem que tem como principal característica a intencionalidade da aprendizagem (CEDRO, 2008). Assim, considera-se a relevância da identificação dos elementos constitutivos da atividade ou de indicativos deles, especialmente dos motivos criados para que os estudantes queiram aprender, em aulas de matemática que consideram a noção fundamental de proporcionalidade no estudo da função afim, com estudantes do Ensino Médio. Este pode ser um caminho para que estes sujeitos se coloquem em atividade de aprendizagem.

O ensino organizado a partir dos pressupostos da AOE visa gerar nos estudantes essa necessidade de apropriação dos conceitos, o que segundo Moura *et al.* (2010) se efetiva na Situação Desencadeadora da Aprendizagem (SDA). Esta, por sua vez, possibilita que os estudantes se envolvam ativamente e coletivamente na busca por soluções de problemas, os quais devem considerar a essência dos conceitos e o seu surgimento. Para Vigotski (1998), a interação social é fundamental, pois a apropriação dos conhecimentos ocorre primeiramente no plano intersíquico e, a partir de um processo de internalização, passa para o plano intrapsíquico. Assim sendo, nossa expectativa, ao elaborar situações de ensino, é de que estas pudessem se converter em SDA.

Em relação ao desenvolvimento da criança, Vigotski (1998) destaca a importância de sua interação com os adultos, para que as ações, inicialmente realizadas com o auxílio deles, sejam interiorizadas e passem a ser executadas individualmente. Dessa forma, a criança se apropria dos conhecimentos historicamente produzidos pela humanidade, que são essenciais para a formação humana, tendo em vista que o homem é um ser social e histórico.

Portanto, a escola tem um papel fundamental, ao possibilitar o acesso aos conhecimentos produzidos, validados e sistematizados ao longo da história, com a intenção de

que os estudantes possam se apropriar destes. Nesta pesquisa, temos como foco o ensino do conceito de função, que, segundo Caraça (1951), pode ser entendida como instrumento criado para interpretar a realidade, e seu ensino não deve ser pautado somente em seu formalismo ou em suas aplicações na realidade objetiva. É preciso “reproduzir mentalmente seu conteúdo, bem como compreender sua essência” (SOUSA; PANOSSIAN; CEDRO, 2014, p. 95).

Diante dessa breve exposição dos princípios que orientam a pesquisa, apresentamos o seguinte problema: “no que se refere à organização do ensino de função afim no Ensino Médio alguns elementos podem ser essenciais para a aprendizagem dos estudantes?” E para respondê-lo, delimitamos como objetivo geral investigar elementos que se mostram como essenciais para o processo de aprendizagem do conceito de função afim de estudantes de uma turma do Ensino Médio.

Destarte, as seguintes ações investigativas foram determinadas com o intuito de responder ao problema de pesquisa e alcançar o objetivo geral:

- estudar o movimento lógico-histórico do conceito de função e sua presença nas orientações curriculares;
- identificar elementos que contribuem para a apropriação dos nexos conceituais da função afim;
- analisar situações de ensino que podem desencadear a aprendizagem do conceito de função.

Com base nas ações investigativas apresentadas, a dissertação está organizada em sete capítulos, os quais serão brevemente expostos na sequência. O primeiro capítulo apresenta uma introdução da pesquisa, abordando a justificativa para a escolha da temática a partir da trajetória pessoal e acadêmica da autora.

No segundo capítulo, com o intuito de tomar conhecimento de como a relação entre os conceitos função afim e proporcionalidade vem sendo abordada nas pesquisas desenvolvidas, são apresentadas oito pesquisas, a partir da sua leitura na íntegra, buscando contribuições, aproximações e distanciamentos em relação ao presente trabalho.

O terceiro capítulo aborda os pressupostos teóricos que embasam a pesquisa, sendo eles, a Teoria Histórico-Cultural (THC) de Vigotski¹⁰ (1896-1934), a Teoria da Atividade (TA) de Leontiev (1903-1979) e a Atividade Orientadora de Ensino (AOE) de Moura. São apresentados e discutidos alguns conceitos importantes dessas abordagens teóricas, que contribuem para uma melhor compreensão do objeto de estudo.

¹⁰ Devido às diferentes traduções, a escrita de seu nome se encontra de formas distintas. Nesta pesquisa será adotado o nome Vigotski, mas, na menção específica de uma referência, será usado o modo como seu nome aparece.

No quarto capítulo, primeiramente falamos sobre o movimento lógico-histórico do conceito de função, com base na compreensão das necessidades que levaram ao surgimento da álgebra e seu desenvolvimento, bem como, seus nexos conceituais. Posteriormente, expomos como os conceitos de função afim e proporcionalidade, e sua relação, são considerados nas orientações curriculares.

O quinto capítulo trata dos caminhos metodológicos da pesquisa, desvelando a sua dimensão orientadora e a dimensão executora, destacando a organização das situações de ensino elaboradas com o intuito de alcançar o objetivo geral. Neste capítulo, explicitamos o contexto da pesquisa, um Curso Técnico em Agropecuária Integrado ao Ensino Médio, e a organização das ações na perspectiva de um experimento didático, contemplando os instrumentos utilizados na apreensão do material empírico.

No sexto capítulo, apresentamos o material empírico produzido e as análises realizadas a partir do embasamento teórico, as quais estão organizadas em três eixos de análise. O Eixo 1 considera uma situação relacionada ao nexo conceitual fluência e visa proporcionar aos estudantes a compreensão de que tudo se transforma a todo momento e nada é estável. Já a situação do Eixo 2 foi composta pelo jogo Pega Varetas com o intuito de promover a compreensão de variável, dos possíveis valores que cada variável pode assumir e da relação de dependência entre grandezas, introduzindo a noção intuitiva de Função. Quanto ao Eixo 3, a situação surge por meio de uma demanda real, relacionada à produção leiteira, e destaca a relação entre a Função Afim e a Proporcionalidade, introduzida por uma carta com um pedido de ajuda de um pequeno agricultor.

No sétimo capítulo, algumas considerações finais da pesquisa destacam elementos essenciais para a apropriação do conceito de função afim, a partir dos nexos conceituais algébricos e a proporcionalidade, identificados com base nas análises dos materiais empíricos, produzidos no desenvolvimento das situações com a turma de estudantes.

Conforme mencionamos anteriormente, no próximo capítulo apresentamos as oito pesquisas encontradas, por meio de resumos elaborados após a leitura dos textos na íntegra, bem como as aproximações e os distanciamentos em relação a presente pesquisa.

2 MAPEAMENTO DE PESQUISAS: SIGNIFICADO SOCIAL DA TEMÁTICA

Nossa pesquisa tem como temática a aprendizagem de estudantes da Educação Básica, especificamente do primeiro ano do Ensino Médio, sobre função afim, a partir da proporcionalidade. Para a sua realização, inicialmente procuramos tomar conhecimento de como essa relação entre estes conceitos vem sendo abordada nas pesquisas desenvolvidas.

Primeiro, definimos como fonte da coleta de dados,¹¹ o Catálogo de Teses e Dissertações da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES)¹², onde realizamos uma busca por teses e dissertações sem uma delimitação de ano das defesas, devido à pequena quantidade de pesquisas encontradas.

Para isso, definimos os seguintes descritores: Função Afim; Função do 1.º grau; Função do primeiro grau; Função Polinomial do 1.º grau; Função polinomial do primeiro grau¹³ e Proporcionalidade. Os descritores foram organizados em pares, conforme mostra a Tabela 1.

Tabela 1 – Pares de descritores

Descritores	Pesquisas encontradas
Função Afim e Proporcionalidade	8
Função do 1.º grau e Proporcionalidade	0
Função do primeiro grau e Proporcionalidade	0
Função Polinomial do 1.º grau e Proporcionalidade	0
Função polinomial do primeiro grau e Proporcionalidade	0

Fonte: Sistematização da pesquisadora

Este levantamento foi realizado em janeiro de 2022 e, por meio do resultado, é possível destacar o pequeno número de pesquisas encontradas. Elas foram identificadas com a expressão função afim, mostrando que as demais denominações não são muito utilizadas. Cabe destacar que todas são dissertações de Mestrado Profissional e estão dispostas no Quadro 1, a partir do ano de defesa em ordem crescente.

¹¹ Foi realizada também a busca na Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações (BDTD), considerando os mesmos descritores, entretanto, não foi definida como fonte da coleta de dados, pois apresentou apenas pesquisas já identificadas no Catálogo de Teses e Dissertações da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES).

¹² Link de acesso: <https://catalogodeteses.capes.gov.br/catalogo-teses/#/>

¹³ Optamos por considerar diferentes denominações do conceito de Função Afim, para ampliar as possibilidades de encontrar as pesquisas realizadas.

Quadro 1 - Dados das pesquisas encontradas

Título	Autor (a)	Instituição	Orientador	Ano
Função Afim: Teoria e Aplicações	Walfredo José De Souza	Universidade Federal do Rio Grande do Norte	Fabiana Tristão de Santana	2013
O ensino de Funções Lineares: uma abordagem Construtivista/Construcionista por meio do Kit LEGO® <i>Mindstorms</i> .	Abrahão de Almeida Silva	Universidade Federal de Goiás	Fernando Kennedy da Silva e Marcelo Henrique Stoppa	2014
Folhas de atividades para o ensino de Função Afim e Quadrática: conceito e aplicações	Roberta Angela da Silva	Universidade Federal de São Carlos	Roberto Ribeiro Paterlini	2014
Caracterização da Função Afim, Aplicação e Ensino	Edinaldo Fonseca Corrêa	Universidade Federal do Maranhão	Kênio Alexsom de Almeida Silva	2015
A caracterização da Função Afim como ferramenta na modelagem de problemas matemáticos	Francisco Eudes da Silva	Universidade Federal Do Ceará	Francisco Valdemiro Braga	2015
Uma proposta de atividades para o ensino de Função Afim no Ensino Médio	Analice Torezani	Universidade Federal do Espírito Santo	Moacir Rosado Filho.	2016
Aplicações do conceito de proporcionalidade a partir da engenharia didática	Rosely Rodrigues Rego Bitencourt	Universidade Federal do Amapá	Guzman Eulalio Isla Chamilco	2017
Funções Afins e a Relação entre Função Linear, Proporcionalidade e Regra de Três	José Ricardo Correia de Figueiredo	Universidade Federal de Campina Grande	Daniel Cordeiro de Morais Filho	2017

Fonte: Sistematização da pesquisadora

Com o intuito de conhecer o que foi produzido nas pesquisas, buscando contribuições, aproximações e distanciamentos em relação ao presente trabalho, realizamos a leitura na íntegra de todas as oito dissertações. A partir disso, elaboramos um resumo de cada uma delas, levando em conta sua organização em capítulos e os principais elementos, como objetivo, metodologia, referencial teórico e algumas conclusões. Entretanto, em algumas pesquisas não foi possível obter todas as informações, pois faltavam dados como por exemplo objetivo e referencial teórico, não fornecidos pelos autores de forma direta no texto.

Na dissertação de Souza (2013), o autor considera propriedades, casos particulares e aplicações do conceito de função afim com o objetivo de ressaltar a importância das demonstrações e mostrar aos alunos a relevância deste conceito na solução de problemas do cotidiano com vistas a despertar o interesse deles. Esta pesquisa é composta por cinco capítulos. No primeiro, o autor apresenta uma breve caracterização da escola pública, destacando suas dificuldades, especialmente, quanto aos problemas de infraestrutura, falta de materiais didáticos

e de professores especializados em disciplinas como Matemática, Física e Química. Ademais, aborda sobre a formação de professores que ensinam matemática nas diferentes etapas da Educação Básica, a desvalorização destes profissionais e algumas dificuldades encontradas por professores e alunos no processo de ensino e aprendizagem de matemática.

No segundo capítulo, o autor mostra quatro situações-problema, com contextos relacionados ao cotidiano, como uma corrida de táxi, salário com comissão e saldo bancário. Cada uma delas é ampliada, a partir de questionamentos e, ao final, é solicitada a obtenção de uma fórmula matemática que defina a situação. Em seguida, revela a definição da função afim e expõe a resolução de cada situação-problema, obtendo sua fórmula matemática. Também apresenta os casos particulares e as propriedades da função afim, destacando a representação gráfica como uma reta.

Neste capítulo, Souza (2013) intenciona proporcionar a observação de regularidades que levam à caracterização da função afim, rompendo com o uso tradicional da introdução do conceito a partir da sua definição. Além disso, pretende despertar o interesse dos alunos, bem como o senso crítico na observação das relações entre a matemática e seu cotidiano.

No terceiro capítulo, Souza (2013) revela a definição de função linear e sua relação com a proporcionalidade. Na sequência, dá alguns exemplos e casos particulares de aplicações da proporcionalidade. Enquanto no capítulo 4, são abordadas algumas aplicações da função afim em temas como as escalas termométricas, na física, nas escalas e na relação entre custo, receita e lucro. Por fim, no quinto capítulo, o autor discorre brevemente acerca de suas conclusões, destacando que

[...] aplicações e os questionamentos decorrentes das situações problemas levam os alunos a perceberem por si mesmos que a Matemática não se constitui apenas de um aglomerado de fórmulas e teorias sem propósito prático, mas que está presente em vários setores organizados da sociedade (SOUZA, 2013, p. 38).

Na busca de propor um trabalho diferenciado para o ensino da função afim, especificamente, a função linear, Silva, A. (2014) considera uma abordagem dentro da concepção pedagógica do Construtivismo/Construcionismo e da Robótica Educacional. A pesquisa está estruturada em seis capítulos. No primeiro, o autor relata que seu objetivo é “buscar uma nova abordagem pedagógica para o processo de ensino-aprendizagem da matemática, vinculado à robótica educacional” (SILVA, A., 2014, p. 10) e disserta acerca do Construtivismo e Construcionismo, os quais dão subsídios ao recurso didático utilizado.

No segundo capítulo, Silva, A. (2014) aborda o uso das novas tecnologias na educação, destacando a resistência e as dificuldades de alguns professores, bem como, a importância de

incluir as tecnologias da informação e comunicação nas práticas pedagógicas, de modo que sejam fundamentadas no Construtivismo. Assim, o autor define o Construtivismo de Piaget, o qual é fundamentado na Epistemologia Genética e discorre sobre entendimentos defendidos pelos teóricos Piaget e Vygotsky, especialmente, quando ao desenvolvimento e à aprendizagem. Em seguida, define a abordagem construcionista.

Já no terceiro capítulo, trata da introdução da robótica na aprendizagem da matemática, pois entende que, dessa forma, o “estudante não apenas entra em contato com novas tecnologias, mas experimenta aplicações práticas de conceitos, outrora apenas teóricos, percebendo-os como algo presente em seu cotidiano” (SILVA, A., 2014, p. 17). O autor define a robótica como um ramo da ciência que tem como foco o estudo e desenvolvimento de robôs destinados à execução de tarefas. Também realça alguns inventores que ficaram famosos nesta área com suas criações e apresenta uma classificação dos tipos de robôs. Na sequência, Silva, A. (2014) direciona o foco na robótica educacional como uma forma de introduzir as tecnologias no processo de ensino e aprendizagem, mas que se depara com uma significativa resistência.

Ainda no referido capítulo, Silva, A. (2014) apresenta o Kit Mindstorms NXT LEGO®, que possibilita a construção de robôs simples, que podem ser programados e possuem como finalidade “explorar a capacidade cognitiva dos alunos bem como promover o desenvolvimento de diversas habilidades e competências ligadas a interação com as tecnologias” (SILVA, A., 2014, p. 22). Por fim, indica quais são os componentes do *kit* para robôs e revela brevemente algumas ideias da Plataforma LEGO *Mindstorms Education NXT*, na qual é realizada a programação.

O quarto capítulo é destinado aos conceitos matemáticos. Neste, Silva, A. (2014) define conceitos como função, monotonicidade, proporcionalidade, função diretamente e inversamente proporcional, teorema fundamental da proporcionalidade, função afim, funções compostas e função inversa. Caracteriza a função linear como modelo matemático para problemas de proporcionalidade. E, discorre acerca de engrenagens e conjuntos destas, pois visa “compreender como compor as engrenagens do Kit NXT, de modo a aumentar ou diminuir e quantificar as quantidades de giros dados pelas engrenagens” (SILVA, A., 2014, p. 35).

No quinto capítulo, o autor esclarece que produziu o estudo, pois “O que nos intrigava era que não queríamos dar exemplos práticos de aplicação, mas se possível, materializar a função, compreendendo o que é e como ‘funciona’ o $f(x)$ ” (SILVA, A., 2014, p. 45, grifo do autor). Optou pelo uso de um relógio analógico, produzido com LEGO, para analisar a proporcionalidade entre as engrenagens. Portanto, abordou o conceito de função afim,

especificamente a função linear, na qual determinou “como variável independente o giro dado por cada tipo de engrenagem e como variável dependente o número de voltas sofridas pela engrenagem do tipo A ao ser combinada com as demais engrenagens” (*Ibid*, p. 46).

Para finalizar o capítulo, Silva, A. (2014) propõe uma Sequência Didática para uma aula de matemática, por meio da qual visa ensinar funções lineares com uso do *Kit* de Robótica da *Mindstorms* NXT LEGO®. O autor ainda destaca o estudo das interações para obter os segundos, os minutos e as horas do relógio e esclarece alguns pontos da programação do relógio analógico *Classic-Clock*. Ao final de sua dissertação, no sexto capítulo, Silva, A. (2014) anuncia suas considerações finais e após, destacar a importância e benefícios do estudo realizado, compreende que seu objetivo foi alcançado ou chegou muito próximo disso, pois conclui que

Conseguimos modelar as funções que descrevem os giros dados pelas engrenagens do relógio *Classic-Clock*, repercutindo no sincronismo existente no ponteiro dos segundos, minutos e horas. Melhor que isso, na busca em como fazer essa descrição, descobrimos um meio de ensinar função linear utilizando as peças do Kit NXT e pudemos apresentar uma proposta metodológica para abordar a temática em sala de aula, tendo como auxílio o Kit de robótica educacional da NXT (SILVA, A., 2014, p. 67).

Com o intuito de contribuir para um ensino de matemática mais significativo, Silva, R. (2014) produziu sua dissertação a partir do seguinte problema: “Como abordar os temas função afim e função quadrática no primeiro ano do Ensino Médio de modo a proporcionar um aprendizado significativo e que não se reduza à apresentação de algumas fórmulas e procedimentos” (SILVA, R., 2014, p. 15). A autora organizou sua pesquisa em cinco capítulos, conforme as quatro fases da metodologia de Engenharia Didática: “análises prévias, construção e análise a priori, aplicação de uma sequência didática e análise a *posteriori* e validação” (ARTIGUE, 1998 *apud* SILVA, R., 2014, p. 31).

No primeiro capítulo de sua dissertação, Silva, R. (2014) aborda o ensino das funções, iniciado no nono ano de Ensino Fundamental e aprofundado no primeiro ano do Ensino Médio. A autora destaca que alguns materiais didáticos não dão ênfase ao estudo da função afim e da função quadrática, delimitando pouco tempo para que este seja realizado, apesar de sua importância para outros contextos como a física. Em seguida, com uma linguagem formal, define a função afim e seus casos particulares, realiza a demonstração do teorema fundamental da proporcionalidade e define a função quadrática, destacando que esta geralmente é reduzida “ao estudo da sua relação com o seu gráfico, e da percepção das suas propriedades através da observação do gráfico” (SILVA, R., 2014, p. 21).

Dando continuidade ao capítulo, Silva, R. (2014) trata da importância das funções no Ensino Básico e realiza uma breve análise de três livros didáticos quanto à proposição dos conceitos função afim e quadrática. Nesta análise, a autora observa a forma como os conceitos são introduzidos, sendo a partir de sua definição ou de situação contextualizadas, se a abordagem do assunto é apenas teórica ou existe uma preocupação em aproximar o conceito de situações reais do cotidiano, como são apresentados os exemplos, exercícios, aplicações e importância dos conceitos. Silva, R. (2014) ressalta a relevância das situações contextualizadas para a aprendizagem. Finalizando o capítulo, ela discorre acerca de trabalhos acadêmicos, produzidos por outros autores selecionados e enfatiza que

[...] a dificuldade maior persiste: a identificação da expressão da função afim e quadrática e a ligação entre as situações propostas contextualizadas com a teoria, com o conceito de função afim e quadrática. Para tentar auxiliar na resolução deste problema, as folhas de atividades foram confeccionadas com situações que pudessem explorar o que já era de conhecimento dos estudantes e que fossem de fácil interpretação para ajudar na conversão para a linguagem matemática (SILVA, R., 2014, p. 29).

A descrição da proposta didática é realizada no segundo capítulo, sendo ela composta por Folhas de Atividades,¹⁴ que contém “textos explicativos e problemas contextualizados ou não” (SILVA, R., 2014, p. 31). Para a autora, as Folhas de Atividades contribuem para o desenvolvimento da autonomia dos alunos e do trabalho colaborativo. De acordo com Silva, R. (2014), foram produzidas duas Folhas de Atividades sobre função afim e duas sobre função quadrática, as quais foram aplicadas em três turmas do primeiro ano do Ensino Médio, localizadas em três cidades do interior de São Paulo: Jaboticabal, Monte Alto e Pontal.

Na sequência do segundo capítulo, a autora descreve cada uma das Folhas de Atividades. Conforme Silva, R. (2014), a Folha de Atividades 1 é composta por nove questões com os seguintes objetivos: introduzir o conceito função afim por meio de uma situação contextualizada que relaciona duas grandezas, observar regularidades para encontrar as características da função afim e aplicar o conhecimento adquirido em um exemplo com contexto na cinemática da física.

A Folha de Atividades 2 traz dois problemas contextualizados, “O primeiro consta de uma função que relaciona o preço a ser pago em um restaurante e a quantidade de comida colocada no prato. O segundo trata de uma função que relaciona a taxa a ser paga e o número de cheques emitidos por duas instituições bancárias distintas” (SILVA, R., 2014, p. 42). Ainda

¹⁴ O tempo “Atividade” é aqui utilizado de acordo com os autores citados.

segundo a autora, o primeiro problema trata de um caso particular da função afim, com parâmetro $b = 0$, e o segundo refere-se as características do parâmetro a da função.

Silva, R. (2014) relata ter sido aplicada a Folha de Atividades 3, após uma aula sobre função quadrática, realizada de forma explicativa. Esta terceira parte visa possibilitar que os alunos reconheçam situações que podem ser descritas por uma função quadrática, observando padrões, e transitar entre a representação gráfica, em tabela e algébrica. A situação escolhida “envolve o número de jogos de um campeonato de futebol e o número de times participantes” (SILVA, R., 2014, p. 50).

Por fim, a Folha de Atividades 4 foi “destinada ao estudo do vértice da parábola e foi dividida em quatro atividades (epidemia de gripe, lançamento de uma bolinha, construção de uma pasta e construção de uma pipa)” (SILVA, R., 2014, p. 57). Mas, cabe destacar que, anteriormente ao seu desenvolvimento, foi realizada uma aula teórica com os alunos, para o estudo do máximo e mínimo das funções quadráticas.

No terceiro capítulo, Silva, R. (2014) fala sobre aplicação das Folhas de Atividades, para a validação de sua proposta. Discorre acerca da escolha das três classes em que a pesquisa foi desenvolvida, a partir da proximidade com as atividades profissionais da autora em três escolas da franquia Colégio Objetivo, e totalizando 104 alunos. Quanto à metodologia, Silva, R. (2014) conta que cada Folha de Atividades foi desenvolvida em 50 minutos, e os alunos deveriam formar grupos de apenas dois integrantes que se mantiveram até o final da pesquisa. Os alunos, em seus grupos, deveriam debater acerca da resolução das atividades, pois, praticamente, não haveria intervenção do professor.

A seguir, Silva, R. (2014) realiza uma análise qualitativa da aplicação de cada uma das Folhas de Atividades. Ela destaca que a primeira foi entregue sem que o conteúdo tivesse sido abordado, causando desconforto aos alunos. Entretanto, eles resolveram as atividades sem maiores dificuldades. Na Folha de Atividades 2, os alunos desenvolveram as primeiras atividades com certa facilidade, em algumas precisaram de um tempo maior, devido a quantidade de cálculos e, no último item, que era necessária a resolução algébrica, nem a metade dos alunos resolveram.

A função quadrática foi abordada na Folha de Atividades 3 e, segundo Silva, R. (2014), a maioria dos alunos teve facilidade para preencher tabelas e precisou de um tempo maior para as atividades. Mas, a última atividade causou insegurança em grande parte dos alunos para justificar a obtenção da segunda raiz da função com o eixo de simetria, fazendo com que muitos não concluíssem a atividade. Na quarta Folha de Atividades, alguns alunos responderam a primeira atividade sem ler atentamente o enunciado, na segunda eles tiveram maior facilidade

quanto a um lançamento vertical e nas últimas atividades tiveram mais dificuldades em relação à modelagem da função.

Em geral os estudantes responderam muito bem as Folhas de Atividades. Eles manifestaram uma certa resistência a essa metodologia por ser nova para eles, mas, a partir da aplicação da segunda Folha de Atividades, a insegurança foi passando e começaram a se familiarizar com o nosso produto didático. Um dos pontos mais positivos observado durante a aplicação das Folhas de Atividades foi o trabalho em grupo. Os estudantes debateram os problemas, discutiram e se ajudaram, o que não é possível durante as aulas expositivas. Esta é uma das principais razões pelas quais acreditamos ter sido satisfatório também para os estudantes (SILVA, R., 2014, p. 70).

No quarto capítulo, Silva, R. (2014) elabora uma análise quantitativa e mais detalhada da aplicação da pesquisa, considerando todos os problemas propostos em cada Folha de Atividades. A autora apresenta as análises, utilizando as atividades desenvolvidas pelos alunos, com exemplo de resoluções corretas e incorretas. Conforme esse autor, ao final de cada Folha de Atividade os alunos poderiam responder quanto ao nível de dificuldade e se gostaram das atividades. Em relação à primeira, todos os alunos assinalaram que gostaram e a maioria classificou como dificuldade média, na segunda, terceira e quarta Folha de Atividades mantiveram-se os resultados, porém, na última aumentou o número de alunos que classificou a atividade como difícil, mas teve maior envolvimento com os problemas em relação à terceira folha com atividades abstratas. Ao continuar (*Ibid*, p. 99), conclui que “Em geral os estudantes responderam muito bem as Folhas de Atividades. Quantitativamente o resultado foi bastante satisfatório. O índice de acertos foi alto comparado ao número de erros cometidos”.

Para finalizar sua dissertação, o quinto capítulo aborda as conclusões da autora e a validação de sua experiência. Para isso, Silva, R. (2014) retoma sua proposta, objetivos, a aplicação do seu produto didático e inclui algumas alterações realizadas nas Folhas de Atividades após a aplicação com os alunos. Também acrescenta sugestões para pesquisas futuras. Para a autora, os alunos “compreenderam que a Matemática é muito mais que definições, formalismos e conceitos. Viram que é possível realizarem atividades sem ter havido antes uma aula sobre o assunto, sem a teoria e ainda assim conseguirem construir sozinhos o conceito de função afim” (SILVA, R., 2014, p. 104). Por fim, reflete acerca de contribuições pessoais do mestrado profissional.

O foco da dissertação de Corrêa (2015) é apresentar ao leitor exemplos de situações do cotidiano em que estão aplicados os conhecimentos da função afim e possibilitar que ele seja capaz de representar esta situação algébrica e graficamente. A pesquisa está organizada em cinco capítulos. No primeiro, aborda os diferentes contextos em que a função afim geralmente é abordada nos livros didáticos e explicita a estrutura da pesquisa.

Os fundamentos teóricos são elucidados no segundo capítulo, no qual Corrêa (2015) realiza uma breve revisão acerca do produto cartesiano, plano cartesiano, gráficos de uma função, proporcionalidade, grandezas proporcionais e grandezas direta ou inversamente proporcionais a várias outras. As funções lineares, como caso particular da função afim, são estudadas no terceiro capítulo. Corrêa (2015) define a função linear e salienta que ela se constitui como modelo matemático para problemas que envolvem proporcionalidade. Além disso, discorre acerca do teorema fundamental da proporcionalidade, da função afim, da taxa de variação média da função afim, do seu gráfico e conexões com a progressão aritmética.

No quarto capítulo, Corrêa (2015) caracteriza a função afim a partir de um problema com contexto do cotidiano e indica diferentes aplicações do conceito na geometria, envolvendo áreas e medidas do lado de figuras planas; na física, como no movimento uniforme, lei da gravitação universal, dilatação térmica e resistência elétrica; na economia e finanças, como nos casos da função custo, função receita, função lucro, função demanda, função oferta, depreciação, função consumo e função poupança; e na biologia, abrangendo contextos como o consumo de proteínas, sons emitidos por grilos, emagrecimento, desempenho de atletas, uso do petróleo como fonte energética, evaporação de líquidos. Nas aplicações, o autor expõe problemas resolvidos. Então, finaliza o capítulo com a proposição de problemas com aplicações diversas, de sua própria autoria, para que o leitor exercite e verifique as respostas.

No quinto capítulo, intitulado “Uma proposta metodológica para o ensino de Função Afim”, Corrêa (2015) relata sobre suas primeiras experiências no ensino da função afim, nos primeiros anos de atuação, em que seguia fielmente o livro didático que costumava iniciar pela definição do conceito seguida de exemplos. Entretanto, ao iniciar a atuação docente no Ensino Superior, se deparou com a necessidade de ensinar o conteúdo de forma contextualizada. O autor destaca contribuições do mestrado para sua qualificação profissional e “ênfatisa o quanto o professor de matemática que não se reformular frequentemente pode ser atropelado pela evolução do ensino de uma forma geral” (CORRÊA, 2015, p. 52).

Dando continuidade ao capítulo, Corrêa (2015) propõe um curso de Extensão, com duração de 40 horas, tendo como público-alvo os alunos do 9.º ano do Ensino Fundamental, os alunos do 1.º, 2.º e 3.º ano do Ensino Médio e também alunos do curso de graduação em matemática. O curso tem como objetivo geral “Interpretar quando uma determinada situação problema pode ser modelada usando a função afim como conhecimento matemático” (CORRÊA, 2015, p. 53). Quanto à metodologia, destaca a utilização de situações-problema do cotidiano dos alunos, define os recursos didáticos a serem considerados, as formas de avaliação

e o cronograma das atividades para os 20 encontros presenciais de duas horas/aula. Finaliza com a exposição de planos de aula que podem ser adaptados para o curso.

Em suas considerações finais, destaca que “procurou organizar um material com definições, conceitos e observações importantes tanto para resolver situações que envolvem a função afim, como para reformular sua prática pedagógica” (CORRÊA, 2015, p. 65). Segundo o autor, a metodologia que propõe pode fazer a diferença no ensino da função afim e auxiliar os professores com planos de aulas não abordados em livros didáticos.

Na dissertação de Silva, F. (2015, p. 6), estruturada em cinco capítulos, o principal objetivo é “propor uma situação de modelagem onde o teorema de caracterização da função afim seja decisivo na escolha do modelo adotado”. No primeiro, ela discorre acerca da importância e da necessidade do conhecimento matemática, no entanto, os alunos possuem uma aversão à disciplina e dificuldades quanto à aprendizagem nesta área do conhecimento. Para o autor, é necessário que o ensino de matemática considere situações-problemas relacionadas ao contexto dos alunos ou à realidade. Por isso, propõe o uso da Modelagem Matemática, pois, “é capaz de tornar o ensino mais atrativo e significativo para o educando fazendo com que se sinta sujeito e protagonista de sua aprendizagem” (SILVA, F., 2015, p. 14).

No segundo capítulo, Silva, F. (2015) comenta sobre a última etapa do Ensino Básico, o Ensino Médio, e algumas de suas características e finalidades, segundo os documentos orientadores do ensino. Para o autor, é importante levar em consideração que os alunos que cursam esta etapa possuem suas particularidades, portanto o Ensino Médio deve proporcionar uma formação que vá além do conteúdo científico. Logo após, discorre acerca da matemática no Ensino Médio e salienta que

[...] deve haver é um equilíbrio entre essas duas visões, enfatizando seu caráter científico com problemas instigantes dentro do seu próprio campo de estudo, características históricas, linguagem formal, definições e demonstrações e seu lado interdisciplinar com problemas contextualizados integrados e relacionados a outros campos do saber (SILVA, F., 2015, p. 16).

Silva, F. (2015) elabora no terceiro capítulo uma base teórica, levando em conta o conceito de função. Inicia com uma abordagem histórica da evolução deste conceito, destacando a contribuição de muitos matemáticos neste processo de construção do conceito. “O desenvolvimento do conceito de função surgiu de forma intuitiva a partir da necessidade do homem resolver problemas práticos onde encontrava-se a correspondência de valores distintos” (SILVA, F., 2015, p. 17). De acordo com o referido autor, foi apenas no século XVIII que um matemático, chamado a Peter Gustav Lejeune Dirichlet, chegou a uma definição aproximada da que utilizamos atualmente, entretanto não eram mencionados conceitos como domínio e

contradomínio (SILVA, F., 2015). Nesse sentido, o autor (*Ibid*) enfatiza que a evolução do conceito de função se deu ao longo da história humana, a partir de desafios e problemas que foram surgindo.

No segundo tópico do capítulo 3, Silva, F. (2015) apresenta algumas ideias acerca dos conjuntos e suas diferentes notações, “a tabular, através de uma propriedade e por meio de diagramas” (SILVA, F., 2015, p. 20). Além disso, aborda suas operações de união, interseção e inclusão, com destaque para o produto cartesiano. No tópico seguinte, o autor (*Ibid*) aprofunda o conceito de função, a partir da sua ideia intuitiva de “correspondência, dependência ou transformação entre quantidades de valores (grandezas) ou resultado de um movimento (translação ou rotação)” e de sua definição:

Dados dois conjuntos quaisquer A e B, e uma regra (algoritmo, ou conjunto de instruções) que permite associar sem exceções e sem ambiguidade a cada $x \in A$ um único elemento $f(x) \in B$, ($x \rightarrow f(x)$), dizemos que uma função $f : A \rightarrow B$ é uma terna composta por esses três elementos $(A; B; x \rightarrow f(x))$ (SILVA, F., 2015, p. 24).

Na sequência, o autor discorre sobre os tipos de função, sendo eles, crescente, decrescente, monótona não decrescente e monótona não crescente. Associa as funções a alguns exemplos, expõe as condições que determinam se uma relação representa uma função e complementa com o gráfico da função. Já no quarto tópico, Silva, F. (2015) destaca a função afim, “Uma função $f : R \rightarrow R$ é dita afim quando existem constantes a e b pertencentes aos conjuntos dos números reais (R) tais que $f(x) = ax + b$ para todo $x \in R$ ” (SILVA, F. 2015, p. 30), como um conceito muito presente em situações do cotidiano e a importância de sua caracterização para identificar suas aplicações. A seguir, menciona os seus casos particulares: função identidade, funções constantes, funções lineares, funções translações. A função linear recebe realce, segundo Silva, F. (2015, p. 37).

Uma função $f : R \rightarrow R$, $f(x) = ax$ é dita função linear. Esse tipo de função é uma das mais importantes dentre os diversos tipos de funções presentes na matemática e seu uso é potencializado no ensino básico. Podemos afirmar que sua empregabilidade está relacionado à modelos matemáticos referentes a proporcionalidade. No entanto, no Ensino Médio quando os conceitos de regra de três simples são tratados muitas vezes não são relacionados com o conceito de função linear pelos professores.

Para finalizar o capítulo, Silva, F. (2015) define a proporcionalidade e prova o teorema fundamental da proporcionalidade. E aborda alguns exemplos de situações com aplicações da função afim nas progressões aritméticas, na análise da reta tangente a uma curva, na aproximação do valor de uma função diferenciável por uma função afim no polinômio de Taylor de ordem 1.

No quarto capítulo, o autor destaca a Modelagem Matemática. De acordo com Silva, F. (2015), as necessidades humanas que surgiram ao longo da história contribuíram para a evolução da matemática e, hoje, os modelos matemáticos podem ser utilizados para resolver problemas em diversas áreas do conhecimento. Na sequência, Silva, F. (2015, p. 59) ressalta que “o gosto pela matemática pode alcançar um grau de desenvolvimento maior quando a mesma é motivada por problemas e interesses externos a ela”, apesar de haver problemas internos da matemática que estimulam especialmente os alunos que possuem maior afinidade com ela.

Segundo Silva, F. (2015), o ensino de matemática pode ser mais interessante com o uso de situações-problema que fazem parte do cotidiano dos alunos ou estão relacionadas com outras disciplinas. Então, propõe o uso da Modelagem Matemática, uma metodologia que “consiste na arte de transformar situações-problema da realidade do meio em modelos matemáticos que, após resolvidos, tem suas soluções analisadas na linguagem do mundo real” (SILVA, F., 2015, p. 60). Mas cabe destacar que, para o autor, a Modelagem Matemática considera aproximações da realidade.

Dessa forma, Silva, F. (2015) propõe atividades com o objetivo de tornar o ensino da função afim e de conceitos relacionados mais significativo e abordar a caracterização da função como uma forma de decidir o modelo mais adequado. Ainda reforça que o “principal propósito de um modelo matemático é entender um determinado fenômeno e se possível fazer previsões sobre o comportamento futuro” (SILVA, F., 2015, p. 61). Posteriormente, o autor expõe as atividades intelectuais da Modelagem propostas por Bassanezi (2014 *apud* SILVA, F., 2015), que são: experimentação, abstração, resolução, validação e a modificação. Em relação ao uso da Modelagem Matemática como uma metodologia de ensino, o autor destaca as contribuições de Biembengut, o qual define cinco passos: diagnóstico, escolha do tema, desenvolvimento do conteúdo programático, orientação de modelagem e avaliação do processo (SILVA, 2015).

As proposições dos dois autores supracitados são levados em conta na análise da Sequência Didática apresentada por Silva, F. (2015). Na primeira situação, é considerado o tema de desenvolvimento de bebês a partir de sua caderneta de saúde e utilizado o modelo de curva de regressão linear, e na segunda situação é explorado o tema pilotagem segura de motos, baseando-se na distância de frenagem, representada por uma função quadrática em relação à velocidade.

As conclusões do autor são abordadas no quinto capítulo. Silva, F. (2015) destaca que a Modelagem Matemática modifica o papel do professor e do aluno, que pode ser protagonista e

corresponsável pelo conhecimento, além de desenvolver habilidades de resolver problemas com uso dos conhecimentos matemáticos.

Portanto, entende-se que o trabalho com modelagem é útil e positivo no ensino de funções, no nosso caso função afim, e com o uso do teorema de caracterização e a técnica da regressão linear, os problemas analisados passam a ter modelos mais fiéis que os representem. Atividades com modelagem contribuem para fortalecer o elo entre professor e alunos e o trabalho em equipe (SILVA, F., 2015, p. 78).

A pesquisa de Torezani (2016, p. 8) pretende “construir e estudar criteriosamente o conceito de função afim por meio de resolução de situações problemas, sem antes a formalização desse conceito”. Inicialmente, a autora discorre acerca dos conceitos matemáticos de função afim e proporcionalidade, salientando a presença destes em nosso cotidiano. A dissertação está organizada em três capítulos. O primeiro é destinado à apresentação dos conceitos, entendidos como pré-requisitos para a pesquisa, sendo abordado o plano cartesiano, a partir da ideia de localização no espaço, e o conceito de função. O capítulo é desenvolvido a partir de exemplos e soluções.

No segundo capítulo, Torezani (2016) enfatiza a presença das relações diretas e inversas entre duas grandezas no cotidiano, que podem ser facilmente identificadas, e cita alguns exemplos, porém chama a atenção para a dificuldade em entender como essas relações funcionam. Na sequência, a autora trata da caracterização da função afim, a qual “permite identificar se determinada situação problema pode ser modelada através de uma função afim” (TOREZANI, 2016, p. 20) e acrescenta algumas situações contextualizadas. Posteriormente, define a função afim e seus casos particulares: função linear, função constante e função identidade, e complementa com exemplos contextualizados e soluções. Em relação à função afim, define e exemplifica o zero ou raiz de uma função, o crescimento ou decréscimo, o gráfico e sua construção.

Dando continuidade ao capítulo, Torezani (2016) estabelece relações entre a geometria e a função afim, destacando que “é possível realizar a comparação entre áreas e perímetros de diversas figuras geométricas, possibilitando a observação da dependência ou independência entre as variações dessas duas grandezas. Essa prática favorece a exploração do conceito de função” (TOREZANI, 2016, p. 38). Em seguida, disserta acerca da proporção, como um conceito muito presente no cotidiano e ressalta a importância de ensinar este conceito de forma contextualizada, possibilitando que os alunos produzam um sentido real. E acrescenta exemplos de como utilizar o princípio de proporcionalidade para trabalhar com a função afim.

As propostas de atividades para serem desenvolvidas com os alunos no ensino da função afim são apresentadas no terceiro capítulo e giram em torno da resolução de problemas. A

primeira atividade é a máquina transformadora de números, que objetiva “desenvolver e aprimorar a autonomia e a criatividade dos alunos, mostrando as diversas possibilidades de criação e desenvolvimento de regras e funções que permitem a ‘transformação de números’” (TOREZANI, 2016, p. 50). A autora propõe que os alunos construam a máquina com material reciclável e definam a função da máquina, com linguagem matemática. Assim, os números inseridos serão transformados a partir da regra escolhida. Com esta atividade, é possível “trabalhar o conceito de função, domínio, imagem, lei matemática de uma função e resolução de problemas” (TOREZANI, 2016, p. 51).

No jogo Purrinha, segunda atividade proposta, Torezani (2016) apresenta o seu significado, a sua origem e as suas regras. As partidas são disputadas por, no mínimo dois jogadores. Cada um recebe três palitos e deve escolher quantos palitos esconder em sua mão. Os jogadores terão que adivinhar o total de palitos contidos nas mãos de todos na partida. Aquele que acertar a quantidade de palitos perde um de seus palitos iniciais e ganha o jogador que ficar sem palitos primeiro (TOREZANI, 2016). Neste jogo é “possível estabelecer uma generalização por meio de uma função afim, onde o total de somas possíveis para a primeira partida, varia de acordo com a quantidade de jogadores de cada grupo” (TOREZANI, 2016, p. 54).

A terceira atividade é de adivinhações matemáticas, na qual, conforme Torezani (2016, p. 59), o professor solicita que os alunos pensem em um número, em seguida, faz alguns comandos de operações a serem realizadas. Como os comandos são organizados previamente, ao final das operações o professor sabe que a resposta será dada por $R(x) = x + 2$. Portanto, poderá adivinhar os números pensados subtraindo duas unidades da resposta final. Os alunos serão convidados a elaborar novos comandos. Já a quarta atividade proposta se refere à construção e à análise do gráfico de uma função afim no GeoGebra. Os alunos são orientados a criar os controles deslizantes a e b e inserir a função $f(x) = ax + b$. Assim,

Ao variar os valores dos parâmetros a e b que compõem a função afim $f(x) = ax + b$, os alunos poderão observar o conceito de função crescente e decrescente e ainda conseguirão observar as relações entre os parâmetros a e b e os pontos de interseção entre os eixos x e y e a reta $y = ax + b$. É possível observar também através da janela de álgebra que a lei da função vai se modificando a medida que os parâmetros a e b vão sendo modificados (TOREZANI, 2016, p. 63).

Na sequência, propõe problemas matemáticos a serem resolvidos com uso do *software* GeoGebra. Por fim, Torezani (2016) indica a construção do gráfico de uma função afim no programa Excel, inserindo os valores do domínio da função e obtendo os valores da imagem. Com estes dados selecionados, usar a ferramenta de inserir gráfico.

As considerações finais são apresentadas após o terceiro capítulo, em que Torezani (2016) conclui sua pesquisa destacando que o desenvolvimento do seu trabalho possibilitará que os alunos tenham condições de identificar e caracterizar uma função afim, bem como, de resolver situações-problema. Também reforça a importância da diversidade de abordagens pelos professores para motivar os alunos e qualificar suas proposições.

A dissertação de Bitencourt (2017, p. 13) tem como objetivo geral “aplicar o conceito de proporcionalidade, para alunos do 2º ano do Ensino Médio, através de uma sequência didática de ensino baseada na metodologia da Engenharia Didática”. O tema surgiu a partir da identificação da queda nos índices de desempenho dos alunos na disciplina de matemática, em avaliações externas como o Sistema de Avaliação da Educação Básica (SAEB), da ampla aplicação do conceito proporcionalidade no cotidiano e da possibilidade de uma sistematização metodológica através da Engenharia Didática.

Esta pesquisa está organizada em cinco capítulos. No primeiro, Bitencourt (2017) introduz o estudo, considerando sua problematização, justificativa, objetivos e a delimitação do tema. No segundo, destinado ao referencial teórico, Bitencourt (2017) afirma que os pressupostos teóricos levados em conta na pesquisa estão fundamentados nos princípios da Engenharia Didática.

O capítulo referido está dividido em cinco subseções. Inicialmente trata da proporcionalidade a partir de uma contextualização histórica, para “compreender como o conceito de proporcionalidade surgiu e como o raciocínio proporcional vem sendo utilizado no decorrer do processo de construção e desenvolvimento dos conceitos matemáticos” (BITENCOURT, 2017, p. 15), e das principais definições do conceito. Na sequência, discorre acerca do ensino de proporcionalidade nas escolas públicas, apresentando as diretrizes propostas pelos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) e a forma como o ensino da proporcionalidade se efetiva nas escolas, geralmente por meio da mecanização do processo resolutivo com uso da “regra de três”.

Na terceira subseção, Bitencourt (2017) aponta algumas dificuldades de aprendizagem no ensino de proporcionalidade, destacando a forma como este conceito é ensinado pelos professores. Em seguida, são anunciadas algumas estratégias eficientes para o ensino de proporcionalidade com base em diferentes estudos. Para finalizar o segundo capítulo, a quinta subseção trata da Engenharia Didática, aplicada ao ensino de proporcionalidade, apresentando as quatro fases desta metodologia de pesquisa e teoria educacional, mas não disserta acerca da proporcionalidade.

O capítulo três é destinado aos procedimentos metodológicos da pesquisa, a qual é definida por Bitencourt (2017) como quantitativa e qualitativa. Foi desenvolvida com 30 alunos do segundo ano do Ensino Médio, em uma escola pública da rede estadual de ensino de Macapá – AP, com duração da aplicação de três meses. A metodologia considerada foi a Engenharia Didática, que inclui a “aplicação de teste inicial, atividades da intervenção pedagógica e teste final para análise da aprendizagem” (BITENCOURT, 2017, p. 32), sendo estes os instrumentos de coleta de dados da pesquisa.

As atividades desenvolvidas com os alunos, em sala de aula, são descritas e analisadas no quarto capítulo, organizado com base nas fases da Engenharia Didática. Em relação à primeira fase, análise preliminar, Bitencourt (2017) analisa as respostas obtidas na aplicação com os alunos dos cinco testes iniciais, apresenta exemplos de resoluções corretas e incorretas e, ao final, indica os percentuais de alunos que acertaram, erraram ou não responderam. Na segunda fase, concepção e análise *a priori*, é indicado o planejamento do professor e a revisão de alguns conceitos fundamentais para compreender a proporcionalidade.

A experimentação é a terceira fase, na qual é aplicada a sequência didática com os alunos. Bitencourt (2017) discorre acerca de cinco atividades práticas realizadas: quebra-cabeça da proporcionalidade, aplicação do conceito de proporcionalidade na semelhança entre triângulos, aplicação do conceito de proporcionalidade na função afim, aplicação do conceito de proporcionalidade na trigonometria e aplicação do conceito de proporcionalidade inversa. Para cada atividade, são apresentados o objetivo, o alcance esperado, o material usado, algumas estratégias utilizadas pelos alunos na resolução das situações-problema e a análise feita dos dados obtidos. Após, revela os cinco testes finais com descrição dos problemas, realizados individualmente, e análise dos resultados obtidos.

A validação compõe a quarta fase, na qual Bitencourt (2017) realiza uma análise comparativa entre o teste inicial e final, que mostra uma melhora no desempenho dos alunos após a aplicação da sequência didática. A análise do percentual médio de acertos apresentou um crescimento no aproveitamento dos alunos, o que pode ser ocasionado pela nova abordagem utilizada pela professora no desenvolvimento das aulas. Houve uma redução das questões incorretas, na maioria dos testes, mostrando um melhor rendimento dos alunos, assim como nas questões não resolvidas, demonstrando o aumento da participação e interesse dos alunos.

Por fim, nas considerações finais presentes no quinto capítulo, destaca-se que

Da análise dos resultados obtidos no presente trabalho, foi possível constatar que os alunos da turma pesquisada foram capazes tanto de identificar a aplicação do conceito de proporcionalidade como de resolver situações-problemas abordando diferentes conteúdos de matemática. Assim, como foi possível descrever a partir da análise das

resoluções dos testes propostos, as principais estratégias de resolução e dificuldades de aprendizagem apresentadas pelos alunos (BITENCOURT, 2017, p. 63).

Ainda, Bitencourt (2017) relata algumas dificuldades encontradas quanto à falta de recursos materiais, de acesso à internet e deslocamento dos alunos. Do mesmo modo ressalta a importância de relacionar o conteúdo matemático com o cotidiano, das interações entre os alunos, da utilização de materiais concretos manipuláveis, da realização das atividades práticas em diferentes ambientes, de incentivar os alunos a desenvolverem suas próprias estratégias de resolução. Nesse sentido, Bitencourt (2017, p. 66) conclui que a Engenharia Didática se tornou “um processo contínuo de construção de conhecimento e investigação metodológica, favorecendo a construção e aquisição do conhecimento dos alunos e o aperfeiçoamento da experiência profissional da professora”.

A pesquisa de Figueiredo (2017) é constituída por sete capítulos e tem como principal objetivo “contribuir para o processo de ensino/aprendizagem, especificamente, para o ensino de funções afins no primeiro ano do Ensino Médio, estabelecendo uma relação entre função linear, proporcionalidade e regra de três” (FIGUEIREDO, 2017, p. 5). Em seu primeiro capítulo, o autor apresenta uma introdução ao estudo realizado, seus objetivos gerais e específicos e a organização do seu trabalho, conforme cada capítulo.

No segundo capítulo, Figueiredo (2017) realiza uma análise, considerando o ensino de funções em dois documentos oficiais que regem o Ensino Médio: os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio (PCNEM) e as Orientações Curriculares para o Ensino Médio. Nos PCNEM, Figueiredo (2017) identifica as habilidades e as competências que o documento define para serem desenvolvidas pelos alunos no Ensino Médio, com o estudo da função afim e destaca que este documento reconhece a “importância de se trabalhar com os alunos questões contextualizadas ou questões de aplicação” (FIGUEIREDO, 2017, p. 9). Já o segundo documento recomenda estabelecer relações entre a função linear e a proporcionalidade e alerta sobre a ineficácia de proposição de problemas com contextualizações artificiais.

Tais orientações dadas pelos documentos oficiais serão observadas em livros didáticos. Dessa forma, Figueiredo (2017) analisa como o conceito de função afim é apresentado em livros didáticos, considerando sua introdução, a realização de demonstrações ou não, e as listas de exercícios, nas quais se pretende verificar se há questões de aplicações e contextos verossímeis. Essa análise é apresentada no terceiro capítulo, considerando “três livros didáticos na biblioteca da Escola Estadual de Ensino Médio André Cordeiro, localizada na cidade de Brejo da Madre de Deus/PE, única escola de Ensino Médio da cidade onde residimos” (FIGUEIREDO, 2017, p. 13).

Na primeira análise, Figueiredo (2017) observa a apresentação da função afim nos livros didáticos. Segundo o autor, o Livro 1 introduz o conceito com um exemplo que considera as despesas de uma viagem, define a função afim, seus casos particulares e dá exemplos. Figueiredo (2017) aponta apenas comentários positivos nesta análise. O autor relata que o Livro 2 inicia com um exemplo com contexto da temperatura de um forno elétrico, mostra uma tabela e a lei geral, define função afim e aborda alguns exemplos. Figueiredo (2017), apesar de analisar positivamente, destaca algumas modificações que poderiam ser realizadas para qualificar a proposta. Conforme o autor, o Livro 3 introduz com um exemplo de um salário com parte fixa e outra variável, apresenta a lei da função e exemplos, após, define a função afim e seus casos particulares. Figueiredo (2017) tece somente comentários positivos.

Posteriormente, Figueiredo (2017) analisa como é apresentado o gráfico da função afim. No Livro 1, o autor destaca que a demonstração de que o gráfico é uma reta é feita, usando a desigualdade triangular e o teorema de Pitágoras, e afirma que a demonstração é simples e completa (FIGUEIREDO, 2017). No Livro 2, Figueiredo (2017) afirma que não é realizada a demonstração e é citada a relação com variações diretamente proporcionais, mas comenta que isto não é suficiente para a compreensão do aluno. Quanto ao Livro 3, é feita a demonstração, considerando aceita a fórmula da distância entre dois pontos e dá elementos para concluir que “uma reta não-vertical é sempre gráfico de uma função afim” (FIGUEIREDO, 2017, p. 22).

Em seguida, analisa como são apresentados o crescimento e o decréscimo da função afim. Para o autor, os Livros 1 e 2 deixam claro que se a taxa de variação é positiva a função será crescente e, se a taxa de variação é negativa, a função será decrescente. Entretanto, no Livro 3 “não ficou demonstrado que esta função é crescente quando $a > 0$ e decrescente quando $a < 0$ ” (FIGUEIREDO, 2017, p. 28). Em relação à quarta análise da apresentação da caracterização da função afim, Figueiredo (2017) destaca que os Livros 1 e 2 não tratam desta caracterização.

Ao analisar como os livros didáticos apresentam a relação entre função linear, proporcionalidade e regra de três, Figueiredo (2017) constata que os Livros 1 e 2 não estabelecem essa relação diretamente, enquanto o Livro 3 relaciona os conceitos e apresenta as definições. Por fim, Figueiredo (2017) analisa exercícios propostos no capítulo de função afim e verifica que, nos três livros, há exercícios que poderiam ser reformulados, pois há falhas na sua elaboração, ao considerar contextos que não podem ser modulados por uma função afim.

No quarto capítulo, Figueiredo (2017) sugere como abordar o ensino da função afim. Propõe a introdução por meio de um problema de escalas termométricas, aproveitando que os alunos já conhecem as escalas e as conversões, considerando o conjunto dos números reais.

Após a resolução, acrescenta a definição da função afim, exemplos e seus casos particulares: função constante, função nula, função identidade e função linear. Na sequência, Figueiredo (2017) mostra como determinar a função afim conhecendo dois de seus valores e oferece uma proposta para demonstrar que o gráfico de uma função afim é uma reta, a partir da desigualdade triangular.

No tocante ao crescimento e ao decréscimo da função afim, Figueiredo (2017) apresenta o teorema que “Na expressão de uma função afim $f(x) = ax + b$, $a > 0$ implica em f crescente, $a < 0$ implica em f decrescente e $a = 0$ em f constante” (FIGUEIREDO, 2017, p. 48) e realiza sua demonstração. Finalmente, o autor destaca que é importante a caracterização da função afim para verificar se uma situação pode possuí-la como modelo matemático, tendo em vista que “A função afim será o modelo matemático a ser usado quando para acréscimos iguais da variável independente, x , implicar acréscimos iguais a variável dependente, $f(x)$ ” (FIGUEIREDO, 2017, p. 52). Na sequência, dá três exemplos e analisa que o primeiro é de fácil entendimento, o segundo é mais complexo e o terceiro não apresenta as características da função afim.

A relação entre função linear, proporcionalidade e regra de três é abordada no quinto capítulo, conforme Figueiredo (2017, p. 58), pois “esses conteúdos descrevem a mesma ideia matemática”. Após a definição da proporcionalidade e regra de três, Figueiredo (2017) estabelece a relação entre os três conteúdos a partir da demonstração do teorema fundamental da proporcionalidade, assegurando que “a proporcionalidade gera uma função linear, dada pela fórmula $f(x) = ax$ ” (FIGUEIREDO, 2017, p. 62). Finaliza o capítulo com a resolução de exemplos, utilizando cada um dos conceitos de função linear, proporcionalidade e regra de três e reforça que devem ser consideradas situações em que as grandezas envolvidas sejam diretamente proporcionais, pois

[...] a relação existente quando as grandezas são diretamente proporcionais é imediata, enquanto que quando as grandezas são inversamente proporcionais temos que descobrir primeiramente o valor da nossa variável independente e em seguida descobrir o respectivo valor da função (FIGUEIREDO, 2017, p. 69).

No sexto capítulo, Figueiredo (2017) examina provas do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM), aplicadas de 2012 a 2016, para verificar a quantidade de questões que considera em sua resolução ao menos um dos conceitos de função linear, proporcionalidade e regra de três. De acordo com Figueiredo (2017, p. 71), “As questões são diversificadas e boa parte delas usam dados coletados para algum instituto ou instituição. A qualidade dessas

questões também é elogiável, pois não encontramos entre elas nenhuma que representasse uma situação-problema inverossímil”.

Os resultados obtidos por Figueiredo (2017) mostram que, no período de 2012 a 2016, o percentual destas questões ficou entre 28,9% e 48,9% em relação ao total de questões da prova de matemática do ENEM. “Dessa forma é imperiosa a necessidade de darmos uma maior atenção ao abordarmos esses conteúdos na sala de aula” (FIGUEIREDO, 2017, p. 105).

No sétimo capítulo Figueiredo (2017) tece suas conclusões acerca do trabalho realizado, enfatizando a estreita relação entre os conceitos de função linear, proporcionalidade e regra de três, que deve ser considerada nas aulas de matemática, no estudo da função afim. Além disso, reitera a importância de proporcionar aos alunos a identificação de situações em que não é possível utilizar estes conceitos, pois “A ideia de proporcionalidade é tão natural que muitos alunos se confundem e empregam essas ideias em situações-problemas em que as grandezas envolvidas não são proporcionais” (FIGUEIREDO, 2017, p. 107).

Em suas conclusões, Figueiredo (2017), a partir das análises dos livros didáticos, também sugere que o professor busque informações sobre os conteúdos em várias fontes para que sua abordagem seja mais completa e que tenha cuidado com os exercícios propostos, evitando o uso de situações que não condizem com a realidade.

Após este levantamento acerca das oito pesquisas encontradas, apresentamos no próximo subitem aspectos que se aproximam ou se distanciam da presente pesquisa, reforçando seu diferencial.

2.1 APROXIMAÇÕES E DISTANCIAMENTOS

Identificamos que, além de serem todas dissertações de Mestrado Profissional, sete delas são do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) e apenas uma do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Exatas (PPGECE). Portanto, a partir dos dados obtidos, a nossa pesquisa se diferencia por ser uma dissertação de Mestrado Acadêmico que considera a relação entre a função afim e a proporcionalidade.

Apenas duas pesquisas, Silva, R. (2014) e Bitencourt (2017), desenvolveram ações e coletaram dados com alunos, tal qual a nossa, desenvolvida com alunos de uma turma do primeiro ano do Ensino Médio. Assim, o material empírico, como os registros produzidos pelos alunos, possui semelhança com estes trabalhos. Entretanto, utilizamos outros instrumentos para a produção, como gravações em áudio e vídeo das aulas desenvolvidas e formulário de questões.

Além disso, as situações de ensino serão produzidas, levando em consideração o cotidiano dos alunos, o Curso Técnico em Agropecuária, e problemas com contextos que possibilitam a produção de sentido. As pesquisas de Souza (2013), Silva, R. (2014), Corrêa (2015), Silva, F. (2015), Torezani (2016), Bitencourt (2017) e Figueiredo (2017) destacam o uso de situações-problema contextualizadas, tanto do cotidiano dos alunos quanto de outros contextos reais.

Enquanto Silva, A. (2014) considera o cotidiano do aluno, ao propor o uso de tecnologias presentes em suas realidades, com foco na robótica educacional. Torezani (2016) também utiliza recursos da tecnologia, mais especificamente, o *software* GeoGebra. Nesse caso há uma aproximação com a nossa pesquisa, pois também será considerado o *software* GeoGebra no ensino da função afim.

Todos os trabalhos abordam de alguma forma, com maior ou menor destaque, a relação entre a função afim, especialmente a função linear, e a proporcionalidade, todavia somente Figueiredo (2017) aponta essa relação no objetivo da dissertação. Dessa forma, percebemos que esta relação permeia todo o trabalho desenvolvido, assim como no nosso caso, em que propomos o ensino da função afim, destacando a função linear, a partir da proporcionalidade.

O fato de termos encontrado poucas pesquisas e, ao lê-las, foi possível constatar que, apesar da proporcionalidade ser extremamente importante, poderia não ser necessariamente a mais preponderante na apropriação do conceito. Isso fez com que redirecionássemos a pesquisa não focando somente nela, mas ampliando para outros nexos conceituais.

Nenhuma das pesquisas encontradas tem seu embasamento teórico sustentado pela Teoria Histórico-Cultural, Teoria da Atividade ou Atividade Orientadora do Ensino. Portanto, nossa pesquisa terá como diferencial os pressupostos teóricos considerados para a análise do ensino da função afim a partir da proporcionalidade. Além do mais, percebemos que os nexos conceituais da álgebra não foram abordados nas pesquisas analisadas, constituindo-se como outro diferencial em nosso trabalho.

Um dos elementos importantes da nossa pesquisa é o motivo, definido a partir da Teoria da Atividade. Este termo nos chamou a atenção nas pesquisas selecionadas. Apesar de ele não ser empregado com o mesmo sentido teórico, esteve presente na maioria das dissertações, com o significado semelhante ao termo interesse, na perspectiva de motivar os alunos, despertar o interesse dos mesmos pela aprendizagem em matemática e contribuir para que eles tenham vontade de aprender e passem a gostar mais da disciplina. Isto traz indicativos de que essa seja uma das preocupações no que se refere ao ensino de função afim na Educação Básica, a qual será considerada nesta pesquisa.

Outro fator importante em nossa pesquisa é a necessidade, a partir da Teoria da Atividade, e sua influência no surgimento e na evolução dos conhecimentos construídos historicamente. Isto é brevemente abordado na pesquisa de Silva, F. (2015), bem como a abordagem histórica da evolução do conceito função. Novamente, enfatizamos que, apesar de não serem considerados os mesmos pressupostos teóricos, há ideias fundamentais que se aproximam do que será tratado.

Da mesma maneira, destacamos as interações entre as pessoas e o trabalho coletivo, elementos fundamentais no embasamento teórico do presente trabalho, a partir do qual foi definido que os alunos serão organizados em grupos para o desenvolvimento da pesquisa. Aproximando-se dessas concepções, Silva, R. (2014) salienta em sua pesquisa a importância do trabalho em grupo com os alunos.

Diante do mapeamento realizado neste capítulo, tendo como base os resultados das dissertações encontradas, bem como algumas aproximações e distanciamentos com a presente pesquisa, reiteramos que esta dissertação se diferencia das demais em muitos aspectos, em especial, quanto ao embasamento teórico, que será abordado a seguir, com o intuito de melhor compreender o objeto de estudo e encontrar encaminhamentos para o problema de pesquisa.

3 PRESSUPOSTOS TEÓRICOS DA PESQUISA: ALGUNS APONTAMENTOS

Os pressupostos teóricos da presente pesquisa são embasados na Teoria Histórico-Cultural (THC) de Lev Semionovitch Vigotski (1896-1934), na Teoria da Atividade (TA) de Aleksei Nikoláievitch Leontiev (1903-1979) e na Atividade Orientadora de Ensino (AOE) de Manoel Oriosvaldo de Moura (1996, 2010, 2017). Na sequência, serão apresentados e discutidos elementos importantes de cada uma dessas abordagens teóricas, que contribuem para melhor compreender o objeto de estudo.

3.1 TEORIA HISTÓRICO-CULTURAL

Lev Semionovitch Vigotski foi um dos precursores da Psicologia Histórico-Cultural, com base no Materialismo Histórico Dialético, de Karl Marx. Nasceu em 1896, na cidade de Orsha na Bielorrússia. Segundo Oliveira (2010), sua família era judia e vivia em condições econômicas confortáveis, pois seu pai trabalhava como chefe do departamento de um banco e representante de uma companhia de seguros, enquanto sua mãe possuía formação de professora, apesar de não atuar.

Destarte, Vigotski teve acesso a oportunidades educacionais, como tutores particulares, e foi incentivado pela família a interessar-se pelos estudos desde muito cedo. Apenas aos 15 anos de idade, ingressou em um colégio privado e, segundo Longarezi e Puentes (2013), terminou o ginásio¹⁵ aos 17 anos. Neste ano, passou no sorteio para a Faculdade de Medicina, porém, ingressou na Faculdade de Direito da Universidade Imperial de Moscou. Também frequentou o Curso de História e Filosofia da Universidade Popular Chaniavski, além de iniciar, posteriormente, seus estudos em Psicologia.

Alguns anos depois, Vigotski iniciou seus estudos em Medicina, “devido a seu interesse em trabalhar com problemas neurológicos como forma de compreender o funcionamento psicológico do homem” (OLIVEIRA, 2010, p. 19). Isso mostra que sua formação acadêmica foi ampla e variada, aumentando as possibilidades de compreensão do ser humano por diferentes perspectivas, como sua natureza biológica e social.

Sua vida profissional do mesmo modo foi diversificada, atuando como professor e pesquisador em diferentes áreas, como psicologia, pedagogia, pedologia¹⁶ e deficiência física e mental. De acordo com Longarezi e Puentes (2013), ao integrar um grupo de pesquisadores no

¹⁵ O ginásio era um nível de escolaridade que corresponde aos anos finais do Ensino Fundamental atualmente.

¹⁶ Pedologia é a “ciência do desenvolvimento da criança” (VIGOTSKI, 2018, p. 15).

Instituto de Psicologia da Universidade de Moscou, em 1924, Vigotski se define útil no campo da educação para crianças cegas, surdas e mudas.

Ademais, participou de diversos grupos de estudos e teve uma vasta produção escrita. Entretanto, suas obras foram censuradas de 1936 a 1956 na União Soviética, a partir de um movimento iniciado em 1929 que, conforme Longarezi e Puentes (2013), acusava a Teoria Histórico-Cultural de ser antimarxista e reacionária. Estes 20 anos em que era proibido citar seus estudos aconteceram posterior ao seu falecimento precoce, em 1934, como vítima de tuberculose. Após sua morte, suas ideias tiveram continuidade a partir de estudos de seus colegas e seguidores que contribuíram significativamente para desenvolver diferentes áreas, como a psicologia.

Juntamente com Luria e Leontiev, formavam um grupo conhecido como *Troika*. Segundo Oliveira (2010), esse grupo objetivava uma “nova psicologia” como síntese das tendências da psicologia como ciência natural e da psicologia como ciência mental. A primeira estava relacionada à psicologia experimental e aos processos elementares sensoriais e reflexos, concebendo o homem como corpo. Enquanto a segunda se aproximava da filosofia e das ciências humanas, descrevendo as propriedades dos processos psicológicos superiores e compreendendo o homem como mente, espírito e consciência.

Luria (2010) conta que Vigotski denominava o estudo que objetivava descobrir as fontes das formas humanas de atividade psicológica de psicologia cultural, histórica ou instrumental. O aspecto instrumental refere-se à natureza mediadora das funções psicológicas complexas; o cultural envolve os meios estruturados socialmente para organizar os tipos de tarefas enfrentadas pelas crianças, bem como os tipos de instrumentos, mentais e físicos, utilizados nas tarefas, com destaque para a linguagem e seu papel na organização e desenvolvimentos dos processos de pensamento. O histórico compreende a invenção e o aperfeiçoamento dos instrumentos utilizados no domínio do ambiente e comportamento, ao longo do tempo.

Cada um destes termos destaca elementos que se referem, particularmente, aos humanos e que, portanto, os distinguem dos animais. Nós, seres humanos, diferentemente de outros animais, não somos totalmente subordinados a nossos instintos, pois possuímos a capacidade de refletir, tomar decisões e agir no mundo. “Herdando a experiência adquirida, criando e recriando, integrando-se às condições de seu contexto, respondendo a seus desafios, objetivando-se a si próprio, discernindo, transcendendo, lança-se o homem num domínio que lhe é exclusivo – o da História e o da Cultura” (FREIRE, 1987, p. 41).

O ser humano é uma espécie em construção, que se modifica e evolui ao longo dos anos a partir de suas necessidades. No início de seu desenvolvimento, havia especificamente as

necessidades de sobrevivência, como se alimentar, proteger-se do frio, do calor, dos animais selvagens entre outras. Com o tempo, foram encontradas formas de atender a estas necessidades modificando o meio em que viviam, e novas necessidades começaram a surgir.

Vigotski, sob a influência de Marx, conclui que “as origens das formas superiores de comportamento consciente deveriam ser achadas nas relações sociais que o indivíduo mantém com o mundo exterior. Mas o homem não é apenas um produto de seu ambiente, é também um agente ativo no processo de criação deste meio” (LURIA, 2010, p. 25). Dessa forma, nós humanos transformamos o mundo em que vivemos e, concomitantemente, também somos transformados por ele.

Outra característica importante que nos diferencia das demais espécies animais é a constituição humana que não ocorre simplesmente no nascimento. Conforme Leontiev (2004), todos os homens nascem como candidatos a ser humano, entretanto, para isso, é preciso que se apropriem da cultura produzida pela humanidade historicamente. Tal apropriação ocorre a partir da interação entre os sujeitos, primeiramente com o ambiente familiar, após o nascimento, e, em seguida, com a escola e a sociedade.

Estas ideias corroboram as de Marx, que compreende o humano como a união do aspecto individual, que corresponde à sua concepção biológica, com o social, referente ao sentido cultural (RIGON; ASBAHR; MORETTI, 2010). Portanto, somente as características biológicas, inatas ao indivíduo, não são suficientes para que ele seja humano. É preciso que, por meio da interação com outros humanos, se aproprie da cultura e dos conhecimentos produzidos.

Em sendo assim, recebe destaque a educação como um “processo de transmissão e assimilação da cultura produzida historicamente, sendo por meio dela que os indivíduos se humanizam, herdando a cultura da humanidade” (RIGON; ASBAHR; MORETTI, 2010, p. 27). Dessa forma, a educação é essencial na constituição humana, possibilitando a apropriação de conhecimentos historicamente produzidos por meio da relação com os objetos do mundo, que segundo Rigon, Asbahr e Moretti (2010), é mediada pela relação com outros seres humanos.

As relações dos homens com o mundo não são relações diretas, mas profundamente relações mediadas. A transformação do mundo material, mediante o emprego de ferramentas, estabelece as condições da própria atividade humana e sua transformação qualitativa em consciência. A atividade do homem é pressuposto desta transformação e ao mesmo tempo o resultado dela (FICHTNER, 2010, p. 16).

A relação do indivíduo com o mundo se efetiva, a partir de relações mediadas, por outros seres humanos ou por ferramentas. Os mediadores se referem ao uso de instrumentos e signos. Miranda (2005) relata que Vigotski entende os instrumentos como elementos sociais, que são

externos aos indivíduos, cujo uso pelo homem se vincula à possibilidade de transformação da natureza. A referida autora ainda realça que a utilização dos instrumentos é transformada gradativamente ao longo do desenvolvimento humano, assim, o comportamento adaptativo das crianças também pode ser observado, de forma limitada e rudimentar, em animais.

Os instrumentos especificamente humanos são chamados de signos, os quais são “mediadores de natureza psicológica, que auxiliam o desenvolvimento de tarefas que exigem atenção ou memória, uma vez que podem interpretar ou (re)apresentar dados da realidade, referindo-se a elementos ausentes” (MIRANDA, 2005, p. 18). Esta concepção está fundamentada em Vigotski, que define os signos como “instrumentos psicológicos”. E Oliveira (2010, p. 30-31) contribui para o entendimento, afirmando que

[...] são inúmeras as formas de utilizar signos como instrumentos que auxiliam no desempenho de atividades psicológicas. Fazer uma lista de compras por escrito, utilizar um mapa para encontrar determinado local, fazer um diagrama para orientar a construção de um objeto, dar um nó num lenço para não esquecer um compromisso são apenas exemplos de como constantemente recorremos à mediação de vários tipos de signos para melhorar nossas possibilidades de armazenamento de informações e de controle da ação psicológica.

Estas concepções são fundamentais para compreender a aquisição das formas superiores de desenvolvimento e implicam nos processos de ensino e aprendizagem. No âmbito escolar, a apropriação pelos alunos dos conhecimentos historicamente produzidos pela humanidade é mediada pelo professor. E, ao organizar o ensino de conceitos científicos, o professor faz uso de instrumentos e sistemas simbólicos como a linguagem, que “tem origem na necessidade de comunicação” (MIRANDA, 2005, p. 22).

Vigotski (2010) afirma que as teorias mais importantes acerca do desenvolvimento e aprendizagem na criança podem ser agrupadas em três categorias. A primeira delas pressupõe a independência dos processos de desenvolvimento e aprendizagem. Assim, aprendizagem seria como um processo exterior ao desenvolvimento, utilizando-se de seus resultados. Nesta concepção, há uma separação desses dois processos no tempo, determinando que o desenvolvimento sempre precederá a aprendizagem.

Na segunda categoria, segundo Vigotski (2010), a aprendizagem é desenvolvimento, portanto, há uma total identificação entre os processos e não os diferencia absolutamente. Nesse sentido, defende que há uma simultaneidade entre os processos de aprendizagem e desenvolvimento, de forma sincronizada, de modo que a cada etapa da aprendizagem existe uma etapa correspondente do desenvolvimento.

A terceira categoria, conforme Vigotski (2010), busca conciliar as duas categorias anteriores, de modo que ambas coexistam, possuindo pontos em comum e não se excluindo

mutuamente. Esta considera que o desenvolvimento resulta da interação de dois processos fundamentais e amplia o papel da aprendizagem no desenvolvimento da criança.

Entretanto, para Vigotski (2010, p. 109) a “aprendizagem da criança começa muito antes da aprendizagem escolar”. De acordo com o referido autor, a aprendizagem escolar não começa do zero, pois é precedida de uma etapa definida de desenvolvimento da criança. Porém, não significa que a aprendizagem escolar será uma continuação direta do desenvolvimento pré-escolar.

Vigotski (2010) destaca que aprendizagem e desenvolvimento estão ligados entre si desde os primeiros dias de vida da criança, mas há características específicas de acordo com a idade escolar. É indiscutível que “a aprendizagem deve ser coerente com o nível de desenvolvimento da criança” (VIGOTSKI, 2010, p. 111), portanto, no contexto escolar, cumpre considerar o nível de complexidade na abordagem dos conceitos.

Assim, “existe uma relação entre determinado nível de desenvolvimento e a capacidade potencial de aprendizagem” (VIGOTSKI, 2010, p. 111). Para encontrar esta relação em casos específicos, é preciso definir dois níveis de desenvolvimento da criança, o primeiro chamado nível de desenvolvimento atual¹⁷ e o segundo é chamado Zona de Desenvolvimento Iminente¹⁸ (ZDI).

O nível de desenvolvimento atual, segundo Vigotski (2010), corresponde ao nível de desenvolvimento das funções psicointelectuais resultante de processos já realizados. Ou seja, nível em que existe um conhecimento já apropriado pelo sujeito e que possibilita a realização de tarefas de forma independente.

A ZDI se refere à diferença entre esta zona e o nível de desenvolvimento atual. Em outras palavras, é definida como a “diferença entre o nível das tarefas realizáveis com o auxílio dos adultos e o nível das tarefas que podem desenvolver-se com uma atividade independente” (VIGOTSKI, 2010, p. 112). Então, as tarefas que a criança só é capaz de realizar com o auxílio dos adultos fazem parte da ZDI, mas, com o passar do tempo elas podem compor o nível de desenvolvimento atual, contanto que a criança adquira a capacidade de realizar a tarefa de forma independente.

A ZDI “permite-nos, pois, determinar os futuros passos da criança e a dinâmica do seu desenvolvimento e examinar não só o que o desenvolvimento já produziu, mas também o que

¹⁷ De acordo com as diferentes traduções das obras de Vigotski, o nível de desenvolvimento atual também é conhecido como nível de desenvolvimento real ou efetivo.

¹⁸ De acordo com as diferentes traduções das obras de Vigotski, a ZDI também é denominada como Zona de Desenvolvimento Proximal, Potencial ou Imediato.

produzirá no processo de maturação” (VIGOTSKI, 2010, p. 113). Assim, ao organizar o ensino, é importante que o professor leve em consideração os conhecimentos já apropriados pelos alunos, mas não se limite a isso e, sim, possibilite um avanço no desenvolvimento da criança, pois “o único bom ensino é o que se adianta ao desenvolvimento” (VIGOTSKI, 2010, p. 114).

Para isso, na perspectiva das ideias de Vigotski (2010), é relevante que o professor amplie as possibilidades de promover a aprendizagem dos alunos, tendo em vista que uma organização adequada da aprendizagem promove o desenvolvimento mental deles. Portanto, o processo de desenvolvimento e o processo de aprendizagem não coincidem. Dessa forma, é por meio do processo de aprendizagem que são desenvolvidas as características humanas historicamente construídas.

Além do mais, a aprendizagem se efetiva a partir das interações sociais, uma vez que as funções psíquicas superiores se originam nas relações sociais, no compartilhamento com outras pessoas, no próprio contexto social e cultural, sendo esta uma atividade interpessoal. Posteriormente, o indivíduo realiza um processo de internalização, numa atividade intrapessoal regulada pela consciência, que é mediado pela linguagem e possibilita que os signos adquiram significado e sentido (VYGOTSKY, 1998).

Todas as funções psicointelectuais superiores aparecem duas vezes no decurso do desenvolvimento da criança: a primeira vez, nas atividades coletivas, nas atividades sociais, ou seja, como funções intersíquicas: a segunda, nas atividades individuais, como propriedades internas do pensamento da criança, ou seja, como funções intrapsíquicas (VIGOTSKI, 2010, p. 114).

Destarte, no contexto escolar é fundamental proporcionar a interação entre os alunos e o professor, de modo que sejam possibilitadas as atividades coletivas. Panossian, Moretti e Souza (2017) destacam que a escola se configura como um espaço para a apropriação de conhecimentos mais elaborados e sistematizados pela humanidade, ou seja, dos conhecimentos científicos (teóricos), os quais são definidos por Vigotski, segundo Oliveira (1992, p. 31), naqueles “adquiridos por meio do ensino, como parte de um sistema organizado de conhecimentos, particularmente relevantes nas sociedades letradas, onde as crianças são submetidas a processos deliberados de instrução escolar”.

Portanto, os conhecimentos científicos são aqueles produzidos pela cultura, ao longo da história, validados por uma sociedade e sistematizados, para que possam ser apropriados pelas gerações futuras. Estes, segundo Vigotski, se diferenciam dos conceitos espontâneos (cotidianos). Quanto à relação entre as duas categorias, para Vigotski (2009, p. 349),

[...] o desenvolvimento dos conceitos científicos e espontâneos seguem caminhos diferentes em sentido contrário, ambos os processos estão internamente e da maneira

mais profunda inter-relacionados. O desenvolvimento do conceito espontâneo da criança deve atingir um determinado nível para que a criança possa apreender o conceito científico e tomar consciência dele. Em seus conceitos espontâneos, a criança deve atingir aquele limiar além do qual se torna possível a tomada de consciência.

Logo, o professor tem como função criar condições necessárias para que a aprendizagem se efetive. Para isso, cabe a ele possibilitar que o aluno se coloque em atividade. Em nossa investigação, ao nos propormos a trabalhar em uma turma do primeiro ano do Ensino Médio, o fazemos com o intuito de propor situações de ensino com vistas a desencadear aprendizagens dos conceitos científicos sobre função. Com a intencionalidade de possibilitar que os alunos se apropriem desses conceitos, especialmente da função afim.

Derivado dos estudos de Vigotski, ainda na perspectiva da THC, Leontiev desenvolveu a Teoria da Atividade (TA). Esta é importante para nos ajudar a compreender e analisar o objeto de estudo da presente pesquisa, por isso, na sequência tratamos sobre ela, inicialmente considerando seu principal idealizador Leontiev e, posteriormente, apresentando e discutindo algumas das principais ideias que compõem esta teoria.

3.2 TEORIA DA ATIVIDADE

O psicólogo russo, chamado Aleksei Nikoláievitch Leontiev, nasceu no dia 5 de fevereiro de 1903, em Moscou. Segundo Longarezi e Puentes (2013), no Calendário Antigo esta data se refere ao dia 18 de fevereiro do mesmo ano e, historicamente, este período é conhecido como pré-revolucionário. Leontiev concluiu seus estudos em Psicologia, na atual Faculdade de Ciências Sociais da Universidade de Moscou, na primeira metade da década de 1930.

Sua vida profissional e científica, conforme Longarezi e Puentes (2013), teve início em 1923 ao ser convidado por Luria para trabalhar no Instituto de Psicologia de Moscou, o qual buscava a construção de uma nova base filosófica diante dos estudos psicológicos. Neste período, houve uma reestruturação da psicologia soviética com base na filosofia marxista.

No ano de 1931, Leontiev concluiu sua monografia sobre o desenvolvimento da memória, que de acordo com Longarezi e Puentes (2013), apresentava resultados dos seus estudos sobre a mediatização instrumental, promovendo o estudo das memórias como um processo psicológico superior. Após este ano, mudou-se para a cidade de Kharkov, na Ucrânia, devido às condições político-ideológicas da época e à influência de Stalin.

Em Kharkov, Leontiev liderou um grupo de estudos e realizou investigações que possibilitaram o desenvolvimento da Teoria da Atividade e sua estrutura, também “diferenciou

os instrumentos humanos e os meios auxiliares dos animais; identificou a estrutura dos processos psíquicos internos e a da atividade objetual externa; bem como, a estrutura psíquica geral da atividade, etc.” (LONGAREZI; PUENTES, 2013, p. 78).

Durante sua vida, Leontiev ocupou importantes cargos, escreveu e publicou diversos artigos e livros, tais como, segundo Longarezi e Puentes (2013), *Desenvolvimento do psiquismo*, em 1947; *Problemas do desenvolvimento do psiquismo*, em 1959, que conquistou o Prêmio Lênin de 1963; *Atividade, consciência, personalidade*, em 1975, conquistando o Prêmio Lomonosov, em 1976, entre outras publicações importantes.

Um fato marcante na psicologia soviética foi a superação do conceito de reflexo pelo de atividade, que Longarezi e Puentes (2013) relatam ter ocorrido por volta de 1953, após a morte de Stalin e a diminuição da influência de Pavlov. Esta alteração afetou os diversos níveis de análise como a psicologia social. Leontiev foi conquistando espaços importantes e, em 1963, tornou-se o chefe da Seção de Psicologia da Faculdade de Filosofia da Universidade de Moscou e, posteriormente, da Faculdade de Filosofia desde a sua criação. Assim, permaneceu como chefe até sua morte, em 1979, decorrente de um ataque do coração.

Uma das principais contribuições de Leontiev foi o desenvolvimento da Teoria da Atividade, tendo como base os estudos realizados por Vigotski na abordagem histórico-cultural. Dessa forma, Leontiev corrobora o entendimento de que o homem, como espécie já nasce homem, entretanto, necessita de um processo de humanização para se tornar humano (LONGAREZI; PUENTES, 2013).

Para Leontiev (2004, p. 80), o aparecimento do trabalho, entendido como “processo que liga o homem à natureza, o processo de ação do homem sobre a natureza”, possibilitou diversas transformações na aparência física do homem, em sua organização anatômica e fisiológica. Segundo o autor, o trabalho é caracterizado pelo uso e fabricação de instrumentos e se efetua em condições de atividade coletiva, através da qual ele se relaciona com outros homens.

A constituição humana, conforme Leontiev, ocorre por meio de atividades principais, também chamadas atividades dominantes, “cujo desenvolvimento governa as mudanças mais importantes nos processos psíquicos e nos traços psicológicos da personalidade da criança, em um certo-estágio de seu desenvolvimento” (LEONTIEV, 2010, p. 65).

As atividades principais, portanto, são aquelas que governam o desenvolvimento das funções psíquicas do indivíduo. Sendo assim, Leontiev (2004) define o jogo, o estudo e o trabalho como atividades principais nos estágios de desenvolvimento do sujeito, a partir do seu papel no sistema de relações sociais e das condições sócio-históricas. A atividade principal se

altera, segundo com Leontiev (2004), à medida que as possibilidades do sujeito superam o seu modo de vida, o lugar que ocupa no sistema das relações sociais.

Destarte, a reorganização da atividade do sujeito ocasiona a passagem para um novo estágio de desenvolvimento da vida psíquica. Estas mudanças, normalmente, “respondem a uma necessidade interior nova e estão ligadas a novas tarefas postas à criança pela educação e correspondem às suas possibilidades novas, à sua nova consciência” (LEONTIEV, 2004, p. 315).

As atividades são definidas por Leontiev (2004, p. 315) como “os processos que, realizando tal ou tal relação do homem com o mundo, respondem a uma necessidade particular que lhes é própria”. Logo, a necessidade é desencadeadora da atividade, mas, de acordo com Leontiev (2010), é o motivo, coincidindo com o objetivo, que impulsiona o sujeito para a realização das ações, as quais têm como alvo o objeto e são realizadas por operações ou novas ações. Libâneo (2004, p. 119), pautado nos mesmos pressupostos teóricos, colabora para o entendimento de atividade, ao esclarecer que:

A atividade surge de necessidades, as quais impulsionam motivos orientados para um objeto. O ciclo que vai de necessidades a objetos se consuma quando a necessidade é satisfeita, sendo que o objeto da necessidade ou motivo é tanto material quanto ideal. Para que esses objetivos sejam atingidos, são requeridas ações. O objetivo precisa sempre estar de acordo com o motivo geral da atividade mas são as condições concretas da atividade que determinarão as operações vinculadas a cada ação.

Necessidade, objeto e motivos estruturam a atividade, segundo Leontiev (2010), além dos objetivos, ações, operações e condições de realização. A atividade surge de necessidades, e o sujeito é impulsionado por um motivo, o qual deve coincidir com seu objetivo, para a realização de ações, que têm como alvo o objeto e se efetiva a partir de operações, que dependem das condições de realização (LEONTIEV, 2010).

Nesse sentido, a atividade se diferencia da ação. Enquanto a atividade é estabelecida nos “processos que são psicologicamente determinados pelo fato de aquilo para que tendem no seu conjunto (o seu objeto) coincidir sempre com o elemento objetivo que incita o indivíduo a uma dada atividade, isto é, com o motivo” (LEONTIEV, 2004, p. 315), a ação “é um processo cujo motivo não coincide com o seu objeto (isto é, com aquilo que visa), pois pertence à atividade em que entra a ação considerada” (LEONTIEV, 2004, p. 316). Além disso, “Dependendo de que atividade a ação faz parte, a ação terá outro caráter psicológico” (LEONTIEV, 2010, p. 72).

Para auxiliar na compreensão do que é atividade, Leontiev (2004) cita o exemplo de um estudante que lia o livro de história para se preparar para realizar um exame. Supondo que o estudante descubra que o referido livro não é absolutamente necessário para o exame: no caso

de o estudante continuar a leitura do livro, entende-se que o conteúdo do livro constitui o motivo, pois era o que mobilizava o estudante a ler; e, que a apropriação desse conteúdo satisfazia sua necessidade individual de saber.

Entretanto, caso o estudante interrompa a leitura imediatamente, entende-se que ele estava sendo mobilizado apenas pela necessidade de passar no exame. Portanto, nesse caso, a leitura não se configura como atividade, pois o fim da leitura não coincide com o que levou o estudante a ler. Mas, trata-se de uma ação, tendo em vista que saber acerca do conteúdo do livro não se configurou como motivo.

Considerando tal distinção, Leontiev (2004) apresenta que, ao deslocar o motivo da atividade como objeto do ato, ou seja, como fim, a ação será transformada em atividade. “É este processo que constitui a base psicológica concreta sobre a qual assentam as mudanças de atividade dominante e, por consequência, as passagens de um estágio de desenvolvimento a outro” (LEONTIEV, 2004, p. 317). Logo, quando uma atividade é bem definida e estruturada, o motivo coincide com o objeto (LONGAREZI; PUENTES, 2013).

Para exemplificar, Leontiev (2004) supõe que uma criança não consegue dedicar-se à realização de suas tarefas de casa, adiando este momento e, quando a inicia, acaba se distraindo facilmente. Tendo em conta que esse aluno entenda que, se não realizar as tarefas terá uma nota ruim, e isso fará com que seus pais fiquem tristes e que aprender é uma obrigação, tais conhecimentos não são suficientes para mobilizá-lo, mesmo que ele queira ter boas notas e executar seus deveres.

Pressupondo que alguém determine ao aluno que só poderá brincar se realizar suas tarefas de casa e, a partir disso, a criança começa a realizá-las, nesse caso, haverá um motivo potencial para mobilizar o aluno, que é obter a possibilidade de brincar. Apesar de o motivo que instigou o aluno não ter sido criado por ele, posteriormente ele passará a realizar suas tarefas escolares por conta própria, podendo em um determinado momento, ser mobilizado pela intenção de obter uma boa nota. Assim, o motivo, que inicialmente era apenas compreendido pelo aluno, passou a ser mobilizador.

Nessa perspectiva, os motivos são classificados em motivos compreensíveis, conhecidos também como motivos-estímulos, e motivos eficazes ou formadores de sentido. Os motivos-estímulo ou compreensíveis, conforme Leontiev (2004), existem na consciência do sujeito, mas são psicologicamente ineficientes, não levando à execução das ações. E motivos eficazes, ou formadores de sentido, são aqueles que “mobilizam a atividade segundo critérios que efetivam a relação de necessidade com o objeto” (GRYMUZA; RÊGO, 2014, p. 123).

Ambos os motivos coexistem na atividade, mas somente os eficazes é que desempenham a função da formação de sentido, conferindo a esta atividade um sentido pessoal. Portanto, esses são os motivos que verdadeiramente impulsionarão o sujeito para a realização das ações necessárias na satisfação das necessidades. Segundo Leontiev (2021, p. 170, grifo do autor), os motivos possuem a função de “‘avaliar’ o significado vital para o sujeito das circunstâncias objetivas e suas ações nessas circunstâncias, eles conferem a elas um sentido pessoal que não coincide diretamente com seu significado objetivo compreendido”.

Conforme Leontiev (2021), o sentido pessoal está relacionado ao significado para o sujeito, diferentemente do significado objetivo compreendido que é um fenômeno da consciência social. “Se a sensibilidade exterior liga na consciência do sujeito os significados com a realidade do mundo objetivo, o sentido pessoal os liga com a realidade de sua própria vida nesse mundo, com seus motivos. O sentido pessoal cria a parcialidade da consciência humana” (LEONTIEV, 2021, p. 173).

Ainda segundo o autor, “o sentido pessoal é sempre um sentido de algo” (LEONTIEV, 2021, p. 173). E, quanto à atividade, o sentido pessoal deve corresponder ao significado social, caso contrário, a situação criada será propícia a alienação (LONGAREZI; PUENTES, 2013). Como por exemplo, o caso de um professor que, como o significado social do seu trabalho é ensinar, cumpre seus horários de trabalho com sentido pessoal de obter um salário.

Os novos motivos, bem como, as novas atividades, surgem da transformação dos motivos compreensíveis, em certas condições, em motivos eficazes. Essa transformação ocorre, em determinadas condições, quando o resultado obtido com a ação conta mais para o sujeito do que o próprio motivo que impulsionou sua ação (LEONTIEV, 2004). Como no caso exemplificado anteriormente, em que a obtenção de uma boa nota, como resultado da ação de realizar as tarefas de casa, foi mais importante que o fato de poder ir brincar.

Segundo Leontiev (2021), uma vez que o sujeito nem sempre toma consciência do motivo que o estimulou a realizar as ações, diante disso, surge uma dificuldade para citar sua motivação, especialmente, verdadeira. Por consequência, é difícil identificar o real motivo que mobiliza um sujeito na realização de sua ação, apenas algumas possibilidades, tendo em vista que nem o próprio sujeito tem consciência dele. Ainda que o sujeito não tenha consciência do motivo que o mobilizou, o motivo é indispensável na atividade, pois, “Não existe atividade sem motivo; atividade “não motivada” não é uma atividade desprovida de motivo, mas uma atividade com motivo subjetiva e objetivamente oculto” (LEONTIEV, 2021, p. 123). Assim, toda atividade possui um motivo, mesmo que esse não esteja explícito.

Entretanto, não é necessário que seja definido um único e exclusivo motivo para certa atividade, pois, de acordo com Leontiev (2021), a atividade é polimotivada, podendo responder a diversos motivos simultaneamente. Como é o caso da atividade de trabalho, que é socialmente motivada, possibilitando a formação de sentido pessoal pelo trabalhador e também possui como motivo a gratificação material que atua apenas como estímulo. Caso contrário, se o trabalhador atua mobilizado pela sua remuneração, não estará em atividade e será apenas uma ação.

A atividade transforma-se em ação, quando perde seu motivo, enquanto as ações acabam se tornando operações, quando se configuram como procedimentos para alcançar um objetivo (RIGON; ASBAHR; MORETTI, 2010). Assim, quando uma determinada ação passa a ser um procedimento automático, não consciente, para alcançar um objetivo, torna-se uma operação.

Esse processo pode ser mais bem entendido com um exemplo prático, como o citado por Leontiev (2021), referente a situação de dirigir um carro. Para um motorista iniciante, a troca de marchas se configura como uma ação, pois é realizada de forma consciente, necessitando que o condutor pense no melhor momento para realizar essa troca e em como executá-la. Em seguida, esta ação é incluída na ação de mudar a velocidade do carro, tornando-se um modo de execução para alcançar esse objetivo, ou seja, uma operação.

As operações são definidas como o modo de execução de uma ação. E, assim como o exemplo supracitado, “toda operação é resultado da transformação da ação que decorre de sua inclusão em outra ação e subsequente “tecnização” (LEONTIEV, 2021, p. 128). Então, a troca de marchas se configura como uma operação, pois o motorista realizará esse processo de forma automática, mecanizada, com o objetivo de alterar a velocidade.

Sejam outras palavras, as operações conscientes são inicialmente ações, que são convertidas em operações, quando se apresenta um novo propósito ao sujeito, para o qual aquela que era ação passa a ser um meio de realizá-lo (LEONTIEV, 2010). Ao tornar-se operação, “sai da esfera dos processos conscientizados, mas conserva os traços fundamentais do processo consciente e pode, a todo momento, em caso de dificuldade, por exemplo, ser de novo conscientizada” (LEONTIEV, 2004, p. 331).

Ademais, na ação de alterar a velocidade há outras operações necessárias, além da troca de marchas, como pisar no acelerador ou freio, verificar as condições da rua e se há outros veículos próximos, entre outras. Portanto, cada ação pode ser efetivada por diferentes operações, enquanto uma operação pode realizar diferentes ações (LEONTIEV, 2004). Como no caso da operação de pisar no acelerador, pois esta também pode ser um modo de executar uma ação de ultrapassagem a outro veículo.

Enfim, “A atividade humana não existe de outro modo, senão na forma de ação ou cadeia de ações” (LEONTIEV, 2021, p. 125). Entretanto, a atividade não deve ser resumida a um simples conjunto de ações e operações. Sua estrutura é complexa. A ação deve estar relacionada com objetivos e determinada pelo seu fim, enquanto as operações dependem das condições em que é dado este fim (LEONTIEV, 2004).

Em nossa pesquisa, identificar o tipo de motivo que leva os alunos a desenvolverem as ações que forem propostas pode nos auxiliar a compreender indicativos de apropriação de conhecimentos sobre os nexos conceituais trabalhados, na perspectiva de que as ações se materializem como atividade de aprendizagem para os alunos. Sobre a atividade de aprendizagem do aluno e atividade de ensino do professor, discutiremos a seguir.

3.2.1 Atividade de ensino e atividade de aprendizagem

A estrutura da atividade não foi proposta por Leontiev com vistas a promover contribuições no campo educacional especificamente, no entanto, outros autores valeram-se de suas ideias para aprofundar e ampliar compreensões relacionadas à Educação escolar. Assim, a TA pode ser relacionada ao contexto escolar, pois é preciso que o aluno sinta a necessidade de apropriar-se dos conhecimentos historicamente produzidos pela humanidade e que tenha um motivo para aprender, que seja capaz de impulsionar suas ações em busca da aprendizagem.

Para a TA, a aprendizagem é uma atividade humana, “movida por um objetivo, a qual concebe três pontos de relevância: acontece em um meio social; através de uma atividade; mediada nas relações entre os sujeitos e entre o sujeito e o objeto de aprendizagem” (GRYMUZA; RÊGO, 2014, p. 136). Portanto, para que ocorra a aprendizagem, o aluno deve se colocar em atividade.

Conforme Rigon, Asbahr e Moretti (2010, p. 25), “o processo educativo que gera desenvolvimento psicológico é aquele que coloca o sujeito em atividade”. Então, é fundamental que o professor possibilite que os alunos se coloquem em atividade de aprendizagem, um tipo de atividade específica dos estudantes, “cuja meta é a própria aprendizagem, ou seja, o objetivo do ensino é ensinar aos estudantes as habilidades de aprenderem por si mesmos, ou seja, a pensar” (LIBÂNEO, 2004, p.122).

Proporcionar as condições necessárias para que os alunos aprendam, ou seja, para que se coloquem em atividade de aprendizagem é a significação social da atividade pedagógica do professor. Assim, cumpre ao professor organizar situações propiciadoras de aprendizagem,

considerando os conteúdos científicos a serem ensinados e a melhor maneira de ensiná-los (ASBAHR, 2005).

Como bem lembra Cedro (2008), os conhecimentos científicos exercem o papel de conteúdo da atividade de aprendizagem e também de necessidade. Portanto, para que o aluno se coloque em atividade de aprendizagem, é preciso que ele tenha a necessidade do conhecimento científico a ser aprendido.

Na atividade de aprendizagem, o conteúdo é constituído por conhecimentos científicos, pois, segundo Cedro (2008), o objetivo é promover o desenvolvimento psíquico dos alunos. Para isso, os conteúdos ensinados na escola devem possibilitar aos alunos a formação do que ainda não está formado, ou seja, elevar o aluno a níveis superiores de desenvolvimento (ASBAHR, 2005, p. 114).

Segundo Cedro (2008, p. 168), a atividade pedagógica do professor deve ter uma intencionalidade e seu planejamento realizado de forma consciente, para que, a partir de seus elementos essenciais (objetivo, conteúdos, método, organização do ensino e condições objetivas), proporcione ao professor e aos alunos estarem em atividade.

O objeto da atividade pedagógica é, para Rigon, Asbahr e Moretti (2010, p. 24), “a transformação dos indivíduos no processo de apropriação dos conhecimentos e saberes; por meio dessa atividade – teórica e prática –, é que se materializa a necessidade humana de se apropriar dos bens culturais como forma de constituição humana”.

Destarte, a constituição humana compreende a apropriação dos conhecimentos historicamente construídos, o que ocorre também por meio da escolarização dos sujeitos, cabendo ao professor a responsabilidade de organizar o ensino com vistas a promover as condições necessárias para a apropriação dos conhecimentos e possibilitar a formação humana dos alunos.

Para isso, é função do professor “organizar situações didáticas que favoreçam o desenvolvimento, no estudante, de um querer aprender, uma vez que esse não é um valor natural, mas construído historicamente” (RIGON; ASBAHR; MORETTI, 2010, p. 31-32). Assim, a atividade de ensino tem como motivo principal o ensinar e, entre outros, criar as condições necessárias para que o aluno queira aprender. Portanto,

A atividade do professor deve estar focada nas necessidades dos seus alunos de modo que possa construir um sistema de operações voltado para uma ação que os motive a estudar e, por consequência, a aprender, dando-lhes condições propícias para o ensino, transformando os ‘motivos-estímulos’ em ‘motivos formadores de sentido’. Assim, o objeto do aluno define-se no ato de estudar, e o objetivo do professor é alcançado (GRYMUZA; RÊGO, 2014, p. 130).

Nesse sentido, é indispensável que o aluno tenha, além da necessidade de apropriação dos conhecimentos, motivos eficazes para mobilizar suas ações com vistas a construir sua aprendizagem. Para Leontiev (1993 *apud* CEDRO, 2008, p. 42), durante a vida escolar, há três níveis principais no desenvolvimento da motivação geral da atividade de aprendizagem, que são

[...] (a) o nível dos motivos que se encontram na própria aprendizagem; (b) o nível dos motivos que se encontram na vida escolar e nas relações com a classe e com o coletivo da escola; e (c) o nível de motivos que se encontram no mundo, na futura ocupação e nas perspectivas da vida do sujeito.

Em vista disso, devido às particularidades de cada indivíduo, uma turma de alunos dificilmente será mobilizada pelo mesmo motivo. Então, é fundamental que o professor leve em conta diferentes possibilidades para criar os motivos que irão proporcionar aos alunos o querer aprender.

Cedro (2008) pontua que os motivos podem modificar sua posição na estrutura motivacional da atividade de aprendizagem, sendo ora dominantes e ora subordinados. Em alguns momentos são capazes de gerar sentido e em outros apenas estímulos. Assim, “o objeto ou conteúdo, as ações e o desenvolvimento da atividade, as condições e os meios, os parceiros e as relações sociais, e os indivíduos da atividade podem vir a ser os motivos para as ações do indivíduo” (CEDRO, 2008, p. 43).

No entanto, conforme Leontiev (2004), os motivos devem coincidir com o objeto para que se tornem motivos eficazes e possibilitem ao aluno que se coloque em atividade de aprendizagem. Logo, os alunos devem ser movidos por motivos eficazes, que possibilitam a formação de sentido.

O estudante deve ser compreendido como sujeito da atividade de aprendizagem, participando de forma ativa na construção da sua aprendizagem e não somente como consumidor passivo dos conhecimentos apresentados pelo professor. Rigon, Asbahr e Moretti (2010, p. 31) destacam que “para que a aprendizagem aconteça, o estudante deve estar em atividade”. Contudo, para que se configure como atividade, ela deve ser realizada por ações planejadas intencionalmente pelo professor para satisfazer necessidades coletivas da turma e os motivos devem coincidir com a finalidade da ação (LONGAREZI; PUENTES, 2013).

Cedro (2008, p. 40) indica que, na atividade de aprendizagem, é realizado o movimento de ascensão do abstrato ao concreto que “permite não somente a apropriação dos conhecimentos teóricos, mas também o desenvolvimento da consciência, do pensamento teórico e de ações psíquicas vinculadas a este processo como a reflexão, a análise e o planejamento”.

Para que a aprendizagem seja efetiva, é preciso que os estudantes tenham consciência do conteúdo. A conscientização é o “sentido individual que para a criança toma um dado fenômeno, e não do conhecimento que ela tem deste fenômeno” (LEONTIEV, 2004, p. 321). Desse modo, para que haja uma compreensão pelo aluno, ele deve internalizar o significado e atribuir sentido ao que estuda (GRYMUZA; RÊGO, 2014).

Para um melhor entendimento, Grymuza e Rêgo (2014) retomam o exemplo apresentado por Leontiev (2004), citando um aluno que lê um determinado livro. Ele pode estar lendo o livro para aprender, para obter uma melhor nota ou porque seus pais mandaram. Mas, o que é de fato relevante é o sentido pessoal que este fenômeno acarreta para o aluno e não o que conhece do fenômeno. Portanto, é essencial que o professor tenha clareza do significado dos conteúdos científicos e possibilite a atribuição de sentido por parte dos alunos, de modo que os conhecimentos apropriados possam ser utilizados no cotidiano.

A partir do exposto, é significativa a contribuição de Asbahr (2005), ao afirmar que, como a significação social da atividade pedagógica do professor é possibilitar que os alunos se apropriem dos conhecimentos científicos, tendo como finalidade o desenvolvimento psíquico dos mesmos, compete a ele organizar sua prática para que seus objetivos sejam alcançados e, portanto. Em suma, é sua função planejar atividades de ensino.

Em nossa pesquisa, serão propostas situações de ensino, elaboradas a partir de uma intencionalidade pedagógica de possibilitar que os alunos se apropriem do conceito de função afim. Para isso, precisamos proporcionar as condições necessárias para que os alunos criem motivos eficazes para aprender, os quais mobilizarão suas ações com vistas a atender a necessidade de apropriação dos conceitos trabalhados. Ou seja, oportunizar que os alunos se coloquem em atividade de aprendizagem.

Pensando especificamente na atividade de ensino e na atividade de aprendizagem da Matemática, temos a contribuição de Manoel Oriosvaldo de Moura com a Atividade Orientadora de Ensino (AOE), sobre a qual discorreremos a seguir.

3.3 ATIVIDADE ORIENTADORA DE ENSINO

Pautada na Teoria Histórico-Cultural e na Teoria da Atividade, a Atividade Orientadora de Ensino (AOE), proposta inicialmente por Moura (1996b, 2017), considera a estrutura de atividade sugerida por Leontiev, “ao indicar uma necessidade (apropriação da cultura), um motivo real (apropriação do conhecimento historicamente acumulado), objetivos (ensinar e aprender) e propõe ações que considerem as condições objetivas da instituição escolar”

(MOURA *et al.*, 2010a, p. 217). Em vista disso, como atividade, a AOE se estrutura de modo que

[...] permita que sujeitos interajam, mediados por um conteúdo compartilhando significados, com o objetivo de solucionar coletivamente uma situação-problema [...]. A *atividade orientadora de ensino* tem uma necessidade: ensinar; tem ações: define o modo ou procedimentos de como colocar os conhecimentos em jogo no espaço educativo; e elege instrumentos auxiliares de ensino: os recursos metodológicos adequados a cada objetivo e ação (livro, giz, computador, ábaco, etc.). E, por fim, os processos de análise e síntese, ao longo da atividade, são momentos de avaliação permanente para quem ensina e aprende (MOURA, 2018, p. 159, grifo do autor).

Portanto, a AOE é um modo de organização do ensino que prevê o professor e o aluno em atividade, tendo o professor a necessidade de ensinar um conteúdo e o aluno de se apropriar dele. Nessa perspectiva, “seu conteúdo principal é o conhecimento teórico e seu objeto é a constituição do pensamento teórico do indivíduo no movimento de apropriação do conhecimento” (MOURA *et al.*, 2010b, p. 100).

Ambos os sujeitos, professor e aluno, em suas respectivas atividades de ensino e de aprendizagem, buscam promover o desenvolvimento humano por meio da apropriação dos conhecimentos teóricos (MOURA; SFORNI; LOPES, 2017). E, a organização do ensino considerando objetivos, ações e operações que compõem a atividade, conforme Moura *et al.* (2010b, p. 99), “dá à AOE a dimensão de unidade formadora do estudante e do professor, ao concretizarem a apropriação da cultura no contexto da educação escolar”.

Os autores supracitados destacam que é objetivo da AOE transformar o psiquismo do sujeito em atividade de aprendizagem. E salienta que, quando a AOE é planejada e desenvolvida levando em conta os elementos da atividade, tais como a necessidade, os motivos, os objetivos, as ações e as operações, sendo mediação, irá conduzir ao desenvolvimento do psiquismo dos sujeitos que a realizam (MOURA *et al.*, 2010b).

A palavra “orientadora” acrescentada ao conceito de atividade de ensino refere-se ao aspecto intencional de quem ensina e ressalta que tanto o professor quanto o aluno devem tornar-se sujeitos da atividade no seu processo de desenvolvimento (MOURA; SFORNI; LOPES, 2017). Logo, a atividade é orientadora, pois “é construída na inter-relação professor e estudante e está relacionada à reflexão do professor que, durante todo o processo, sente necessidade de reorganizar suas ações por meio da contínua avaliação que realiza” (MOURA *et al.*, 2010b, p. 101), tendo atingido por suas ações ou não os objetivos propostos.

Moura (2018) destaca que nem todo objeto de ensino é também de aprendizagem, portanto, o objeto de ensino deve ser transformado em objeto de aprendizagem e, para isso, é preciso que seja como uma necessidade para os estudantes. Dessa forma, o ensino organizado

a partir dos pressupostos da AOE visa gerar nos alunos a necessidade de apropriação dos conceitos, o que segundo Moura *et al.* (2010b), se efetiva na Situação Desencadeadora da Aprendizagem (SDA).

A SDA possibilita que os estudantes se envolvam ativa e coletivamente na busca por soluções de problemas, os quais devem considerar a essência dos conceitos e o seu surgimento, ou seja, a necessidade humana que levou a construção do conceito, como apareceram os problemas e necessidades e as soluções elaboradas ao longo da história (MOURA *et al.*, 2010b).

Portanto, assim como ocorreu no desenvolvimento histórico e social, a SDA “visa colocar a criança em tensão criativa, à semelhança daqueles que a vivenciaram, ao resolver seus problemas autênticos, gerados por uma necessidade de ordem prática ou subjetiva” (MOURA; ARAÚJO; SERRÃO, 2019, p. 422). Por isso, cabe ao professor propor situações de ensino que sejam semelhantes ao processo de surgimento do conceito, gerando sua necessidade.

As soluções dessas situações-problema propostas aos alunos devem ser realizadas na coletividade, por isso tais situações devem exigir o compartilhamento das ações para sua resolução (MOURA *et al.*, 2010b). Logo, não nos referimos a qualquer problema, mas sim, conforme Moura (2018), aos problemas desencadeadores de aprendizagem, que colocam o pensamento da criança em ação e partem de situações significativas para os estudantes. Assim, é preciso

[...] um problema que traga a essência da necessidade que levou a humanidade a criar o conceito a ser ensinado, o núcleo do conceito a ser apropriado. Esse problema deve contemplar a necessidade da humanidade que levou a sua construção, sendo que a solução conterá também a forma com que os homens foram se organizando para satisfazer essa necessidade. A situação desencadeadora de aprendizagem deve, ainda, ter o potencial para propiciar o aparecimento do motivo da aprendizagem, para desencadear a tensão criativa dos processos de aprendizagem no sujeito que se organiza para se apoderar de um conceito que considera relevante para si. Esta é a essência da situação desencadeadora de aprendizagem (MOURA; SFORNI; LOPES, 2017, p.91-92).

As SDA podem ser concretizadas, segundo Moura e Lanner de Moura (1998), na forma de jogo, situação emergente do cotidiano ou história virtual do conceito. Para os referidos autores, essa organização de ensino possibilita que os estudantes entrem em atividade.

Como bem apontam Moura e Lanner de Moura (1998), o jogo, baseado em uma proposta pedagógica, possibilita apresentar ao aluno uma situação-problema semelhante às vivenciadas pelo homem, quando lida com conceitos matemáticos, enquanto as situações emergentes do cotidiano podem possibilitar a abordagem de problemas significativos para os alunos. Já a história virtual do conceito se refere a situações problemas semelhantes às aquelas que levaram ao surgimento dos conceitos a partir de necessidades.

Levando em consideração o exposto, destacamos que a AOE possui características de “fundamento para o ensino e é também fonte de pesquisa sobre o ensino. Assim, profissionais pesquisadores podem usar sua estrutura para identificar motivos, necessidades, ações desencadeadas e sentidos atribuídos pelos sujeitos no processo de ensino” (MOURA *et al.*, 2010b, p. 109).

Nesse sentido, a AOE é indispensável para a realização da presente pesquisa, pois fundamentou a elaboração e a organização de situações de ensino a serem desenvolvidas com os alunos e será considerada na busca pela identificação de possíveis motivos, necessidades, ações desenvolvidas e sentidos pessoais atribuídos pelos alunos durante o desenvolvimento da pesquisa.

Esta é a perspectiva adotada para a organização das ações com os alunos nesta pesquisa, incluindo a elaboração das situações de ensino que, potencialmente, poderiam ser desencadeadoras de aprendizagem e o desenvolvimento delas com a turma do primeiro ano do Ensino Médio, possibilitando a produção do material empírico. Para isso, é importante compreender como se deu o surgimento do conceito de função e seu desenvolvimento, bem como as orientações curriculares que orientam o ensino da função afim no contexto escolar. Tais elementos são apresentados no capítulo a seguir.

4 FUNÇÃO AFIM: APROXIMAÇÃO AO CONCEITO

O conceito matemático de função afim recebe destaque em nossa pesquisa, tendo em vista que a organização das situações de ensino elaboradas tem como intencionalidade possibilitar as condições necessárias para a apropriação deste conceito por alunos, considerando sua relação com a proporcionalidade e os nexos conceituais da álgebra. Portanto, na sequência voltamos para o movimento lógico-histórico do conceito de função.

4.1 MOVIMENTO LÓGICO-HISTÓRICO DO CONCEITO DE FUNÇÃO

Neste capítulo nos aproximamos do movimento lógico-histórico do conceito de função, a partir da compreensão das necessidades que levaram ao surgimento da álgebra e seu desenvolvimento, bem como seus nexos conceituais. Compreender o movimento lógico-histórico do conceito é indispensável para organizar o ensino com base na AOE.

A função é um dos muitos conceitos científicos matemáticos que surgiram por meio da construção humana, com vistas a atender necessidades em determinado momento histórico, e que foram desenvolvidos, validados e sistematizados. Por ser essencial, integra o currículo escolar de Matemática da Educação Básica, mais especificamente no campo da álgebra, como um dos conceitos a serem ensinados aos estudantes, com a intenção de possibilitar que eles se apropriem de conhecimentos já produzidos e se desenvolvam com vistas à sua humanização.

Tanto o campo da álgebra quanto o de outros conhecimentos matemáticos foram elaborados historicamente por indivíduos de diversas civilizações em diferentes épocas para atender as necessidades expostas pela experiência prática e de seu próprio desenvolvimento como ciência sendo seus símbolos a possibilidade de representação e concretização para comunicação de seus conceitos bem como que seus processos de generalização e abstração (SOUSA; PANOSSIAN; CEDRO, 2014, p. 32).

Destacamos que são as necessidades que surgem ou são criadas ao longo do tempo que levam o ser humano a buscar soluções e, assim, podem promover a construção de novos conhecimentos. Estas necessidades podem ter diferentes origens, como as *necessidades básicas*, inatas aos sujeitos e que se referem à sua sobrevivência como espécie e organização da vida em sociedade, *necessidades criadas* pelos próprios homens para seu desenvolvimento e satisfação pessoal ou coletiva, e *necessidades internas* da ciência ou de outras ciências.

Os conceitos científicos matemáticos são produções humanas e possuem um desenvolvimento histórico, a partir da necessidade que levou ao seu surgimento, sua evolução ao longo do tempo e como se encontram atualmente. No entanto, eles não estão finalizados, pois a matemática está em constante evolução.

Assim, os conhecimentos matemáticos não foram entregues aos humanos como verdades absolutas e acabadas, mas sim, foram e continuam sendo construídos pela humanidade, possibilitando seu desenvolvimento. Nesse processo, a ciência Matemática “passa por momentos de dúvidas e incertezas, momentos de força e de fraqueza. São muitos os produtos originados dessa forma de conhecimento, conceitos formados e descartados, conceitos elaborados e reelaborados” (SOUSA; PANOSSIAN; CEDRO, 2014, p. 15)

Destarte, é possível compreender que a construção dos conhecimentos matemáticos não acontece de forma linear e simples, e que, ao se deparar com uma necessidade, um indivíduo rapidamente elabora um conceito para satisfazê-la. Mas sim, que este processo pode ser lento e ser validado após muitas tentativas descartadas.

Os conhecimentos matemáticos têm história e conhecê-la é importante para compreender sua relevância na evolução humana e fundamental para a organização do ensino visando possibilitar o desenvolvimento do sujeito a partir da apropriação do conhecimento, pois, para organizar o ensino de conceitos científicos com vistas ao desenvolvimento humano, é preciso que o professor saiba sua essência. Ele é válido para o campo da Álgebra, pois,

[...] para compreender a linguagem algébrica e também a criação e o uso do sistema simbólico algébrico e o desenvolvimento da linguagem em suas complexidades e contradições, é necessário entender seu movimento histórico e sua essência revelada pelo movimento do pensamento (lógico) (SOUSA; PANOSSIAN; CEDRO, 2014, p. 117).

Portanto, para organizar o ensino dos conceitos, cabe tomar conhecimento do seu movimento lógico-histórico. Segundo Kopnin (1978), esta unidade – lógico-histórico – é indissociável. Mas o que é o movimento lógico-histórico do conceito?

Para Kopnin (1978, p. 183), histórico é “o processo de mudança do objeto, as etapas de seu surgimento e desenvolvimento. O histórico atua como objeto do pensamento, o reflexo do histórico, como conteúdo”. Assim, refere-se à própria história do conceito, seu surgimento e desenvolvimento em determinados contextos sociais. Enquanto o lógico é o meio pelo qual o pensamento visa reproduzir o processo histórico real em toda sua objetividade, complexidade e contrariedade. “É a reprodução da essência do objeto e da história do seu desenvolvimento no sistema de abstrações” (KOPNIN, 1978, p. 183-184).

Como nosso foco está na função afim, que se constituiu a partir da organização lógico-histórica da álgebra, passamos a discutir sobre alguns elementos históricos sobre a álgebra, seu ensino e os nexos conceituais importantes e relacionados, também, à função afim.

4.1.1 História da Álgebra

Nesta seção queremos compreender questões como: como surgiu a Álgebra? Os símbolos que conhecemos hoje já eram utilizados desde seu surgimento? Como foi seu processo de desenvolvimento ao longo da história?

A álgebra surgiu a partir das necessidades humanas, que se tornavam cada vez mais complexas, à medida que a humanidade evoluía com a elaboração de novos conhecimentos. Este ciclo proporcionou uma rápida evolução até chegar na contemporaneidade. Da mesma forma, continuamos nosso processo evolutivo, criando e satisfazendo novas necessidades.

A linguagem algébrica não surgiu diretamente com uso de símbolos, pois se desenvolveu ao longo da história de diferentes maneiras. Segundo Sousa (2004), na álgebra retórica eram utilizadas palavras; na álgebra geométrica, figuras; na álgebra sincopada, a variável numeral com abreviações de palavras e somente na álgebra simbólica passaram a ser utilizadas as letras como variáveis.

As álgebras retórica, geométrica e sincopada são conhecidas como não simbólicas. Mas, é a linguagem da álgebra simbólica que está presente no ensino de Matemática da Educação Básica atualmente. Segundo Baumgart (1992), ainda hoje não há uma total uniformidade no uso dos símbolos, pois alguns não são utilizados com o mesmo significado em todos os países. Como, por exemplo, o uso de ponto ou vírgula para separar a parte inteira da parte decimal de um número, em que “os americanos escrevem ‘3.1416’ como aproximação de π , e muitos europeus escrevem ‘3,1416’.[...] Em alguns países europeus ‘+’ significa ‘menos’.” (BAUMGART, 1992, p. 3).

Como conta Baumgart (1992), provavelmente foi na Babilônia que a álgebra teve origem e nessa região era utilizado o estilo retórico. Ressaltamos que, como o termo álgebra tem origem árabe, nesta época o termo ainda não existia. A Babilônia situava-se na região da Mesopotâmia, seus habitantes eram chamados babilônicos e foram uma das mais importantes civilizações da história. A álgebra babilônica tinha certo grau de sofisticação, e diversos problemas matemáticos, em escrita cuneiforme, foram encontrados em tábuas de argila, que remontam a cerca de 1700 a. C. (BAUMGART, 1992).

Para mostrar o grau de sofisticação, Baumgart (1992) cita o exemplo da resolução de um sistema com duas equações, o qual, atualmente, resolveríamos utilizando o método da substituição. Segundo o autor, os babilônicos tinham conhecimento da resolução de sistemas pelo método da substituição, entretanto, com frequência preferiam fazer uso do seu método

paramétrico, no qual, a partir de uma notação moderna, adotavam x e y em função de uma nova incógnita, ou seja, um parâmetro.

Quase que concomitantemente ao surgimento da álgebra na Babilônia, segundo Baumgart (1992), surgia também a álgebra no Egito, entretanto, esta não possuía os mesmos métodos sofisticados e um sistema de numeração relativamente primitivo. Estes povos utilizavam a álgebra retórica, cujos registros se encontram no Papiro Moscou e no Papiro Rhind, há cerca de 1850 a. C. e 1650 a. C.

A álgebra grega utilizada era a geométrica, que foi formulada pelos pitagóricos (c. 540 a. C.) e por Euclides (c. 300 a. C.). Eles seguiam em grande parte o mesmo método de resolução de problemas dos babilônicos, no entanto utilizavam segmentos de retas e áreas, e ilustravam na forma de figuras. A álgebra dos gregos primitivos era geométrica, pois eles possuíam “dificuldades conceituais com frações e números irracionais” (BAUMGART, 1992, p. 8), por isso tratavam as frações como razões entre inteiros e não superavam a dificuldade com números como $\sqrt{2}$.

Baumgart (1992) explica que, alguns séculos depois, um matemático grego, conhecido como Diofanto, introduziu a álgebra sincopada, dando início a um simbolismo moderno que fazia uso de abreviações de palavras, mas também utilizava a abordagem paramétrica em seus estudos.

Este autor fala, também, sobre a álgebra hindu e árabe. Sobre a álgebra hindu relata que não há muitos registros antigos, anteriores a V d.C e que Brahmagupta (c. 628) e Bhaskara (c. 1150) foram matemáticos muito importantes e se destacaram nos estudos de equações. No entanto, após as contribuições de Bhaskara, não houve progresso na matemática hindu até os tempos modernos. Em relação à álgebra árabe, com a conquista da Índia, Pérsia, Mesopotâmia, Norte da África e Espanha, conforme Baumgart (1992), eles tiveram acesso aos escritos científicos dos gregos e hindus, e se apropriaram dos conhecimentos como o sistema de numeração hindu. A partir disso, sua álgebra, que inicialmente era tratada por palavras, passou a ser tratada numérica e geometricamente.

Para alguns historiadores, não houve muita contribuição dos árabes na evolução da álgebra, contudo, são considerados fundamentais na preservação dos estudos gregos e hindus durante o período da Idade Média, a partir de suas traduções. Além do mais, foram os árabes os principais responsáveis por levar a álgebra à Europa, com forte influência hindu.

Na Europa, de acordo com Baumgart (1992), a álgebra iniciou seu desenvolvimento nas cidades comerciais da Itália, possibilitando o surgimento de um simbolismo moderno por volta de 1500. Os matemáticos cujos estudos ganharam destaque foram inicialmente Fibonacci na

popularização dos numerais hindu-arábicos (século XIII); após, Niccolo Tartaglia e Girolamo Cardano (século XVI) com soluções para equações cúbicas; Ludovico Ferrari na resolução de equação quártica geral; François Viète (século XVII), que introduziu letras como coeficientes genéricos; e René Descartes (século XVII) que contribuiu para a geometria analítica plana e para o aprimoramento do simbolismo algébrico, entre muitos outros.

Ao observar semelhanças entre as diferentes álgebras pensadas e utilizadas pelos diversos povos, Sousa, Panossian e Cedro (2014, p. 102) constataram em todas elas “a busca de resolver problemas do dia a dia que envolvem movimentos regulares”. Entretanto, segundo os referidos autores, somente no século XVI o estudo do movimento ganhou destaque, proporcionando condições para o desenvolvimento dos conceitos de variável e função.

Após a metade do século XVII, a álgebra simbólica passou a ser como um conhecimento científico e, no século XIX, a matemática passou a ter uma abordagem mais formalista. Em relação ao conceito de função, sua essência “como instrumento para o estudo das leis quantitativas é a correspondência de dois conjuntos. A variável na condição de conceito se constitui como a possibilidade de representar simbolicamente os elementos destes conjuntos” (SOUSA; PANOSSIAN; CEDRO, 2014, p. 115).

Baumgart (1992) relata estudos sobre o processo histórico do conceito de função que creditam ao babilônicos uma definição operacional de função, por volta de 2000 a.C., a partir da utilização de tabelas e correspondência. Mas, indica que ideias mais explícitas do conceito tiveram início por volta de 1637 com René Descartes (na sua obra *A Geometria*) que se referia a qualquer potência de x . Assim, ao longo dos anos, outros matemáticos passaram a utilizar o conceito de função, mas com diferentes entendimentos, possibilitando transformações e a elaboração do conceito que conhecemos atualmente.

Para Leibniz, cerca de 1692, a função era qualquer quantidade associada a uma curva. Já, para Bernoulli, em 1718, a função era qualquer expressão que envolvia uma variável e constantes. Euler, por volta de 1750, utilizava a função como expressão analítica ou representada por uma curva e introduziu a notação $f(x)$. Lagrange, em aproximadamente 1800, restringiu a função a uma representação em série de potências. Para Fourier, em 1822, a função arbitrária poderia ser representada por uma série trigonométrica. Enquanto Cantor ampliou a definição de função a partir de pares ordenados de elementos (BAUMGART, 1992).

É importante conhecer os avanços no desenvolvimento dos conceitos como a função e seu movimento histórico, entretanto significativo também é entender como acontece o processo de aprendizagem deles, isto é, como o sujeito se apropria deste conhecimento, seu movimento

lógico. Assim, passamos a explicitar ideias importantes relacionadas ao ensino de conceitos algébricos.

4.1.2 Ensino da Álgebra e nexos conceituais

A Álgebra está presente no currículo escolar da Educação Básica, nas diferentes etapas de escolaridade, mas com níveis de complexidade diferentes, como explicitaremos posteriormente sobre suas indicações na Base Nacional Curricular Comum (BNCC) de 2017 e no Referencial Curricular do Rio Grande do Sul (RCRGS) de 2009. Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) destacam que alguns aspectos da álgebra podem ser desenvolvidos nas séries iniciais, mas são ampliados nas séries finais do Ensino Fundamental e no Ensino Médio (BRASIL, 1998).

Embora a álgebra tenha um papel relevante para o desenvolvimento psicológico dos estudantes, conforme Sousa, Panossian e Cedro (2014), precisamos proporcionar que estes sujeitos reconheçam por si próprios sua importância, promovendo uma ressignificação dos conhecimentos algébricos.

Os conceitos algébricos na condição de conceitos científicos, no dizer de Vigotski (1934[2001]) têm uma linha de desenvolvimento diferente dos conceitos espontâneos. Dificilmente serão apropriados pelas vias de formação do pensamento empírico, pois não se sustentam em características visíveis e palpáveis. É necessário compreender os conceitos algébricos dentro de um sistema de conceitos inter-relacionados atribuindo significado aos seus símbolos, compreendendo os processos de generalização realizados (SOUSA; PANOSSIAN; CEDRO, 2014, p. 18)

Portanto, é preciso compreender as diferentes concepções da álgebra, apresentadas por Usiskin (1995), conforme a importância atribuída às variáveis: como aritmética generalizada, na qual as variáveis são entendidas como generalizadoras de modelos; como um estudo de procedimentos para resolver certos problemas e as variáveis são entendidas como incógnitas ou constantes; como estudo de relações entre grandezas, sendo as variáveis concebidas como um argumento ou parâmetro e como estudo das estruturas e as variáveis são entendidas como sinais arbitrários no papel.

O conceito de função se destaca na concepção de álgebra como estudo de relações entre grandezas, pois as variáveis de fato variam e podem ser dependentes e independentes. A generalização de padrões e o estudo da variação de grandezas proporciona a abordagem da noção de função nos anos finais do Ensino Fundamental, mas sua abordagem formal será tratada no Ensino Médio (BRASIL, 1998).

O ensino de conceitos algébricos pode ser desafiador para professores e alunos da Educação Básica, portanto, corroborando Sousa, Panossian e Cedro (2014), o ensino não deve se pautar somente no seu formalismo e em suas aplicações na realidade objetiva. Então,

Tendo como base o entendimento de que a álgebra descreve os movimentos da prática social, ou seja, da vida, propomos que o ponto de partida das aulas seja o estudo de conceitos de movimento, fluência, número e álgebra não simbólica; variável e campo de variação presentes na vida fluente (SOUSA; PANOSSIAN; CEDRO, 2014, p. 43).

Estes são denominados nexos conceituais do conhecimento algébrico, que, segundo Davýdov (1982), correspondem aos nexos internos do conceito, os quais podem possibilitar a construção do pensamento teórico e compõem o lógico-histórico do conceito. Enquanto os nexos externos são elementos perceptíveis do conceito e são formais. De acordo com Sousa (2004), os nexos internos mobilizam mais o movimento do aprendente, enquanto os nexos externos são uma linguagem de comunicação do conceito em seu estado formal.

Conforme Sousa, Panossian e Cedro (2014), os nexos conceituais da álgebra são lógicos e históricos, podem fazer ligações entre conceitos e nunca estão prontos e acabados. Para os autores, “a conexão entre os nexos conceituais da álgebra: fluência, campo de variação e variável formam o conceito de álgebra” (SOUSA; PANOSSIAN; CEDRO, 2014, p. 121).

Dessa forma, nexo conceitual é definido como o “elo de ligação entre as formas de pensar o conceito, que não coincidem, necessariamente, com as diferentes linguagens do conceito” (SOUSA, 2004, p. 62). Assim, os nexos conceituais são fundamentais para organizar o ensino de conceitos algébricos e ampliam as possibilidades de compreender a essência dos conceitos. Como no caso do conceito de função que possui como nexos externos o domínio, a imagem, a lei de formação, a representação gráfica e os pontos notáveis como a raiz e a intersecção com o eixo das ordenadas. Estes, juntamente com os nexos internos de fluência, variável, campo de variação e dependência, podem possibilitar a apropriação do conceito de função em sua essência.

A fluência, de acordo com Caraça (1951), é uma característica da realidade em que vivemos e refere-se à compreensão de que tudo se transforma o tempo todo, tudo flui. “De tal modo que nem a própria frase ‘o que é agora’ tem significado real; - durante o tempo que ela levou a pronunciar, ou a escrever, o processo de evolução actuou e a Terra transformou-se” (CARAÇA, 1951, p. 110). Nada é estável, permanente, imutável. Tudo está em movimento, seja ele irregular ou regular. Os movimentos regulares podem ser descritos na forma de função, e as grandezas envolvidas na relação de dependência podem ser representadas por variáveis, pois

A variável é a substância da função. É a própria fluência. O próprio movimento do pensamento. É ela que permite ao pensamento alçar vôos desconhecidos, inimagináveis, a partir do estudo de movimentos qualitativos, quer esses movimentos sejam regulares ou irregulares, os quais se apresentam em nosso universo (SOUSA, 2004, p. 156).

Sua existência associa-se a um campo de variação, o qual define os possíveis valores que podem ser assumidos pela variável em determinado contexto. “O campo de variação depende diretamente do movimento da realidade tratada. Não há uma resposta pronta e absoluta, embora boa parte dos movimentos da realidade pareça ocorrer no campo dos números reais” (SOUSA, 2004, p. 158).

Para Sousa (2004, p. 61), “os nexos conceituais que fundamentam os conceitos, contêm a lógica, a história, as abstrações, as formalizações do pensar humano no processo de constituir-se humano pelo conhecimento”. Dessa forma, sua compreensão pelos alunos é fundamental para a apropriação dos conceitos algébricos, como a função.

Além de compreender o movimento lógico-histórico do conceito de função, através da história da álgebra, do mesmo modo é fundamental verificar como a função afim e sua relação com a proporcionalidade são abordadas nas orientações curriculares. Dessa forma, na sequência tratamos da função afim no contexto da Educação Escolar.

4.2 FUNÇÃO AFIM E PROPORCIONALIDADE NO CONTEXTO DA EDUCAÇÃO ESCOLAR

O estudo das funções está contemplado no currículo de matemática da Educação Básica, isso porque ele é fundamental para a formação dos estudantes, já que possibilita uma melhor compreensão de diferentes transformações e mudanças que ocorrem em diversos contextos. O conceito de função pode ser definido, conforme Caraça (1951, p. 129):

Definição: - Sejam x e y duas variáveis representativas de conjuntos de números; diz-se que y é função de x e escreve-se: $y = f(x)$ Se entre as duas variáveis existe uma correspondência unívoca no sentido $x \rightarrow y$. A x chama-se variável independente, a y variável dependente.

Desse modo, para cada elemento do conjunto dos valores de x , há apenas um correspondente em y . E, ao alterar a variável independente (x) haverá uma mudança na variável dependente (y). Essa ideia vai ao encontro de Van de Walle (2009, p. 287), ao afirmar que “As funções são relações ou regras (leis) que associam exclusivamente os membros de um conjunto com os membros de outro conjunto”.

Então, as funções expressam a relação de dependência entre grandezas e, dependendo da forma como essa relação é estabelecida, podem ser classificadas como função afim ou função polinomial do 1.º grau, função quadrática ou função polinomial do 2.º grau, função exponencial, função logarítmica, função modular, função definida por mais de uma sentença, funções trigonométricas, entre outras.

No caso da função afim, segundo Iezzi e Murakami (2013, p. 100), “Uma aplicação de \mathbb{R} em \mathbb{R} recebe o nome de função afim quando a cada $x \in \mathbb{R}$ associa sempre o mesmo elemento $(ax + b) \in \mathbb{R}$, em que $a \neq 0$ e b são números reais dados”. A partir desta definição, os autores destacam que “para $b = 0$, a função afim $y = ax + b$ se transforma na função linear $y = ax$; podemos, então, dizer que a função linear é uma particular função afim” (IEZZI; MURAKAMI, 2013, p. 100).

Nesta pesquisa, levando em conta o entendimento de função linear como uma particular função afim, consideramos o ensino da função afim e o estabelecimento de relações com a proporcionalidade. Em sendo assim, cabe agora ver como esse conceito é abordado nos documentos que normatizam e orientam o ensino na Educação Básica, em específico, a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) e o Referencial Curricular do Rio Grande do Sul (RCRGS).

A BNCC é um documento de caráter normativo, que está em vigor em todo o Brasil desde 2017 e que define as aprendizagens essenciais para o desenvolvimento dos estudantes da Educação Básica. Portanto, é importante observar como o conceito de função afim¹⁹ é abordado neste documento que, atualmente, rege o ensino das diferentes disciplinas escolares.

Inicialmente, destacamos que a função afim é abordada na unidade de conhecimento da Álgebra. De acordo com a BNCC (BRASIL, 2017), algumas dimensões dela, como regularidade, generalização de padrões e propriedades da igualdade, devem estar presentes nos processos de ensino e aprendizagem desde os Anos Iniciais do Ensino Fundamental.

O documento indica que a noção intuitiva do conceito de função pode ser explorada a partir da resolução de problemas que envolvem a variação proporcional direta entre duas grandezas, entretanto, sem fazer o uso da regra de três. Como exemplo, cita o problema: “Se com duas medidas de suco concentrado eu obtenho três litros de refresco, quantas medidas desse suco concentrado eu preciso para ter doze litros de refresco?” (BRASIL, 2017, p. 270).

Para os Anos Finais do Ensino Fundamental, é indicado que os estudos sejam ampliados e aprofundados, possibilitando compreender os diferentes significados das variáveis numéricas

¹⁹ Na BNCC, o termo Função Afim não é utilizado, pois é apresentado como Função Polinomial do 1.º grau.

em expressões, generalizar propriedades, investigar regularidades, indicar o valor desconhecido na sentença algébrica e estabelecer a variação entre duas grandezas (BRASIL, 2017). Assim, os estudantes precisam estabelecer relações entre a variável e a função e entre a incógnita e a equação.

Compreender função como relação de dependência unívoca entre duas variáveis e suas representações numérica, algébrica e gráfica, é um aspecto abordado na BNCC em habilidade proposta para o 9.º ano do Ensino Fundamental. Enquanto no Ensino Médio, isso é aprofundado na habilidade

(EM13MAT501) Investigar relações entre números expressos em tabelas para representá-los no plano cartesiano, identificando padrões e criando conjecturas para generalizar e expressar algebricamente essa generalização, reconhecendo quando essa representação é de função polinomial de 1º grau (BRASIL, 2017, p. 541)

O RCRGS referente à Matemática e suas Tecnologias (RIO GRANDE DO SUL, 2009), documento que orienta o ensino de conceitos matemáticos na Educação Básica no estado, apresenta a função inserida no bloco de conteúdo Álgebra e funções, além dos demais blocos de conteúdos: Números e Operações, Geometria e medida, e Tratamento da informação.

Os blocos contemplam os conceitos que estruturam a Matemática e, conforme o documento, devem ser trabalhados em níveis crescentes de complexidade. Logo, os conceitos são propostos desde o Ensino Fundamental até o Ensino Médio, entretanto, inicialmente sua abordagem é mais intuitiva e, ao longo dos anos, sua complexidade vai sendo ampliada.

Conforme Van de Walle (2009), uma vez que a definição de função pode ser um pouco formal para os estudantes do Ensino Fundamental, podem ser utilizadas situações contextualizadas em que a mudança de algo (variável independente) provoque uma mudança correspondente em outra coisa (variável dependente). As funções, de acordo com o referido autor, possibilitam uma melhor compreensão das mudanças nos diferentes contextos.

Para exemplificar, Van de Walle (2009, p. 303) relata que “A altura de uma muda de feijão muda como o número de dias decorridos desde que brotou. A altura da muda de feijão é uma função dos dias em que ela cresceu”. De mesmo modo, reforça que são infinitos os exemplos que apresentam uma relação funcional em contextos do cotidiano, sendo essa relação de correspondência dependente.

Para o autor, os padrões crescentes são bons para exemplificar funções nos Anos Finais do Ensino Fundamental, pois ampliam a ideia de procurar e expandi-los. Assim, é preciso que os estudantes aprendam a encontrar uma regra geral ou relação funcional e a recursiva no padrão, o que geralmente é mais fácil em uma relação linear.

O RCRGS não considera o ensino da função afim, especificamente, durante a etapa do Ensino Fundamental, apenas contempla a noção intuitiva de função, de dependência entre grandezas, no estudo de outros conceitos. Como, por exemplo, no estudo do termo geral de uma sequência observando suas regularidades, no estudo da área de uma figura plana como o quadrado em função da medida do seu lado, no uso da linguagem algébrica para expressar relações entre grandezas e modelar situações-problema.

Quanto à etapa do Ensino Médio, mais especificamente no primeiro ano, o RCRGS orienta a introdução do conceito intuitivo de função por meio do estudo de tabelas, gráficos e sequências de figuras e números, identificando regularidades, generalizações e considerando diferentes contextos do cotidiano. Dessa forma, aponta que, no estudo de um fenômeno, é possível tentar estabelecer relações entre as grandezas envolvidas. “Se duas grandezas x e y estão relacionadas de tal forma que para cada valor atribuído a x existe, em correspondência, um único valor associado a y , então dizemos que y é uma função de x ” (RIO GRANDE DO SUL, 2009, p. 210).

Quanto à função afim, explica que possui como “domínio o conjunto dos Números Reais (\mathbb{R}) ou um subconjunto de \mathbb{R} . Correspondem às relações entre a variável dependente e a independente expressas por polinômios de 1º grau, portanto da forma $y = ax + b$ com $a \neq 0$ ” (RIO GRANDE DO SUL, 2009, p. 213). Para introduzir seu estudo, o documento sugere o uso de problemas que necessitem de tabela e gráfico para sua solução, proporcionando uma compreensão visual do conceito.

Existem cinco representações de funções: “(1) o próprio padrão concreto que podemos nos referir como o contexto; (2) o quadro ou tabela; (3) a equação simbólica; (4) o gráfico e (5) a linguagem” (VAN DE WALLE, 2009, p. 303). Estes incorporam as mesmas relações funcionais e recursivas e são utilizadas para todas as funções.

Van de Walle (2009, p. 307) ressalta que cada uma das representações é um modo de olhar para a função e fornece modos diferentes de pensar acerca da função e compreendê-la.

O contexto fornece uma incorporação da relação fora do mundo da matemática. A linguagem ajuda a expressar a relação de uma maneira significativa e útil. As tabelas explicitamente associam elementos selecionados que são emparelhados pela função. A relação funcional é implícita no emparelhamento dos números. O gráfico traduz os pares de números em uma imagem. Qualquer ponto no gráfico de uma função tem duas coordenadas. A função é a regra que relaciona a primeira coordenada à segunda. A equação expressa a mesma relação funcional com a economia e o potencial do simbolismo matemático.

Além do mais, o autor afirma que nem toda função possui um contexto no mundo real, entretanto, é importante considerar aqueles que façam sentido aos estudantes. “O contexto dá

significado ao gráfico e o gráfico acrescenta mais compreensão ao contexto” (VAN DE WALLE, 2009, p. 306). É preciso observar no gráfico quais valores fazem sentido, como os números negativos, decimais ou valores exagerados.

O estudo da função afim, além de considerar diferentes contextos, pode viabilizar o estabelecimento de relações com outros conceitos matemáticos como a proporcionalidade, já que “Muitas relações envolvendo taxas ou proporções oferecem uma oportunidade valiosa para examinar funções” (VAN DE WALLE, 2009, p. 310). Nesse sentido, corroborando Soares (2016), as situações com variáveis proporcionais podem servir de base ao trabalho com a função linear.

A proporcionalidade é abordada na BNCC como uma das ideias fundamentais que articulam os diferentes campos da Matemática, juntamente com equivalência, ordem, interdependência, representação, variação e aproximação. Estas, segundo o documento, são relevantes para o desenvolvimento do pensamento matemático dos estudantes e devem ser convertidas em objetos de conhecimentos.

Por exemplo, a proporcionalidade “deve estar presente no estudo de: operações com os números naturais; representação fracionária dos números racionais; áreas; funções; probabilidade etc.” (BRASIL, 2017, p. 268). Assim, a proporcionalidade não pode ser reduzida ao estudo de uma regra prática de resolução, conhecida como regra de três.

A proporcionalidade é citada na BNCC em habilidades propostas para o 9.º ano do Ensino Fundamental, tanto de relações de proporcionalidade direta como inversa entre duas ou mais grandezas, considerando diferentes contextos. Nas habilidades propostas para o Ensino Médio, a proporcionalidade está associada ao estudo da função afim, a partir da habilidade de:

(EM13MAT401) Converter representações algébricas de funções polinomiais de 1º grau em representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais o comportamento é proporcional, recorrendo ou não a *softwares* ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica. (BRASIL, 2017, p. 539)

Já no RCRGS, a proporcionalidade é considerada um conceito estruturador no estudo de outros conceitos, como grandezas e medidas, homotetias, semelhança de figuras planas e funções. No entanto, o documento não se refere à proporcionalidade tampouco à função linear, ao abordar as orientações do ensino da função afim.

Conforme Soares (2016, p. 42-43), a proporcionalidade é um conceito formador e integrador da Matemática. Formador,

[...] porque possibilita o desenvolvimento de estruturas cognitivas fundamentais para a aprendizagem desta área do conhecimento, além disso, conceitos, procedimentos e ideias matemáticas tem sua natureza relacionada a ele. Integrador porque potencializa

a conexão entre os diferentes campos da matemática e seus conceitos, procedimentos e ideias.

Uma de suas principais conexões diz respeito à função afim, especificamente à função linear, pois, “A relação de proporcionalidade directa entre duas variáveis pode ser formalmente representada como uma igualdade entre duas razões $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ (sendo a e c valores de uma variável e b e d valores de outra variável) ou como função linear $y = mx$, com $m \neq 0$ ” (SILVESTRE; PONTE, 2012, p. 76). Logo, é fundamental que se estabeleça essa relação nas aulas de Matemática.

Quanto à representação gráfica, “Toda situação proporcional dá lugar a uma função linear (linha reta) com um gráfico que passa pela origem. A relação constante na proporção é a inclinação do gráfico” (VAN DE WALLE, 2009, p. 288). Assim, é possível relacionar as representações algébricas e gráficas, em que o coeficiente angular “ m ” corresponde a constante de proporcionalidade.

O desenvolvimento do raciocínio proporcional pelos estudantes é essencial para sua formação, já que são muitas as situações cotidianas em que este conhecimento poderá ser necessário. Para que esse seja desenvolvido, o ensino da proporcionalidade não pode ser reduzido à resolução prática da regra de três e de forma isolada de outros conceitos.

É importante que os estudantes sejam capazes de estabelecer conexões entre os conceitos matemáticos para que a aprendizagem ocorra e que eles possam atribuir sentido ao que aprendem. Como contraposição a isto, há de se pensar em um ensino não fragmentado e uma organização do ensino que permita estabelecer relações entre os conceitos. Daí concluirmos sobre a relevância de que a relação entre a proporcionalidade e a função afim, particularmente a função linear, seja explicitada na organização do ensino, podendo contribuir para uma melhor compreensão da relação de dependência entre grandezas diretamente proporcionais.

No próximo capítulo indicamos os caminhos percorridos pela pesquisa, desde os estudos realizados, com vistas a compreender a temática e orientar as ações a serem desenvolvidas, e as etapas de execução, incluindo a apreensão da realidade até a análise do material empírico produzido que viabiliza desvelar os resultados.

5 METODOLOGIA: CAMINHOS DA PESQUISA

A Educação Escolar tem grande importância para a constituição humana dos estudantes, a partir das relações sociais e da apropriação dos conhecimentos historicamente produzidos, especialmente os conhecimentos teóricos. As pesquisas desenvolvidas neste campo educacional são muitas e se diferem das demais, pois “pesquisar em Educação significa investigar questões relacionadas aos seres humanos em seu próprio processo de humanização” (CEDRO; NASCIMENTO, 2017, p. 13).

A Teoria Histórico-Cultural, baseada no Materialismo Histórico-dialético de Karl Marx, fundamenta nossa pesquisa e, portanto, será considerado o seu método de investigação. Dessa forma, “o fenômeno estudado deve ser apresentado de tal modo que permita a sua apreensão em sua totalidade” (CEDRO; NASCIMENTO, 2017, p. 27).

De acordo com Araújo e Moraes (2017), a pesquisa em Educação tem como objeto central a Atividade Pedagógica, entendida na perspectiva da educação escolar, cuja finalidade é desenvolver as máximas capacidades humanas nos sujeitos a partir da apropriação dos conhecimentos teóricos. Para tanto, é necessário o conhecimento do movimento lógico-histórico dos conceitos e os modos de ação para a apropriação deles pelos estudantes.

São diversos os aspectos particulares acerca do objeto particular da pesquisa, abordados nas investigações. A pesquisa em Educação, mais especificamente em Educação Matemática, considera os processos de ensino e aprendizagem como fundamentais na formação humana. Tem como objeto particular a aprendizagem de conhecimentos matemáticos sobre função afim pelos estudantes com vistas ao desenvolvimento das funções psicológicas superiores.

Nessa perspectiva, temos como problema de pesquisa: no que se refere à organização do ensino de função afim no Ensino Médio alguns elementos podem ser essenciais para a aprendizagem dos estudantes? Para respondê-lo, definimos como objetivo geral: investigar elementos que se mostram como essenciais para o processo de aprendizagem do conceito de função afim de estudantes de uma turma do Ensino Médio. Sendo assim, para atingirmos o objetivo geral, determinamos as seguintes ações investigativas:

- estudar o movimento lógico-histórico do conceito de função e sua presença nas orientações curriculares;
- identificar elementos que contribuem para a apropriação dos nexos conceituais da função afim;
- analisar situações de ensino que podem desencadear a aprendizagem do conceito de função.

O problema de pesquisa está voltado ao estudo de um objeto, a aprendizagem do conceito de função afim, que surge de uma necessidade social de apropriação dos conhecimentos historicamente produzidos. O referido problema converte-se em motivo e impulsiona a realização da atividade de pesquisa, portanto o motivo é orientado a um objeto. E “Essa é a dimensão orientadora da pesquisa como atividade”, como bem lembram Araújo e Moraes (2017, p. 57).

Assim, a pesquisa se concretiza como uma atividade, que possui como características: “conter a síntese de um projeto coletivo; ter uma necessidade coletiva; ter um plano de ação coordenado; coincidir motivo com objeto e, sobretudo, ser dos sujeitos” (ARAÚJO; MORAES, 2017, p. 56). Cabe destacar que a dimensão orientadora define, segundo as autoras supracitadas, as ações para executar a pesquisa, ou seja, impulsiona a dimensão executora. Desse modo, considera a identificação do objeto particular, a indicação de objetivos formativos e investigativos e a definição das condições objetivas para a realização da pesquisa. Na sequência, desvelamos a dimensão orientadora e a executora referentes a esta pesquisa.

5.1 DIMENSÃO ORIENTADORA

A dimensão orientadora da pesquisa como atividade contempla os estudos realizados para compreender a temática e orientar as ações a serem desenvolvidas para alcançar o objetivo. Entre os estudos essenciais, destacamos a Teoria Histórico-Cultural (THC), a Teoria da Atividade (TA), a Atividade Orientadora de Ensino (AOE) e aqueles voltados ao conceito de função afim.

Compreendemos os estudantes como sujeitos que possuem suas particularidades, mas que se constituem no coletivo e necessitam se apropriar dos conhecimentos produzidos pela humanidade, em especial os conhecimentos teóricos, para sua constituição humana. Portanto, a THC é fundamental para aprofundar essas concepções, considerando a formação humana do sujeito, que é histórico e social.

Tendo em vista que o objeto particular desta pesquisa é a aprendizagem dos estudantes acerca do conceito de função afim, a Teoria da Atividade se torna indispensável. Por meio dessa, podemos entender que, para que ocorra a aprendizagem, são necessárias algumas condições, entre elas, que o estudante se coloque em atividade de aprendizagem.

Além disso, é preciso considerar a organização intencional do ensino pelo professor. Esta pode ser realizada tendo como embasamento a Atividade Orientadora de Ensino, que é um modo de organizar o ensino “no qual o seu conteúdo principal é o conhecimento teórico e o seu

objeto é a formação da personalidade do sujeito, no movimento de apropriação desses conhecimentos, seja o sujeito professor, seja o sujeito estudante” (ARAÚJO; MORAES, 2017, p. 56).

Além do mais, cabe ainda ter em foco o conhecimento teórico a ser ensinado. Nesta pesquisa, optamos pela função afim, a partir da sua relação com a proporcionalidade. Logo, precisamos compreender como estes conceitos se relacionam, o movimento lógico-histórico do conceito de função afim e as orientações para a organização do ensino.

Em suma, todos esses estudos são essenciais para uma melhor compreensão do tema e estão organizados em três capítulos anteriormente apresentados nesta pesquisa: o primeiro se refere ao levantamento das pesquisas já realizadas acerca do tema; o segundo discorre sobre os elementos importantes a respeito da fundamentação teórica; e o terceiro capítulo destaca os conceitos matemáticos – função afim e proporcionalidade – considerados nesta pesquisa, bem como seu movimento lógico-histórico e seu ensino.

No primeiro capítulo buscamos conhecer como a relação entre os conceitos de função afim e proporcionalidade foram abordados em pesquisas já desenvolvidas, com o intuito de identificar possíveis aproximações e distanciamentos com a presente pesquisa. Este estudo favoreceu apontar o diferencial deste trabalho e suas possíveis contribuições.

Posteriormente, abordamos os estudos teóricos – THC, TA e AOE – que embasam a compreensão do tema, já que a apropriação dos conhecimentos historicamente produzidos pela humanidade possibilita uma formação humana dos estudantes e, para isso, é necessário que haja aprendizagem. Portanto, na expectativa de que os estudantes se coloquem em atividade de aprendizagem, o professor, em sua atividade de ensino, deve organizar situações de ensino que, potencialmente, podem ser desencadeadoras de aprendizagem. Portanto, necessário se faz compreender como se deu o desenvolvimento histórico do conhecimento matemático de função afim e sua relação com a proporcionalidade.

Destarte, elaboramos o terceiro capítulo que aprofunda a compreensão da organização do ensino deste conhecimento, considerando seus nexos conceituais. Todos estes estudos apresentados compõem a dimensão orientadora que orienta a dimensão executora, a qual é apresentada na sequência, considerando as ações desenvolvidas para responder o problema de pesquisa.

5.2 DIMENSÃO EXECUTORA

A dimensão executora da pesquisa como atividade compreende desde as “Ações que vão da apreensão da realidade à análise do material e à sistematização e apresentação do resultado” (ARAÚJO; MORAES, 2017, p. 57). Logo, considera todas as etapas de execução da pesquisa. Conforme Araújo e Moraes (2017), o momento inicial da investigação do fenômeno é chamado apreensão da realidade, no qual são criadas as condições para uma análise do fenômeno em seu movimento interno, ou seja, em suas dimensões singulares e gerais mediadas pela particularidade.

Nesse sentido, “A ação de apreender a realidade refere-se fundamentalmente à ação de revelar o fenômeno em seu próprio processo de desenvolvimento, condição fundamental para se determinar os aspectos essenciais do fenômeno em questão” (ARAÚJO; MORAES, 2017, p. 62). Segundo as autoras Araújo e Moraes (2017), nesta etapa podem ser utilizados diversos procedimentos investigativos, entre eles, os experimentos didáticos.

Portanto, com o intuito de compreender o fenômeno, para desenvolver as situações de ensino e identificar elementos essenciais para a aprendizagem de estudantes, nos organizamos na perspectiva de um experimento didático, que tem o objetivo de estudar o desenvolvimento das funções psicológicas superiores no decorrer do processo de escolarização, tal qual indica Vigotski (2003 *apud* CEDRO, 2008, p. 105).

O desenvolvimento ocorreu em 14 aulas, no período de 10 de maio à 04 de julho de 2022, com 39 estudantes de uma turma do primeiro ano do Curso Técnico em Agropecuária Integrado ao Ensino Médio, do Instituto Municipal de Ensino Assis Brasil (IMEAB), no município de Ijuí, região noroeste do estado do Rio Grande do Sul.


Para realizar as análises do material empírico produzido durante o desenvolvimento e a apresentação dos resultados, organizamos três eixos de análise, expostos por meio de episódios, que, para Moura (2000, p. 60), são “reveladores sobre a natureza e qualidade das ações”. Em relação à natureza, trata-se de um conceito, modos de ação, valores, conhecimento estratégico ou conhecimento prático. Quanto à qualidade, os episódios podem revelar se se referem a ações coordenadas por motivos individuais ou coletivos, se visam concretizar a atividade ou se articulam análise e síntese na avaliação das ações (MOURA, 2000).

Por meio dos episódios, temos não apenas a organização dos dados, mas, sobretudo, um modo de exposição que recompõe o fenômeno na sua totalidade, em uma nova síntese, explicitando o movimento lógico-histórico da pesquisa e os modos de ação para a compreensão teórica do objeto [...]. (ARAÚJO; MORAES, 2017, p. 68)

Sendo assim, os episódios são constituídos a partir dos nexos conceituais da álgebra, com o intuito de identificar se os alunos se apropriaram deles; analisar sua importância na aprendizagem da função afim e identificar elementos essenciais nesse processo. Estão organizados em cenas “que buscam revelar as múltiplas determinações, as relações essenciais que possibilitam compreender o fenômeno para além da aparência, do imediato” (ARAÚJO; MORAES, 2017, p. 68). Logo, os episódios e cenas são formas de exposição dos dados nos eixos de análise e possibilitam a investigação do fenômeno em sua totalidade.

Nesta pesquisa, o material empírico analisado nas cenas foi produzido por meio de gravações, em áudio e vídeo, de todas as aulas; portfólios individuais, disponibilizados pela pesquisadora; uma folha de exercícios de avaliação da aprendizagem ao final do experimento e um formulário de *feedback*. Tais instrumentos são apresentados no Quadro 2.

Quadro 2 - Instrumentos utilizados na produção do material empírico²⁰

Instrumento de produção do material empírico	Como o instrumento foi utilizado
Gravações – em áudio e vídeo	Todas as aulas desenvolvidas foram gravadas, em áudio e vídeo, pela pesquisadora com o uso do seu próprio aparelho celular.
Portfólios 	Foram organizados pela pesquisadora com folhas pautadas e grampo trilho de plástico. Cada aluno recebeu um portfólio e o utilizou durante todas as aulas desenvolvidas, para realizar seus registros, em substituição ao caderno.
Exercícios de Avaliação (Apêndice F)	Avaliação individual, composta por um problema com questionamentos de interpretação para verificar e analisar, qualitativamente, indicativos de aprendizagens ocorridas no período de desenvolvimento da pesquisa. Esta não será utilizada na atribuição de notas aos alunos, referente às aulas de matemática na escola.
Formulário de <i>feedback</i> (Apêndice G)	Foi utilizado um formulário com 12 questões, com a intencionalidade de coletar algumas informações para identificar as características dos alunos, sua relação com o curso técnico e com a matemática e um <i>feedback</i> das aulas desenvolvidas.

Fonte: Sistematizado pela pesquisadora

²⁰ Dada a quantidade de material empírico obtido durante o experimento didático e o espaço limitado desta dissertação, embora todos tenham sido analisados, nem todos farão parte desta escrita.

De acordo com Araújo e Moraes (2017), a apreensão da realidade pode incluir o processo de produção do material empírico, entretanto não se limita a ele. Logo, é fundamental compreender o contexto no qual a pesquisa foi desenvolvida. Assim, no subitem a seguir, apresentamos algumas informações acerca do Curso Técnico em Agropecuária, para contextualizar o espaço escolar e dar a conhecer os sujeitos da pesquisa, alunos de uma turma do referido curso.

5.2.1 Contexto da pesquisa: Curso Técnico em Agropecuária Integrado ao Ensino Médio

O primeiro contato da pesquisadora com o Instituto Municipal de Ensino Assis Brasil (IMEAB), onde o Curso Técnico em Agropecuária Integrado ao Ensino Médio é ofertado, ocorreu através da professora de matemática regente das turmas do primeiro ano, que acolheu a proposta e disponibilizou suas aulas. O IMEAB autorizou o desenvolvimento da pesquisa e recebeu gentilmente a pesquisadora.

Como a proposta apresentada abordava o conceito de função, ficou combinado que a professora regente iniciaria o ano letivo, conforme os conteúdos que havia programado, e a pesquisadora assumiria as aulas no momento em que seria introduzido o conceito de função. Sendo assim, a pesquisadora iniciou o contato com a turma com um período de observação, de 07 de março a 03 de maio de 2022, e, em seguida, deu início ao desenvolvimento da proposta. Nestes dois meses, ela observou as aulas de matemática da professora regente, distribuídas em quatro períodos semanais de 50 minutos, com a intenção de conhecer os alunos e entender o contexto escolar.

Durante este período, ela observou que os alunos estavam acostumados a uma organização de carteiras individuais enfileiradas. Nas aulas, a professora costumava explicar os conteúdos, resolver exemplos e propor exercícios de fixação. Havia pouca participação dos alunos, que apenas assistiam às explicações e resolviam os exercícios, e breves momentos de interação entre eles, quando solicitavam a ajuda de um colega. As aulas eram tranquilas e, quando os alunos faziam muito barulho, eram repreendidos pela professora.

Aos poucos, a pesquisadora começou a interagir com os alunos, por meio de diálogos e auxiliando na resolução de exercícios. A observação das aulas e a aproximação com os alunos foram importantes para criar as situações de ensino a serem desenvolvidas, as quais são mostradas posteriormente.

Cabe destacar que a pesquisadora teve contato com os alunos somente durante o período de observação da turma e o desenvolvimento da pesquisa. Embora, inicialmente, 39 alunos

estivessem matriculados na turma do primeiro ano, nem todos participavam regularmente. Ao final do período de inserção na turma, restavam 34 deles. Os outros cinco realizaram transferência de escola por motivos pessoais. Os 39 alunos foram identificados a partir da numeração, em ordem alfabética. Portanto, mesmo restando 34 alunos ao final do desenvolvimento, a numeração não foi alterada.

A pesquisa foi desenvolvida com todos os alunos que frequentavam as aulas de matemática no horário regular, com a professora regente, os quais serão representados, respeitando o anonimato, a partir de uma numeração, da seguinte forma: Aluno 1, Aluno 2, ... Para a produção do material empírico e sua utilização, foram entregues aos alunos um Termo de Assentimento e um Termo de Consentimento Livre e Esclarecido. Ambos tiveram a autorização de todos os alunos e responsáveis. A pesquisa foi aprovada na Plataforma Brasil com o parecer número 5.346.335.

Foi proposto para a turma o preenchimento de um formulário, para obtermos algumas informações sobre eles. Trinta deles o responderam, dos quais, 23 têm 15 anos de idade; 6 têm 16 anos de idade; e apenas 1 tem 17 anos. Ao serem questionados sobre o local onde moram, 16 estudantes informaram residir na área rural e 14 na área urbana.

Levando em consideração a escolha do Curso Técnico em Agropecuária, a pesquisadora questionou quais seriam filhos de agricultores, obtendo como resposta positiva de 18 estudantes. Quanto ao município, 26 alunos vivem em Ijuí, 2 em Bozano (16 km de Ijuí), 1 em Boa Vista do Cadeado (30,1 km de Ijuí) e 1 em Ajuricaba (29,3 km de Ijuí).

A maioria dos estudantes da turma não cursou o Ensino Fundamental no IMEAB. Vários ingressaram no primeiro ano do Ensino Médio, uma vez que, dos 30 estudantes, apenas 6 cursaram o 9.º ano do Ensino Fundamental nesta escola. Isto permite supor que os demais estudantes tenham se transferido²¹ para a escola com a intenção de cursar o Curso Técnico, o que foi respondido na seguinte questão no formulário: Por que você escolheu este curso Técnico em Agropecuária? Obtivemos como respostas, pela maioria dos estudantes, que entraram porque gostam da área, gostam de animais e agricultura, outros para futuramente trabalhar com os pais, ou para continuar os estudos cursando graduação em Medicina Veterinária ou Agronomia ou ainda pelas oportunidades no mercado de trabalho.

Em seguida, foi questionado se eles teriam interesse em atuar como técnicos nessa área da Agropecuária. Confirmaram a resposta 25 estudantes, 3 informaram que talvez e 2 relataram

²¹ Para ingressar neste Curso Técnico é preciso passar por um processo seletivo, pois a procura é maior que o número de vagas ofertadas.

não ter interesse em atuar na área. Também foi-lhes feitas a seguinte pergunta: O curso Técnico em Agropecuária abre espaço para campo de trabalho? Explique. Todos os estudantes responderam que sim e apresentaram explicações tais como: “Com certeza, pois a agropecuária é um dos principais setores que movimentam a economia do país. Por sua diversidade de atuação e alta demanda, é também considerada um mercado com muitas oportunidades de potencializar a carreira. São vagas para todos os níveis e tipos de formação” (ALUNO 23); “Sim pois muitos saem do curso já empregados” (ALUNO 21) e “Sim, o curso possui várias áreas de trabalho desde a área animal quanto a vegetal, então tem muitas opções de emprego” (ALUNO 4).

Por fim, foi lhes questionado acerca da relação dos estudantes com a Matemática. As respostas obtidas foram variadas, mas a maioria apresentou respostas negativas, tais como não gostar da disciplina e ter dificuldades de aprendizagem. Essas repostas totalizam 20 estudantes, no entanto, são muito diferentes e incluem desde ter um pouco de dificuldade até estudantes que relataram nunca ter gostado da disciplina e ter muita dificuldade para aprendê-la. Os demais estudantes deram respostas mais positivas e sete deles responderam com muita clareza que gostam muito de matemática e sempre tiveram boas notas, enquanto outros relatam gostar, mas ter dificuldade de aprendizagem, ou não gostar, mas ter boas notas.

Além de conhecer um pouco sobre os alunos da turma, é de suma importância compreender brevemente o contexto escolar em que os sujeitos da pesquisa estão inseridos. O IMEAB teve sua história iniciada em 1929, voltada à construção de saberes para o setor agrícola e melhoria de rebanhos de suínos e gado leiteiro na comunidade em que estava inserido no município de Ijuí-RS. Desde então, “passou por diversas mudanças políticas, sociais e econômicas, que levaram a alterações em relação a cursos, bem como à nomenclatura do mesmo” (IJUÍ, 2020, p. 9).

A nomenclatura de Curso Técnico em Agropecuária Integrado ao Ensino Médio, como é denominado atualmente, assim como o seu currículo e estrutura, foram alterados no ano de 2012. Cerca de cinco anos depois, teve início o processo de reconstrução do Referencial Curricular para a Educação Profissional referente ao Curso Técnico em Agropecuária, o qual foi publicado em 2020 e está em vigor atualmente. Ele foi elaborado de forma coletiva e teve como base a Proposta Curricular da Educação Profissional Integrada ao Ensino Médio da Secretaria Municipal de Educação de Ijuí (SMEd), a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) e o Referencial Curricular Gaúcho.

Esta escola recebe estudantes moradores das zonas rural e urbana do município de Ijuí e, também, de outros municípios da região noroeste do estado do Rio Grande do Sul. O curso

habilita os estudantes a uma formação profissional técnica de nível médio, é presencial, de turno integral e possui atividades teóricas na escola sede e práticas realizadas na escola fazenda.

A escola sede possui uma estrutura com oito prédios, contemplando: secretaria, sala de direção, tesouraria, refeitório, cozinha, salas de aula, sanitários, salas de ginástica, de música, de reciclagem, sala de professores, sala para deficientes visuais e cegos, sala de coordenação e de funcionários, bibliotecas, laboratórios, ginásio coberto, quadra esportiva e auditório.

A escola fazenda, localizada a cerca de três quilômetros da Sede, é mantida como campo de pesquisa, experimentação e para a realização das práticas. Possui uma área de 23 hectares divididos em 14 setores: aves, suínos, bovinos, agroindústria, ovinos, floricultura, fruticultura, olericultura, horto medicinal, minhocário, forrageiras, diversificadas, ração e lavoura extensiva. Para as demais atividades conta com um prédio administrativo e outro prédio com salas de aula.

O Referencial Curricular Municipal do Ensino Médio (IJUÍ, 2020), destaca a formação humana dos estudantes do curso técnico, para além de profissionais capacitados. O objetivo geral do curso é a

[...] formação integral do educando, o desenvolvimento de suas capacidades profissionais com habilidades técnicas, científicas e humanas, para atuar no setor agropecuário, com responsabilidade sócio-ambiental, com vistas à melhoria da qualidade de vida, a fim de promover a transformação no âmbito de sua atuação (IJUÍ, 2020, p. 14).

A educação integral considera o ser humano em todas as dimensões: cognitiva, estética, ética, física, social e afetiva. Ainda, segundo o Referencial Curricular Municipal do Ensino Médio (IJUÍ, 2020), formar cidadãos com pleno desenvolvimento de suas potencialidades, ativos na sociedade e profissionais com formação teórica e instrumental na área, requer um currículo que vise a uma formação como um ser humano em sua totalidade. Além disso, o currículo busca atender às peculiaridades locais e aos múltiplos interesses dos estudantes.

Assim, conforme o referido documento, o protagonismo juvenil tem grande contribuição na formação dos estudantes, para que sejam mais autônomos e comprometidos socialmente, incorporando valores como a solidariedade e o respeito, atuando na geração de riquezas e no desenvolvimento comunitário, na preservação da cultura e do meio ambiente e valorizando uma economia de mercado mais justa para todos. A interdisciplinaridade e a contextualização do ensino também são abordadas no Referencial Curricular Municipal do Ensino Médio (IJUÍ, 2020), afirmando a importância de os professores proporcionarem uma integração das diferentes disciplinas, de modo que haja colaboração de ambas, a partir de suas especificidades, para alcançar resultados enriquecedores a todos.

No documento são ressaltados alguns desafios quanto à implementação dessa nova proposta curricular, entre eles, cita articular teoria e prática, buscar novos procedimentos metodológicos, levar em consideração os saberes científicos e os saberes dos estudantes, romper com o ensino fragmentado e desvinculado da realidade, buscando a contextualização. As tecnologias digitais igualmente são mencionadas, salientando a relevância de educadores qualificados que possam utilizá-las de forma significativa, como um recurso pedagógico. E ainda, que as tecnologias potencializam o ensino, tornando-o mais interessante, e aproximam os conteúdos da realidade dos estudantes, nativos da era digital (IJUÍ, 2020).

As Práticas Interdisciplinares, nas quais os alunos realizam vivências com produtores rurais em suas propriedades, são uma oportunidade para qualificar e enriquecer sua formação profissional. Essas acontecem em dois momentos do curso, no primeiro e no segundo ano, para produzir dados e vivenciar a rotina diária da propriedade rural. No segundo ano, os estudantes analisam os custos e a renda do produtor e apresentam uma proposta para incrementar a renda, melhorando uma atividade ou implantando outra. Ao final das práticas, os estudantes entregam um relatório e o socializam na forma de seminário.

O Curso Técnico tem carga horária total de 4070 horas, divididas em 3810 horas de formação acadêmica e 260 horas de estágio curricular supervisionado. O currículo da formação acadêmica é composto por formação geral básica (1800 horas) e Educação Profissional (2010 horas).

A Formação Geral Básica está organizada por áreas do conhecimento, sendo: Área de Linguagens e suas Tecnologias; Área de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas; Área de Ciências da Natureza; Matemática e suas Tecnologias e Ensino Religioso contemplando as competências e habilidades previstas na BNCC e as territoriais. O Itinerário Formativo, Educação Profissional, é composto pela Área de Agricultura; Área de Zootecnia; Área de Gestão e Área de Infraestrutura Rural (IJUÍ, 2020, p. 31).

O Referencial Curricular Municipal do Ensino Médio (IJUÍ, 2020, p. 105) destaca que a “aprendizagem é um processo individual e social que o sujeito constrói na interação com o meio e com o outro”. Quanto à Matemática e suas Tecnologias, o foco é promover uma visão integrada e aplicada à realidade, em diferentes contextos.

No Ensino Médio, é preciso dar continuidade e aprofundar os estudos do Ensino Fundamental, ampliando o letramento matemático, proporcionando processos mais elaborados de reflexão e abstração, que auxiliem na elaboração e na resolução de problemas. As estratégias para solucionar problemas envolvem as competências de raciocinar, representar, comunicar e argumentar, as quais pressupõem o raciocínio matemático.

O ensino da função afim aparece no referencial na habilidade “(EM13MAT302) Construir modelos empregando as funções polinomiais de 1º ou 2º graus, para resolver problemas em contextos diversos, com ou sem apoio de tecnologias digitais” (IJUÍ, 2020, p. 107). Por sua vez, a relação da função afim com a proporcionalidade está na habilidade de

(EM13MAT401) Converter representações algébricas de funções polinomiais de 1º grau em representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais o comportamento é proporcional, recorrendo ou não a *softwares* ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica (IJUÍ, 2020, p. 108).

Apesar de a função afim ser citada somente nestas duas habilidades, são indicados elementos importantes como a resolução de problemas contextualizados, o uso da conversão entre representação algébrica e geométrica, a relação com a proporcionalidade e o uso de tecnologias digitais.

Após apresentar algumas informações sobre o contexto da pesquisa, incluindo o Curso Técnico em Agropecuária Integrado ao Ensino Médio e os sujeitos da pesquisa, abordamos, no subitem a seguir, a organização e o desenvolvimento das situações de ensino com a turma de alunos.

5.2.2 O Experimento Didático: organização do ensino e desenvolvimento

As situações de ensino foram organizadas a partir dos nexos conceituais da álgebra com a intencionalidade de possibilitar a compreensão deles para chegar na aprendizagem da função afim. A organização é indicada no Quadro 3, e o desenvolvimento de cada uma delas será detalhado posteriormente.

Quadro 3 - Organização das situações de ensino

Situação	Título	Nexos conceituais
I	Fotografias	fluência
II	Jogo Pega Varetas	variável, campo de variação, noção intuitiva de função e dependência
III	Produção leiteira	função afim e proporcionalidade

Fonte: Sistematizado pela pesquisadora

A elaboração das três situações ocorreu durante o período de observação da turma. Após, as aulas foram desenvolvidas pela pesquisadora, com a presença da professora de matemática, regente da turma. Nestas, foram desenvolvidas as referidas situações durante os meses de maio, junho e julho de 2022, em 14 aulas que totalizam 29 períodos de 50 minutos. A

organização destes encontros é ilustrada no Quadro 4, considerando a situação desenvolvida e seu objetivo.

Quadro 4 – Organização das aulas

Aulas	Data	Períodos	Situação	Objetivo
Aula 1	Terça-feira 10/05/22	2	I	Possibilitar aos estudantes a compreensão de que tudo se transforma, tudo muda a todo momento e nada é estável.
Aula 2	Segunda-feira 16/05/22	2	I	
Aula 3	Terça-feira 17/05/22	2	II	Proporcionar aos estudantes a compreensão de variável, dos possíveis valores que cada variável pode assumir e da relação de dependência entre grandezas, introduzindo a noção intuitiva de função.
Aula 4	Segunda-feira 23/05/22	2	II	
Aula 5	Terça-feira 24/05/22	2	II	
Aula 6	Segunda-feira 30/05/22	2	III	Promover a aprendizagem da função afim, a partir da proporcionalidade, em uma situação introduzida por uma carta com um pedido de ajuda de um pequeno agricultor, cujo problema a ser resolvido era uma necessidade real.
Aula 7	Terça-feira 31/05/22	2	III	
Aula 8	Segunda-feira 06/06/22	2	III	
Aula 9	Terça-feira 07/06/22	2	III	
Aula 10	Segunda-feira 20/06/22	3	III	
Aula 11	Terça-feira 21/06/22	1	III	
Aula 12	Segunda-feira 27/06/22	3	III	
Aula 13	Terça-feira 28/06/22	1	III	
Aula 14	Segunda-feira 04/07/22	3	III	

Fonte: Sistematizado pela pesquisadora

No período de desenvolvimento da proposta, houve algumas mudanças no contexto escolar, as quais influenciavam na organização das aulas, como por exemplo a alteração dos períodos semanais ocorrida no dia 20 de junho, conforme mostra o Quadro 4. Além disso, o desenvolvimento das situações não tinha um tempo fixo predeterminado, já que dependia do andamento de cada aula e do envolvimento dos alunos. Ao elaborarmos, apenas estipulamos um período que precisou ser ampliado. Na sequência, dispomos cada uma das situações e o modo como foram desenvolvidas.

5.2.2.1 Situação I – Fotografias²²

Esta situação de ensino tem como objetivo possibilitar aos estudantes compreender que tudo se transforma, tudo muda a todo momento e nada é estável. Para isso, iniciamos com reflexões acerca de nossas próprias mudanças e ampliamos para plantas, animais e outras mudanças em geral. Com antecedência, solicitamos aos estudantes que levassem três fotografias de diferentes etapas da sua vida. Em aula, os alunos foram divididos em grupos de quatro integrantes e observaram suas fotos para responder às perguntas entregues de forma impressa, as quais constam da Figura 1. Cabe destacar que, todas as situações de ensino foram desenvolvidas em grupos, entretanto, a formação destes era modificada e o número de grupos variava de acordo com a situação organizada e a quantidade de alunos presentes em aula.

Figura 1 – Questões Q.1, Q.2 e Q.3 disponibilizadas aos alunos

1. Observe suas fotos e responda:
 Q. 1 - Você é o mesmo de alguns anos atrás? Se não, quais as principais mudanças que você consegue perceber?
 Q. 2 - Você é o mesmo de ontem? Se não, o que mudou?
 Q. 3 - Você é o mesmo do início da aula de hoje? E do intervalo? De um segundo atrás? O que mudou?
 2. Em grupo, façam uma sistematização das principais mudanças encontradas.

Fonte: Dados da pesquisa

Após cada aluno responder individualmente e escrever suas respostas no portfólio, o grupo teve que contribuir para elencar os aspectos que mudaram em cada integrante. Assim, cada grupo realizou uma sistematização das principais mudanças observadas para socializar com a turma. As perguntas foram realizadas oralmente e, a cada uma, os grupos socializavam a sistematização das suas respostas, por meio de um dos integrantes. Após, realizamos uma reflexão coletiva sobre as nossas constantes mudanças.

Em seguida, a pesquisadora entregou as perguntas ilustradas na Figura 2, e os alunos discutiram acerca de cada uma nos grupos e responderam-nas no portfólio. Ao final, os grupos elaboraram uma sistematização coletiva para, posteriormente, socializar. A partir disso, realizamos as discussões e as reflexões no coletivo da turma.

²² Adaptada de Sousa (2004).

Figura 2 – Questões Q.4, Q.5, Q.6 e Q.7 disponibilizadas aos alunos

- Reflita com o grupo acerca das seguintes questões e responda no portfólio:
 Q. 4-a - Ao fazer visitas em uma plantação de milho, por exemplo, a cada visita as plantas permanecerão exatamente as mesmas?
 Q. 4-b - O que pode ter alterado?
 Q. 5 - E os animais, eles também mudam? Cite um exemplo.
 Q. 6 - Vocês conseguem pensar em mais alguma coisa que muda? Explique.
 Q. 7 - Então, será que tudo muda?

Fonte: Dados da pesquisa

Durante as discussões, surgiram novos questionamentos que foram realizados oralmente pela pesquisadora e discutidos pelos alunos no coletivo. Tais como: Q. 4-c – Como vocês falaram que o milho irá crescer: a cada dia que passa, quanto o milho cresceu? Q. 4-d – Seria possível estimar quanto o milho cresceria em dez dias? Então, encerramos a situação I e, na aula seguinte, iniciamos a situação II, apresentada na sequência.

5.2.2.2 Situação II – Jogo Pega Varetas²³

A situação de ensino do Jogo Pega Varetas tem como objetivo proporcionar aos estudantes a compreensão de variável, dos possíveis valores que cada variável pode assumir e da relação de dependência entre grandezas, introduzindo a noção intuitiva de função.

Em grupos de três ou quatro integrantes, os estudantes jogaram o jogo Pega Varetas, primeiramente, de forma livre, por cerca de dez minutos. A finalidade do jogo é apanhar as varetas uma a uma, sem mover as restantes. Já que há algumas variações quanto às suas regras, a pesquisadora definiu as seguintes, que foram entregues de forma impressa: 1) juntar todas as varetas com a mão, apoiar um dos extremos sobre a mesa e soltá-las para espalharem de uma só vez; 2) o primeiro jogador deve levantar um palito de cada vez, sem mover nenhum dos outros, quando isso ocorrer perderá o direito de continuar e cederá para o jogador da esquerda que dará sequência ao jogo; e 3) o único palito preto do jogo, quando tirado pelo jogador, pode ser usado como auxiliar para levantar os demais.

Após uma rodada inicial do jogo, os estudantes foram informados quanto à pontuação de cada vareta, conforme sua cor: amarelo (5 pontos), vermelho (10 pontos), verde (15 pontos), azul (20 pontos) e preto (50 pontos). Portanto, ao terminar todas as varetas da mesa, a cada rodada, o estudante precisa contar as suas varetas e verificar quantos pontos conquistou, registrando os pontos obtidos da forma que preferir e a quantidade de varetas de cada cor.

²³ Adaptada de Alves (2016).

Após algumas rodadas, os grupos socializaram a forma como registraram a pontuação, escrevendo-as no quadro branco e debatemos no coletivo sobre a forma mais rápida e simples para registrar. Na sequência, com a intenção de encontrar uma expressão algébrica para representar o cálculo de todos os pontos possíveis do jogo e o número total de varetas de cada jogada, foram entregues de forma impressa as questões da Figura 3.

Figura 3 – Questões Q.1, Q.2 e Q.3 disponibilizadas aos alunos referentes ao Jogo Pega Varetas

- Responda às questões abaixo no portfólio (anote todas as ideias discutidas no grupo):
- Q. 1-a - A quantidade de varetas de cada cor, obtidas por cada jogador, é sempre a mesma ou pode variar?
- Q. 1-b - Quais são os possíveis resultados para cada cor?
- Q. 1-c - Como podemos representar a quantidade de varetas de cada cor se não possuem um valor fixo?
- Q. 2-a - Existem valores fixos, que não se alteram?
- Q. 2-b - Quais são esses valores?
- Q. 3-a - O valor da pontuação final está relacionado à quantidade de varetas de cada cor?
- Q. 3-b - De que forma eles se relacionam?

Fonte: Dados da pesquisa

Cada grupo respondeu às perguntas no portfólio. Posteriormente, elas foram debatidas no coletivo. Nesse momento, especialmente na questão Q.1-c, esperava-se que os estudantes chegassem à conclusão de representar a quantidade de varetas de cada cor a partir de variáveis. Para isso, foram necessárias algumas reflexões direcionadas pela pesquisadora por meio de novos questionamentos, como: 1) *Se não podemos representar a quantidade de varetas de cada cor sempre pelo mesmo número, pois os resultados variam, como podemos representar?* 2) *Como chamamos essas representações, que podem por exemplo, ser por meio de “letras” que representam números que variam?*

Após a socialização das questões, o seguinte problema foi proposto e escrito na lousa: Como podemos representar o cálculo de todos os pontos possíveis do jogo e o número de varetas de cada rodada? Os grupos tiveram um momento para discutir e para responder à pergunta. Cada grupo socializou a expressão algébrica elaborada e uma síntese das respostas obtidas, no coletivo da turma. Então, debateu-se acerca da expressão que melhor representaria a relação da pontuação total com a quantidade de varetas de cada cor. Dois grupos se aproximaram da expressão algébrica esperada, que pode ser elaborada a partir de alguns resultados obtidos pelos alunos durante o jogo, conforme o exemplo da Figura 4.

Figura 4 – Exemplo de registro para o cálculo da pontuação de cada rodada

<p>Rodada 1 – (2 amarelas, 4 vermelhas, 1 verde, 3 azuis e 0 pretas)</p> $5 * 2 + 10 * 4 + 15 * 1 + 20 * 3 + 50 * 0 = Total \text{ (Rodada 1)}$ $5 * 1 + 10 * 3 + 15 * 2 + 20 * 2 + 50 * 1 = Total \text{ (Rodada 2)}$ $5 * 3 + 10 * 1 + 15 * 4 + 20 * 2 + 50 * 0 = Total \text{ (Rodada 3)}$

Fonte: Dados da pesquisa

Durante a discussão, a pesquisadora ressaltou que a intenção era obter a forma mais simples de escrever a expressão algébrica, que pudesse ser utilizada nas diferentes rodadas, com o objetivo de chegar em uma expressão semelhante a $T = 5 * M + 10 * E + 15 * V + 20 * A + 50 * P$. Como a quantidade de varetas de cada cor varia por estudante, foi representada por variáveis, escolhidas pelos grupos, como por exemplo: verde (V), azul (A), amarelo (M), vermelho (E) e preto (P).

Uma nova situação foi proposta, e os alunos foram informados de que todas as varetas passaram a ter a mesma pontuação (10 pontos), independentemente da cor, assim, eles jogaram novamente. Anotaram a pontuação obtida e escreveram uma expressão algébrica para relacionar o total da pontuação com o número de varetas. Em seguida, responderam às seguintes perguntas, em grupo.

Figura 5 – Questões Q.4, Q.5, Q.6 e Q.7 disponibilizadas aos alunos referentes ao jogo Pega Varetas

<p>Considere que todas as varetas (todas as cores) terão a mesma pontuação e cada uma valerá 10 pontos. Registre os pontos obtidos e responda:</p> <p>Q. 4- Podemos utilizar a mesma expressão algébrica da atividade anterior, para representar a pontuação total e a quantidade de varetas de cada cor? Justifique.</p> <p>Q. 5- Se não, que expressão algébrica podemos utilizar?</p> <p>Q. 6-a - O valor da pontuação final está relacionado à quantidade de varetas?</p> <p>Q. 6-b - De que forma?</p> <p>Q. 7 - É possível obter a pontuação final sem saber a quantidade de varetas? Explique.</p>

Fonte: Dados da pesquisa

Cada grupo novamente socializou as ideias registradas, para refletirmos no coletivo sobre a expressão mais simples que expresse essa relação de dependência entre o valor da pontuação final e a quantidade de varetas. As discussões da Q. 6 levaram a uma expressão semelhante a: $T = 10v$. Assim, nas questões seguintes, a turma identificou a relação de dependência entre a pontuação final e a quantidade de varetas.

A partir disso, os estudantes tiveram como tarefa de casa pesquisar qual é o conceito matemático que expressa essa relação de dependência e sua definição. Na aula seguinte, por meio das respostas dos estudantes, a definição do conceito de função foi sistematizada e foi

realizada a identificação da pontuação total (T) como variável dependente e da quantidade de varetas (v) como variável independente.

Como o intuito da situação era obter a definição do conceito matemático de função, a pesquisadora entregou aos estudantes, após as discussões, a sistematização impressa, explicitada na Figura 6, que estava coerente com o que haviam debatido. A sistematização foi lida no coletivo e comentada pela pesquisadora.

Figura 6 – Sistematização para definição do conceito de função

SISTEMATIZAÇÃO
<p>O que são variáveis? São símbolos que tomam o lugar de números ou domínio de números. Eles são usados para representar quantidades que variam ou mudam (variáveis). Como por exemplo, as “letras” utilizadas nas expressões algébricas para representar o valor da pontuação final e a quantidade de varetas.</p> <p>O que é Função? <u>Definição:</u> Sejam x e y duas variáveis representativas de conjuntos de números; diz-se que y é função de x e escreve-se: $y = f(x)$ Se entre as duas variáveis existe uma correspondência unívoca no sentido $x \rightarrow y$. A x chama-se variável independente, a y variável dependente. Ou seja, para cada elemento do conjunto dos valores de x, há apenas um correspondente em y. Por exemplo, se todas as varetas possuem a mesma pontuação de 10 pontos, então:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Para 3 varetas a pontuação será 30 pontos. • Para 5 varetas a pontuação será 50 pontos. • Para 9 varetas a pontuação será 90 pontos. <p>Ao alterar a variável independente (x) haverá uma mudança na variável dependente (y). Assim, se alterar a quantidade de varetas, irá alterar a pontuação final. Outros exemplos de mudança em uma variável causando uma mudança correspondente em uma segunda variável, são: a altura de uma muda de feijão muda com o número de dias decorridos desde que brotou; a altura da muda de feijão é uma função dos dias em que ela cresceu. O valor do pagamento de um salário é uma função do número de horas trabalhadas. O nível no tanque de combustível é uma função dos quilômetros dirigidos desde o enchimento do tanque. O lucro é uma função das vendas. As funções são usadas para melhor compreendermos as mudanças em todos os tipos de contextos.</p> <p>Sistematização elaborada com base em: Caraça (1951) e Van De Walle (2009).</p>

Fonte: Dados da pesquisa

Os estudantes foram orientados a colar a sistematização no caderno para que tivessem este registro, tendo em vista que o portfólio seria recolhido para análise da pesquisadora. E assim, foi encerrado o desenvolvimento da situação II e, na aula seguinte, teve início o desenvolvimento da situação III, apresentada a seguir.

5.2.2.3 Situação III – Produção leiteira

Os alunos se organizaram em grupos de quatro ou cinco integrantes, para realizar esta situação, a qual foi introduzida por uma carta, conforme a Figura 7, com um pedido de ajuda de um pequeno agricultor. A pesquisadora elaborou a carta, considerando o contexto em que os

estudantes estão inseridos e a apresentou a turma como se ela fosse real, ou seja, que o problema a ser resolvido era uma necessidade real de um agricultor. Foi feita uma leitura oral da carta e, na sequência, os estudantes anotaram os dados importantes.

Figura 7 – Problema proposto na Situação III

Prezados alunos do Primeiro Ano do Curso Técnico em Agropecuária integrado ao Ensino Médio, do Instituto Municipal de Ensino Assis Brasil (IMEAB).

Meu nome é Nildo, sou um pequeno agricultor e tenho uma propriedade no interior de Ijuí, conhecida como Fazenda do Seu Nininho, onde planto alguns produtos e tenho criação de animais. Uma das minhas principais produções é a de leite. Tenho 13 vacas leiteiras e estou produzindo, em média, 8000 litros de leite por mês. Recebo da empresa para quem vendo o leite apenas R\$1,00 por litro e, descontando os gastos mensais, estou obtendo um lucro de R\$ 2000,00. Nessa situação, estou tendo dificuldades para sustentar a família e manter a propriedade, e preciso me organizar e decidir se valerá a pena investir no aumento da produção de leite ou se devo investir em outra produção.

Assim, estou escrevendo essa carta para pedir a ajuda de vocês. A vida do pequeno produtor não é fácil e precisamos fazer algumas modificações para conseguir sobreviver frente aos grandes produtores, se adequando para não sermos absorvidos por eles e termos que abandonar nossa propriedade.

Pensei em manter a mesma organização com a alimentação e estrutura das vacas leiteiras, e aumentar a produção para 16 000 litros de leite, mas preciso saber qual será o lucro obtido e se este valerá a pena. Como posso fazer para calcular quanto será o lucro?

Vocês podem me ajudar?

Ficarei muito agradecido. Um abraço.

Fonte: Dados da pesquisa

Os grupos elaboraram estratégias para resolver o problema para ajudar o agricultor e escreveram uma carta de resposta a ele. Ao final, cada grupo socializou a estratégia considerada e apresentou algumas das discussões realizadas. Os estudantes foram orientados a anotar suas ideias e tentativas de resolução no portfólio, mesmo que tivessem pensado de forma diferente dos outros integrantes do grupo.

Na carta de resposta, os estudantes explicaram ao agricultor como fazer o cálculo solicitado, bem como deram sugestões que pudessem contribuir para que a melhor decisão fosse tomada. Os estudantes se mostraram mobilizados para auxiliar o agricultor, gerando bastante debate e troca de ideias entre eles, e as soluções encontradas foram diversas, em relação às mudanças e à forma de resolução do problema.

Durante a socialização, foram ampliadas as discussões do problema pensando em outros gastos que o agricultor teria para aumentar a produção de leite, como a quantidade de vacas leiteiras que seria necessário, além de refletir acerca do mundo social atualmente e das dificuldades enfrentadas pelos pequenos agricultores.

Todos os grupos conseguiram resolver o problema, tendo a maioria utilizado a noção de proporcionalidade. A resolução será mostrada na sequência. Problema 1: Se uma produção de

8000 litros de leite, em um mês, gera um lucro de R\$ 2000,00. Nas mesmas condições, como calcular o lucro de uma produção de 16 000 litros de leite? Assumindo que todas as outras condições permaneceriam as mesmas, uma possibilidade de resolução é ilustrada no Quadro 5.

Quadro 5 – Exemplo de resolução do problema 1

Litros de leite por mês	Lucro (R\$)
8000	2000
16 000	4000

Fonte: Dados da pesquisa

Se a quantidade de litros de leite dobrou, então o lucro irá dobrar também. Portanto, com uma produção de 16 000 litros de leite o lucro será de R\$ 4000,00. Após esta reflexão coletiva, foram propostas outras duas questões no quadro como ampliação do problema: 1) Nas mesmas condições do problema, qual seria o lucro de uma produção de 4000 litros de leite? 2) E ainda, qual seria o lucro de uma produção de 12 000 litros de leite?

As questões foram facilmente resolvidas pela maioria dos estudantes, utilizando a mesma estratégia do problema anterior e, novamente, teve destaque a proporcionalidade. Uma possibilidade de resolução, na ampliação do problema, está indicada no Quadro 6.

Quadro 6 – Exemplo de resolução da ampliação do problema

Litros de leite	Lucro (R\$)
4000	1000
8000	2000
12000	3000
16000	4000

Fonte: Dados da pesquisa

Os dados podem ser obtidos a partir da noção de proporcionalidade: sendo 4000 a metade de 8000, seu lucro também será a metade, logo R\$ 1000,00. E, sendo 12 000 o triplo de 4000, seu custo também será o triplo, logo R\$ 3000,00. Além de outras possibilidades de resolução. Os alunos anotaram a estratégia utilizada para a resolução. Em seguida, foram entregues as questões²⁴ apresentadas na Figura 8, de forma impressa.

²⁴ As questões foram adaptadas de Costa e Allevalo (2015).

Figura 8 – Questões propostas aos alunos

Q 1 - Que grandezas variam no problema?
 Q 2 - Essas grandezas são proporcionais? Explique.
 Q 3-a – Existe um número que se mantém constante?
 Q 3-b - O que esse número representa?
 Q 4 – Qual é o lucro de produção de um litro de leite, nas condições do problema?
 Q 5 – É possível determinar o lucro da produção sem que haja o número de litros de leite produzidos? Explique.
 Q 6-a – Qual é a variável dependente?
 Q 6-b – E qual é a variável independente?
 Q 7 - É possível encontrar uma expressão geral para representar o lucro da produção de leite, considerando a variação da quantidade de leite produzida em cada mês?

Fonte: Dados da pesquisa

Após esse momento de discussão nos grupos para resolver o problema e responder às questões, destacando que tudo deveria ser registrado no portfólio, foram feitas a socialização e a reflexão coletiva. Primeiramente, cada grupo socializou, utilizando o quadro se necessário, a resolução e a estratégia usadas no problema. Assim, foi possível analisar e comparar as resoluções, buscando encontrar a forma mais simples de resolver o problema. Em seguida, foram socializadas as respostas das questões por todos os grupos. O objetivo foi chegar às respostas contidas na Figura 9.

Figura 9 – Respostas das questões propostas aos alunos

Q 1 - Que grandezas variam no problema? R: O lucro da produção de leite e a quantidade de leite produzida em litros.
 Q 2 - Essas grandezas são proporcionais? Por quê? R: Sim, variam na mesma proporção.
 Q 3-a – Existe um número que se mantém constante? R: Sim, o 0,25.
 Q 3-b - O que esse número representa? R: O lucro da produção de um litro de leite.
 Q 4 – Qual é o lucro de produção de um litro de leite, nas condições do problema? R: R\$ 0,25
 Q 5 – É possível determinar o lucro da produção sem que haja o número de litros de leite produzidos? Explique.
 R: Não, o lucro da produção depende do número de litros de leite produzidos.
 Q 6-a – Qual é a variável dependente? R: o lucro da produção
 Q 6-b – E qual é a variável independente? R: o número de litros de leite produzidos.
 Q 7 - É possível encontrar uma expressão geral para representar o lucro da produção de leite considerando a variação da quantidade de leite produzida em cada mês?

$$L = 0,25 * 8000$$

$$L = 0,25 * 16000$$

$$L = 0,25 * q$$

Fonte: Dados da pesquisa

Quando alguma questão não apresentava uma resposta satisfatória por algum grupo, era realizada uma intervenção nas discussões, por meio de novos questionamentos da pesquisadora, e os demais grupos contribuíam para levar os alunos a uma resposta correta. Após toda a socialização, foram apresentadas as seguintes questões, conforme a Figura 10.

Figura 10 – Questões propostas aos alunos

Q.8 - Como será a representação gráfica desta expressão algébrica? Faça o gráfico discreto.
 Q.9 - A expressão algébrica encontrada é uma Função?
 Q.10 - Sabendo que as grandezas são proporcionais, que tipo de função ela representa?

Fonte: Dados da pesquisa

Na Q. 8, os estudantes realizaram a representação gráfica discreta da expressão algébrica, utilizando folhas quadriculadas, uma vez que já tinham conhecimento sobre isso trazido do 9.º ano. Foram representados os eixos das abscissas e das ordenadas e marcados os pontos que correspondem à quantidade de leite (em litros), $x = 1, x = 2, x = 3 \dots$ Nesse momento, os alunos refletiram, com o auxílio da pesquisadora, sobre os números negativos dos eixos e que, nesta situação, eles não fariam sentido. Assim como se for considerada apenas a quantidade de leite em litros exatos, também não fariam sentido os números decimais. Para finalizar a discussão, refletiu-se quanto às limitações do gráfico desenhado no papel, que foram apontadas pelos alunos, ao considerar que não é possível observar os valores abordados no problema para as variáveis, visto que são valores altos.

Na Q. 9, os alunos consideraram a definição de função. E, para responder a Q. 10, escrevemos no quadro branco os casos particulares de função afim: função polinomial do 1.º grau: $y = ax + b$; função identidade: $y = x$; função linear: $y = ax$ e função constante: $y = a$. Observando os casos particulares, os alunos puderam – em seus grupos – identificar qual dos casos mais se aproximava da expressão algébrica encontrada.

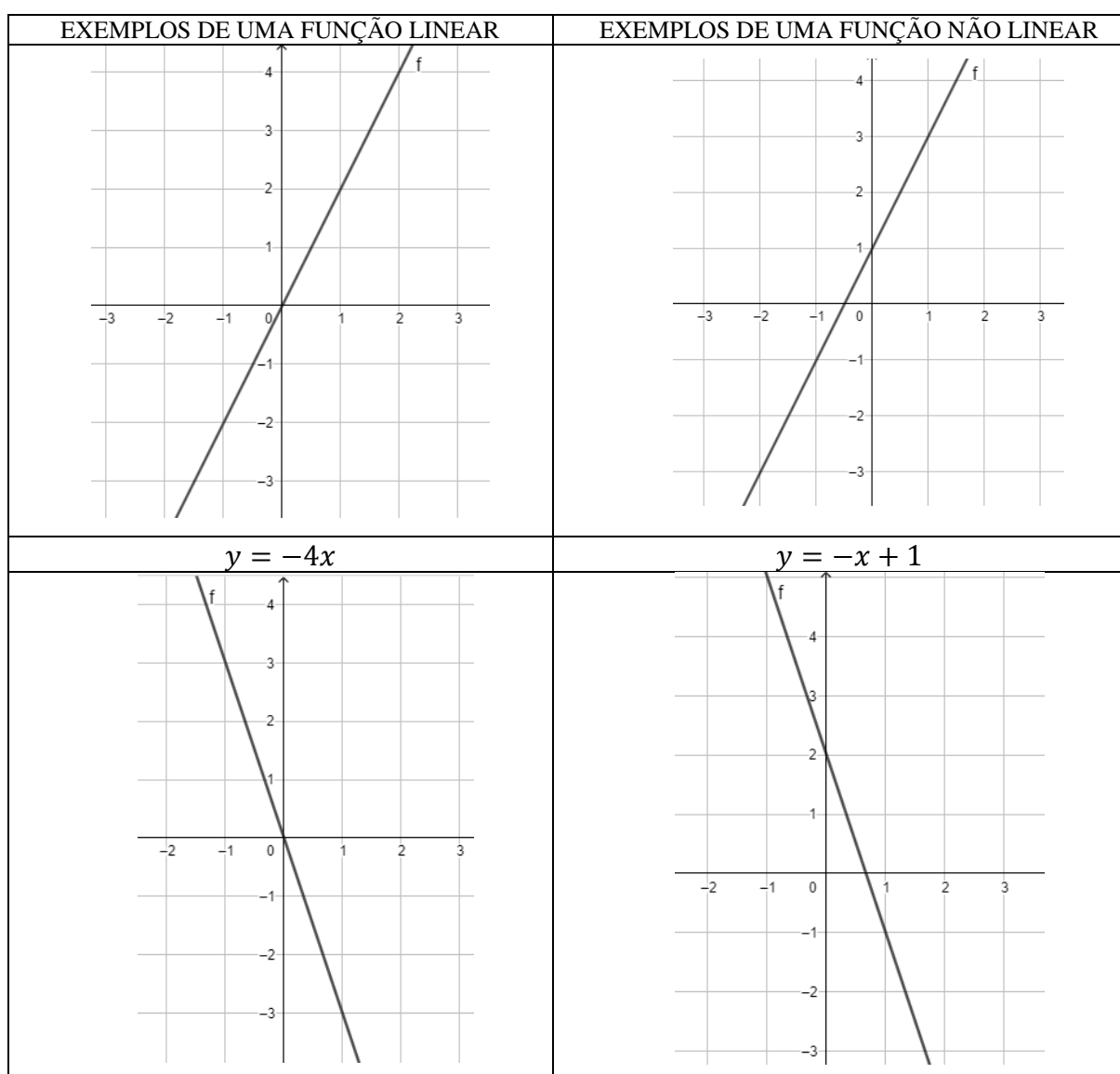
Os estudantes perceberam que se trata de uma função linear. A partir disso, para chegar na sua definição, foi entregue o Quadro 7 com exemplos de funções lineares e de funções não lineares, na sua representação gráfica e algébrica. Nos grupos, observaram o quadro e elaboraram a sua definição de “função linear” e, em seguida, a escreveram.

Quadro 7 – Exemplos de funções lineares e de funções não lineares

(continua)

EXEMPLOS DE UMA FUNÇÃO LINEAR	EXEMPLOS DE UMA FUNÇÃO NÃO LINEAR
$y = 5x$	$y = 5x + 2$

(conclusão)



Fonte: Produzido pela pesquisadora, usando o GeoGebra

Na discussão coletiva, os alunos elaboraram uma definição para a função linear e discutimos as características da expressão geral e o que cada elemento representa, podendo comparar com a situação estudada. A definição foi socializada pelo Aluno 35 da seguinte forma: “Concluimos que possui um valor fixo e duas variáveis. O valor da variável depende proporcionalmente do valor da variável independente. Basicamente, toda função linear terá o ponto zero”. Assim, foi possível chegar à conclusão de que a função encontrada é uma função linear. Para finalizar este momento, foi entregue o material de sistematização da Figura 11²⁵

²⁵ Material elaborado com base no livro didático: **Matemática interligada: funções afim, quadrática, exponencial e logarítmica** / obra coletiva; editora responsável Thais Marcelle de Andrade. 1. ed. São Paulo: Scipione, 2020.

como formalização do conceito matemático e para que os estudantes tivessem o registro no caderno. A sistematização foi lida pelos estudantes de forma oral.

Figura 11 – Sistematização para definição de proporcionalidade, função linear e função afim

<p>PROPORCIONALIDADE Duas grandezas são proporcionais (ou diretamente proporcionais) quando aumentam ou diminuem na mesma proporção, ou seja, ao dobrarmos ou triplicarmos o valor de uma, o valor da outra também dobrará, triplicará, etc. Ao calcularmos $\frac{y}{x}$, com $x \neq 0$, obtemos a constante de proporcionalidade.</p> <p>FUNÇÃO LINEAR: Uma função f, de $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, que a todo número $x \in \mathbb{R}$ associa o número $f(x) = ax + b$, com $a \in \mathbb{R}$ e $b = 0$ é chamada Função Linear. Logo, $f(x) = ax$ ou $y = ax$ Em toda função linear os valores correspondentes das variáveis x e y são diretamente proporcionais. Exemplos: $y = 0,25x$ Exemplo: $\frac{2000}{8000} = \frac{4000}{16000} = \frac{1000}{4000} = \frac{3000}{12000} = 0,25$ A Função Linear é um dos casos particulares de Função Afim:</p> <p>FUNÇÃO AFIM Uma função f, de $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, que a todo número $x \in \mathbb{R}$ associa o número $f(x) = ax + b$, com a e b reais é chamada Função Afim.</p> $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = ax + b \text{ ou } y = ax + b$

Fonte: Dados da pesquisa

Após a sistematização, foram propostos exercícios para que os alunos pudessem identificar as grandezas envolvidas em diferentes contextos, determinar a variável dependente e a independente, encontrar a constante de proporcionalidade, escrever a lei de formação da função, entre outros. Posteriormente, foi abordado o estudo do gráfico da função linear, a partir da lei de formação encontrada na resolução do problema apresentado na carta, com uso do *software* GeoGebra²⁶.

A maioria dos alunos não conhecia o GeoGebra, então a pesquisadora realizou uma apresentação de sua interface, destacando as ferramentas que seriam utilizadas na construção de gráficos. Assim, foi apresentada uma nova carta do agricultor com outro problema a ser resolvido, relacionado a quantidade de silagem de milho necessária diariamente, em média, para alimentar as vacas. Desta vez, a utilização do GeoGebra facilitou a resolução.

Os alunos puderam acessar o *software* em duplas, com uso de Chromebook²⁷, e realizar a representação gráfica da função. Assim, observaram as características e, com o auxílio da

²⁶ Apesar da relevância do uso do software para a aprendizagem dos alunos, na impossibilidade de usar todo o material empírico produzido e na necessidade de fazer opções pelas cenas que melhor possibilitassem atender aos objetivos da pesquisa, nenhuma cena com uso do GeoGebra foi abordada no capítulo da análise.

²⁷ Os *chromebooks* foram disponibilizados nas escolas municipais de Ijuí-RS a partir de ações do Programa Educação em Rede, com o intuito modernizar o processo educacional.

pesquisadora, perceberam que o contexto do problema permitia que as variáveis representassem apenas números naturais, como no caso do número de vacas. Portanto, foi necessária a representação do gráfico discreto.

Este capítulo desvelou a dimensão orientadora e a dimensão executora, destacando os estudos essenciais para a compreensão do tema e a elaboração e organização de situações de ensino elaboradas com o intuito de alcançar o objetivo geral. Na sequência será exibido o quadro analítico da pesquisa, o Quadro 8.

Quadro 8 – Quadro Analítico da Pesquisa

Problema de pesquisa	Objetivo Geral	Ações Investigativas	Modo de apreensão dos dados	Eixos de Análise
No que se refere à organização do ensino de função afim no Ensino Médio alguns elementos podem ser essenciais para a aprendizagem dos estudantes?	Investigar elementos que se mostram como essenciais para o processo de aprendizagem do conceito de função afim de estudantes de uma turma do Ensino Médio.	Estudar o movimento lógico-histórico do conceito de função e sua presença nas orientações curriculares.	Pesquisa bibliográfica em: - documentos curriculares: BNCC e RCG; - referências sobre conhecimento matemático.	Composição do capítulo 4: - movimento lógico-histórico do conceito de função. - Função afim e proporcionalidade.
		Identificar elementos que contribuem para a apropriação dos nexos conceituais da função afim.	Elaboração e desenvolvimento de situações de ensino.	Eixo 1: Tudo se transforma Eixo 2: A relação de dependência entre grandezas variáveis a partir do jogo pega varetas Eixo 3: A proporcionalidade no ensino da função afim
		Analisar situações de ensino que podem desencadear a aprendizagem do conceito de função.		

Fonte: Sistematização da pesquisadora

O desenvolvimento das situações de ensino com uma turma de alunos possibilitou a produção do material empírico, que será analisado a partir da dimensão orientadora e constituirá a dimensão executora. Esclarecemos que não utilizamos tudo que foi produzido durante o desenvolvimento desta pesquisa, por questão de espaço no texto, mas optamos por aquelas informações que pudessem atender ao nosso objetivo e fossem suficientes para responder ao problema de pesquisa. No capítulo a seguir, será apresentado o material empírico produzido juntamente com as análises realizadas a partir do embasamento teórico.

6 APREENSÃO DA REALIDADE: PROCESSO ANALÍTICO DO MATERIAL EMPÍRICO

Neste capítulo são apresentados alguns materiais empíricos produzidos como parte da etapa de apreensão da realidade, que representa um primeiro passo para a investigação do fenômeno e, em nossa pesquisa, é determinada pelos princípios teórico metodológicos da THC. Essa etapa compõe a dimensão executora, porém é a dimensão orientadora que sustentará as análises realizadas para alcançar o objeto da pesquisa.

É importante retomar que, neste capítulo, objetivamos alcançar as ações investigativas de *identificar elementos que contribuem para a apropriação dos nexos conceituais da função afim e analisar situações de ensino que podem desencadear a aprendizagem do conceito de função*. Essas são fundamentais para alcançarmos o objetivo geral.

Para responder ao problema da pesquisa, elencamos três eixos de análise: 1) Tudo se transforma; 2) A relação de dependência entre grandezas variáveis; 3) A proporcionalidade no ensino da função afim. Os eixos estão organizados, baseados em três situações de ensino desenvolvidas com a turma de alunos. Portanto, o primeiro eixo está voltado ao nexo conceitual fluência e a compreensão de que tudo se transforma a todo momento; o segundo eixo aos nexos conceituais variável, campo de variação e dependência; e o terceiro, especialmente para a proporcionalidade. Tais eixos de análise serão expostos por meio de sete episódios, os quais são compostos por cenas, como mostra o Quadro 9.

Os nexos conceituais da álgebra (fluência, campo de variação e variável) recebem destaque, pois consideram o movimento lógico-histórico da álgebra e podem possibilitar aos estudantes se apropriarem do pensamento algébrico e do conceito de função afim.

Quadro 9 - Organização dos Eixos de Análise

(continua)

Eixos de Análise	Episódios	Cenas
Eixo 1: Tudo se transforma	Episódio 1: O eu	Cena 6.1.1.1: Um olhar para si Cena 6.1.1.2: Percepções das mudanças Cena 6.1.1.3: Mudanças rápidas conforme o meio
	Episódio 2: O mundo	Cena 6.1.2.1: Mudanças em contexto próximo Cena 6.1.2.2: Padrão em mudanças e proporção Cena 6.1.2.3: Tudo se transforma
Eixo 2: A relação de dependência entre grandezas variáveis	Episódio 3: Variável	Cena 6.2.1.1: Necessidade de uma variável Cena 6.2.1.2: Diferentes variáveis
	Episódio 4: Campo de variação	Cena 6.2.2.1: Compreensão do campo de variação Cena 6.2.2.2: Identificação do campo de variação
	Episódio 5: Dependência	Cena 6.2.3.1: Identificação da relação de dependência Cena 6.2.3.2: A compreensão de função a partir da dependência

(conclusão)

Eixos de Análise	Episódios	Cenas
Eixo 3: A proporcionalidade no ensino da função afim	Episódio 6: Identificando grandezas diretamente proporcionais	Cena 6.3.1.1: A carta do agricultor e o cálculo do lucro Cena 6.3.1.2: Diferentes opiniões na construção da solução Cena 6.3.1.3: As grandezas diretamente proporcionais
	Episódio 7: Definindo a função afim	Cena 6.3.2.1: A proporção entre o lucro e a quantidade de leite produzida Cena 6.3.2.2: Identificando a constante de proporcionalidade Cena 6.3.2.3: Encontrando a função afim

Fonte: Sistematização da pesquisadora

As informações produzidas para a análise, a partir da organização do material empírico, considerando os diferentes instrumentos utilizados, representam um momento do fenômeno investigado. Conforme Araújo e Moraes (2017), com base nele é possível analisar o fenômeno para determinar as relações essenciais que o constituem.

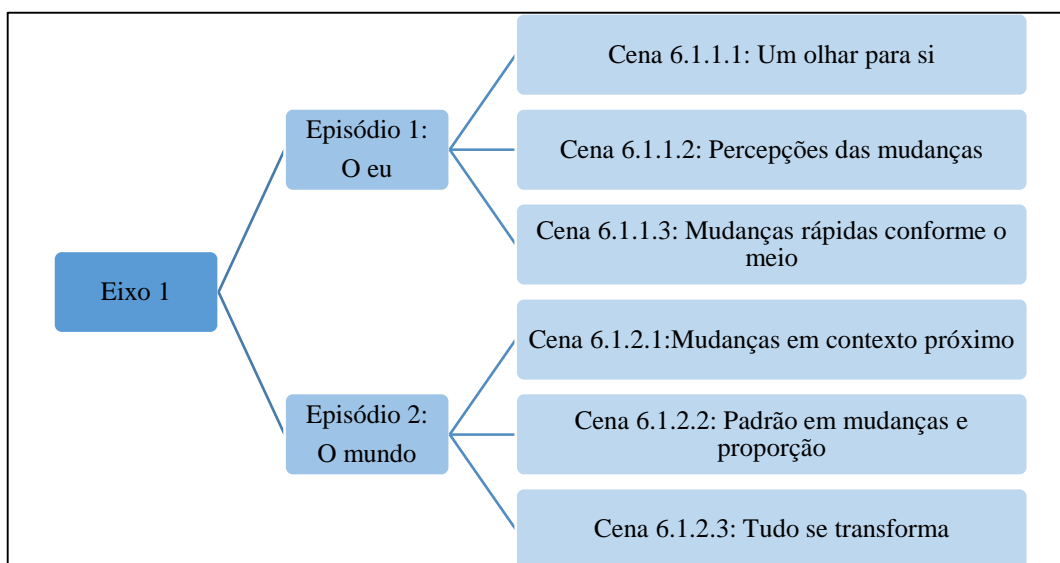
Nos subitens a seguir abordamos cada eixo de análise, bem como os episódios e as cenas que os constituem, para apreender o fenômeno em movimento com vistas a alcançar o objetivo da pesquisa e identificar elementos essenciais para a aprendizagem do conceito de função afim pelos alunos.

6.1 TUDO SE TRANSFORMA

Como afirma o filósofo Heráclito de Éfeso, “O Mundo está em permanente evolução; todas as coisas, a todo o momento, se transformam, tudo *flue*, tudo *devém*” (CARAÇA, 1951, p. 110, grifo do autor). Desse modo, a compreensão da fluência dos diferentes fenômenos proporciona o entendimento das mudanças e as transformações que ocorrem em nossa realidade.

A organização da situação de ensino, voltada à apropriação do nexos conceitual de fluência, tem como intuito possibilitar aos alunos a compreensão de que tudo está em constante mudança e nada é estável. A fluência pode ser dividida em dois momentos fundamentais: um olhar para as próprias mudanças e a ampliação desse olhar para o mundo. Estes momentos irão compor dois episódios, organizados por meio de cenas, como mostra a Figura 12.

Figura 12 - Episódios e cenas que compõem o Eixo de Análise 1



Fonte: Sistematização da pesquisadora

6.1.1 Episódio 1: O eu

Neste episódio, analisamos registros produzidos pelos alunos em seus portfólios e diálogos realizados entre esses e a pesquisadora durante o desenvolvimento da primeira situação de ensino proposta, a qual tinha o intuito de possibilitar a apreensão do conceito de fluência. Para seu desenvolvimento, a pesquisadora solicitou previamente aos alunos que levassem para a aula três fotografias de diferentes anos de sua vida.

Os alunos organizaram-se em dez grupos, de três ou quatro integrantes conforme determinamos, e receberam as seguintes questões de forma impressa: *Q. 1 - Você é o mesmo de alguns anos atrás? Se não, quais as principais mudanças que você consegue perceber? Q. 2 - Você é o mesmo de ontem? Se não, o que mudou? Q. 3 - Você é o mesmo do início da aula de hoje? E do intervalo? De um segundo atrás? O que mudou?*

A pesquisadora solicitou que, a partir da observação das fotografias, realizassem uma discussão nos grupos para responder aos questionamentos. Enquanto isso, ela interagiu com os grupos para acompanhar os debates e as reflexões, ao mesmo tempo em que as registrava por meio de gravações, em áudio e vídeo. A cena 6.1.1.1, no Quadro 10, apresenta o diálogo ocorrido em um dos grupos no momento de interação com a pesquisadora.

Quadro 10 - Cena 6.1.1.1: Um olhar para si

Cena 6.1.1.1: Diálogo entre a pesquisadora e um grupo de alunos (Grupo 8) que aconteceu no primeiro dia (10/05/2022) de desenvolvimento das situações de ensino, após serem disponibilizadas as questões: Q.1, Q.2 e Q.3. Os alunos estavam organizados em grupos e observavam as fotografias trazidas de casa, as quais mostravam diferentes momentos de sua infância. A pesquisadora interagia com os grupos e observava as fotografias.

1. **Pesquisadora:** *Deixa eu dar uma olhadinha nessas fotos.*
2. **Aluna 2:** *Muito linda, não é professora?*
3. **Pesquisadora:** *Claro! Olha que amor.*
4. **Aluna 24:** *Parecem novas essas fotos aí.*
5. **Aluna 2:** *Mas são novas. Foram três anos atrás essa.*
6. **Aluna 24:** *Sério?*
7. **Pesquisadora:** *E o que você percebeu que tem maior diferença nessas fotos? Olhando para você mesma.*
8. **Aluna 2:** *Ah, meu Deus, muita coisa. Eu engordei, eu cresci. Mas olha, não parece a mesma pessoa essa aqui com essa [apontando para duas fotos suas].*
9. **Pesquisadora:** *Não parecem a mesma pessoa? O que mudou mais?*
10. **Aluna 2:** *Ah, meu narizinho.*
11. **Pesquisadora:** *E o cabelo?*
12. **Aluna 2:** *Ih, ficou moreno, né?*
13. **Pesquisadora:** *Aqui era mais loirinho.*
14. **Aluna 2:** *É. Meu Deus, como é que mudei tanto.*
15. **Pesquisadora:** *E vocês? Olha aqui, loirinha.*
16. **Aluna 9:** *Agora não sou tão loira.*
17. **Pesquisadora:** *Olha a franjinha. O que você acha que mais mudou em suas fotos, comparando com hoje?*
18. **Aluna 9:** *O nariz, eu acho.*
19. **Aluna 24:** *Teu olho parecia azul.*
20. **Pesquisadora:** *Como é hoje? Deixa eu ver?*
21. **Aluna 24:** *Verde. Eu acho que essa aqui não é você, é sua irmã gêmea.*

Fonte: Dados da pesquisa

O diálogo exposto na cena 6.1.1.1 revela que alguns alunos se mostraram surpresos, ao observarem suas fotos e perceberem o quanto mudaram ao longo do tempo, como nas falas 8 e 14. Isso também é percebido nas falas de outros alunos, o que traz indicativos de que o uso de fotografias nesta primeira situação possibilitou um olhar para si próprio, por cada aluno, permitindo uma aproximação com a compreensão das mudanças antes de olhar para as demais situações.

De acordo com Sousa (2004), o segredo das ideias que Heráclito defendia, como a permanente evolução do mundo e que tudo se transforma o tempo todo, está na simples observação da vida. “E aí está o segredo da variação, que vai fundamentar os conceitos científicos, incluindo-se o conceito matemático de hoje” (SOUSA, 2004, p. 186). Observar a vida e as mudanças é fundamental para compreender a fluência e a essência do conceito de função afim.

Com a observação das fotografias, foi possível perceber grandes mudanças em um curto período. Como no caso da Aluna 2 que mostrou fotografias suas de apenas três anos atrás, nas

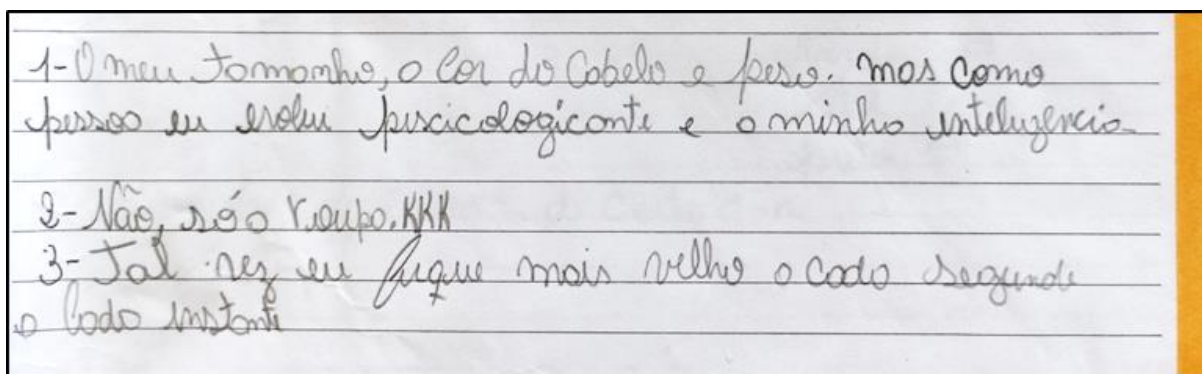
quais tinha aparência de criança, o que, de fato, corresponde a sua idade, mas com mudanças significativas na aparência, ao comparar com a atualidade.

As mudanças físicas se sobressaíram nas falas dos alunos e na sistematização, pois, são mais visíveis nas imagens. A percepção dessas modificações que acontecem fisicamente ao longo do tempo, em suas próprias fotografias e dos seus colegas, contribuiu para que os alunos compreendessem que muitas mudanças acontecem em nossas vidas e que, muitas vezes, nem nos damos conta.

Entretanto, mesmo que as mudanças não sejam sempre observadas, elas acontecem a todo momento, pois a fluência é considerada por Caraça, com base em Heráclito, “uma das características da realidade em que vivemos” (LANNER DE MOURA; SOUSA, 2008, p.66). Destarte, tudo está constantemente em movimento e transformação, inclusive nós mesmos.

Alguns alunos também citaram mudanças relacionadas a comportamento, amadurecimento e desenvolvimento cognitivo, como mostra a Figura 13, no caso do registro do portfólio do Aluno 35 que mencionou seu desenvolvimento psicológico e sua inteligência. Ao citarem tais mudanças, os alunos utilizavam frases gerais e acabavam não especificando o que entendiam por evoluir psicologicamente e amadurecer, por exemplo.

Figura 13 - Registro do portfólio do Aluno 35 em resposta as questões Q.1, Q.2 e Q.3



Fonte: Dados da pesquisa

O desenvolvimento desta primeira situação possibilitou uma importante interação não só entre os alunos, especialmente em seus grupos, tendo em vista que muitos deles ingressaram na escola naquele mesmo ano de 2022 e puderam conhecer melhor os colegas, como também com a pesquisadora, pois os alunos valeram-se das fotografias para compartilhar histórias de sua infância e interesses pessoais.

Após um determinado tempo de debate nos grupos, ao perceber que as questões propostas haviam sido respondidas, a pesquisadora iniciou a sistematização com a turma.

Assim, realizava a leitura de cada questão e todos os grupos, a partir de pelo menos um representante, apresentava uma síntese das suas reflexões. A cena 6.1.1.2 do Quadro 11 mostra o diálogo de dois grupos com a pesquisadora, durante a sistematização.

Quadro 11 - Cena 6.1.1.2: Percepções das mudanças

<p>Cena 6.1.1.2: Diálogo entre a pesquisadora e alunos dos grupos 6 e 4 que aconteceu no primeiro dia (10/05/2022) de desenvolvimento das situações de ensino, durante a sistematização das questões: <i>Q. 2 - Você é o mesmo de ontem? Se não, o que mudou? Q. 3 - Você é o mesmo do início da aula de hoje? E do intervalo? De um segundo atrás? O que mudou?</i> Após a leitura de cada questão pela pesquisadora, os grupos apresentavam uma síntese de suas discussões. E, para melhor compreender as ideias expostas pelos alunos, a pesquisadora realizou alguns questionamentos.</p>
<p>GRUPO 6</p> <p>22. Aluno 14: <i>Eu acho que não mudei nada, que sou o mesmo.</i></p> <p>23. Pesquisadora: <i>O mesmo de ontem para hoje, não mudou nada?</i></p> <p>24. Aluno 14: <i>Não.</i></p> <p>25. Pesquisadora: <i>Do mesmo jeito que você estava ontem, você chegou na escola hoje, sem mudar nada?</i></p> <p>26. Aluno 14: <i>Não.</i></p> <p>27. Pesquisadora: <i>Vocês concordam com ele que não mudaram nada?</i></p> <p>28. Aluno 4: <i>Sempre muda alguma coisa.</i></p> <p>29. Pesquisadora: <i>Como o quê?</i></p> <p>30. Aluno 4: <i>A gente sempre está aprendendo um pouco mais.</i></p> <p>31. Aluno 34: <i>Cada dia aumenta a experiência.</i></p> <p>GRUPO 4</p> <p>32. Aluno 31: <i>Sim, não mudou nada.</i></p> <p>33. Aluna 17: <i>Não! Vamos em grupo. Não, a gente não é o mesmo desde o início da aula, nem do intervalo, nem de um segundo atrás. Porque cada vez a gente está aprendendo mais, a gente está mudando nossas opiniões, com tudo que a gente está vendo.</i></p> <p>34. Aluno 31: <i>Mas eu sou.</i></p> <p>35. Pesquisadora: <i>E fisicamente mudou alguma coisa?</i></p> <p>36. Aluna 17: <i>Sim, eu acho que engordei um pouquinho, comi dois pedaços de bolo [risos].</i></p> <p>37. Pesquisadora: <i>E só o “aluno 31” que acha que não mudou nada?</i></p> <p>38. Aluno 1: <i>É que o “aluno 31”, a barriga dele é de vento [risos].</i></p> <p>39. Pesquisadora: <i>Ele chegou no início da aula hoje e até agora está a mesma coisa? Estava de casaco ou manga curta?</i></p> <p>40. Aluno 31: <i>Pior que eu estava de casaco sabe.</i></p> <p>41. Aluno 1: <i>E eu tirei o boné.</i></p>

Fonte: Dados da pesquisa

Os alunos demonstraram facilidade ao observar mudanças em maiores períodos, como diferentes anos de suas vidas, conforme a questão Q.1. Entretanto, em períodos mais curtos e recentes, como solicitado nas questões Q.2 e Q.3, alguns alunos tiveram dificuldade em citar alguma mudança e respondiam que continuavam os mesmos, como nas falas 22 e 32. Essa situação pode ser percebida também nos registros escritos em seus portfólios, como ilustra a Figura 14, e que em alguns casos não foi citado oralmente.

Figura 14 - Registro dos portfólios dos Alunos 25 e 14 em resposta às questões Q.1, Q.2 e Q.3

1.1 - Não, mudei meu comportamento, aparência, maturidade, etc.

1.2 - Sim.

1.3 - Sim, não mudei nada.

1) Não sou, mudei mais na cor do cabelo, e na maturidade.

2) Sou o mesmo de ontem.

3) Sou o mesmo do início do ano de hoje como pessoa, mas aprendi mais coisas.

Fonte: Dados da pesquisa

Essa dificuldade em aceitar ou compreender que tudo está em constante transformação não é de hoje, pois “A única verdade absoluta, a do movimento, da fluência, da transformação, só foi aceita pela humanidade a partir dos estudos de Copérnico e de Galileu, apesar de Heráclito brindar a humanidade desde os tempos mais remotos com ideias que contradiziam a metafísica” (SOUSA, 2004, p. 186). Logo, a humanidade levou muito tempo para aceitar que tudo flui.

Percebemos que, quando os alunos relatavam continuar os mesmos, os colegas discordavam e apontavam possíveis mudanças, como nas falas 30, 31 e 33. Ou então, por meio de questionamentos, a pesquisadora levou os alunos a observarem alguma modificação, por mais simples que fosse. Dessa forma, com os diálogos e as reflexões, é possível supor que a maioria dos alunos identificou mudanças que ocorreram a longo e curto prazo.

Lanner de Moura e Sousa (2008) destacam que aprender álgebra também significa entender que tudo flui, que a vida está em constante movimento e que nada no universo é imutável, estático, pronto e acabado. Portanto, compreender e visualizar mudanças em si mesmo a todo momento pode contribuir para alcançar este entendimento de que “tudo flui, tudo varia; que a linguagem do universo do qual somos parte é contrária à permanência. A linguagem do universo contém a mutabilidade das coisas” (LANNER DE MOURA; SOUSA, 2008, p. 68).

E a maioria dos alunos, de modo geral, entendeu que constantes transformações ocorrem em suas vidas, mesmo que, inicialmente, poucos tenham afirmado não perceber mudanças recentes. No decorrer das reflexões, acabaram notando alguma alteração. Entretanto, os alunos

expuseram percepções diferentes, como mostra a cena 6.1.1.3, apresentada no Quadro 12, revelada na sistematização realizada por um dos grupos de alunos.

Quadro 12 - Cena 6.1.1.3: Mudanças rápidas conforme o meio

<p>Cena 6.1.1.3: Esta cena aconteceu no primeiro dia (10/05/2022) durante a sistematização da questão Q. 3 - <i>Você é o mesmo do início da aula de hoje? E do intervalo? De um segundo atrás? O que mudou?</i> quando a pesquisadora solicitou aos alunos do Grupo 9 que apresentassem uma síntese de suas reflexões, dando continuidade aos grupos anteriores.</p>
<p>42. Aluna 32: <i>Eu e o “aluno 11” temos opiniões diferentes, eu vou falar e ele vai falar, tá? Na minha opinião, eu acho que a gente não diria que muda agora, mas a gente tem uma vivência nova a cada momento e daqui um tempo é que a gente percebe isso.</i></p> <p>43. Pesquisadora: <i>Então você acha que do início da aula até o intervalo não mudou nada?</i></p> <p>44. Aluna 32: <i>Não, mas que a gente sempre aprende as coisas igual.</i></p> <p>45. Pesquisadora: <i>E qual é a opinião do “aluno 11”?</i></p> <p>46. Aluno 11: <i>Eu acho assim, no início a gente pode acabar não mudando muita coisa, mas no intervalo a gente muda, porque é uma coisa que a gente acaba brincando, zoando mais, isso gera uma mudança momentânea. Daí a gente sobe para a sala de novo e acaba mudando novamente para algum tom mais sério, sabe. Isso que eu acho.</i></p> <p>47. Pesquisadora: <i>Muda o comportamento?</i></p> <p>48. Aluno 11: <i>Daí tu muda o comportamento, tipo na hora do recreio assim a gente acabada se zoando, se xingando e na sala a gente tenta manter um comportamento mais adequado.</i></p>

Fonte: Dados da pesquisa

No diálogo apresentado na cena 6.1.1.3, é possível perceber a divergência de opiniões entre integrantes do mesmo grupo. Mesmo após o momento de debate e reflexão no grupo, os alunos mantiveram suas opiniões. Ambos apontaram mudanças, mas destacaram que elas acontecem ou são percebidas de formas diferentes. Daí, a relevância do coletivo e do respeito com a diversidade de opiniões.

A Aluna 32 ressaltou que as mudanças são percebidas com o passar do tempo, mas reconheceu que a todo momento passa por novas vivências e que sempre aprende. Portanto, podemos supor que esta aluna está se referindo a mudanças mais profundas, acentuadas, que são mais aparentes, não reconhecendo como mudança as aprendizagens imediatas.

Para o Aluno 11, o seu comportamento mudou, conforme o ambiente em que ele está, ou seja, sofre influência do meio. Segundo Vigotski (2018, p. 83), “o meio exerce influência pela vivência da criança, ou seja, dependendo de como ela elaborou internamente sua relação com determinado momento ou situação”. Para esse aluno, ficou claro que o meio determina seu comportamento, fazendo com que ele perceba mudanças que acontecem em poucos minutos ou segundos.

As questões propostas pela pesquisadora tinham como intuito possibilitar uma reflexão acerca das diferentes mudanças que acontecem a todo momento. Conforme Sousa (2004, p. 187), por meio de perguntas como “*Você é o mesmo de um ano atrás?; de um mês atrás?; de uma semana atrás?; de um segundo atrás? Por quê?*”, é possível vivenciar e refletir acerca da

fluência e sua relação com os conceitos algébricos, para compreender que tudo está em movimento.

6.1.2 Episódio 2: O mundo

As situações de ensino que compõem este episódio têm como intencionalidade ampliar o olhar dos alunos para mudanças em diferentes contextos, para além de si mesmo, e levar a percepção de que tudo está em constante transformação. Portanto, analisamos novos diálogos, entre os alunos e com a pesquisadora e os registros produzidos nos portfólios para identificar as mudanças percebidas.

Os alunos foram divididos em dez grupos, por meio de um sorteio, e receberam as seguintes questões de forma impressa: *Q.4-a- Ao fazer visitas em uma plantação de milho, por exemplo, a cada visita as plantas permanecerão exatamente as mesmas? Q.4-b- O que pode ter alterado? Q.5 - E os animais, eles também mudam? Cite um exemplo. Q.6 - Vocês conseguem pensar em mais alguma coisa que muda? Explique. Q.7 - Então, será que tudo muda?*

As questões Q. 4-a, Q. 4-b e Q. 5 foram elaboradas pela pesquisadora, considerando o contexto do Curso Técnico em Agropecuária, com a intenção de possibilitar aos alunos um olhar para o contexto próximo, para, posteriormente, ampliar a observação. A cena 6.1.2.1 do Quadro 13 apresenta a sistematização das reflexões realizadas por alguns grupos de alunos, acerca das referidas questões.

Quadro 13 - Cena 6.1.2.1: Mudanças em contexto próximo

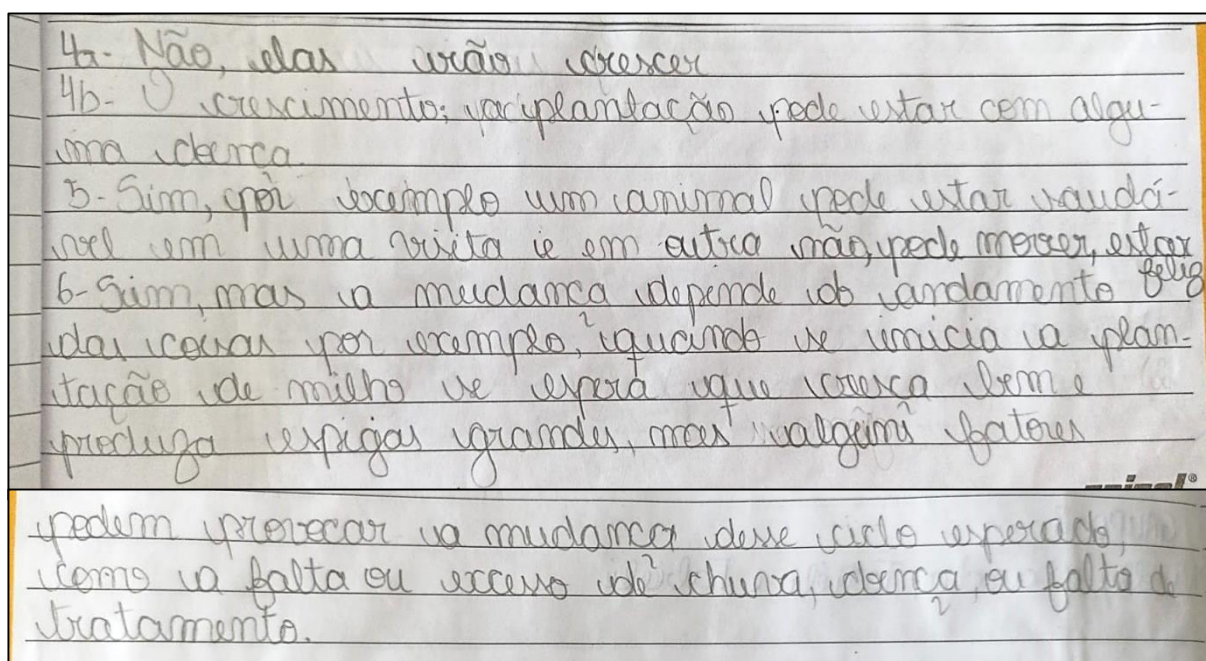
<p>Cena 6.1.2.1: A cena a seguir ocorreu no segundo dia de aula (16/05/2022), durante a sistematização das questões Q.4-a, Q.4-b e Q.5, em que os grupos apresentavam as sínteses de suas reflexões. A sistematização com a turma foi realizada após o momento de discussão nos grupos, acerca das referidas questões propostas. Em relação às questões Q.4-a e Q.4-b, os grupos foram representados por um de seus componentes de forma breve, quanto à Q.5 houve um maior diálogo entre os alunos como no Grupo 10.</p>
<ol style="list-style-type: none"> 1. GRUPO 3 - Aluna 32: Não, pois passam por diversos processos de crescimento e amadurecimento, podendo mudar conforme o solo e o clima. 2. GRUPO 10 - Aluno 36: Não, eles mudam de tamanho e vão criando espiga conforme o tempo. Na letra b, eles largam pendão e vão criando espiga. 3. GRUPO 4 - Aluno 21: Não, pois elas desenvolvem um tamanho maior, mas também podem morrer se houver estiagem. <p>GRUPO 10</p> <ol style="list-style-type: none"> 4. Aluno 20: Eles mudam de tamanho e peso. 5. Aluno 11: Ah! E também tem o exemplo da vaca em lactação. De manhã ela pode dar 10 litros por exemplo e de noite dar 11 ou até menos, sei lá, 9. 6. Aluno 20: Depende o período que ela está, se ela está indo mais para o lado que ela está para ficar seca ou se ela vai [inaudível]. 7. Aluno 26: Ou parir. 8. Aluno 20: Conforme o tempo, ela muda a produção dela, conforme a genética ela muda a produção também. 9. Aluno 11: Como é tratada também.

Fonte: Dados da pesquisa

A maioria dos alunos demonstrou facilidade em citar mudanças relacionadas a uma plantação de milho e aos animais, como mostra a cena 6.1.2.1, possivelmente porque são situações que fazem parte do contexto familiar deles ou do próprio Curso Técnico em Agropecuária que estão cursando. De acordo com Martins (2011, p. 120), o desenvolvimento do sujeito está relacionado à estímulos, e esses, por sua vez, constituem-se como “ os dispositivos culturais criados pelo contexto histórico-social que sustenta a ocorrência do comportamento”.

Ao serem questionados, na questão Q. 6, sobre outras mudanças, a grande maioria dos alunos continuou se referindo aos contextos próximos, de plantas e animais, como mostra a Figura 15 com o registro da Aluna 9.

Figura 15 - Registro do portfólio da Aluna 9 em resposta as questões Q. 4-a, Q. 4-b, Q. 5 e Q. 6



Fonte: Dados da pesquisa

É importante destacar que muitos alunos começaram a perceber algumas relações de dependência a partir das condições necessárias para que as mudanças acontecessem. Mas, estas mudanças não têm uma regularidade, como é o caso das modificações causadas na plantação de milho pela falta ou excesso de chuvas citadas pela Aluna 9, na Figura 15.

Conforme Sousa (2004), para que os alunos possam compreender a álgebra como descrição de movimentos, deve-se iniciar o estudo a partir de conceitos de movimento, fluência, número, variável e campo de variação, os quais estão presentes na vida fluente, e levar os alunos

a identificarem que “dentre os movimentos presentes na vida, há aqueles que são regulares e aqueles que são irregulares” (SOUSA, 2004, p. 94).

Portanto, para a aprendizagem de conceitos algébricos, é fundamental que sejam observadas situações em que os movimentos são irregulares e aquelas em que são regulares. A cena 6.1.2.2 do Quadro 14 apresenta um diálogo realizado entre os alunos a partir de um questionamento da pesquisadora, que visava possibilitar a reflexão acerca de uma mudança regular estimada.

Quadro 14 - Cena 6.1.2.2: Padrão em mudanças e proporção

Cena 6.1.2.2: Este diálogo aconteceu no segundo dia de aula (16/05/2022), durante a sistematização das questões Q.4-a e Q.4-b, a partir do surgimento de novos questionamentos realizados pela pesquisadora de forma oral e discutidos pelos alunos da turma no coletivo.

10. **Pesquisadora:** *Vocês saberiam me dizer, em um dia, quanto mais ou menos cresceria um pé de milho?*
11. **Aluno 21:** *Olha, se passar ureia vai mais rápido.*
12. **Pesquisadora:** *E se não passar?*
13. **Aluno 21:** *Mais lento, mas cresce também.*
14. **Pesquisadora:** *Mas vocês teriam ideia de mais ou menos quanto cresce em um dia?*
15. **Aluna 28:** *Cada planta é diferente.*
16. **Aluno 21:** *Professora, eu acho que um dedo ou dois assim, se passar ureia.*
17. **Aluno 31:** *Rapaz do céu, da onde? Não, cresce um meio dedo, eu acho.*
18. **Pesquisadora:** *Pessoal, vocês concordam? [Silêncio]. Vocês concordam com o “aluno 21”? Ele disse que mais ou menos um ou dois dedos.*
19. **Aluno 31:** *Por dia?*
20. **Aluna 30:** *Depende do dedo.*
21. **Pesquisadora:** *Pessoal, vamos supor que vai crescer mais ou menos um dedo por dia. Dá para ter uma ideia de quanto vai crescer em 10 dias?*
22. **Aluno 31:** *Dá, 10 dedos.*
23. **Pesquisadora:** *Concordam?*
24. **Aluno 6:** *Está louco “aluno 31”? 10 dedos?*
25. **Aluno 21:** *“Aluno 20”, cresce ou não cresce?*
26. **Aluno 20:** *Cresce.*
27. **Aluno 21:** *Viu só. “Aluno 6”, cresce ou não cresce?*
28. **Aluno 6:** *O quê? Quantos dedos?*
29. **Aluno 21:** *Um dedo por dia sim.*
30. **Aluno 6:** *Um dedo ou dois, mas eu acho que não.*
31. **Aluno 11:** *Depende, depende...*
32. **Aluno 6:** *Depende da qualidade do milho.*
33. **Aluno 11:** *É, depende, se dá uma chuva coloca uma ureia.*
34. **Aluno 21:** *Depende da matéria orgânica composta no solo.*
35. **Aluna 15:** *Depende de muitos fatores.*
36. **Pesquisadora:** *Mas vocês concordam que se cresce um dedo por dia, em 10 dias vai crescer 10 dedos?*
37. **Aluno 21:** *Não, perfeitamente não.*
38. **Pesquisadora:** *Perfeitamente não, dá para estimar, mais ou menos, só que esse crescimento não vai ser eterno, ela não vai crescer todo dia um dedo eternamente.*
39. **Aluno 11:** *É chega uma fase que ela para lá e começa a largar o pendão.*
40. **Pesquisadora:** *Mas vão tendo outras mudanças.*
41. **Aluno 21:** *Vamos pesquisar quanto um pé de milho cresce por dia.*

Fonte: Dados da pesquisa

O questionamento da pesquisadora, na fala 10, causou uma agitação na turma e gerou um debate entre os alunos, que se mostraram interessados pelo assunto relacionado à realidade deles. Muitos alunos participaram do diálogo concordando ou discordando dos colegas, mas não conseguiram chegar a um consenso. A fala 41 mostra que, de fato, os alunos foram mobilizados pela necessidade de descobrir o quanto um pé de milho cresce por dia.

A necessidade é fundamental para que os alunos possam se colocar em atividade de aprendizagem, já que “A primeira condição de toda atividade é uma necessidade” (LEONTIEV, 2004, p. 115). Portanto, o professor precisa criar condições para que os alunos sintam a necessidade de se apropriarem do conhecimento, promovendo o desenvolvido deles.

Novamente receberam destaque as condições necessárias para que determinadas mudanças aconteçam, como o crescimento de uma planta que depende de vários fatores (fala 35) e alguns deles foram citados pelos alunos, como uso do fertilizante ureia, a qualidade do milho, a quantidade de chuvas e a matéria orgânica do solo (falas 11, 16, 32, 33 e 34).

Os alunos definiram uma estimativa de crescimento e perceberam um padrão. Ao estimarem que a planta cresceria “um dedo” por dia, estabeleceram uma relação de proporcionalidade e identificaram que o crescimento dependeria de quantos dias se passariam. Assim, dadas as condições, perceberam haver uma regularidade nesse movimento, ampliando a compreensão dos diferentes movimentos presentes em nossa vida, tanto regulares como irregulares.

Por acaso, a matemática tenta descrever e entender muitos deles, a partir do pensamento algébrico. Tenta mostrar, através de inúmeras demonstrações, que o pensamento algébrico pode auxiliar a compreender os movimentos regulares. A partir do momento em que estudamos e compreendemos tais movimentos, criamos movimentos quantitativos e qualitativos, a partir de leis. Em determinados estudos, as leis qualitativas podem ser representadas a partir das quantitativas, a tal ponto, que elaboramos funções (SOUSA, 2004, p. 94).

Em sendo assim, compreender os movimentos regulares, como no caso da proporcionalidade, pode levar ao entendimento da função afim. “A função contém a relatividade e a variação, porque tenta, enquanto instrumento, descrever os movimentos que estão contidos na vida. Movimentos de uma vida que tem fluência e que é mutável” (SOUSA, 2004, p. 175).

Os conceitos matemáticos permitem uma melhor compreensão do contexto e dos movimentos, como no caso de descrever o crescimento ou altura das plantas. Portanto, “através da função pode-se descrever movimentos regulares e é por isso que se pode fazer previsões de determinados movimentos que se apresentam no cotidiano de todo ser vivente” (SOUSA, 2004,

p. 175). A cena do Quadro 15 ilustra uma síntese das reflexões realizadas por alguns grupos de alunos.

Quadro 15 - Cena 6.1.2.3: Tudo se transforma

<p>Cena 6.1.2.3: Esta cena aconteceu durante a sistematização da questão <i>Q. 6 - Vocês conseguem pensar em mais alguma coisa que muda? Explique</i>, no segundo dia de aula (16/05/2022), em que a pesquisadora instiga os alunos a pensarem sobre outras mudanças, que não foram citadas pela mesma.</p>
<p>GRUPO 8</p> <p>42. Aluna 15: <i>Eu coloquei tudo, tudo está em constante transformação.</i></p> <p>43. Pesquisadora: <i>Você acha que tudo muda?</i></p> <p>44. Aluna 15: <i>Sim, porque se tudo não mudasse, provavelmente a gente iria ficar com a vida a mesma coisa e isso não acontece, então tudo muda.</i></p> <p>45. GRUPO 9 - Aluno 4: <i>Na minha opinião, o universo está sempre em constante mudança, pode ter uma coisa microscópica assim, que não faz diferença nenhuma, mas está sempre em constante mudança.</i></p> <p>46. GRUPO 7 - Aluna 9: <i>Sim, mas a mudança depende do andamento das coisas, por exemplo, quando se inicia a plantação de milho, se espera que cresça bem e produza espigas grandes, mas alguns fatores podem provocar mudança desse ciclo esperado, como a falta ou excesso de chuva, doença ou falta de tratamento.</i></p>

Fonte: Dados da pesquisa

Na cena 6.1.2.3, os alunos mostraram, a partir de suas falas, ter compreendido de modo geral que em nossa realidade tudo está em constante transformação, tudo muda, portanto, nada é imutável. Na fala 46, o aluno se refere que até mesmo as coisas microscópicas estão em constante mudança, como afirma Caraça (1951, p. 110, grifo do autor) “do extremo superior ao inferior da escala, do movimento prodigioso se expansão do Universo, ao movimento, não menos prodigioso, das partículas constituintes do átomo, - tudo flue, tudo devém, tudo é, a todo o momento, *uma coisa nova*”.

Portanto, os alunos que compreenderam o movimento da vida e que tudo se transforma, esses se apropriaram do nexos conceitual fluência. Pois

[...] basta observar com atenção, tomando o recuo conveniente; notar como até as coisas mais estáveis se alteram com o tempo: como o ferro envelhece com a ferrugem, como a rocha se desagrega e se torna areia, como as próprias montanhas mudam de forma pela erosão, como os rios mudam de leito, as margens dos continentes ganham e perdem em luta com o mar. Tudo está numa permanente agitação e, por graus insensíveis, evoluindo de forma que a Terra não é, neste instante, a mesma que era há momentos, e será daqui a uns momentos diferente do que é agora (CARAÇA, 1951, p. 110)

Compreender que no universo nada é fixo e acabado, mas sim, que tudo está em movimento e se transformando a todo tempo – a fluência –, é fundamental para compreender a essência do conceito de função, isto porque “O lógico-histórico presente no pensamento algébrico permite-nos dizer que o concreto do conteúdo algébrico é o conceito de movimento, de fluência, que se materializa no conceito de função” (SOUSA; PANOSSIAN; CEDRO, 2014, p. 123).

Contudo, muitos alunos não estabelecem esta conexão entre os movimentos da vida fluente e o conceito de função, ou seja, não percebem que é a função que nos auxilia a descrever qualquer movimento regular, nas diferentes áreas. De acordo com Sousa (2004, p. 156), “os estudantes têm dificuldades em compreender que as expressões que descrevem os movimentos dos diversos fenômenos estudados, em todas as áreas do conhecimento, podem ser formalizados e descritos em linguagem algébrica”.

Estes casos podem ser influenciados pela maneira como o conceito de função é abordado em sala de aula. Por isso, não devemos nos deter somente no aspecto lógico-formal do conceito, mas sim, possibilitar aos alunos compreenderem que “aprender função é entender, antes de tudo, que a totalidade da realidade está em movimento” (SOUSA, 2004, p. 156). Assim, o aluno será capaz de relacionar o conceito de função à realidade fluente.

Em suma, é importante que o ensino do conceito de função seja abordado pelos professores levando em consideração a observação da vida fluente, para que os alunos observem que tudo se transforma a todo momento, em especial, os movimentos regulares que estão presentes em nossas vidas, para que compreendam que muitos destes podem ser descritos em linguagem algébrica, como uma função. Para sistematizar o primeiro eixo de análise, evidenciamos no próximo subitem algumas reflexões com base nas cenas apresentadas.

6.1.3 Sistematização do Eixo de Análise 1

A partir das cenas percorridas, percebemos que o uso das fotografias possibilitou muitas reflexões aos alunos acerca de suas próprias mudanças, especialmente quanto às mudanças físicas, mas também em relação ao desenvolvimento cognitivo. O fato de alguns alunos se mostrarem surpresos com as suas mudanças, revela-nos que possivelmente não haviam refletido sobre elas em outros momentos e que isto foi importante para compreender a fluência da vida.

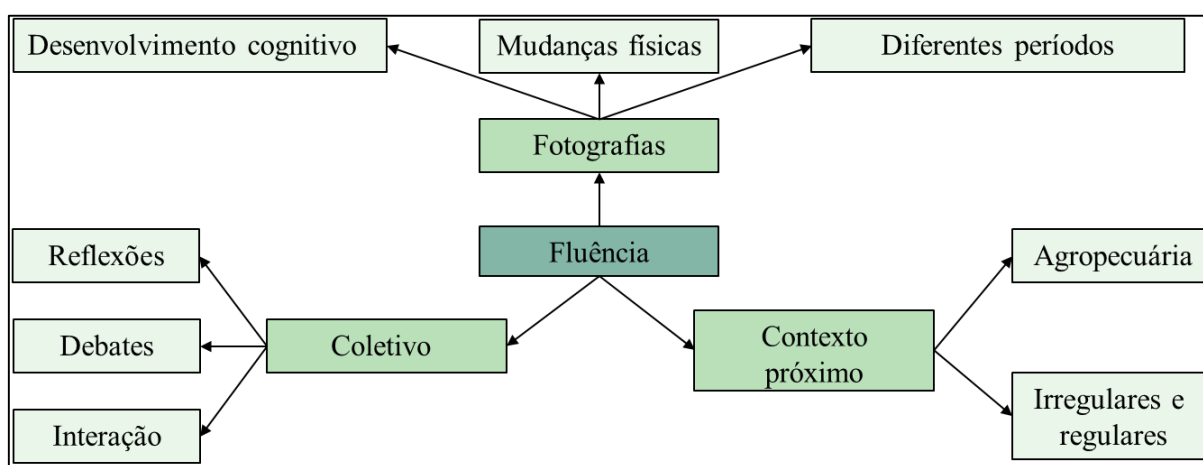
Alguns alunos levaram um tempo maior para compreender a fluência, outros já observavam e comunicavam diversas alterações em suas vidas, especialmente aquelas que aconteciam em um maior período em comparação as mais recentes. Quanto às modificações ocorridas em contextos próximos, os alunos tiveram muita facilidade em citar diversas delas e perceber que existem fatores que influenciam nessas transformações.

As discussões sobre cenários de contextos da agropecuária proporcionaram perceber diferentes mudanças, irregulares e regulares. Nestes momentos, os alunos se mostravam empolgados e participativos, pois se tratava de cenários que fazem parte do seu cotidiano e assuntos de interesse deles, por terem escolhido ingressar no curso técnico.

O coletivo se mostrou essencial para que a maioria dos alunos compreendesse a fluência, que tudo está em constante transformação e nada é imutável, isso porque foram os debates nos grupos que oportunizaram diversas reflexões e entendimentos acerca dos temas abordados.

Mesmo que a participação e o desempenho dos alunos tenham sofrido influência de características individuais, o coletivo viabilizou uma grande interação entre os alunos, que trocavam ideias, muitas vezes complementando e acrescentando as falas dos colegas, em outros momentos discordando e expondo suas diferentes opiniões. Diante do exposto, apresentamos uma síntese na Figura 16.

Figura 16 – Síntese do Eixo de Análise 1



Fonte: Sistematização da pesquisadora

A partir do exposto, no Eixo de Análise 1, podemos concluir que a maioria dos alunos demonstrou ter compreendido que tudo está em constante transformação, que nada está pronto e acabado, nada é permanente, mas sim, que tudo flui. Portanto, houve a compreensão da fluência pelos alunos.

Além da fluência, outros nexos conceituais da álgebra são fundamentais para a apropriação do conceito de função afim. Por conseguinte, na sequência desvelamos o segundo eixo de análise, que aborda os nexos conceituais de variável, campo de variação e dependência.

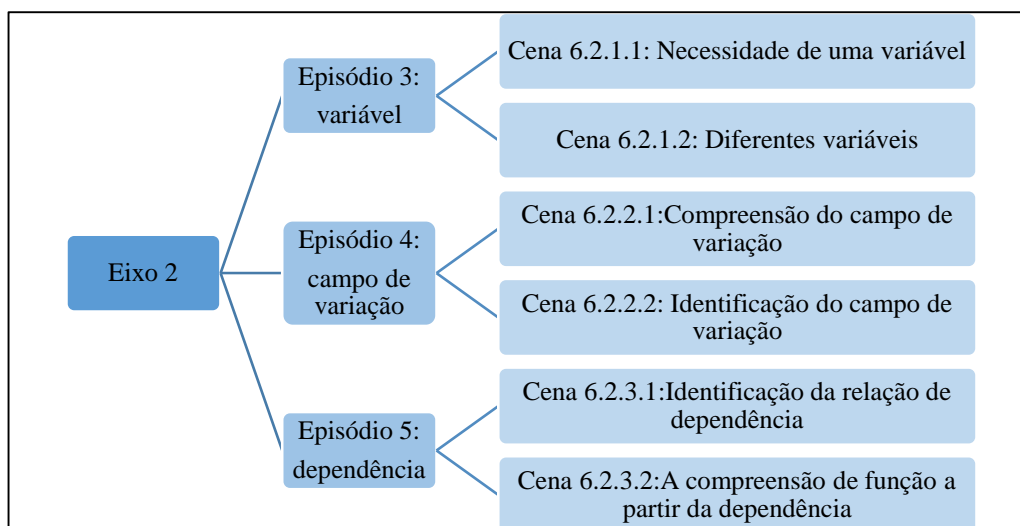
6.2 A RELAÇÃO DE DEPENDÊNCIA ENTRE GRANDEZAS VARIÁVEIS

O jogo Pega Varetas tem algumas variações de pontuações, cores e regras. Neste caso, optamos pelo jogo composto por 21 varetas, sendo cinco de cada uma das seguintes cores: amarela, vermelha, azul e verde, e uma na cor preta. Cada cor possui uma pontuação diferente, sendo: 5 para cor amarela, 10 para cor vermelha, 15 para cor verde, 20 para cor azul e 50 para

cor preta. Para jogar, os alunos se organizaram em grupos, de três ou quatro integrantes, e registraram, do modo deles, suas pontuações em todas as rodadas.

O registro das pontuações, da quantidade de varetas de cada cor, da variação da quantidade de varetas a cada rodada e a relação entre a pontuação final e a quantidade de varetas de cada cor, compuseram a situação de ensino apresentada no Eixo de Análise 2, voltada à apropriação dos seguintes nexos conceituais da álgebra: variável, campo de variação e dependência. Portanto, foi elaborada com o intuito de proporcionar aos estudantes a compreensão de variável e dos possíveis valores que cada uma pode assumir e da relação de dependência entre grandezas, introduzindo a noção intuitiva de função. Então, este eixo é composto por três episódios, organizados por meio de cenas, como mostra a Figura 17.

Figura 17 - Episódios e cenas que compõem o Eixo de Análise 2



Fonte: Sistematização da pesquisadora

6.2.1 Episódio 3: Variável

No episódio 3, analisamos novos registros produzidos pelos alunos durante o desenvolvimento da segunda situação de ensino proposta a partir do jogo Pega Varetas, com o intuito de proporcionar condições necessárias para compreender o conceito de variável. Conforme Caraça (1951), a essência do conceito de função está na correspondência entre conjuntos de números e, para facilitar o manuseio, é preciso que haja uma representação simbólica para os conjuntos.

Essa representação simbólica consegue-se introduzindo o conceito de variável, o que se faz da forma seguinte: Seja (E) um conjunto qualquer de números, conjunto finito

ou infinito, e convencionaremos representar qualquer dos seus elementos por um símbolo, por ex.: x . A esse símbolo representativo de qualquer dos elementos do conjunto (E), chamaremos de variável (CARAÇA, 1951, p. 127).

A intenção do jogo Pega Varetas era possibilitar aos alunos a observação de que a quantidade de varetas de cada cor obtida em qualquer rodada não é fixa, mas sim, variável. Logo, era preciso um símbolo que representasse os possíveis resultados para este conjunto, ou seja, uma variável. Para que os alunos chegassem a este entendimento, foram propostas as seguintes questões: *Q. 1-a - A quantidade de varetas de cada cor, obtidas por cada jogador, é sempre a mesma ou pode variar? Q. 1-b - Quais são os possíveis resultados para cada cor? Q. 1-c - Como podemos representar a quantidade de varetas de cada cor se não possuem um valor fixo? Q. 2-a - Existem valores fixos, que não se alteram? Q. 2-b - Quais são esses valores?*

Estas questões foram propostas logo após os alunos terem jogado, registrado suas pontuações e compartilhado os registros do grupo com a turma. A questão Q.1-a poderia ser respondida a partir da observação dos resultados obtidos a cada rodada, pois a quantidade de varetas de cada cor que o aluno conseguia retirar variava. Enquanto a questão Q. 1-c apontava a necessidade de uma variável para representar os possíveis resultados. A cena 6.2.1.1 do Quadro 16 mostra um diálogo desencadeado por esta questão.

Quadro 16 – Cena 6.2.1.1: Necessidade de uma variável

(continua)

Cena 6.2.1.1: O diálogo aconteceu entre a pesquisadora e os alunos de um dos grupos, no quarto dia de aula (23/05/2022), no momento em que debatiam acerca das questões propostas, após terem jogado o jogo Pega Varetas e socializado com a turma as diferentes formas utilizadas para registrar os pontos obtidos. A questão que desencadeou o diálogo foi a *Q. 1-c - Como podemos representar a quantidade de varetas de cada cor se não possuem um valor fixo?*

1. **Pesquisadora:** Cada vareta vale dez. Mas, e a quantidade de varetas vermelhas?
2. **Aluno 31:** Por exemplo, cinco varetas vermelhas.
3. **Pesquisadora:** Mas sempre vão ser cinco?
4. **Alunos 31 e 21:** Não.
5. **Aluno 21:** Vai mudar conforme o jogo.
6. **Pesquisadora:** E como podemos representar esses números que estão mudando?
7. **Aluno 16:** Uma tabela, tipo de um a dez. E vai marcando, por exemplo, no jogo que pegou duas varetas marca no número dois.
8. **Aluno 21:** De um a cinco.
9. **Pesquisadora:** E todo jogo precisa fazer a tabela?
10. **Aluno 21:** Uma legenda então, pinta de vermelho e escreve quantas varetas.
11. **Pesquisadora:** E a quantidade de varetas iriam marcar como?
12. **Aluno 21:** Por rodada. Por exemplo, tirei duas varetas vermelhas, então eu pinto de vermelho.
13. **Pesquisadora:** Ok, mas por cor sempre precisa pintar. Como podemos representar um valor que vai mudando e que a gente não sabe quanto ele vale?
14. **Alunos 21 e 31:** x
15. **Aluno 21:** Não, é muito difícil.
16. **Aluno 31:** Não é difícil.
17. **Pesquisadora:** O x pode representar uma quantidade que eu não conheço e que pode mudar?
18. **Aluno 21:** Sim.
19. **Pesquisadora:** Mas o x vai ser as varetas vermelhas, amarelas, verdes...?

(conclusão)

20. **Aluna 31:** *Cada uma coloca uma letra. Como a de amarelo, v de vermelho...*
 21. **Aluno 21:** *Está certo, por letra tem que ser.*
 22. **Pesquisadora:** *Então vocês precisam definir quais são as letras que vão usar.*
 23. **Aluno 21:** *Vamos fazer o a, b, c, porque tem dois v e não dá, verde e vermelho já não vai dar.*

Fonte: Dados da pesquisa

A cena 6.2.1.1 mostra alguns questionamentos da pesquisadora com o intuito de fazer com que os alunos percebessem que havia a necessidade de uma variável para representar a quantidade de varetas de cada cor, tendo em vista que esta variava a cada rodada. Contudo, somente ao questionar “*Como podemos representar um valor que vai mudando e que a gente não sabe quanto ele vale?*”, na fala 13, os alunos fizeram menção a uma letra e sugeriram o uso do x.

Nesse caso, não é possível afirmar se houve a compreensão do uso de uma variável ou os alunos foram influenciados pela maneira como o questionamento foi realizado, já que muitos professores costumam usar frases ou perguntas repetitivas, cuja resposta está previamente definida e não expressa necessariamente o entendimento dos alunos. Como no caso de o professor frequentemente questionar: ‘*como representamos valores desconhecidos?*’ E, pelo fato de estarem a alguns anos respondendo perguntas como esta com a mesma resposta, os alunos tendem a responder ‘x’.

De acordo com Sousa, Panossian e Cedro (2014), pode acontecer de o aluno aprender a usar o x, antes mesmo de saber o que significa, pois faz parte de experiências em sala de aula tornando o ensino técnico e mecanizado. Portanto, para os autores, usar símbolos não significa necessariamente apreender o significado do conceito algébrico.

No entanto, na continuidade do diálogo os alunos reconheceram que o x poderia representar um valor desconhecido e que estaria variando, ou seja, que ele teria papel de uma variável. E, ao serem questionados sobre a cor que o x estaria representado, os alunos sugeriram utilizar a primeira letra da palavra. Destacamos que as falas 20 e 23 mostram que estes alunos compreenderam que cada cor deveria ser representada por uma variável diferente e optaram pelo uso das primeiras letras do alfabeto, ao perceberem que duas cores possuem a mesma inicial, trazendo indicativos de que compreenderam que diferentes variáveis necessitam de diferentes representações.

A reflexão que desencadeou a aprendizagem necessitou, além da participação coletiva dos alunos, da interação da pesquisadora, como sujeito mais experiente, para atuar na Zona de Desenvolvimento Proximal (ZDP).

Ela é a distância entre o nível de desenvolvimento real, que se costuma determinar através da solução independente de problemas, e o nível de desenvolvimento potencial, determinado através da solução de problemas sob a orientação de um adulto ou em colaboração com companheiros mais capazes (VIGOTSKI, 1998, p. 112).

Após a sistematização dos grupos em relação às questões propostas, foi lançado o seguinte problema: *Como podemos representar o cálculo de todos os pontos possíveis do jogo e o número de varetas de cada rodada?* O intuito era que os grupos elaborassem uma expressão algébrica para calcular a pontuação final do jogador, a partir dos pontos de cada cor, multiplicado pela quantidade de varetas da respectiva cor. Sabendo que a quantidade de varetas de cada cor iria variar a cada rodada, a expectativa era que os alunos fizessem representações por meio de variáveis. A cena 6.2.1.2 do Quadro 17 mostra o diálogo de um aluno com a pesquisadora durante a resolução do problema.

Quadro 17 – Cena 6.2.1.2: Diferentes variáveis

Cena 6.2.1.2: A cena ocorreu no quarto dia de aula (23/05/2022), após os alunos terem jogado o jogo Pega Varetas e terem sistematizado as primeiras questões reflexivas. Neste momento, a pesquisadora havia lançado o problema: “Como podemos representar o cálculo de todos os pontos possíveis do jogo e o número de varetas de cada rodada?”. Um dos alunos foi ao encontro da pesquisadora para contar a ideia do seu grupo (Grupo 8) e, durante o diálogo, percebeu que havia algo a ser alterado em sua expressão algébrica.

24. **Aluno 19:** *Nós fizemos o valor final igual a cor vezes a quantidade de varetas da cor.*
25. **Pesquisadora:** *Vocês conseguem multiplicar alguma coisa por vermelho? Como é essa multiplicação?*
26. **Aluno 19:** *Duas cores, dois amarelos.*
27. **Pesquisadora:** *Me dá um exemplo. O que é esse x vezes a ?*
28. **Aluno 19:** *Está vendo que todos têm o x ?*
29. **Pesquisadora:** *Por que todos têm o x ?*
30. **Aluno 19:** *Porque essa é a cor. Então dois amarelos... ah não, mas não tem como o x ...*
31. **Pesquisadora:** *Todos são da mesma cor?*
32. **Aluno 19:** *Não. Exatamente.*
33. **Pesquisadora:** *Pensem que cada cor tem uma pontuação diferente.*
34. **Aluno 19:** *Mas a ideia foi boa, né?*
35. **Pesquisadora:** *Está no caminho, mas pensa nessa questão de x para todos.*
36. **Aluno 19:** *E se eu colocar x , y , z ...?*

Fonte: Dados da pesquisa

O Aluno 19 havia, inicialmente, elaborado uma expressão algébrica, em que todas as cores estavam sendo representadas pela variável x . E, ao explicá-la para a pesquisadora, no diálogo da cena 6.2.1.2, ele percebeu que o x não poderia representar todas as cores, então sugeriu o uso de outras como y e z , na fala 36.

Em sua expressão, as variáveis representam a pontuação total e a quantidade de varetas de cada cor, que não é fixa, pois se altera a cada rodada. De acordo com Caraça (1951), a variável não coincide com nenhum dos elementos do conjunto individualmente, mas pode representar todos eles. Logo, a variável é “o símbolo da vida colectiva do conjunto, vida essa

que se nutre da vida individual de cada um dos seus membros, mas não se reduz a ela” (CARAÇA, 1951, p. 127).

Na fala 24, o Aluno 19 conseguiu expressar em linguagem natural a expressão algébrica construída pelo grupo. Assim, podemos inferir que ele compreendeu o que cada termo representa na expressão e que ele atribuiu sentido pessoal a ela. Quanto aos valores fixos e variáveis, destacamos que na primeira expressão algébrica elaborada pelo grupo, os valores fixos, que são as pontuações de cada cor, foram representados por letras do alfabeto (a, b, c, d, e) e, posteriormente, substituídas pelos números das pontuações (5, 10, 15, 20, 50). Isto traz indicativos de que os alunos do Grupo 8 perceberam que os valores fixos, por não se alterarem, poderiam ser mantidos na expressão, como podemos observar na Figura 18.

Figura 18 – Registros produzidos pelos alunos na resolução do problema

Grupo 1
 $X \cdot Y = P \text{ pontos}$
 $X = \text{QUANTIDADE DE VARETAS}$
 $Y = \text{VALOR DESTA DE CADA VARETA}$

Grupo 2
 Vermelho: E
 Amarelo: A
 Verde: V
 AZUL: Z
 Preto: P
 $(2A) + (5V) = 10 + 75 = 85$

Grupo 3
 $Vv = Vv \cdot q$
 $Vv = \text{valor da vareta}$
 $q = \text{quantidade}$
 $v = \text{incógnita}$
 → um cálculo para cada cor expresso por abreviações

Grupo 4
 Amarelo $a = 2 \times 5$
 Vermelha $v = 4 \times 10$
 Verde $v = 2 \times 15$
 Azul $z = 6 \times 20$
 Preta $p = 1 \times 50$

Grupo 5
 TABELA: SOMA QUANTOS HÁ EM VÁRIAS DAS CORES
 TOTAL: 80

Grupo 6
 $5.0 + 10.V + 15.e + 20z + 50.P$
 $0 = 5$
 $V = 10$
 $e = 15$
 $z = 20$
 $P = 50$

Grupo 7
 $P.50 + V.15 + V_e.10 + A_z.20 + A_m.5$
 P: PRETA, V: VERMELHA, V_e: VERMELHA AN-AMARELA, A_z: AZUL

Grupo 8
 $Vf = x \cdot a + y \cdot b + w \cdot c + z \cdot d + m \cdot e$
 $Vf = x \cdot 5 + y \cdot 10 + w \cdot 15 + z \cdot 20 + m \cdot 50$
 $Vf = \text{QTD de varetas} \cdot \text{valor da vareta}$

Grupo 9
 $P @ \cdot X + \Delta \cdot X + \square \cdot X + ! \cdot X + \# \cdot X$
 P: Pontuação, @: Vermelho, Δ: Amarelo, □: Verde, !: Azul, #: Preto, X: Variável

Fonte: Dados da pesquisa

A Figura 18 mostra a socialização dos grupos em resposta ao problema proposto. Podemos perceber que há uma diversidade de representações, o que indica que os alunos estavam em diferentes estágios de desenvolvimento conceitual. Isto pode decorrer do fato de que eles tiveram diferentes possibilidades de interações com este conhecimento, talvez porque vieram de escolas diferentes, nas quais viveram suas próprias experiências com os conceitos algébricos, decorrentes de suas particularidades e distintos modos de pensar.

Os grupos 2, 4 e 5 representaram a situação, utilizando valores fixos para cada uma das varetas e calculando a pontuação total da rodada. Vemos que os alunos destes grupos não conseguiram generalizar a situação do jogo, desconsiderando a possibilidade de que a

quantidade de varetas de cada cor poderia variar. Eles haviam representado as cores por letras do alfabeto, não como variáveis, mas como incógnitas que têm valores fixos.

Quanto às diferentes representações de variáveis, enquanto o Grupo 9 optou pelo uso de símbolos diversos, alguns grupos já escreveram sua expressão algébrica, utilizando apenas letras. Já o Grupo 8 iniciou, utilizando palavras, e somente em um segundo momento fez uso de letras (embora, ao escreverem na lousa sua sistematização, acabaram apresentando a expressão com letras primeiro, como se observa na Figura 18).

Segundo Sousa, Panossian e Cedro (2014), ao considerar o uso de palavras, letras, signos e símbolos, podemos traçar um caminho para a linguagem algébrica, passando pelas não simbólicas – retórica, geométrica, sincopada – até chegar na simbólica. A álgebra retórica considera a variável palavra; a geométrica, a variável figura; a sincopada, a variável numeral; e a simbólica, a variável letra. “A partir da metade do século XVII, a álgebra simbólica começa a se impor como conhecimento científico. O uso do simbolismo pretendia mais do que simplesmente sintetizar a escrita, pretendia facilitar o uso do pensamento” (SOUSA; PANOSSIAN; CEDRO, 2014, p. 114).

Coerente com o movimento lógico-histórico do desenvolvimento da linguagem algébrica, é compreensível que os alunos utilizem outras formas de representação das variáveis, como palavras ou outros símbolos, até chegar na forma sintética com o uso de letras do alfabeto. Nesse sentido, o movimento lógico-histórico do conceito de variável é essencial para sua compreensão, pois passou por diferentes representações até chegar na utilização de apenas uma letra do alfabeto. Portanto

o estudo da história do desenvolvimento do objeto cria, por sua vez, as premissas indispensáveis para a compreensão mais profunda de sua essência, razão porque, enriquecidos da história do objeto, devemos retomar mais uma vez a definição de sua essência, corrigir, completar e desenvolver os conceitos que o expressam. Deste modo, a teoria do objeto fornece a chave do estudo de sua história, ao passo que o estudo da história enriquece a teoria, corrigindo-a, completando-a e desenvolvendo-a (KOPNIN, 1978, p. 186).

Alguns grupos conseguiram escrever a expressão algébrica, utilizando letras do alfabeto como variáveis, no entanto, sentiram a necessidade de diferenciar as cores que iniciavam com ela, optando pelo uso de duas para representar uma única variável, como é o caso do Grupo 7. Para escrever a expressão, este grupo partiu de algumas possibilidades de quantidades de varetas de cada cor e a maneira como calculariam a pontuação, como ilustra a Figura 19.

Figura 19 - Registro do portfólio da Aluna 9 em resposta ao problema proposto

PROBLEMA: Como podemos representar o cálculo de todos os pontos possíveis do jogo e o número de varetas de cada corada

Nº PAREIA	VERDE	VERMELHA	AZUL	AMARELA		
					$a = 50$	
					$b = 20$	
					$c = 5$	
1	P.a	1v.d	1ve.e	1az.b	1am.c	$d = 15$
2	X	2v.d	2ve.e	2az.b	2am.c	$E = 10$
3	X	3v.d	3ve.e	3az.b	3am.c	
4	X	4v.d	4ve.e	4az.b	4am.c	
5	X	5v.d	5ve.e	5az.b	5am.c	
$P. 50 + 1v \cdot 15 + 1ve \cdot 10 + 1az \cdot 20 + 1am \cdot 5$						
$P. 50 + V. 15 + Ve. 10 + Az. 20 + Am. 5$						

Fonte: Dados da pesquisa.

Como as cores verde e vermelho iniciam com a letra 'v', os alunos utilizam 've' para representar as varetas vermelhas. E, como as cores azul e amarelo iniciam com a letra 'a', eles utilizam 'az' para azul e 'am' para amarelo. Nesse caso, os alunos conseguiram encontrar uma maneira mais simples de representar as cores, ao invés das palavras e, embora ficasse perceptível que eles compreendiam que era variável única, não conseguiram escrever da forma mais sintética utilizando apenas uma letra. Isto traz indicativos de que a representação tinha forte apego ao sensorial, ou seja, as letras tinham que remeter à cor, o que poderia estar próximo de uma generalização empírica, mas não teórica. Isso nos remete a Davýdov (1982) que diz que somente a generalização teórica possibilita o acesso ao pensamento teórico.

A álgebra simbólica é recente, pois

o simbolismo algébrico da maneira como é visto atualmente surge há aproximadamente 400 anos. Com sua representação na forma mais sintética, o francês Viète (1540-1603) é considerado 'Pai' da álgebra simbólica ao usar símbolos literais para quantidades desconhecidas e também para quantidades dadas, gerando os parâmetros. Viète usou apenas letras para estudar o movimento (SOUSA; PANOSSIAN; CEDRO, 2014, p. 113).

Portanto, é importante levar em consideração o movimento lógico-histórico dos conceitos algébricos, ao elaborar as situações de ensino, pois isto possibilita aos alunos vivenciarem esse processo de construção da variável representada por uma letra do alfabeto.

Assim, os alunos, ao se colocarem em situações próximas a esse movimento, vão se apropriando dos elementos essenciais da álgebra que lhe permitem chegar a uma linguagem simbólica.

Para isto, “é necessário que o professor esteja consciente das dificuldades do movimento do pensamento dos estudantes em se apropriar de uma linguagem simbólica formal, que foi sendo elaborada por séculos por diversas civilizações” (SOUSA; PANOSSIAN; CEDRO, 2014, p. 136). Os estudantes podem percorrer as diferentes representações para produzir um sentido pessoal ao conceito de variável, ao invés de esse ser imposto pelo professor como algo pronto.

6.2.2 Episódio 4: Campo de variação

O episódio 4 dá continuidade à análise dos registros produzidos pelos alunos no desenvolvimento da segunda situação de ensino organizada a partir pelo jogo Pega Varetas. A partir da compreensão da variável, surge a necessidade de abordar o campo de variação, pois, a “existência da variável, necessariamente, está relacionada ou associada a um determinado campo de variação. Do contrário, não se pode falar nela” (SOUSA; PANOSSIAN; CEDRO, 2014, p. 122).

Então, entendendo a variável como representação simbólica de um conjunto, é preciso ressaltar que, em determinados problemas, ela não pode assumir qualquer valor, tendo em vista que há um valor mínimo e outro máximo. Para Caraça (1951, p. 128), “a variável é e não é cada um dos elementos do conjunto”, os quais dependem do contexto considerado.

Em relação ao jogo Pega Varetas, o campo de variação está restrito ao conjunto dos números naturais. Para saber os valores que poderiam ser obtidos a partir da quantidade de varetas de cada cor disponibilizadas no jogo, foi proposto o questionamento: *Q. 1-b - Quais são os possíveis resultados para cada cor?* Este tinha o intuito de possibilitar aos alunos a observação de que só havia uma vareta preta e outras cinco de cada cor – vermelho, amarelo, verde, azul – e, portanto, os possíveis resultados seriam de 0 ou 1 para a preta e de 0, 1, 2, 3, 4 ou 5 para as demais cores. A cena 6.2.2.1, no Quadro 18, apresenta um diálogo desencadeado pelo referido questionamento.

Quadro 18 – Cena 6.2.2.1: Compreensão do campo de variação

(continua)

Cena 6.2.2.1: O diálogo apresentado na cena aconteceu no quarto dia de aula (23/05/2022), enquanto os grupos debatiam para responder às primeiras questões reflexivas após o jogo Pega Varetas. A questão *Q. 1-b - Quais são os possíveis resultados para cada cor?* desencadeou o diálogo entre os alunos do Grupo 1 e a pesquisadora.

(conclusão)

1. **Aluno 37:** *Na letra b, quais são os possíveis resultados para cada cor? Tem que ser do nosso jogo passado ou do jogo das varetas em geral?*
2. **Pesquisadora:** *Em relação ao jogo passado. Pense, por exemplo, na cor amarela, quantos resultados possíveis vocês tinham para o amarelo? [Silêncio]. Em uma rodada, quantas varetas amarelas vocês poderiam pegar? Sempre a mesma quantidade?*
3. **Alunos 37 e 13:** *Não.*
4. **Pesquisadora:** *Tinha como pegar dez varetas amarelas?*
5. **Aluno 13:** *Não, acho que não tinha dez.*
6. **Pesquisadora:** *Quantas tinham?*
7. **Aluno 34:** *Cinco.*
8. **Pesquisadora:** *Então tinha como pegar mais do que cinco?*
9. **Aluno 13:** *Não.*
10. **Pesquisadora:** *Quantas vocês conseguiriam pegar então?*
11. **Aluno 13:** *Três.*
12. **Aluno 34:** *De zero a cinco.*
13. **Pesquisadora:** *Para cada cor. Mas tinha uma cor que não. Qual é?*
14. **Aluno 13:** *Preto.*

Fonte: Dados da pesquisa

Conforme mostra a cena 6.2.2.1, inicialmente, os alunos não haviam compreendido o questionamento proposto. Com vistas a auxiliar no entendimento, a pesquisadora fez novas indagações para que os alunos pudessem recordar quantas varetas havia de cada cor, o que foi alcançado com a fala 7, na qual o Aluno 34 respondeu que havia cinco varetas amarelas. A pesquisadora pretendia com o questionamento da fala 8 desencadear a reflexão de que havia uma quantidade máxima possível.

Podemos inferir, com base na fala 12, que houve uma compreensão dos possíveis resultados para cada cor, inclusive em relação à possibilidade de não se conseguir obter nenhuma vareta de determinada cor, ao incluir o zero. Neste caso, sendo o campo de variação determinado pelo conjunto dos possíveis resultados da quantidade de varetas de cada cor, que neste contexto é composto pelos números naturais 0 e 1 para a cor preta, e dos números naturais de 0 a 5 para as demais, há indicativos de que alguns alunos compreenderam o nexos conceitual de campo de variação.

Segundo Sousa (2004, p. 158), o “campo de variação depende diretamente do movimento da realidade tratada”, por isso, na situação apresentada na cena, ele contém apenas números naturais, já que expressa as possíveis quantidades de varetas a serem obtidas em cada rodada do jogo. E a identificação do campo de variação é fundamental, porque há a necessidade de limitar os possíveis valores que cada variável pode assumir para que seus limites de mínimo e máximo não sejam ultrapassados.

Após o momento de debate nos grupos, acerca das questões propostas, a pesquisadora realizou a sistematização com a turma. Como combinado, cada um deles apresentava uma

síntese das discussões por meio de um dos integrantes. A cena 6.2.2.2, no Quadro 19, expõe a sistematização de alguns grupos em relação as questões Q.1-a e Q.1-b.

Quadro 19 – Cena 6.2.2.2: Identificação do campo de variação

<p>Cena 6.2.2.2: A cena ocorreu no quarto dia de aula (23/05/2022), durante a sistematização das questões <i>Q. 1-a - A quantidade de varetas de cada cor, obtidas por cada jogador, é sempre a mesma ou pode variar? Q. 1-b - Quais são os possíveis resultados para cada cor?</i> A pesquisadora realizou a leitura oral das referidas questões e cada grupo, representado por um de seus integrantes, relatou a sistematização de suas reflexões.</p>
<p>15. Pesquisadora: <i>Questão número 1, letra a: A quantidade de varetas de cada cor, obtidas por cada jogador, é sempre a mesma ou pode variar? E letra b: Quais são os possíveis resultados para cada cor?</i></p> <p>16. Aluna 18: <i>Resultados diferentes porque a quantidade de varetas sempre muda. Então podem obter resultados de 5, 4, 3, 2, 1 e 0.</i></p> <p>17. Aluno 21: <i>Letra a, não é sempre a mesma, ela pode variar dependendo da situação. E na letra b, no máximo cinco varetas de cada cor, exceto a preta que é apenas uma.</i></p> <p>18. Aluna 15: <i>Sim, ela pode variar. Uma preta e uma, duas, três, quatro, cinco ou zero todas as outras cores.</i></p> <p>19. Aluna 17: <i>Na letra a, eu coloquei sim, que pode variar. Na letra b, tem um preto, quatro verdes, porque é o que menos vale, que são cinco pontos, e os outros que valem mais pontos que vão aumentando de cinco em cinco, que são 10, 15, 20... eles aumentam para cinco.</i></p> <p>20. Aluna 32: <i>Eu coloquei que a amarela pode somar 20 pontos, a verde 60, a preta 50, a azul 80 e a vermelha 40.</i></p> <p>21. Pesquisadora: <i>Como você chegou nestes resultados?</i></p> <p>22. Aluna 32: <i>Por exemplo, a amarela vale cinco e tem quatro, então dá 20 no máximo.</i></p>

Fonte: Dados da pesquisa

As falas 16 e 18 mostram que os grupos, representados pela Aluna 18 e Aluna 15, conseguiram definir os elementos que compõem o campo de variação, porém a Aluna 18 não se referiu especificamente à cor preta, presente em apenas uma vareta. Enquanto o Aluno 21 citou somente a quantidade máxima de varetas que podem ser obtidas de cada cor e não relatou todos os possíveis resultados.

Podemos supor que os alunos que integraram estes grupos compreenderam o campo de variação como os possíveis resultados que a variável pode assumir. De acordo com Sousa, Panossian e Cedro (2014), na elaboração destes conceitos, como variável e campo de variação, se refina o pensamento algébrico. Assim, contribuem para a aprendizagem do conceito de função, isso porque “Aprender a variação dentro de limites, conjuntos, fronteiras, condições definidas, significa relativizar a variação, criar dependências, criar a partir da variável, ampliar o conceito de variável para o conceito de função” (SOUSA; PANOSSIAN; CEDRO, 2014, p. 123).

Já a Aluna 17 afirmou que havia apenas quatro varetas verdes, porque, segundo ela, esta cor teria a menor pontuação, a de 5 pontos. Enquanto as cores amarelo, vermelho e azul teriam cinco varetas de cada. Porém, estas informações não estão de acordo com o jogo, pois havia cinco varetas verdes e a menor pontuação era da cor amarela. Logo, houve um equívoco na contagem das varetas e não na compreensão do campo de variação.

E ainda, a Aluna 32, ao representar a síntese do seu grupo, explicou terem eles calculado os possíveis resultados, tendo em conta as pontuações de cada cor e a quantidade de varetas, referindo-se à pontuação máxima que pode ser conquistada com cada cor. Nesse sentido, podemos supor que houve uma interpretação diferente da questão Q.1-b, e o grupo pode não ter compreendido que ela complementava a questão Q.1-a. Assim, não é possível afirmar que não houve a compreensão do nexó conceitual campo de variação. Disso podemos inferir que, apesar de a resposta ser diferente do esperado, não significa, necessariamente, que os alunos não se aproximaram do conceito, o que alerta sobre a importância de o professor analisar toda a situação, para além dos resultados numéricos, ao avaliar a aprendizagem do estudante.

6.2.3 Episódio 5: Dependência

Neste episódio, trataremos de uma das duas características essenciais da realidade segundo Caração (1951), a interdependência. Para o autor, “Todas as coisas estão relacionadas umas com as outras; o Mundo, toda esta Realidade em que estamos mergulhados, é um organismo vivo, uno, cujos compartimentos comunicam e participam, todos, da vida uns dos outros” (CARAÇÃO, 1951, p. 109).

Para Lanner de Moura e Sousa (2008), a interdependência se traduz na álgebra pela dependência entre variáveis. No caso do jogo Pega Varetas, para que os alunos percebessem a relação de dependência entre a pontuação final e a quantidade de varetas, foram propostos os seguintes questionamentos: *Q. 3-a - O valor da pontuação final está relacionado a quantidade de varetas de cada cor? Q. 3-b - De que forma eles se relacionam?* Estes foram debatidos nos grupos e, posteriormente, sistematizados com a turma, o que é apresentado na cena 6.2.3.1 do Quadro 20.

Quadro 20 – Cena 6.2.3.1: Identificação da relação de dependência

(continua)

Cena 6.2.3.1: O diálogo entre a pesquisadora e os alunos de um dos grupos aconteceu no quarto dia de aula (23/05/2022), durante a sistematização de questões propostas após o jogo Pega Varetas. A pesquisadora realizou a leitura das questões *Q. 3-a - O valor da pontuação final está relacionado a quantidade de varetas de cada cor? Q. 3-b - De que forma eles se relacionam?*. Dois alunos relataram a sistematização do Grupo 1 e uma aluna complementa com a sistematização do Grupo 9.

1. **Pesquisadora:** *Questão número três: O valor da pontuação final está relacionado à quantidade de varetas de cada cor? De que forma eles se relacionam?*
2. **Aluno 37:** *Está relacionado. De cada pessoa está relacionado junto com a pontuação final. Se uma pessoa pegar umas três varetas verdes e mais duas amarelas, no final a pontuação dele vai ser diferente da outra pessoa que pegou outras varetas.*
3. **Aluno 34:** *A quantidade de varetas e o quanto cada uma delas dá, assim podemos fazer um cálculo para descobrir os pontos.*
4. **Pesquisadora:** *E na letra b?*

(conclusão)

5. **Aluno 34:** *É diretamente proporcional, porque se aumenta o número de varetas vai aumentar o valor dos pontos.*
6. **Aluno 37:** *Porque depende da quantidade de varetas que pegar e quais varetas ele pegou.*
7. **Aluna 28:** *Sim, porque, dependendo da quantidade de varetas, muda a pontuação.*

Fonte: Dados da pesquisa

A cena 6.2.3.1 destaca que muitos alunos perceberam que existe uma relação entre a pontuação final e a quantidade de varetas de cada cor, e que as varetas obtidas irão determinar a pontuação, logo, observaram haver uma relação de dependência. Os alunos usaram termos como “depende” sem que houvesse a influência da pesquisadora, que não utilizou esta palavra no questionamento.

Na fala 5, o Aluno 34 ressaltou que as grandezas citadas são diretamente proporcionais, pois, com o aumento da quantidade de varetas, também seria aumentada a pontuação. No entanto, neste caso, este fato não garantiria que a relação fosse de proporcionalidade.

Após socializarem e discutirem acerca do problema para elaborar uma expressão algébrica que representasse todos os pontos possíveis do jogo e o número de varetas, os alunos foram informados pela pesquisadora que todas as varetas passariam a ter a mesma pontuação, independentemente da cor, e que esta seria de dez pontos. Tendo isso em vista, foram propostas algumas questões, entre elas: *Q. 4- Podemos utilizar a mesma expressão algébrica da atividade anterior, para representar a pontuação total e a quantidade de varetas de cada cor? Justifique.* *Q. 5- Se não, que expressão algébrica podemos utilizar?*

Tais questionamentos possibilitaram aos alunos a escrita da expressão algébrica $f(x) = 10x$, para representar a relação entre a pontuação final e a quantidade de varetas, já que todas têm a mesma pontuação. Durante a sistematização das questões, esta expressão foi socializada pela maioria dos grupos, alterando-se somente o modo de apresentá-la (conforme escrito no portfólio). A partir da relação de dependência entre as grandezas envolvidas, a pesquisadora solicitou que os alunos realizassem uma pesquisa para descobrir qual era o conceito matemático envolvido, para a próxima aula. A cena 6.2.3.2 do Quadro 21 mostra o diálogo em que a pesquisadora retomou no dia seguinte o tema de casa.

Quadro 21 – Cena 6.2.3.2: A compreensão de função a partir da dependência

(continua)

Cena 6.2.3.2: No sexto dia de aula (30/05/2022), a pesquisadora inicia escrevendo na lousa a expressão encontrada pelos alunos na aula anterior (24/05/2022), como $f(x) = 10x$. Em seguida, questiona aos alunos sobre o que as variáveis representam no problema, e eles respondem que a variável $f(x)$ representa a pontuação final e a variável x a quantidade de varetas. Assim, a pesquisadora retoma o tema de casa o que desencadeia um debate acerca da definição de função e a diferença entre funções e equações.

(continuação)

8. **Pesquisadora:** *Na primeira pergunta do tema, era para vocês pesquisarem qual é o conceito matemático que expressa a relação entre as duas variáveis. Qual foi o conceito matemático que vocês encontraram?*
9. **Aluna 28:** *Função linear.*
10. **Aluno 13:** *Uma equação.*
11. **Pesquisadora:** *Equação ou função?*
12. **Aluna 28:** *Função.*
13. **Alguns alunos:** *Função.*
14. **Pesquisadora:** *Todos acham que é uma função? Qual é a diferença entre equação e função?*
15. **Aluno 13:** *Por isso que eu não sei.*
16. **Aluna 32:** *Eu acho que equação é uma variável e função são duas.*
17. **Pesquisadora:** *A equação tem uma variável?*
18. **Aluna 28:** *Na equação é incógnita.*
19. **Pesquisadora:** *Será que na equação é uma incógnita? Vamos escrever uma equação, alguém saberia um exemplo de equação do primeiro grau?*
20. **Aluno 13:** *Tem que ser igual a zero?*
21. **Pesquisadora:** *Precisa sempre ser igual a zero?*
22. **Alguns alunos:** *Não.*
23. **Aluna 32:** *Dois mais x igual a três.*
[A pesquisadora escreveu no quadro $2 + x = 3$]
24. **Pesquisadora:** *Essa é uma equação?*
25. **Alguns alunos:** *Sim.*
26. **Pesquisadora:** *Como encontramos o valor do x?*
27. **Aluna 32:** *Isola o x.*
28. **Aluno 31:** *Coloca o x na frente, daí coloca dois menos três.*
29. **Aluno 11:** *Isola o x e passa o três para o outro lado.*
30. **Pesquisadora:** *E o 2?*
31. **Aluno 31:** *Vai passar para lá subtraindo.*
32. **Pesquisadora:** *Vamos subtrair nos dois membros. Três menos dois?*
33. **Alguns alunos:** *Um.*
34. **Pesquisadora:** *Qual é o valor do x?*
35. **Alguns alunos:** *Um*
36. **Pesquisadora:** *Quantos resultados tem o x?*
37. **Alguns alunos:** *Um.*
38. **Aluna 32:** *Um, porque é uma variável.*
39. **Pesquisadora:** *Será que é um porque é uma variável? Tem outro número que podemos somar com o dois e o resultado será três?*
40. **Aluno 5:** *Sim, o um.*
41. **Pesquisadora:** *Além do um, tem outro número?*
42. **Alguns alunos:** *Não.*
43. **Pesquisadora:** *Só tem um.*
44. **Aluna 32:** *Por isso que não é variável.*
45. **Pesquisadora:** *Se ele só tem um resultado, é uma variável?*
46. **Alguns alunos:** *Não.*
47. **Pesquisadora:** *Então ele vai ser o quê?*
48. **Aluna 28:** *Incógnita.*
49. **Pesquisadora:** *E na nossa expressão da aula passada ele é uma variável. Então qual é o conceito que nós temos aqui?*
50. **Alguns alunos:** *Função.*
51. **Pesquisadora:** *E vocês pesquisaram qual é a definição de função? Quem pode ler?*
52. **Aluna 28:** *Estabelece uma relação entre a variável dependente y e a variável independente x.*
53. **Pesquisadora:** *Uma relação entre a variável dependente e a variável independente. Porque nós temos duas variáveis, uma é dependente e a outra é independente. Vamos pensar no nosso problema, será que a quantidade de varetas que eu vou pegar na rodada do jogo depende da minha pontuação final? Ou é a minha pontuação final que depende da quantidade de varetas?*
54. **Aluno 5:** *A segunda alternativa.*
55. **Pesquisadora:** *Então é a pontuação final que depende da quantidade de varetas? Concordam?*
56. **Alguns alunos:** *Sim.*
57. **Pesquisadora:** *Então, qual vai ser a variável dependente?*
58. **Aluna 32:** *A pontuação final.*

(conclusão)

59. **Pesquisadora:** *E a outra variável?*
60. **Alguns alunos:** *Independente.*
61. **Pesquisadora:** *Ok. Observem o que a colega leu, variável dependente y e variável independente x. Quando falamos de função, geralmente são utilizadas essas variáveis. Então, por exemplo, aqui vocês podem ter feito a expressão de vocês utilizando outras variáveis. A pontuação final poderia ser representada por p, por exemplo, e a quantidade de varetas por v, mudando as variáveis. Mas a relação entre as grandezas não é a mesma?*
62. **Aluno 13:** *É.*
63. **Pesquisadora:** *Então, na função geralmente utilizamos a variável dependente como y e a variável independente como x. Outra forma utilizada é $f(x) = 10x$, que o $f(x)$ significa que está em função de x, dependendo do x. Ok? Todos conseguiram entender que estamos falando de função, que pode ser representada por uma expressão algébrica? A expressão algébrica precisa ter o quê?*
64. **Aluno 31:** *Letra e número.*
65. **Aluno 5:** *Variável.*
66. **Pesquisadora:** *Quantas?*
67. **Aluno 5:** *Duas.*
68. **Pesquisadora:** *Qual é a relação entre as variáveis?*
69. **Aluna 32:** *De dependência.*
70. **Pesquisadora:** *Uma depende da outra. Até aqui tudo entendido?*
71. **Alguns alunos:** *Sim.*

Fonte: Dados da pesquisa

Ao indicarem o conceito matemático envolvido, os alunos sugeriram as opções de função e equação. As falas 15 e 16 mostram que alguns alunos não tinham certeza de suas respostas, uma vez que não compreendiam a diferença entre os conceitos. A Aluna 32, na fala 16, determinou a diferença pela quantidade de variáveis, não levando em consideração que, na equação, ela tem o papel de incógnita, o que se busca, e que pode haver mais de uma. Enquanto a função relaciona de forma específica as variáveis, que variam dentro do domínio.

Conforme Sousa, Panossian e Cedro (2014), alguns autores destacam que, dentre as dificuldades e erros mais comuns apresentados pelos alunos em relação aos conceitos algébricos, estão: diferenciar os diversos usos da variável como incógnita, número geral e relação funcional e reconhecer a relação entre duas variáveis. Tais dificuldades podem estar associadas à maneira como os conceitos são abordados em sala de aula, quando o ensino tem como foco a resolução mecânica e não possibilita a produção de sentido.

Algumas falas – 28, 29 e 31 – dão indicativos de que a aprendizagem da resolução de equações pode ter sido mecanizada. Dessa forma, os alunos acabam não compreendendo o sentido de utilizar a operação inversa, o que ocasiona erros como o retratado na fala 28, em que é alterada a operação do número que permaneceu no segundo membro, o que também pode dificultar a apropriação do conceito de equação e o do significado de incógnita. Isto pode acontecer, quando o aluno percebe que haverá apenas um resultado que satisfaça a equação e que, portanto, não é variável, como na fala 44.

Após compreender a relação da equação com a incógnita, os alunos perceberam que o conceito matemático envolvido não é este, pois já haviam compreendido que a pontuação final e a quantidade de varetas variavam a cada rodada e que seriam representadas por variáveis. Assim, constataram se tratar de uma função. “Na álgebra concebida como estudo de relação entre grandezas, as letras são tratadas como variáveis dependentes e independentes e realmente variam. Nesta concepção, a noção de função se destaca como a relação entre as variáveis” (SOUSA; PANOSSIAN; CEDRO, 2014, p. 24).

Esta relação de dependência entre as variáveis foi destacada pela Aluna 28, na fala 52. A partir disso, a pesquisadora, na fala 53, questionou os alunos com o intuito de que eles identificassem qual seria a variável dependente e qual a independente, na relação entre a pontuação final e quantidade de varetas. Os alunos conseguiram identificar que a pontuação final depende da quantidade de varetas.

A dependência entre as variáveis, assim como os demais nexos conceituais abordados de fluência, variável e campo de variação, são fundamentais para a apropriação do conceito de função, uma vez que

A função é o próprio movimento e todo movimento, para ser estudado com profundidade, tem como ponto de partida a condicional *se*, tem uma premissa. Para se estudar qualquer movimento da realidade através da função, temos que eleger um campo de variação, um campo numérico. Ao criá-lo temos a dependência, a interação, a relativização do movimento, mesmo que esse seja a substância, o fundamental, porque o movimento é relativo. O domínio e a imagem têm a ver com a relação de dependência que caracteriza a função (SOUSA, 2004, p. 175, grifo do autor).

Em síntese, para o ensino do conceito de função afim é preciso que haja a apropriação do conceito de função, a partir de seus nexos conceituais. Considerando o exposto, podemos inferir que os alunos se apropriaram dos nexos conceituais, em suas ações coletivas, posteriormente individuais, o que pode levar à formação do pensamento algébrico. Para sistematizar o segundo eixo de análise, destacamos no subitem a seguir algumas reflexões, com base nas cenas apresentadas.

6.2.4 Sistematização do Eixo de Análise 2

A situação de ensino envolvendo o jogo Pega Varetas possibilitou a abordagem dos nexos conceituais variável, campo de variação e dependência. A partir dos registros das pontuações do jogo e da escrita de uma expressão algébrica que representasse todos os possíveis resultados, surgiu a necessidade do uso de variáveis para representar as grandezas que não tinham valores fixos, pontuação final e quantidade de varetas de cada cor.

A diversidade nos registros possibilitou a compreensão da relevância dos conhecimentos prévios dos alunos e a importância de considerar as distintas formas de pensar e os diferentes momentos de apropriação dos conceitos. Tendo em vista que a linguagem simbólica formal foi elaborada ao longo de séculos e por diversas civilizações, é compreensível que os alunos passem por outras formas de representação de variáveis até chegar no uso de letras do alfabeto.

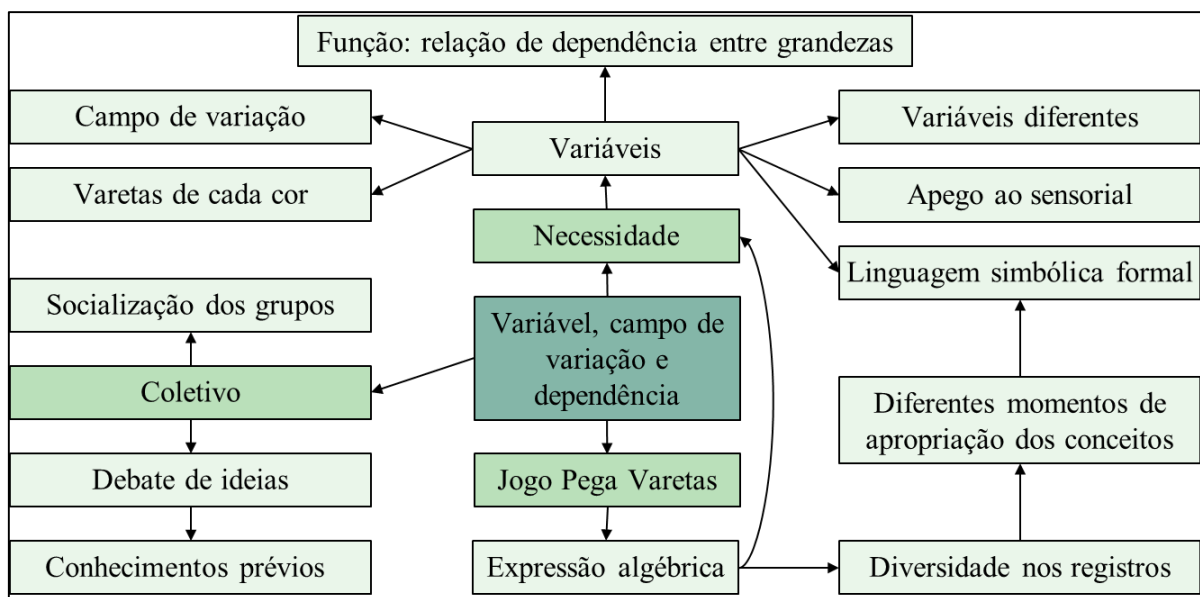
Como as variáveis são representações simbólicas dos conjuntos, foi preciso compreender quais são os possíveis valores que cada variável poderia assumir, ou seja, qual é seu campo de variação. Este era determinado pela quantidade de varetas de cada cor, portanto, considerava apenas números naturais.

Levando em conta o campo de variação, os alunos foram instigados, por meio de questionamentos, a observar a relação entre as variáveis. Assim, verificaram que há uma relação de dependência entre a pontuação final e a quantidade de varetas de cada cor e identificaram a variável dependente e a independente.

As cenas apresentadas nos episódios do Eixo de Análise 2 possibilitaram identificar indicativos de que os alunos se apropriaram de variável, campo de variação e dependência. Mesmo que alguns tenham tido maior dificuldade inicialmente, nas discussões coletivas foi possível esclarecer dúvidas e debater ideias, favorecendo uma melhor compreensão.

Dessa forma, o coletivo se configurou como essencial para o desenvolvimento da situação de ensino com o uso do jogo, para a resolução dos problemas e questionamentos propostos, já que viabilizou momentos de debates, reflexões e troca de ideias entre os alunos, com o auxílio e intermediação da pesquisadora. Isto posto, apresentamos uma síntese do Eixo de Análise 2, na Figura 20.

Figura 20 – Síntese do Eixo de Análise 2



Fonte: Sistematização da pesquisadora

A relação de dependência entre as variáveis possibilitou a identificar o conceito matemático envolvido, função. Entretanto, para atingir o objetivo proposto nesta pesquisa, foi preciso sugerir situações voltadas ao conceito de função afim, especificamente de função linear. Para isso, foi proposta a terceira situação de ensino, com foco na relação de proporcionalidade, que será abordada no Eixo de Análise 3, a seguir.

6.3 A PROPORCIONALIDADE NO ENSINO DA FUNÇÃO AFIM

A história virtual do conceito é um recurso metodológico por meio do qual podem se materializar as situações de ensino. De acordo com Moura e Lanner de Moura (1998), a história do conceito é virtual, pois apresenta aos alunos um problema que possibilita uma vivência semelhante àquela vivida historicamente pela humanidade em sua construção. Para os autores, esta organização do ensino cria condições necessárias para que os alunos entrem em atividade, a partir da necessidade do conceito.

Em assim sendo, para ampliar as possibilidades de aprendizagem da função afim, a partir da proporcionalidade, a terceira situação de ensino foi elaborada na forma de uma história virtual do conceito. Assim, a pesquisadora escreveu uma carta fictícia e, com a intencionalidade de propor um problema com contexto próximo da realidade dos alunos e do curso técnico, escolheu a temática da produção leiteira.

Diante da turma, a pesquisadora informou que a carta havia sido escrita por um pequeno agricultor que precisava de auxílio para tomar uma importante decisão em relação à sua renda, gerada principalmente pela produção leiteira. No relato, ela informou que já o conhecia e que havia lhe auxiliado a escrever a carta²⁸, apresentada na Figura 21. Sendo assim, a intenção da carta era produzir uma necessidade real nos alunos, que receberam um pedido de ajuda acerca de um problema relacionado ao cotidiano deles.

Figura 21 – Carta com pedido de ajuda do agricultor

Prezados alunos do Primeiro Ano do Curso Técnico em Agropecuária integrado ao Ensino Médio, do Instituto Municipal de Ensino Assis Brasil (IMEAB). Meu nome é Nildo, sou um pequeno agricultor e tenho uma propriedade no interior de Ijuí, conhecida como Fazenda do Seu Nininho, onde planto alguns produtos e tenho criação de animais. Uma das minhas principais produções é a de leite. Tenho 13 vacas leiteiras e estou produzindo, em média, 8000 litros de leite por mês. Recebo da empresa para quem vendo o leite apenas R\$1,00 por litro e, descontando os gastos mensais, estou obtendo um lucro de R\$ 2000,00. Nessa situação, estou tendo dificuldades para sustentar a família e manter a propriedade, e preciso me organizar e decidir se valerá a pena investir no aumento da produção de leite ou se devo investir em outra produção. Assim, estou escrevendo essa carta para pedir a ajuda de vocês. A vida do pequeno produtor não é fácil e precisamos fazer algumas modificações para conseguir sobreviver frente as grandes empresas, se adequando para não sermos absorvidos por eles e termos que abandonar nossa propriedade. Pensei em manter a mesma organização com a alimentação e estrutura das vacas leiteiras, e aumentar a produção para 16000 litros de leite, mas preciso saber qual será o lucro obtido e se este valerá a pena. Como posso fazer para calcular quanto será o lucro? Vocês podem me ajudar? Ficarei muito agradecido. Um abraço.

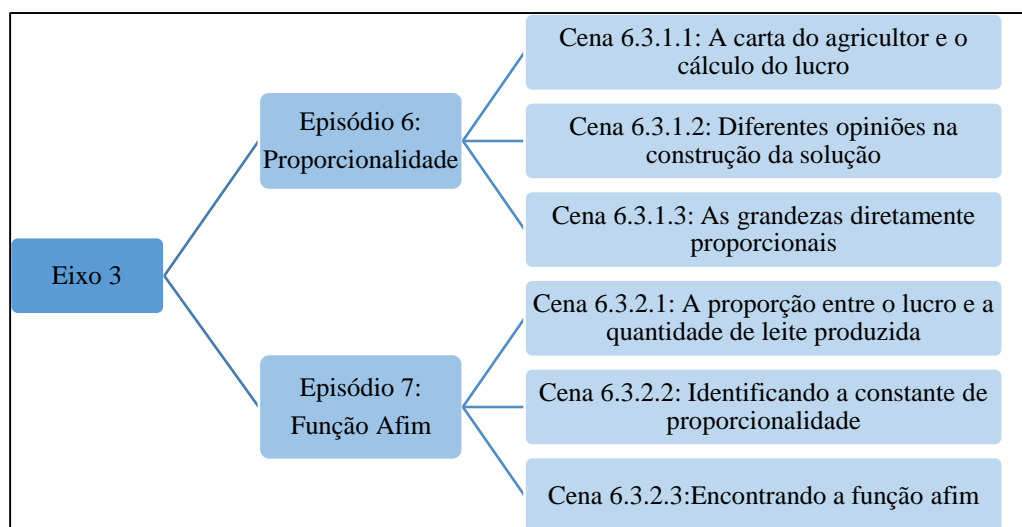
Fonte: Dados da pesquisa

O problema contido na carta considera uma relação de proporcionalidade entre as grandezas, produção de leite em litros e lucro em reais. Dessa forma, o aluno que se apropriou do conceito de proporcionalidade teria maior facilidade na sua resolução. No entanto, ao ampliar o problema para analisar diferentes quantidades de leite a serem produzidas, com vistas a encontrar o lucro mais adequado, surgiu a necessidade do conceito de função afim, porque a relação de dependência entre as grandezas e as características da função possibilitariam uma melhor e mais rápida análise.

Sendo assim, a situação de ensino, que compõe o Eixo de Análise 3, foi elaborada com a intencionalidade de promover a aprendizagem da função afim, a partir da proporcionalidade. Este eixo é composto por dois episódios, apresentados na sequência, os quais estão organizados por meio de cenas, como mostra a Figura 22.

²⁸ Expusemos dessa forma para os alunos, pois a intenção era envolvê-los o máximo possível e a linguagem da carta não condizia necessariamente com a coloquialmente usada por um agricultor da nossa região.

Figura 22 - Episódios e cenas que compõem o Eixo de Análise 3



Fonte: Sistematização da pesquisadora

6.3.1 Episódio 6: Identificando grandezas diretamente proporcionais

Antes de ler a carta para a turma, a pesquisadora contou que já conhecia o agricultor e que, em uma visita à sua propriedade rural, ele havia solicitado a sua ajuda e dos alunos do curso Técnico em Agropecuária para analisar sua situação e verificar se seria vantajoso investir e ampliar a produção leiteira. Ela buscou ser convincente para que os alunos se envolvessem na história contada com o intuito de aproximá-los de uma situação real.

Após a leitura da carta, os alunos iniciaram os debates em seus grupos com vistas a resolver a situação, calculando o lucro solicitado pelo agricultor e explicando como ele foi encontrado, de forma que ele pudesse compreender e realizar cálculos semelhantes. A cena 6.3.1.1, do Quadro 22, reproduz um diálogo entre a pesquisadora e os alunos de um dos grupos, durante este momento.

Quadro 22 – Cena 6.3.1.1: A carta do agricultor e o cálculo do lucro

(continua)

Cena 6.3.1.1: A cena ocorreu no sexto dia de aula (30/05/2022), após elaborarem uma definição para o conceito de função e realizarem a leitura da sistematização. Os alunos se organizaram em grupos de quatro integrantes, e a pesquisadora dialogou com a turma sobre a situação de um pequeno agricultor que precisava de ajuda para calcular o lucro da produção leiteira de suas vacas. A história é fictícia, no entanto, foi contada aos alunos como se fosse real. Em seguida, os grupos realizaram seus debates para encontrar uma solução, como mostra o diálogo.

1. **Aluno 13:** *Ele falou que não quer mudar a estrutura, quer continuar do mesmo jeito.*
2. **Pesquisadora:** *Isso, ele não vai investir na estrutura.*
3. **Aluno 13:** *Mas um jeito seria aumentar o preço do leite.*
4. **Aluno 37:** *É, tem que falar, não está fácil com o Coronavírus e tudo mais.*

(conclusão)

5. **Aluno 13:** *Porque se não, é só fazer uma regra de três, 16 000 vezes 13, dividido por 8.000 que vai dar 26 vacas.*
6. **Pesquisadora:** *26 vacas?*
7. **Aluno 13:** *É, para duplicar o lucro. Porque se não, não tem como.*
8. **Aluno 37:** *Como ele vai manter a mesma estrutura tendo o dobro de animais?*
9. **Pesquisadora:** *Eu entendi que ele já tem uma estrutura maior para a quantidade de animais. Ele tem menos animais do que comporta a estrutura, então ele consegue aumentar a quantidade de animais sem precisar mexer na estrutura.*
10. **Aluno 13:** *Acho que com R\$ 4000,00 por mês dá para viver mais ou menos.*
11. **Pesquisadora:** *Vai dar R\$ 4000,00?*
12. **Aluno 13:** *Vai. Vai dobrar.*
13. **Aluno 3:** *É, de R\$ 2000,00 para R\$ 4000,00.*
14. **Aluno 27:** *Lógico. É simples o cálculo, se ele tem 8 mil e quer produzir 16 mil, vamos pegar mais vacas.*

Fonte: Dados da pesquisa

A cena 6.3.1.1 mostra que os alunos estavam mobilizados em resolver o problema e propor uma solução coerente com a realidade, pois, ao sugerirem o aumento do número de vacas (fala 5), questionaram-se quanto à estrutura para comportar os animais (fala 8). Além disso, manifestaram preocupação com o contexto pandêmico (fala 4) vivenciado neste período, que influenciou na situação financeira de muitas famílias, associando às dificuldades encontradas pelo agricultor.

Em suas falas, os alunos indicaram que o problema seria de fácil resolução, já que poderiam “só fazer uma regra de três” (fala 5). Utilizaram a proporcionalidade para calcular o número de vacas e o valor do lucro, compreendendo que, para duplicar a quantidade de litros de leite, seria necessário duplicar o número de vacas e, conseqüentemente, iria duplicar o lucro em reais (falas 5, 7, 12 e 13).

Esta facilidade pode ser explicada a partir dos conhecimentos prévios dos alunos, pois haviam estudado os conceitos de grandezas direta e inversamente proporcionais no período anterior ao desenvolvimento da pesquisa. Estes foram mobilizados por conta da necessidade de encontrar uma solução para a situação proposta, pois, segundo Leontiev (2010), a necessidade impulsiona o sujeito a satisfazê-la. Conforme Moura e Lanner de Moura (1998, p. 14), “Os conhecimentos prévios dos alunos são aproveitados na medida em que é na interação, estabelecida a partir da proposta de solução comum do problema, que cada criança irá lançar mão do que sabe para propor a sua forma de melhor resolver o problema coletivo”.

Estes conhecimentos já apropriados pelos alunos foram utilizados na resolução do problema de diferentes formas. Alguns calcularam diretamente com as grandezas de produção de leite em litros e lucro em reais, realizando a multiplicação dos meios pelos extremos, como mostra a Figura 23. Enquanto outros calcularam primeiramente o percentual de lucro em relação

aos 8000 litros de leite e, em seguida, utilizaram o percentual para calcular o lucro, em reais, referentes aos 16 000 litros.

Figura 23 - Registros dos portfólios das Alunas 9 e 25 em resposta ao problema da carta

LITRO		LUCRO	
8.000		2.000	
16.000		x	
$8.000 \cdot x = 16.000 \cdot 2$			
$8.000x = 32.000$			
$x = \frac{32.000}{8.000} = 4.000$ $x = 4.000$			

100		8000		100		16000	
x		2000		25		x	
$x = \frac{2.000 \cdot 100}{8.000}$				$x = \frac{40.000}{100}$			
$x = 25$				$x = 4000$			

Fonte: Dados da pesquisa

Este método de resolução utilizado pelos alunos, conforme a Figura 23, é chamado de “regra de três”, pois, quando as grandezas são proporcionais, dados três valores conhecidos, é possível calcular o valor desconhecido. Muitas vezes, o ensino da proporcionalidade nas escolas é reduzido a este método resolutivo, que torna a aprendizagem mecanizada e, apesar de possibilitar que os alunos resolvam corretamente cálculos semelhantes, não é suficiente para chegarem à essência do conceito de proporção.

Para os alunos que se apropriaram do conceito de proporcionalidade, a resolução do problema tornou-se ainda mais simples pois bastou perceber que, ao duplicar a quantidade de leite produzida, as demais grandezas diretamente proporcionais também iriam duplicar. Esta forma de resolver o problema é explicitada por um aluno na cena 6.3.1.2, como mostra o Quadro 23.

Quadro 23 – Cena 6.3.1.2: Diferentes opiniões na construção da solução

(continua)

Cena 6.3.1.2: O diálogo aconteceu no sexto dia de aula (30/05/2022), após a leitura da carta enviada pelo agricultor. A cena é constituída por um debate entre alunos do mesmo grupo, na busca por uma solução para o problema. Entretanto, eles possuem opiniões diferentes e não chegam a uma resposta comum, mas debatem entre si citando pontos importantes a serem observados no problema.

15. **Pesquisadora:** Conseguiram?

(conclusão)

16. **Aluna 32:** *Sim, eu tenho uma opinião diferente deles.*
17. **Pesquisadora:** *Podem anotar opiniões diferentes, não tem problema.*
18. **Aluno 5:** *Eu começo. Prezado produtor, nós alunos do IMEAB, do Técnico em Agropecuária, chegamos à conclusão de que se o senhor quer dobrar o lucro líquido, o senhor deverá dobrar a quantidade de animais, dobrando a quantidade de gastos e assim dobrando o lucro. Ou pode procurar alguém que pague mais pelo seu litro de leite.*
19. **Aluna 32:** *A minha opinião é que precisa procurar alguém que pague mais pelo litro de leite, como dois reais que vai dobrar o preço da venda, com isso vai manter a estrutura, que é uma coisa que ele quer.*
20. **Aluno 11:** *Só que você não está levando em consideração que ele quer aumentar para 16 mil litros de leite por mês.*
21. **Aluna 32:** *Isso não, mas se vocês fazendo isso vão dobrar a quantidade de vacas, na minha opinião ia mudar a estrutura também.*

Fonte: Dados da pesquisa

Ao identificar que as grandezas são diretamente proporcionais, o Aluno 5 realizou o cálculo apenas dobrando o valor de cada uma (fala 18). Os Alunos 5 e 11 preocuparam-se em considerar o desejo do agricultor de aumentar a produção para 16 000 litros de leite, possivelmente devido à maneira como a carta estava escrita. A Aluna 32 se referiu ao dobro do preço de venda do litro de leite, que passaria de um real para dois reais. Para isso, seria necessário encontrar outro comprador que pagasse o valor pretendido. Esta aluna preocupou-se em garantir que não houvesse a necessidade de modificar a estrutura onde ficam as vacas.

O diálogo apresentado na cena 6.3.1.2 explicita que nem sempre os alunos que compõem um grupo terão a mesma opinião. Esta divergência mostra que eles expuseram suas diferentes soluções e debateram sobre o assunto, definindo suas prioridades, identificando fragilidades na proposta do outro e buscando construir a melhor alternativa. As diferentes opiniões enriquecem a discussão e proporcionam novas perspectivas para visualizar o problema.

A atividade, por colocar os sujeitos em ação, em que a solução do problema envolve negociação, forçará a troca de conhecimentos através da partilha de saberes necessários para se chegar a um consenso sobre o ganhador e o perdedor. É essa busca de consenso que colocará em movimento o conjunto de saberes individuais e valores culturais que serão partilhados. Isso levará o próprio grupo a um novo nível de compreensão da realidade e a um conjunto de valores que agora são coletivos e, por isso, são novos pontos de partida para novas buscas de solução em situações de ensino em que a classe estará envolvida como um todo (MOURA; LANNER DE MOURA, 1998, p. 13).

É importante destacar que todos os grupos conseguiram solucionar o problema proposto na carta, chegando aos R\$4000,00 de lucro para uma produção de 16 000 litros de leite. Cada grupo se posicionou à frente da turma para apresentar uma síntese de suas discussões, explicando o raciocínio utilizado para resolver o problema. Na cena 6.3.1.3 do Quadro 24 é possível observar a sistematização de alguns grupos.

Quadro 24 – Cena 6.3.1.3: As grandezas diretamente proporcionais

Cena 6.3.1.3: No sexto dia de aula (30/05/2022), após a leitura da carta pela pesquisadora e de um momento de debate, foi verificado que todos os grupos haviam chegado a uma solução para o problema proposto pelo agricultor. Então, a pesquisadora solicitou que os grupos realizassem uma socialização para a turma, destacando a solução encontrada e a maneira como o cálculo foi efetuado. Ressaltou que não bastava retornar para o agricultor apenas a resposta do problema, era preciso possibilitar que ele compreendesse o cálculo realizado. O diálogo a seguir é composto pela sistematização de alguns grupos.

GRUPO 3

22. **Aluno 6:** *Bom, estamos muito contentes que ele enviou um problema para resolvermos, porque assim a gente já vai se aprimorando para no futuro sermos bons técnicos. E o “Aluno 20” vai dizer como solucionamos esse problema.*
23. **Aluno 20:** *Ele vai ter que colocar 26 vacas de leite, assim a produção dele vai aumentar para 16 mil litros de leite por mês e o lucro que era de R\$ 2.000,00 para R\$ 4.000,00. Também tivemos outra ideia, que se ele conseguir aumentar a produção de leite que ele procure outra empresa que valorize mais o valor do litro de leite.*
24. **Aluno 16:** *Porque está muito barato.*
25. **Aluno 20:** *Porque R\$ 1,00 o litro é um pouco baixo.*
26. **Pesquisadora:** *Vocês acham que é fácil encontrar alguém que pague mais?*
27. **Alunos 1, 6, 16 e 20:** *É.*
28. **Aluno 16:** *Hoje em dia é.*
29. **Aluno 20:** *É fácil porque eu produzo leite lá em casa e agora está em média, em quase todas as empresas, R\$ 2,00 o litro.*

GRUPO 5

30. **Aluno 12:** *Nós pensamos que ele precisa dobrar a quantidade de vacas, para dobrar a quantidade de litros de leite, e ele pode vender a R\$ 1,00 o litro que vai gerar R\$ 4.000,00 de lucro. Então vai gerar R\$ 2.000,00 a mais de lucro. Ou se não, ele pode procurar outro vendedor que pague mais de R\$ 1,00.*
31. **Aluno 4:** *Que valorize mais o litro de leite.*
32. **Pesquisadora:** *Vocês chegaram nessas R\$ 4.000,00 somente dobrando os valores?*
33. **Aluno 12:** *Sim. De 13 foi para 26, de 8 para 16, de 6 para 12 e de 2 para 4.*

GRUPO 9

34. **Aluna 15:** *A gente colocou para ele aumentar as vacas.*
35. **Aluna 28:** *Colocamos que para calcular é uma regra de três, diretamente proporcional.*
36. **Pesquisadora:** *E de quanto foi o lucro?*
37. **Aluna 28:** *R\$ 4000,00 por mês.*

SISTEMATIZAÇÃO COM A TURMA

38. **Aluna 28:** *Eu usei a regra de três diretamente proporcional, que é quando os dois valores aumentam. E, eu utilizei os dados que ele passou que é a produtividade que ele tem, o lucro que ele ganha com essa produtividade e a produtividade que ele quer atingir, assim encontrando o lucro. Uma regra de três normal.*
39. **Pesquisadora:** *Vocês viram que o Grupo 9 falou uma coisa diferente?*
40. **Aluno 6:** *Regra de três proporcional.*
41. **Aluna 9:** *Diretamente proporcional.*
42. **Aluna 32:** *Porque se aumenta um, aumenta o outro também.*
43. **Pesquisadora:** *E está aumentando quanto?*
44. **Aluna 9:** *O dobro.*
45. **Pesquisadora:** *Se aumentar o dobro de um, vai aumentar...?*
46. **Aluna 9:** *O dobro também.*
47. **Pesquisadora:** *Diretamente ou inversamente proporcionais?*
48. **Alguns alunos:** *Diretamente.*

Fonte: Dados da pesquisa

A relação de proporcionalidade entre as grandezas esteve presente nas resoluções propostas pelos grupos, como mostra a cena 6.3.1.3. Em alguns casos, a relação está implícita

no cálculo realizado, como nas falas 23, 30 e 33. Podemos supor que estes alunos compreenderam que as grandezas são diretamente proporcionais, mesmo não utilizando este termo, mas o expressaram a partir das ideias de aumentar e dobrar.

Apenas um dos grupos explicitou que se tratava de grandezas diretamente proporcionais, entretanto se referiu ao uso da regra de três (falas 35 e 38) como método de resolução. Durante a socialização deste grupo, a pesquisadora chamou a atenção, questionando sobre o quanto as grandezas estavam aumentando (fala 43) com o intuito de que os alunos percebessem que não se tratava de qualquer aumento e, sim, que ambas aumentariam na mesma proporção, nesse caso o dobro.

Muitos alunos, em diferentes momentos, sugeriram como alternativa para o agricultor encontrar um novo comprador para o leite, que valorizasse mais o seu produto e pagasse dois reais por litro. Desse modo, ele conseguiria duplicar o seu lucro sem a precisar aumentar o número de vacas e a produção. Muitos desses alunos têm proximidade com este assunto, pois, além de estar relacionado ao curso técnico, eles também auxiliam seus pais em suas propriedades rurais, como comenta o Aluno 20, na fala 29.

Os alunos insistiram nesta ideia do dobro do valor, porque consideraram que este preço não estava sendo justo para o agricultor e que ele deveria receber mais, levando em consideração o contexto daquele momento, em que algumas famílias já recebiam mais do que um real, o que demonstra que estavam envolvidos pela situação. Contudo, hipoteticamente, no sistema capitalista que vivemos atualmente dificilmente haveria uma diferença tão grande entre duas empresas concorrentes. Cabe aqui discutir a relevância de tomar cuidado na elaboração de situações que se aproximam do contexto real, como no caso desta que, embora houvesse sido feito uma pesquisa do preço real do leite, até o seu desenvolvimento houve uma grande variação neste valor.

Uma vez que a carta elaborada pela pesquisadora se aproxima do cotidiano dos alunos, isso pode ter contribuído para eles se mostrarem empenhados em, além de responder ao problema solicitado pelo agricultor, propor outras soluções para melhorar a situação financeira ou facilitar o aumento do lucro. Os alunos pareciam preocupados em ajudar e buscavam soluções dialogando com os colegas.

Nesse sentido, o coletivo foi importante para qualificar as ideias propostas, porque os alunos apontavam fragilidades nas soluções e sugeriam alterações com a intenção de chegar à melhor opção para o agricultor. Portanto, procuravam coletivamente solucionar o problema, o que se desvela fundamental para o desenvolvimento dos alunos, já que as funções psíquicas superiores passam do interpessoal para o intrapsíquico, logo, existem inicialmente no plano

social e a partir da internalização, ou seja, “reconstrução interna de uma operação externa” (VIGOTSKI, 1998, p. 74) passam para o plano individual. Este movimento foi possibilitado pela história virtual do conceito, que

[...] é compreendida como uma narrativa que proporciona ao estudante envolver-se na solução de um problema como se fosse parte de um coletivo que busca solucioná-lo, tendo como fim a satisfação de uma determinada necessidade, à semelhança do que pode ter acontecido em certo momento histórico da humanidade (MOURA *et al.*, 2010b, p. 105).

Desse modo, o contexto próximo da realidade dos alunos, tanto da família quanto do curso técnico, pode ter favorecido para gerar uma necessidade coletiva de resolução do problema. Mas, o referido problema não foi suficiente para possibilitar a aprendizagem do conceito de função afim, portanto ele foi ampliando. Isto é apresentado no episódio a seguir.

6.3.2 Episódio 7: Definindo a função afim

Neste episódio, o problema apresentado na carta é ampliado para que os alunos analisassem o lucro obtido em novas possibilidades, com diferentes quantidades de litros de leite a serem produzidos. Para isso, propusemos os seguintes questionamentos: *1) Nas mesmas condições do problema, qual será o lucro de uma produção de 4000 litros de leite? 2) E ainda, qual será o lucro de uma produção de 12 000 litros de leite?*

Estas questões tiveram o intuito de suscitar a análise de situações em que as grandezas diretamente proporcionais aumentam ou diminuem em outras proporções, que não fossem somente o dobro. Cada grupo resolveu os referidos questionamentos à sua maneira e todos socializaram com a turma. A cena 6.3.2.1, do Quadro 25, aborda as soluções apresentadas por três grupos.

Quadro 25 – Cena 6.3.2.1: A proporção entre o lucro e a quantidade de leite produzida

(continua)

Cena 6.3.2.1: A cena ocorreu no sétimo dia de aula (31/05/2022). A pesquisadora apresentou dois questionamentos que ampliam o problema lido na carta do agricultor: *1) Nas mesmas condições do problema, qual será o lucro de uma produção de 4000 litros de leite? 2) E ainda, qual será o lucro de uma produção de 12000 litros de leite?* Esta cena é composta por diálogos, nos quais alguns alunos expõem suas respostas e explicam como realizaram o cálculo, após os debates em grupos.

GRUPO 1

1. **Aluno 13:** *Então nós acertamos, na questão 1 é 1000 e na questão 2 é 3000.*
2. **Pesquisadora:** *Como vocês fizeram?*
3. **Aluno 13:** *Se quando é 8000 tem um lucro de 2000, com 4000 corta na metade e vai dar 1000.*

GRUPO 7

4. **Pesquisadora:** *Vocês colocaram só as respostas?*

(conclusão)

5. **Aluno 11:** Só resposta, porque a gente não usou cálculo.
6. **Pesquisadora:** Como vocês chegaram na resposta?
7. **Aluno 11:** Por lógica.
8. **Pesquisadora:** Que lógica foi essa?
9. **Aluno 11:** Como está indo de 4 em 4 mil litros de leite, eventualmente aumenta ou diminui R\$1000,00.
10. **Aluna 32:** Dá para fazer por regra de três também.
GRUPO 4
11. **Aluno 19:** O lucro será de R\$1000,00, pois seguindo as normas do problema anterior, se diminuir a metade da produção obviamente irá diminuir a metade do saldo lucrativo. Questão 2, qual será o lucro de uma produção de 12 000 litros de leite? Será de R\$3000,00, pois se a produção de 8000 litros de leite lucra R\$2000,00, e 4000 litros de leite lucra R\$1000,00 obviamente, somando os valores chegará no total lucrativo.

Fonte: Dados da pesquisa

A cena 6.3.2.1 é composta pela socialização de três grupos quanto às respostas dos questionamentos 1 e 2. Na fala 3, podemos observar indicativos de que os alunos do Grupo 1 compreenderam que a relação de proporcionalidade direta entre as grandezas se mantém mesmo quando as quantidades estão diminuindo e perceberam que a metade da produção leiteira acarretaria na metade do lucro. Como eram produzidos 8000 litros de leite e a quantidade foi reduzida pela metade, passando para 4000 litros, o lucro que era de R\$2000,00 reais também seria reduzido pela metade, alterando-se para R\$1000,00 reais. A Figura 24 mostra o cálculo realizado pelo Aluno 14, que utilizou o mesmo raciocínio.

Figura 24 - Registros do portfólio do Aluno 14 em resposta aos questionamentos 1 e 2

1) Man manter condição do problema, qual será o lucro de uma produção de 4000 l de leite?

	8000 2	2000 2
	0000 4000	0000 1000

Lucro de R\$ 1000,00.

2) E ainda, qual será o lucro de uma produção de 12000 l de leite?

12000 l = 3000 reais

8000 l = 2000 reais	4000	1000
4000 l = 1000 reais	x 3	x 3
	12000	3000

Fonte: Dados da pesquisa

O Aluno 14, conforme a Figura 24, percebeu que, na questão 2 a quantidade de leite produzida triplicaria em relação à questão 1, passando de 4000 para 12 000 litros. Desse modo, ele também triplicou o valor obtido no lucro de R\$ 1000,00 para R\$3000,00 reais. Portanto,

podemos supor que houve compreensão da relação de proporcionalidade para além da ideia do dobro.

Quanto ao Grupo 7, a partir da fala 9, cena 6.3.2.1, podemos inferir que os alunos entenderam a proporcionalidade entre a quantidade de leite produzida e o lucro gerado, de modo que para cada 4000 litros de leite sejam obtidos R\$1000,00 de lucro. E então, os alunos puderam resolver os cálculos somente adicionando R\$1000,00 para cada 4000 litros. Enquanto o Grupo 4 utilizou a adição, já que 4000 mais 8000 somam 12 000 litros de leite e gerariam, respectivamente, os lucros de R\$1000,00 e R\$2000,00, que totalizariam R\$3000,00.

Outros grupos, que não foram mencionados na cena 6.3.2.1, optaram pelo uso da regra de três na resolução das questões 1 e 2, partindo das informações obtidas na carta do agricultor, de que 8000 litros de leite geram R\$2000,00 de lucro. Nesse caso, é possível ter havido a compreensão e a identificação da relação de proporcionalidade entre as grandezas. No entanto, os alunos não conseguiram analisar qual seria a proporção de redução e precisaram realizar todo o desenvolvimento do cálculo, como ilustra a Figura 25.

Figura 25 - Registros do portfólio da Aluna 12 em resposta aos questionamentos

1- 8000 - 2000
 4000 $\hat{=}$ x
 $8000x = 4000 \cdot 2000$
 $x = \frac{8000000}{8000}$
 $x = 1000$ lucro

2- 8000 - 2000
 12000 $\hat{=}$ x
 $8000x = 12000 \cdot 2000$
 $x = \frac{24000000}{8000}$
 $x = 3000$ lucro

Fonte: Dados da pesquisa

Na sequência, entregamos aos alunos as seguintes questões: Q.1 - *Que grandezas variam no problema?* Q.2 - *Essas grandezas são proporcionais? Explique.* Q.3-a - *Existe um número que se mantém constante?* Q.3-b - *O que esse número representa?* Q.4 - *Qual é o lucro*

de produção de um litro de leite, nas condições do problema? Q.5 – É possível determinar o lucro da produção sem que haja o número de litros de leite produzidos? Explique. Q.6-a – Qual é a variável dependente? Q.6-b – E qual é a variável independente? Q.7 - É possível encontrar uma expressão geral para representar o lucro da produção de leite considerando a variação da quantidade de leite produzida em cada mês?

Estas questões foram propostas com a intencionalidade de possibilitar uma reflexão mais aprofundada acerca dos problemas anteriormente resolvidos. Destarte, os alunos deveriam identificar as grandezas envolvidas, verificar se eram proporcionais, encontrar a constante de proporcionalidade, reconhecer a relação de dependência entre as grandezas, indicar a variável dependente e a independente e encontrar uma expressão algébrica que representasse a situação.

Entre os questionamentos supracitados, destacaram-se Q.3-a e Q.3-b, isso porque os alunos demonstraram maior dificuldade ao respondê-las, em comparação à identificação das variáveis e da relação de dependência. A cena 6.3.2.2 no Quadro 26 apresenta um diálogo entre os alunos de um dos grupos, com a interação da pesquisadora, no qual tentam identificar o número que se mantém invariável, ou seja, a constante de proporcionalidade.

Quadro 26 – Cena 6.3.2.2: Identificando a constante de proporcionalidade

(continua)

Cena 6.3.2.2: No sétimo dia de aula (31/05/2022), as questões propostas tinham como intenção possibilitar que os alunos chegassem à elaboração de uma expressão geral que representasse a relação de dependência entre o lucro e a produção de leite. Para isso, foi solicitada a identificação das variáveis e da constante de proporcionalidade. As questões que desencadearam o diálogo a seguir foram: Q. 3-a – Existe um número que se mantém constante? Q. 3-b - O que esse número representa?

12. **Pesquisadora:** Quando vocês falam o preço por litro, vocês estão pensando em um litro apenas.
13. **Aluno 37:** Um litro é, o preço do litro.
14. **Pesquisadora:** Agora pense no lucro e na quantidade. Vocês estão pensando em quantidades de 4.000, 8000, 16000 litros e para um litro vocês já pensaram?
15. **Aluno 37:** Um litro é R\$1,00.
16. **Pesquisadora:** O lucro para cada litro é de R\$1,00?
17. **Aluno 37:** Sim.
18. **Aluno 13:** Não, vai ser R\$0,50 porque é a metade, tem os gastos.
19. **Pesquisadora:** O lucro está sendo a metade?
20. **Aluno 3:** R\$0,25. São 4000 litros, metade é 2000 e na questão 1 era R\$1000,00. Então é R\$0,25.
21. **Aluno 27:** Ele está certo?
22. **Pesquisadora:** Vamos pensar na primeira situação, ele estava produzindo 8000 litros e tendo R\$2000,00 de lucro. Qual era o lucro por litro? Como vocês calculam o lucro por litro?
23. **Aluno 27:** R\$0,20.
24. **Aluno 13:** É só dividir.
25. **Pesquisadora:** Então divide.
26. **Aluno 13:** Vai ser 8000 dividido por 2000 que vai dar 4.
27. **Pesquisadora:** Vocês estão dividindo a quantidade pelo lucro?
28. **Aluno 13:** Mas não é isso?
29. **Pesquisadora:** Como faz para descobrir o lucro para cada litro?
30. **Aluno 13:** Vai ser 2000 dividido por 8000. Quanto dá?
31. **Aluno 37:** R\$0,25.

(conclusão)

32. **Pesquisadora:** *Então é R\$0,25 de lucro por litro. Agora pensem na outra situação, quando ele aumenta para 16 000 litros, quanto seria o lucro?*
33. **Aluno 13:** *R\$4000,00*
34. **Pesquisadora:** *Quanto vai dar por litro?*
35. **Aluno 37:** *4000 dividido por 16 000 vai dar 0,25.*
36. **Aluno 13:** *Eu entendi.*
37. **Aluno 37:** *Ele não mudou o preço do leite.*
38. **Pesquisadora:** *E o lucro por litro mudou?*
39. **Aluno 13:** *Não mudou.*
40. **Aluno 37:** *Mas então, o preço do litro de leite não mudou.*
41. **Pesquisadora:** *Não mudou, mas tem outra coisa que não mudou além do preço.*
42. **Aluno 13:** *O lucro por litro.*
43. **Aluno 37:** *Eu fiz também 3000 por 12 000 e deu 0,25. O que não mudou foi o preço do litro de leite e o lucro em cada litro de leite.*
44. **Aluno 13:** *O que esse número representa? O valor do lucro de um litro de leite.*
45. **Pesquisadora:** *Ele vende um litro de leite por R\$1,00, tirando os gastos sobram R\$0,25 por litro.*
46. **Aluno 13:** *Então agora a gente sabe que ele tem um gasto de 75%.*
47. **Aluno 37:** *75%? Meu Deus do céu.*
48. **Aluno 13:** *Eu parava de produzir.*

Fonte: Dados da pesquisa

Os alunos, como mostra a cena 6.3.2.2, indicavam como valor constante o preço do litro de leite de R\$1,00, ao invés do lucro obtido por litro que era de R\$0,25. Após a pesquisadora questionar qual seria o lucro obtido com a venda de um litro de leite (fala 14), o Aluno 37 informou que seria R\$1,00 e o Aluno 13 que seria R\$0,50. Portanto, estes alunos não haviam compreendido quanto era o lucro por litro.

O Aluno 3 respondeu corretamente, porém, os demais não compreenderam como ele obtivera a resposta. Por conseguinte, a pesquisadora mediou, por meio de questionamentos, a busca pelo valor do lucro por litro, levando os alunos a calcularem a partir de diferentes quantidades de litros de leite, para que percebessem que este valor seria permanente. Nas falas 42 e 43, os alunos mostram terem compreendido que o lucro por litro é constante, todavia, não se referiam a ele como constante de proporcionalidade, já que este termo não havia sido abordado anteriormente.

Nas falas 46, 47 e 48, os alunos reagiram à situação após terem compreendido que a cada litro de leite vendido por R\$1,00, 75% do valor seria de gastos e apenas 25% corresponderiam ao lucro. Sua reação foi negativa, devido ao grande percentual destinado aos gastos e perceberam que, neste caso, não seria vantajoso para o agricultor. Neste momento, os sentidos que os alunos atribuíram ao resultado do cálculo os levaram a compreender a situação.

A constante de proporcionalidade, encontrada na cena 6.3.2.2, facilita a elaboração da expressão algébrica, pois, como ela é obtida pela divisão da variável dependente pela independente, $a = \frac{y}{x}$, será igual ao coeficiente angular a , na função $y = ax$. Assim, surge a

necessidade de uma representação específica que sintetize a situação, ou seja, uma função afim. A cena 6.3.2.3 no Quadro 27 expõe a socialização das questões Q.1 a Q.7 feita por um dos grupos.

Quadro 27 – Cena 6.3.2.3: Encontrando a função afim

<p>Cena 6.3.2.3: No sétimo dia de aula (31/05/2022), após os alunos terem debatido em seus grupos acerca dos questionamentos propostos e respondido a eles em seus portfólios, a pesquisadora solicitou que realizassem a socialização de uma síntese de cada grupo. Nesta cena, é apresentada a sistematização realizada pelo Grupo 3.</p>
<p>49. Aluno 6: <i>Bom, aqui a gente fez os esquemas, no caso a gente usou bastante a regra de três para resolver alguns problemas como o último e a questão 4 também. Questão 1, que grandezas variam no problema? Litros de leite e lucro, quantidade de litros de leite. A questão 2, essas grandezas são proporcionais? Explique. A gente colocou sim. São, pois a quantidade de litros de leite aumenta e o lucro vai aumentando também.</i></p> <p>50. Aluno 16: <i>Existe um número que se mantém constante? Na questão 3a. Sim, o valor do litro de leite e na 3b representa quanto ele ganhará em um litro.</i></p> <p>51. Aluno 20: <i>Na questão 4, qual é o lucro de produção de um litro de leite, nas condições do problema? O lucro dele é de R\$0,25 por litro.</i></p> <p>52. Aluno 6: <i>Para essa conta a gente fez regra de três, 8000 dividido por 2000 e 1000 dividido por x, que deu 0,25.</i></p> <p>53. Aluno 21: <i>É possível determinar o lucro da produção sem que haja o número de litros de leite produzidos? Explique. Não, pois sem a quantidade de leite é impossível ter o valor do lucro.</i></p> <p>54. Aluno 16: <i>Qual é a variável dependente? Letra a. E qual é a variável independente? A dependente é o valor do lucro e a independente é a quantidade de litros de leite.</i></p> <p>55. Aluno 6: <i>É possível encontrar uma expressão geral para representar o lucro da produção de leite considerando a variação da quantidade de leite produzida em cada mês? Sim, sabemos a produção mensal e o preço do litro de leite é de $0,25L = B$.</i></p>

Fonte: Dados da pesquisa

Os questionamentos propostos tinham como intuito possibilitar a identificação da função afim na elaboração de uma expressão algébrica que representasse a relação de dependência entre o lucro e a produção de leite. Na cena 6.3.2.3, é possível perceber que este grupo conseguiu identificar as grandezas que variam e que estas são proporcionais. Entretanto, justificaram, reduzindo ao fato de que as duas grandezas estão aumentando, o que não é suficiente, pois é preciso que este aumento seja proporcional.

Ao identificar o número que se mantém invariável, em Q.3-a, os alunos citaram o valor do litro de leite, mas alegaram, em Q.3-b, que representa o quanto o agricultor ganharia em um litro. Nesse caso, os alunos não levaram em conta os gastos e a relação entre as grandezas para encontrar a constante de proporcionalidade. Enquanto na questão Q.4 eles responderam corretamente que o lucro obtido por litro de leite é de 25 centavos. Dessa forma, podemos supor que estes alunos não compreenderam que as questões Q.3-a e Q.3-b se referiam à constante de proporcionalidade.

Em relação às questões *Q.5*, *Q.6-a* e *Q.6-b*, os alunos expressaram a relação de dependência entre as grandezas e identificaram as variáveis dependente e independente. Também encontraram uma expressão algébrica para expressar essa relação de dependência entre as grandezas, utilizando como variáveis as letras do alfabeto B e L. A partir disso, podemos inferir que estes alunos compreenderam essas ideias fundamentais da função afim, as quais foram utilizadas para a definir, na sequência, a função linear.

Para tal finalidade, a pesquisadora propôs a construção da representação gráfica da expressão algébrica encontrada pelos alunos, como na fala 55. O gráfico discreto foi construído em uma folha quadriculada, disponibilizada aos alunos. Em seguida, foi-lhes questionado acerca do tipo de função que estava sendo representada pela expressão algébrica, sabendo que se tratava de grandezas proporcionais. Para isso, os alunos observaram as representações genéricas dos casos particulares de função afim e identificaram que se tratava de uma função linear.

Para definir a função linear, os alunos receberam um quadro com exemplos de funções lineares e de funções não lineares, na representação gráfica e algébrica. Os grupos observaram as características e escreveram uma possível definição. Posteriormente, uma discussão coletiva viabilizou encontrar a definição mais adequada.

Em suma, podemos inferir que o problema proposto na carta do agricultor mobilizou os alunos para encontrar a melhor solução. A proporcionalidade foi importante para compreender a relação entre as grandezas envolvidas no problema e contribuiu na busca de uma solução, possibilitando achar a expressão algébrica que levou a definição de função linear. Para sistematizar o terceiro eixo de análise, destacamos no próximo subitem algumas reflexões com base nas cenas analisadas.

6.3.3 Sistematização do Eixo de Análise 3

A terceira situação de ensino se materializou em uma história virtual, elaborada na forma de uma carta fictícia de um pequeno agricultor. Esta possibilitou a abordagem do conceito de função afim, a partir da relação de proporcionalidade entre as grandezas envolvidas no problema.

Os alunos se mostraram mobilizados em solucionar o problema proposto na carta, debatendo ideias e diferentes possibilidades com vistas a encontrar a opção financeiramente mais vantajosa para o pequeno agricultor. O envolvimento deles pode ter sido motivado pela

proximidade do contexto com sua realidade, já que eles estão cursando o técnico e muitos residem em propriedades rurais, onde há contato com a produção leiteira.

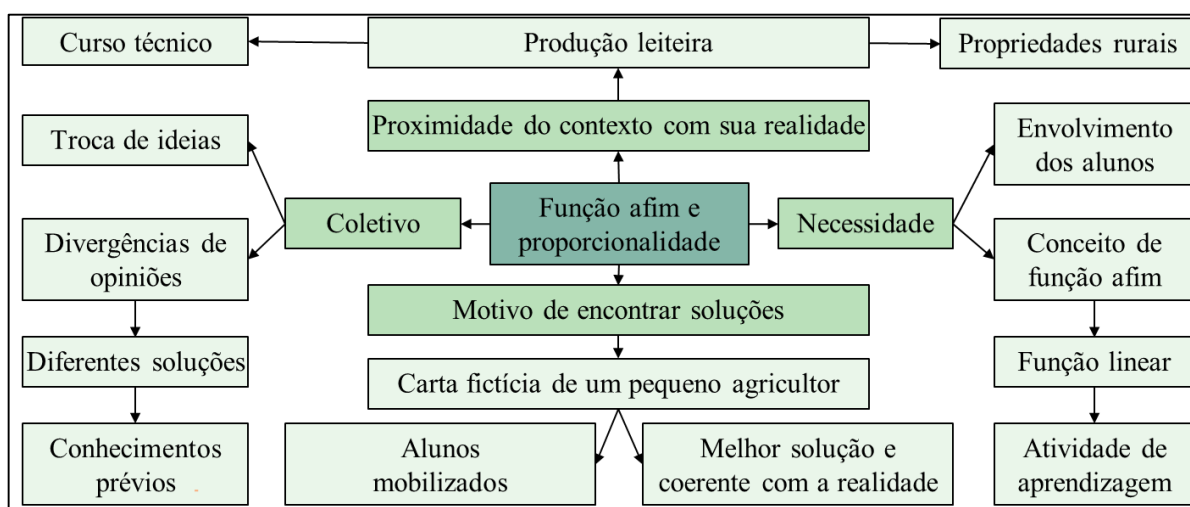
A maioria dos alunos demonstrou facilidade para resolver os problemas, valendo-se de seus conhecimentos prévios acerca da relação de proporcionalidade direta entre grandezas. Levando em consideração as cenas apresentadas, podemos supor que, apesar de muitos alunos expressarem a proporcionalidade a partir do aumento das grandezas, houve uma compreensão de que elas dobravam, triplicavam ou eram reduzidas pela metade.

O método resolutivo da regra de três foi utilizado predominantemente para solucionar problemas e questionamentos, mas também foram consideradas outras possibilidades, como a porcentagem. As diferentes maneiras pela qual o problema foi resolvido desvelam as particularidades dos alunos, que utilizaram os conceitos já apropriados e estabeleceram relações entre eles.

Além disso, houve divergências de opiniões entre os alunos, inclusive, entre integrantes do mesmo grupo. Os debates e as discussões desencadeados pelo problema e questionamentos propostos permitiram uma compreensão mais aprofundada acerca do contexto da produção leiteira e diferentes possibilidades de investimentos para o agricultor.

Os alunos contribuíam com seus conhecimentos prévios e ampliavam seus entendimentos a partir das sugestões dos colegas. Portanto, a resolução do problema no coletivo torna possível uma troca de ideias e reflexões fundamentais para a construção da aprendizagem dos conceitos envolvidos. O Eixo de Análise 3 foi sistematizado na Figura 26.

Figura 26 - Síntese do Eixo de Análise 3



Fonte: Sistematização da pesquisadora

6.4 SÍNTESE

Diante dos três eixos de análise expostos, podemos ressaltar que as cenas apresentadas nos sete episódios trazem indicativos de que as situações de ensino apresentadas podem ser potencialmente desencadeadoras de aprendizagem, ao possibilitarem a apropriação dos nexos conceituais de fluência, variável, campo de variação, dependência e proporcionalidade.

Ao iniciarmos com a fluência, no Eixo de Análise 1, tínhamos como intencionalidade possibilitar aos alunos a percepção do quanto mudamos ao longo do tempo e de que tudo ao nosso redor também está em constante transformação e, a partir disso, que tudo muda a todo momento, tudo flui. A fluência permeou todo o desenvolvimento das situações até chegarmos à função afim, que descreve e contribui para o entendimento de movimentos da vida.

No Eixo de Análise 2, os nexos conceituais de variável e campo de variação permitiram uma melhor compreensão dos movimentos, por meio da identificação das grandezas que se alteravam e dos possíveis valores que poderiam assumir, propiciando o reconhecimento de regularidades. A variável e o campo de variação estiveram presentes durante todo o trabalho desenvolvido e mostraram-se essenciais para a apropriação do conceito de função afim, que estabelece uma relação entre grandezas.

Na sequência, foi abordado o nexo conceitual de dependência, tendo em vista que, na função afim, ela está presente na relação entre as variáveis. Isto foi identificado pelos alunos à medida que percebiam que as mudanças, em seus diferentes contextos, dependiam de algumas condições para serem realizadas. Em alguns momentos, foram identificadas mudanças irregulares, como a cor do cabelo, cor dos olhos, modificações relacionadas ao comportamento, amadurecimento e desenvolvimento cognitivo e, em outros, regulares, como o crescimento de um pé de milho ao estimar que a planta cresceria “um dedo” por dia e a alterações no lucro obtido com a venda do leite produzido. A função pode descrever movimentos regulares.

No Eixo de Análise 3, destacamos uma situação de ensino que considera a relação de proporcionalidade entre as grandezas envolvidas na função afim. Os conhecimentos prévios dos alunos acerca da relação de proporcionalidade direta entre grandezas contribuíram para solucionar o problema proposto neste eixo. Nas cenas dos episódios 6 e 7, são apresentadas algumas falas de alunos que evidenciam a proporcionalidade. Essa foi fundamental para a abordagem e compreensão do conceito de função afim, na elaboração da expressão algébrica, na identificação da constante de proporcionalidade como valor fixo e na interpretação da dependência e variação das grandezas.

Levando em conta o que foi exposto podemos inferir que, a partir das situações propostas sobre os nexos conceituais, foram identificados indicativos de ter havido por parte dos alunos a apropriação do conceito de função afim. Para que isso acontecesse, alguns elementos foram essenciais. Estes serão detalhados no capítulo a seguir, que apresenta as considerações finais desta pesquisa.

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O desenvolvimento da pesquisa buscou responder ao seguinte problema: no que se refere à organização do ensino de função afim no Ensino Médio alguns elementos podem ser essenciais para a aprendizagem dos estudantes? Para respondê-lo, demarcamos como objetivo geral investigar elementos que se mostram como essenciais para o processo de aprendizagem do conceito de função afim de estudantes de uma turma do Ensino Médio.

Buscamos responder ao problema de pesquisa, retomando aspectos tratados na pesquisa que consideramos relevantes. A dimensão orientadora se efetivou por meio dos estudos teóricos que contemplam os pressupostos da Teoria Histórico-Cultural, da Teoria da Atividade, da Atividade Orientadora de Ensino e aqueles voltados ao conceito de função afim, sua relação com a proporcionalidade, o movimento lógico-histórico e as orientações para a organização do ensino.

Estes estudos embasaram as ações que constituem a dimensão executora. A organização intencional do ensino da função afim, a partir da elaboração de situações de ensino que consideram seus nexos conceituais, teve como intuito desencadear a atividade de aprendizagem. As três situações foram elaboradas, de modo a possibilitar uma continuidade, já que a apropriação da fluência propicia a identificação de mudanças irregulares e regulares, o que permite verificar uma relação de dependência entre grandezas envolvidas em mudanças regulares e cada grandeza passa a ser representada por uma variável, que varia conforme o campo de variação. No caso da função linear, como uma particular função afim, esta relação entre as grandezas é proporcional. Portanto, compreender esses nexos conceituais pode levar ao entendimento do conceito de função afim.

O desenvolvimento foi realizado em uma turma com 39 estudantes do primeiro ano do Curso Técnico em Agropecuária Integrado ao Ensino Médio, do Instituto Municipal de Ensino Assis Brasil (IMEAB), no município de Ijuí. Totalizaram 14 aulas, no período de 10 de maio a 04 de julho de 2022, nas quais o material empírico foi produzido por meio de gravações, em áudio e vídeo, portfólios individuais e um formulário de *feedback*. Assim, para realizar as análises do material empírico, organizamos a pesquisa em três eixos, cada um contemplando uma das situações elaboradas. Os eixos de análise foram organizados em sete episódios, compostos por um total de 18 cenas, com a intenção de apreender a realidade e responder ao problema de pesquisa. As cenas são compostas por diálogos que denotam a importância de se valorizar os conhecimentos empíricos dos estudantes e que potencializam a possibilidade para a compreensão do conhecimento teórico.

O planejamento e a organização das situações de ensino, o desenvolvimento com os alunos e as análises do material empírico possibilitaram identificar os seguintes elementos essenciais para a apropriação do conceito função afim: o modo coletivo de organização, a proximidade com o contexto histórico-social dos alunos, a necessidade que leva a um maior envolvimento dos alunos e o motivo de encontrar soluções.

Ao retomarmos o fato de que estes alunos não estavam acostumados ao trabalho em grupos, podemos ressaltar que, ao longo do desenvolvimento das situações de ensino, eles foram se reorganizando e se apropriando de um modo coletivo de organização. Com o passar dos dias, as ações coletivas foram se ampliando e se mostraram ainda mais usuais na situação analisada no Eixo de Análise 3.

Percebemos a presença de ações coletivas por meio dos diálogos realizados entre os alunos, nos quais puderam expressar suas opiniões, debater, complementar e/ou discordar de ideias apresentadas. E o modo coletivo de eles se organizarem reverberou na aprendizagem dos conceitos pelos alunos, que desenvolviam as situações e buscavam responder aos questionamentos com as soluções elaboradas no grupo. Isto converge com nosso referencial teórico, ao entendermos que, neste movimento, houve o desenvolvimento de cada um dos alunos, pois a aprendizagem se efetiva nas interações sociais, nas atividades coletivas e, a partir da internalização, passam para o plano individual.

Ademais, a elaboração de situações considerando a proximidade com o contexto histórico-social dos alunos possibilitou que eles ampliassem as discussões propostas por meio de problemas, expusessem conhecimentos adquiridos em suas vivências na propriedade rural ou no curso técnico e debatessem acerca de temáticas de seu interesse. Observamos que, no desenvolvimento das situações, especialmente a da produção leiteira, os alunos participaram com maior entusiasmo na resolução dos problemas. Este aspecto está em concordância com os estudos teóricos, ao esclarecerem que a personalidade do sujeito é uma decorrência histórica-social.

Tanto o modo coletivo de organização, quanto a proximidade com o contexto histórico-social geraram necessidades que levaram a um maior envolvimento dos alunos durante o desenvolvimento das situações. Isto foi percebido pelas participações nos diferentes momentos da aula, como debates em grupos e socializações, nos quais se mostraram interessados em observar as fotografias, obter maior pontuação no jogo Pega Varetas e mobilizados em solucionar o problema do produtor de leite da melhor maneira possível, propondo diferentes alternativas.

A necessidade de encontrar soluções, materializada no envolvimento dos alunos, gerou motivos em fazê-lo. Pela análise, foi possível evidenciar que, para a maior parte dos alunos, se mostraram como motivos eficazes, uma vez que coincidiram com o objeto das situações propostas, particularmente no caso do leite, a busca pela solução se concentrou em encontrar uma solução matematicamente correta que melhor atenderia ao problema do agricultor. Motivos eficazes são aqueles que mobilizam os alunos na busca pela solução dos problemas, ou seja, os impulsionam para realizar as ações que irão satisfazer as necessidades e que conferem à atividade um sentido pessoal.

Em síntese, identificamos indicativos de apropriação do conceito de função afim, especialmente de função linear, a partir da proporcionalidade, dos nexos conceituais e considerando o seu movimento lógico-histórico, revelados pelos elementos essenciais que citamos anteriormente. Contudo, há de se considerar ainda que isso só foi possível devido à organização intencional do ensino função afim, porque as situações de ensino foram elaboradas e o seu desenvolvimento planejado a partir da intencionalidade de possibilitar que os alunos entrassem em atividade de aprendizagem.

Isso nos leva a concluir que os elementos essenciais citados podem ser considerados como premissas e produtos. Premissas, porque, ao elaborarmos as situações, pretendíamos que esses elementos se destacassem durante o desenvolvimento com os alunos, ampliando as condições de aprendizagem, e produto, porque, ao final de nosso estudo, constatamos que eles se mostraram como elementos essenciais para a aprendizagem.

Ao nos encaminharmos para o final desta escrita, destaco²⁹ que a realização desta pesquisa proporcionou muitas aprendizagens. No âmbito profissional, especialmente, quanto à organização intencional do ensino de conceitos matemáticos a partir de seus nexos conceituais e da elaboração de situações de ensino com base na Atividade Orientadora de Ensino, em especial, no que diz respeito ao seu movimento lógico-histórico. No âmbito pessoal, resalto as aprendizagens relacionadas à importância do modo coletivo de elaboração da pesquisa, auxiliando na superação dos desafios encontrados ao longo do percurso, e do movimento da vida, que está em constante transformação.

Além das aprendizagens, são muitas as questões desencadeadas por esta pesquisa que me inquietam, como professora e pesquisadora, e que me fazem querer continuar nesse movimento de aprendizagem. Tais como: como ampliar a proposta para o ensino de outras

²⁹ Neste momento final, a escrita está em 1.º pessoa do singular para expressar aprendizagens pessoais da pesquisadora neste processo.

funções? como encontrar um contexto de interesse comum entre os alunos em uma sala de aula na qual este não esteja explícito, como no caso do curso técnico? como organizar o ensino de outros conceitos a partir de seus nexos conceituais?

REFERÊNCIAS

- ALVES, B. A. S. **A álgebra na perspectiva histórico-cultural**: uma proposta de ensino para o trabalho com equações de 1º grau. 2016. 160 p. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) – Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, MG, 2016.
- ARAÚJO, E. S.; MORAES, S. P. G. de. Dos princípios da pesquisa em educação como atividade. *In*: MOURA, M. O. (org.). **Educação escolar e pesquisa na Teoria Histórico-Cultural**. São Paulo: Edições Loyola, 2017. p. 47-70.
- ASBAHR, F. S. F. A pesquisa sobre a atividade pedagógica: contribuições da teoria da atividade. **Revista Brasileira de Educação**. n. 29, p. 108-118, 2005.
- BAUMGART, J. K. **História da álgebra**. Trad. Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1992.
- BITENCOURT, R. R. R. **Aplicações do conceito de proporcionalidade a partir da engenharia didática**. 2017. Dissertação (Mestrado) - Programa de Mestrado Profissional em Matemática, Universidade Federal do Amapá, Macapá, 2017.
- BRASIL. Ministério da Educação e do Desporto. **Parâmetros Curriculares Nacionais - Matemática 5.ª a 8.ª série**. Brasília: SEF, 1998.
- BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria da Educação Básica. Conselho Nacional de Educação. **Base Nacional Comum Curricular: educação é a base**. Brasília: MEC, 2017.
- CARAÇA, B.de J. **Conceitos fundamentais da matemática**. 2. ed. Lisboa: Gradiva, 1951.
- CEDRO, W. L. **O motivo e a atividade de aprendizagem do professor de Matemática: uma perspectiva histórico-cultural**. 2008. 242 p. Tese (Doutorado em Educação) - Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2008.
- CEDRO, W. L.; NASCIMENTO, C. P. Dos métodos e das metodologias em pesquisas educacionais na Teoria Histórico-Cultural. *In*: MOURA, M. O. (org.). **Educação escolar e pesquisa na Teoria Histórico-Cultural**. São Paulo: Edições Loyola, 2017. p. 13-45.
- CORRÊA, E. F. **Caracterização da Função Afim, Aplicação e Ensino**. 2015. Dissertação (Mestrado) - Programa de Mestrado Profissional em Rede Nacional, Universidade Federal do Maranhão, São Luís, 2015.
- COSTA, M. S.; ALLEVATO, N. S. G. **Proporcionalidade e função afim: uma possível conexão através da resolução de problemas**. *In*: XIV Conferência Interamericana de Educação Matemática. Chiapas, México. 2015.
- DAVÝDOV, V. V. **Tipo de generalización en la enseñanza**. Editorial Pueblo y Educación, Ciudad de La Habana, 2. Reim., 1982.
- FICHTNER, B. **Introdução na abordagem histórico-cultural de Vygotsky e seus Colaboradores**. 2010. Disponível em: <<https://www.researchgate.net/publication/268342314>> Acesso em: 22 mar. 2022.

FIGUEIREDO, J. R. C. de. **Funções Afins e a Relação entre Função Linear, Proporcionalidade e Regra de Três**. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Universidade Federal de Campina Grande, Centro de Ciências e Tecnologia, Campina Grande, 2017.

FREIRE, P. **Pedagogia do oprimido**. 12. ed. Rio de Janeiro: Paz e Terra, 1987.

GRYMUZA, A. M. G.; RÊGO, R. G. do. **Teoria da Atividade**: uma possibilidade no ensino de matemática. **Revista Temas em Educação**, João Pessoa, v. 23, n. 2, p. 117-138, jul./dez. 2014. Disponível em: <https://search.proquest.com/docview/2344220689?pq-origsite=gscholar&fromopenview=true>. Acesso em: 22 mar. 2022.

IEZZI, G.; MURAKAMI, C. **Fundamentos de matemática elementar, 1**: conjuntos, funções. 9. ed. São Paulo: Atual, 2013.

IJUÍ. **Referencial Curricular Municipal**: Ensino Médio – EPIEM. Secretaria Municipal de Educação: Ijuí, 2020. nº 24. vol. 5.

KOPNIN, P. V. **A dialética como lógica e teoria do conhecimento**. Rio de Janeiro: Civilização Brasileira, 1978. (Coleção Perspectivas do homem)

LANNER de MOURA, A. R.; SOUSA, M. do C. de. Dando movimento ao pensamento algébrico. **Zetetiké**, v. 16, n. 30, p. 63-75, jul./dez. 2008.

LEONTIEV, A. N. O desenvolvimento do psiquismo na criança. *In*: LEONTIEV, A. N. **O desenvolvimento do psiquismo**. 2. ed. São Paulo: Centauro, 2004. p. 303-333.

LEONTIEV, A. N. Uma contribuição à Teoria do Desenvolvimento da Psique Infantil. *In*: VIGOTSKI, L. S.; LURIA, A. R.; LEONTIEV, A. N. **Linguagem, desenvolvimento e aprendizagem**. 11. ed. São Paulo: Ícone, 2010. p. 59-83.

LEONTIEV, A. N. **Atividade. Consciência. Personalidade**. Tradução de Priscila Marques. Bauru, SP: Mireveja, 2021.

LIBÂNEO, J. C. A aprendizagem escolar e a formação de professores na perspectiva da psicologia histórico-cultural e da teoria da atividade. **Educar em Revista**, Curitiba, n. 24, p. 113-147, jul./dez. 2004. Disponível em: <https://www.scielo.br/pdf/er/n24/n24a06.pdf>. Acesso em: 23 out. 2020.

LONGAREZI, A. M.; PUENTES, R. V. (org.). **Ensino Desenvolvidor**: Vida, Pensamento e Obra dos Principais Representantes Russos. Uberlândia: EDUFU, 2013.

LURIA, A. R. Vigotskii. *In*: VIGOTSKI, L. S.; LURIA, A. R.; LEONTIEV, A. N. **Linguagem, desenvolvimento e aprendizagem**. 11. ed. São Paulo: Ícone, 2010. p. 21-37.

MARTINS, L. M. **O desenvolvimento do psiquismo e a educação escolar**: contribuições à luz da psicologia histórico cultural e da pedagogia histórico-crítica. 2011. 250 p. Tese (Livre-Docente em Psicologia da Educação) – Faculdade de Ciências, Universidade Estadual Paulista Júlio De Mesquita Filho, 2011.

MIRANDA, M. I. Conceitos centrais da teoria de Vygotsky e a prática pedagógica. **Ensino em Revista**, v. 13, n. 1, jul./jul. 2005. p. 7-28.

MOURA, M. O. de. (Coord.). **Controle da variação de quantidades**: atividades de ensino. São Paulo, Universidade de São Paulo, 1996a.

MOURA, M. O. de. A atividade de ensino como unidade formadora. **Bolema**. São Paulo, ano II, n. 12, p. 29-43, 1996b.

MOURA, M. O. de. **O educador matemático na coletividade de formação**: uma experiência com a escola pública. Tese (Livre Docência em Metodologia de Ensino de Matemática) – Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2000.

MOURA, M. O. de (org.). **Educação escolar e pesquisa na teoria histórico-cultural**. São Paulo: Loyola, 2017.

MOURA, M. O. de. A atividade de ensino como ação formadora. *In*: CASTRO, A. D.; CARVALHO, A. M. P. de (org.). **Ensinar a ensinar**: Didática para a Escola Fundamental e Média. 2. ed. São Paulo, SP: Cengage, 2018. p. 145-165.

MOURA, M. O.; LANNER de MOURA, A. R. **Escola**: um espaço cultural. Matemática na Educação Infantil: conhecer, (re)criar – um modo lúdico com as dimensões do mundo. São Paulo, Diadema/Secel, 1998.

MOURA, M. O. de *et al.* Atividade orientadora de ensino: unidade entre ensino e aprendizagem. **Revista Diálogo Educacional**, Curitiba, v. 10, n. 29, p. 205-229, 2010a. Disponível em: <https://www.redalyc.org/pdf/1891/189114444012.pdf>. Acesso em: 24 mar. 2022.

MOURA, M. O. de *et al.* **A atividade pedagógica na teoria histórico-cultural**. Brasília: Liber, 2010b.

MOURA, M. O. de; SFORNI, M. S. de F.; LOPES, A. R. L. V. A objetivação do ensino e o desenvolvimento do modo geral da aprendizagem da atividade pedagógica. *In*: MOURA, M. O. de (org.). **Educação Escolar e pesquisa na teoria histórico-cultural**. São Paulo: Loyola, 2017. p. 71-99.

MOURA, M. O.; ARAUJO, E.S.; SERRÃO, M.I.B. Atividade orientadora de ensino: fundamentos. **Linhas Críticas**, v.24, p 411-430, 2019. doi: 10.26512/lc.v24i0.19817

OLIVEIRA, M. K. de. Vygotsky e o Processo de Formação de Conceitos. *In*: LA TAILLE, Y. de; OLIVEIRA, M. K. de; DANTAS, H. Piaget, Vygotsky, Wallon: teorias psicogenéticas em discussão. São Paulo: Summus, 1992. p. 23-34.

OLIVEIRA, M. K. de. **Vygotsky**: aprendizado e desenvolvimento um processo sócio-histórico. São Paulo: Scipione, 2010. (Série Pensamento e ação no magistério).

PANOSSIAN, M. L.; MORETTI, V. D.; SOUZA, F. D. de. Relações entre movimento histórico e lógico de um conceito, desenvolvimento do pensamento

teórico e conteúdo escolar. *In*: MOURA, Manoel Oriosvaldo de (org.). **Educação escolar e pesquisa na teoria histórico-cultural**. São Paulo: Edições Loyola, 2017. p. 125-152.

RIGON, A. J.; ASBAHR, F. da S. F.; MORETTI, V. D. Sobre o processo de humanização. *In*: MOURA, M. O. (org.). **A atividade pedagógica na teoria histórico-cultural**. Brasília: Liber livro, 2010. p. 13-44.

RIO GRANDE DO SUL. Secretaria de Estado da Educação. Departamento Pedagógico (org.). **Referencial Curricular do Rio Grande do Sul** – Lições do Rio Grande: Matemática e suas Tecnologias. Porto Alegre: Secretaria de Estado da Educação do Rio Grande do Sul, 2009, v. 2.

SILVA, A. de A. **O ensino de Funções Lineares: uma abordagem Construtivista/Construcionista por meio do Kit LEGO® Mindstorms**. 2014. Dissertação (Mestrado) – Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Departamento de Matemática, Universidade Federal de Goiás, Catalão, 2014.

SILVA, R. A. da. **Folhas de atividades para o ensino de Função Afim e Quadrática: conceito e aplicações**. 2014. Dissertação (Mestrado) – Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Exatas, Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, 2014.

SILVA, F. E. da. **A caracterização da Função Afim como ferramenta na modelagem de problemas matemáticos**. 2015. Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-graduação em Matemática em Rede Nacional, Universidade Federal do Ceará, Juazeiro do Norte, 2015.

SILVESTRE, A. I.; PONTE, J. P. da. **Proporcionalidade directa no 6.º ano de escolaridade: uma abordagem exploratória**. *Interacções*, Portugal, n. 20, v. 8, p. 70-97, mar., 2012. Disponível em: <https://revistas.rcaap.pt/interaccoes/issue/view/Desafios%20no%20Ensino%20e%20na%20Aprendizagem%20da%20Matem%C3%A1tica>. Acesso em: 16 out. 2022.

SOARES, M. A. da S. **Proporcionalidade um conceito formador e unificador da Matemática: uma análise de materiais que expressam fases do currículo da educação básica**. 2016. 250 p. Tese (Doutorado em Educação nas Ciências). Programa de Pós-Graduação em Educação nas Ciências. Universidade Regional do Noroeste do Estado do Rio Grande do Sul, Ijuí.

SOUSA, M. do C. de. **O ensino de álgebra numa perspectiva lógico-histórica: um estudo das elaborações correlatas de professores do Ensino Fundamental**. 2004. 285 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Faculdade de Educação, UNICAMP, Campinas, 2004.

SOUSA, M. do C. de; PANOSSIAN, M. L.; CEDRO, W. L. **Do movimento lógico e histórico à organização do ensino: o percurso dos conceitos algébricos**. Campinas, SP: Mercado de Letras, 2014.

SOUZA, W. J. de. **Função Afim: Teoria e Aplicações**. 2013. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Programa de Pós-graduação em Matemática em Rede Nacional, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2013.

TOREZANI, A. **Uma proposta de atividades para o ensino de Função Afim no Ensino Médio**. 2016. Dissertação (Mestrado) - Programa de Mestrado Profissional em Rede Nacional, Universidade Federal do Espírito Santo, Vitória, 2016.

USISKIN, Z. Concepções sobre a álgebra da escola média e utilizações das variáveis. *In*: COXFORD, A. F.; SHULTE, A. P. (org.). **As idéias da álgebra**. São Paulo: Atual, 1995. p. 9-22.

VAN DE WALLE, J. A. **Matemática no ensino fundamental**: formação de professores e aplicação em sala de aula. 6. ed. Tradução Paulo Henrique Colonese. Porto Alegre: Artmed, 2009.

VIGOTSKI, L.S. **A formação social da mente**: o desenvolvimento dos processos psicológicos superiores. COLE, Michael *et al.* (org.). Tradução de José Cipolla Neto, Luís Silveira Menna Barreto, Solange Castro Afeche. 6. ed. São Paulo: Martins Fontes, 1998.

VIGOTSKI, L. S. **A construção do pensamento e da linguagem**. São Paulo: Martins Fontes, 2009.

VIGOTSKI, L. S. Aprendizagem e desenvolvimento intelectual na idade escolar. *In*: VIGOTSKI, L. S.; LURIA, A. R.; LEONTIEV, A. N. **Linguagem, desenvolvimento e aprendizagem**. 11. ed. São Paulo: Ícone, 2010. p. 103-117.

VIGOTSKI, L. S. **Sete aulas de L. S. VIGOTSKI sobre os fundamentos da pedologia**. Organização (e tradução) Zoia Prestes, Elisabeth Tunes: tradução Cláudia da Costa Guimarães Santana. Rio de Janeiro: E-Papers, 2018.

APÊNDICE A – TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Universidade Federal de Santa Maria
Centro de Ciências Naturais e Exatas
Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Ensino de Física

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Título do estudo: Motivos dos estudantes para aprender Função Afim: situações desencadeadoras de aprendizagem envolvendo a Proporcionalidade.

Pesquisadores responsáveis:

- Prof^ª. Dr^ª. Anemari Roesler Luersen Vieira Lopes (Orientadora) – Telefone: (55) 98100-0024.
- Prof^ª Dr. Ricardo Fajardo (Orientador) - Telefone: (55) 99961-8983.
- Caroline dos Santos (Pós-Graduanda) – Telefone: (51) 99916-0581.

Instituição/Departamento: Universidade Federal de Santa Maria/Departamento de Metodologia do Ensino.

Telefone e endereço postal completo: Avenida Roraima, nº 1000, prédio 13, sala 1230, CEP: 97105-900, Santa Maria - RS.

Local da coleta de dados: Instituto Municipal de Ensino Assis Brasil, de Ijuí – RS.

Nós, Caroline dos Santos, Anemari Roesler Luersen Vieira Lopes e Ricardo Fajardo, responsáveis pela pesquisa *Motivos dos estudantes para aprender Função Afim: situações desencadeadoras de aprendizagem envolvendo a Proporcionalidade*, o convidamos a participar como voluntário deste nosso estudo. Por meio desta pesquisa pretende-se identificar e analisar potencialidades de situações desencadeadoras de aprendizagem na criação de motivos para os estudantes de uma turma do ensino médio aprenderem Função Afim, a partir do conceito Proporcionalidade. Acreditamos que ela seja importante porque pode proporcionar novos entendimentos acerca de como os estudantes aprendem, levando em consideração suas particularidades e motivos, contribuindo para a qualificação da organização do ensino de conceitos matemáticos. Para o desenvolvimento deste estudo será feito o seguinte: serão elaboradas e desenvolvidas situações desencadeadoras de aprendizagem (SDA), para o ensino da Função Afim, a partir da Proporcionalidade. Os registros produzidos pelos estudantes no desenvolvimento das SDA serão coletados e analisados para a escrita da dissertação, com o intuito de responder o problema de pesquisa. Para uma melhor qualidade na análise dos registros, será realizada a filmagem e/ou gravação de áudio das aulas em que as SDA serão desenvolvidas, utilizadas apenas pela pesquisadora, sempre preservando o anonimato dos sujeitos envolvidos. Sua participação constará em desenvolver as tarefas propostas, disponibilizando os seus registros produzidos e autorizando a filmagem e/ou gravação de áudio durante o desenvolvimento para uso exclusivo dos pesquisadores envolvidos.

Sendo sua participação voluntária, você não receberá benefício financeiro. Os gastos necessários para a sua participação na pesquisa serão assumidos pelos pesquisadores. É possível que aconteçam os seguintes desconfortos ou riscos como inibição em expor suas expectativas e aprendizagens devido aos questionamentos feitos ou pela possibilidade de não conseguir responder, no entanto, lembramos que a pesquisa está alinhada com o conteúdo ensinado na matriz curricular da escola, e que podem desistir de participar em qualquer momento. Desta forma, caso ocorra algum problema decorrente de sua participação na pesquisa, você terá acompanhamento e assistência por meio da presença constante da pesquisadora bem como da possibilidade de contatos virtuais de forma gratuita. Fica, também, garantido o seu direito de requerer indenização em caso de danos comprovadamente decorrentes da participação na pesquisa. Acreditamos que a participação nesta pesquisa não trará nenhum tipo de risco

potencial, mas, caso você sinta algum constrangimento em responder aos questionamentos da pesquisadora no decorrer do desenvolvimento da sequência de tarefas, estará livre para não as responder, assim como para se desvincular da pesquisa a qualquer momento.

Os benefícios que esperamos com o estudo estão relacionados a possíveis aprendizagens quanto ao conceito matemático de Função Afim, a partir do desenvolvimento das SDA, proporcionando momentos de interação entre os sujeitos e sua participação ativa. Também será realizado um retorno para os alunos e a professora de Matemática regente, por meio de uma conversa de apresentação dos resultados, ressaltando os principais elementos que se caracterizaram como potenciais na criação de motivos para os estudantes, podendo contribuir para o ensino de outros conceitos matemáticos.

Você tem garantida a possibilidade de não aceitar participar ou de retirar sua permissão a qualquer momento, sem nenhum tipo de prejuízo pela sua decisão. Durante todo o período da pesquisa você terá a possibilidade de tirar qualquer dúvida ou pedir qualquer outro esclarecimento. Para isso, entre em contato com algum dos pesquisadores ou com o Comitê de Ética³⁰ em Pesquisa com Seres Humanos.

As informações desta pesquisa serão divulgadas na dissertação de Mestrado do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Ensino de Física e poderão divulgadas em eventos ou publicações, sem a identificação dos voluntários, a não ser entre os responsáveis pelo estudo, sendo assegurado o sigilo sobre sua participação. Os dados coletados com os registros dos alunos, gravações de áudio, filmagens e transcrições serão mantidos no seguinte local: UFSM, Avenida Roraima, nº 1000, prédio 13, Departamento de Matemática, sala 1230, 97105-900 - Santa Maria - RS, por um período de cinco anos, sob a responsabilidade das pesquisadoras. Após este período os dados serão destruídos.

Autorização

Eu, _____, após a leitura ou a escuta da leitura deste documento e ter tido a oportunidade de conversar com o pesquisador responsável, para esclarecer todas as minhas dúvidas, estou suficientemente informado, ficando claro que minha participação é voluntária e que posso retirar este consentimento a qualquer momento sem penalidades ou perda de qualquer benefício. Estou ciente também dos objetivos da pesquisa, dos procedimentos aos quais serei submetido, dos possíveis danos ou riscos deles provenientes e da garantia de confidencialidade. Diante do exposto e de espontânea vontade, expressei minha concordância em participar deste estudo e assino este termo em duas vias, uma das quais foi-me entregue.

Santa Maria _____, de _____ de 2022.

Assinatura do(a) voluntário(a)

Assinatura da orientanda da pesquisa

Caroline dos Santos

Assinatura da orientadora da pesquisa
Prof^a. Dr^a. Anemari Roesler Luersen Vieira Lopes
E-mail: anemari.lopes@ufsm.br

Assinatura do coorientador da pesquisa
Prof. Dr. Ricardo Fajardo
E-mail: rfaj@ufsm.br

³⁰ Se você tiver alguma consideração ou dúvida sobre a ética da pesquisa, entre em contato: Comitê de Ética em Pesquisa da UFSM: Avenida Roraima, n. 1000 – Prédio da Reitoria, 7º andar, sala 763 – CEP 97105-900 – Santa Maria – RS. Telefone: (55) 3220-9362 – E-mail: cep.ufsm@gmail.com.

APÊNDICE B – TERMO DE ASSENTIMENTO

Assentimento informado para participar da pesquisa: *Motivos dos estudantes para aprender Função Afim: situações desencadeadoras de aprendizagem envolvendo a Proporcionalidade.*

Nome da criança/adolescente:

1) Introdução:

Prezado(a) aluno(a),

Meu nome é Caroline dos Santos, sou professora de Matemática e mestranda do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Ensino de Física (PPGEMEF), da Universidade Federal de Santa Maria. Estou desenvolvendo uma pesquisa para identificar e analisar possíveis elementos que são capazes de criar motivos para que os alunos queiram aprender Matemática, mais especificamente, o conceito de Função Afim. Dessa forma, gostaria de convidá-lo(a) para fazer parte da minha pesquisa, com o consentimento de seus pais ou responsáveis. É de sua livre escolha participar desta pesquisa ou não, e você pode conversar com alguém para tomar essa decisão.

2) Objetivos: a pesquisa que pretendo desenvolver tem como objetivo identificar e analisar potencialidades de situações desencadeadoras de aprendizagem na criação de motivos para os estudantes de uma turma do ensino médio aprenderem Função Afim, a partir do conceito Proporcionalidade. Ou seja, vou desenvolver tarefas, como jogos e resolução de problemas, com os alunos de uma turma do primeiro ano do Curso Técnico em Agropecuária Integrado ao Ensino Médio, do Instituto Municipal de Ensino Assis Brasil, no município de Ijuí, buscando promover aprendizagens acerca do conceito matemático de Função Afim, a partir da Proporcionalidade e de outros conceitos importantes da álgebra. A partir disso, vou analisar quais elementos foram mais importantes para que cada um dos alunos quisesse desenvolver a tarefa.

3) Escolha dos participantes: sua turma foi escolhida para participar desta pesquisa a partir de uma sugestão da professora de matemática, Fernanda, que disponibilizou suas turmas para o desenvolvimento da minha pesquisa na escola.

4) Voluntariedade de participação: sua participação nesta pesquisa é voluntária, ou seja, é você quem decide se quer ou não participar. Caso opte por não participar, saiba que isso não irá causar nenhuma mudança na sua relação com os professores, escola ou com as aulas e avaliações de matemática. Portanto, poderá participar das aulas normalmente, para aprender o conteúdo. E, caso opte por participar da pesquisa, poderá mudar de ideia e deixar de fazer parte a qualquer momento, sem que haja qualquer problema, discriminação, constrangimento ou qualquer tipo de prejuízo.

5) Procedimentos: os procedimentos desta pesquisa serão realizados na escola durante as aulas de matemática, no período de maio a junho de 2022. Nas aulas, serão desenvolvidas tarefas com todos os alunos da turma, mas só serão utilizados na pesquisa os dados dos alunos que aceitarem participar, assinando o Termo de Assentimento, e tiverem a autorização dos responsáveis, tendo assinado o Termo de Consentimento Livre e Esclarecido. Sua participação na pesquisa se dará a partir do desenvolvimento das tarefas, como jogos e resolução de problemas, que serão realizadas em grupos de alunos. Assim, serão coletados os registros que você irá produzir para o desenvolvimento das tarefas e será realizada a filmagem e/ou gravação de áudio das aulas, para que posteriormente eu possa analisar as falas e interações.

6) Riscos: poderá haver o risco de você sentir-se desconfortável ou inibido em participar da pesquisa devido aos questionamentos feitos. No entanto, sempre será lembrado que a pesquisa está alinhada com o conteúdo ensinado na matriz curricular, e que você pode desistir de participar em qualquer momento.

7) Desconfortos (se for o caso): ao participar da pesquisa, se você sentir desconforto em desenvolver alguma tarefa ou interagir com os colegas e a pesquisadora, devido ao fato da mesma ser filmada e/ou gravada, saiba que sempre será preservado seu anonimato e esses materiais não serão divulgados para outras pessoas.

8) Benefícios: os benefícios em participar desta pesquisa estão relacionados a possíveis aprendizagens quanto ao conceito matemático de Função Afim, a partir do desenvolvimento das Situações Desencadeadoras de Aprendizagem, proporcionando momentos de interação entre os alunos e sua participação ativa. Também será realizado um retorno para os alunos e a professora de Matemática regente, por meio de uma conversa de apresentação dos resultados da pesquisa, ressaltando os principais elementos que se caracterizaram como potenciais na criação de motivos para os estudantes, podendo contribuir para o ensino de outros conceitos matemáticos.

9) Incentivos: para participar desta pesquisa você não receberá qualquer incentivo financeiro. Sua participação é voluntária.

10) Confidencialidade: nenhuma informação que possibilite sua identificação será divulgada. Assim, nas análises, você será identificado por um nome fictício. Somente os pesquisadores terão acesso as informações coletadas.

11) Divulgação dos resultados: depois que a pesquisa for concluída os resultados serão informados para você e seus pais, assim como poderão ser publicados em uma revista, livro, conferência, etc.

12) Direito de recusa ou retirada do assentimento informado: ninguém ficará bravo ou desapontado com você se você não quiser participar da pesquisa. A escolha é sua. Você pode pensar nisto e falar depois se você quiser. Você pode dizer sim agora e mudar de ideia depois e tudo continuará bem.

13) Contato: se você quiser conversar mais sobre a pesquisa ou tirar alguma dúvida, entre em contato comigo, professora Caroline, pelo telefone (51)99916-0581, com a professora Anemari Roesler Luersen Vieira Lopes (Orientadora) no telefone (55) 98100-0024 ou com o professor Ricardo Fajardo (Coorientador) no telefone (55) 99961-8983. Estamos à disposição para conversar com você.

14) Contato com o CEP: *Um comitê de ética em pesquisa em seres humanos é integrado por um grupo de pessoas que trabalham para garantir que seus direitos como participante de pesquisa sejam respeitados. Ele tem a obrigação de avaliar se a pesquisa foi planejada e se está sendo executada de forma ética. Se você entender que a pesquisa não está sendo realizada da forma como imaginou ou que está sendo prejudicado de alguma forma, você pode entrar em contato com o CEP da UFSM: Av. Roraima, nº 1000, Prédio da Reitoria, 7º andar, sala 763 - Santa Maria/RS - CEP 97105-900. Telefone: (55) 3220-9362. E-mail: cep.ufsm@gmail.com. Caso prefira, você pode entrar em contato sem se identificar.*

Certificado do assentimento: eu entendi que a pesquisa é sobre a identificação e análise de potencialidades das situações desencadeadoras de aprendizagem na criação de motivos para os estudantes de uma turma do ensino médio aprenderem Função Afim, a partir do conceito Proporcionalidade. Também compreendi que fazer parte dessa pesquisa significa que participarei do desenvolvimento de tarefas propostas pela pesquisadora durante as aulas de matemática, as quais serão filmadas e/ou gravadas e disponibilizarei os meus registros produzidos durante o seu desenvolvimento. Eu aceito participar dessa pesquisa.

Assinatura da criança ou adolescente:

Assinatura dos pais/responsáveis:

Assinatura do pesquisador:

Data:/...../.....

APÊNDICE C – SITUAÇÃO DE ENSINO: FOTOGRAFIAS

Com esta situação de ensino objetiva-se que os alunos compreendam que tudo se transforma, tudo muda a todo momento e nada é estável.

Solicitar aos alunos que tragam 3 fotografias de diferentes etapas da sua vida. Em aula, os alunos serão divididos em grupos de 4 integrantes e deverão observar suas fotos para responder às perguntas que serão entregues de forma impressa

Q. 1 - Você é o mesmo de alguns anos atrás? Se não, quais as principais mudanças que você consegue perceber?

Q. 2 - Você é o mesmo de ontem? Se não, o que mudou?

Q. 3 - Você é o mesmo do início da aula de hoje? E do intervalo? De um segundo atrás? O que mudou?

Q. 4-a - Ao fazer visitas em uma plantação de milho, por exemplo, a cada visita as plantas permanecerão exatamente as mesmas?

Q. 4-b - O que pode ter alterado?

Q. 5 - E os animais, eles também mudam? Cite um exemplo.

Q. 6 - Vocês conseguem pensar em mais alguma coisa que muda? Explique.

Q. 7 - Então, será que tudo muda?

APÊNDICE D – SITUAÇÃO DE ENSINO: JOGO PEGA VARETAS

Esta situação de ensino tem como objetivo proporcionar aos alunos a compreensão de variável, dos possíveis valores que cada variável pode assumir e da relação de dependência entre grandezas, introduzindo a noção intuitiva de Função.

Em grupos de 3 ou 4 integrantes, os alunos devem jogar o jogo Pega Varetas. A finalidade do jogo é apanhar as varetas uma a uma, sem mover as restantes. Regras:

1. Juntar todas as varetas com a mão, apoiar um dos extremos sobre a mesa e soltá-los para espalharem de uma só vez;
2. O primeiro jogador deve levantar um palito de cada vez, sem mover nenhum dos outros, quando isso ocorrer perderá o direito de continuar e cederá para o jogador da esquerda que dará sequência ao jogo;
3. O único palito preto do jogo, quando tirado pelo jogador pode ser usado como auxiliar para levantar os demais.
4. Pontuação: amarelo (5 pontos), vermelho (10 pontos), verde (15 pontos), azul (20 pontos) e preto (50 pontos).

Q. 1-a - A quantidade de varetas de cada cor, obtidas por cada jogador, é sempre a mesma ou pode variar?

Q. 1-b - Quais são os possíveis resultados para cada cor?

Q. 1-c - Como podemos representar a quantidade de varetas de cada cor se não possuem um valor fixo?

Q. 2-a - Existem valores fixos, que não se alteram?

Q. 2-b - Quais são esses valores?

Q. 3-a - O valor da pontuação final está relacionado a quantidade de varetas de cada cor?

Q. 3-b - De que forma eles se relacionam?

Problema: Como podemos representar o cálculo de todos os pontos possíveis do jogo e o número de varetas de cada rodada?

Considere que todas as varetas (todas as cores) terão a mesma pontuação e cada uma valerá 10 pontos. Registre os pontos obtidos e responda:

Q. 4- Podemos utilizar a mesma expressão algébrica da atividade anterior, para representar a pontuação total e a quantidade de varetas de cada cor? Justifique.

Q. 5- Se não, que expressão algébrica podemos utilizar?

Q. 6-a - O valor da pontuação final está relacionado a quantidade de varetas?

Q. 6-b - De que forma?

Q. 7 - É possível obter a pontuação final sem saber a quantidade de varetas? Explique.

SISTEMATIZAÇÃO:

O que são variáveis?

São símbolos que tomam o lugar de números ou domínio de números. Eles são usados para representar quantidades que variam ou mudam (variáveis). Como por exemplo, as “letras” utilizadas nas expressões algébricas para representar o valor da pontuação final e a quantidade de varetas.

O que é Função?

Definição: Sejam x e y duas variáveis representativas de conjuntos de números; diz-se que y é função de x e escreve-se: $y = f(x)$

Se entre as duas variáveis existe uma correspondência unívoca no sentido $x \rightarrow y$. A x chama-se variável independente, a y variável dependente.

Ou seja, para cada elemento do conjunto dos valores de x , há apenas um correspondente em y . Por exemplo, se todas as varetas possuem a mesma pontuação de 10 pontos, então:

- Para 3 varetas a pontuação será 30 pontos.
- Para 5 varetas a pontuação será 50 pontos.
- Para 9 varetas a pontuação será 90 pontos.

Ao alterar a variável independente (x) haverá uma mudança na variável dependente (y). Assim, se alterar a quantidade de varetas irá alterar a pontuação final.

Outros exemplos de mudança em uma variável causando uma mudança correspondente em uma segunda variável, são: a altura de uma muda de feijão muda com o número de dias decorridos desde que brotou; a altura da muda de feijão é uma função dos dias em que ela cresceu. O valor do pagamento de um salário é uma função do número de horas trabalhadas. O nível no tanque de combustível é uma função dos quilômetros dirigidos desde o enchimento do tanque. O lucro é uma função das vendas. As funções são usadas para melhor compreendermos as mudanças em todos os tipos de contextos.

Fonte: Adaptado de CARAÇA (1984)³¹ e VAN DE WALLE (2009)³²

³¹ CARAÇA, Bento de Jesus. Conceitos Fundamentais de Matemática. Lisboa: Gradiva, 1984.

³² VAN DE WALLE, John A. Matemática no ensino fundamental: formação de professores e aplicação em sala de aula/ John A. Van de Walle; tradução Paulo Henrique Colonese. – 6.ed. Porto Alegre: Artmed, 2009.

APÊNDICE E – SITUAÇÃO DE ENSINO: PRODUÇÃO LEITEIRA

CARTA

Prezados alunos do Primeiro Ano do Curso Técnico em Agropecuária integrado ao Ensino Médio, do Instituto Municipal de Ensino Assis Brasil (IMEAB).

Meu nome é Nildo, sou um pequeno agricultor e tenho uma propriedade do interior de Ijuí, conhecida como Fazenda do Seu Nininho, onde planto alguns produtos e tenho criação de animais. Uma das minhas principais produções é a de leite. Tenho 13 vacas leiteiras e estou produzindo, em média, 8000 litros de leite por mês. Recebo da empresa para quem vendo o leite apenas R\$1,00 por litro e, descontando os gastos mensais, estou obtendo um lucro de R\$ 2000,00. Nessa situação, estou tendo dificuldades para sustentar a família e manter a propriedade, e preciso me organizar e decidir se valerá a pena investir no aumento da produção de leite ou se devo investir em outra produção.

Assim, estou escrevendo essa carta para pedir a ajuda de vocês. A vida do pequeno produtor não é fácil e precisamos fazer algumas modificações para conseguir sobreviver frente aos grandes produtores, se adequando para não sermos absorvidos por eles e termos que abandonar nossa propriedade.

Pensei em manter a mesma organização com a alimentação e estrutura das vacas leiteiras, e aumentar a produção para 16000 litros de leite, mas preciso saber qual será o lucro obtido e se este valerá a pena.

Como posso fazer para calcular quanto será o lucro?

Vocês podem me ajudar?

Ficarei muito agradecido. Um abraço.

PROBLEMA 1: Se uma produção de 8000 litros de leite, em um mês, gera um lucro de R\$ 2000,00. Nas mesmas condições, como calcular o lucro de uma produção de 16000 litros de leite?

- 1) Nas mesmas condições do problema, qual será o lucro de uma produção de 4000 litros de leite?
- 2) E ainda, qual será o lucro de uma produção de 12000 litros de leite?

QUESTIONAMENTOS:

Q 1 - Que grandezas variam no problema?

Q 2 - Essas grandezas são proporcionais? Explique.

Q 3-a – Existe um número que se mantém constante?

Q 3-b - O que esse número representa?

Q 4 – Qual é o lucro de produção de um litro de leite, nas condições do problema?

Q 5 – É possível determinar o lucro da produção sem que haja o número de litros de leite produzidos? Explique.

Q 6-a – Qual é a variável dependente?

Q 6-b – E qual é a variável independente?

Q 7 - É possível encontrar uma expressão geral para representar o lucro da produção de leite considerando a variação da quantidade de leite produzida em cada mês?

Q 8 - Como será a representação gráfica desta expressão algébrica? Faça o gráfico discreto.

Q 9 - A expressão algébrica encontrada é uma Função?

Q 10 - Sabendo que as grandezas são proporcionais, que tipo de função ela representa?

SISTEMATIZAÇÃO:

PROPORCIONALIDADE

Duas grandezas são proporcionais (ou diretamente proporcionais) quando aumentam ou diminuem na mesma proporção, ou seja, ao dobrarmos ou triplicarmos o valor de uma, o valor da outra também dobrará, triplicará, etc.

Ao calcularmos $\frac{y}{x}$, com $x \neq 0$, obtemos a constante de proporcionalidade.

FUNÇÃO LINEAR:

Uma função f , de $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, que a todo número $x \in \mathbb{R}$ associa o número $f(x) = ax + b$, com $a \in \mathbb{R}$ e $b = 0$ é chamada Função Linear. Logo, $f(x) = ax$ ou $y = ax$

Em toda função linear os valores correspondentes das variáveis x e y são diretamente proporcionais.

Exemplos: $y = 0,25x$

$$\frac{2000}{8000} = \frac{4000}{16000} = \frac{1000}{4000} = \frac{3000}{12000} = 0,25$$

A Função Linear é um dos casos particulares de Função Afim:

FUNÇÃO AFIM

Uma função f , de $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, que a todo número $x \in \mathbb{R}$ associa o número $f(x) = ax + b$, com a e b reais é chamada Função Afim.

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = ax + b \text{ ou } y = ax + b$$

PROBLEMA 2: A partir do 4º dia de vida, o bezerro que está em processo de desaleitamento precoce, passa a receber leite integral (de 3 a 5 litros por animal/dia), em duas porções diárias, até o 10º dia de idade.³³

- Qual a quantidade mínima de leite integral será necessária para alimentar 5 bezerros durante esse período?
- E para alimentar 10 bezerros no mesmo período?
- Qual é a variável dependente? E a variável independente?
- Qual é a constante de proporcionalidade?
- Que expressão descreve, em número de litros, a quantidade mínima de leite necessária para esse período de desaleitamento em função da quantidade de bezerros?

EXERCÍCIOS:

- A cana-de-açúcar é um dos produtos agrícolas mais produzidos no Brasil. Além de ser um produto que pode gerar energia renovável, o agricultor pode utilizá-la como matéria prima para vários produtos. Com a cana é possível produzir vários produtos, entre eles o açúcar. Para produzir 2 kg de açúcar, são necessários, em média, 25 kg de cana-de-açúcar.
 - Quais são as grandezas envolvidas? Elas são diretamente proporcionais? Explique.
 - Quantos quilogramas de cana-de-açúcar serão necessários para produzir 4 kg de açúcar? E para produzir 3 kg de açúcar?
 - Escreva a lei de uma função linear que expressa a quantidade de cana-de-açúcar em função da quantidade de açúcar.

³³ Adaptado de: REIS, Débora Menezes Lopes *et al.* Proposta curricular de Matemática para o Curso Técnico em Agropecuária: análise do currículo, sugestões de aulas práticas e teóricas de Matemática aplicadas ao curso técnico. Rio de Janeiro. 2016.

d) Qual é a constante de proporcionalidade?

2. Considere que um quilograma de feijão custa R\$ 9,00 e responda:

- Quais são as grandezas envolvidas?
- Qual é variável dependente? E qual a independente?
- Quanto custará 5 kg de feijão?
- Com R\$ 108,00 quantos kg de feijão consigo comprar?
- Escreva a lei geral.

3. Um motorista mantém seu carro em uma rodovia a uma velocidade constante de 90 km/h.

A tabela a seguir representa essa situação:

t (em horas)	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1	2
d (em km)	30	45	90	180

- Escreva a lei da função que expressa essa situação.
- Em quanto tempo o motorista percorrerá 126 km?
- Quantos quilômetros o motorista percorrerá em 1,5 hora?

4. A tabela a seguir relaciona o número de litros de gasolina comprados e o preço a pagar por eles.

Número de litros	Preço a pagar
1	
2	13,8
5	34,5
10	
50	
	414

- Complete a tabela.
- Escreva a lei da função que expressa essa situação.

5. A tabela a seguir relaciona a medida do lado de um quadrado (l), em centímetros, e o seu perímetro (P), também em centímetros.

Medida do lado (l em cm)	Perímetro (P em cm)
1	
2	
2,5	
4,1	
l	

- Complete a tabela.
- Escreva a lei de uma função linear que expressa essa relação.
- Qual é a constante de proporcionalidade?
- Qual é a medida do lado de um quadrado cujo perímetro é de 22 cm?

Você lembra do Nildo e da situação em que ele pediu ajuda? Vamos relembrar ...

A lei geral encontrada foi: $y = 0,25x$, sendo y o lucro da produção e x a quantidade de litros de leite produzida. Sua representação gráfica no papel milimetrado tornou-se limitada para

realizar análises de maiores quantidades de produção de leite. O que acha de utilizarmos o *software* GeoGebra? Você conhece? Se não, gostaria de conhecer?

SEGUNDA CARTA

Prezados alunos da turma 122

Estou escrevendo novamente uma carta para vocês, primeiramente, para agradecer as cartas que me enviaram, elas me ajudaram muito. Com vocês aprendi a calcular o lucro da produção de leite mensalmente, e também comecei a refletir sobre outras questões importantes que influenciam na decisão de investir em produção leiteira ou não, como procurar compradores que paguem um valor maior e investir na qualidade do leite produzido.

Vocês me ajudaram a entender que para aumentar a produção de leite eu também preciso aumentar o número de vacas leiteiras. Analisei as minhas instalações e estrutura utilizada para a produção do leite e percebi que poderia aumentar o número de vacas para 39, assim, aumentaria a produção de leite e diminuiria bastante as outras atividades.

Eu também percebi que as minhas 13 vacas leiteiras estão comendo, em média, 390 kg de silagem de milho por dia. Então, preciso descobrir a quantidade de silagem que será necessária, já que vai gerar um custo. E estou precisando novamente da ajuda de vocês, pois gostaria de saber: como posso fazer para calcular a quantidade diária de silagem de milho para as 39 vacas leiteiras?

Espero que possam me ajudar novamente. Abraço a todos.

Orientação:

Passo 1: Para construir o gráfico é necessário que se tenha ao menos dois pontos. Sendo x a variável independente e y a variável dependente, utilize os dados e determine dois pontos:

Q 1 - Qual é a variável dependente? E qual a variável independente?

Q 2 - Quantos quilogramas de silagem de milho são consumidos diariamente por 1 vaca?

Q 3 - Quantos quilogramas de silagem de milho são consumidos diariamente por 2 vaca?

x	y
1	
2	

Passo 2: Insira os pontos no GeoGebra

1. Na “Entrada” digite um dos pontos na forma (x, y) e clique “Enter”.
2. Em seguida, digite o outro ponto, também na forma (x, y) , e clique “Enter”.
3. Encontre os pontos movimentando o gráfico.

Passo 3: Encontre a lei da função linear que expressa a situação dada e insira no GeoGebra. Na “Entrada” digite a lei na forma $y = ax$, utilizando a lei encontra e clique “Enter”.

Q 4 - A reta obtida ficou sobre os dois pontos inseridos?

Q 5 - Analise o gráfico obtido. Qual será a resposta do problema?

Q 6 - Observe o que está acontecendo no gráfico e anote. Compartilhe e discuta com o seu grupo.

Q 7 - O grupo deve fazer uma síntese das características destacadas.

Neste momento, os alunos farão uma observação livre das características do gráfico nos seus grupos. Após, cada grupo irá socializar as características destacadas e a pesquisadora irá anotando no quadro e acrescentando as novas características a cada grupo. A partir disso, os alunos irão responder os seguintes questionamentos com seus grupos:

Q 8 - No contexto do problema, os valores negativos do gráfico fazem sentido? E os valores decimais? Explique.

Q 9 - Utilizando o gráfico, responda: Um rebanho de 60 vacas comerá quantos quilogramas?

Q 10 - Utilizando o gráfico, responda: Quantas vacas comerão 750 quilogramas de silagem de milho por dia?

Q 11 - Quais as diferenças entre desenhar o gráfico no papel e utilizar o GeoGebra?

Posteriormente, faremos a socialização das respostas e discussão no coletivo. Na questão Q 8 espera-se possibilitar que os alunos percebam que para o contexto do problema, só podem ser considerando os números naturais positivos. Logo, a reta não representa o contexto.

Por fim, os alunos serão orientados a excluir todas as construções no GeoGebra e seguir os passos:

Passo 1: Na aba de ferramentas, selecione a opção “Seletor”.

Passo 2: Clique na tela de visualização do gráfico e selecione “OK”. Criando um controle deslizante.

Passo 3: Na “Entrada” digite $y = ax$ e clique “Enter”. Criando uma reta.

Passo 4: Movimente o controle deslizando e observe a reta. Anote tudo que perceber.

Novamente, cada grupo irá socializar as observações. E no coletivo vamos anotar todas as observações, acrescentando as novas na socialização de cada grupo.

APÊNDICE F – AVALIAÇÃO DO DESEMPENHO DOS ALUNOS

PROBLEMA: Um produtor comprou 3 sacos de milho por um valor de R\$ 258,00. Quanto este produtor iria pagar se comprasse 9 sacos de milho iguais a estes e pelo mesmo preço?

Q. 1 - Quais são as grandezas envolvidas?

Q. 2 -As grandezas são diretamente proporcionais? Explique.

Q. 3a - Qual é variável dependente?

Q. 3b -E qual a variável independente?

Q. 4 - Com R\$ 946,00 quantos sacos de milho podem ser comprados, nas mesmas condições?

Q. 5 - Qual é a constante de proporcionalidade?

Q. 6 - Escreva a lei geral.

Q. 7 – Faça a representação gráfica da lei geral encontrada, considerando o contexto do problema.

APÊNDICE G – FORMULÁRIO RESPONDIDO PELOS ALUNOS

Prezado(a) aluno(a),

Responda este formulário com sinceridade e utilize apenas informações verdadeiras.

1. Qual é o seu nome?
2. Qual é a sua idade?
3. Onde você mora?
4. Seus pais são agricultores?
5. Em qual escola você estudou no 9º ano do ensino fundamental?
6. Por que você escolheu este curso Técnico em Agropecuária?
7. Tem interesse em atuar como técnico nessa área da agropecuária?
8. O curso Técnico em Agropecuária abre espaço para campo de trabalho? Explique.
9. O que você achou das atividades desenvolvidas nas nossas aulas?
10. O que mais chamou sua atenção?
11. Escreva sobre sua relação com a Matemática.
12. Espaço livre caso queira deixar algum recado.