

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA MARIA  
CENTRO DE TECNOLOGIA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM  
ENGENHARIA ELÉTRICA

UM CONTROLADOR ADAPTATIVO ROBUSTO  
APLICADO A CONVERSORES ESTÁTICOS  
CONECTADOS À REDE ELÉTRICA ATRAVÉS  
DE FILTRO LCL

TESE DE DOUTORADO

Rodrigo Varella Tambara

Santa Maria, RS, Brasil  
2014



**UM CONTROLADOR ADAPTATIVO ROBUSTO  
APLICADO A CONVERSORES ESTÁTICOS  
CONECTADOS À REDE ELÉTRICA ATRAVÉS  
DE FILTRO LCL**

**Rodrigo Varella Tambara**

Tese apresentada ao Curso de Doutorado do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica, Área de Concentração em Processamento de Energia Elétrica, da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM,RS), como requisito parcial para obtenção do grau de **Doutor em Engenharia Elétrica.**

**Orientador: Prof. Hilton Abílio Gründling**

**Santa Maria, RS, Brasil  
2014**

Ficha catalográfica elaborada através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Central da UFSM, com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

Varella Tambara, Rodrigo

Um Controlador Adaptativo Robusto Aplicado a Conversores Estáticos Conectados à Rede Elétrica Através de Filtro LCL /  
Rodrigo Varella Tambara - 2014

142 p.; 30 cm

Orientador: Hilton Abílio Gründling

Tese (doutorado) – Universidade Federal de Santa Maria,  
Centro de Tecnologia, Programa de Pós-Graduação em  
Engenharia Elétrica, RS, 2014

1. Controle adaptativo robusto 2. Método dos mínimos quadrados recursivos 3. Conversores estáticos 4. Filtro LCL I. Gründling, Hilton Abílio. II. Título.

---

© 2014

Todos os direitos autorais reservados a Rodrigo Varella Tambara. A reprodução de partes ou do todo deste trabalho só poderá ser feita com autorização por escrito do autor.

Endereço: Rua Ernesto Alves, N° 180, Bairro Passo D'Areia, Santa Maria, RS, Brasil, CEP: 97020-270;

Endereço Eletrônico: rodvarella@yahoo.com.br

---

**Universidade Federal de Santa Maria  
Centro de Tecnologia  
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica**

A Comissão Examinadora, abaixo assinada,  
aprova a Tese de Doutorado

**UM CONTROLADOR ADAPTATIVO ROBUSTO  
APLICADO A CONVERSORES ESTÁTICOS  
CONECTADOS À REDE ELÉTRICA ATRAVÉS  
DE FILTRO LCL**

elaborada por  
**Rodrigo Varela Tambara**

como requisito parcial para obtenção do grau de  
**Doutor em Engenharia Elétrica**

**COMISSÃO EXAMINADORA:**

**Hilton Abílio Gründling, Dr. Sc.**  
(Presidente/Orientador)

**Márcio Stefanello, Dr. Eng.** (UNIPAMPA)

**José Antenor Pomilio, Dr. Eng.** (UNICAMP)

**Jorge Rodrigo Massing, Dr. Eng.** (UFMS)

**Rafael Concatto Beltrame, Dr. Eng.** (UFMS)

Santa Maria, 26 de Agosto de 2014



Aos meus pais, Vilmar e Cleusa, e à minha noiva Fernanda.





## AGRADECIMENTOS

Meu sincero agradecimento ao Professor Hilton Abílio Gründling, pela amizade, por sua grande orientação neste trabalho e pela sua força de vontade em ajudar a resolver os problemas científicos e tecnológicos que surgiram ao longo desta caminhada.

Ao Dr. Leandro Della Flora, pela amizade e pelo seu grande trabalho de coorientação durante a minha iniciação científica e durante o meu mestrado. As discussões técnicas e constantes trocas de conhecimentos foram de vital importância para o meu crescimento profissional.

Também gostaria de agradecer aos Professores José Renes Pinheiro, Hélio Leães Hey, Humberto Pinheiro, Vinícius Foletto Montagner e Robinson Figueiredo de Camargo, pelo conhecimento e pela experiência transmitidos durante as disciplinas cursadas.

Aos colegas do GEPOC, quero agradecer aos amigos Alexandre Trevisan, Cássio L. Baratieri, Celso Tischer, Cristiane C. Gastaldini, Douglas D. de Oliveira, Felipe B. Grigoletto, Fernanda Carnielutti, João M. Kanieski, Jonas Tibola, Jorge Rodrigo Massing, Lucas G. Scherer, Luiz Antonio M. Junior, Rafael Z. Scapini, Rodrigo G. Tonin, Rodrigo P. Vieira, Rodrigo Z. Azzolin, Samuel P. Ribas e Thiago Bernardes pela convivência diária e pelas constantes trocas de ideias e conhecimentos em prol do crescimento do grupo. Um agradecimento especial ao colega e amigo Jorge Rodrigo Massing, pelas interessantes discussões técnicas, que foram muito importantes para o desenvolvimento do meu trabalho.

Aos funcionários do NUPEDEE e PPGEE pela atenção e profissionalismo. À Universidade Federal de Santa Maria, ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica pelo espaço e suporte contínuo sempre visando ajudar a resolver os problemas do dia a dia de trabalho. Agradeço à UFSM pelo ensino público, gratuito e de qualidade. Agradeço à Capes pelo apoio financeiro.

E agradeço principalmente à minha família pelo constante apoio em todas as fases da minha vida.



## RESUMO

Tese de Doutorado  
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica  
Universidade Federal de Santa Maria, RS, Brasil

### UM CONTROLADOR ADAPTATIVO ROBUSTO APLICADO A CONVERSORES ESTÁTICOS CONECTADOS À REDE ELÉTRICA ATRAVÉS DE FILTRO LCL

AUTOR: RODRIGO VARELLA TAMBARA

ORIENTADOR: HILTON ABÍLIO GRÜNDLING

Local da Defesa e Data: Santa Maria, 26 de Agosto de 2014.

Esta Tese de Doutorado apresenta o desenvolvimento de um novo controlador adaptativo por modelo de referência, totalmente desenvolvido em tempo discreto, aplicado a sistemas conectados à rede de energia elétrica empregando filtro LCL. Este controlador utiliza um identificador de parâmetros modificado robusto baseado no método dos mínimos quadrados recursivos. Em relação à estrutura do controlador, a abordagem por realimentação de estados e a abordagem entrada-saída são utilizadas. A análise de estabilidade robusta do controlador é apresentada incluindo dinâmicas não-modeladas. Por meio destas análises, restrições de projeto (em tempo discreto) são obtidas. Para a validação do algoritmo proposto, resultados de simulação e experimentais do sistema de controle de corrente em um conversor conectado à rede de energia elétrica com filtro LCL são apresentados.

**Palavras-chave:** Controle adaptativo robusto, Método dos mínimos quadrados recursivos, Conversores Estáticos, Filtro LCL.



# ABSTRACT

Doctoral Thesis

Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica  
Universidade Federal de Santa Maria, RS, Brasil

## A ROBUST ADAPTIVE CONTROLLER APPLIED TO A GRID-CONNECTED STATIC CONVERTERS THROUGH LCL FILTER

AUTHOR: RODRIGO VARELLA TAMBARA

ADVISOR: HILTON ABÍLIO GRÜNDLING

Place and Date: Santa Maria, August 26<sup>th</sup>, 2014.

This Thesis deals with the development of a novel robust model reference adaptive controller (RMRAC), in discrete-time applied to grid-connected systems using LCL filter. This controller uses a modified robust parameters identifier based on a recursive least-squares algorithm. Two control structures are analyzed: state feedback approach and input-output approach. The robust stability analysis of the controller is presented including unmodeled dynamics. Thus, through these analyses, constraints design, in discrete-time, are obtained. For the validation of the proposed control algorithm, simulation and experimental results of a grid-connected power converter with LCL-filter, with current control, are presented.

**Keywords:** Robust adaptive control, Recursive least square, Static converters, LCL Filter.



## LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1	– Diagrama de blocos do controlador RMRAC com adaptador baseado no método RLS: realimentação de estados. ....	39
Figura 2.2	– Diagrama de blocos do controlador RMRAC com estimador de ganhos baseado no método RLS: entrada-saída. ....	42
Figura 3.1	– Modelo elétrico da planta com filtro LCL. ....	70
Figura 3.2	– Diagrama de Bode da planta nominal $G(z)$ , da planta reduzida $G_p(z)$ e da dinâmica não-modelada aditiva $\mu\Delta_a(z)$ . ....	74
Figura 3.3	– Saída da planta em malha fechada $y$ e saída do modelo de referência $y_m$ na coordenada $\alpha$ : controlador por realimentação de estados. ....	79
Figura 3.4	– Saída da planta em malha fechada $y$ e saída do modelo de referência $y_m$ na coordenada $\beta$ : controlador por realimentação de estados. ....	79
Figura 3.5	– Erro de rastreamento $e_1$ : controlador por realimentação de estados. ....	80
Figura 3.6	– Ação de controle $u$ : controlador por realimentação de estados. ....	80
Figura 3.7	– Sinal de normalização $m^2$ em coordenadas $\alpha$ e $\beta$ : controlador por realimentação de estados. ....	81
Figura 3.8	– Função $\sigma$ -modification: controlador por realimentação de estados. ...	81
Figura 3.9	– Vetor de ganhos $\theta$ na coordenadas $\alpha$ : controlador por realimentação de estados. ....	82
Figura 3.10	– Vetor de ganhos $\theta$ na coordenadas $\beta$ : controlador por realimentação de estados. ....	82
Figura 3.11	– Elementos da diagonal principal da matriz de covariância $\mathbf{P}$ na coordenada $\alpha$ : controlador por realimentação de estados. ....	83
Figura 3.12	– Elementos da diagonal principal da matriz de covariância $\mathbf{P}$ na coordenada $\beta$ : controlador por realimentação de estados. ....	83
Figura 3.13	– Transitório no evento 1 - saída da planta em malha fechada $y$ e a saída do modelo de referência $y_m$ na coordenada $\alpha$ : controle por realimentação de estados. ....	85
Figura 3.14	– Transitório no evento 1 - saída da planta em malha fechada $y$ e a saída do modelo de referência $y_m$ na coordenada $\beta$ : controle por realimentação de estados. ....	86
Figura 3.15	– Transitório no evento 4 - saída da planta em malha fechada $y$ e a saída do modelo de referência $y_m$ na coordenada $\alpha$ : controle por realimentação de estados. ....	86
Figura 3.16	– Transitório no evento 4 - saída da planta em malha fechada $y$ e a saída do modelo de referência $y_m$ na coordenada $\beta$ : controle por realimentação de estados. ....	87
Figura 3.17	– Saída da planta em malha fechada $y$ e saída do modelo de referência $y_m$ na coordenada $\alpha$ : controlador entrada-saída. ....	88
Figura 3.18	– Saída da planta em malha fechada $y$ e saída do modelo de referência $y_m$ na coordenada $\beta$ : controlador entrada-saída. ....	89
Figura 3.19	– Erro de rastreamento $e_1$ : controlador entrada-saída. ....	89
Figura 3.20	– Ação de controle $u$ : controlador entrada-saída. ....	90
Figura 3.21	– Sinal de normalização $m^2$ em coordenadas $\alpha$ e $\beta$ : controlador entrada-saída. ....	90
Figura 3.22	– Função $\sigma$ -modification: controlador entrada-saída. ....	91
Figura 3.23	– Vetor de ganhos $\theta$ na coordenadas $\alpha$ : controlador entrada-saída. ...	91
Figura 3.24	– Vetor de ganhos $\theta$ na coordenadas $\beta$ : controlador entrada-saída. ...	92
Figura 3.25	– Elementos da diagonal principal da matriz de covariância $\mathbf{P}$ na coordenada $\alpha$ : controlador entrada-saída. ....	92

Figura 3.26 – Elementos da diagonal principal da matriz de covariância $\mathbf{P}$ na coordenada $\beta$ : controlador entrada-saída. ....	93
Figura 3.27 – Transitório no evento 1 - saída da planta em malha fechada $y$ e saída do modelo de referência $y_m$ na coordenada $\alpha$ : entrada-saída. ....	95
Figura 3.28 – Transitório no evento 1 - saída da planta em malha fechada $y$ e saída do modelo de referência $y_m$ na coordenada $\beta$ : entrada-saída. ....	96
Figura 3.29 – Transitório no evento 4 - saída da planta em malha fechada $y$ e saída do modelo de referência $y_m$ na coordenada $\alpha$ : entrada-saída. ....	96
Figura 3.30 – Transitório no evento 4 - saída da planta em malha fechada $y$ e saída do modelo de referência $y_m$ na coordenada $\beta$ : entrada-saída. ....	97
Figura 4.1 – Saída da planta em malha fechada $y$ e saída do modelo de referência $y_m$ em coordenada $\alpha$ : realimentação de estados. ....	100
Figura 4.2 – Saída da planta em malha fechada $y$ e saída do modelo de referência $y_m$ em coordenada $\beta$ : realimentação de estados. ....	101
Figura 4.3 – Erro de rastreamento em coordenadas $\alpha\beta$ : realimentação de estados. ....	101
Figura 4.4 – Lei de controle em coordenadas $\alpha\beta$ : realimentação de estados. ....	102
Figura 4.5 – Normalizador $m^2$ em coordenadas $\alpha\beta$ : realimentação de estados. ...	102
Figura 4.6 – Função $\sigma$ -modification em coordenadas $\alpha\beta$ : realimentação de estados. ....	103
Figura 4.7 – Vetor de ganhos $\theta$ no eixo $\alpha$ : realimentação de estados. ....	103
Figura 4.8 – Vetor de ganhos $\theta$ no eixo $\beta$ : realimentação de estados. ....	104
Figura 4.9 – Elementos da diagonal principal da matriz $\mathbf{P}$ em $\alpha$ : realimentação de estados. ....	104
Figura 4.10 – Elementos da diagonal principal da matriz $\mathbf{P}$ em $\beta$ : realimentação de estados. ....	105
Figura 4.11 – Transitório no evento 1 - Saída da planta em malha fechada $y$ e saída do modelo de referência $y_m$ na coordenada $\alpha$ : realimentação de estados. ....	107
Figura 4.12 – Transitório no evento 1 - Saída da planta em malha fechada $y$ e saída do modelo de referência $y_m$ na coordenada $\beta$ : realimentação de estados. ....	108
Figura 4.13 – Transitório no evento 4 - Saída da planta em malha fechada $y$ e saída do modelo de referência $y_m$ na coordenada $\alpha$ : realimentação de estados. ....	108
Figura 4.14 – Transitório no evento 4 - Saída da planta em malha fechada $y$ e saída do modelo de referência $y_m$ na coordenada $\beta$ : realimentação de estados. ....	109
Figura 4.15 – Saída da planta em malha fechada $y$ e saída do modelo de referência $y_m$ em coordenada $\alpha$ : entrada-saída. ....	110
Figura 4.16 – Saída da planta em malha fechada $y$ e saída do modelo de referência $y_m$ em coordenada $\beta$ : entrada-saída. ....	110
Figura 4.17 – Erro de rastreamento em coordenadas $\alpha\beta$ : entrada-saída. ....	111
Figura 4.18 – Lei de controle em coordenadas $\alpha\beta$ : entrada-saída. ....	111
Figura 4.19 – Normalizador $m^2$ em coordenadas $\alpha\beta$ : entrada-saída. ....	112
Figura 4.20 – Função $\sigma$ -modification em coordenadas $\alpha\beta$ : entrada-saída. ....	112
Figura 4.21 – Vetor de ganhos $\theta$ no eixo $\alpha$ : entrada-saída. ....	113
Figura 4.22 – Vetor de ganhos $\theta$ no eixo $\beta$ : entrada-saída. ....	113
Figura 4.23 – Elementos da diagonal principal da matriz $\mathbf{P}$ em $\alpha$ : entrada-saída. .	114
Figura 4.24 – Elementos da diagonal principal da matriz $\mathbf{P}$ em $\beta$ : entrada-saída. .	114
Figura 4.25 – Transitório no evento 1 - Saída da planta em malha fechada $y$ e saída do modelo de referência $y_m$ na coordenada $\alpha$ : entrada-saída. ....	116



Figura 4.26 – Transitório no evento 1 - Saída da planta em malha fechada $y$ e saída do modelo de referência $y_m$ na coordenada $\beta$ : entrada-saída. ....	117
Figura 4.27 – Transitório no evento 4 - Saída da planta em malha fechada $y$ e saída do modelo de referência $y_m$ na coordenada $\alpha$ : entrada-saída. ....	117
Figura 4.28 – Transitório no evento 4 - Saída da planta em malha fechada $y$ e saída do modelo de referência $y_m$ na coordenada $\beta$ : entrada-saída. ....	118
Figura A.1 – Ensaio conectado à rede: Resultado experimental das correntes $i_{ga}$ , $i_{gb}$ e $i_{gc}$ com controle por realimentação de estados - (10A/div). ....	134
Figura A.2 – Ensaio conectado à rede: Resultado experimental das correntes $i_{ga}$ , $i_{gb}$ e $i_{gc}$ com controle por realimentação de estados - (10A/div). ....	134
Figura A.3 – Ensaio conectado à rede: Resultado experimental das correntes $i_{ga}$ , $i_{gb}$ e $i_{gc}$ com controle por realimentação de estados - (10A/div). ....	135
Figura A.4 – Ensaio conectado à rede: Resultado experimental das correntes $i_{ga}$ , $i_{gb}$ e $i_{gc}$ com controle por realimentação de estados - (10A/div). ....	135
Figura A.5 – Ensaio conectado à rede: Resultado experimental das correntes $i_{ga}$ , $i_{gb}$ e $i_{gc}$ com controle por realimentação de estados - (10A/div). ....	136
Figura A.6 – Ensaio conectado à rede: Resultado experimental das correntes $i_{ga}$ , $i_{gb}$ e $i_{gc}$ com controle por realimentação de estados - (10A/div). ....	136
Figura A.7 – Ensaio conectado à rede: Resultado experimental das correntes $i_{ga}$ , $i_{gb}$ e $i_{gc}$ com controle por realimentação de estados - (10A/div). ....	137
Figura A.8 – Ensaio conectado à rede: Resultado experimental das correntes $i_{ga}$ , $i_{gb}$ e $i_{gc}$ com controle entrada-saída - (10A/div). ....	137
Figura A.9 – Ensaio conectado à rede: Resultado experimental das correntes $i_{ga}$ , $i_{gb}$ e $i_{gc}$ com controle entrada-saída - (10A/div). ....	138
Figura A.10 – Ensaio conectado à rede: Resultado experimental das correntes $i_{ga}$ , $i_{gb}$ e $i_{gc}$ com controle entrada-saída - (10A/div). ....	138
Figura A.11 – Ensaio conectado à rede: Resultado experimental das correntes $i_{ga}$ , $i_{gb}$ e $i_{gc}$ com controle entrada-saída - (10A/div). ....	139
Figura A.12 – Ensaio conectado à rede: Resultado experimental das correntes $i_{ga}$ , $i_{gb}$ e $i_{gc}$ com controle entrada-saída - (10A/div). ....	139
Figura A.13 – Ensaio conectado à rede: Resultado experimental das correntes $i_{ga}$ , $i_{gb}$ e $i_{gc}$ com controle entrada-saída - (10A/div). ....	140
Figura A.14 – Ensaio conectado à rede: Resultado experimental das correntes $i_{ga}$ , $i_{gb}$ e $i_{gc}$ com controle entrada-saída - (10A/div). ....	140



## LISTA DE TABELAS

Tabela 3.1 – Parâmetros nominais do filtro LCL.....	72
Tabela 3.2 – Parâmetros do controlador RMRAC: realimentação de estados. ....	75
Tabela 3.3 – Parâmetros do controlador RMRAC: entrada-saída. ....	76
Tabela 3.4 – Parâmetros da simulação.....	78



## LISTA DE APÊNDICES

Apêndice A – Resultados experimentais obtidos através de Osciloscópio	133
Apêndice B – Equação não-mínima para o erro de estados .....	141



# SUMÁRIO

<b>1 Introdução</b>	23
<b>1.1 Contextualização e motivação</b>	23
<b>1.2 Revisão bibliográfica</b>	25
1.2.1 Robustez de controladores adaptativos	25
1.2.2 Algoritmos de identificação de parâmetros	27
1.2.2.1 Algoritmos de adaptação paramétrica do tipo gradiente	27
1.2.2.2 Algoritmos de identificação do tipo RLS	28
1.2.3 Aplicações de controladores adaptativos em Eletrônica de Potência	29
1.2.3.1 Controle de corrente de conversores conectados à rede elétrica	30
<b>1.3 Objetivos</b>	32
<b>1.4 Contribuições</b>	32
<b>1.5 Organização</b>	33
<b>2 Controlador RMRAC: estrutura e prova de estabilidade</b>	35
<b>2.1 Descrição da planta e do modelo de referência</b>	35
<b>2.2 Estrutura do algoritmo de adaptação paramétrica</b>	37
2.2.1 Identificador de ganhos baseado em um <i>RLS</i> modificado	37
2.2.2 Lei de controle e equação do erro aumentado: abordagem por realimentação de estados	38
2.2.3 Lei de controle e equação do erro aumentado: abordagem entrada-saída	42
<b>2.3 Análise de estabilidade robusta em tempo discreto</b>	45
2.3.1 Limitação da matriz de covariância $\mathbf{P}$	45
2.3.2 Limitação do vetor de erro de parâmetros $\phi$	48
2.3.3 Limitação da magnitude dos sinais internos da malha adaptativa: abordagem por realimentação de estados	60
2.3.4 Limitação da magnitude dos sinais internos da malha adaptativa: abordagem entrada-saída	62
2.3.5 Limitação do erro de rastreamento $e_1$ : abordagem por realimentação de estados	64
2.3.6 Limitação do erro de rastreamento $e_1$ : abordagem entrada-saída	66
2.3.7 Rejeição de distúrbios senoidais	67
<b>2.4 Conclusão do capítulo</b>	68
<b>3 Projeto e simulação do controlador RMRAC</b>	69
<b>3.1 Modelo do conversor trifásico a três fios conectado à rede de energia elétrica</b>	69
<b>3.2 Projeto do sistema de controle</b>	74
3.2.1 Projeto do sistema de controle por realimentação de estados	75
3.2.2 Projeto do sistema de controle por abordagem entrada-saída	76

<b>3.3 Ordem de execução do algoritmo</b> .....	76
<b>3.4 Resultados de simulação</b> .....	77
3.4.1 Controlador RMRAC utilizando a abordagem por realimentação de estados .	78
3.4.1.1 Resposta transitória: controlador por realimentação de estados .....	85
3.4.2 Controlador RMRAC utilizando a abordagem entrada-saída .....	87
3.4.2.1 Resposta transitória: entrada-saída .....	95
<b>3.5 Conclusão do capítulo</b> .....	97
<b>4 Resultados experimentais</b> .....	99
<b>4.1 Resultados experimentais utilizando a abordagem por realimentação de estados</b> .....	100
4.1.1 Ensaio conectado à rede .....	100
4.1.1.1 Resposta transitória: abordagem por realimentação de estados .....	107
<b>4.2 Resultados experimentais utilizando a abordagem entrada-saída</b> .....	109
4.2.1 Ensaio conectado à rede .....	109
4.2.1.1 Resposta transitória: abordagem entrada-saída .....	116
<b>4.3 Conclusão do capítulo</b> .....	118
<b>5 Conclusões</b> .....	121
5.1 Artigos científicos publicados e patentes registradas na linha de pesquisa da Tese .....	122
<b>REFERÊNCIAS</b> .....	125
<b>APÊNDICES</b> .....	131
<b>A.1 Controlador RMRAC por realimentação de estados</b> .....	134
<b>A.2 Controlador RMRAC com abordagem entrada-saída</b> .....	137
<b>B.3 Abordagem por espaço de estados</b> .....	141
<b>B.4 Abordagem entrada-saída</b> .....	142



# 1 Introdução

Este capítulo apresenta a contextualização, a revisão bibliográfica e as contribuições da presente tese de doutorado. Na revisão bibliográfica, diferentes estruturas de controladores adaptativos por modelo de referência com abordagem por espaço de estados e com a abordagem entrada-saída são analisadas. Questões sobre a análise de estabilidade, desempenho e discretização destes controladores também são estudadas. Ainda na revisão, uma promissora aplicação do controlador desenvolvido é apresentada: o controle de corrente de conversores estáticos conectados à rede de energia elétrica. Por fim, os objetivos, as contribuições e a organização da tese são apresentados.

## 1.1 Contextualização e motivação

As pesquisas em controle adaptativo, iniciadas nos anos 50, foram incentivadas pela necessidade de projetos de pilotos automáticos de alto desempenho para que os aviões da época pudessem operar numa vasta faixa de velocidades e altitudes. Então, devido a este contexto, surgiu a necessidade do desenvolvimento de controladores mais avançados em relação aos existentes na época. Notou-se que, para estas aplicações, os controladores de ganhos fixos apresentavam um bom desempenho em apenas um ponto de operação e quando este ponto se modificava, dificuldades eram encontradas para se manter bom desempenho e a estabilidade do sistema de controle. Desde então, observou-se a necessidade de se desenvolver controladores com parâmetros (ou ganhos) que pudessem se adaptar (ou se ajustar) automaticamente (ASTRÖM, 1987).

Na linguagem atual, o termo adaptar significa modificar o comportamento de acordo com as novas circunstâncias. Então, controle adaptativo pode ser definido como uma técnica de controle que possui a capacidade de mudar seu comportamento de acordo com as modificações da dinâmica de um processo ou por distúrbios que afetam este sistema (ASTRÖM, 1987). Deste modo, pode-se notar que um controlador de ganhos fixos não é um sistema adaptativo. Um controlador adaptativo deve ter a capacidade de mudar seus ganhos (ou parâmetros) em tempo real.

Tratando-se de possíveis aplicações, controladores adaptativos robustos são recomendados para o controle de sistemas que apresentam incertezas estruturadas e/ou incertezas não-estruturadas (MILLER, 2003). Incerteza estruturada é definida como o não conhecimento exato da localização dos zeros e dos pólos da planta. Incerteza não-estruturada é definida como o não conhecimento do comportamento da fase e do ganho da planta em frequências em determinada faixa de operação, que por sua vez é causada por pólos e zeros não modelados.

É sabido que as técnicas de controle com ganhos fixos, largamente utilizadas na

indústria, tais como PI (Proporcional-Integral) e PID (Proporcional-Integral-Derivativo) podem não garantir bom desempenho em certas aplicações, tal como controle de sistemas que apresentam variações paramétricas (incertezas estruturadas) e/ou dinâmicas não-modeladas (incertezas não-estruturadas) (FLORA; GRÜNDLING, 2008), ou seja, sistemas que apresentam pontos de operação variáveis. Deste modo, o uso de uma técnica de controle adaptativa robusta é uma interessante escolha para tais aplicações.

Um passo muito importante para o projeto de qualquer controlador é a modelagem da planta a qual se deseja controlar. Neste trabalho são utilizadas duas abordagens de modelagem: a abordagem por espaço de estados e abordagem entrada-saída. Na abordagem por espaço de estados, as variáveis de estados do sistema são medidas totalmente ou parcialmente. No caso de serem medidas parcialmente, as variáveis restantes devem ser estimadas. Já a abordagem entrada-saída permite controlar a planta através do acesso da entrada e da saída da planta. Como se tem acesso apenas a estas duas variáveis, observadores internos são necessários para a estimação das variáveis do sistema.

Os controladores adaptativos ainda podem ser divididos em dois tipos gerais: os diretos ((IOANNOU; TSAKALIS, 1986a) e (IOANNOU; SUN, 1996)) e os indiretos ((GIRI et al., 1989) e (IOANNOU; SUN, 1996)). No método indireto, o algoritmo de adaptação paramétrica é utilizado para identificar os parâmetros da parte modelada da planta e com base nesta estimação, a lei de controle é calculada. Alguns métodos indiretos podem ser encontrados em (ASTRÖM, 1988) e (QINGZHENG; FEI; CHANGMAO, 2011). Nos métodos diretos, os parâmetros do controlador são estimados diretamente a partir de um modelo de referência pré-estabelecido (IOANNOU; TSAKALIS, 1986a), (LOZANO-LEAL; COLLADO; MONDIÉ, 1990), ou seja, não há a necessidade da identificação dos parâmetros do modelo da planta. Ainda, na literatura podem ser encontrados trabalhos que utilizam o método de controle direto e indireto concomitantemente (DUARTE; NARENDRA, 1989). Nesta tese, apenas o método direto é utilizado.

Outra questão muito importante para a implementação dos controladores adaptativos é a discretização da planta e do controlador, já que este tipo de controlador é usualmente implementado em tempo discreto. Na literatura encontram-se diferentes técnicas de discretização tais como: a transformada  $\mathcal{Z}$  (OGATA, 1995) e a transformada  $\delta$  (MIDDLETON; GOODWIN, 1990). A transformada  $\mathcal{Z}$  é a técnica mais popular e difundida na literatura. No entanto, em certas aplicações em que precisão numérica pode ser um problema de implementação (tais como aplicações em aritmética de ponto-fixa), a transformada  $\delta$  é uma boa opção, pois esta técnica minimiza os erros numéricos causados por arredondamento e/ou truncamento (LI; GEVERS, 1993), (RIBEIRO; JACOBINA; LIMA, 1997), (NEWMAN; HOLMES, 2003), (KHOO; REDDY, 2008), (PADGETT; ANDERSON, 2009) e (SÁEZ et al., 2010). Entretanto, esta tese utiliza uma plataforma de processamento baseado em aritmética de ponto-flutuante e, devido a isto, utiliza a transformada  $\mathcal{Z}$  para a discretização da planta e do controlador RMRAC.

Através desta reflexão, nota-se que sistemas de controle adaptativos são projetados para estabilizar plantas sujeitas a parâmetros incertos e/ou dinâmicas não-modeladas, além de manter um bom desempenho, já que seus ganhos são adaptados em tempo real. Aliado as novas tecnologias, a sua implementação digital permite, facilmente, o ajuste dos vários parâmetros de projeto. No que diz respeito à aplicação deste controlador, sistemas conectados à rede elétrica se mostram como um nicho de aplicações a ser explorado. Maiores discussões sobre sistemas conectados à rede são apresentadas mais adiante.

Com o objetivo de se analisar o estado da arte do tema da presente tese, uma revisão bibliográfica é realizada.

## 1.2 Revisão bibliográfica

É desejável que qualquer controlador tenha a habilidade de manter a estabilidade e bom desempenho do sistema, mesmo na presença de incertezas no modelo da planta, como dinâmicas não-modeladas, variações paramétricas e distúrbios, por exemplo. Esta propriedade é usualmente denominada robustez. Com o intuito de analisar diferentes estruturas de controladores adaptativos reportadas na literatura, uma revisão bibliográfica foi realizada. Nesta revisão, controladores aplicados a sistemas conectados à rede também foram pesquisados. Deste modo, foi possível verificar as vantagens que controladores adaptativos robustos podem trazer aos sistemas conectados à rede de energia elétrica.

### 1.2.1 Robustez de controladores adaptativos

Desde a década de 80, várias modificações têm sido propostas em algoritmos adaptativos para melhorar algumas características importantes, tais como robustez e desempenho (em transitórios e em regime permanente) do sistema de controle. Estas modificações são baseadas, por exemplo, na inclusão de funções do tipo:  $\sigma$ -modification, normalização robusta e zona-morta (IOANNOU; TSAKALIS, 1986a). Assim, muitas estruturas de controle adaptativo foram desenvolvidas com extensas análises de estabilidade para resolver problemas de plantas com incertezas estruturadas e/ou não-estruturadas.

Vários trabalhos na literatura abordam a questão de estabilidade de controladores adaptativos, tais como (NARENDRA; LIN; VALAVANI, 1980), (ROHRS et al., 1982), (MORSE, 1985), (LOZANO-LEAL; GOODWIN, 1985), (IOANNOU; TSAKALIS, 1986a), (NARENDRA; ANNASWAMY, 1987), (IOANNOU; TSAKALIS, 1988), (LOZANO-LEAL; COLLADO; MONDIÉ, 1990), (IOANNOU; DATTA, 1991), (DATTA, 1993), (ANDERSON; LANDAU, 1994), (GRÜNDLING, 1995), (RICHTER, 2003) e (STEFANELLO, 2010). No entanto, é muito comum encontrar na literatura trabalhos sobre

estabilidade robusta de algoritmos adaptativos em tempo contínuo (IOANNOU; TSAKALIS, 1986a), (NARENDRA; ANNASWAMY, 1987), (LOZANO-LEAL; COLLADO; MONDIÉ, 1990), (GRÜNDLING, 1995), (RICHTER, 2003) e (STEFANELLO; GRÜNDLING, 2010). Apesar destes trabalhos apresentarem extensivas análises de estabilidade, controladores adaptativos são, usualmente, implementados em tempo discreto. Deste modo, o projeto de controladores adaptativos em tempo contínuo não leva em consideração as características intrínsecas da implementação digital, tais como: atraso de transporte e retenção de amostras. Portanto, estas análises de estabilidade em tempo contínuo podem perder a validade em uma aplicação de tempo discreto. Por isso, é necessário o desenvolvimento das provas de estabilidade de controladores adaptativos diretamente em tempo-discreto.

As provas de estabilidade de controladores adaptativos são extremamente importantes devido aos seguintes motivos: i) A prova de convergência dos ganhos do controlador, mesmo que sob hipóteses idealizadas, dão credibilidade para as aplicações práticas de algoritmos adaptativos; ii) A prova de estabilidade ajuda a caracterizar o grau de robustez de algoritmos adaptativos; e iii) A prova de estabilidade sugere meios para melhorar os algoritmos tanto no que diz respeito à estabilidade quanto ao desempenho (GOODWIN; HILL; PALANISWAMI, 1984).

Tratando-se de análises de estabilidade de algoritmos adaptativos, estas podem envolver: variações paramétricas, dinâmicas não-modeladas e distúrbios. No caso da prova de estabilidade de sistemas sem o efeito de dinâmicas não-modeladas e de distúrbios, pode-se utilizar a teoria de Lyapunov (IOANNOU; SUN, 1996) para provar que o erro de adaptação de parâmetros tende a zero quando  $t \rightarrow \infty$  e, por consequência, o erro de rastreamento também tende a zero. No caso de a análise ser realizada para sistemas com a presença de dinâmicas não-modeladas e distúrbios, deve-se provar que a candidata a função de Lyapunov é limitada em módulo, que os sinais internos da malha fechada são limitados e que o módulo do erro de rastreamento é pequeno na média. Portanto, quando o sistema de controle adaptativo é estável na presença de dinâmicas não-modeladas e distúrbios, é dito que este algoritmo adaptativo é robusto a incertezas estruturadas e não-estruturadas. Esta tese apresenta a análise de estabilidade de um novo algoritmo adaptativo robusto, em tempo discreto, para o caso da planta possuir incertezas estruturadas e não-estruturadas. A atenuação de distúrbios exógenos é realizada por meio da estimação destes distúrbios na saída da planta.

Devido às questões comentadas, alguns trabalhos apresentam a análise de estabilidade diretamente em tempo discreto (SALGADO; GOODWIN; MIDDLETON, 1988), (IOANNOU; TSAKALIS, 1986b) e (DATTA, 1993). O trabalho de (IOANNOU; TSAKALIS, 1986b) apresenta um desenvolvimento completo de um controlador RMRAC em tempo discreto com base num algoritmo do tipo gradiente. A análise é desenvolvida considerando a presença de dinâmicas não-modeladas do tipo aditiva e multiplicativa. No

entanto, é sabido que algoritmos do tipo RLS (*Recursive Least Square*) apresentam uma taxa de convergência dos ganhos do controlador mais rápida que algoritmos do tipo gradiente e, além disso, algoritmos do tipo RLS podem levar os parâmetros do controlador aos seus valores reais (GOODWIN; SIN, 1984). Devido à boa característica transitória do algoritmo RLS, o trabalho de (SALGADO; GOODWIN; MIDDLETON, 1988) apresenta uma análise da estabilidade no controlador em tempo discreto com base num algoritmo de RLS modificado e bons resultados são obtidos com esta técnica de controle. No entanto, o trabalho citado não considera a presença de dinâmicas não-modeladas (incertezas não-estruturadas) no modelo da planta.

### 1.2.2 Algoritmos de identificação de parâmetros

Visando controlar uma planta que apresente variações paramétricas e/ou dinâmicas não-modeladas, o sistema de controle adaptativo deve possuir um algoritmo de adaptação paramétrica. Este algoritmo de adaptação deve ter a capacidade de modificar os ganhos do controlador de modo a manter a estabilidade e bom desempenho do sistema de controle. Esta tese aborda, especificamente, o desenvolvimento de um novo algoritmo do tipo RLS. Porém, antes de abordar os algoritmos do tipo RLS, uma breve introdução ao algoritmo do tipo gradiente é realizada.

#### 1.2.2.1 Algoritmos de adaptação paramétrica do tipo gradiente

Os algoritmos do tipo gradiente são caracterizados por possuírem uma taxa de adaptação paramétrica fixa, definida pela matriz  $\mathbf{\Gamma}$ . Estes algoritmos são mais simples de serem projetados e implementados, quando comparados aos algoritmos do tipo RLS. No entanto, os algoritmos RLS possuem uma maior taxa de convergência no período transitório, que implica em menor tempo de convergência dos ganhos a serem adaptados. A seguir é apresentado um exemplo de equação recursiva para um algoritmo do tipo gradiente (em tempo discreto), baseado no algoritmo apresentado em (IOANNOU; TSAKALIS, 1986a)

$$\boldsymbol{\theta}_{(k+1)} = \left( \mathbf{I} - \sigma_{(k)} \mathbf{\Gamma} T_s \right) \boldsymbol{\theta}_{(k)} - T_s \frac{\mathbf{\Gamma} \boldsymbol{\zeta}_{(k)} \varepsilon_{(k)}}{m_{(k)}^2}, \quad (1.1)$$

onde  $\boldsymbol{\theta}$  é o vetor de ganhos (também denominado vetor de parâmetros) do controlador,  $\sigma$  é uma função auxiliar (definida no Capítulo 2),  $\mathbf{\Gamma}$  é uma matriz que dita a velocidade de adaptação dos parâmetros  $\boldsymbol{\theta}$ ,  $T_s$  é o período de amostragem,  $\boldsymbol{\zeta}$  é um vetor auxiliar,  $\varepsilon$  é o erro aumentado (que é função do erro de rastreamento e do erro de adaptação de parâmetros) e  $m$  é um sinal de normalização para o sistema. Uma versão deste algoritmo de identificação, em tempo contínuo, foi utilizado no trabalho de (IOANNOU; TSAKALIS,

1986a), no qual este propõe um controlador RMRAC, porém a análise de estabilidade robusta deste controlador é realizada em tempo contínuo. Já em (IOANNOU; TSAKALIS, 1986b), são apresentadas as análises de estabilidade robusta deste mesmo controlador, mas em tempo discreto.

Alguns trabalhos, tais como (HSU, 1988), (STEFANELLO; GRÜNDLING, 2010) e (STEFANELLO, 2010) tratam de controladores adaptativos por modelo de referência juntamente com controladores por estrutura variável. A junção destes dois tipos de controladores cria uma estrutura adaptativa capaz de ter boa resposta transitória e de regime permanente. A resposta transitória é melhorada devido à parcela de estrutura variável que atua apenas nos transitórios. Em termos de desempenho transitório e resposta de regime permanente, os algoritmos do tipo RLS e os algoritmos de estrutura variável apresentam resultados satisfatórios.

### 1.2.2.2 Algoritmos de identificação do tipo RLS

Os algoritmos de adaptação de parâmetros do tipo RLS são caracterizados por possuir uma matriz de covariância  $\mathbf{P}$  que dita a velocidade de adaptação de parâmetros. Normalmente, esta matriz é iniciada com um valor elevado para acelerar o processo de adaptação no transitório de partida do sistema de controle.

Um exemplo de algoritmo recursivo baseado no método RLS é apresentado a seguir

$$\boldsymbol{\theta}_{(k+1)} = \left( \mathbf{I} - \sigma_{(k)} \mathbf{P}_{(k)} T_s \right) \boldsymbol{\theta}_{(k)} - T_s \frac{\mathbf{P}_{(k)} \boldsymbol{\zeta}_{(k)} \varepsilon_{(k)}}{m_{(k)}^2}. \quad (1.2)$$

A matriz de covariância  $\mathbf{P}_{(k)}$  é expressa pela seguinte equação

$$\mathbf{P}_{(k)} = \mathbf{P}_{(k-1)} - T_s \frac{\mathbf{P}_{(k-1)} \boldsymbol{\zeta}_{(k)} \boldsymbol{\zeta}_{(k)}^T \mathbf{P}_{(k-1)}}{m_{(k)}^2}. \quad (1.3)$$

A equação (1.3), apesar de possibilitar o aumento da taxa de convergência do algoritmo adaptativo em transitórios, possui o inconveniente de levar a matriz  $\mathbf{P}$  a uma matriz nula em regime permanente. Algumas soluções propostas na literatura evitam este problema, tal como (SALGADO; GOODWIN; MIDDLETON, 1988), que propuseram um algoritmo de adaptação de parâmetros do tipo RLS, em tempo discreto em que a matriz de covariância  $\mathbf{P}$  não tende a uma matriz nula, em regime permanente.

O algoritmo de adaptação proposto por (SALGADO; GOODWIN; MIDDLETON, 1988) é expresso pela seguinte equação

$$\boldsymbol{\theta}_{(k+1)} = \boldsymbol{\theta}_{(k)} - \alpha \frac{\mathbf{P}_{(k)} \boldsymbol{\zeta}_{(k)} \varepsilon_{(k)}}{m_{(k)}^2} \quad (1.4)$$

e a matriz de covariância  $\mathbf{P}_{(k)}$  pode ser calculada pela seguinte equação

$$\mathbf{P}_{(k)} = \frac{1}{\lambda} \mathbf{P}_{(k-1)} - \alpha \frac{\mathbf{P}_{(k-1)} \boldsymbol{\zeta}_{(k)} \boldsymbol{\zeta}_{(k)}^T \mathbf{P}_{(k-1)}}{m_{(k)}^2} - \delta \mathbf{P}_{(k-1)} + \beta \mathbf{I} \quad (1.5)$$

Apesar de o algoritmo garantir que a matriz  $\mathbf{P}$  não se torne nula em regime permanente, as análises matemáticas de estabilidade são feitas apenas para o caso da planta não apresentar dinâmicas não-modeladas. (LOZANO-LEAL; COLLADO; MONDIÉ, 1990) propuseram um algoritmo de adaptação robusto do tipo RLS modificado, em que se evita que a matriz  $\mathbf{P}$  tenda a uma matriz nula em regime permanente. O algoritmo inicia com uma alta taxa de adaptação e em regime permanente o algoritmo se comporta como um gradiente (matriz  $\mathbf{P}$  fixa). O algoritmo de adaptação de parâmetros proposto por (LOZANO-LEAL; COLLADO; MONDIÉ, 1990) é expresso pela seguinte equação

$$\dot{\boldsymbol{\theta}}(t) = (\mathbf{I} - \sigma(t)\mathbf{P}(t))\boldsymbol{\theta}(t) - \frac{\mathbf{P}(t)\boldsymbol{\zeta}(t)\varepsilon(t)}{m(t)^2} \quad (1.6)$$

e a matriz de covariância  $\mathbf{P}$  pode ser calculada pela seguinte equação

$$\dot{\mathbf{P}}(t) = -\frac{\mathbf{P}(t)\boldsymbol{\zeta}(t)\boldsymbol{\zeta}^T(t)\mathbf{P}(t)}{m(t)^2} + (\bar{\lambda}\mathbf{P}(t) - \frac{\mathbf{P}(t)^2}{R^2})\bar{\mu}^2 \quad (1.7)$$

Em (LOZANO-LEAL; COLLADO; MONDIÉ, 1990), as provas de estabilidade foram realizadas para o caso de a planta apresentar dinâmicas não-modeladas. No entanto, todas estas análises de estabilidade robusta são desenvolvidas apenas em tempo contínuo. Portanto, visando aplicações de controladores adaptativos robustos, as provas de estabilidades devem ser realizadas em tempo discreto.

### 1.2.3 Aplicações de controladores adaptativos em Eletrônica de Potência

Com o advento de microcontroladores e DSCs (*Digital Signal Controllers*), tornou-se possível a implementação de algoritmos adaptativos avançados, onde a implementação é realizada com baixo custo e com frequência de amostragem de vários kHz (ASTRÖM; KANNIAH, 1993). Em (ASTRÖM; WITTENMARK, 1995) é apresentado um conjunto de aplicações típicas de controladores adaptativos onde são descritos exemplos de controladores adaptativos industriais. Em muitas aplicações, controladores PID são preferidos devido à sua simplicidade de projeto e de ajuste e por não necessitar de um grande aparato computacional para a sua implementação. No entanto, em várias aplicações, devido à complexidade da planta a ser controlada, controladores adaptativos são interessantes soluções quando comparados a controladores de ganhos fixos, tais como PID, LQR (*Linear Quadratic Regulator*), repetitivos e outros.

O controlador RMRAC (que utiliza o método direto), especificamente, tem apre-

sentado um bom desempenho em várias aplicações em Eletrônica de Potência, tais como (GRÜNDLING; CARATI; PINHEIRO, 1997), (CARATI; RICHTER; GRÜNDLING, 2000), (CARATI; MONTAGNER; GRÜNDLING, 2000), (STEFANELLO, 2006), (FLORA; GRÜNDLING, 2008), (STEFANELLO et al., 2008), (STEFANELLO, 2010), (MASSING et al., 2012), (TAMBARA, 2010), (TAMBARA et al., 2010), (TAMBARA et al., 2011a), (TAMBARA et al., 2011b) e (TAMBARA et al., 2013).

(CARATI; MONTAGNER; GRÜNDLING, 2000) e (STEFANELLO, 2006) desenvolveram controladores discretos implementado em plataforma DSC para ajustar a tensão de saída de uma FPCA (Fonte de Potência CA) monofásica e trifásica, respectivamente. Na mesma linha, (FLORA; GRÜNDLING, 2008) projetou um controlador RMRAC para regular a forma de onda da tensão de saída de uma FPCA utilizada para o acionamento de uma máquina de vibração eletrodinâmica. Com este controlador, obteve-se bom rastreamento da referência e estabilidade numa ampla faixa de frequências e amplitudes. Na área de controle de máquinas elétricas, objetivando obter bom desempenho e estabilidade numa vasta faixa de velocidades, (CÂMARA, 2007) e (MARTINS, 2006) utilizaram um controlador RMRAC para controle de velocidade de motores de indução trifásicos. Na área de filtros ativos, (STEFANELLO et al., 2008) utilizou um controlador RMRAC para controle da corrente sintetizada por um filtro ativo de potência paralelo. (MASSING et al., 2012) apresenta um controlador com alocação adaptativa de pólos baseado no método RLS para controlar a corrente de conversores conectados à rede elétrica usando filtros LCL. Bons resultados experimentais são obtidos com o controlador adaptativo em uma grande faixa de variação paramétrica dos elementos da rede. Entretanto, nenhum destes trabalhos apresentam restrições de projeto para aplicações em tempo discreto, quando a planta está sujeita a dinâmicas não-modeladas, nem mesmo a análise matemática de estabilidade do controlador.

### 1.2.3.1 Controle de corrente de conversores conectados à rede elétrica

Sistemas de geração distribuída, tais como turbinas eólicas, sistemas fotovoltaicos, células a combustível e micro-turbinas a gás estão se tornando mais comuns no sistema de geração de energia elétrica devido à necessidade global de diversificar a matriz energética. A maioria destes sistemas utiliza conversores estáticos com filtros LCL para atenuação da distorção harmônica no ponto de acoplamento comum (*Point of Common Coupling - PCC*) com a rede elétrica. A utilização de filtros LCL é motivada pela melhor atenuação da distorção harmônica em relação aos filtros do tipo L, principalmente em conversores de alta potência e em baixa frequência de comutação. No entanto, a utilização deste tipo de filtro pode causar oscilações nas correntes da rede devido ao baixo amortecimento das ressonâncias. A partir dos problemas citados anteriormente, várias técnicas de controle têm



sido propostas na literatura científica para resolver o problema do amortecimento ativo de filtros LCL conectados à rede: controle ótimo (MARIETHOZ; BECCUTI; MORARI, 2008), o controle PI ((LINDGREN; SVENSSON, 1998) e (PONNALURI; SERPA, 2008)), o controle PI com controle ressonante (LISERRE M.; TEODORESCU, 2006), controle robusto ((GABE; MONTAGNER; PINHEIRO, 2009) e (MACCARI L.A. ; MASSING, 2014)) e controle adaptativo (MASSING et al., 2012). Independentemente da abordagem utilizada ou da técnica de controle, é desejável que o algoritmo de controle tenha a seguinte propriedade: capacidade de manter a estabilidade do sistema e bom desempenho mesmo na presença de incertezas estruturadas e não-estruturadas, bem como distúrbios, pois o desempenho e a estabilidade do sistema em malha fechada é substancialmente dependente dos parâmetros da rede e das dinâmicas do filtro de saída do conversor. Como já foi dito anteriormente, as técnicas de controle com ganhos fixos, amplamente utilizados na indústria, tais como PI, PID e LQR podem não garantir bom desempenho e estabilidade em certas aplicações que apresentam variação paramétrica, dinâmicas não-modeladas e/ou distúrbios. Assim, a utilização de uma técnica de controle adaptativa robusta é uma escolha interessante para estas aplicações.

Na literatura, também podem ser encontradas algumas patentes que apresentam soluções para controle de conversores conectados à rede. Na patente de (PONNALURI; SERPA, 2008) é descrito um método de amortecimento da ressonância de filtros LCL (quando estes são utilizados na saída de conversores estáticos). Neste documento, controladores do tipo PI são utilizados para o ajuste das correntes do lado do ponto de acoplamento comum com a rede. No entanto, por se tratar de controladores de ganhos fixos, o desempenho e a estabilidade do sistema em malha fechada, quando conectado à rede elétrica, será dependente dos parâmetros da rede. Já a patente de (YU; ILLINDALA; ALKHOULI, 2011) apresenta um sistema de controle da potência ativa e reativa injetada na rede elétrica por conversores estáticos conectados à rede, através de filtro LCL. No entanto (do mesmo modo que a patente de (PONNALURI; SERPA, 2008)), (PONNALURI; SERPA, 2008) também utiliza malhas de controle com ganhos fixos. Deste modo, o desempenho do sistema é também dependente das características da rede. A patente de (COCCIA et al., 2011) apresenta um método de controle da corrente pelo lado da rede de um conversor monofásico empregando um filtro LCL. O método de controle (de ganhos fixos) descrito obtém as referências de correntes do filtro LCL através da estimação da componente fundamental da tensão da rede. A partir da análise da variação dinâmica e paramétrica da rede, em (MASSING et al., 2012) é utilizado o controlador adaptativo por modelo de referência (com o identificador de parâmetros proposto em (SALGADO; GOODWIN; MIDDLETON, 1988), para resolver este problema. No entanto, o trabalho de (MASSING et al., 2012) não apresenta as provas matemáticas de estabilidade do controlador RMRAC, considerando a presença de dinâmicas não-modeladas.

### 1.3 Objetivos

Com o intuito de se obter um controlador adaptativo robusto com capacidade de estabilizar plantas sujeitas a incertezas estruturadas e não-estruturadas, esta tese propõe um novo controlador RMRAC baseado em identificador de parâmetros do tipo RLS robusto em tempo discreto. Adicionalmente, a sua análise de estabilidade é apresentada e restrições de projeto são apresentadas. Para validação do algoritmo proposto, é efetuado o controle de corrente de um conversor com filtro LCL conectado à rede de energia elétrica. A modelagem do filtro LCL é apresentada em tempo contínuo e tempo discreto (através da transformada  $\mathcal{Z}$ ).

O presente trabalho também vem resolver o problema da garantia de estabilidade e desempenho do controlador adaptativo robusto por modelo de referência aplicado ao controle de corrente de conversores conectados à rede com filtro LCL, através do desenvolvimento de uma estratégia de controle com estabilidade garantida por uma candidata a função de Lyapunov em tempo discreto. Os resultados apresentados neste trabalho tratam do controle das correntes pelo lado da rede.

### 1.4 Contribuições

Diferentemente de (IOANNOU; TSAKALIS, 1986a), (LOZANO-LEAL; COLLADO; MONDIÉ, 1990), (STEFANELLO; GRÜNDLING, 2010), (SALGADO; GOODWIN; MIDDLTON, 1988), (IOANNOU; TSAKALIS, 1986b) e (DATTA, 1993) este trabalho propõe um algoritmo de controle RMRAC direto em tempo discreto via realimentação de estados e pela abordagem entrada-saída, no qual este controlador é robusto à dinâmicas não-modeladas do tipo multiplicativas e aditivas e robusto a distúrbios limitados. Para atingir estes objetivos é proposto um algoritmo de controle RMRAC baseado em um algoritmo de adaptação do tipo RLS modificado. Este algoritmo RLS inclui a função  $\sigma$ -modification que é responsável por remover o ação integral e por criar uma região de atração que acelera a convergência dos ganhos do controlador. Normalização robusta também é utilizada para se garantir a limitação dos sinais da malha fechada e robustez frente às dinâmicas não-modeladas. Na presente tese, o algoritmo de adaptação RLS modificado evita que a matriz  $\mathbf{P}$  tenda a uma matriz nula, isto é, em regime permanente o algoritmo também se comporta como um algoritmo gradiente. Deste modo, em regime permanente, o algoritmo de identificação mantém-se operante.

Outra contribuição deste trabalho é a análise de estabilidade completa do controlador RMRAC proposto, diretamente em tempo discreto, considerando a presença de dinâmicas não-modeladas. Além disso, as restrições de projeto são obtidas a partir da análise de estabilidade. Adicionalmente, o erro de rastreamento é provado ser pequeno

em um caso geral e que converge a zero, na ausência de erros de modelagem. Neste trabalho, é utilizada a teoria de estabilidade no sentido de Lyapunov. O uso de uma candidata à função de Lyapunov é semelhante aos trabalhos de (IOANNOU; TSAKALIS, 1986a), (LOZANO-LEAL; COLLADO; MONDIÉ, 1990), (STEFANELLO; GRÜNDLING, 2010), (SALGADO; GOODWIN; MIDDLETON, 1988), (IOANNOU; TSAKALIS, 1986b) e (DATTA, 1993), (WEN et al., 2012), (WANG Y.; ZUO, 2012), (LAM H. K.; BAN, 2012) e (TONG Y.; ZHANG, 2012).

Esta tese também propõe a aplicação do controlador RMRAC digital proposto para ajustar as correntes trifásicas, pelo lado da rede, de um filtro LCL conectado à rede de energia elétrica. Este controlador é adequado para esta aplicação devido à robustez do algoritmo em relação às dinâmicas não-modeladas e aos distúrbio da rede, muito comuns neste tipo de planta, conforme foi discutido anteriormente. São analisados: convergência dos ganhos do controlador, desempenho transitório e de regime permanente e estabilidade dos principais sinais da malha fechada. O sistema é testado experimentalmente em um protótipo de laboratório. O controlador foi implementado em um DSC de ponto flutuante de 32 bits, modelo TMS320F28335 da empresa Texas Instruments®.

## 1.5 Organização

Esta tese está organizada como segue. O Capítulo 1 apresenta uma revisão bibliográfica da literatura sobre controladores adaptativos por modelo de referência e de identificadores de parâmetros aplicados a estes controladores, as motivações, os objetivos deste trabalho bem como suas contribuições. O Capítulo 2 apresenta o desenvolvimento de um algoritmo RMRAC baseado em um identificador de parâmetros RLS modificado com abordagem por realimentação de estados e com abordagem entrada-saída, juntamente com a sua análise de estabilidade. O Capítulo 3 apresenta o projeto e simulação do algoritmo desenvolvido no Capítulo 2, aplicado ao controle de corrente pelo lado da rede de um conversor trifásico a três fios com filtro LCL. O Capítulo 4 apresenta resultados experimentais para validação do controlador RMRAC desenvolvido no Capítulo 2 e simulado no Capítulo 3. O Capítulo 5 apresenta as conclusões deste trabalho. Por fim, apêndices são apresentados para complementar a tese.



## 2 Controlador RMRAC: estrutura e prova de estabilidade

Este capítulo apresenta o desenvolvimento de um novo controlador adaptativo robusto por modelo de referência em tempo discreto baseado em um algoritmo de adaptação paramétrica do tipo RLS modificado. Nas análises realizadas, duas abordagens são utilizadas: por espaço de estados e entrada-saída. A análise de estabilidade do controlador é realizada em tempo discreto considerando a presença de dinâmicas não-modeladas. Através da análise de estabilidade do controlador RMRAC, restrições de projeto são apresentadas.

### 2.1 Descrição da planta e do modelo de referência

A relação entrada-saída do algoritmo em tempo discreto é definida pela seguinte expressão

$$y_{(k)} \triangleq G(z)u_{(k)} = \mathcal{Z}^{-1}[G(z)u(z)], \quad (2.1)$$

onde  $\mathcal{Z}^{-1}[\cdot]$  denota a Transformada  $\mathcal{Z}$  inversa e  $y_{(k)}$  denota a saída da planta com função de transferência  $G(z)$  e entrada  $u_{(k)}$ . A variável complexa  $z$  representa a frequência-discreta e a variável  $k$  representa o índice das funções em tempo-discreto.

A equação em espaço de estados de uma planta LTI (*Linear Time Invariant*), SISO (*Single-Input Single-Output*), em tempo-discreto com ordem  $n > 0$  é representada por

$$\mathbf{X}_{(k+1)} = \mathbf{A}\mathbf{X}_{(k)} + \mathbf{B}u_{(k)}. \quad \mathbf{X} \in \mathfrak{R}^{n \times 1}, u \in \mathfrak{R} \quad e \quad y_{(k)} = \mathbf{C}^T \mathbf{X}_{(k)} + \mathbf{D}u_{(k)}, y \in \mathfrak{R}, \quad (2.2)$$

onde  $\mathbf{A} \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ ,  $\mathbf{B} \in \mathfrak{R}^{n \times 1}$ ,  $\mathbf{D} \in \mathfrak{R}$  e  $\mathbf{C} \in \mathfrak{R}^{n \times 1}$ . Aplicando a Transformada  $\mathcal{Z}$  na equação (2.2), tem-se

$$z\mathbf{X}(z) - z\mathbf{X}_{(0)} = \mathbf{A}\mathbf{X}(z) + \mathbf{B}u(z) \quad e \quad y(z) = \mathbf{C}^T \mathbf{X}(z) + \mathbf{D}u(z), \quad (2.3)$$

onde  $\mathbf{X}_{(0)}$  é a condição inicial do vetor de estados.

Esta tese considera uma planta LTI-SISO que possui uma saída  $y_{(k)}$  que pode ser escrita da seguinte forma

$$y_{(k)} = G(z)u_{(k)} = G_p(z) (1 + \mu\Delta_m(z)) u_{(k)} + \mu\Delta_a(z)u_{(k)}, \quad (2.4)$$

onde  $G_p(z)$  representa a parte modelada da planta e  $\Delta_m(z)$  e  $\Delta_a(z)$  representam as dinâmicas não-modeladas do tipo multiplicativa e aditiva, respectivamente. O parâmetro  $\mu$  representa um ganho (ou peso) das respectivas dinâmicas não-modeladas.

A parte modelada da planta é expressa por

$$G_p(z) = \mathbf{C}_p^T (z\mathbf{I} - \mathbf{A}_p)^{-1} \mathbf{B}_p = k_p \frac{Z_p(z)}{R_p(z)}, \quad (2.5)$$

onde  $Z_p(z)$  e  $R_p(z)$  são polinômios mônicos de graus  $m_p$  e  $n_p$  respectivamente,  $Z_p(z)$  é um polinômio estável e o sinal de  $k_p$  é assumido conhecido.  $\mathbf{A}_p \in \mathfrak{R}^{n_p \times n_p}$ ,  $\mathbf{B}_p \in \mathfrak{R}^{n_p \times 1}$  e  $\mathbf{C}_p \in \mathfrak{R}^{1 \times n_p}$  são matrizes do sistema em espaço de estados.

O modelo de referência, estável, é expresso por

$$\frac{y_m(z)}{r(z)} = W_m(z) = k_m \frac{1}{R_m(z)}, \quad k_m > 0, \quad (2.6)$$

com  $R_m(z)$  de grau  $n^* = n_p - m_p \geq 1$  e  $r$  é um sinal uniformemente limitado. A equação (2.6) é usada para gerar o sinal  $y_m$ , o qual é o valor desejado de  $y$ . Num caso ideal ( $\mu = 0$ ), o perfeito rastreamento pode ser atingido. De outro modo, para algum  $\mu^* > 0$  e qualquer  $\mu \in [0, \mu^*)$ , o controlador deve garantir estabilidade do sistema em malha fechada e o erro de rastreamento pode ser provado ser limitado em norma.

Para a parte modelada da planta,  $G_p(z)$ , as seguintes hipóteses devem ser obedecidas:

**H1:**  $Z_p(z)$  é um polinômio mônico, Schur, de grau  $m_p$  conhecido;

**H2:**  $R_p(z)$  é um polinômio mônico de grau  $n_p$  conhecido e  $n^* = n_p - m_p \geq 1$  é o grau relativo da parte nominal da planta  $G_p(z)$ ;

**H3:** O sinal do ganho  $k_p$  e o limite superior de  $|k_p|$ ,  $k_{p0} \geq |k_p|$  são conhecidos.

Para a parte não-modelada da planta, deve-se obedecer às seguintes hipóteses:

**H4:**  $\Delta_m(z)$  é uma função de transferência estável;

**H5:**  $\Delta_a(z)$  é uma função de transferência estável e estritamente própria;

**H6:** É conhecido um limitante superior de  $\delta^* \in (0,1)$ , tal que  $\Delta_m(z)$  e  $\Delta_a(z)$  têm todos seus pólos confinados em um círculo aberto de raio  $|z| \leq \sqrt{\delta^*}$ .

Para o modelo de referência,  $W_m(z)$ , deve-se obedecer à seguinte hipótese:

**H7:**  $R_m(z)$  é um polinômio mônico, Schur de grau  $n^*$ .

As afirmações H1, H2 e H3 são necessárias para o projeto de um controlador estável, para a escolha de um adequado modelo de referência (ver H7) e para o projeto do ganho da lei de adaptação paramétrica. As hipóteses H4-H6 não são necessárias para garantir a limitação dos sinais de malha fechada e para o projeto da robustez da lei de adaptação paramétrica.

## 2.2 Estrutura do algoritmo de adaptação paramétrica

### 2.2.1 Identificador de ganhos baseado em um *RLS* modificado

O seguinte algoritmo de adaptação paramétrica do tipo *RLS* em tempo discreto é proposto

$$\boldsymbol{\theta}_{(k+1)} = \left[ \mathbf{I} - \sigma_{(k)} T_s \mathbf{P}_{(k-1)} \right] \boldsymbol{\theta}_{(k)} - T_s \alpha \frac{\mathbf{P}_{(k-1)} \boldsymbol{\zeta}_{(k)} \varepsilon_{(k)}}{\bar{m}_{(k)}^2}, \quad (2.7)$$

onde  $T_s$  é o período de amostragem,  $\alpha$  é um escalar que tem a função de ajustar o peso do erro aumentado  $\varepsilon$  que é calculado da seguinte forma:  $\varepsilon_{(k)} = e_{1(k)} + \boldsymbol{\theta}_{(k)}^T \boldsymbol{\zeta}_{(k)} - W_m(z) \boldsymbol{\theta}_{(k)}^T \boldsymbol{\omega}_{(k)}$ .

A função de normalização  $\bar{m}_{(k)}$  que garante robustez ao controlador é expressa pela seguinte equação:

$$\bar{m}_{(k)}^2 = m_{(k)}^2 + m_{c(k)}^2, \quad (2.8)$$

onde

$$m_{(k)}^2 = \boldsymbol{\omega}_{(k)}^T \boldsymbol{\omega}_{(k)} + 1, \quad (2.9)$$

e

$$m_{c(k+1)}^2 = \delta_0 (m_{c(k)}^2 - 1) + |u_{(k)}|^2 + |y_{(k)}|^2 + 1, \quad m_{c(0)} = 1, \quad (2.10)$$

onde  $\boldsymbol{\omega}$  é um vetor auxiliar que contém os estados internos da planta. O vetor  $\boldsymbol{\omega}$  é descrito em detalhes nas seções posteriores. O sinal de normalização  $\bar{m}_{(k)}^2$  é baseado no trabalho de (STEFANELLO, 2010), de tal que modo que este normalizador torne o algoritmo robusto com respeito às dinâmicas não modeladas.

A função  $\sigma_{(k)}$  (*sigma-modification*) (IOANNOU; TSAKALIS, 1986a) é expressa por

$$\sigma_{(k)} = \begin{cases} 0 & \text{se } \|\boldsymbol{\theta}_{(k)}\| < M_0 \\ \sigma_0 \left( \frac{\|\boldsymbol{\theta}_{(k)}\|}{M_0} - 1 \right) & \text{se } M_0 \leq \|\boldsymbol{\theta}_{(k)}\| \leq 2M_0 \\ \sigma_0 & \text{se } \|\boldsymbol{\theta}_{(k)}\| > 2M_0 \end{cases}, \quad (2.11)$$

onde  $M_0$  e  $\sigma_0$  são parâmetros de projeto e  $\|\boldsymbol{\theta}_{(k)}\|$  é a norma euclidiana do vetor de parâmetros de controle (ou ganhos) estimado.

A seguinte matriz de covariância é proposta

$$\mathbf{P}_{(k)} \triangleq \mathbf{P}_{(k-1)} - \sigma_{(k)} T_s \mathbf{P}_{(k-1)}^2 - T_s \alpha \frac{\mathbf{P}_{(k-1)} \boldsymbol{\zeta}_{(k)} \boldsymbol{\zeta}_{(k)}^T \mathbf{P}_{(k-1)}}{\bar{m}_{(k)}^2} + \mathbf{B} T_s, \quad (2.12)$$

onde  $\mathbf{P} = \mathbf{P}^T > \mathbf{0}$  e  $\mathbf{B} = \beta \begin{bmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{bmatrix}$  (onde  $\beta$  é um parâmetro de projeto) e  $\boldsymbol{\zeta}_{(k)} = W_m(z) \boldsymbol{\omega}_{(k)}$ .

Diferentemente de (IOANNOU; TSAKALIS, 1986a), (LOZANO-LEAL; COLLADO;

MONDIÉ, 1990), (STEFANELLO; GRÜNDLING, 2010), (SALGADO; GOODWIN; MID-  
DLETON, 1988), (IOANNOU; TSAKALIS, 1986b) e (DATTA, 1993), esta tese propõe  
um algoritmo de adaptação de parâmetros (equações (2.7)-(2.12)) com as seguintes ca-  
racterísticas:

1) A equação para a atualização dos ganhos do controlador (2.7) possui a ação  
da função  $\sigma_{(k)}$  (*sigma-modification*) e a adição da constante  $\alpha$ . A função  $\sigma_{(k)}$  (*sigma-*  
*modification*) tem os objetivos de eliminar a ação integral e acelerar o processo de con-  
vergência do vetor de parâmetros  $\theta$  para uma faixa pré-definida. A constante  $\alpha$  tem a  
função de ajustar o peso do erro aumentado  $\varepsilon_{(k)}$ , deste, pode-se aumentar a velocidade  
de adaptação dos parâmetros  $\theta$ .

2) A equação (2.8) apresenta o normalizador  $\bar{m}_{(k)}^2$  como uma soma do sinal  $m^2$  e do  
sinal  $m_c^2$ . Neste trabalho é mostrado que apenas o sinal  $m$  (que é composto pelo vetor  $\omega$ )  
já é suficiente para limitar os sinais da malha fechada. Pelo fato do vetor  $\omega$  ser composto  
pelos estados internos da planta, tem-se um normalizador  $m$  que limita todos os sinais  
internos do sistema de controle.

3) A equação (2.12) apresenta a matriz de covariância com as seguintes caracterís-  
ticas: o termo  $-\sigma_{(k)}T_s\mathbf{P}^2_{(k-1)}$  contribui na convergência da matriz de covariância além de  
ser um termo facilitador para o desenvolvimento da prova de estabilidade; o termo  $\mathbf{B}T_s$   
garante que a matriz de covariância não se torne nula em regime permanente. A estrutura  
da matriz  $\mathbf{B}$  é tal que todos os elementos da matriz  $\mathbf{P}$  convergem para valores constantes  
em regime permanente. Deste modo, em regime permanente o algoritmo de identificação  
mantém-se operante.

### 2.2.2 Lei de controle e equação do erro aumentado: abordagem por realimentação de estados

A Figura 2.1 apresenta a estrutura do controlador com realimentação adaptativa  
de estados.

A equação em espaço de estados da parte modelada da planta em tempo discreto  
com ordem  $n_p > 0$  é expressa por

$$\begin{aligned}\mathbf{X}_{p(k+1)} &= \mathbf{A}_p\mathbf{X}_{p(k)} + \mathbf{B}_pu_{(k)}. \mathbf{X}_p \in \Re^{n_p \times 1}, u \in \Re \\ y_{p(k)} &= \mathbf{C}_p^T\mathbf{X}_{p(k)} + \mathbf{D}_pu_{(k)}, y_p \in \Re,\end{aligned}\tag{2.13}$$

onde  $\mathbf{X}_{p(0)}$  é a condição inicial do vetor de estados.

O modelo completo da planta, em espaço de estados, considerando os sinais  $\eta_a$  e  
 $\eta_m$ , conforme apresentado na figura 2.1, pode ser encontrado no Apêndice B.



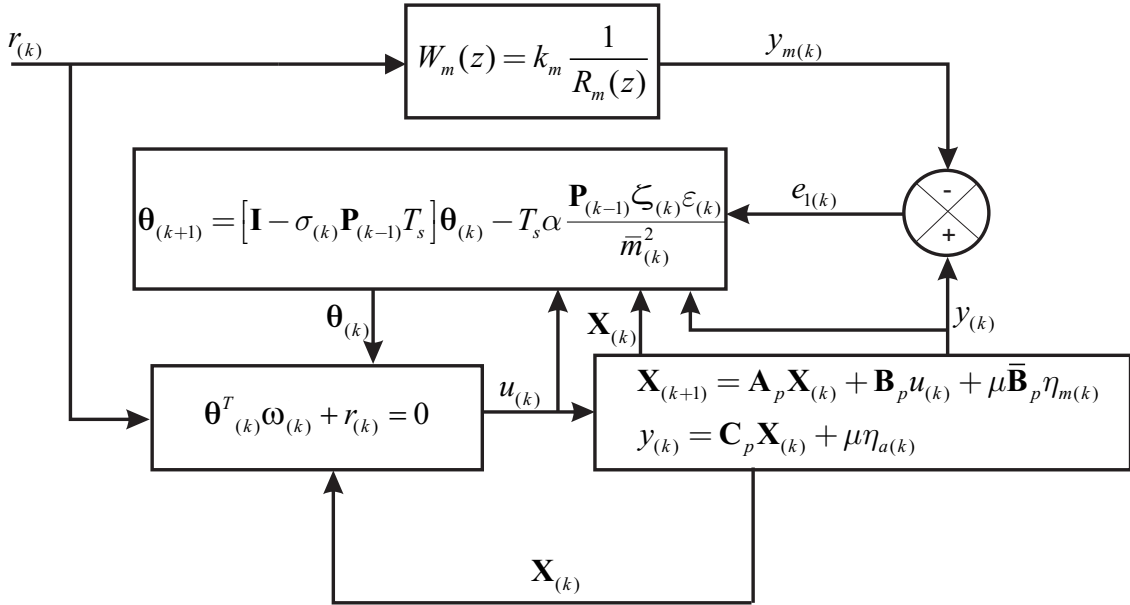


Figura 2.1 – Diagrama de blocos do controlador RMRAC com adaptador baseado no método RLS: realimentação de estados.

As seguintes hipóteses são assumidas:

**H8:** O par  $(\mathbf{A}_p, \mathbf{B}_p)$  é estabilizável;

**H9:**  $Z_p(z)$  é um polinômio Schur;

**H10:** O sinal de  $k_p$  é conhecido;

**H11:** O grau relativo de  $G_p(z)$  é conhecido.

O modelo de referência é escolhido como

$$W_m(z) = \frac{y_m(z)}{r(z)} = k_m \frac{1}{R_m(z)}. \quad (2.14)$$

A) *Estrutura com ganhos fixos*

Para uma planta conhecida, a lei de controle ideal que faz a planta se comportar como o modelo de referência pré-estabelecido, ou seja  $y = y_m$  é do tipo

$$\theta_u^* u(k) = -\theta_1^{*T} \mathbf{X}_{p(k)} - r(k). \quad (2.15)$$

Com  $-\theta_1^* \in \mathfrak{R}^{n_p}$  e  $\theta_u^* \in \mathfrak{R}$ . Para simplificar a análise é possível reescrever (2.15) como

$$u(k) = \mathbf{k}_1^{*T} \mathbf{X}_{p(k)} + k_2^* r(k). \quad (2.16)$$

Substituindo (2.16) em (2.5), a perfeita correspondência entre o sistema em malha fechada e o modelo de referência (2.14) é alcançado do seguinte modo

$$\mathbf{C}_p^T (z\mathbf{I} - \mathbf{A}_p - \mathbf{B}_p \mathbf{k}_1^{*T})^{-1} \mathbf{B}_p k_2^* = \frac{k_m}{R_m(z)}. \quad (2.17)$$

Na lei de controle por realimentação de estados (2.16), o objetivo é mover os pólos de malha fechada para as raízes de  $Z_p(z)$  (isto é, os zeros da planta em malha aberta), e os pólos restantes serão iguais às raízes de  $R_m(z)$ . Como resultado, as seguintes equações de casamento devem ser satisfeitas

$$\det(z\mathbf{I} - \mathbf{A}_p - \mathbf{B}_p \mathbf{k}_1^{*T})^{-1} = R_m(z)Z_p(z), k_2^* = \frac{k_m}{k_p}. \quad (2.18)$$

com  $\mathbf{C}_p^T \text{adj}(z\mathbf{I} - \mathbf{A}_p - \mathbf{B}_p \mathbf{k}_1^{*T})^{-1} \mathbf{B}_p = Z_p(z)$ .

O que implica em

$$\theta_1^* = \frac{\mathbf{k}_1^*}{k_2^*}, \theta_u^* = -\frac{1}{k_2^*}. \quad (2.19)$$

Quando os parâmetros da planta são conhecidos, os ganhos  $\theta_1^*$  e  $\theta_u^*$  podem ser facilmente computados. Em outro caso, eles devem ser estimados adaptativamente.

### B) Estrutura adaptativa

Considerando a representação de espaço de estados em tempo discreto (2.13), a lei de controle por realimentação de estados é expressa por

$$\theta_{u(k)} u(k) = -\theta_{1(k)}^T \mathbf{X}_{p(k)} - r(k). \quad (2.20)$$

A equação (2.20) pode se reescrita da seguinte forma

$$\theta_{1(k)}^T \mathbf{X}_{p(k)} + \theta_{u(k)} u(k) + r(k) = 0. \quad (2.21)$$

ou

$$\left(\theta_{1(k)}^T - \theta_1^{*T}\right) \mathbf{X}_{p(k)} + \left(\theta_{u(k)} - \theta_u^*\right) u(k) + r(k) = -\theta_1^{*T} \mathbf{X}_{p(k)} - \theta_u^* u(k). \quad (2.22)$$

A equação (2.22) pode ser reescrita como

$$\begin{bmatrix} \theta_{1(k)}^T - \theta_1^{*T} & \theta_{u(k)} - \theta_u^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{X}_{p(k)} \\ u(k) \end{bmatrix} + r(k) = -\theta_1^{*T} \mathbf{X}_{p(k)} - \theta_u^* u(k). \quad (2.23)$$

Agora, será definido o vetor erro paramétrico  $\phi_{(k)}^T$  e o vetor auxiliar  $\omega_{(k)}$  como

$$\phi_{(k)}^T = \begin{bmatrix} \theta_{1(k)}^T - \theta_1^{*T} & \theta_{u(k)} - \theta_u^* \end{bmatrix}, \omega_{(k)} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_{p(k)} \\ u(k) \end{bmatrix}. \quad (2.24)$$

Deste modo, reescreve-se (2.23) do seguinte modo

$$\phi_{(k)}^T \omega_{(k)} + r(k) = -\theta_1^{*T} \mathbf{X}_{p(k)} - \theta_u^* u(k). \quad (2.25)$$

Ou no domínio  $z$ , tem-se

$$\phi^T \omega + r = -\theta_1^{*T} (z\mathbf{I} - \mathbf{A}_p)^{-1} \mathbf{B}_p u - \theta_u^* u. \quad (2.26)$$

$$\boldsymbol{\phi}^T \boldsymbol{\omega} + r = \left( -\boldsymbol{\theta}_1^{*T} (z\mathbf{I} - \mathbf{A}_p)^{-1} \mathbf{B}_p - \theta_u^* \right) u. \quad (2.27)$$

Devido à controlabilidade da planta, em regime permanente assume-se que existe um vetor de ganhos

$$\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}^* = \begin{bmatrix} \theta_1^* \\ \theta_u^* \end{bmatrix}. \quad (2.28)$$

Tal que  $\boldsymbol{\phi}^T = \mathbf{0}$  e, conseqüentemente

$$r = \left( -\boldsymbol{\theta}_1^{*T} (z\mathbf{I} - \mathbf{A}_p)^{-1} \mathbf{B}_p - \theta_u^* \right) u. \quad (2.29)$$

Nesta estrutura de controlador é desejado que  $y = y_m$ , que significa  $\mathbf{C}_p^T (z\mathbf{I} - \mathbf{A}_p)^{-1} \mathbf{B}_p u = W_m r$ , que implica em

$$r = W_m^{-1} \mathbf{C}_p^T (z\mathbf{I} - \mathbf{A}_p)^{-1} \mathbf{B}_p u. \quad (2.30)$$

Substituindo (2.30) em (2.29), tem-se

$$\mathbf{C}_p^T (z\mathbf{I} - \mathbf{A}_p)^{-1} \mathbf{B}_p = W_m \left( -\boldsymbol{\theta}_1^{*T} (z\mathbf{I} - \mathbf{A}_p)^{-1} \mathbf{B}_p - \theta_u^* \right), \quad (2.31)$$

ou equivalentemente

$$G_p(z) = W_m \left( -\boldsymbol{\theta}_1^{*T} (z\mathbf{I} - \mathbf{A}_p)^{-1} \mathbf{B}_p - \theta_u^* \right). \quad (2.32)$$

Agora, substituindo (2.32) em (2.4), tem-se

$$y_{(k)} = \left[ W_m \left( -\boldsymbol{\theta}_1^{*T} (z\mathbf{I} - \mathbf{A}_p)^{-1} \mathbf{B}_p - \theta_u^* \right) \right] u_{(k)} + \left[ W_m \left( -\boldsymbol{\theta}_1^{*T} (z\mathbf{I} - \mathbf{A}_p)^{-1} \mathbf{B}_p - \theta_u^* \right) \right] \mu \Delta_m(z) u_{(k)} + \mu \Delta_a(z) u_{(k)}. \quad (2.33)$$

A equação (2.33) pode ser reescrita do seguinte modo

$$y_{(k)} = \left[ W_m \left( -\boldsymbol{\theta}_1^{*T} (z\mathbf{I} - \mathbf{A}_p)^{-1} \mathbf{B}_p - \theta_u^* \right) \right] u_{(k)} + \mu \eta_{(k)}, \quad (2.34)$$

onde

$$\eta_{(k)} = \Delta(z) u_{(k)}, \quad \Delta(z) = \left[ W_m \left( -\boldsymbol{\theta}_1^{*T} (z\mathbf{I} - \mathbf{A}_p)^{-1} \mathbf{B}_p - \theta_u^* \right) \Delta_m(z) + \Delta_a(z) \right]. \quad (2.35)$$

Substituindo (2.27) em (2.34), tem-se

$$y_{(k)} = W_m \left( \boldsymbol{\phi}_{(k)}^T \boldsymbol{\omega}_{(k)} + r_{(k)} \right) + \mu \eta_{(k)}. \quad (2.36)$$

Como  $e_{1(k)} = y_{(k)} - y_{m(k)}$  e  $y_{m(k)} = W_m(z)r_{(k)}$ , o erro de trajetória é expresso por

$$e_{1(k)} = y_{(k)} - y_{m(k)} = W_m(z) \boldsymbol{\phi}_{(k)}^T \boldsymbol{\omega}_{(k)} + \mu \eta_{(k)}. \quad (2.37)$$

Para se obter a equação do erro aumentado, pode-se utilizar a igualdade  $\boldsymbol{\theta}^{*T} W_m(z) \boldsymbol{\omega}(k) = W_m(z) \boldsymbol{\theta}^{*T} \boldsymbol{\omega}(k)$ , de onde se obtém

$$\boldsymbol{\phi}_{(k)}^T W_m(z) \boldsymbol{\omega}(k) - W_m(z) \boldsymbol{\phi}_{(k)}^T \boldsymbol{\omega}(k) = \boldsymbol{\theta}_{(k)}^T W_m(z) \boldsymbol{\omega}(k) - W_m(z) \boldsymbol{\theta}_{(k)}^T \boldsymbol{\omega}(k). \quad (2.38)$$

Para se obter a equação do erro aumentado, pode-se utilizar (2.38) e tem-se o erro aumentado

$$\varepsilon_{(k)} = e_{1(k)} + \boldsymbol{\theta}_{(k)}^T \boldsymbol{\zeta}_{(k)} - W_m(z) \boldsymbol{\theta}_{(k)}^T \boldsymbol{\omega}(k) = \boldsymbol{\phi}_{(k)}^T \boldsymbol{\zeta}_{(k)} + \mu \eta_{(k)}. \quad (2.39)$$

A expressão acima, ou seja,  $\varepsilon_{(k)} = e_{1(k)} + \boldsymbol{\theta}_{(k)}^T \boldsymbol{\zeta}_{(k)} - W_m(z) \boldsymbol{\theta}_{(k)}^T \boldsymbol{\omega}(k)$ , é uma forma computável de se calcular o erro aumentado.

### 2.2.3 Lei de controle e equação do erro aumentado: abordagem entrada-saída

A Figura 2.2 apresenta um diagrama de blocos do controlador RMRAC com o adaptador RLS modificado com abordagem entrada-saída.

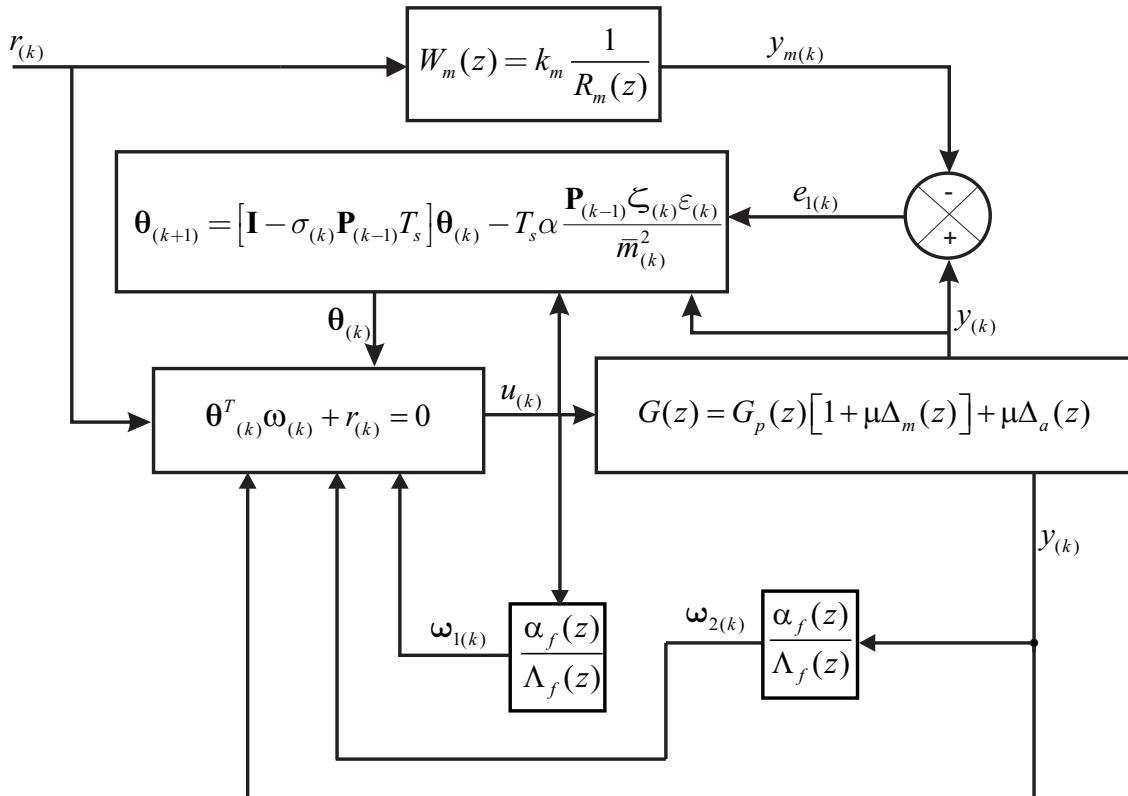


Figura 2.2 – Diagrama de blocos do controlador RMRAC com estimador de ganhos baseado no método RLS: entrada-saída.

Considere a seguinte equação

$$\boldsymbol{\theta}_{(k)}^T \boldsymbol{\omega}(k) + r_{(k)} = 0, \quad (2.40)$$

onde  $\boldsymbol{\theta}^T = [\boldsymbol{\theta}_1^T \boldsymbol{\theta}_2^T \theta_y \theta_u] \in \Re^{2n_p}$  é um vetor de parâmetros a ser ajustado usando o algoritmo de adaptação e  $\boldsymbol{\omega}^T = [\boldsymbol{\omega}_1^T \boldsymbol{\omega}_2^T y u] \in \Re^{2n_p}$ . Deste modo, a lei de controle é expressa da seguinte maneira

$$u_{(k)} = -\frac{\boldsymbol{\theta}_{1(k)}^T}{\theta_{u(k)}} \boldsymbol{\omega}_{1(k)} - \frac{\boldsymbol{\theta}_{2(k)}^T}{\theta_{u(k)}} \boldsymbol{\omega}_{2(k)} - \frac{\theta_{y(k)}}{\theta_{u(k)}} y_{(k)} - \frac{1}{\theta_{u(k)}} r_{(k)}. \quad (2.41)$$

A entrada da planta  $u_{(k)}$  e saída  $y_{(k)}$  são usadas para gerar os sinais filtrados  $\boldsymbol{\omega}_1, \boldsymbol{\omega}_2 \in \Re^{n_p-1}$  de acordo com

$$\boldsymbol{\omega}_{1(k)} = \frac{\alpha_f(z)}{\Lambda_f(z)} u_{(k)}, \quad \boldsymbol{\omega}_{2(k)} = \frac{\alpha_f(z)}{\Lambda_f(z)} y_{(k)}, \quad (2.42)$$

onde

$$\alpha_f(z) = [z^{n_p-2}, \dots, z, 1]^T, \quad \Lambda_f(z) = z^{n_p-1} + \lambda_{n_p-2} z^{n_p-1} + \dots + \lambda_1 z + \lambda_0,$$

e

$$\boldsymbol{\omega}(z) = \frac{\alpha_f(z)}{\Lambda_f(z)}, \quad (2.43)$$

onde  $\Lambda_f(z)$  é um polinômio estável. A representação de (2.42) em espaço de estados é expressa por

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega}_{1(k+1)} &= \mathbf{F} \boldsymbol{\omega}_{1(k)} + \mathbf{q} u_{(k)}, \quad \boldsymbol{\omega}_{1(0)} = \mathbf{0} \\ \boldsymbol{\omega}_{2(k+1)} &= \mathbf{F} \boldsymbol{\omega}_{2(k)} + \mathbf{q} y_{(k)}, \quad \boldsymbol{\omega}_{2(0)} = \mathbf{0} \end{aligned}, \quad (2.44)$$

onde  $\mathbf{F}$  é uma matriz quadrada estável e  $(\mathbf{F}, \mathbf{q})$  é um par controlável.

Definindo  $\boldsymbol{\phi}_{(k)} = \boldsymbol{\theta}_{(k)} - \boldsymbol{\theta}^*$  e subtraindo a parcela  $\boldsymbol{\theta}^{*T} \boldsymbol{\omega}_{(k)}$  de ambos os lados de (2.40), tem-se

$$\boldsymbol{\theta}_{(k)}^T \boldsymbol{\omega}_{(k)} - \boldsymbol{\theta}^{*T} \boldsymbol{\omega}_{(k)} + r_{(k)} = -\boldsymbol{\theta}^{*T} \boldsymbol{\omega}_{(k)},$$

como  $\boldsymbol{\theta}^{*T} = [\boldsymbol{\theta}_1^{*T} \boldsymbol{\theta}_2^{*T} \theta_y^* \theta_u^*]$ , obtém-se

$$\boldsymbol{\phi}_{(k)}^T \boldsymbol{\omega}_{(k)} + r_{(k)} = -[\boldsymbol{\theta}_1^{*T} \boldsymbol{\omega}_{1(k)} + \boldsymbol{\theta}_2^{*T} \boldsymbol{\omega}_{2(k)} + \theta_y^* y_{(k)} + \theta_u^* u_{(k)}]. \quad (2.45)$$

A partir de (2.42) e (2.44) pode ser obtida  $(z\mathbf{I} - \mathbf{F})^{-1} \mathbf{q} = \alpha_f(z)/\Lambda_f(z)$ . Usando esta igualdade na expressão dos filtro  $\boldsymbol{\omega}_1$  e  $\boldsymbol{\omega}_2$  de (2.42) e utilizando (2.4), (2.45) resulta em

$$\boldsymbol{\phi}_{(k)}^T \boldsymbol{\omega}_{(k)} + r_{(k)} = -[F_1(z) + F_2(z)G(z) + \theta_u^*] u_{(k)}, \quad (2.46)$$

onde

$$F_1(z) = \boldsymbol{\theta}_1^{*T} (z\mathbf{I} - \mathbf{F})^{-1} \mathbf{q}, \quad F_2(z) = \boldsymbol{\theta}_2^{*T} (z\mathbf{I} - \mathbf{F})^{-1} \mathbf{q} + \theta_y^* \quad .$$

Na ausência de dinâmicas não-modeladas e assumindo que  $\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}^*$ , têm-se que

$G(z) = G_p(z)$ ,  $\phi = \mathbf{0}$  e  $r_{(k)} = W_m(z)^{-1}G_p(z)u_{(k)}$ . Substituindo este resultado em (2.46), a parte modelada da planta é expressa por

$$G_p(z) = -W_m(z)[F_1(z) + F_2(z)G_p(z) + \theta_u^*]. \quad (2.47)$$

A partir da expressão de  $G_p(z)$  e usando o modelo (entrada-saída) completo da planta (2.4), o objetivo, agora, é obter a equação da saída  $y$  da planta em malha fechada. Então,  $G_p(z)$  (2.47) é substituído diretamente em (2.4) e  $+W_m(z)F_2(z)G(z)u_{(k)} - W_m(z)F_2(z)G(z)u_{(k)}$  é inserido na expressão. Após algumas operações algébricas, pode-se mostrar que

$$y_{(k)} = -W_m(z)[F_1(z) + F_2(z)G(z) + \theta_u^*]u_{(k)} - W_m(z)[F_1(z) + F_2(z)G_p(z) + \theta_u^*]\mu\Delta_m(z)u_{(k)} + \mu\Delta_a(z)u_{(k)} + W_m(z)F_2(z)[G(z) - G_p(z)]u_{(k)} \quad (2.48)$$

Usando a expressão  $G(z) - G_p(z) = G_p(z)\mu\Delta_m(z) + \mu\Delta_a(z)$ , a simplificação da expressão acima resulta em

$$y_{(k)} = -W_m(z)[F_1(z) + F_2(z)G(z) + \theta_u^*]u_{(k)} + \mu\eta_{(k)}, \quad (2.49)$$

onde

$$\eta_{(k)} = \Delta(z)u_{(k)}, \quad \Delta(z) = -W_m(z)[F_1(z) + F_2(z)G_p(z) + \theta_u^*]\Delta_m(z) + \Delta_a(z) + W_m(z)F_2(z)[G_p(z)\Delta_m(z) + \Delta_a(z)] \quad (2.50)$$

Substituindo (2.46) em (2.49), a saída da planta em malha fechada pode ser escrita como

$$y_{(k)} = W_m(z)\phi_{(k)}^T\omega_{(k)} + W_m(z)r_{(k)} + \mu\eta_{(k)}. \quad (2.51)$$

Como  $e_{1(k)} = y_{(k)} - y_{m(k)}$  e  $y_{m(k)} = W_m(z)r_{(k)}$ , o erro de trajetória é expresso por

$$e_{1(k)} = y_{(k)} - y_{m(k)} = W_m(z)\phi_{(k)}^T\omega_{(k)} + \mu\eta_{(k)}. \quad (2.52)$$

A partir de (2.52) e (2.38), tem-se o erro aumentado

$$\varepsilon_{(k)} = e_{1(k)} + \theta_{(k)}^T\zeta_{(k)} - W_m(z)\theta_{(k)}^T\omega_{(k)} = \phi_{(k)}^T\zeta_{(k)} + \mu\eta_{(k)}. \quad (2.53)$$

Então, conclui-se que, tanto na abordagem entrada-saída, quanto na abordagem por realimentação de estados, pode-se escrever o erro aumentado da mesma forma, como (2.39).

### 2.3 Análise de estabilidade robusta em tempo discreto

Esta seção descreve a prova de estabilidade do algoritmo RMRAC proposto, diretamente em tempo discreto. Inicialmente é apresentada a limitação da matriz de covariância  $\mathbf{P}$ .

#### 2.3.1 Limitação da matriz de covariância $\mathbf{P}$

Nesta seção, as análises para a determinação dos limites superior e inferior da matriz de covariância  $\mathbf{P}$  (2.12) e algumas restrições de projeto são apresentadas. Diferentemente de (SALGADO; GOODWIN; MIDDLETON, 1988), dois casos extremos são analisados: i)  $\sigma_{(k)} = 0$  e ii)  $\sigma_{(k)} = \sigma_0$ , vide equação (2.11). Estas análises são necessária para validação do controlador proposto. Esta análise é válida tanto para a abordagem por realimentação de estados quanto para a abordagem entrada-saída, já que o algoritmo de adaptação de parâmetros é o mesmo.

**Teorema 1.** *Seja a matriz de covariância  $\mathbf{P}$  (2.12) de dimensão  $n_d \times n_d$ , onde  $\sigma_{(k)} = \sigma_0$ . Neste caso, a matriz  $\mathbf{P}$  é limitada inferiormente e superiormente, ou seja  $p_{\min} \mathbf{I} \leq \mathbf{P}_{(k)} \leq p_{\max} \mathbf{I}$ , se as seguintes restrições de projeto forem satisfeitas*

$$0 < \alpha T_s < 1 \quad (2.54)$$

$$p_{\min} = \frac{-\alpha + \sqrt{\alpha^2 + 4\sigma_0 n_d \beta}}{2\sigma_0} \quad (2.55)$$

$$p_{\max} \leq \frac{1}{2\sigma_0 T_s} \quad (2.56)$$

$$\bar{\mathbf{B}} = \left[ -\frac{1}{4\sigma_0 T_s} \mathbf{I} + \mathbf{B} T_s \right] \leq 0 \quad (2.57)$$

$$p_{\min} \mathbf{I} \leq \mathbf{P}_{(0)} \leq p_{\max} \mathbf{I} \quad (2.58)$$

*Demonstração.* Primeiramente, é subtraído  $p_{\max} \mathbf{I}$  de ambos os lados de (2.12)

$$\left[ \mathbf{P}_{(k)} - p_{\max} \mathbf{I} \right] = \left[ \mathbf{P}_{(k-1)} - p_{\max} \mathbf{I} \right] - \sigma_{(k)} T_s \mathbf{P}_{(k-1)}^2 - T_s \alpha \frac{\mathbf{P}_{(k-1)} \check{\boldsymbol{\zeta}}_{(k)} \check{\boldsymbol{\zeta}}_{(k)}^T \mathbf{P}_{(k-1)}}{\bar{m}_{(k)}^2} + \mathbf{B} T_s \quad (2.59)$$

É possível escrever (2.59) como

$$\left[ \mathbf{P}_{(k)} - p_{\max} \mathbf{I} \right] = T_{(k)} - \sigma_{(k)} T_s \left[ \mathbf{P}_{(k-1)} - p_{\max} \mathbf{I} \right] \left[ \mathbf{P}_{(k-1)} - p_{\max} \mathbf{I} \right] - \mathbf{G}_{(k)} \quad (2.60)$$

onde

$$\mathbf{G}_{(k)} = T_s \alpha \frac{\mathbf{P}_{(k-1)} \boldsymbol{\zeta}_{(k)} \boldsymbol{\zeta}_{(k)}^T \mathbf{P}_{(k-1)}}{\bar{m}_{(k)}^2} \geq 0 \quad (2.61)$$

e

$$T_{(k)} = [\mathbf{P}_{(k-1)} - p_{\max} \mathbf{I}] - 2\sigma_{(k)} T_s \mathbf{P}_{(k-1)} p_{\max} + \sigma_{(k)} T_s (p_{\max} \mathbf{I})^2 + \mathbf{B} T_s \quad (2.62)$$

Desenvolvendo(2.62), pode-se escrever

$$T_{(k)} = a [\mathbf{P}_{(k-1)} - p_{\max} \mathbf{I}] + \bar{\mathbf{B}} \quad (2.63)$$

onde

$$a = [1 - 2\sigma_{(k)} T_s p_{\max}] \geq 0 \quad (2.64)$$

e

$$\bar{\mathbf{B}} = [-\sigma_{(k)} T_s (p_{\max} \mathbf{I})^2 + \mathbf{B} T_s] \leq 0. \quad (2.65)$$

A partir de (2.64) e  $\sigma_{(k)} = \sigma_0$  é possível obter (2.56). Substituindo (2.56) em (2.65) e considerando  $\sigma_{(k)} = \sigma_0$  pode-se obter (2.57). Assim, substituindo (2.63) em (2.60), pode-se obter

$$[\mathbf{P}_{(k)} - p_{\max} \mathbf{I}] = a [\mathbf{P}_{(k-1)} - p_{\max} \mathbf{I}] + \bar{\mathbf{B}} - \sigma_{(k)} T_s [\mathbf{P}_{(k-1)} - p_{\max} \mathbf{I}] [\mathbf{P}_{(k-1)} - p_{\max} \mathbf{I}] - \mathbf{G}_{(k)} \quad (2.66)$$

Então, devido a (2.61), (2.64) e (2.65),  $\mathbf{P}_{(k-1)} \leq p_{\max} \mathbf{I}$  implica que  $\mathbf{P}_{(k)} \leq p_{\max} \mathbf{I}$ .

Para resolver  $\mathbf{P}_{(k)} \geq p_{\min} \mathbf{I}$ , nota-se que a partir de (2.61) e (2.8) pode-se escrever a seguinte desigualdade

$$T_s \alpha \frac{\mathbf{P}_{(k-1)} \boldsymbol{\zeta}_{(k)} \boldsymbol{\zeta}_{(k)}^T \mathbf{P}_{(k-1)}}{\bar{m}_{(k)}^2} \geq \alpha T_s \mathbf{P}_{(k-1)} \quad (2.67)$$

e substituindo (2.67) em (2.12), pode-se obter

$$\mathbf{P}_{(k)} \geq \mathbf{P}_{(k-1)} - \alpha T_s \mathbf{P}_{(k-1)} - \sigma_{(k)} T_s \mathbf{P}_{(k-1)}^2 + \mathbf{B} T_s \quad (2.68)$$

Seja  $\lambda_{(k)}$  o mínimo autovalor de  $\mathbf{P}_{(k)}$ , então a partir de (2.68) pode-se escrever

$$\lambda_{(k)} \geq \min_{\psi \in [\lambda_{(k-1)}, p_{\max}]} \{n_d \beta T_s + \psi (1 - \alpha T_s) - \sigma_{(k)} T_s \psi^2\}. \quad (2.69)$$

É possível demonstrar por indução que  $\lambda_{(k-1)} \geq p_{\min}$  e assim pode-se escrever

$$\lambda_{(k)} \geq \min_{\psi \in [p_{\min}, p_{\max}]} \{n_d \beta T_s + \psi (1 - \alpha T_s) - \sigma_{(k)} T_s \psi^2\} = \min \{p_{\min}, (1 - \alpha T_s) p_{\max}\} = p_{\min} \quad (2.70)$$

A partir da restrição (2.54), tem-se  $(1 - \alpha T_s) p_{\max} > p_{\min}$ . Então, fazendo  $\psi = p_{\min}$ , pode-se escrever (2.70) da seguinte forma

$$n_d \beta T_s + p_{\min} (1 - \alpha T_s) - \sigma_{(k)} T_s p_{\min}^2 = p_{\min} \quad (2.71)$$



Resolvendo (2.71), considerando  $\sigma_{(k)} = \sigma_0$ , pode-se obter a restrição (2.55).

Assim, devido às restrições (2.54)-(2.58), pode-se concluir que a inequação  $p_{\min}\mathbf{I} \leq \mathbf{P}_{(k)} \leq p_{\max}\mathbf{I}$  é garantida por todo o tempo, ou seja, a matriz de covariância  $\mathbf{P}$  é limitada superiormente por  $p_{\max}\mathbf{I}$  e inferiormente por  $p_{\min}\mathbf{I}$ .

□

**Teorema 2.** *Seja a matriz de covariância  $\mathbf{P}$  (2.12) de dimensão  $n_d \times n_d$ , onde  $\sigma_{(k)} = 0$ . Neste caso, a matriz  $\mathbf{P}$  é limitada inferiormente e superiormente, ou seja  $p_{\min}\mathbf{I} \leq \mathbf{P}_{(k)} \leq p_{\max}\mathbf{I}$ , se as seguintes restrições de projeto forem satisfeitas*

$$0 < \alpha T_s < 1 \quad (2.72)$$

$$p_{\min} = \frac{n_d \beta}{\alpha} \quad (2.73)$$

$$p_{\max}\mathbf{I} \geq 2\mathbf{B}T_s \quad (2.74)$$

$$p_{\min}\mathbf{I} \leq \mathbf{P}_{(0)} \leq p_{\max}\mathbf{I} \quad (2.75)$$

*Demonstração.* Para demonstrar que  $\mathbf{P}_{(k)} \leq p_{\max}\mathbf{I}$ , segue-se os mesmos passos do teorema 1.

A partir de (2.64), pode-se escrever

$$\sigma_{(k)} T_s p_{\max}^2 \leq \frac{p_{\max}}{2}. \quad (2.76)$$

Substituindo (2.76) em (2.65), pode-se obter (2.74).

Para provar que  $\mathbf{P}_{(k)} \geq p_{\min}\mathbf{I}$ , pode-se usar (2.69) juntamente com  $\sigma_{(k)} = 0$  e obter

$$\lambda_{(k)} \geq \min_{\psi \in [p_{\min}, p_{\max}]} \{n_d \beta T_s + \psi(1 - \alpha T_s)\} = \min \{p_{\min}, (1 - \alpha T_s) p_{\max}\} = p_{\min} \quad (2.77)$$

A partir da restrição (2.72), tem-se  $(1 - \alpha T_s) p_{\max} > p_{\min}$ . Então, fazendo  $\psi = p_{\min}$ , pode-se escrever (2.77) da seguinte forma

$$n_d \beta T_s + p_{\min}(1 - \alpha T_s) = p_{\min} \quad (2.78)$$

Resolvendo (2.78), pode-se obter a restrição (2.73).

Assim, devido às restrições (2.72)-(2.75), pode-se concluir que a inequação  $p_{\min}\mathbf{I} \leq \mathbf{P}_{(k)} \leq p_{\max}\mathbf{I}$  é garantida  $\forall k$ . Ou seja, a matriz de covariância  $\mathbf{P}$  é limitada superiormente por  $p_{\max}\mathbf{I}$  e inferiormente por  $p_{\min}\mathbf{I}$ .

□

Devido ao fato de que  $\sigma_{(k)} \in (0, \sigma_0)$ , os Teoremas 1 e 2 devem ser obedecidos

mutuamente.

### 2.3.2 Limitação do vetor de erro de parâmetros $\phi$

O teorema a seguir apresenta a limitação do vetor  $\phi$  (erro de parâmetros). Esta análise é válida tanto para a abordagem por realimentação de estados quanto à abordagem entrada-saída.

**Teorema 3.** *Seja a planta expressa por (2.4), sujeita às hipóteses H1-H7, que utiliza a lei de controle (2.40) e o algoritmo de adaptação paramétrica (2.7)-(2.12). Então, este algoritmo de adaptação é estável e capaz de encontrar um vetor de parâmetros para a lei de controle que estabiliza a planta se as seguintes restrições forem satisfeitas*

$$M_0 > \sqrt{\boldsymbol{\theta}^{*T} \left[ \mathbf{I} + c^2 T_s \mathbf{B} + c T_s \sigma_0 \mathbf{P}_{(0)} \right] \boldsymbol{\theta}^*}, \quad (2.79)$$

$$\mu \leq 1, \quad (2.80)$$

$$\mathbf{L} = \left\{ \mathbf{B} - T_s \mathbf{B} [p_{\min}]^{-1} \mathbf{B} - T_s \sigma_0 \mathbf{B} - T_s \alpha \mathbf{B} \right\} \geq \mathbf{0}, \quad (2.81)$$

onde  $c$ ,  $\sigma_0$ ,  $\mathbf{P}_{(0)}$ ,  $p_{\min}$ ,  $\alpha$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $M_0$  e  $T_s$  são parâmetros a serem projetados.

*Demonstração.* Inicialmente, algumas deduções importantes são realizadas para o desenvolvimento da prova de estabilidade.

Substituindo (2.53) em (2.7), obtém-se,

$$\boldsymbol{\theta}_{(k+1)} = \boldsymbol{\theta}_{(k)} - \sigma_{(k)} T_s \mathbf{P}_{(k-1)} \boldsymbol{\theta}_{(k)} - T_s \alpha \frac{\mathbf{P}_{(k-1)} \boldsymbol{\zeta}_{(k)} \left[ \boldsymbol{\zeta}_{(k)}^T \boldsymbol{\phi}_{(k)} + \mu \eta_{(k)} \right]}{\bar{m}_{(k)}^2}. \quad (2.82)$$

Subtraindo  $\boldsymbol{\theta}^*$  de ambos os lados de (2.82), tem-se

$$\boldsymbol{\theta}_{(k+1)} - \boldsymbol{\theta}^* = \boldsymbol{\theta}_{(k)} - \boldsymbol{\theta}^* - \sigma_{(k)} T_s \mathbf{P}_{(k-1)} \boldsymbol{\theta}_{(k)} - T_s \alpha \frac{\mathbf{P}_{(k-1)} \boldsymbol{\zeta}_{(k)} \left[ \boldsymbol{\zeta}_{(k)}^T \boldsymbol{\phi}_{(k)} + \mu \eta_{(k)} \right]}{\bar{m}_{(k)}^2}. \quad (2.83)$$

Então, pode-se escrever,

$$\boldsymbol{\phi}_{(k+1)} = \boldsymbol{\phi}_{(k)} - \sigma_{(k)} T_s \mathbf{P}_{(k-1)} \boldsymbol{\theta}_{(k)} - T_s \alpha \frac{\mathbf{P}_{(k-1)} \boldsymbol{\zeta}_{(k)} \left[ \boldsymbol{\zeta}_{(k)}^T \boldsymbol{\phi}_{(k)} + \mu \eta_{(k)} \right]}{\bar{m}_{(k)}^2}. \quad (2.84)$$

Somando e subtraindo a parcela  $\sigma_{(k)}T_s\mathbf{P}_{(k-1)}\boldsymbol{\theta}^*$  no lado direito de (2.84), tem-se

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\phi}_{(k+1)} = \boldsymbol{\phi}_{(k)} - \sigma_{(k)}T_s\mathbf{P}_{(k-1)}\boldsymbol{\theta}_{(k)} + \sigma_{(k)}T_s\mathbf{P}_{(k-1)}\boldsymbol{\theta}^* - T_s\alpha \frac{\mathbf{P}_{(k-1)}\boldsymbol{\zeta}_{(k)} \left[ \boldsymbol{\zeta}_{(k)}^T \boldsymbol{\phi}_{(k)} + \mu\eta_{(k)} \right]}{\bar{m}_{(k)}^2} \\ - \sigma_{(k)}T_s\mathbf{P}_{(k-1)}\boldsymbol{\theta}^* \end{aligned} \quad (2.85)$$

ou ainda,

$$\boldsymbol{\phi}_{(k+1)} = \boldsymbol{\phi}_{(k)} - \sigma_{(k)}T_s\mathbf{P}_{(k-1)}\boldsymbol{\phi}_{(k)} - T_s\alpha \frac{\mathbf{P}_{(k-1)}\boldsymbol{\zeta}_{(k)} \left[ \boldsymbol{\zeta}_{(k)}^T \boldsymbol{\phi}_{(k)} + \mu\eta_{(k)} \right]}{\bar{m}_{(k)}^2} - \sigma_{(k)}T_s\mathbf{P}_{(k-1)}\boldsymbol{\theta}^*. \quad (2.86)$$

Reescrevendo (2.86), tem-se

$$\boldsymbol{\phi}_{(k+1)} = \left[ \mathbf{I} - \sigma_{(k)}T_s\mathbf{P}_{(k-1)} - T_s\alpha \frac{\mathbf{P}_{(k-1)}\boldsymbol{\zeta}_{(k)}\boldsymbol{\zeta}_{(k)}^T}{\bar{m}_{(k)}^2} \right] \boldsymbol{\phi}_{(k)} - \sigma_{(k)}T_s\mathbf{P}_{(k-1)}\boldsymbol{\theta}^* - T_s\alpha \frac{\mathbf{P}_{(k-1)}\boldsymbol{\zeta}_{(k)}\mu\eta_{(k)}}{\bar{m}_{(k)}^2}. \quad (2.87)$$

De (2.12), tem-se também

$$\mathbf{P}_{(k)} = \left[ \mathbf{I} - \sigma_{(k)}T_s\mathbf{P}_{(k-1)} - T_s\alpha \frac{\mathbf{P}_{(k-1)}\boldsymbol{\zeta}_{(k)}\boldsymbol{\zeta}_{(k)}^T}{\bar{m}_{(k)}^2} \right] \mathbf{P}_{(k-1)} + \mathbf{B}T_s. \quad (2.88)$$

Pós-multiplicando (2.88) por  $[\mathbf{P}_{(k-1)}]^{-1}$ , resulta

$$\mathbf{P}_{(k)} [\mathbf{P}_{(k-1)}]^{-1} = \left[ \mathbf{I} - \sigma_{(k)}T_s\mathbf{P}_{(k-1)} - T_s\alpha \frac{\mathbf{P}_{(k-1)}\boldsymbol{\zeta}_{(k)}\boldsymbol{\zeta}_{(k)}^T}{\bar{m}_{(k)}^2} \right] + \mathbf{B}T_s [\mathbf{P}_{(k-1)}]^{-1}, \quad (2.89)$$

ou

$$\mathbf{P}_{(k)} [\mathbf{P}_{(k-1)}]^{-1} - \mathbf{B}T_s [\mathbf{P}_{(k-1)}]^{-1} = \left[ \mathbf{I} - \sigma_{(k)}T_s\mathbf{P}_{(k-1)} - T_s\alpha \frac{\mathbf{P}_{(k-1)}\boldsymbol{\zeta}_{(k)}\boldsymbol{\zeta}_{(k)}^T}{\bar{m}_{(k)}^2} \right]. \quad (2.90)$$

Substituindo (2.90) em (2.87), tem-se

$$\boldsymbol{\phi}_{(k+1)} = \left\{ \mathbf{P}_{(k)} [\mathbf{P}_{(k-1)}]^{-1} - \mathbf{B}T_s [\mathbf{P}_{(k-1)}]^{-1} \right\} \boldsymbol{\phi}_{(k)} - \sigma_{(k)}T_s\mathbf{P}_{(k-1)}\boldsymbol{\theta}^* - T_s\alpha \frac{\mathbf{P}_{(k-1)}\boldsymbol{\zeta}_{(k)}\mu\eta_{(k)}}{\bar{m}_{(k)}^2}, \quad (2.91)$$

ou

$$\boldsymbol{\phi}_{(k+1)} = \mathbf{P}_{(k)} [\mathbf{P}_{(k-1)}]^{-1} \boldsymbol{\phi}_{(k)} - \mathbf{B}T_s [\mathbf{P}_{(k-1)}]^{-1} \boldsymbol{\phi}_{(k)} - \sigma_{(k)}T_s\mathbf{P}_{(k-1)}\boldsymbol{\theta}^* - T_s\alpha \frac{\mathbf{P}_{(k-1)}\boldsymbol{\zeta}_{(k)}\mu\eta_{(k)}}{\bar{m}_{(k)}^2}. \quad (2.92)$$

Pré-multiplicando (2.92) por  $[\mathbf{P}_{(k)}]^{-1}$ , advém

$$\begin{aligned} [\mathbf{P}_{(k)}]^{-1} \phi_{(k+1)} &= [\mathbf{P}_{(k-1)}]^{-1} \phi_{(k)} - T_s [\mathbf{P}_{(k)}]^{-1} \mathbf{B} [\mathbf{P}_{(k-1)}]^{-1} \phi_{(k)} - \sigma_{(k)} T_s [\mathbf{P}_{(k)}]^{-1} \mathbf{P}_{(k-1)} \boldsymbol{\theta}^* \\ &\quad - T_s \alpha [\mathbf{P}_{(k)}]^{-1} \frac{\mathbf{P}_{(k-1)} \boldsymbol{\zeta}_{(k)} \mu \eta_{(k)}}{\bar{m}_{(k)}^2}. \end{aligned} \quad (2.93)$$

Transpondo (2.93), resulta

$$\begin{aligned} \phi_{(k+1)}^T [\mathbf{P}_{(k)}]^{-1} &= \phi_{(k)}^T [\mathbf{P}_{(k-1)}]^{-1} - T_s \phi_{(k)}^T [\mathbf{P}_{(k-1)}]^{-1} \mathbf{B} [\mathbf{P}_{(k)}]^{-1} - \sigma_{(k)} T_s \boldsymbol{\theta}^{*T} \mathbf{P}_{(k-1)} [\mathbf{P}_{(k)}]^{-1} \\ &\quad - T_s \alpha \mu \eta_{(k)} \frac{\boldsymbol{\zeta}_{(k)}^T \mathbf{P}_{(k-1)} [\mathbf{P}_{(k)}]^{-1}}{\bar{m}_{(k)}^2}. \end{aligned} \quad (2.94)$$

Escolhendo uma candidata a função de Lyapunov:

$$V_{(k)} = \phi_{(k)}^T [\mathbf{P}_{(k-1)}]^{-1} \phi_{(k)}. \quad (2.95)$$

Para garantir a estabilidade do algoritmo RMRAC, na presença de dinâmicas não-modeladas, deve-se garantir que

$$V_{(k)} \leq \bar{V}_{(k)}, \quad (2.96)$$

onde  $\bar{V}_{(k)}$  tem valor limitado.

Utilizando (2.95), a variação  $\Delta V_{(k)}$  pode ser expressa da seguinte maneira

$$\Delta V_{(k)} = V_{(k+1)} - V_{(k)} = \phi_{(k+1)}^T [\mathbf{P}_{(k)}]^{-1} \phi_{(k+1)} - \phi_{(k)}^T [\mathbf{P}_{(k-1)}]^{-1} \phi_{(k)}. \quad (2.97)$$

Substituindo (2.93) em (2.97), tem-se

$$\begin{aligned} \Delta V_{(k)} &= \phi_{(k+1)}^T \left\{ \begin{array}{l} [\mathbf{P}_{(k-1)}]^{-1} \phi_{(k)} - T_s [\mathbf{P}_{(k)}]^{-1} \mathbf{B} [\mathbf{P}_{(k-1)}]^{-1} \phi_{(k)} \\ - \sigma_{(k)} T_s [\mathbf{P}_{(k)}]^{-1} \mathbf{P}_{(k-1)} \boldsymbol{\theta}^* - T_s \alpha \frac{[\mathbf{P}_{(k)}]^{-1} \mathbf{P}_{(k-1)} \boldsymbol{\zeta}_{(k)} \mu \eta_{(k)}}{\bar{m}_{(k)}^2} \end{array} \right\} \\ &\quad - \phi_{(k)}^T [\mathbf{P}_{(k-1)}]^{-1} \phi_{(k)}. \end{aligned} \quad (2.98)$$

Desenvolvendo (2.98), tem-se

$$\begin{aligned} \Delta V_{(k)} &= \phi_{(k+1)}^T [\mathbf{P}_{(k-1)}]^{-1} \phi_{(k)} - T_s \phi_{(k+1)}^T [\mathbf{P}_{(k)}]^{-1} \mathbf{B} [\mathbf{P}_{(k-1)}]^{-1} \phi_{(k)} \\ &\quad - \sigma_{(k)} T_s \phi_{(k+1)}^T [\mathbf{P}_{(k)}]^{-1} \mathbf{P}_{(k-1)} \boldsymbol{\theta}^* - T_s \alpha \phi_{(k+1)}^T \frac{[\mathbf{P}_{(k)}]^{-1} \mathbf{P}_{(k-1)} \boldsymbol{\zeta}_{(k)} \mu \eta_{(k)}}{\bar{m}_{(k)}^2} - \phi_{(k)}^T [\mathbf{P}_{(k-1)}]^{-1} \phi_{(k)}. \end{aligned} \quad (2.99)$$

que pode ser reescrita como,

$$\begin{aligned} \Delta V_{(k)} = & \left\{ \phi_{(k+1)}^T - \phi_{(k)}^T \right\} \left[ \mathbf{P}_{(k-1)} \right]^{-1} \phi_{(k)} - T_s \phi_{(k+1)}^T \left[ \mathbf{P}_{(k)} \right]^{-1} \mathbf{B} \left[ \mathbf{P}_{(k-1)} \right]^{-1} \phi_{(k)} \\ & - \sigma_{(k)} T_s \phi_{(k+1)}^T \left[ \mathbf{P}_{(k)} \right]^{-1} \mathbf{P}_{(k-1)} \boldsymbol{\theta}^* - T_s \alpha \phi_{(k+1)}^T \left[ \mathbf{P}_{(k)} \right]^{-1} \frac{\mathbf{P}_{(k-1)} \boldsymbol{\zeta}_{(k)} \mu \eta_{(k)}}{\bar{m}_{(k)}^2}. \end{aligned} \quad (2.100)$$

Transpondo (2.86) e desenvolvendo-o, tem-se também

$$\phi_{(k+1)}^T - \phi_{(k)}^T = -\sigma_{(k)} T_s \boldsymbol{\theta}_{(k)}^T \mathbf{P}_{(k-1)} - T_s \alpha \frac{\phi_{(k)}^T \boldsymbol{\zeta}_{(k)} \boldsymbol{\zeta}_{(k)}^T \mathbf{P}_{(k-1)}}{\bar{m}_{(k)}^2} - T_s \alpha \mu \eta_{(k)} \frac{\boldsymbol{\zeta}_{(k)}^T \mathbf{P}_{(k-1)}}{\bar{m}_{(k)}^2}. \quad (2.101)$$

Substituindo (2.101) e (2.94) em (2.100), resulta

$$\begin{aligned} \Delta V_{(k)} = & \left\{ \begin{array}{l} -\sigma_{(k)} T_s \boldsymbol{\theta}_{(k)}^T \mathbf{P}_{(k-1)} - T_s \alpha \frac{\phi_{(k)}^T \boldsymbol{\zeta}_{(k)} \boldsymbol{\zeta}_{(k)}^T \mathbf{P}_{(k-1)}}{\bar{m}_{(k)}^2} \\ -T_s \alpha \mu \eta_{(k)} \frac{\boldsymbol{\zeta}_{(k)}^T \mathbf{P}_{(k-1)}}{\bar{m}_{(k)}^2} \end{array} \right\} \left[ \mathbf{P}_{(k-1)} \right]^{-1} \phi_{(k)} \\ -T_s & \left\{ \begin{array}{l} \phi_{(k)}^T \left[ \mathbf{P}_{(k-1)} \right]^{-1} - T_s \phi_{(k)}^T \left[ \mathbf{P}_{(k-1)} \right]^{-1} \mathbf{B} \left[ \mathbf{P}_{(k)} \right]^{-1} \\ -\sigma_{(k)} T_s \boldsymbol{\theta}^{*T} \mathbf{P}_{(k-1)} \left[ \mathbf{P}_{(k)} \right]^{-1} - T_s \alpha \mu \eta_{(k)} \frac{\boldsymbol{\zeta}_{(k)}^T \mathbf{P}_{(k-1)} \left[ \mathbf{P}_{(k)} \right]^{-1}}{\bar{m}_{(k)}^2} \end{array} \right\} \mathbf{B} \left[ \mathbf{P}_{(k-1)} \right]^{-1} \phi_{(k)} \\ -\sigma_{(k)} T_s & \left\{ \begin{array}{l} \phi_{(k)}^T \left[ \mathbf{P}_{(k-1)} \right]^{-1} - T_s \phi_{(k)}^T \left[ \mathbf{P}_{(k-1)} \right]^{-1} \mathbf{B} \left[ \mathbf{P}_{(k)} \right]^{-1} \\ -\sigma_{(k)} T_s \boldsymbol{\theta}^{*T} \mathbf{P}_{(k-1)} \left[ \mathbf{P}_{(k)} \right]^{-1} - T_s \alpha \mu \eta_{(k)} \frac{\boldsymbol{\zeta}_{(k)}^T \mathbf{P}_{(k-1)} \left[ \mathbf{P}_{(k)} \right]^{-1}}{\bar{m}_{(k)}^2} \end{array} \right\} \mathbf{P}_{(k-1)} \boldsymbol{\theta}^* \\ -T_s \alpha & \left\{ \begin{array}{l} \phi_{(k)}^T \left[ \mathbf{P}_{(k-1)} \right]^{-1} - T_s \phi_{(k)}^T \left[ \mathbf{P}_{(k-1)} \right]^{-1} \mathbf{B} \left[ \mathbf{P}_{(k)} \right]^{-1} \\ -\sigma_{(k)} T_s \boldsymbol{\theta}^{*T} \mathbf{P}_{(k-1)} \left[ \mathbf{P}_{(k)} \right]^{-1} - T_s \alpha \mu \eta_{(k)} \frac{\boldsymbol{\zeta}_{(k)}^T \mathbf{P}_{(k-1)} \left[ \mathbf{P}_{(k)} \right]^{-1}}{\bar{m}_{(k)}^2} \end{array} \right\} \frac{\mathbf{P}_{(k-1)} \boldsymbol{\zeta}_{(k)} \mu \eta_{(k)}}{\bar{m}_{(k)}^2} \end{aligned} \quad (2.102)$$

Desenvolvendo (2.102), tem-se ainda

$$\Delta V_{(k)} = \left\{ -T_s \sigma_{(k)} \boldsymbol{\theta}_{(k)}^T \boldsymbol{\phi}_{(k)} - T_s \alpha \boldsymbol{\phi}_{(k)}^T \frac{\boldsymbol{\zeta}_{(k)} \boldsymbol{\zeta}_{(k)}^T}{\bar{m}_{(k)}^2} \boldsymbol{\phi}_{(k)} - T_s \alpha \mu \frac{\eta_{(k)} \boldsymbol{\zeta}_{(k)}^T \boldsymbol{\phi}_{(k)}}{\bar{m}_{(k)}^2} \right\} +$$

$$\left\{ \begin{array}{l} -T_s \boldsymbol{\phi}_{(k)}^T [\mathbf{P}_{(k-1)}]^{-1} \mathbf{B} [\mathbf{P}_{(k-1)}]^{-1} \boldsymbol{\phi}_{(k)} \\ +T_s^2 \boldsymbol{\phi}_{(k)}^T [\mathbf{P}_{(k-1)}]^{-1} \mathbf{B} [\mathbf{P}_{(k)}]^{-1} \mathbf{B} [\mathbf{P}_{(k-1)}]^{-1} \boldsymbol{\phi}_{(k)} \\ +T_s^2 \sigma_{(k)} \boldsymbol{\theta}^{*T} \mathbf{P}_{(k-1)} [\mathbf{P}_{(k)}]^{-1} \mathbf{B} [\mathbf{P}_{(k-1)}]^{-1} \boldsymbol{\phi}_{(k)} \\ +T_s^2 \alpha \mu \frac{\eta_{(k)} \boldsymbol{\zeta}_{(k)}^T \mathbf{P}_{(k-1)} [\mathbf{P}_{(k)}]^{-1} \mathbf{B} [\mathbf{P}_{(k-1)}]^{-1} \boldsymbol{\phi}_{(k)}}{\bar{m}_{(k)}^2} \end{array} \right\} +$$

$$\left\{ \begin{array}{l} -T_s \sigma_{(k)} \boldsymbol{\phi}_{(k)}^T \boldsymbol{\theta}^* \\ +T_s^2 \sigma_{(k)} \boldsymbol{\phi}_{(k)}^T [\mathbf{P}_{(k-1)}]^{-1} \mathbf{B} [\mathbf{P}_{(k)}]^{-1} \mathbf{P}_{(k-1)} \boldsymbol{\theta}^* \\ + [T_s \sigma_{(k)}]^2 \boldsymbol{\theta}^{*T} \mathbf{P}_{(k-1)} [\mathbf{P}_{(k)}]^{-1} \mathbf{P}_{(k-1)} \boldsymbol{\theta}^* \\ +T_s^2 \sigma_{(k)} \alpha \mu \frac{\eta_{(k)} \boldsymbol{\zeta}_{(k)}^T \mathbf{P}_{(k-1)} [\mathbf{P}_{(k)}]^{-1} \mathbf{P}_{(k-1)} \boldsymbol{\theta}^*}{\bar{m}_{(k)}^2} \end{array} \right\} + \quad (2.103)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} -T_s \alpha \mu \frac{\boldsymbol{\phi}_{(k)}^T \boldsymbol{\zeta}_{(k)} \eta_{(k)}}{\bar{m}_{(k)}^2} \\ +T_s^2 \alpha \mu \frac{\boldsymbol{\phi}_{(k)}^T [\mathbf{P}_{(k-1)}]^{-1} \mathbf{B} [\mathbf{P}_{(k)}]^{-1} \mathbf{P}_{(k-1)} \boldsymbol{\zeta}_{(k)} \eta_{(k)}}{\bar{m}_{(k)}^2} \\ +T_s^2 \alpha \sigma_{(k)} \mu \frac{\boldsymbol{\theta}^{*T} \mathbf{P}_{(k-1)} [\mathbf{P}_{(k)}]^{-1} \mathbf{P}_{(k-1)} \boldsymbol{\zeta}_{(k)} \eta_{(k)}}{\bar{m}_{(k)}^2} \\ + [T_s \alpha \mu]^2 \frac{\eta_{(k)} \boldsymbol{\zeta}_{(k)}^T}{\bar{m}_{(k)}^2} \mathbf{P}_{(k-1)} [\mathbf{P}_{(k)}]^{-1} \mathbf{P}_{(k-1)} \frac{\boldsymbol{\zeta}_{(k)} \eta_{(k)}}{\bar{m}_{(k)}^2} \end{array} \right\}$$

Agora, note em (2.103) as seguintes redundâncias

a)

$$-T_s \alpha \mu \frac{\eta_{(k)} \boldsymbol{\zeta}_{(k)}^T \boldsymbol{\phi}_{(k)}}{\bar{m}_{(k)}^2} = -T_s \alpha \mu \frac{\boldsymbol{\phi}_{(k)}^T \boldsymbol{\zeta}_{(k)} \eta_{(k)}}{\bar{m}_{(k)}^2}. \quad (2.104)$$

b)

$$\begin{aligned} +T_s^2 \sigma_{(k)} \boldsymbol{\theta}^{*T} \mathbf{P}_{(k-1)} [\mathbf{P}_{(k)}]^{-1} \mathbf{B} [\mathbf{P}_{(k-1)}]^{-1} \boldsymbol{\phi}_{(k)} = \\ +T_s^2 \sigma_{(k)} \boldsymbol{\phi}_{(k)}^T [\mathbf{P}_{(k-1)}]^{-1} \mathbf{B} [\mathbf{P}_{(k)}]^{-1} \mathbf{P}_{(k-1)} \boldsymbol{\theta}^*. \end{aligned} \quad (2.105)$$

c)

$$\begin{aligned} +T_s^2 \alpha \mu \frac{\eta_{(k)} \boldsymbol{\zeta}_{(k)}^T \mathbf{P}_{(k-1)} [\mathbf{P}_{(k)}]^{-1} \mathbf{B} [\mathbf{P}_{(k-1)}]^{-1} \boldsymbol{\phi}_{(k)}}{\bar{m}_{(k)}^2} = \\ +T_s^2 \alpha \mu \frac{\boldsymbol{\phi}_{(k)}^T [\mathbf{P}_{(k-1)}]^{-1} \mathbf{B} [\mathbf{P}_{(k)}]^{-1} \mathbf{P}_{(k-1)} \boldsymbol{\zeta}_{(k)} \eta_{(k)}}{\bar{m}_{(k)}^2}. \end{aligned} \quad (2.106)$$

d)

$$\begin{aligned}
& +T_s^2 \sigma_{(k)} \alpha \mu \frac{\eta_{(k)} \zeta_{(k)}^T \mathbf{P}_{(k-1)} [\mathbf{P}_{(k)}]^{-1} \mathbf{P}_{(k-1)} \boldsymbol{\theta}^*}{\bar{m}_{(k)}^2} = \\
& +T_s^2 \alpha \sigma_{(k)} \mu \frac{\boldsymbol{\theta}^{*T} \mathbf{P}_{(k-1)} [\mathbf{P}_{(k)}]^{-1} \mathbf{P}_{(k-1)} \zeta_{(k)} \eta_{(k)}}{\bar{m}_{(k)}^2}.
\end{aligned} \tag{2.107}$$

Utilizando as igualdades (2.104), (2.105), (2.106) e (2.107) em (2.103), tem-se

$$\begin{aligned}
\Delta V_{(k)} = & -T_s \sigma_{(k)} \boldsymbol{\theta}_{(k)}^T \boldsymbol{\phi}_{(k)} - T_s \alpha \boldsymbol{\phi}_{(k)}^T \frac{\zeta_{(k)} \zeta_{(k)}^T}{\bar{m}_{(k)}^2} \boldsymbol{\phi}_{(k)} \\
& -2T_s \alpha \mu \frac{\eta_{(k)} \zeta_{(k)}^T \boldsymbol{\phi}_{(k)}}{\bar{m}_{(k)}^2} - T_s \boldsymbol{\phi}_{(k)}^T [\mathbf{P}_{(k-1)}]^{-1} \mathbf{B} [\mathbf{P}_{(k-1)}]^{-1} \boldsymbol{\phi}_{(k)} \\
& +T_s^2 \boldsymbol{\phi}_{(k)}^T [\mathbf{P}_{(k-1)}]^{-1} \mathbf{B} [\mathbf{P}_{(k)}]^{-1} \mathbf{B} [\mathbf{P}_{(k-1)}]^{-1} \boldsymbol{\phi}_{(k)} \\
& +2T_s^2 \sigma_{(k)} \boldsymbol{\theta}^{*T} \mathbf{P}_{(k-1)} [\mathbf{P}_{(k)}]^{-1} \mathbf{B} [\mathbf{P}_{(k-1)}]^{-1} \boldsymbol{\phi}_{(k)} \\
& +2T_s^2 \alpha \mu \frac{\eta_{(k)} \zeta_{(k)}^T \mathbf{P}_{(k-1)} [\mathbf{P}_{(k)}]^{-1} \mathbf{B} [\mathbf{P}_{(k-1)}]^{-1} \boldsymbol{\phi}_{(k)}}{\bar{m}_{(k)}^2} - T_s \sigma_{(k)} \boldsymbol{\phi}_{(k)}^T \boldsymbol{\theta}^* \\
& + [T_s \sigma_{(k)}]^2 \boldsymbol{\theta}^{*T} \mathbf{P}_{(k-1)} [\mathbf{P}_{(k)}]^{-1} \mathbf{P}_{(k-1)} \boldsymbol{\theta}^* \\
& +2T_s^2 \sigma_{(k)} \alpha \mu \frac{\eta_{(k)} \zeta_{(k)}^T \mathbf{P}_{(k-1)} [\mathbf{P}_{(k)}]^{-1} \mathbf{P}_{(k-1)} \boldsymbol{\theta}^*}{\bar{m}_{(k)}^2} \\
& + [T_s \alpha \mu]^2 \frac{\eta_{(k)} \zeta_{(k)}^T}{\bar{m}_{(k)}^2} \mathbf{P}_{(k-1)} [\mathbf{P}_{(k)}]^{-1} \mathbf{P}_{(k-1)} \frac{\zeta_{(k)} \eta_{(k)}}{\bar{m}_{(k)}^2}.
\end{aligned} \tag{2.108}$$

Na seqüência, os seguintes termos não-quadráticos de (2.108) devem ser transformados em soma de termos quadráticos:

$$\begin{aligned}
& -T_s \sigma_{(k)} \boldsymbol{\theta}_{(k)}^T \boldsymbol{\phi}_{(k)} - T_s \sigma_{(k)} \boldsymbol{\phi}_{(k)}^T \boldsymbol{\theta}^* + 2T_s^2 \sigma_{(k)} \boldsymbol{\theta}^{*T} \mathbf{P}_{(k-1)} [\mathbf{P}_{(k)}]^{-1} \mathbf{B} [\mathbf{P}_{(k-1)}]^{-1} \boldsymbol{\phi}_{(k)} \\
& -2T_s \alpha \mu \frac{\eta_{(k)} \boldsymbol{\phi}_{(k)}^T \zeta_{(k)}}{\bar{m}_{(k)}^2} + 2T_s^2 \alpha \mu \frac{\eta_{(k)} \zeta_{(k)}^T \mathbf{P}_{(k-1)} [\mathbf{P}_{(k)}]^{-1} \mathbf{B} [\mathbf{P}_{(k-1)}]^{-1} \boldsymbol{\phi}_{(k)}}{\bar{m}_{(k)}^2} \\
& +2T_s^2 \sigma_{(k)} \alpha \mu \frac{\eta_{(k)} \zeta_{(k)}^T \mathbf{P}_{(k-1)} [\mathbf{P}_{(k)}]^{-1} \mathbf{P}_{(k-1)} \boldsymbol{\theta}^*}{\bar{m}_{(k)}^2}.
\end{aligned} \tag{2.109}$$

1) Desenvolvendo o termo não quadrático  $-\sigma_{(k)} T_s \boldsymbol{\theta}_{(k)}^T \boldsymbol{\phi}_{(k)}$ :

Seja a seguinte equação quadrática

$$\frac{\sigma_{(k)} T_s}{2} [\boldsymbol{\phi}_{(k)} - \boldsymbol{\theta}_{(k)}]^T [\boldsymbol{\phi}_{(k)} - \boldsymbol{\theta}_{(k)}] = \frac{\sigma_{(k)} T_s}{2} [-\boldsymbol{\theta}^*]^T [-\boldsymbol{\theta}^*]. \tag{2.110}$$

A equação (2.110) pode ser expressa como

$$\frac{\sigma(k)T_s}{2} \|\phi(k)\|^2 - \sigma(k)T_s [\theta(k)^T \phi(k)] + \frac{\sigma(k)T_s}{2} \|\theta(k)\|^2 = \frac{\sigma(k)T_s}{2} \|\theta^*\|^2. \quad (2.111)$$

Isolando o termo de interesse de (2.111), tem-se

$$-\sigma(k)T_s \theta(k)^T \phi(k) = \frac{\sigma(k)T_s}{2} \left( \|\theta^*\|^2 - \|\theta(k)\|^2 - \|\phi(k)\|^2 \right). \quad (2.112)$$

2) Desenvolvendo o termo não quadrático  $-\sigma(k)T_s \phi(k)^T \theta^*$ :

Seja a seguinte equação quadrática

$$\frac{\sigma(k)T_s}{2} [\phi(k) + \theta^*]^T [\phi(k) + \theta^*] = \frac{\sigma(k)T_s}{2} [\theta(k)]^T [\theta(k)]. \quad (2.113)$$

A equação (2.113) pode ser expressa na forma

$$\frac{\sigma(k)T_s}{2} \|\phi(k)\|^2 + \sigma(k)T_s [\phi(k)^T \theta^*] + \frac{\sigma(k)T_s}{2} \|\theta^*\|^2 = \frac{\sigma(k)T_s}{2} \|\theta(k)\|^2. \quad (2.114)$$

Isolando o termo de interesse de (2.114), tem-se

$$-\sigma(k)T_s \phi(k)^T \theta^* = \frac{\sigma(k)T_s}{2} \left( -\|\theta(k)\|^2 + \|\phi(k)\|^2 + \|\theta^*\|^2 \right). \quad (2.115)$$

3) Desenvolvendo  $2T_s^2 \sigma(k) \theta^{*T} \mathbf{P}_{(k-1)} [\mathbf{P}_{(k)}]^{-1} \mathbf{B} [\mathbf{P}_{(k-1)}]^{-1} \phi(k)$ :

Seja a seguinte equação quadrática

$$\begin{aligned} T_s^2 \sigma(k) \left\{ \begin{array}{c} [\mathbf{P}_{(k-1)}]^{-1} \phi(k) \\ -[\mathbf{P}_{(k)}]^{-1} \mathbf{P}_{(k-1)} \theta^* \end{array} \right\}^T \mathbf{B} \left\{ \begin{array}{c} [\mathbf{P}_{(k-1)}]^{-1} \phi(k) \\ -[\mathbf{P}_{(k)}]^{-1} \mathbf{P}_{(k-1)} \theta^* \end{array} \right\} = \\ T_s^2 \sigma(k) \phi(k)^T [\mathbf{P}_{(k-1)}]^{-1} \mathbf{B} [\mathbf{P}_{(k-1)}]^{-1} \phi(k) \\ - 2T_s^2 \sigma(k) \theta^{*T} \mathbf{P}_{(k-1)} [\mathbf{P}_{(k)}]^{-1} \mathbf{B} [\mathbf{P}_{(k-1)}]^{-1} \phi(k) \\ + T_s^2 \sigma(k) \theta^{*T} \mathbf{P}_{(k-1)} [\mathbf{P}_{(k)}]^{-1} \mathbf{B} [\mathbf{P}_{(k)}]^{-1} \mathbf{P}_{(k-1)} \theta^* \end{aligned} \quad (2.116)$$

Isolando o termo de interesse de (2.116), tem-se

$$\begin{aligned} 2T_s^2 \sigma(k) \theta^{*T} \mathbf{P}_{(k-1)} [\mathbf{P}_{(k)}]^{-1} \mathbf{B} [\mathbf{P}_{(k-1)}]^{-1} \phi(k) = \\ -T_s^2 \sigma(k) \left\{ \begin{array}{c} [\mathbf{P}_{(k-1)}]^{-1} \phi(k) \\ -[\mathbf{P}_{(k)}]^{-1} \mathbf{P}_{(k-1)} \theta^* \end{array} \right\}^T \mathbf{B} \left\{ \begin{array}{c} [\mathbf{P}_{(k-1)}]^{-1} \phi(k) \\ -[\mathbf{P}_{(k)}]^{-1} \mathbf{P}_{(k-1)} \theta^* \end{array} \right\} \\ + T_s^2 \sigma(k) \phi(k)^T [\mathbf{P}_{(k-1)}]^{-1} \mathbf{B} [\mathbf{P}_{(k-1)}]^{-1} \phi(k) \\ + T_s^2 \sigma(k) \theta^{*T} \mathbf{P}_{(k-1)} [\mathbf{P}_{(k)}]^{-1} \mathbf{B} [\mathbf{P}_{(k)}]^{-1} \mathbf{P}_{(k-1)} \theta^* \end{aligned} \quad (2.117)$$

4) Desenvolvendo o termo  $-2T_s \alpha \mu \eta(k) \frac{\phi(k)^T \zeta(k)}{\bar{m}_{(k)}^2}$ :



Seja a seguinte equação quadrática

$$\begin{aligned} \mu T_s \alpha \left[ \frac{\phi_{(k)}^T \zeta_{(k)}}{\bar{m}_{(k)}} + \frac{\eta_{(k)}}{\bar{m}_{(k)}} \right] \left[ \frac{\phi_{(k)}^T \zeta_{(k)}}{\bar{m}_{(k)}} + \frac{\eta_{(k)}}{\bar{m}_{(k)}} \right] = \\ \mu T_s \alpha \phi_{(k)}^T \frac{\zeta_{(k)} \zeta_{(k)}^T}{\bar{m}_{(k)}^2} \phi_{(k)} + 2T_s \alpha \mu \eta_{(k)} \frac{\phi_{(k)}^T \zeta_{(k)}}{\bar{m}_{(k)}^2} + T_s \alpha \mu \frac{[\eta_{(k)}]^2}{\bar{m}_{(k)}^2}. \end{aligned} \quad (2.118)$$

Isolando o termo de interesse de (2.118), tem-se

$$\begin{aligned} -2T_s \alpha \mu \eta_{(k)} \frac{\phi_{(k)}^T \zeta_{(k)}}{\bar{m}_{(k)}^2} = -\mu T_s \alpha \left[ \frac{\phi_{(k)}^T \zeta_{(k)}}{\bar{m}_{(k)}} + \frac{\eta_{(k)}}{\bar{m}_{(k)}} \right] \left[ \frac{\phi_{(k)}^T \zeta_{(k)}}{\bar{m}_{(k)}} + \frac{\eta_{(k)}}{\bar{m}_{(k)}} \right] \\ + \mu T_s \alpha \phi_{(k)}^T \frac{\zeta_{(k)} \zeta_{(k)}^T}{\bar{m}_{(k)}^2} \phi_{(k)} + T_s \alpha \mu \frac{[\eta_{(k)}]^2}{\bar{m}_{(k)}^2}. \end{aligned} \quad (2.119)$$

5) Desenvolvendo  $2T_s^2 \alpha \mu \frac{\eta_{(k)} \zeta_{(k)}^T \mathbf{P}_{(k-1)} [\mathbf{P}_{(k)}]^{-1} \mathbf{B} [\mathbf{P}_{(k-1)}]^{-1} \phi_{(k)}}{\bar{m}_{(k)}^2}$ :

Seja a seguinte equação quadrática

$$\begin{aligned} T_s^2 \alpha \mu \left\{ \begin{array}{c} \frac{[\mathbf{P}_{(k)}]^{-1} \mathbf{P}_{(k-1)} \zeta_{(k)}}{\bar{m}_{(k)}} \\ -\frac{\eta_{(k)} [\mathbf{P}_{(k-1)}]^{-1} \phi_{(k)}}{\bar{m}_{(k)}} \end{array} \right\}^T \mathbf{B} \left\{ \begin{array}{c} \frac{[\mathbf{P}_{(k)}]^{-1} \mathbf{P}_{(k-1)} \zeta_{(k)}}{\bar{m}_{(k)}} \\ -\frac{\eta_{(k)} [\mathbf{P}_{(k-1)}]^{-1} \phi_{(k)}}{\bar{m}_{(k)}} \end{array} \right\} = \\ + T_s^2 \alpha \mu \zeta_{(k)}^T \frac{\mathbf{P}_{(k-1)} [\mathbf{P}_{(k)}]^{-1} \mathbf{B} [\mathbf{P}_{(k)}]^{-1} \mathbf{P}_{(k-1)}}{\bar{m}_{(k)}^2} \zeta_{(k)} \cdot \\ - 2T_s^2 \alpha \mu \frac{\eta_{(k)} \zeta_{(k)}^T \mathbf{P}_{(k-1)} [\mathbf{P}_{(k)}]^{-1} \mathbf{B} [\mathbf{P}_{(k-1)}]^{-1} \phi_{(k)}}{\bar{m}_{(k)}^2} \\ + T_s^2 \alpha \mu [\eta_{(k)}]^2 \phi_{(k)}^T \frac{[\mathbf{P}_{(k-1)}]^{-1} \mathbf{B} [\mathbf{P}_{(k-1)}]^{-1}}{\bar{m}_{(k)}^2} \phi_{(k)} \end{aligned} \quad (2.120)$$

Isolando o termo de interesse de (2.122), tem-se

$$\begin{aligned}
& 2T_s^2 \alpha \mu \frac{\eta(k) \zeta(k)^T \mathbf{P}_{(k-1)} [\mathbf{P}_{(k)}]^{-1} \mathbf{B} [\mathbf{P}_{(k-1)}]^{-1} \phi(k)}{\bar{m}_{(k)}^2} = \\
& -T_s^2 \alpha \mu \left\{ \begin{array}{c} \left[ \frac{[\mathbf{P}_{(k)}]^{-1} \mathbf{P}_{(k-1)} \zeta(k)}{\bar{m}_{(k)}} \right]^T \\ - \frac{\eta(k) [\mathbf{P}_{(k-1)}]^{-1} \phi(k)}{\bar{m}_{(k)}} \end{array} \right\} \mathbf{B} \left\{ \begin{array}{c} \left[ \frac{[\mathbf{P}_{(k)}]^{-1} \mathbf{P}_{(k-1)} \zeta(k)}{\bar{m}_{(k)}} \right] \\ - \frac{\eta(k) [\mathbf{P}_{(k-1)}]^{-1} \phi(k)}{\bar{m}_{(k)}} \end{array} \right\}. \quad (2.121) \\
& + T_s^2 \alpha \mu \zeta(k)^T \frac{\mathbf{P}_{(k-1)} [\mathbf{P}_{(k)}]^{-1} \mathbf{B} [\mathbf{P}_{(k)}]^{-1} \mathbf{P}_{(k-1)} \zeta(k)}{\bar{m}_{(k)}^2} \\
& + T_s^2 \alpha \mu [\eta(k)]^2 \phi(k)^T \frac{[\mathbf{P}_{(k-1)}]^{-1} \mathbf{B} [\mathbf{P}_{(k-1)}]^{-1} \phi(k)}{\bar{m}_{(k)}^2}
\end{aligned}$$

6) Desenvolvendo  $2\alpha\sigma(k) [T_s]^2 \mu \eta(k) \zeta(k)^T \frac{\mathbf{P}_{(k-1)} [\mathbf{P}_{(k)}]^{-1} \mathbf{P}_{(k-1)} \theta^*}{\bar{m}_{(k)}^2}$ :

Seja a seguinte equação quadrática

$$\begin{aligned}
& \mu \sigma(k) [T_s]^2 \alpha \left[ \frac{\zeta(k)}{\bar{m}_{(k)}} - \frac{\eta(k) \theta^*}{\bar{m}_{(k)}} \right]^T \mathbf{P}_{(k-1)} [\mathbf{P}_{(k)}]^{-1} \mathbf{P}_{(k-1)} \left[ \frac{\zeta(k)}{\bar{m}_{(k)}} - \frac{\eta(k) \theta^*}{\bar{m}_{(k)}} \right] = \\
& \mu \sigma(k) [T_s]^2 \alpha \zeta(k)^T \frac{\mathbf{P}_{(k-1)} [\mathbf{P}_{(k)}]^{-1} \mathbf{P}_{(k-1)} \zeta(k)}{\bar{m}_{(k)}^2} \\
& - 2\sigma(k) [T_s]^2 \alpha \mu \eta(k) \zeta(k)^T \frac{\mathbf{P}_{(k-1)} [\mathbf{P}_{(k)}]^{-1} \mathbf{P}_{(k-1)} \theta^*}{\bar{m}_{(k)}^2} \\
& + \mu \sigma(k) [T_s]^2 \alpha \frac{[\eta(k)]^2}{\bar{m}_{(k)}^2} \theta^{*T} \mathbf{P}_{(k-1)} [\mathbf{P}_{(k)}]^{-1} \mathbf{P}_{(k-1)} \theta^*
\end{aligned} \quad (2.122)$$

Isolando o termo de interesse de (2.122), tem-se

$$\begin{aligned}
& 2\sigma(k) [T_s]^2 \alpha \mu \eta(k) \zeta(k)^T \frac{\mathbf{P}_{(k-1)} [\mathbf{P}_{(k)}]^{-1} \mathbf{P}_{(k-1)} \theta^*}{\bar{m}_{(k)}^2} = \\
& -\mu \sigma(k) [T_s]^2 \alpha \left[ \frac{\zeta(k)}{\bar{m}_{(k)}} - \frac{\eta(k) \theta^*}{\bar{m}_{(k)}} \right]^T \mathbf{P}_{(k-1)} [\mathbf{P}_{(k)}]^{-1} \mathbf{P}_{(k-1)} \left[ \frac{\zeta(k)}{\bar{m}_{(k)}} - \frac{\eta(k) \theta^*}{\bar{m}_{(k)}} \right] \\
& + \mu \sigma(k) [T_s]^2 \alpha \zeta(k)^T \frac{\mathbf{P}_{(k-1)} [\mathbf{P}_{(k)}]^{-1} \mathbf{P}_{(k-1)} \zeta(k)}{\bar{m}_{(k)}^2} \\
& + \mu \sigma(k) [T_s]^2 \alpha \frac{[\eta(k)]^2}{\bar{m}_{(k)}^2} \theta^{*T} \mathbf{P}_{(k-1)} [\mathbf{P}_{(k)}]^{-1} \mathbf{P}_{(k-1)} \theta^*
\end{aligned} \quad (2.123)$$

Substituindo (2.112), (2.115), (2.117), (2.119), (2.121) e (2.123) em (2.108), tem-se

$$\begin{aligned}
\Delta V_{(k)} = & \frac{T_s \sigma_{(k)}}{2} \left( \|\boldsymbol{\theta}^*\|^2 - \|\boldsymbol{\theta}_{(k)}\|^2 - \|\boldsymbol{\phi}_{(k)}\|^2 \right) - T_s \alpha \boldsymbol{\phi}_{(k)}^T \frac{\boldsymbol{\zeta}_{(k)} \boldsymbol{\zeta}_{(k)}^T}{\bar{m}_{(k)}} \boldsymbol{\phi}_{(k)} \\
& - T_s \alpha \mu \left[ \frac{\boldsymbol{\phi}_{(k)}^T \boldsymbol{\zeta}_{(k)}}{\bar{m}_{(k)}} + \frac{\eta_{(k)}}{\bar{m}_{(k)}} \right]^2 + T_s \alpha \mu \boldsymbol{\phi}_{(k)}^T \frac{\boldsymbol{\zeta}_{(k)} \boldsymbol{\zeta}_{(k)}^T}{\bar{m}_{(k)}^2} \boldsymbol{\phi}_{(k)} + T_s \alpha \mu \frac{[\eta_{(k)}]^2}{\bar{m}_{(k)}^2} \\
& \quad - T_s \boldsymbol{\phi}_{(k)}^T [\mathbf{P}_{(k-1)}]^{-1} \mathbf{B} [\mathbf{P}_{(k-1)}]^{-1} \boldsymbol{\phi}_{(k)} \\
& \quad + T_s^2 \boldsymbol{\phi}_{(k)}^T [\mathbf{P}_{(k-1)}]^{-1} \mathbf{B} [\mathbf{P}_{(k)}]^{-1} \mathbf{B} [\mathbf{P}_{(k-1)}]^{-1} \boldsymbol{\phi}_{(k)} \\
& \quad - T_s^2 \sigma_{(k)} \left\{ \begin{array}{c} [\mathbf{P}_{(k-1)}]^{-1} \boldsymbol{\phi}_{(k)} \\ - [\mathbf{P}_{(k)}]^{-1} \mathbf{P}_{(k-1)} \boldsymbol{\theta}^* \end{array} \right\}^T \mathbf{B} \left\{ \begin{array}{c} [\mathbf{P}_{(k-1)}]^{-1} \boldsymbol{\phi}_{(k)} \\ - [\mathbf{P}_{(k)}]^{-1} \mathbf{P}_{(k-1)} \boldsymbol{\theta}^* \end{array} \right\} \\
& \quad + T_s^2 \sigma_{(k)} \boldsymbol{\phi}_{(k)}^T [\mathbf{P}_{(k-1)}]^{-1} \mathbf{B} [\mathbf{P}_{(k-1)}]^{-1} \boldsymbol{\phi}_{(k)} \\
& \quad + T_s^2 \sigma_{(k)} \boldsymbol{\theta}^{*T} \mathbf{P}_{(k-1)} [\mathbf{P}_{(k)}]^{-1} \mathbf{B} [\mathbf{P}_{(k)}]^{-1} \mathbf{P}_{(k-1)} \boldsymbol{\theta}^* \\
& \quad - T_s^2 \alpha \mu \left\{ \begin{array}{c} \frac{[\mathbf{P}_{(k)}]^{-1} \mathbf{P}_{(k-1)} \boldsymbol{\zeta}_{(k)}}{\bar{m}_{(k)}} \\ - \frac{\eta_{(k)} [\mathbf{P}_{(k-1)}]^{-1} \boldsymbol{\phi}_{(k)}}{\bar{m}_{(k)}} \end{array} \right\}^T \mathbf{B} \left\{ \begin{array}{c} \frac{[\mathbf{P}_{(k)}]^{-1} \mathbf{P}_{(k-1)} \boldsymbol{\zeta}_{(k)}}{\bar{m}_{(k)}} \\ - \frac{\eta_{(k)} [\mathbf{P}_{(k-1)}]^{-1} \boldsymbol{\phi}_{(k)}}{\bar{m}_{(k)}} \end{array} \right\} \\
& \quad + T_s^2 \alpha \mu \boldsymbol{\zeta}_{(k)}^T \frac{\mathbf{P}_{(k-1)} [\mathbf{P}_{(k)}]^{-1} \mathbf{B} [\mathbf{P}_{(k)}]^{-1} \mathbf{P}_{(k-1)}}{\bar{m}_{(k)}^2} \boldsymbol{\zeta}_{(k)} \\
& \quad + T_s^2 \alpha \mu [\eta_{(k)}]^2 \boldsymbol{\phi}_{(k)}^T \frac{[\mathbf{P}_{(k-1)}]^{-1} \mathbf{B} [\mathbf{P}_{(k-1)}]^{-1}}{\bar{m}_{(k)}^2} \boldsymbol{\phi}_{(k)} \\
& \quad \frac{\sigma_{(k)} T_s}{2} \left( -\|\boldsymbol{\theta}_{(k)}\|^2 + \|\boldsymbol{\phi}_{(k)}\|^2 + \|\boldsymbol{\theta}^*\|^2 \right) \\
& \quad + [T_s \sigma_{(k)}]^2 \boldsymbol{\theta}^{*T} \mathbf{P}_{(k-1)} [\mathbf{P}_{(k)}]^{-1} \mathbf{P}_{(k-1)} \boldsymbol{\theta}^* \\
& \quad - T_s^2 \sigma_{(k)} \alpha \mu \left[ \frac{\boldsymbol{\zeta}_{(k)}}{\bar{m}_{(k)}} - \frac{\eta_{(k)} \boldsymbol{\theta}^*}{\bar{m}_{(k)}} \right]^T \mathbf{P}_{(k-1)} [\mathbf{P}_{(k)}]^{-1} \mathbf{P}_{(k-1)} \left[ \frac{\boldsymbol{\zeta}_{(k)}}{\bar{m}_{(k)}} - \frac{\eta_{(k)} \boldsymbol{\theta}^*}{\bar{m}_{(k)}} \right] \\
& \quad + T_s^2 \sigma_{(k)} \alpha \mu \boldsymbol{\zeta}_{(k)}^T \frac{\mathbf{P}_{(k-1)} [\mathbf{P}_{(k)}]^{-1} \mathbf{P}_{(k-1)}}{\bar{m}_{(k)}^2} \boldsymbol{\zeta}_{(k)} \\
& \quad + T_s^2 \sigma_{(k)} \alpha \mu \frac{[\eta_{(k)}]^2}{\bar{m}_{(k)}^2} \boldsymbol{\theta}^{*T} \mathbf{P}_{(k-1)} [\mathbf{P}_{(k)}]^{-1} \mathbf{P}_{(k-1)} \boldsymbol{\theta}^* \\
& \quad + [T_s \alpha \mu]^2 \frac{\eta_{(k)} \boldsymbol{\zeta}_{(k)}^T}{\bar{m}_{(k)}^2} \mathbf{P}_{(k-1)} [\mathbf{P}_{(k)}]^{-1} \mathbf{P}_{(k-1)} \frac{\boldsymbol{\zeta}_{(k)} \eta_{(k)}}{\bar{m}_{(k)}^2}
\end{aligned} \tag{2.124}$$

Organizando (2.124), tem-se finalmente

$$\begin{aligned}
\Delta V_{(k)} = & -\sigma_{(k)} T_s \left\{ \left\| \boldsymbol{\theta}_{(k)} \right\|^2 - \boldsymbol{\theta}^{*T} \left[ \mathbf{I} + T_s \mathbf{P}_{(k-1)} \left[ \mathbf{P}_{(k)} \right]^{-1} \mathbf{B} \left[ \mathbf{P}_{(k)} \right]^{-1} \mathbf{P}_{(k-1)} \right] \boldsymbol{\theta}^* \right\} \\
& + T_s \sigma_{(k)} \mathbf{P}_{(k-1)} \left[ \mathbf{P}_{(k)} \right]^{-1} \mathbf{P}_{(k-1)} \boldsymbol{\theta}^* \\
& - (1 - \mu) T_s \alpha \boldsymbol{\phi}_{(k)}^T \left\{ \frac{\boldsymbol{\zeta}_{(k)} \boldsymbol{\zeta}_{(k)}^T}{\bar{m}_{(k)}^2} \right\} \boldsymbol{\phi}_{(k)} \\
& - T_s \boldsymbol{\phi}_{(k)}^T \left[ \mathbf{P}_{(k-1)} \right]^{-1} \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{B} - T_s \mathbf{B} \left[ \mathbf{P}_{(k)} \right]^{-1} \mathbf{B} - T_s \sigma_{(k)} \mathbf{B} \\ - T_s \alpha \mu \frac{\left[ \eta_{(k)} \right]^2}{\bar{m}_{(k)}^2} \mathbf{B} \end{array} \right\} \left[ \mathbf{P}_{(k-1)} \right]^{-1} \boldsymbol{\phi}_{(k)} \\
& - T_s \alpha \mu \left[ \frac{\boldsymbol{\phi}_{(k)}^T \boldsymbol{\zeta}_{(k)}}{\bar{m}_{(k)}} + \frac{\eta_{(k)}}{\bar{m}_{(k)}} \right]^2 \\
& - T_s^2 \alpha \mu \left\{ \begin{array}{l} \frac{\left[ \mathbf{P}_{(k)} \right]^{-1} \mathbf{P}_{(k-1)} \boldsymbol{\zeta}_{(k)}}{\bar{m}_{(k)}} \\ - \frac{\eta_{(k)} \left[ \mathbf{P}_{(k-1)} \right]^{-1} \boldsymbol{\phi}_{(k)}}{\bar{m}_{(k)}} \end{array} \right\}^T \mathbf{B} \left\{ \begin{array}{l} \frac{\left[ \mathbf{P}_{(k)} \right]^{-1} \mathbf{P}_{(k-1)} \boldsymbol{\zeta}_{(k)}}{\bar{m}_{(k)}} \\ - \frac{\eta_{(k)} \left[ \mathbf{P}_{(k-1)} \right]^{-1} \boldsymbol{\phi}_{(k)}}{\bar{m}_{(k)}} \end{array} \right\}. \quad (2.125) \\
& - T_s^2 \sigma_{(k)} \alpha \mu \left[ \frac{\boldsymbol{\zeta}_{(k)}}{\bar{m}_{(k)}} - \frac{\eta_{(k)} \boldsymbol{\theta}^*}{\bar{m}_{(k)}} \right]^T \mathbf{P}_{(k-1)} \left[ \mathbf{P}_{(k)} \right]^{-1} \mathbf{P}_{(k-1)} \left[ \frac{\boldsymbol{\zeta}_{(k)}}{\bar{m}_{(k)}} - \frac{\eta_{(k)} \boldsymbol{\theta}^*}{\bar{m}_{(k)}} \right] \\
& - T_s^2 \sigma_{(k)} \left\{ \begin{array}{l} \left[ \mathbf{P}_{(k-1)} \right]^{-1} \boldsymbol{\phi}_{(k)} \\ - \left[ \mathbf{P}_{(k)} \right]^{-1} \mathbf{P}_{(k-1)} \boldsymbol{\theta}^* \end{array} \right\}^T \mathbf{B} \left\{ \begin{array}{l} \left[ \mathbf{P}_{(k-1)} \right]^{-1} \boldsymbol{\phi}_{(k)} \\ - \left[ \mathbf{P}_{(k)} \right]^{-1} \mathbf{P}_{(k-1)} \boldsymbol{\theta}^* \end{array} \right\} \\
& + T_s^2 \sigma_{(k)} \alpha \mu \frac{\boldsymbol{\zeta}_{(k)}^T \mathbf{P}_{(k-1)} \left[ \mathbf{P}_{(k)} \right]^{-1} \mathbf{P}_{(k-1)} \boldsymbol{\zeta}_{(k)}}{\bar{m}_{(k)}^2} \\
& + T_s^2 \sigma_{(k)} \alpha \mu \frac{\left[ \eta_{(k)} \right]^2}{\bar{m}_{(k)}^2} \boldsymbol{\theta}^{*T} \mathbf{P}_{(k-1)} \left[ \mathbf{P}_{(k)} \right]^{-1} \mathbf{P}_{(k-1)} \boldsymbol{\theta}^* \\
& + [T_s \alpha \mu]^2 \frac{\eta^2(k)}{\bar{m}_{(k)}^2} \frac{\boldsymbol{\zeta}_{(k)}^T \mathbf{P}_{(k-1)} \left[ \mathbf{P}_{(k)} \right]^{-1} \mathbf{P}_{(k-1)} \boldsymbol{\zeta}_{(k)}}{\bar{m}_{(k)}^2} \\
& + T_s^2 \alpha \mu \frac{\boldsymbol{\zeta}_{(k)}^T \mathbf{P}_{(k-1)} \left[ \mathbf{P}_{(k)} \right]^{-1} \mathbf{B} \left[ \mathbf{P}_{(k)} \right]^{-1} \mathbf{P}_{(k-1)} \boldsymbol{\zeta}_{(k)}}{\bar{m}_{(k)}^2} + T_s \alpha \mu \frac{\left[ \eta_{(k)} \right]^2}{\bar{m}_{(k)}^2}
\end{aligned}$$

A equação (2.125) pode ser dividida em três partes ( $\Delta V_{1(k)}$ ,  $\Delta V_{2(k)}$  e  $\mu\Delta V_{3(k)}$ ):

$$\begin{aligned} \Delta V_{1(k)} = & -\sigma_{(k)} T_s \left\{ \left\| \boldsymbol{\theta}_{(k)} \right\|^2 - \boldsymbol{\theta}^{*T} \left[ \mathbf{I} + T_s \mathbf{P}_{(k-1)} \left[ \mathbf{P}_{(k)} \right]^{-1} \mathbf{B} \left[ \mathbf{P}_{(k)} \right]^{-1} \mathbf{P}_{(k-1)} \right] \boldsymbol{\theta}^* \right\} \\ & + T_s \sigma_{(k)} \mathbf{P}_{(k-1)} \left[ \mathbf{P}_{(k)} \right]^{-1} \mathbf{P}_{(k-1)} \left\{ \frac{\boldsymbol{\zeta}_{(k)} \boldsymbol{\zeta}_{(k)}^T}{\bar{m}_{(k)}^2} \right\} \boldsymbol{\phi}_{(k)} \\ & - (1 - \mu) T_s \alpha \boldsymbol{\phi}_{(k)}^T \left\{ \frac{\boldsymbol{\zeta}_{(k)} \boldsymbol{\zeta}_{(k)}^T}{\bar{m}_{(k)}^2} \right\} \boldsymbol{\phi}_{(k)} \\ - T_s \boldsymbol{\phi}_{(k)}^T \left[ \mathbf{P}_{(k-1)} \right]^{-1} & \left\{ \mathbf{B} - T_s \mathbf{B} \left[ \mathbf{P}_{(k)} \right]^{-1} \mathbf{B} - T_s \sigma_{(k)} \mathbf{B} - T_s \alpha \mu \frac{\left[ \eta_{(k)} \right]^2}{\bar{m}_{(k)}^2} \mathbf{B} \right\} \left[ \mathbf{P}_{(k-1)} \right]^{-1} \boldsymbol{\phi}_{(k)}, \end{aligned} \quad (2.126)$$

$$\begin{aligned} \Delta V_{2(k)} = & -T_s \alpha \mu \left[ \frac{\boldsymbol{\phi}_{(k)}^T \boldsymbol{\zeta}_{(k)}}{\bar{m}_{(k)}} + \frac{\eta_{(k)}}{\bar{m}_{(k)}} \right]^2 \\ & - T_s^2 \alpha \mu \left\{ \begin{array}{c} \left[ \mathbf{P}_{(k)} \right]^{-1} \mathbf{P}_{(k-1)} \boldsymbol{\zeta}_{(k)} \\ \bar{m}_{(k)} \\ - \frac{\eta_{(k)} \left[ \mathbf{P}_{(k-1)} \right]^{-1} \boldsymbol{\phi}_{(k)}}{\bar{m}_{(k)}} \end{array} \right\}^T \mathbf{B} \left\{ \begin{array}{c} \left[ \mathbf{P}_{(k)} \right]^{-1} \mathbf{P}_{(k-1)} \boldsymbol{\zeta}_{(k)} \\ \bar{m}_{(k)} \\ - \frac{\eta_{(k)} \left[ \mathbf{P}_{(k-1)} \right]^{-1} \boldsymbol{\phi}_{(k)}}{\bar{m}_{(k)}} \end{array} \right\} \\ - T_s^2 \sigma_{(k)} \alpha \mu \left[ \frac{\boldsymbol{\zeta}_{(k)}}{\bar{m}_{(k)}} - \frac{\eta_{(k)} \boldsymbol{\theta}^*}{\bar{m}_{(k)}} \right]^T & \mathbf{P}_{(k-1)} \left[ \mathbf{P}_{(k)} \right]^{-1} \mathbf{P}_{(k-1)} \left[ \frac{\boldsymbol{\zeta}_{(k)}}{\bar{m}_{(k)}} - \frac{\eta_{(k)} \boldsymbol{\theta}^*}{\bar{m}_{(k)}} \right] \\ - T_s^2 \sigma_{(k)} \left\{ \begin{array}{c} \left[ \mathbf{P}_{(k-1)} \right]^{-1} \boldsymbol{\phi}_{(k)} \\ - \left[ \mathbf{P}_{(k)} \right]^{-1} \mathbf{P}_{(k-1)} \boldsymbol{\theta}^* \end{array} \right\}^T & \mathbf{B} \left\{ \begin{array}{c} \left[ \mathbf{P}_{(k-1)} \right]^{-1} \boldsymbol{\phi}_{(k)} \\ - \left[ \mathbf{P}_{(k)} \right]^{-1} \mathbf{P}_{(k-1)} \boldsymbol{\theta}^* \end{array} \right\} \end{aligned} \quad (2.127)$$

e

$$\mu \Delta V_{3(k)} = \mu \left\{ \begin{array}{c} + T_s^2 \sigma_{(k)} \alpha \frac{\boldsymbol{\zeta}_{(k)}^T \mathbf{P}_{(k-1)} \left[ \mathbf{P}_{(k)} \right]^{-1} \mathbf{P}_{(k-1)} \boldsymbol{\zeta}_{(k)}}{\bar{m}_{(k)}^2} \\ + T_s^2 \sigma_{(k)} \alpha \frac{\left[ \eta_{(k)} \right]^2}{\bar{m}_{(k)}^2} \boldsymbol{\theta}^{*T} \mathbf{P}_{(k-1)} \left[ \mathbf{P}_{(k)} \right]^{-1} \mathbf{P}_{(k-1)} \boldsymbol{\theta}^* \\ + \mu \left[ T_s \alpha \right]^2 \frac{\eta^2(k)}{\bar{m}_{(k)}^2} \frac{\boldsymbol{\zeta}_{(k)}^T \mathbf{P}_{(k-1)} \left[ \mathbf{P}_{(k)} \right]^{-1} \mathbf{P}_{(k-1)} \boldsymbol{\zeta}_{(k)}}{\bar{m}_{(k)}^2} \\ + T_s^2 \alpha \frac{\boldsymbol{\zeta}_{(k)}^T \mathbf{P}_{(k-1)} \left[ \mathbf{P}_{(k)} \right]^{-1} \mathbf{B} \left[ \mathbf{P}_{(k)} \right]^{-1} \mathbf{P}_{(k-1)} \boldsymbol{\zeta}_{(k)}}{\bar{m}_{(k)}^2} + T_s \alpha \frac{\left[ \eta_{(k)} \right]^2}{\bar{m}_{(k)}^2} \end{array} \right\}. \quad (2.128)$$

A parcela  $\Delta V_{2(k)}$  (2.127) é formada por um conjunto de termos negativos, portanto esta parcela contribui em direção à estabilidade da função  $V_{(k)}$  (2.95).

A parcela  $\Delta V_{3(k)}$  (2.128) é formada por um conjunto de termos limitados em norma, devido aos Teoremas 1 e 2 e devido aos Lemas 1 e 2 (que são apresentados a seguir).

Já a parcela  $\Delta V_{1(k)}$  (2.126) exige uma análise mais cuidadosa. Devido ao fato que a norma da matriz de covariância  $\mathbf{P}$  (2.12) ser decrescente durante os transitórios e constante em regime permanente, pode-se afirmar que, para  $c > 0$ :

- a)  $\mathbf{P}_{(k-1)}[\mathbf{P}_{(k)}]^{-1} \leq c\mathbf{I}$ ;
- b)  $[\mathbf{P}_{(k)}]^{-1}\mathbf{P}_{(k-1)} \leq c\mathbf{I}$ ;
- c)  $[\mathbf{P}_{(k)}]^{-1} \leq p_{\min}^{-1}\mathbf{I}$ ;
- d)  $\mathbf{P}_{(k-1)} \leq \mathbf{P}_{(0)}$ .

Adicionalmente, admite-se um limite superior para o sinal  $\mu \frac{[\eta_{(k)}]^2}{\bar{m}_{(k)}}^2$  (já que  $\frac{[\eta_{(k)}]}{\bar{m}_{(k)}}$  é limitada devido aos Lemas 1 e 2):

- e)  $\mu \frac{[\eta_{(k)}]^2}{\bar{m}_{(k)}} \leq 1$ .

Considerando ainda

- f)  $0 \leq \sigma_{(k)} \leq \sigma_0$ .

Então, utilizando a), b), c), d), e) e f) em  $\Delta V_{1(k)}$  (2.126), tem-se

$$\begin{aligned} \Delta V_{1(k)} \leq & -\sigma_{(k)}T_s \left\{ \|\boldsymbol{\theta}_{(k)}\|^2 - \boldsymbol{\theta}^{*T} \left[ \mathbf{I} + c^2T_s\mathbf{B} + cT_s\sigma_0\mathbf{P}_{(0)} \right] \boldsymbol{\theta}^* \right\} - (1 - \mu) T_s \alpha \boldsymbol{\phi}_{(k)}^T \left\{ \frac{\boldsymbol{\zeta}_{(k)}\boldsymbol{\zeta}_{(k)}^T}{\bar{m}_{(k)}^2} \right\} \boldsymbol{\phi}_{(k)} \\ & - T_s \boldsymbol{\phi}_{(k)}^T [\mathbf{P}_{(k-1)}]^{-1} \left\{ \mathbf{B} - T_s\mathbf{B}p_{\min}^{-1}\mathbf{B} - T_s\sigma_0\mathbf{B} - T_s\alpha\mathbf{B} \right\} [\mathbf{P}_{(k-1)}]^{-1} \boldsymbol{\phi}_{(k)}, \end{aligned} \quad (2.129)$$

A partir de (2.129) (obedecendo os Teoremas 1 e 2), conclui-se que se as restrições (2.79), (2.80) e (2.81) forem satisfeitas, tem-se que  $\Delta V_{(k)} < 0$  sempre que  $V_{(k)} > \bar{V}$  para alguma constante positiva  $\bar{V} > 0$  proporcional a  $\mu$  e, portanto,  $\|\boldsymbol{\phi}_{(k)}\| \leq k_\phi$ . □

**Corolário 1.** *Se  $\mu = 0$ , tem-se  $\boldsymbol{\phi} \rightarrow 0$  quando  $k \rightarrow \infty$ .*

*Demonstração.* Se  $\mu = 0$ , o Teorema 3 garante que  $\Delta < 0$ , portanto  $\boldsymbol{\phi} \rightarrow 0$  quando  $k \rightarrow \infty$ . □

### 2.3.3 Limitação da magnitude dos sinais internos da malha adaptativa: abordagem por realimentação de estados

Além da limitação do vetor  $\boldsymbol{\phi}$  e do vetor de ganhos  $\boldsymbol{\theta}$ , deve-se provar que todos os outros sinais da malha de controle adaptativa sejam limitados. Embora, o algoritmo proposto seja expresso através do sinal  $\bar{m}^2$ , será demonstrado que o sinal de normalização  $m^2$  (onde  $m^2 \leq \bar{m}^2$ ) é suficiente para provar a limitação destes sinais. Esta limitação é garantida pelo seguinte lema:

**Lema 1.** *A lei de controle (2.40), algoritmo de adaptação paramétrica (2.7)-(2.12) e o sinal de normalização (2.9) garantem que:*

- i)  $|\eta(k)|/m(k) \in L_\infty$ ;
- ii)  $\|\zeta(k)\|/m(k) \in L_\infty$ ;
- iii)  $\|\mathbf{X}(k)\|/m(k) \in L_\infty$ ;
- iv)  $|y(k)|/m(k), |u(k)|/m(k) \in L_\infty$ ;
- v)  $\|\phi(k)^T \boldsymbol{\omega}(k)\|/m(k) \in L_\infty$ .

*Demonstração.* Para a prova de i), note que  $\eta(k) = \Delta(z)u(k)$  (ver equação (2.35)), onde  $\Delta(z)$  é uma função de transferência estritamente própria e estável (devido às hipóteses H4 e H5). Então, pelo uso da equação (2.9), pode-se escrever

$$\frac{\eta(k)}{m(k)} = \Delta(z) \frac{u(k)}{\sqrt{1 + \boldsymbol{\omega}(k)^T \boldsymbol{\omega}(k)}}. \quad (2.130)$$

Como  $\boldsymbol{\omega}(k)^T = [\mathbf{X}_{p(k)}^T \quad u(k)]$ , (2.130) pode ser reescrita como

$$\frac{\eta(k)}{m(k)} = \Delta(z) \frac{u(k)}{\sqrt{1 + \mathbf{X}_{p(k)}^T \mathbf{X}_{p(k)} + u(k)^2}}. \quad (2.131)$$

Como  $\left| \frac{u(k)}{\sqrt{1 + \mathbf{X}_{p(k)}^T \mathbf{X}_{p(k)} + u(k)^2}} \right| < 1$ , pode-se concluir que  $\frac{\eta(k)}{m(k)}$  é limitado e i) é provado.

Note que o sinal de normalização  $m(k)$  garante a limitação de  $|\eta(k)|/m(k)$  a priori, independentemente da limitação de qualquer outro sinal da malha fechada.

Com o propósito de provar ii), pode-se escrever

$$\frac{\|\zeta(k)\|}{m(k)} = \frac{\sqrt{W_m(z) \boldsymbol{\omega}(k)^T W_m(z) \boldsymbol{\omega}(k)}}{\sqrt{1 + \boldsymbol{\omega}(k)^T \boldsymbol{\omega}(k)}} \quad (2.132)$$

devido a  $W_m(z)$  ser estável, a prova de ii) é concluída.

Para provar iii), note que

$$\frac{\|\mathbf{X}(k)\|}{m(k)} = \frac{\sqrt{\mathbf{X}(k)^T \mathbf{X}(k)}}{\sqrt{1 + \boldsymbol{\omega}(k)^T \boldsymbol{\omega}(k)}}. \quad (2.133)$$

Agora, pelo uso de  $\boldsymbol{\omega}(k) = [\mathbf{X}_{p(k)}^T \quad u(k)]^T$  a prova é concluída.

Na prova de iv), o resultado  $|u(k)|/m(k) \in L_\infty$  é obtido a partir da seguinte equação

$$\frac{u(k)}{m(k)} = \frac{u(k)}{\sqrt{1 + \mathbf{X}_{p(k)}^T \mathbf{X}_{p(k)} + u(k)^2}}. \quad (2.134)$$

Como  $\left| \frac{u(k)}{\sqrt{1 + \mathbf{X}_{p(k)}^T \mathbf{X}_{p(k)} + u(k)^2}} \right| < 1$ , a prova é concluída.

Para provar v), escreve-se

$$\frac{|\phi_{(k)}^T \omega_{(k)}|}{m_{(k)}} \leq \|\phi_{(k)}\| \left[ \frac{\|\mathbf{X}_{(k)}\|}{m_{(k)}} + \frac{|u_{(k)}|}{m_{(k)}} \right] \quad (2.135)$$

devido ao Teorema 3, iii) e iv), a prova de v) é concluída.  $\square$

### 2.3.4 Limitação da magnitude dos sinais internos da malha adaptativa: abordagem entrada-saída

Na abordagem entrada-saída, tem-se o seguinte lema:

**Lema 2.** *A lei de controle (2.40), algoritmo de adaptação paramétrica (2.7)-(2.12) e o sinal de normalização (2.9) garantem que:*

- i)  $|\eta_{(k)}|/m_{(k)} \in L_\infty$ ;
- ii)  $\|\zeta_{(k)}\|/m_{(k)} \in L_\infty$ ;
- iii)  $\|\omega_{1(k)}\|/m_{(k)}, \|\omega_{2(k)}\|/m_{(k)} \in L_\infty$ ;
- iv)  $|y_{(k)}|/m_{(k)}, |u_{(k)}|/m_{(k)} \in L_\infty$ ;
- v)  $|\phi_{(k)}^T \omega_{(k)}|/m_{(k)} \in L_\infty$ .

*Demonstração.* Para a prova de i), note que  $\eta_{(k)} = \Delta(z)u_{(k)}$  (ver equação (2.50)), onde  $\Delta(z)$  é uma função de transferência estritamente própria e estável (devido às hipóteses H4 e H5).

Então, pelo uso da equação (2.9), pode-se escrever

$$\frac{\eta_{(k)}}{m_{(k)}} = \Delta(z) \frac{u_{(k)}}{\sqrt{1 + \omega_{(k)}^T \omega_{(k)}}}. \quad (2.136)$$

Na abordagem entrada-saída, tem-se que  $\omega_{(k)}^T = \begin{bmatrix} \omega_{1(k)}^T & \omega_{2(k)}^T & y_{(k)} & u_{(k)} \end{bmatrix}$ , portanto (2.136) pode ser reescrita como

$$\frac{\eta_{(k)}}{m_{(k)}} = \Delta(z) \frac{u_{(k)}}{\sqrt{1 + \omega_{1(k)}^T \omega_{1(k)} + \omega_{2(k)}^T \omega_{2(k)} + y_{(k)}^2 + u_{(k)}^2}}. \quad (2.137)$$

Como  $\left| \frac{u_{(k)}}{\sqrt{1 + \omega_{1(k)}^T \omega_{1(k)} + \omega_{2(k)}^T \omega_{2(k)} + y_{(k)}^2 + u_{(k)}^2}} \right| < 1$ , pode-se concluir que  $\frac{\eta_{(k)}}{m_{(k)}}$  é limitado e

i) é provado.

Com o propósito de provar ii), pode-se escrever

$$\frac{\|\zeta_{(k)}\|}{m_{(k)}} = \frac{\sqrt{W_m(z) \omega_{(k)}^T W_m(z) \omega_{(k)}}}{\sqrt{1 + \omega_{(k)}^T \omega_{(k)}}} \quad (2.138)$$

devido a  $W_m(z)$  ser estável, a prova de ii) é concluída.



Para provar iii), note que

$$\begin{aligned} \frac{\|\boldsymbol{\omega}_{1(k)}\|}{m(k)} &= \frac{\sqrt{\boldsymbol{\omega}_{1(k)}^T \boldsymbol{\omega}_{1(k)}}}{\sqrt{1 + \boldsymbol{\omega}_{1(k)}^T \boldsymbol{\omega}_{1(k)}}} \\ \frac{\|\boldsymbol{\omega}_{2(k)}\|}{m(k)} &= \frac{\sqrt{\boldsymbol{\omega}_{2(k)}^T \boldsymbol{\omega}_{2(k)}}}{\sqrt{1 + \boldsymbol{\omega}_{2(k)}^T \boldsymbol{\omega}_{2(k)}}}, \end{aligned} \quad (2.139)$$

Agora, pelo uso de  $\boldsymbol{\omega}_{(k)} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\omega}_{1(k)}^T & \boldsymbol{\omega}_{2(k)}^T & u(k) & y(k) \end{bmatrix}^T$  a prova é concluída.

Na prova de iv), o resultado  $|u(k)|/m(k) \in L_\infty$  é obtido a partir da seguinte equação

$$\frac{u(k)}{m(k)} = \frac{u(k)}{\sqrt{1 + \boldsymbol{\omega}_{1(k)}^T \boldsymbol{\omega}_{1(k)} + \boldsymbol{\omega}_{2(k)}^T \boldsymbol{\omega}_{2(k)} + y(k)^2 + u(k)^2}}. \quad (2.140)$$

Como  $\left| \frac{u(k)}{\sqrt{1 + \boldsymbol{\omega}_{1(k)}^T \boldsymbol{\omega}_{1(k)} + \boldsymbol{\omega}_{2(k)}^T \boldsymbol{\omega}_{2(k)} + y(k)^2 + u(k)^2}} \right| < 1$ , a prova é concluída.

Para provar v), escreve-se

$$\frac{|\boldsymbol{\phi}_{(k)}^T \boldsymbol{\omega}_{(k)}|}{m(k)} \leq \|\boldsymbol{\phi}_{(k)}\| \left[ \frac{\|\boldsymbol{\omega}_{(k)}\|}{m(k)} + \frac{|u(k)|}{m(k)} \right] \quad (2.141)$$

devido ao Teorema 3, iii), iv), a prova de v) é concluída.  $\square$

Os Lemas 1 e 2 demonstraram que todos os sinais internos da malha fechada são limitados pelo sinal de normalização  $m$ . Agora, é necessário mostrar que o sinal de normalização  $m$  também é limitado, pois deste modo mostra-se que todos os sinais internos da malha fechada também são limitados. A limitação do normalizador  $m$  pode ser obtida através do trabalho de (STEFANELLO, 2010).

Em (STEFANELLO, 2010) (p. 68) é apresentado o seguinte sinal de normalização  $m_f$

$$m_{f(k)} = 1 + \|u_{(k-1)}\|_{2\delta} + \|y_{(k-1)}\|_{2\delta}, \delta \in \left( \max[\delta_0, \bar{\delta}_0], 1 \right), \quad (2.142)$$

onde  $\bar{\delta}_0$  é tal que todas as raízes de  $Z_p(z)$  tem magnitude menor que  $\sqrt{\bar{\delta}_0}$ . Em (STEFANELLO, 2010) é mostrado que  $m_f \geq m_c$  e que  $m_f$  é limitado, portanto é possível concluir que  $m_c$  também é limitado. O fato de  $m_c$  ser limitado implica que  $|u|$  e  $|y|$  são limitados (vide equação (2.10)) e, conseqüentemente,  $\boldsymbol{\omega}$  também é limitado. Então pode-se concluir que, tanto o normalizador  $m$  (2.9) quanto o sinal  $\bar{m}$  (2.8), utilizados na presente tese, também são limitados e, conseqüentemente, todos os sinais da malha fechada também o são.

2.3.5 Limitação do erro de rastreamento  $e_1$ : abordagem por realimentação de estados

Os resultados de estabilidade obtidos até aqui trataram da limitação do sinal  $\phi$  e de vários sinais de malha fechada. Agora, é possível demonstrar a limitação do erro de rastreamento  $e_1$  e que este apresenta um valor pequeno quando  $\mu$  é pequeno.

**Teorema 4.** *Assumindo que  $r_{(k)}$  e  $\Delta r_{(k)}$  são limitados, então existe  $\mu^*$  tal que todos os sinais da planta de ordem completa (2.4) com o controlador definido pelas equações (2.7)-(2.12) são limitados para qualquer condição inicial. Além disso, existem constantes  $q_4$  e  $q_5$  tal que o erro de rastreamento  $e_1$  tem um valor residual expresso por*

$$D_e = \left\{ e_1 : \lim_{N \rightarrow \infty} \sup_{N > 0} \frac{1}{N} \sum_{k_0=1}^N |e_{1(k)}| \leq q_4 + \mu q_5, \forall k_0 > 0, N \rightarrow \infty \right\} \quad (2.143)$$

onde  $N$  é o número de amostras num período.

*Demonstração.* Para este propósito, considere a função definida positiva

$$W_{1(k)} = k_1 \mathbf{e}_{(k)}^T \mathbf{Q} \mathbf{e}_{(k)} \quad (2.144)$$

onde  $k_1$  é uma constante positiva e  $\mathbf{Q}$  satisfaz a equação de Lyapunov  $\mathbf{A}_c^T \mathbf{Q} \mathbf{A}_c - \mathbf{Q} = -I$  onde  $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}^T > \mathbf{0}$ . A variação de  $\mathbf{W}_1$  é expressa por

$$\Delta W_{1(k)} = \mathbf{W}_{1(k+1)} - \mathbf{W}_{1(k)} \quad (2.145)$$

substituindo (2.144) em (2.145), pode-se escrever

$$\Delta W_{1(k)} = k_1 \mathbf{e}_{(k+1)}^T \mathbf{Q} \mathbf{e}_{(k+1)} - k_1 \mathbf{e}_{(k)}^T \mathbf{Q} \mathbf{e}_{(k)} \quad (2.146)$$

substituindo (B.6) em (2.146), pode-se escrever

$$\begin{aligned} \Delta W_{1(k)} &\leq \tau_1 \|\mathbf{e}_{(k)}\| \left| \phi_{(k)}^T \boldsymbol{\omega}_{(k)} \right| + \tau_2 \|\mathbf{e}_{(k)}\| \left| \eta_{m(k)} \right| \\ &+ \tau_3 \left| \phi_{(k)}^T \boldsymbol{\omega}_{(k)} \right|^2 + \tau_4 \left| \eta_{m(k)} \right| \left| \phi_{(k)}^T \boldsymbol{\omega}_{(k)} \right| \\ &+ \tau_5 \left| \eta_{m(k)} \right|^2 - k_1 \|\mathbf{e}_{(k)}\|^2 \end{aligned} \quad (2.147)$$

onde  $\tau_1 = \left\| 2k_1 \mathbf{B}_c^T \mathbf{Q} \mathbf{A}_c \right\|$ ,  $\tau_2 = \left\| 2k_1 \mu \bar{\mathbf{B}}_p^T \mathbf{Q} \mathbf{A}_c \right\|$ ,  $\tau_3 = \left| k_1 \mathbf{B}_c^T \mathbf{Q} \mathbf{B}_c \right|$ ,  $\tau_4 = \left| 2k_1 \mu \bar{\mathbf{B}}_p^T \mathbf{Q} \mathbf{B}_c \right|$  e  $\tau_5 = \left| k_1 \mu^2 \bar{\mathbf{B}}_p^T \mathbf{Q} \bar{\mathbf{B}}_p \right|$  são constantes pequenas.

Os termos da equação (2.145) podem ser divididos por  $m_{(k)}^2$

$$\begin{aligned} \frac{\Delta W_{1(k)}}{m_{(k)}^2} &\leq \tau_1 \frac{\|\mathbf{e}_{(k)}\|}{m_{(k)}} \frac{|\phi_{(k)}^T \boldsymbol{\omega}_{(k)}|}{m_{(k)}} + \tau_2 \frac{\|\mathbf{e}_{(k)}\|}{m_{(k)}} \frac{|\eta_{m(k)}|}{m_{(k)}} \\ &+ \tau_3 \frac{|\phi_{(k)}^T \boldsymbol{\omega}_{(k)}|^2}{m_{(k)}^2} + \tau_4 \frac{|\eta_{m(k)}|}{m_{(k)}} \frac{|\phi_{(k)}^T \boldsymbol{\omega}_{(k)}|}{m_{(k)}} \\ &+ \tau_5 \frac{|\eta_{m(k)}|^2}{m_{(k)}^2} - k_1 \frac{\|\mathbf{e}_{(k)}\|^2}{m_{(k)}^2} \end{aligned} \quad (2.148)$$

Reescrevendo (2.148), tem-se

$$\frac{\Delta W_{1(k)}}{m_{(k)}^2} \leq \frac{\gamma_1}{m_{(k)}} \frac{\|\mathbf{e}_{(k)}\|}{m_{(k)}} - \frac{k_1}{m_{(k)}} \frac{\|\mathbf{e}_{(k)}\|^2}{m_{(k)}} + \gamma_0 \quad (2.149)$$

onde  $\gamma_0 = \tau_3 \frac{|\phi_{(k)}^T \boldsymbol{\omega}_{(k)}|^2}{m_{(k)}^2} + \tau_4 \frac{|\eta_{m(k)}|}{m_{(k)}} \frac{|\phi_{(k)}^T \boldsymbol{\omega}_{(k)}|}{m_{(k)}} + \tau_5 \frac{|\eta_{m(k)}|^2}{m_{(k)}^2}$  e  $\frac{\gamma_1}{m_{(k)}} = \tau_1 \frac{|\phi_{(k)}^T \boldsymbol{\omega}_{(k)}|}{m_{(k)}} + \tau_2 \frac{|\eta_{m(k)}|}{m_{(k)}}$  são funções com magnitude limitadas e pequenas e, portanto,  $\frac{\gamma_1}{m_{(k)}} \ll \frac{k_1}{m_{(k)}}$ . Então, (2.149) garante que o erro de estados  $\mathbf{e}_{(k)}$  é limitado e, conseqüentemente, o erro de rastreamento  $e_{1(k)}$  é limitado.

Com o propósito de provar que o erro de rastreamento tem valor médio pequeno para um valor pequeno de  $\mu^* > 0$ , pode-se escrever o erro de rastreamento como

$$\sum_{k=1}^N \frac{|e_{1(k)}|}{m_{(k)}} \leq q_0 + q_1 \sum_{k=1}^N \frac{|\phi_{(k)}^T \boldsymbol{\omega}_{(k)}|}{m_{(k)}} + \mu \sum_{k=1}^N \frac{|\eta_{(k)}|}{m_{(k)}} \quad (2.150)$$

para algumas constantes positivas  $q_0$  e  $q_1$ . Devido a  $\frac{1}{m_{(k)}}$  ser limitado, pode-se escrever o seguinte valor médio de (2.150)

$$\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N |e_{1(k)}| \leq \frac{q_1}{N} + \frac{q_2}{N} \sum_{k=1}^N |\phi_{(k)}^T \boldsymbol{\omega}_{(k)}| + \frac{\mu}{N} q_3 \sum_{k=1}^N |\eta_{(k)}| \quad (2.151)$$

para alguns valores de  $\mu \in [0, \mu^*)$ , a partir do Teorema 3 e a partir do Lema 1, pode-se escrever

$$\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N |e_{1(k)}| \leq \frac{q_1}{N} + q_4 + \mu q_5 \quad (2.152)$$

fazendo  $N \rightarrow \infty$ , pode-se chegar a (2.143). Assim, pode-se concluir que  $|e_1|$  tem valor pequeno se  $\mu$  for pequeno.  $\square$

**Corolário 2.** Se  $\mu = 0$ , então  $e_1 \rightarrow 0$  a medida que  $k \rightarrow \infty$ .

*Demonstração.* Se  $\mu = 0$ , tem-se que  $\Delta V_{(k)} < 0$  implica em  $\phi \rightarrow 0$  (devido ao Teorema 1) quando  $k \rightarrow \infty$  e, conseqüentemente, o erro de rastreamento  $e_1 \rightarrow 0$ .  $\square$

### 2.3.6 Limitação do erro de rastreamento $e_1$ : abordagem entrada-saída

Agora, será demonstrada a limitação do erro de rastreamento  $e_1$  e que este apresenta um valor pequeno quando  $\mu$  é pequeno na abordagem entrada-saída.

**Teorema 5.** *Assumindo que  $r(k)$  e  $\Delta r(k)$  são limitados, então existe  $\mu^*$  tal que todos os sinais da planta de ordem completa (2.4) com o controlador (2.7) - (2.12) são limitados para qualquer condição inicial. Além disso, existem constantes  $q_4$  e  $q_5$  tal que o erro de rastreamento  $e_1$  tem um valor residual expresso por*

$$D_e = \left\{ e_1 : \lim_{N \rightarrow \infty} \sup_{N > 0} \frac{1}{N} \sum_{k_0=1}^N |e_{1(k)}| \leq q_4 + \mu q_5, \forall k_0 > 0, N \rightarrow \infty \right\} \quad (2.153)$$

onde  $N$  é o número de amostras num período.

*Demonstração.* Para este propósito, considere a função definida positiva

$$W_{1(k)} = k_1 \mathbf{e}_{(k)}^T \mathbf{Q} \mathbf{e}_{(k)} \quad (2.154)$$

onde  $k_1$  é uma constante positiva e  $\mathbf{Q}$  satisfaz a equação de Lyapunov  $\mathbf{A}_c^T \mathbf{Q} \mathbf{A}_c - \mathbf{Q} = -I$  onde  $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}^T > \mathbf{0}$ . Note que

$$\Delta W_{1(k)} = \mathbf{W}_{1(k+1)} - \mathbf{W}_{1(k)} \quad (2.155)$$

substituindo (2.154) (ver Apêndice B) em (2.155), pode-se escrever

$$\Delta W_{1(k)} = k_1 \mathbf{e}_{(k+1)}^T \mathbf{Q} \mathbf{e}_{(k+1)} - k_1 \mathbf{e}_{(k)}^T \mathbf{Q} \mathbf{e}_{(k)} \quad (2.156)$$

substituindo (B.12) em (2.156), pode-se escrever

$$\begin{aligned} \Delta W_{1(k)} \leq & +\tau_1 \|\mathbf{e}_{(k)}\| \left| \phi_{(k)}^T \boldsymbol{\omega}_{(k)} \right| + \tau_2 \|\mathbf{e}_{(k)}\| \left| \eta_{a(k)} \right| + \tau_3 \|\mathbf{e}_{(k)}\| \left| \eta_{m(k)} \right| + \tau_4 \left| \phi_{(k)}^T \boldsymbol{\omega}_{(k)} \right|^2 \\ & + \tau_5 \left| \phi_{(k)}^T \boldsymbol{\omega}_{(k)} \right| \left| \eta_{a(k)} \right| + \tau_6 \left| \phi_{(k)}^T \boldsymbol{\omega}_{(k)} \right| \left| \eta_{m(k)} \right| + \tau_7 \left| \eta_{a(k)} \right|^2 + \tau_8 \left| \eta_{a(k)} \right| \left| \eta_{m(k)} \right| \\ & + \tau_9 \left| \eta_{m(k)} \right|^2 - k_1 \|\mathbf{e}_{(k)}\|^2 \end{aligned} \quad (2.157)$$

onde  $\tau_1 = \|2k_1 \mathbf{B}_c^T \mathbf{Q} \mathbf{A}_c\|$ ,  $\tau_2 = \|2k_1 \mu \mathbf{B}_{c1}^T \mathbf{Q} \mathbf{A}_c\|$ ,  $\tau_3 = \|2k_1 \mu \mathbf{B}_{c2}^T \mathbf{Q} \mathbf{A}_c\|$ ,  $\tau_4 = |k_1 \mathbf{B}_c^T \mathbf{Q} \mathbf{B}_c|$ ,  $\tau_5 = |2k_1 \mu \mathbf{B}_{c1}^T \mathbf{Q} \mathbf{B}_c|$ ,  $\tau_6 = |2k_1 \mu \mathbf{B}_{c2}^T \mathbf{Q} \mathbf{B}_c|$ ,  $\tau_7 = |k_1 \mu^2 \mathbf{B}_{c1}^T \mathbf{Q} \mathbf{B}_{c1}|$ ,  $\tau_8 = |2k_1 \mu^2 \mathbf{B}_{c2}^T \mathbf{Q} \mathbf{B}_{c1}|$  e  $\tau_9 = |k_1 \mu^2 \mathbf{B}_{c2}^T \mathbf{Q} \mathbf{B}_{c2}|$  são funções com magnitude limitada e pequena.

Os termos da equação (2.155) podem ser divididos por  $m_{(k)}^2$

$$\begin{aligned} \frac{\Delta W_{1(k)}}{\bar{m}_{(k)}^2} &\leq \tau_1 \frac{\|\mathbf{e}_{(k)}\|}{m_{(k)}} \frac{|\phi_{(k)}^T \boldsymbol{\omega}_{(k)}|}{m_{(k)}} + \tau_2 \frac{\|\mathbf{e}_{(k)}\|}{m_{(k)}} \frac{|\eta_{a(k)}|}{m_{(k)}} + \tau_3 \frac{\|\mathbf{e}_{(k)}\|}{m_{(k)}} \frac{|\eta_{m(k)}|}{m_{(k)}} + \tau_4 \frac{|\phi_{(k)}^T \boldsymbol{\omega}_{(k)}|^2}{\bar{m}_{(k)}^2} \\ &+ \tau_5 \frac{|\phi_{(k)}^T \boldsymbol{\omega}_{(k)}|}{m_{(k)}} \frac{|\eta_{a(k)}|}{m_{(k)}} + \tau_6 \frac{|\phi_{(k)}^T \boldsymbol{\omega}_{(k)}|}{m_{(k)}} \frac{|\eta_{m(k)}|}{m_{(k)}} + \tau_7 \frac{|\eta_{a(k)}|^2}{\bar{m}_{(k)}^2} + \tau_8 \frac{|\eta_{a(k)}|}{m_{(k)}} \frac{|\eta_{m(k)}|}{m_{(k)}} + \tau_9 \frac{|\eta_{m(k)}|^2}{\bar{m}_{(k)}^2} \\ &\quad - k_1 \frac{\|\mathbf{e}_{(k)}\|^2}{\bar{m}_{(k)}^2} \end{aligned} \quad (2.158)$$

Reescrevendo (2.158), tem-se

$$\frac{\Delta W_{1(k)}}{\bar{m}_{(k)}^2} \leq \frac{\gamma_1}{m_{(k)}} \frac{\|\mathbf{e}_{(k)}\|}{m_{(k)}} - \frac{k_1}{m_{(k)}} \frac{\|\mathbf{e}_{(k)}\|^2}{m_{(k)}} + \frac{\gamma_0}{m_{(k)}} \quad (2.159)$$

onde  $\frac{\gamma_0}{m_{(k)}} = \tau_4 \frac{|\phi_{(k)}^T \boldsymbol{\omega}_{(k)}|^2}{\bar{m}_{(k)}^2} + \tau_5 \frac{|\phi_{(k)}^T \boldsymbol{\omega}_{(k)}|}{m_{(k)}} \frac{|\eta_{a(k)}|}{m_{(k)}} + \tau_6 \frac{|\phi_{(k)}^T \boldsymbol{\omega}_{(k)}|}{m_{(k)}} \frac{|\eta_{m(k)}|}{m_{(k)}} + \tau_7 \frac{|\eta_{a(k)}|^2}{\bar{m}_{(k)}^2} + \tau_8 \frac{|\eta_{a(k)}|}{m_{(k)}} \frac{|\eta_{m(k)}|}{m_{(k)}} + \tau_9 \frac{|\eta_{m(k)}|^2}{\bar{m}_{(k)}^2}$  e  $\frac{\gamma_1}{m_{(k)}} = \tau_1 \frac{|\phi_{(k)}^T \boldsymbol{\omega}_{(k)}|}{m_{(k)}} + \tau_2 \frac{|\eta_{a(k)}|}{m_{(k)}} + \tau_3 \frac{|\eta_{m(k)}|}{m_{(k)}}$  são funções com magnitude limitada e pequenas. Então, (2.159) garante que o erro de estados  $\mathbf{e}_{(k)}$  é limitado e conseqüentemente, o erro de rastreamento  $e_{1(k)}$  é limitado.

Para provar que o erro de rastreamento tem valor médio pequeno para um valor pequeno de  $\mu^* > 0$  podendo ser escrito como (2.153), segue-se o mesmo procedimento apresentado no Teorema (4).  $\square$

**Corolário 3.** *Se  $\mu = 0$ , então  $e_1 \rightarrow 0$  a medida que  $k \rightarrow \infty$ .*

*Demonstração.* A prova deste corolário é idêntica à prova do corolário 2.  $\square$

### 2.3.7 Rejeição de distúrbios senoidais

O controlador RMRAC em tempo discreto proposto deve ser capaz de lidar com distúrbios senoidais limitados. Mesmo que estes distúrbios não estejam disponíveis para medição, estes podem ser modelados como uma soma de senos e cossenos. As componentes fundamental e harmônicas de ordem baixa podem ser incluídas no modelo (2.2), se assim for desejado. Neste trabalho de tese, apenas a componente fundamental do distúrbio é considerada, na forma  $v_d = V_a \sin(\omega k T_s) + V_b \cos(\omega k T_s)$ . Utilizando o procedimento apresentado por (MASSING et al., 2012), o modelo do distúrbio senoidal é adicionado ao vetor  $\boldsymbol{\omega}$  e deste modo pode-se obter  $\lim_{k \rightarrow \infty} (y_{(k)} - y_{m(k)}) = 0$ , na ausência de dinâmicas não-modeladas.

## 2.4 Conclusão do capítulo

Este capítulo apresentou o algoritmo adaptativo proposto na tese. O algoritmo de identificação dos ganhos foi analisado usando duas abordagens: realimentação de estados e entrada-saída. A prova de estabilidade foi desenvolvida para ambas as abordagens. Nesta prova, foi demonstrado que os sinais internos da malha fechada são limitados e que o erro de rastreamento é pequeno na presença de dinâmicas não-modeladas para um pequeno valor de  $\mu$ . Adicionalmente, restrições de projeto para o controlador RMRAC foram obtidas.

### 3 Projeto e simulação do controlador RMRAC

Este capítulo apresenta o projeto e simulação do controlador RMRAC aplicado ao controle da corrente, pelo lado da rede, de um conversor trifásico (a três fios) conectado à rede de energia através de um filtro LCL. A modelagem do sistema elétrico é apresentada em tempo contínuo e em tempo discreto utilizando a abordagem por espaço de estados e pela abordagem entrada-saída. Para facilitar o controle da planta, a Transformação de coordenadas  $abc$  para  $\alpha\beta$  é utilizada. Com esta técnica de transformação de coordenadas, o sistema trifásico acoplado é transformado em dois sistemas monofásicos desacoplados. Assim, controla-se dois sistemas monofásicos independentes.

#### 3.1 Modelo do conversor trifásico a três fios conectado à rede de energia elétrica

A Figura 3.1 apresenta o modelo elétrico deste sistema. Neste caso, a rede é representada pelo equivalente Thevenin em relação ao PCC.

O sistema é formado por uma fonte primária de geração que pode ser um gerador eólico, um sistema de painéis fotovoltaicos ou qualquer outra forma de geração distribuída de energia. O banco de capacitores é responsável pela acumulação de energia em forma de tensão contínua. O conversor (atuando como inversor) trifásico em ponte completa tem a função de realizar a conversão CC-CA (Corrente Contínua para Corrente Alternada) a partir da energia armazenada no banco de capacitores, gerando as tensões de controle  $u_{ab}$  e  $u_{bc}$ . A comutação dos interruptores eletrônicos do inversor é governada pela modulação PWM realizada pelo bloco DSC. O respectivo DSC é responsável pela realização das medidas das variáveis do sistema, ou seja, as correntes e tensões do filtro LCL e da tensão no PCC, do cálculo da ação de controle e da modulação PWM do inversor. Na Figura 3.1 ainda é apresentado o modelo da impedância da rede representado por indutores e resistores e também é apresentada a medição da tensão no ponto de conexão comum.

A Transformação de coordenadas  $abc$  para  $\alpha\beta$  é obtida através da seguinte matriz de transformação

$$T_{\alpha\beta} = \frac{2}{3} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}. \quad (3.1)$$

O modelo matemático do filtro LCL em espaço de estados, através de coordenadas

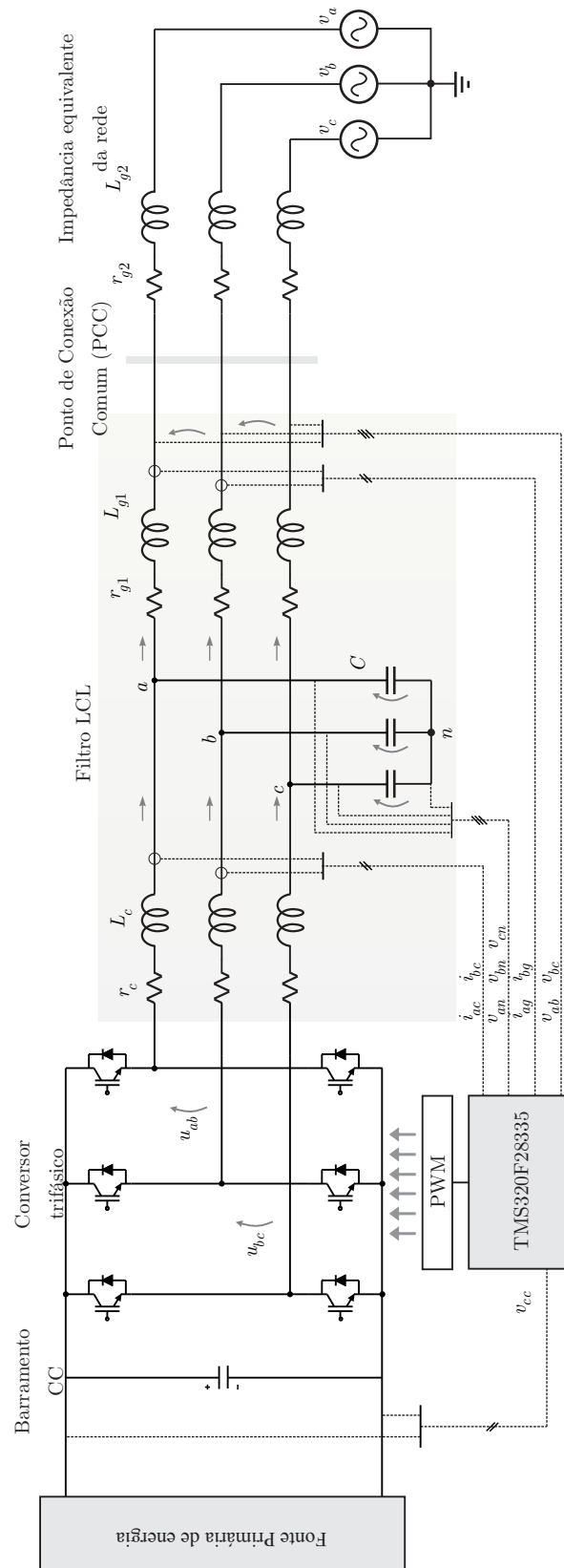


Figura 3.1 – Modelo elétrico da planta com filtro LCL.



$\alpha\beta$ , é expresso por

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} i_{c(\alpha\beta)}(t) \\ v_{c(\alpha\beta)}(t) \\ i_{g(\alpha\beta)}(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -\frac{r_c}{L_c} & -\frac{r_c}{L_c} & 0 \\ \frac{1}{C} & 0 & -\frac{1}{C} \\ 0 & \frac{1}{L_g} & -\frac{r_g}{L_g} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{c(\alpha\beta)}(t) \\ v_{c(\alpha\beta)}(t) \\ i_{g(\alpha\beta)}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L_c} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u_{(\alpha\beta)}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{L_c} \end{bmatrix} v_{d(\alpha\beta)}(t), \\ y_{(\alpha\beta)}(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{c(\alpha\beta)}(t) \\ v_{c(\alpha\beta)}(t) \\ i_{g(\alpha\beta)}(t) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.2)$$

onde  $i_{c(\alpha\beta)}$  são as corrente do lado conversor,  $v_{c(\alpha\beta)}$  são as tensões do capacitor do filtro LCL,  $i_{g(\alpha\beta)}$  são as correntes do lado da rede  $u_{(\alpha\beta)}$  são as tensões sintetizadas pelo inversor,  $v_{d(\alpha\beta)}$  é a tensão da rede no ponto de conexão e no modelo matemático é representado como um sinal de distúrbio. Define-se:  $r_g = r_{g1} + r_{g2}$  e  $L_g = L_{g1} + L_{g2}$ .

Pode-se reescrever (3.2) na forma matricial, tanto para o eixo  $\alpha$  com para o eixo  $\beta$

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_t(t) &= \mathbf{A}_t \mathbf{x}_t(t) + \mathbf{B}_t u(t) + \mathbf{B}_{dc} v_d(t) \\ y(t) &= \mathbf{C}_t^T \mathbf{x}_t(t) \end{aligned} \quad (3.3)$$

A representação discreta de (3.3), com um período de amostragem  $T_s$  e um retentor de ordem zero (ZOH), é dada por

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{c(k+1)} &= \mathbf{G} \mathbf{x}_{c(k)} + \mathbf{H} u(k) + \mathbf{H}_d v_d(k) \\ y(k) &= \mathbf{C}_t^T \mathbf{x}_{c(k)} \end{aligned} \quad (3.4)$$

onde  $\mathbf{G} = e^{\mathbf{A}_t T_s}$ ,  $\mathbf{H} = \mathbf{A}_t^{-1} (e^{\mathbf{A}_t T_s} - \mathbf{I}) \mathbf{B}_t$  e  $\mathbf{H}_d = \mathbf{A}_t^{-1} (e^{\mathbf{A}_t T_s} - \mathbf{I}) \mathbf{B}_{dc}$ .

Incluindo o atraso de transporte típico da implementação digital em (3.4), tem-se o seguinte modelo em tempo discreto

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{c(k+1)} \\ \varphi(k+1) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathbf{G} & \mathbf{H} \\ \mathbf{0}_{1 \times 3} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{c(k)} \\ \varphi(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{1 \times 3} \\ 1 \end{bmatrix} u(k) + \begin{bmatrix} \mathbf{H}_d \\ 0 \end{bmatrix} v_d(k) \\ y(k) &= \begin{bmatrix} \mathbf{C}_t^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{c(k)} \\ \varphi(k) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.5)$$

O sistema aumentado equivalente em tempo discreto (a partir de (3.5)), com atraso de transporte incluído, tem a seguinte forma

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_{p(k+1)} &= \mathbf{A}_p \mathbf{X}_{p(k)} + \mathbf{B}_p u(k) + \mathbf{B}_d v_d(k) \\ y(k) &= \mathbf{C}_p^T \mathbf{X}_{p(k)} \end{aligned} \quad (3.6)$$

onde  $\mathbf{X}_p \in \mathfrak{R}^4$ ,  $u \in \mathfrak{R}$  e  $y \in \mathfrak{R}$  com as matrizes  $\mathbf{A}_p \in \mathfrak{R}^{4 \times 4}$ ,  $\mathbf{B}_p \in \mathfrak{R}^{4 \times 1}$ ,  $\mathbf{B}_d$  e  $\mathbf{C}_p \in \mathfrak{R}^{4 \times 1}$ .

Então, o vetor de estados é expresso por

$$\mathbf{X}_{p(k)} = \begin{bmatrix} i_c(k) & v_c(k) & i_g(k) & \varphi(k) \end{bmatrix}^T, \quad (3.7)$$

onde o atraso de transporte é expresso por

$$\varphi(k+1) = u(k). \quad (3.8)$$

Note que as correntes  $i_c(t)$  e  $i_g(t)$  podem ser escolhidas como variáveis de saída do sistema (variável  $y(t)$ ). Escolhendo a corrente  $i_c(t)$  como a saída da planta, tem-se a seguinte função de transferência de malha aberta

$$\frac{i_c(s)}{u(s)} = \frac{L_g C s^2 + r_g C s + 1}{L_g L_c C s^3 + (r_g L_c + r_c L_g) C s^2 + (L_c + L_g + r_g r_c C) s + (r_g + r)}. \quad (3.9)$$

E escolhendo a corrente  $i_g(t)$  como saída da planta, tem-se a seguinte função de transferência de malha aberta

$$\frac{i_g(s)}{u(s)} = \frac{1}{L_g L_c C s^3 + (r_g L_c + r_c L_g) C s^2 + (L_c + L_g + r_g r_c C) s + (r_g + r)}. \quad (3.10)$$

Nota-se que (3.9) tem grau relativo 1 e (3.10) tem grau relativo 3. No entanto, (ASTRÖM K. J.; STERNBY, 1980) mostra que funções de transferência contínuas com grau relativo  $n^* > 2$ , quando discretizadas pela transformada  $\mathcal{Z}$  com um retentor de ordem zero, possuem zeros de amostragem fora do círculo de raio unitário. Por isto, escolher a variável  $i_g(t)$  como a saída do sistema, acarretará num modelo  $\frac{i_g(z)}{u(z)}$  de fase não-mínima, infringindo a Hipótese H1. Como se deseja controlar a corrente  $i_g(t)$ , deve-se obter um modelo reduzido de fase-mínima.

Os parâmetros nominais da planta, considerados na simulação, são mostrados na Tabela (3.1). Esta Tabela é base para a validação experimental do sistema de controle proposto quando este é aplicado a um filtro LCL.

Tabela 3.1 – Parâmetros nominais do filtro LCL.

$L_c(mH)$	$L_{g1}(mH)$	$r_c(\Omega)$	$r_{g1}(\Omega)$	$C(\mu F)$
1	0,5	0,05	0,05	60

É importante salientar que, o modelo nominal considerado, não leva em conta a indutância da rede  $L_{g2}$ , pois este, é um parâmetro desconhecido.

Substituindo os valores da Tabela (3.1) em (3.10) e considerando  $L_g = L_{g1}$  e  $r_g = r_{g1}$ , tem-se

$$\frac{i_g(s)}{u(s)} = \frac{3,333 \times 10^{10}}{s^3 + 150s^2 + 5,001 \times 10^7 s + 3,333 \times 10^9}. \quad (3.11)$$

Discretizando o modelo (3.11) com a Transformada  $\mathcal{Z}$ , utilizando um retentor ZOH

(Zero-Order-Hold) com uma frequência de amostragem de 4,5 kHz e o atraso de transporte incluído, tem-se o seguinte modelo para a planta

$$\frac{i_g(z)}{u(z)} = 0,05342 \frac{z^2 + 3,4743z + 0,9834}{z(z^3 - 0,9843z^2 + 0,9806z - 0,9672)}. \quad (3.12)$$

O modelo (3.12) possui dois zeros:  $z_1 = -3,16349$  e  $z_2 = -0,31086$ . Então, devido ao zero  $z_1$  tem-se um modelo de fase não-mínima, o que já era esperado. Tem-se que obter um modelo de fase mínima para atender as hipóteses do controlador (hipótese H1).

Para resolver este problema, o modelo (3.12) será expresso do seguinte modo

$$G(z) = G_p(z) + \mu\Delta_a(z), \quad (3.13)$$

onde  $G(z)$  equivale a (3.12) e  $G_p(z)$  será um modelo reduzido que não possui zeros de fase não-mínima e  $\mu\Delta_a(z)$  é uma dinâmica aditiva que deve obedecer a hipótese H5. Portanto assume-se que

$$\mu\Delta_a(z) = 0,05342 \frac{(z-1)^2}{z(z^3 - 0,9843z^2 + 0,9806z - 0,9672)}. \quad (3.14)$$

Então, se vê que (3.14), tem os mesmos pólos de (3.12) e possui dois zeros em  $z = 1$ . Deste modo, substituindo (3.12) e (3.14) em (3.13), tem-se

$$G_p(z) = 0,05342 \frac{z^2 + 3,4743z + 0,9834}{z(z^3 - 0,9843z^2 + 0,9806z - 0,9672)} - 0,05342 \frac{(z-1)^2}{z(z^3 - 0,9843z^2 + 0,9806z - 0,9672)}. \quad (3.15)$$

Resolvendo (3.15), tem-se finalmente

$$G_p(z) = 0,05342 \frac{5,4743z - 0,0166}{z(z^3 - 0,9843z^2 + 0,9806z - 0,9672)}, \quad (3.16)$$

que é um modelo de fase-mínima.

A Figura 3.2 apresenta o diagrama de bode da planta nominal  $G(z)$ , da planta reduzida  $G_p(z)$  e da dinâmica não-modelada aditiva  $\mu\Delta_a(z)$ .

Pode-se notar através da Figura 3.2 que  $G(z)$  e  $G_p(z)$  apresentam características de ganho e fase semelhantes (em função da frequência), o que demonstra que o modelo reduzido,  $G_p(z)$ , de fase-mínima pode representar muito bem o modelo nominal  $G(z)$ . A dinâmica não modelada aditiva  $\mu\Delta_a(z)$  possui ganho pequeno em baixas frequência e apresenta um ganho mais elevado na frequência de ressonância do filtro LCL. No entanto, nas baixas frequência, a dinâmica aditiva  $\mu\Delta_a(z)$  possui pouca influência, justamente devido ao baixo ganho.

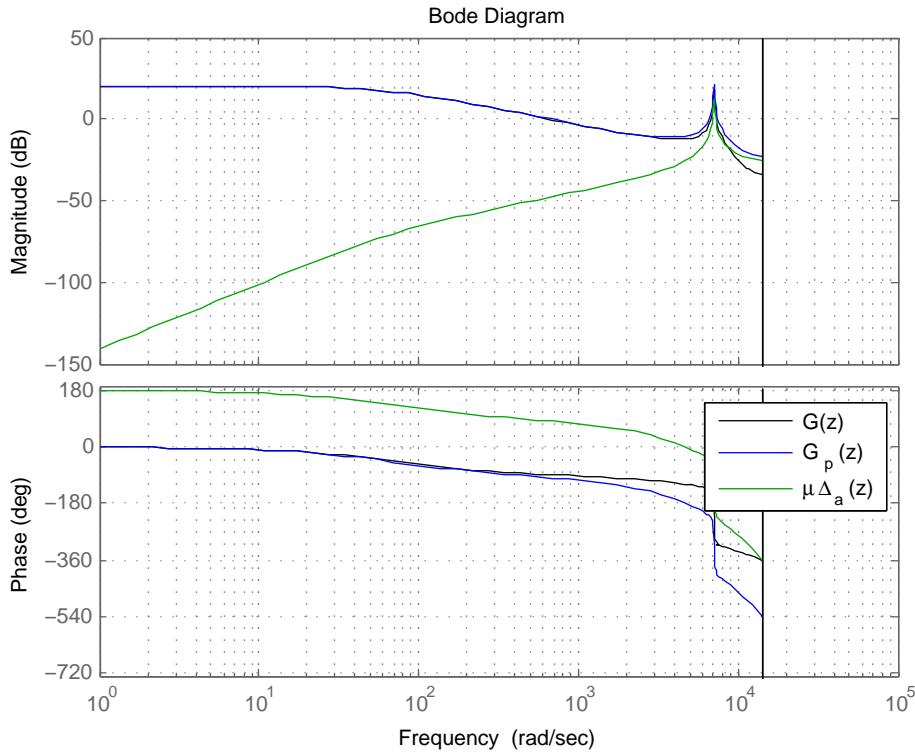


Figura 3.2 – Diagrama de Bode da planta nominal  $G(z)$ , da planta reduzida  $G_p(z)$  e da dinâmica não-modelada aditiva  $\mu\Delta_a(z)$ .

### 3.2 Projeto do sistema de controle

Para o controle da planta (3.12) foi escolhido o modelo de referência com a seguinte estrutura

$$W_m(z) = \frac{(1-p_1)(1-p_2)(1-p_3)}{(z-p_1)(z-p_2)(z-p_3)} = \frac{k_m}{(z-p_1)(z-p_2)(z-p_3)}. \quad (3.17)$$

Deste modo o modelo (3.17) possui ganho estático unitário e tem o mesmo grau relativo de (3.16). Escolhendo  $p_1 = p_2 = p_3 = 0,3$  (pólos amortecidos), tem-se o seguinte modelo de referência

$$W_m(z) = \frac{0,343}{(z-0,3)(z-0,3)(z-0,3)}. \quad (3.18)$$

Após a obtenção do modelo da planta (3.16) e o modelo de referência (3.18), os parâmetros do controlador foram projetados. Estes parâmetros devem satisfazer as restrições de projeto obtidas na prova de estabilidade apresentada no Capítulo 2. Especificamente, devem-se obedecer as seguintes restrições de projeto:

- i) Equações (2.54), (2.55), (2.56), (2.57) e (2.58) referentes ao Teorema 1;
- ii) Equações (2.72), (2.73), (2.74) e (2.75) referentes ao Teorema 2; e
- iii) Equações (2.79), (2.80) e (2.81) referentes ao Teorema 3.

No presente projeto, utilizou-se a máxima frequência de amostragem possível para implementar o controlador proposto no DSC TMS320F28335, no caso 4,5 kHz.

### 3.2.1 Projeto do sistema de controle por realimentação de estados

A Tabela (3.2) apresenta os parâmetros do controlador por realimentação de estados.

Tabela 3.2 – Parâmetros do controlador RMRAC: realimentação de estados.

Símbolo	Valor
$\boldsymbol{\theta}_{(0)}$	$[0 \ 0 \ 0 \ 0 \ -1 \ 1 \ 0 \ 0]^T$
$\boldsymbol{\omega}_{(0)}$	$[0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$
$\mathbf{P}_{(0)}$	$5I_{7 \times 7}$
$M_o$	1
$\sigma_0$	5
$\alpha$	450
$\beta$	4,5
$c$	2
$T_s$	222,222 $\mu s$

Os valores apresentados na Tabela (3.2) foram obtidos através de simulações sucessivas, objetivando realizar um ajuste fino para que a saída da planta, em malha fechada, atingisse a resposta desejada rapidamente. A matriz  $\mathbf{P}_{(0)}$  dita a velocidade de adaptação do vetor de ganhos  $\boldsymbol{\theta}_{(k)}$  na partida do sistema de controle,  $\sigma_0$  e  $M_o$  definem a região de convergência do vetor de ganhos  $\boldsymbol{\theta}_{(k)}$  e  $\boldsymbol{\theta}_{(0)}$  é o vetor de ganhos iniciais do controlador RMRAC. Devido ao fato do sistema de controle iniciar com um vetor de ganhos  $\boldsymbol{\theta}_{(0)}$  qualquer, não se tem um grande compromisso com o desempenho transitório. O vetor de ganhos iniciais  $\boldsymbol{\theta}_{(0)}$  não leva em conta o modelo nominal da planta, com excessão do elemento  $\theta_{u(0)} = -1$  que deve iniciar com o sinal correto para evitar passagens por zero, que levaria a instabilidade da ação de controle. O parâmetro  $\alpha$  funciona como um peso para o erro aumentado  $\varepsilon_{(k)}$  e o parâmetro  $\beta$  tem a função de ajustar a matriz  $\mathbf{P}_{(k)}$  em regime permanente. O parâmetro  $T_s$  é igual a  $1/4500s$ .

O vetor auxiliar  $\boldsymbol{\omega}_{(k)}$ , que contém os estados internos da planta e o modelo do distúrbio, é expresso da seguinte forma

$$\boldsymbol{\omega}_{(k)} = [i_{c(k)} \ v_{c(k)} \ i_{g(k)} \ \varphi_{(k)} \ u_{(k)} \ v_{f(k)} \ v_{q(k)}]^T, \quad (3.19)$$

onde  $v_f$  e  $v_q$  são as componentes em fase e quadratura da tensão fundamental da rede. A obtenção dos respectivos sinais em fase e quadratura (da fundamental) é realizada através de um filtro de Kalman (CARDOSO et al., 2008).

### 3.2.2 Projeto do sistema de controle por abordagem entrada-saída

A Tabela (3.3) apresenta os parâmetros do controlador usando a abordagem entrada-saída.

Tabela 3.3 – Parâmetros do controlador RMRAC: entrada-saída.

Símbolo	Valor
$\boldsymbol{\theta}_{(0)}$	$[0 \ 0 \ 0 \ -1 \ 1 \ 0]^T$
$\boldsymbol{\omega}_{(0)}$	$[0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$
$\mathbf{P}_{(0)}$	$5I_{6 \times 6}$
$M_o$	1
$\sigma_0$	5
$\alpha$	450
$\beta$	4,5
$c$	2
$T_s$	222,222 $\mu s$
$F$	0,06126621
$q$	0,93873379

Os valores apresentados na Tabela 3.3 também foram obtidos através de simulações sucessivas, objetivando realizar um ajuste fino para que a saída da planta, em malha fechada, atingisse a resposta desejada rapidamente. A matriz  $\mathbf{P}_{(0)}$  dita a velocidade de adaptação do vetor de ganhos  $\boldsymbol{\theta}_{(k)}$  na partida do sistema de controle. Os parâmetros  $F$  e  $q$  foram projetados de tal modo que o filtro apresentado na equação (2.42) tenha ganho unitário (em regime permanente) e que a dinâmica do respectivo filtro (definida pela frequência de corte  $F$ ) seja semelhante a dinâmica da planta (3.16).

Embora a o modelo da planta (3.15) seja de quarta ordem ( $n_p = 4$ ), o que implicaria em um par  $(\mathbf{F}, \mathbf{q})$  de terceira ordem ( $n_p - 1$ ), este trabalho utiliza um par  $(F, q)$  de primeira ordem. Esta escolha foi feita com o intuito de diminuir a ordem do vetor de ganhos  $\boldsymbol{\theta}$  e, com isso, possibilitar o atualização da ação de controle  $u_{(k)}$  dentro de um período de amostragem  $T_s$ . Como será apresentado a seguir, esta simplificação não comprometeu os resultados com controlador RMRAC na abordagem entrada-saída.

O vetor auxiliar  $\boldsymbol{\omega}_{(k)}$ , que contém os estados internos da planta e o modelo do distúrbio, é expresso da seguinte forma

$$\boldsymbol{\omega}_{(k)} = [ \omega_{1(k)} \ \omega_{2(k)} \ \dot{i}_g(k) \ u_{(k)} \ v_{f(k)} \ v_{q(k)} ]^T. \quad (3.20)$$

### 3.3 Ordem de execução do algoritmo

A ordem de execução do algoritmo dentro de um período de amostragem  $T_s$  está listada a seguir:

1º) Amostragem das tensões trifásicas de linha da rede ( $v_{ab}$  e  $v_{bc}$ ) para posterior conversão para tensões de fase ( $v_a$ ,  $v_b$  e  $v_c$ ).

2º) Amostragem das variáveis físicas do filtro LCL: amostragem das tensões trifásicas  $v_{c(abc)}$  do capacititor, das correntes trifásicas  $i_{c(abc)}$  e  $i_{g(abc)}$  para a construção do vetor de estados  $\omega$ , no caso do controle por realimentação de estados. Na abordagem entrada-saída, somente a entrada (ação de controle  $u_{(k)}$ ) e a medida das correntes  $i_{g(abc)}$  são utilizadas para a atualização dos vetores  $\omega_1$  e  $\omega_2$ .

3º) Aplicação da Transformação de coordenadas  $abc$  para  $\alpha\beta$  nas variáveis de fase, medidas no 1º e 2º passo.

4º) Atualização da referência de corrente  $r_{(k)}$ .

5º) Atualização da saída do modelo de referência  $y_{m(k)} = W_m(z)r_{(k)}$ .

6º) Atualização dos sinais auxiliares: a partir do vetor  $\zeta_{(k)} = W_m(z)\omega_{(k)}$  é realizada a atualização do erro aumentado  $\varepsilon_{(k)}$ . Também é realizada a atualização da função de normalização  $m_{(k)}$ .

7º) Atualização da ação de controle  $u_{(k)}$ : Com os ganhos estimados na amostragem anterior, os estados medidos e a referência  $r_{(k)}$ , atualiza-se a ação de controle  $u_{(k)}$ .

8º) Atualização da função de modificação  $\sigma_{(k)}$ : A partir da atualização da norma do vetor de ganhos  $\theta_{(k)}$  (do período de amostragem anterior) é calculada a função  $\sigma_{(k)}$ .

9º) Atualização do vetor de ganhos  $\theta_{(k)}$ : Os sinais auxiliares são usados para a atualização dos valores  $\theta_{(k)}$  para o próximo período de amostragem.

10º) Atualização da matriz de covariância  $\mathbf{P}_{(k)}$ : Os sinais auxiliares são usados para a atualização dos valores de  $\mathbf{P}_{(k)}$ .

11º) Aplicação da Transformação de coordenadas  $\alpha\beta$  para  $abc$  na variável  $u_{\alpha\beta}$  (ação de controle).

### 3.4 Resultados de simulação

Nesta Seção são apresentados resultados do sistema de controle aplicado ao controle das correntes controladas  $i_{g(\alpha\beta)}$ , pelo lado da rede. Então, considera-se  $y_{(\alpha\beta)} = i_{g(\alpha\beta)}$ .

Para a validação prévia do sistema de controle proposto, simulações foram realizadas. A Tabela (3.4) apresenta os parâmetros de simulação do sistema de controle.

Temporalmente, a simulação é formada pelos seguintes eventos:

*Evento 1* - Inicia-se o sistema de controle com uma referência de corrente senoidal com amplitude de 2 A e harmônicas de 3ª, 5ª, 7ª e 11ª ordem frequência fundamental de 60 Hz. As harmônicas ajudam na convergência do vetor de ganhos  $\theta$ , na partida do sistema.

*Evento 2* - Muda-se para uma referência corrente senoidal com amplitude de 5 A.

*Evento 3* - Muda-se para uma referência corrente senoidal com amplitude de 10 A.

Tabela 3.4 – Parâmetros da simulação

Parâmetro	Valor
Tensão do barramento CC	150 V
Frequência de comutação	4,5 kHz
Frequência de amostragem	4,5 kHz
Amplitude da tensão linha (rede)	100 V
$L_c$	1 mH
$L_{g1}$	0,5 mH
$r_c$	0,05 $\Omega$
$r_{g1}$	0,05 $\Omega$
$C$	60 $\mu F$
$L_{g2}$	1 mH
$r_{g2}$	0,05 $\Omega$

*Evento 4* - Muda-se para uma referência corrente senoidal com amplitude de 15 A.

#### 3.4.1 Controlador RMRAC utilizando a abordagem por realimentação de estados

As Figuras a seguir apresentam os diferentes sinais de malha fechada do controlador RMRAC usando realimentação de estados. Os estados realimentados foram definidos na equação (3.7).

A Figura 3.3 apresenta a saída da planta em malha fechada  $y$  e a saída do modelo de referência  $y_m$  na coordenada  $\alpha$ .

A Figura 3.4 apresenta a saída da planta em malha fechada  $y$  e a saída do modelo de referência  $y_m$  na coordenada  $\beta$ .

A Figura 3.5 apresenta o erro de rastreamento  $e_1$  em coordenadas  $\alpha$  e  $\beta$ .

A Figura 3.6 apresenta a ação de controle  $u$  em coordenadas  $\alpha$  e  $\beta$ .

A Figura 3.7 apresenta o sinal de normalização  $m^2$  em coordenadas  $\alpha$  e  $\beta$ .

A Figura 3.8 apresenta a evolução da função  $\sigma$ -modification em coordenadas  $\alpha$  e  $\beta$ .

A Figura 3.9 apresenta a evolução do vetor de ganhos  $\theta$  do controlador na coordenada  $\alpha$ .

A Figura 3.10 apresenta a evolução do vetor de ganhos  $\theta$  do controlador na coordenada  $\beta$ .

A Figura 3.11 apresenta os elementos da diagonal principal da matriz  $\mathbf{P}$  na coordenada  $\alpha$ .

A Figura 3.12 apresenta os elementos da diagonal principal da matriz  $\mathbf{P}$  na coordenada  $\beta$ .



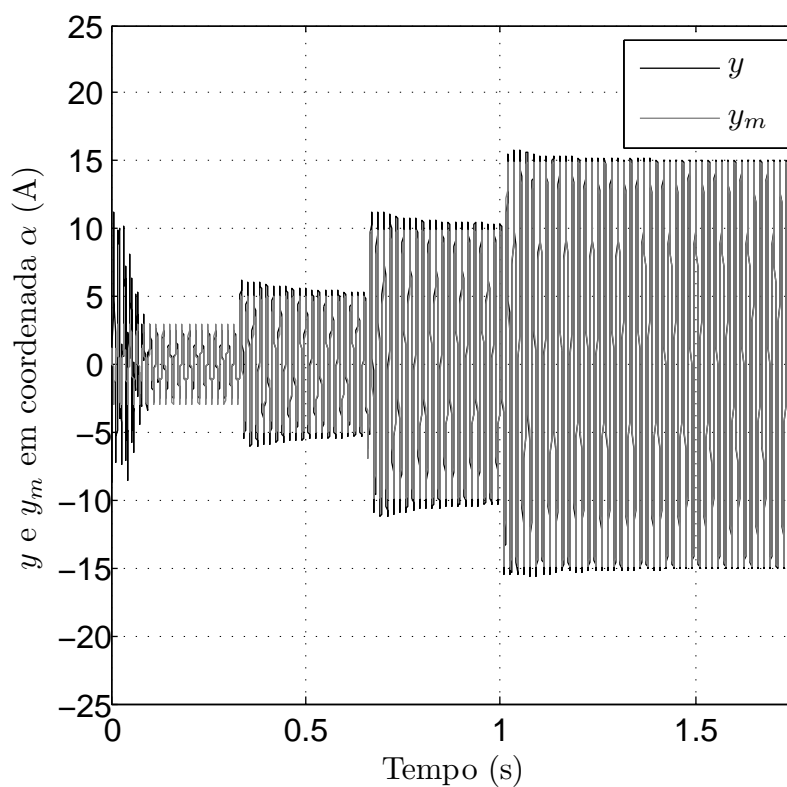


Figura 3.3 – Saída da planta em malha fechada  $y$  e saída do modelo de referência  $y_m$  na coordenada  $\alpha$ : controlador por realimentação de estados.

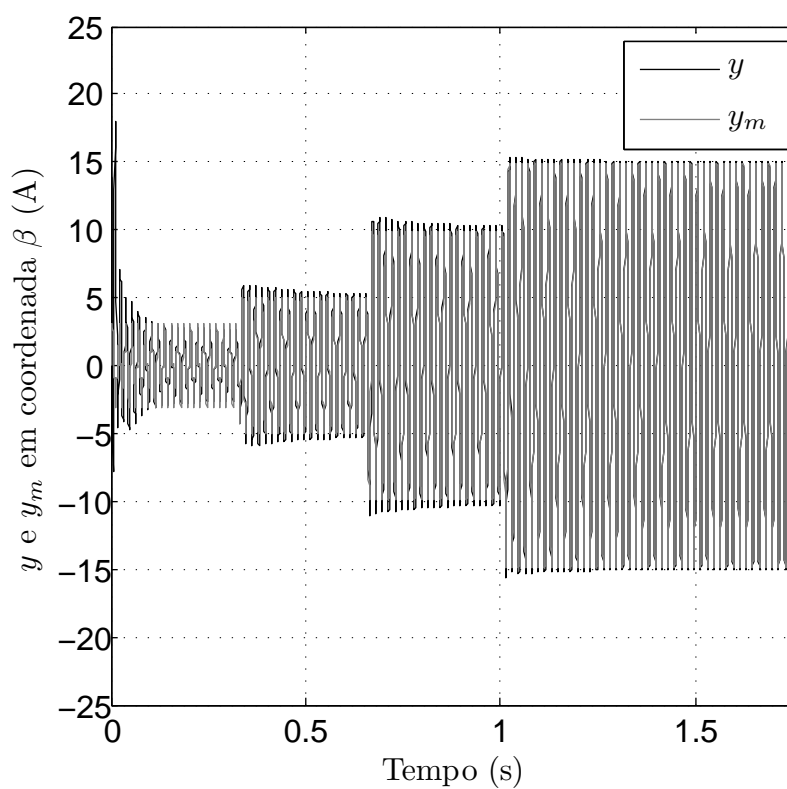


Figura 3.4 – Saída da planta em malha fechada  $y$  e saída do modelo de referência  $y_m$  na coordenada  $\beta$ : controlador por realimentação de estados.

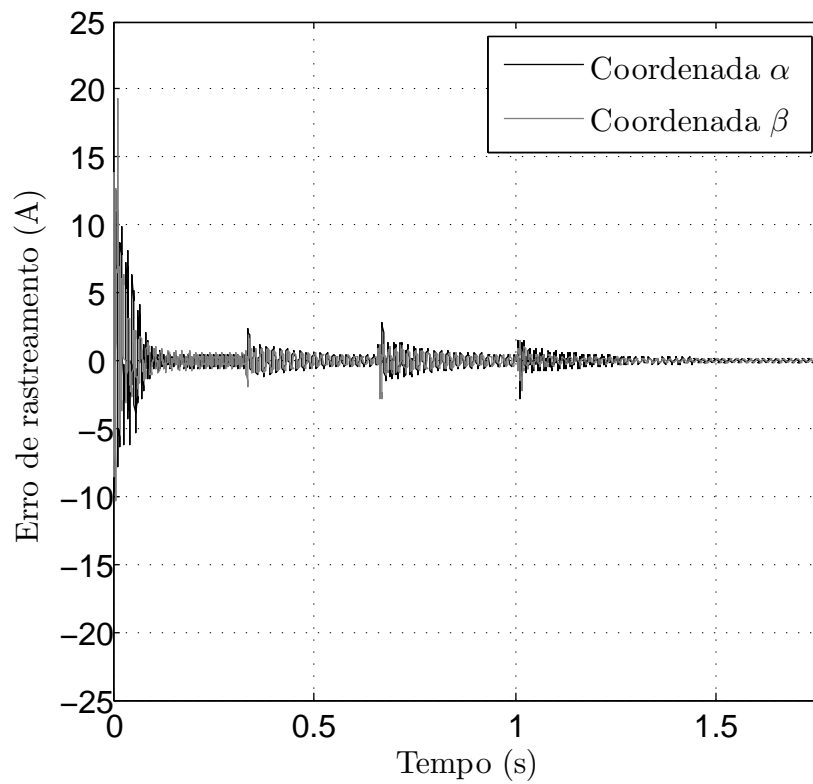


Figura 3.5 – Erro de rastreamento  $e_1$ : controlador por realimentação de estados.

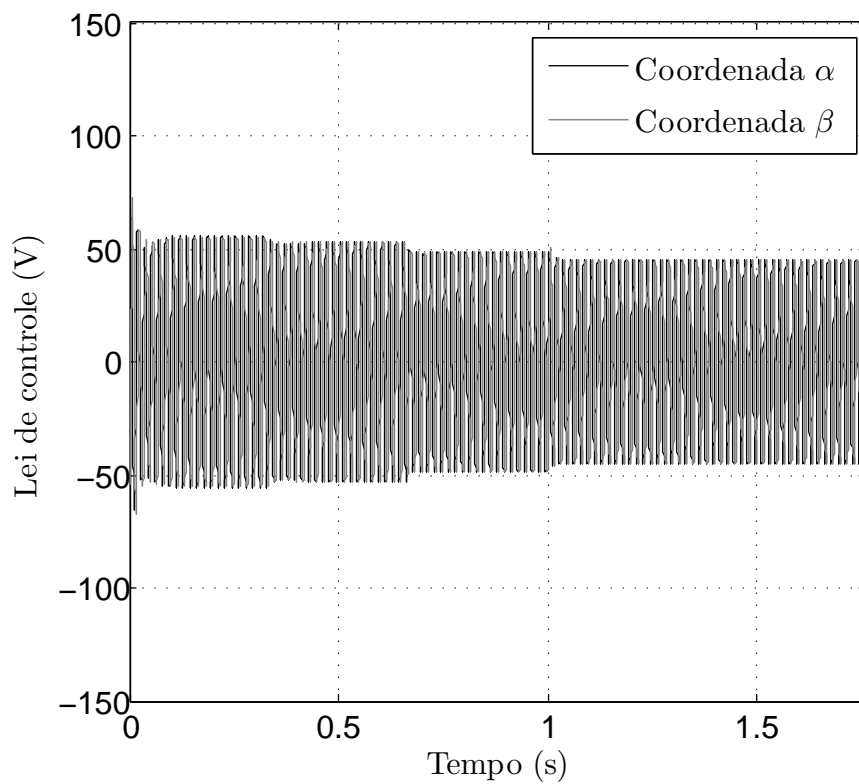


Figura 3.6 – Ação de controle  $u$ : controlador por realimentação de estados.

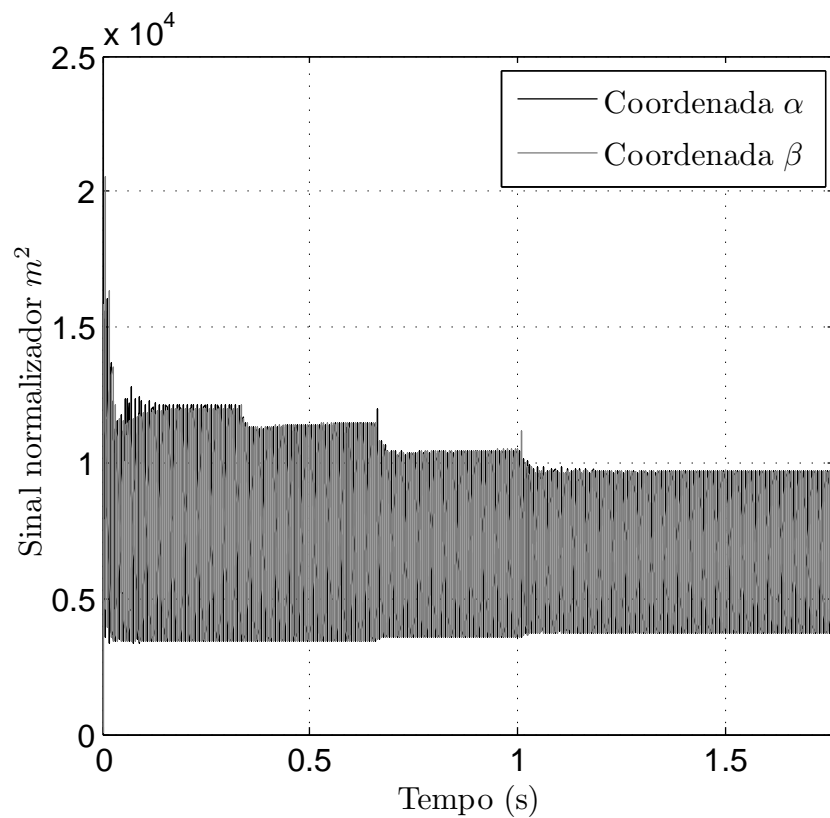


Figura 3.7 – Sinal de normalização  $m^2$  em coordenadas  $\alpha$  e  $\beta$ : controlador por realimentação de estados.

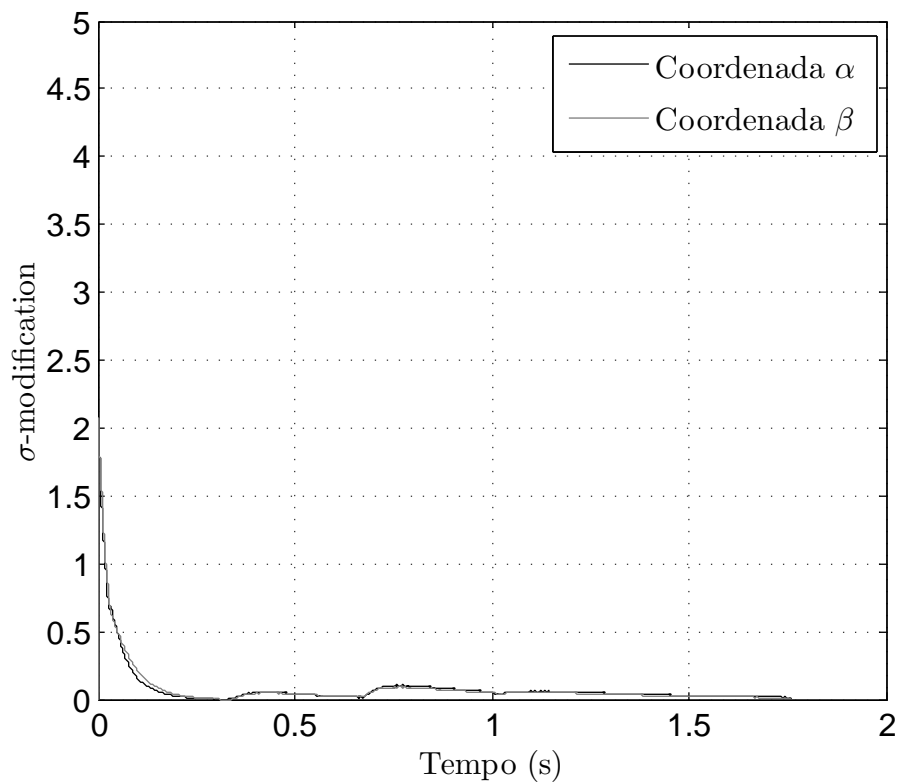


Figura 3.8 – Função  $\sigma$ -modification: controlador por realimentação de estados.

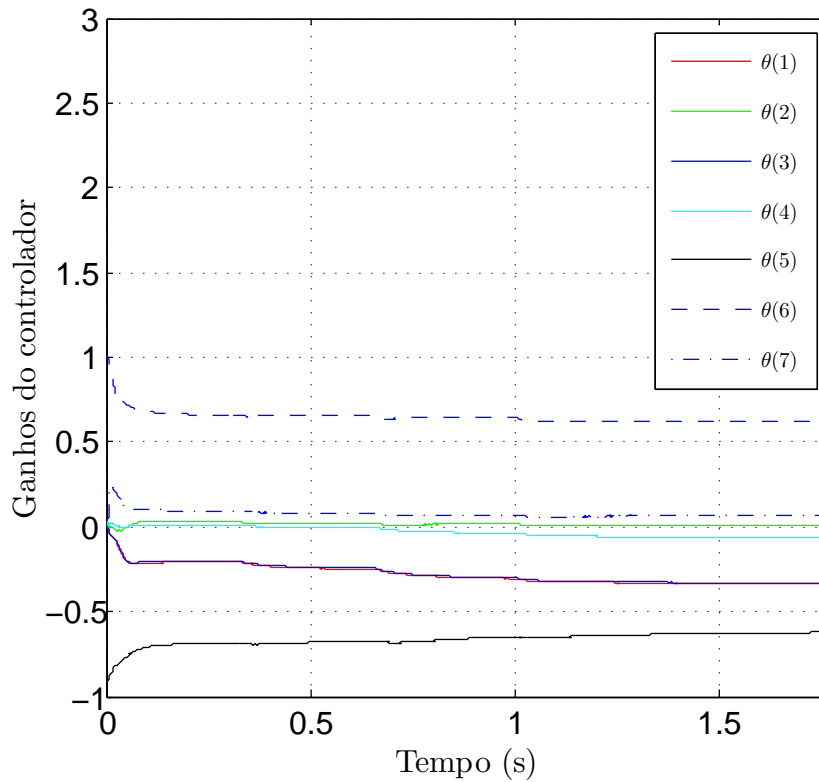


Figura 3.9 – Vetor de ganhos  $\theta$  na coordenadas  $\alpha$ : controlador por realimentação de estados.

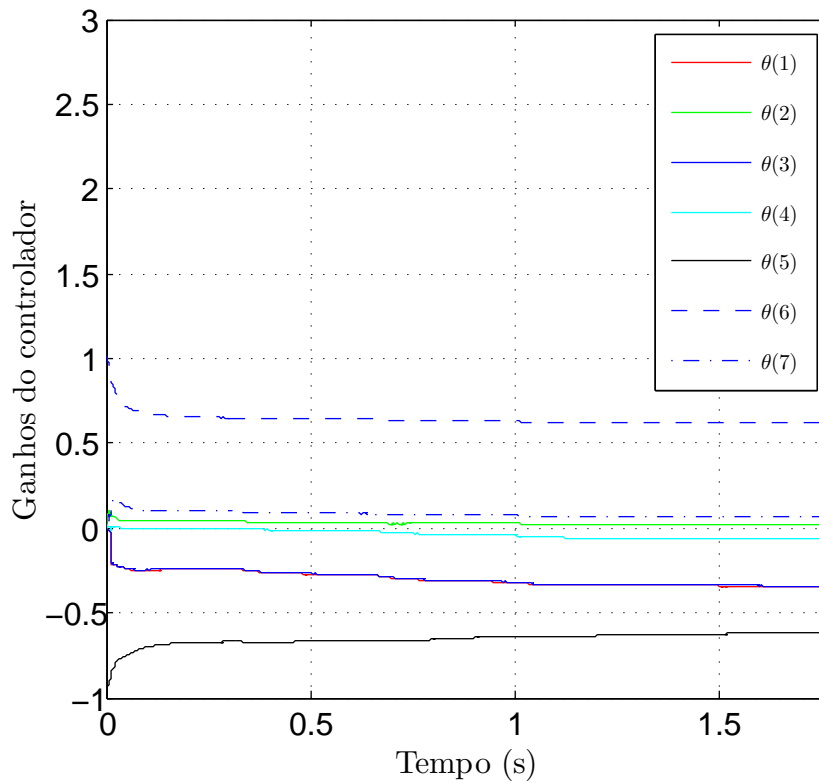


Figura 3.10 – Vetor de ganhos  $\theta$  na coordenadas  $\beta$ : controlador por realimentação de estados.

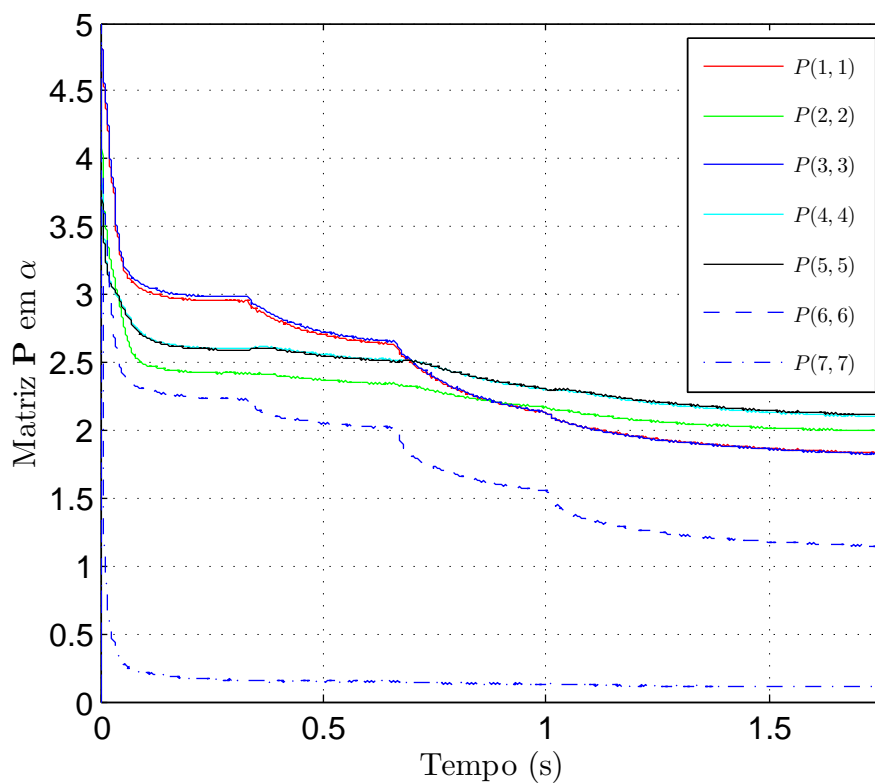


Figura 3.11 – Elementos da diagonal principal da matriz de covariância  $\mathbf{P}$  na coordenada  $\alpha$ : controlador por realimentação de estados.

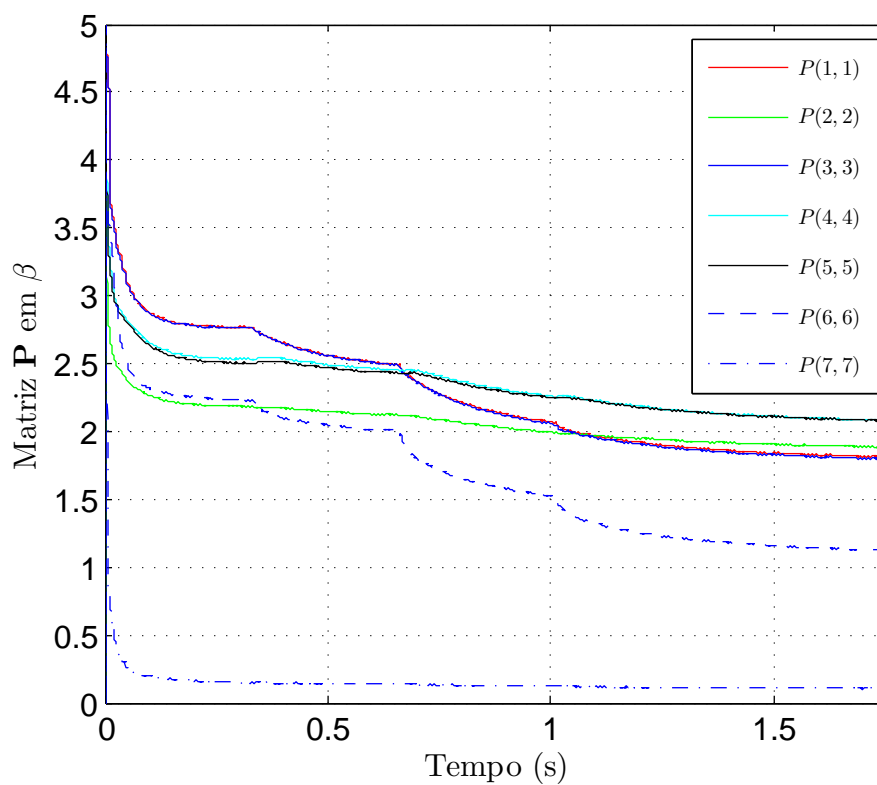


Figura 3.12 – Elementos da diagonal principal da matriz de covariância  $\mathbf{P}$  na coordenada  $\beta$ : controlador por realimentação de estados.

Através das Figuras 3.3 e 3.4 pode se verificar que a envoltória da saída da planta  $y$  em malha fechada segue rapidamente a envoltória da saída do modelo de referência  $y_m$ . Estes dois resultados demonstram a capacidade que o controlador RMRAC proposto tem de convergir em regime permanente.

A Figura 3.5 mostra a capacidade do controlador em minimizar o erro de rastreamento. Mesmo na presença de variações de referências em curto período de tempo, o controlador se mostra capaz de atenuar este erro no período transitório apresentado.

A ação de controle  $u$  (Figura 3.6) não apresenta saturação em nenhum ponto da simulação, o que mostra que o controlador tem a capacidade de estabilizar a planta com uma ação de controle  $u$  suave.

É possível notar que a envoltória do sinal de normalização  $m$  (Figura 3.7) estabiliza em regime permanente e, ao mesmo tempo, apresenta valores bem elevados, que é uma característica de controladores adaptativos robustos, pois para normalizar todos os sinais da malha fechada, o sinal  $m$  deve assumir valores maiores que os outros sinais da malha adaptativa.

Através da Figura 3.8 é possível notar que a função  $\sigma$ -modification tende para zero e, deste modo, pode-se concluir que o algoritmo de adaptação paramétrica é capaz de levar o vetor de ganhos  $\theta$  para um conjunto solução.

As Figuras 3.9 e 3.10 apresentam a rápida convergência do vetor de ganhos  $\theta$  para um conjunto solução. É possível notar que, apesar do vetor inicial  $\theta_{(0)}$  ser bem diferente do vetor de convergência  $\theta$ , em regime permanente, o sistema adaptativo consegue prover uma rápida convergência com um reduzido período transitório.

As Figuras 3.11 e 3.12 mostram a convergência dos elementos da diagonal principal da matriz de covariância  $\mathbf{P}$  para valores não nulos em regime permanente.

## 3.4.1.1 Resposta transitória: controlador por realimentação de estados

A Figura 3.13 apresenta a saída da planta em malha fechada  $y$  e a saída do modelo de referência  $y_m$  na coordenada  $\alpha$  durante o evento 1.

A Figura 3.14 apresenta a saída da planta em malha fechada  $y$  e a saída do modelo de referência  $y_m$  na coordenada  $\beta$  durante o evento 1.

A Figura 3.15 apresenta a saída da planta em malha fechada  $y$  e a saída do modelo de referência  $y_m$  na coordenada  $\alpha$  durante o evento 4.

A Figura 3.16 apresenta a saída da planta em malha fechada  $y$  e a saída do modelo de referência  $y_m$  na coordenada  $\beta$  durante o evento 4.

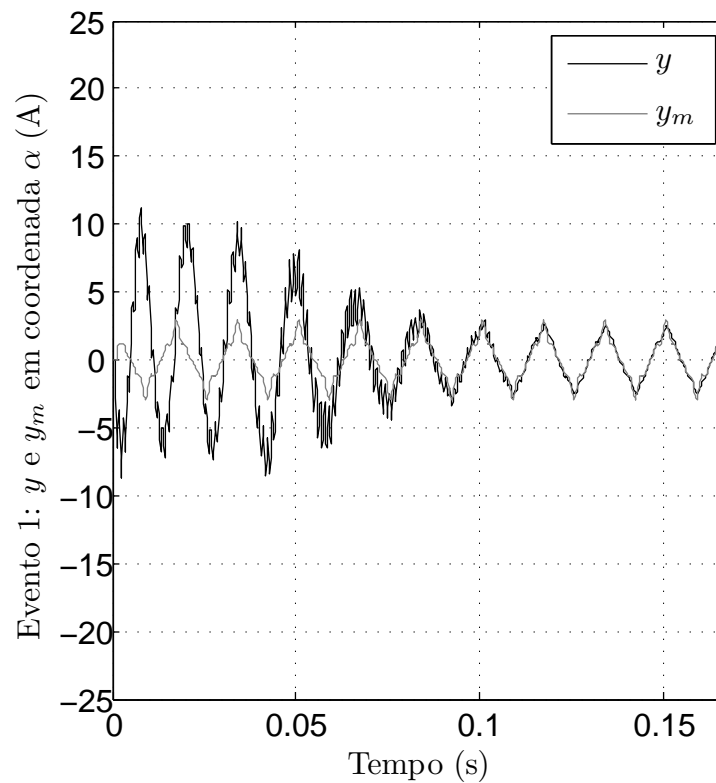


Figura 3.13 – Transitório no evento 1 - saída da planta em malha fechada  $y$  e a saída do modelo de referência  $y_m$  na coordenada  $\alpha$ : controle por realimentação de estados.

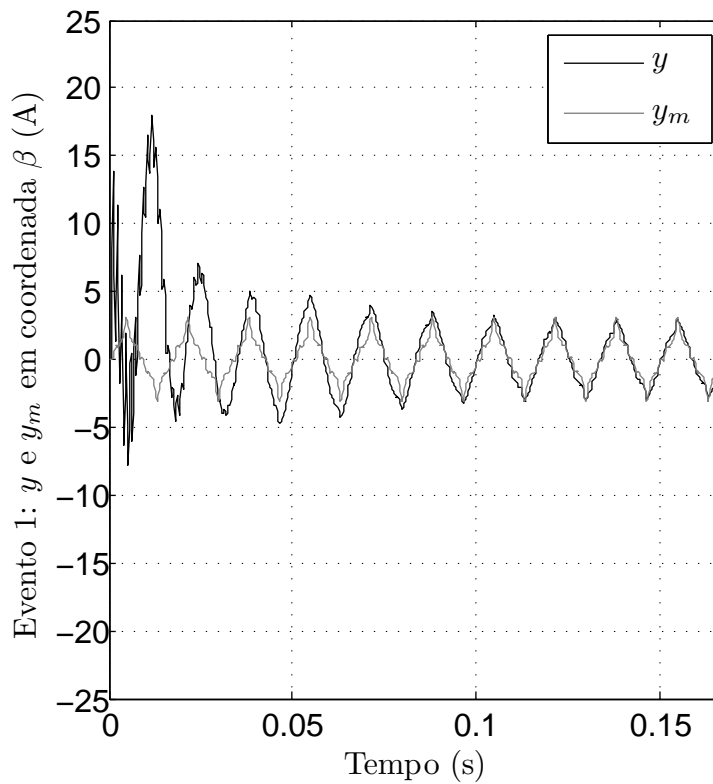


Figura 3.14 – Transitório no evento 1 - saída da planta em malha fechada  $y$  e a saída do modelo de referência  $y_m$  na coordenada  $\beta$ : controle por realimentação de estados.

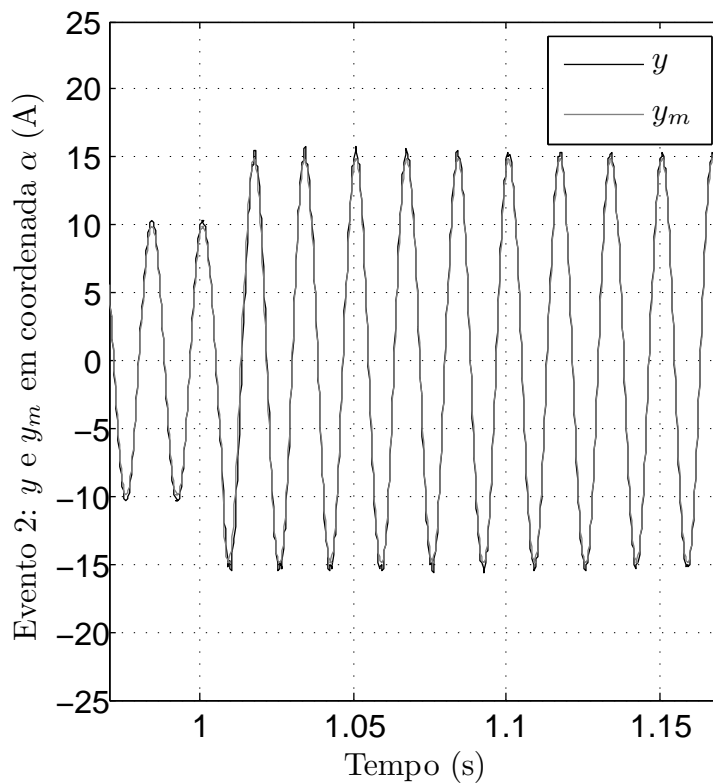


Figura 3.15 – Transitório no evento 4 - saída da planta em malha fechada  $y$  e a saída do modelo de referência  $y_m$  na coordenada  $\alpha$ : controle por realimentação de estados.



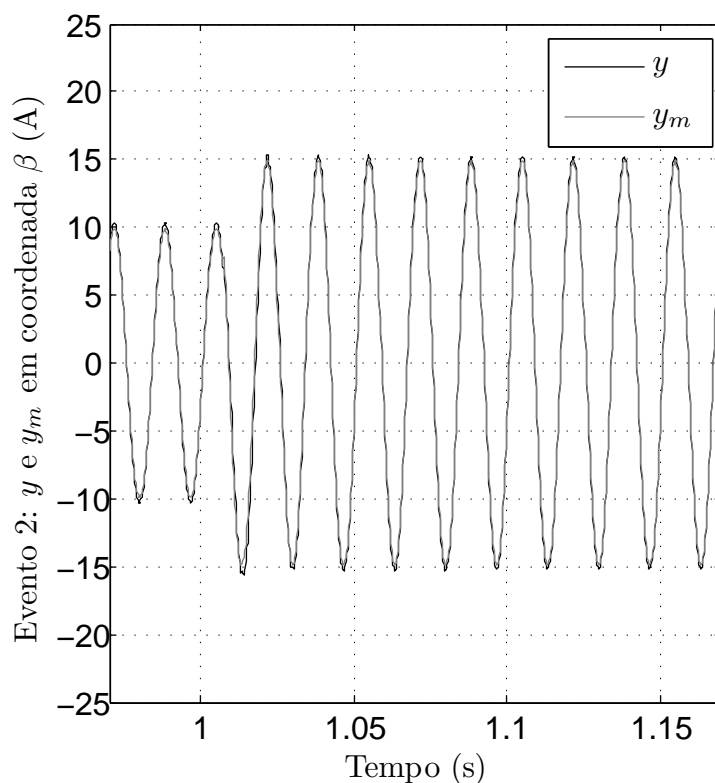


Figura 3.16 – Transitório no evento 4 - saída da planta em malha fechada  $y$  e a saída do modelo de referência  $y_m$  na coordenada  $\beta$ : controle por realimentação de estados.

Através das Figuras 3.13 e 3.14 é possível verificar a capacidade do algoritmo de estabilizar a saída da planta  $y$  quando o sistema é inicializado com condições iniciais incertas e/ou não sabidas.

As Figuras 3.15 e 3.16 mostram a resposta do sistema em regime permanente. É possível notar que, rapidamente, a saída da planta  $y$  converge para a saída do modelo de referência  $y_m$  em regime permanente.

#### 3.4.2 Controlador RMRAC utilizando a abordagem entrada-saída

As Figuras a seguir apresentam os diferentes sinais de malha fechada do controlador RMRAC usando a abordagem entrada-saída.

A Figura 3.17 apresenta a saída da planta em malha fechada  $y$  e a saída do modelo de referência  $y_m$  na coordenada  $\alpha$ .

A Figura 3.18 apresenta a saída da planta em malha fechada  $y$  e a saída do modelo de referência  $y_m$  na coordenada  $\beta$ .

A Figura 3.19 apresenta o erro de rastreamento  $e_1$  em coordenadas  $\alpha$  e  $\beta$ .

A Figura 3.20 apresenta a ação de controle  $u$  em coordenadas  $\alpha$  e  $\beta$ .

A Figura 3.21 apresenta o sinal de normalização  $m^2$  em coordenadas  $\alpha$  e  $\beta$ .

A Figura 3.22 apresenta a evolução da função  $\sigma$ -modification em coordenadas  $\alpha$  e  $\beta$ .

A Figura 3.23 apresenta a evolução do vetor de ganhos  $\theta$  do controlador na coordenada  $\alpha$ .

A Figura 3.24 apresenta a evolução do vetor de ganhos  $\theta$  do controlador na coordenada  $\beta$ .

A Figura 3.25 apresenta os elementos da diagonal principal da matriz  $\mathbf{P}$  na coordenada  $\alpha$ .

A Figura 3.26 apresenta os elementos da diagonal principal da matriz  $\mathbf{P}$  na coordenada  $\beta$ .

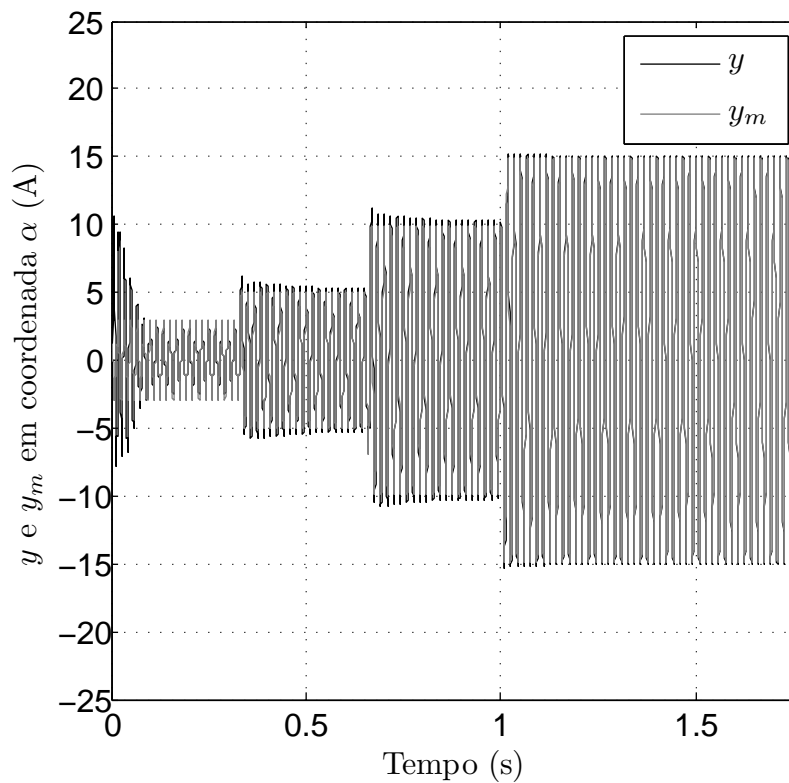


Figura 3.17 – Saída da planta em malha fechada  $y$  e saída do modelo de referência  $y_m$  na coordenada  $\alpha$ : controlador entrada-saída.

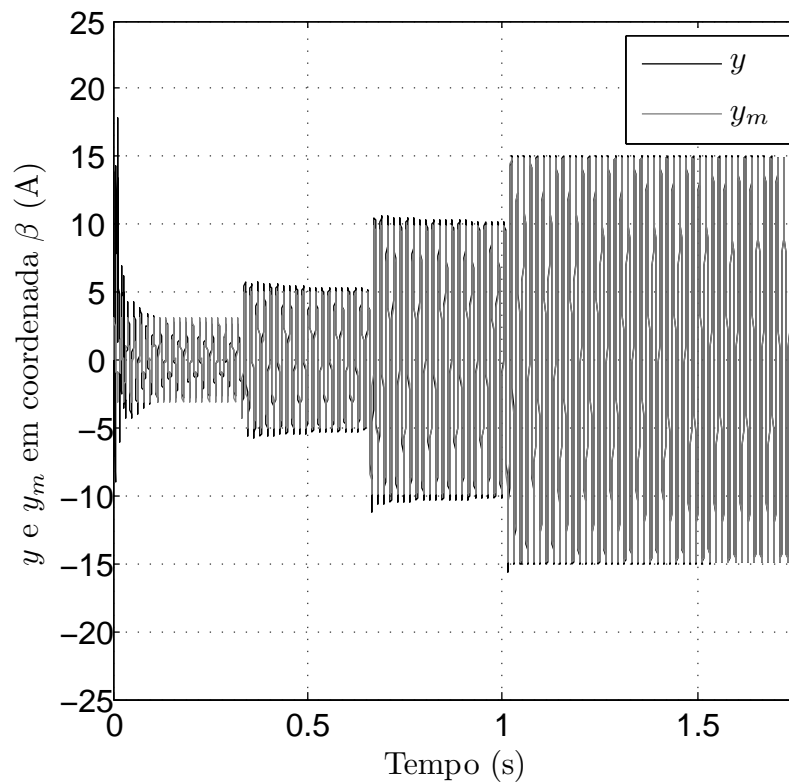


Figura 3.18 – Saída da planta em malha fechada  $y$  e saída do modelo de referência  $y_m$  na coordenada  $\beta$ : controlador entrada-saída.

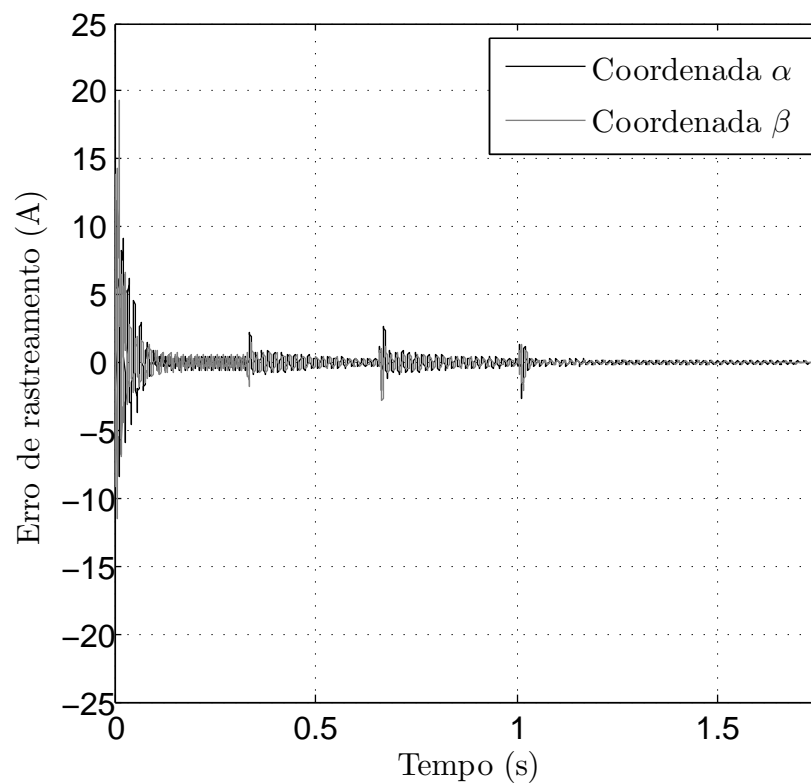
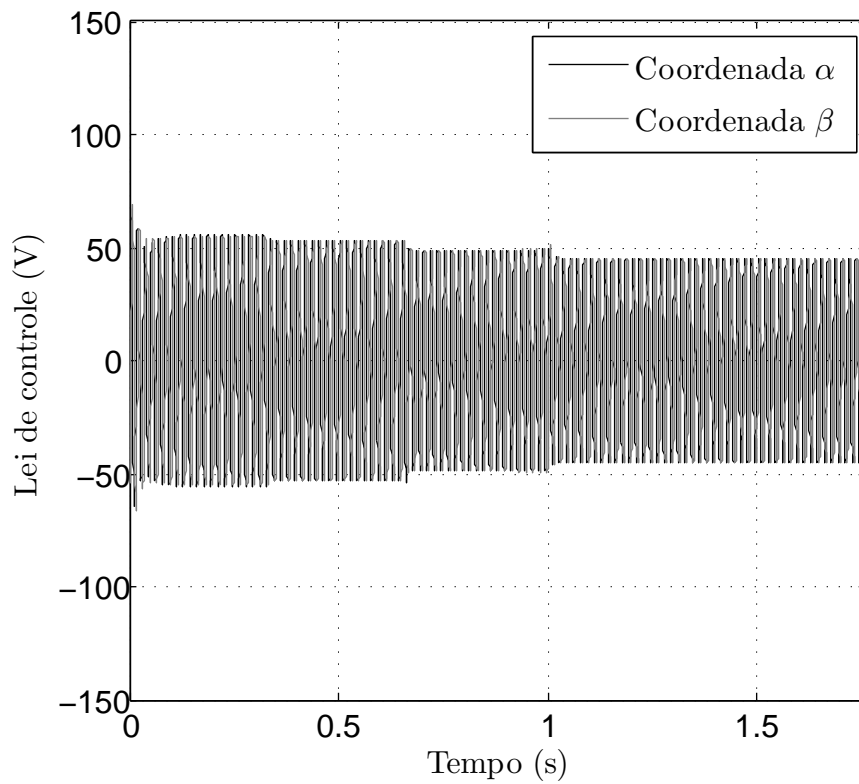
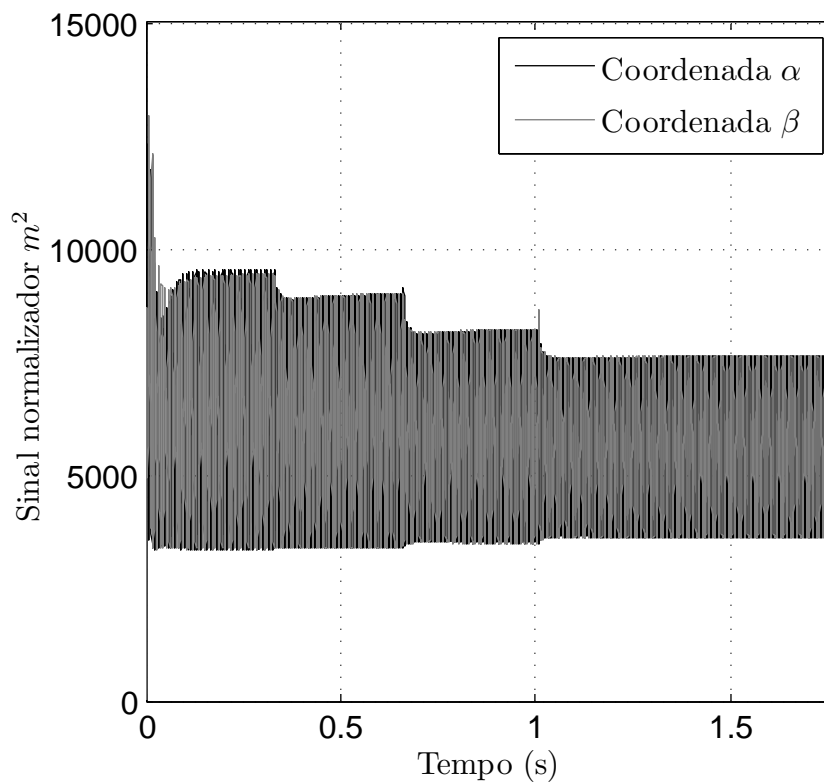
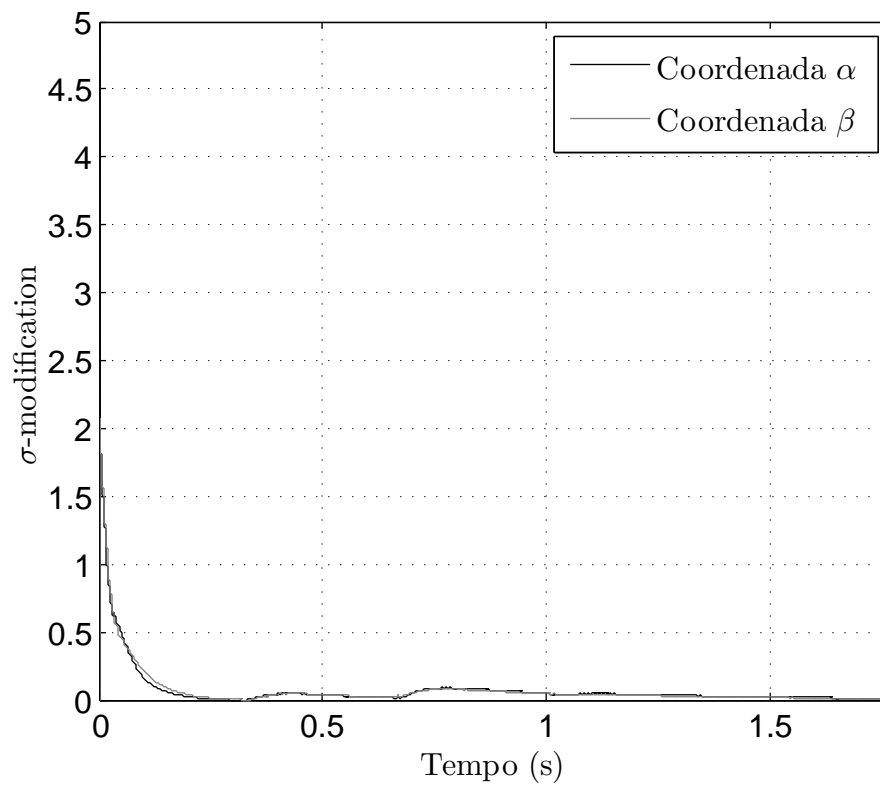
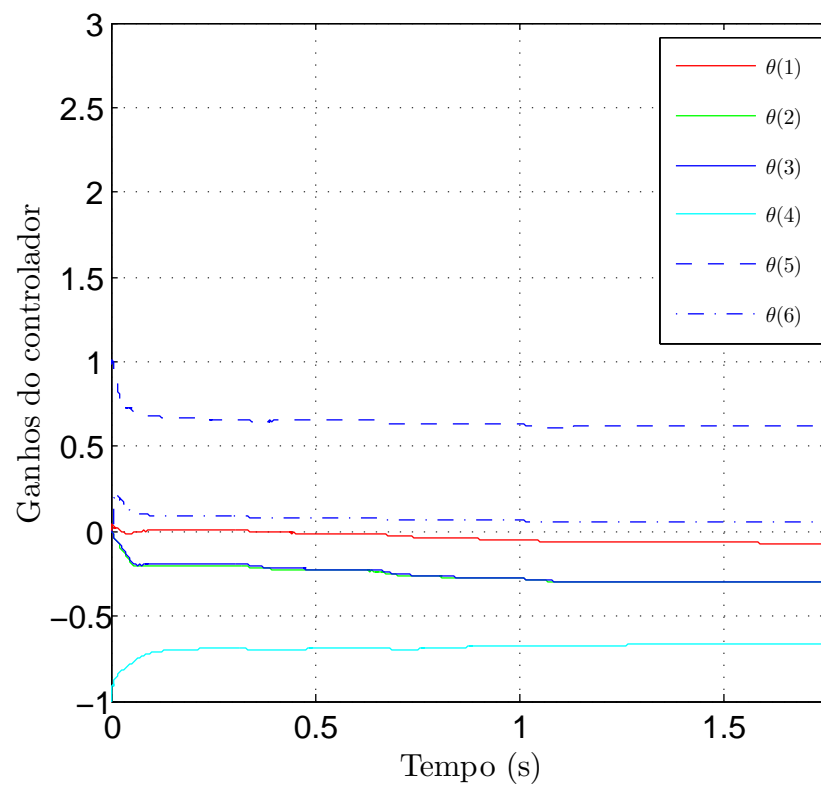


Figura 3.19 – Erro de rastreamento  $e_1$ : controlador entrada-saída.

Figura 3.20 – Ação de controle  $u$ : controlador entrada-saída.Figura 3.21 – Sinal de normalização  $m^2$  em coordenadas  $\alpha$  e  $\beta$ : controlador entrada-saída.

Figura 3.22 – Função  $\sigma$ -modification: controlador entrada-saída.Figura 3.23 – Vetor de ganhos  $\theta$  na coordenadas  $\alpha$ : controlador entrada-saída.

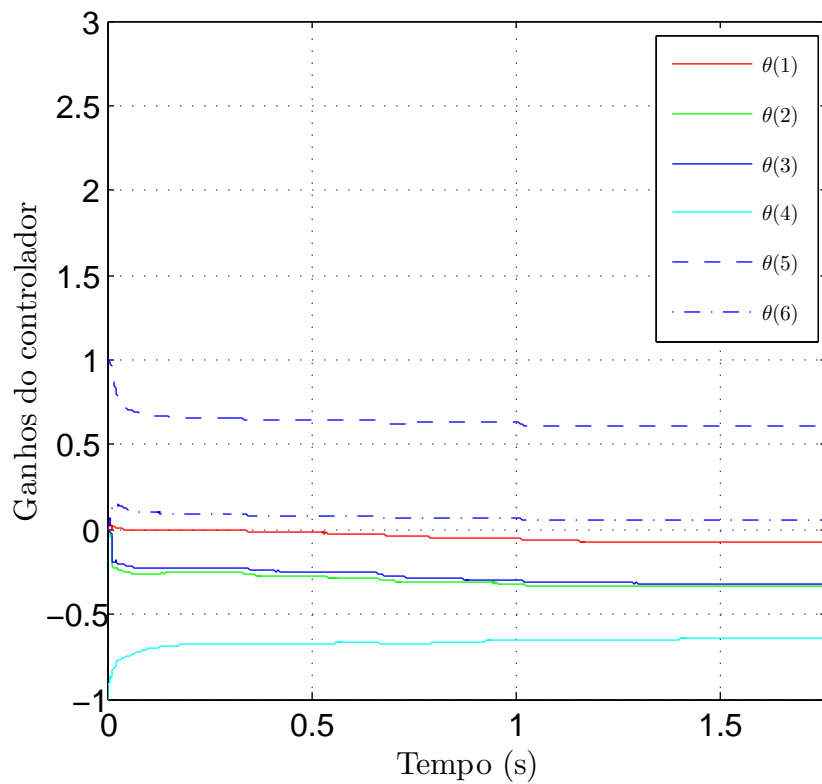


Figura 3.24 – Vetor de ganhos  $\theta$  na coordenadas  $\beta$ : controlador entrada-saída.

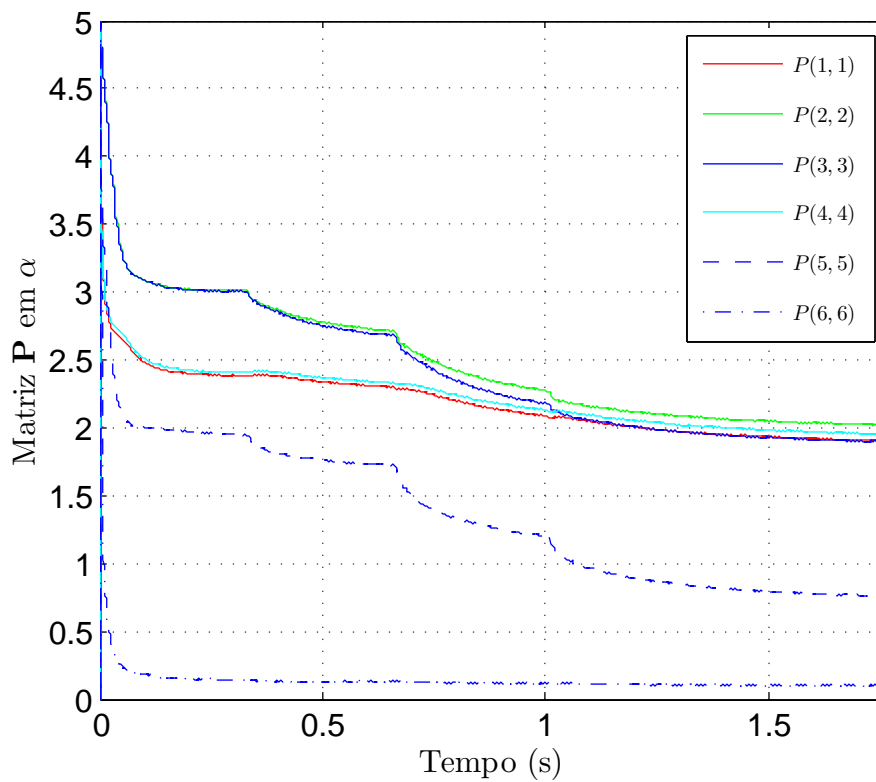


Figura 3.25 – Elementos da diagonal principal da matriz de covariância  $P$  na coordenada  $\alpha$ : controlador entrada-saída.

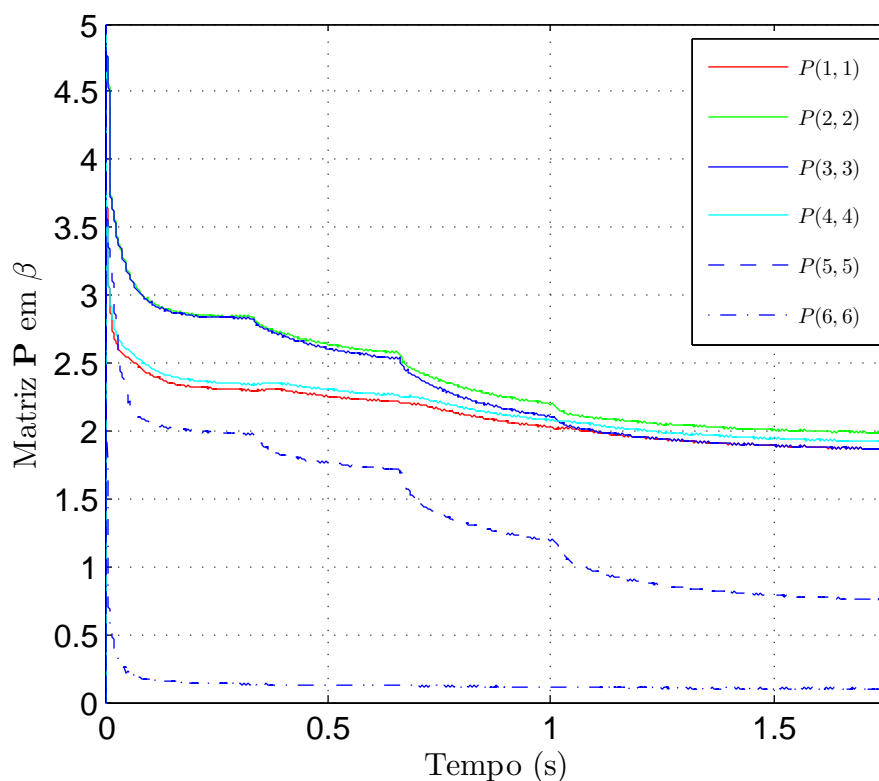


Figura 3.26 – Elementos da diagonal principal da matriz de covariância  $\mathbf{P}$  na coordenada  $\beta$ : controlador entrada-saída.

Assim como na abordagem de controle por realimentação de estados, as Figuras 3.17 e 3.18 demonstram que a envoltória da saída da planta  $y$  em malha fechada segue rapidamente a envoltória da saída do modelo de referência  $y_m$ . Estes dois resultados também demonstram a capacidade que o controlador RMRAC proposto tem de convergir em regime permanente.

A Figura 3.19 mostra a capacidade do controlador em minimizar o erro de rastreamento. Mesmo na presença de variações de referências em curto período de tempo, o controlador se mostra capaz de atenuar este erro no período transitório apresentado.

A ação de controle  $u$  (Figura 3.20) não apresenta saturação em nenhum ponto da simulação, o que mostra que o controlador tem a capacidade de estabilizar a planta com uma ação de controle  $u$  suave.

É possível notar que a envoltória do sinal de normalização  $m$  (Figura 3.21) estabiliza em regime permanente e, ao mesmo tempo, apresenta valores bem elevados, que é uma característica de controladores adaptativos robustos, pois para normalizar todos os sinais da malha fechada, o sinal  $m$  deve assumir valores maiores que os outros sinais da malha adaptativa.

Através da Figura 3.22 é possível notar que a função  $\sigma$ -modification tende para zero e, deste modo, pode-se concluir que o algoritmo de adaptação paramétrica é capaz de levar o vetor de ganhos  $\theta$  para um conjunto solução.

As Figuras 3.23 e 3.24 apresentam a rápida convergência do vetor de ganhos  $\theta$  para um conjunto solução. É possível notar que, apesar do vetor inicial  $\theta_{(0)}$  ser bem diferente do vetor de convergência  $\theta$ , em regime permanente, o sistema adaptativo consegue prover uma rápida convergência com um reduzido período transitório.

As Figuras 3.25 e 3.26 mostram a convergência dos elementos da diagonal principal da matriz de covariância  $\mathbf{P}$  para valores não nulos em regime permanente.



## 3.4.2.1 Resposta transitória: entrada-saída

A Figura 3.27 apresenta a saída da planta em malha fechada  $y$  e a saída do modelo de referência  $y_m$  na coordenada  $\alpha$  durante o evento 1.

A Figura 3.28 apresenta a saída da planta em malha fechada  $y$  e a saída do modelo de referência  $y_m$  na coordenada  $\beta$  durante o evento 1.

A Figura 3.29 apresenta a saída da planta em malha fechada  $y$  e a saída do modelo de referência  $y_m$  na coordenada  $\alpha$  durante o evento 4.

A Figura 3.30 apresenta a saída da planta em malha fechada  $y$  e a saída do modelo de referência  $y_m$  na coordenada  $\beta$  durante o evento 4.

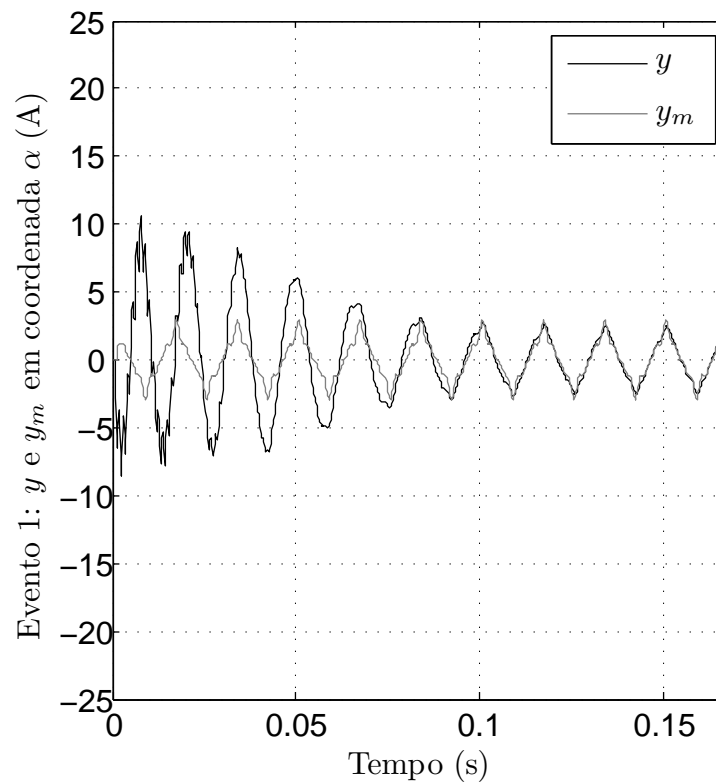


Figura 3.27 – Transitório no evento 1 - saída da planta em malha fechada  $y$  e saída do modelo de referência  $y_m$  na coordenada  $\alpha$ : entrada-saída.

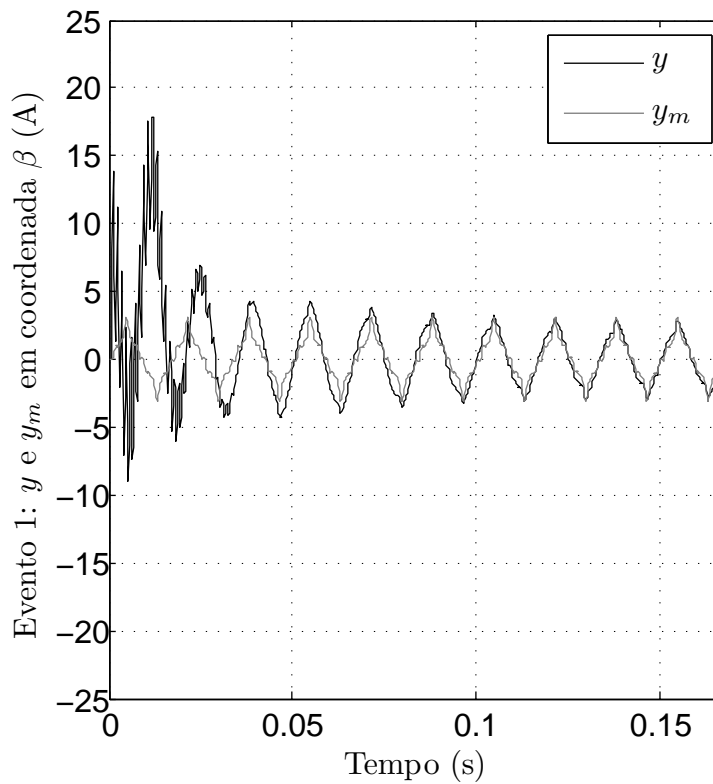


Figura 3.28 – Transitório no evento 1 - saída da planta em malha fechada  $y$  e saída do modelo de referência  $y_m$  na coordenada  $\beta$ : entrada-saída.

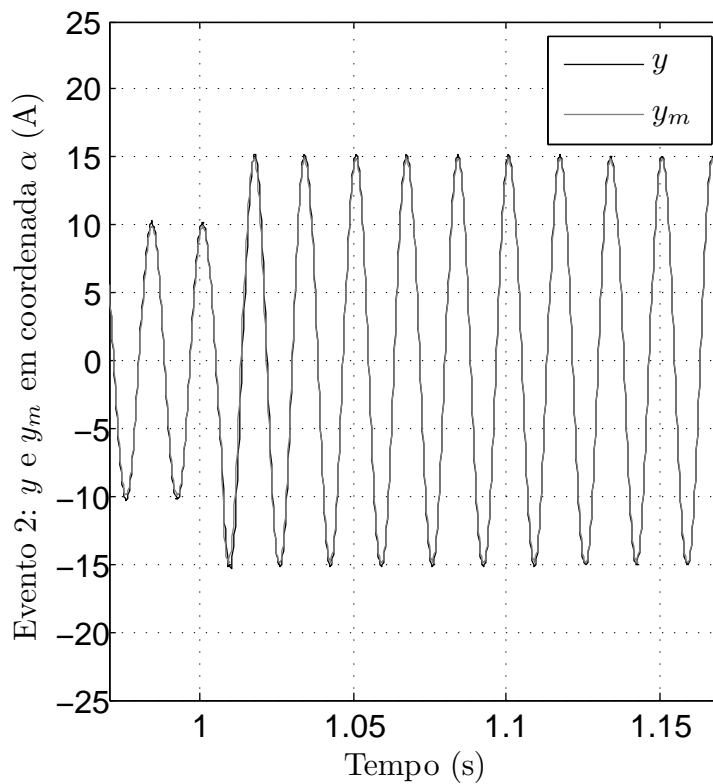


Figura 3.29 – Transitório no evento 4 - saída da planta em malha fechada  $y$  e saída do modelo de referência  $y_m$  na coordenada  $\alpha$ : entrada-saída.

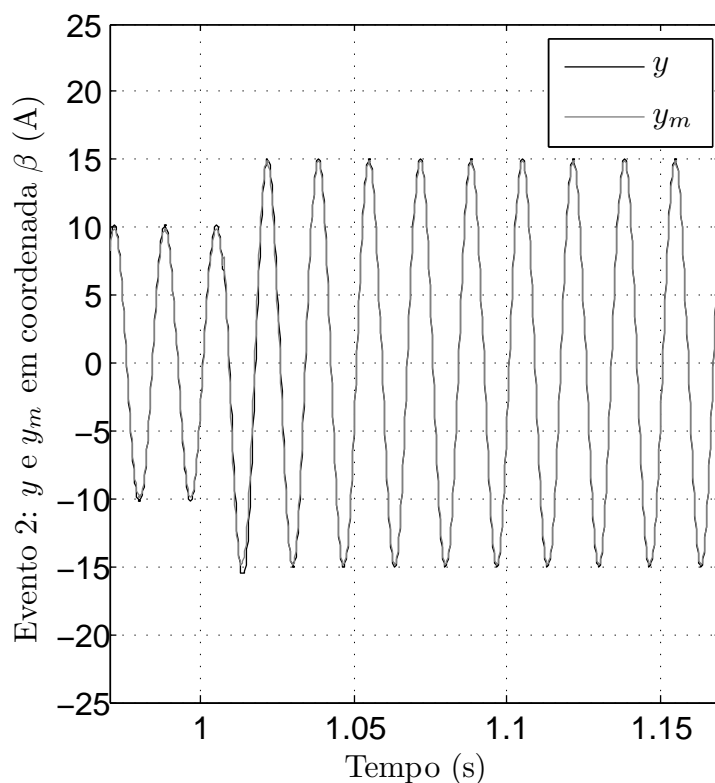


Figura 3.30 – Transitório no evento 4 - saída da planta em malha fechada  $y$  e saída do modelo de referência  $y_m$  na coordenada  $\beta$ : entrada-saída.

Através das Figuras 3.27 e 3.28 é possível verificar a capacidade do algoritmo de estabilizar a saída da planta  $y$  quando o sistema é inicializado com condições iniciais incertas e/ou não sabidas.

As Figuras 3.29 e 3.30 mostram a resposta do sistema em regime permanente. É possível notar que, rapidamente, a saída da planta  $y$  converge para a saída do modelo de referência  $y_m$  em regime permanente.

### 3.5 Conclusão do capítulo

Este capítulo apresentou o projeto do controlador proposto no Capítulo 2, aplicado ao controle de corrente em um conversor trifásico (a três fios) com filtro LCL de saída conectado à rede de energia. Este projeto é baseado nas restrições obtidas na análise de estabilidade. Resultados de simulação foram apresentados para mostrar a eficácia do controlador proposto, no que diz respeito a estabilidade, convergência do vetor de ganhos e dos sinais internos da malha fechada. Bons resultados foram obtidos tanto na abordagem por realimentação de estados quanto na abordagem entrada-saída. Observou-se que diante das variações citadas, a ação de controle não saturou e os parâmetros da ação de controle (vetor  $\theta$ ) se adaptaram rapidamente, a fim de minimizar o erro de rastreamento no sistema

de controle. Pode-se notar que a matriz  $\mathbf{P}$  converge para uma matriz constante, ou seja, o algoritmo RLS proposto converge para um algoritmo gradiente em regime permanente. Deste modo, em regime permanente o algoritmo de identificação mantém-se operante.

É importante notar que, os controladores apresentados, tanto na abordagem por realimentação de estado quanto na abordagem entrada-saída, foram projetados sem o conhecimento prévio da indutância da rede. No caso, para fins de simulação, utilizou-se uma indutância (para a rede)  $L_{g2} = 1$  mH (ver Tabela 3.4) . Outro aspecto interessante é o fato do vetor de ganhos  $\boldsymbol{\theta}$  inicial, ou seja  $\boldsymbol{\theta}_{(0)}$ , ser completamente diferente do valor de convergência, ou seja, o sistema é inicializado a partir de um ponto incerto e/ou não sabido. Estas características salientam as boas características de estabilidade e desempenho do controlador proposto em ambas abordagens: realimentação de estados e entrada-saída.

## 4 Resultados experimentais

Este Capítulo apresenta os resultados experimentais do controlador RMRAC proposto no Capítulo 2 e projetado no Capítulo 3 aplicado ao controle das correntes, pelo lado da rede, em um conversor trifásico (a três fios) com filtro LCL conectado à rede de energia elétrica. As duas abordagens de controle apresentadas previamente são utilizadas: controle por realimentação de estados e controle entrada-saída.

O conversor é conectado à rede de energia elétrica através de um transformador trifásico. É importante destacar que a tensão do barramento CC (ver Figura 3.1) não é controlada, no entanto, isto não comprometeu os resultados experimentais obtidos.

Buscou-se repetir, experimentalmente, os mesmos resultados obtidos durante a simulação (Capítulo 3). O sistema é testado experimentalmente em um protótipo de laboratório. O controlador foi implementado em um DSC de ponto flutuante de 32 bits, modelo TMS320F28335 da empresa Texas Instruments. O protótipo implementado possui as mesmas características apresentadas na Tabela 3.4. Obviamente, numa aplicação real, os valores das resistências  $r_c$ ,  $r_{g1}$  e  $r_{g2}$  e da indutância  $L_{g2}$  são desconhecidos. Como o controlador RMRAC foi projetado levando em conta apenas as características do filtro LCL, indutâncias de 1 mH foram adicionadas em série aos terminais do transformador variável para emular uma rede com impedância desconhecida.

No ensaio do sistema de controle conectado à rede, outro passo muito importante é o sincronismo do controlador com as tensões trifásicas da rede. Para a realização deste sincronismo, inicialmente são realizadas as medidas das tensões trifásicas de linha no PCC, então estas tensões são convertidas para tensões de fase e, após isto, é realizada a transformação de tensões de fase de coordenadas abc para  $\alpha\beta$ . Estas variáveis (tensões do PCC) em  $\alpha\beta$  são utilizadas para a obtenção dos sinais em fase e quadratura (seno e cosseno) da componente fundamental para posterior geração das referências de corrente. A obtenção dos respectivos sinais em fase e quadratura (da fundamental) é realizada através de um filtro de Kalman (CARDOSO et al., 2008).

Para gerar a lei de controle através do conversor trifásico a três fios (ver figura 3.1), uma modulação *Space Vector* foi utilizada (PINHEIRO et al., 2005).

Salienta-se que, assim como nos resultados de simulação, o controlador é projetado sem o prévio conhecimento da indutância da rede  $L_{g2}$ .

Alguns resultados experimentais adicionais são apresentados no Apêndice A. Neste apêndice, as correntes trifásicas obtidas através de um osciloscópio Tektronix DPO 3034 são apresentadas.

#### 4.1 Resultados experimentais utilizando a abordagem por realimentação de estados

Os parâmetros utilizados na validação experimental do algoritmo, no ensaio de conexão com a rede de energia utilizando a abordagem de realimentação de estados, são idênticos aos apresentados no Capítulo 3 (Tabela 3.2).

##### 4.1.1 Ensaio conectado à rede

As Figuras 4.1 à 4.10 apresentam os resultados do conversor conectado à rede. Estes gráficos foram obtidos através da aquisição das variáveis na memória interna do DSC numa taxa de aquisição de 1125 amostras por segundo. Esta taxa é menor que a taxa de amostragem utilizada no controle (4,5 kHz), devido à limitação de memória do DSC. Portanto, para plotar as variáveis internas do algoritmo adaptativo, com razoável resolução, durante um tempo de 1,75 s, foi escolhida uma taxa de aquisição de 1125 amostras por segundo.

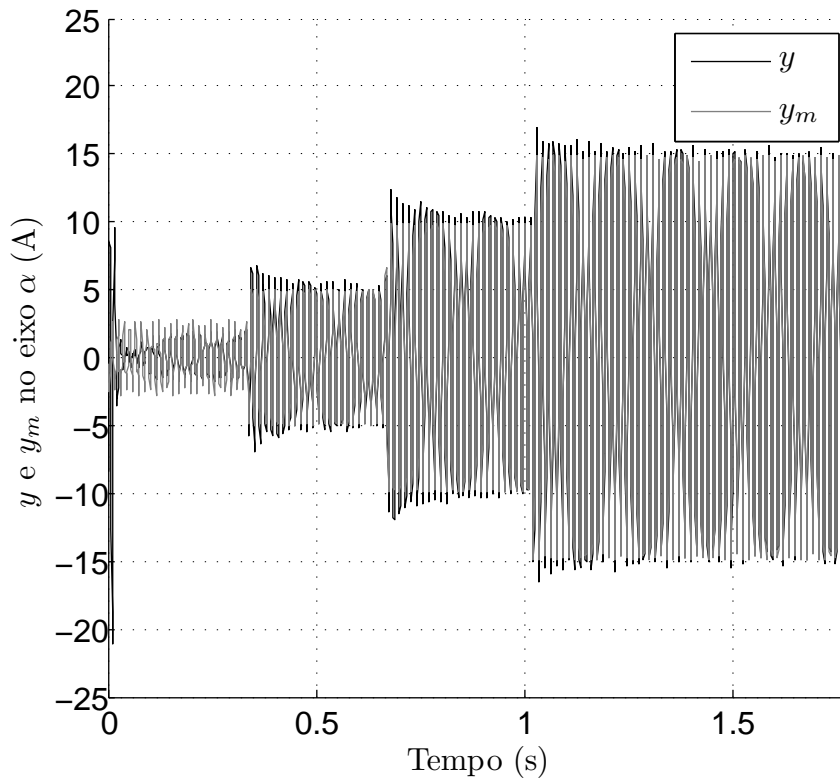


Figura 4.1 – Saída da planta em malha fechada  $y$  e saída do modelo de referência  $y_m$  em coordenada  $\alpha$ : realimentação de estados.

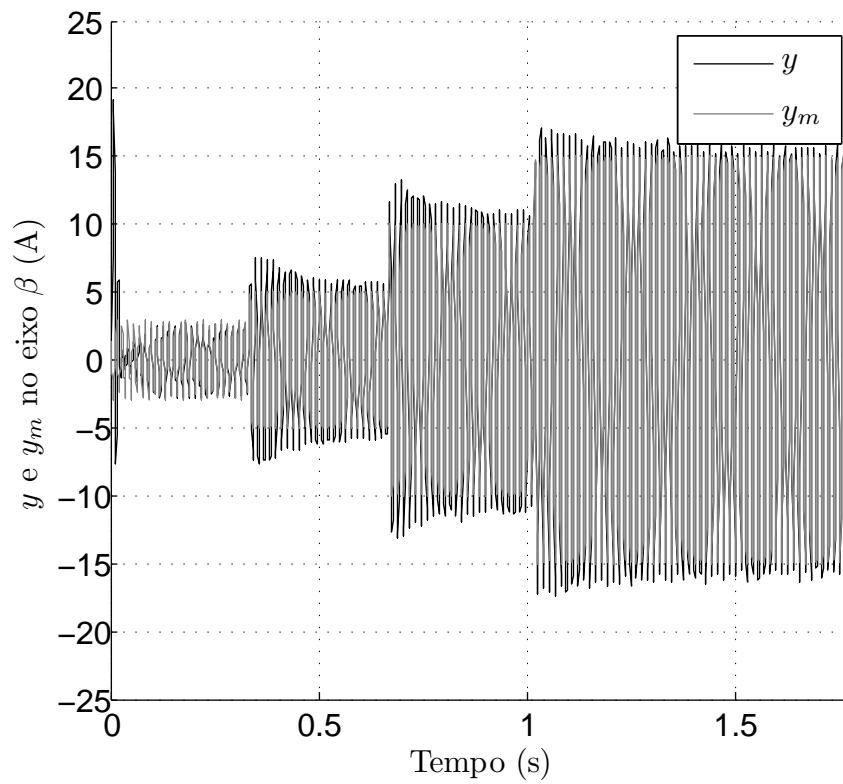


Figura 4.2 – Saída da planta em malha fechada  $y$  e saída do modelo de referência  $y_m$  em coordenada  $\beta$ : realimentação de estados.

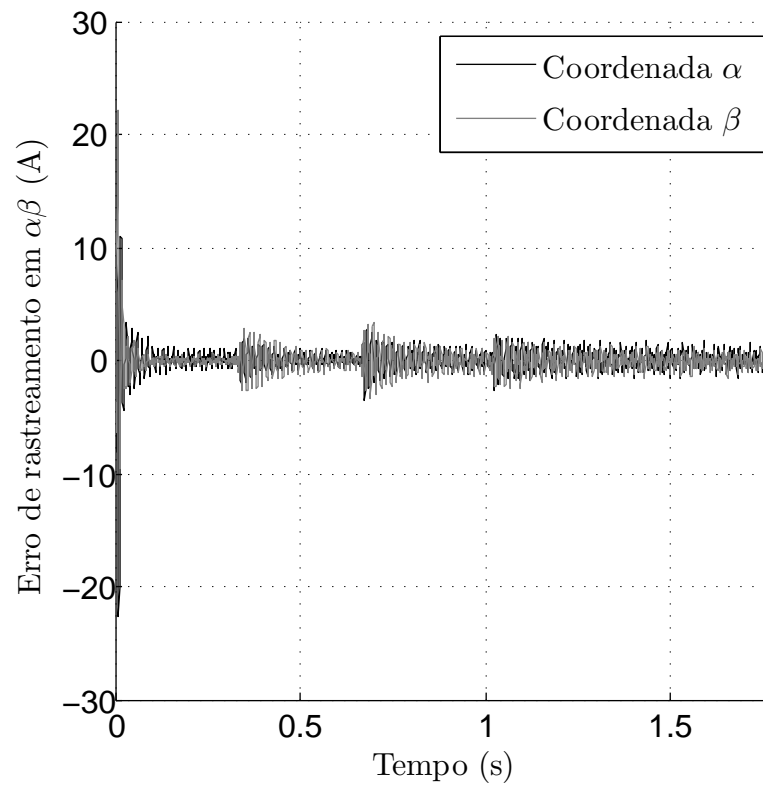


Figura 4.3 – Erro de rastreamento em coordenadas  $\alpha\beta$ : realimentação de estados.

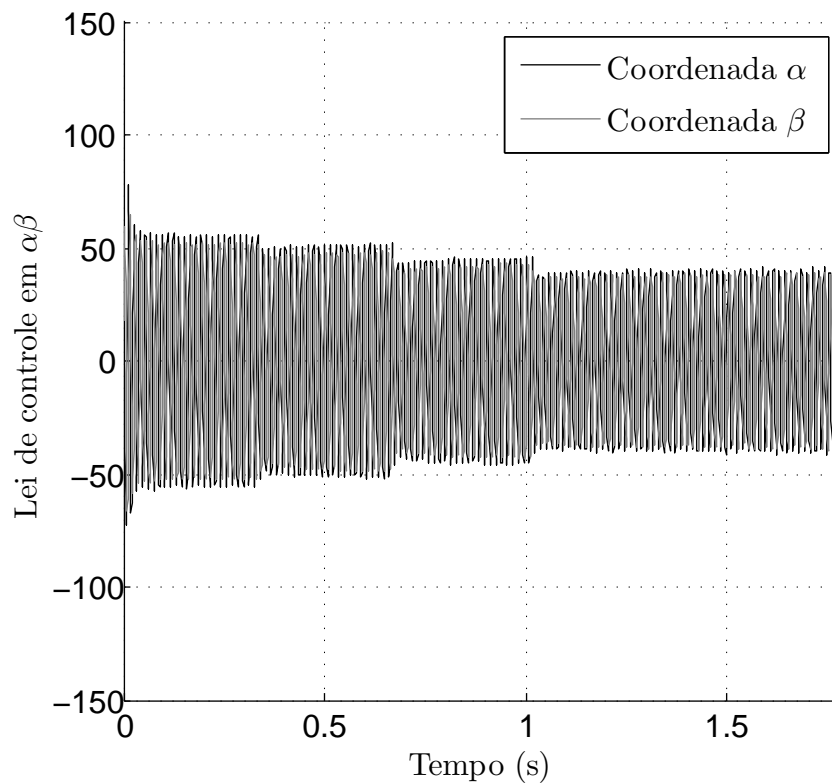


Figura 4.4 – Lei de controle em coordenadas  $\alpha\beta$ : realimentação de estados.

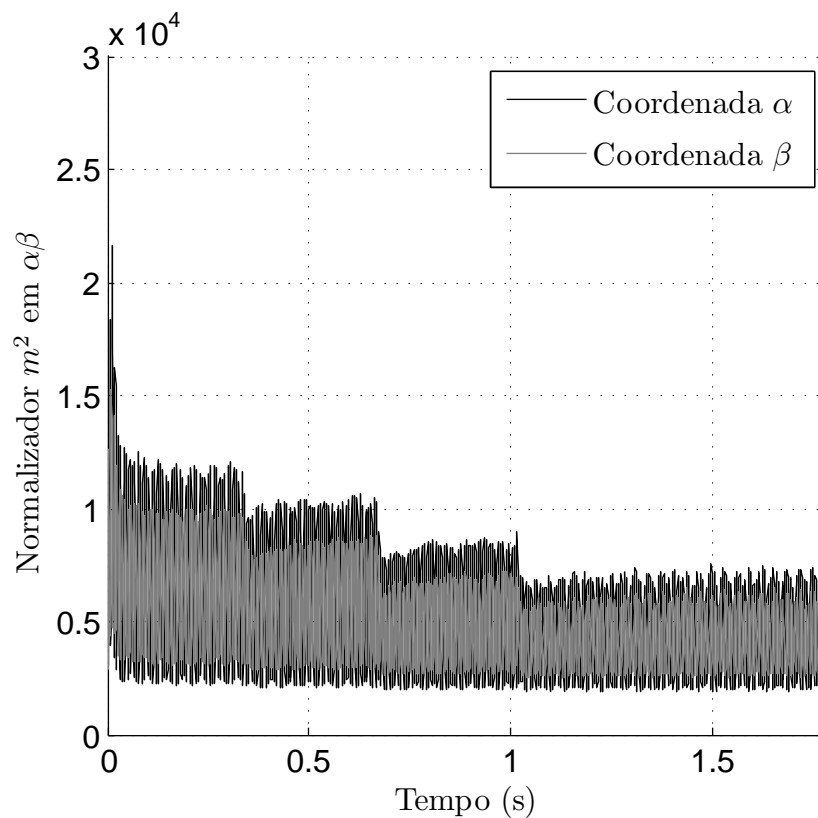
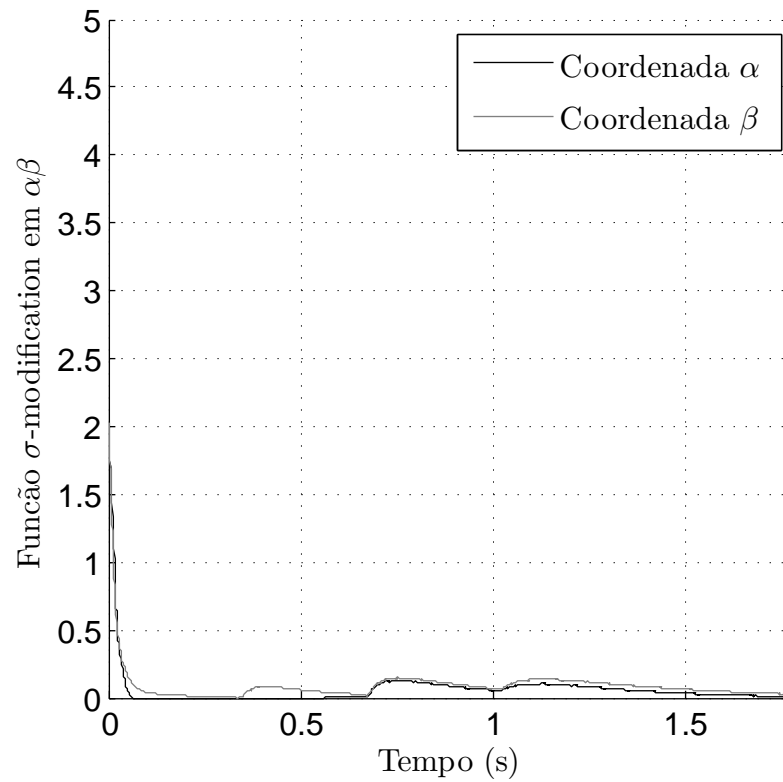
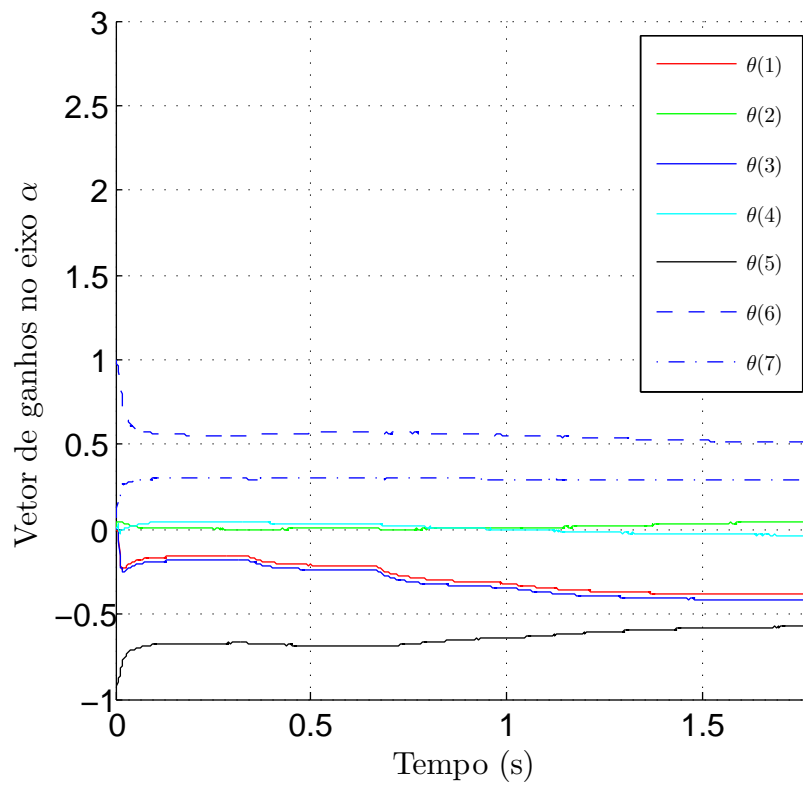


Figura 4.5 – Normalizador  $m^2$  em coordenadas  $\alpha\beta$ : realimentação de estados.



Figura 4.6 – Função  $\sigma$ -modification em coordenadas  $\alpha\beta$ : realimentação de estados.Figura 4.7 – Vetor de ganhos  $\theta$  no eixo  $\alpha$ : realimentação de estados.

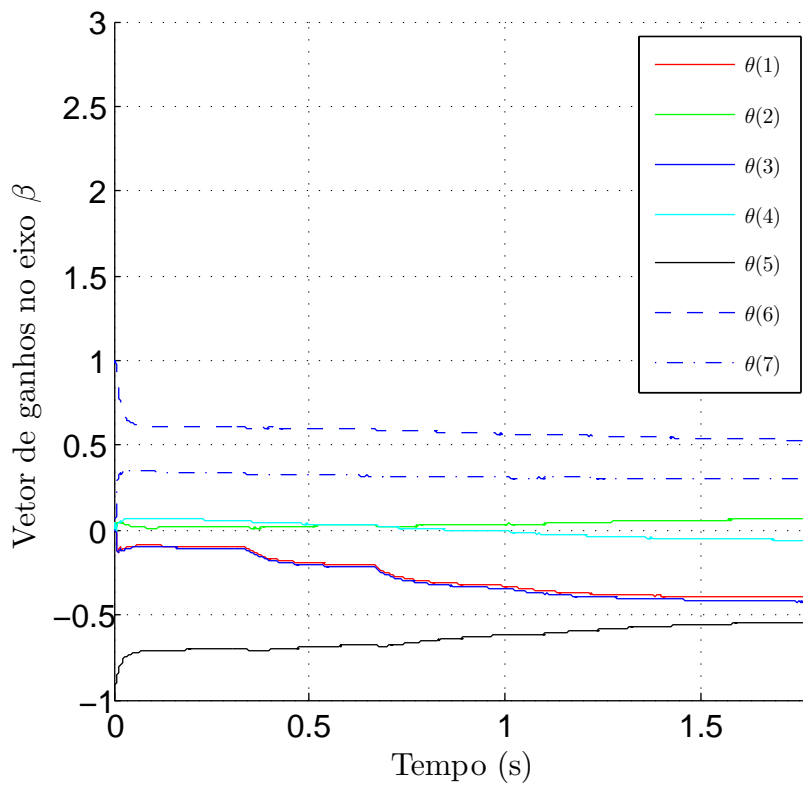


Figura 4.8 – Vetor de ganhos  $\theta$  no eixo  $\beta$ : realimentação de estados.

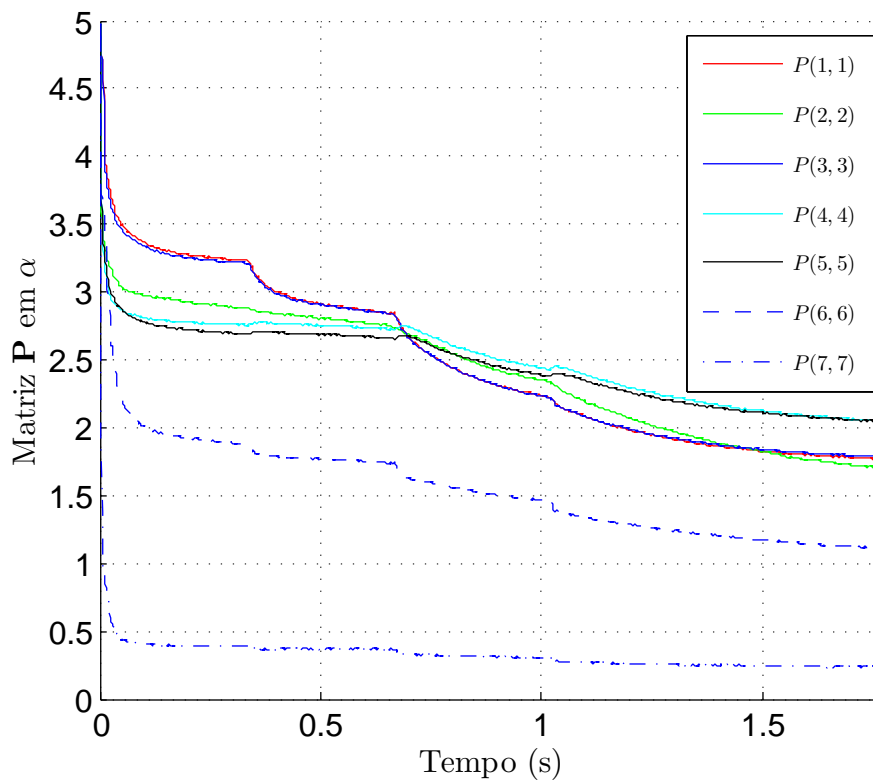


Figura 4.9 – Elementos da diagonal principal da matriz  $\mathbf{P}$  em  $\alpha$ : realimentação de estados.

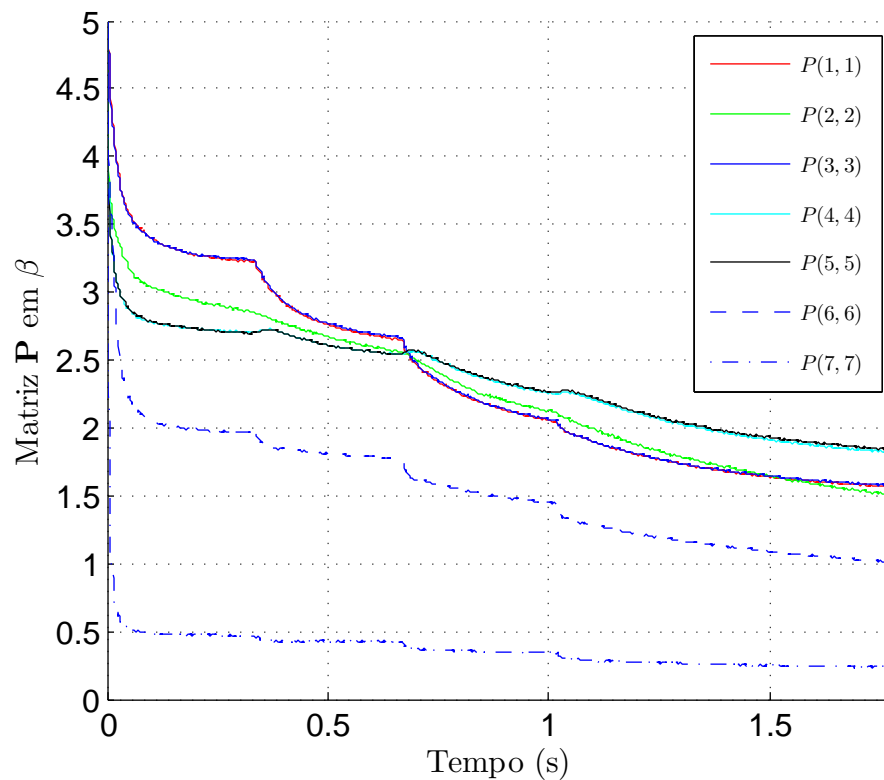


Figura 4.10 – Elementos da diagonal principal da matriz  $\mathbf{P}$  em  $\beta$ : realimentação de estados.

Analisando as Figuras 4.1 e 4.2 pode se ver que a envoltória da saída da planta  $y$  em malha fechada segue a envoltória da saída do modelo de referência  $y_m$ . No entanto, o erro de rastreamento entre  $y$  e  $y_m$  (Figura 4.3) possui amplitude um pouco maior que nos resultados de simulação. Porém, a medida que o tempo evolui, o erro tende a valores menores.

Assim como nos resultados de simulação, a ação de controle  $u$  (Figura 4.4) não apresenta saturação em nenhum ponto da simulação, o que demonstra que o controlador tem a capacidade de estabilizar a planta com uma ação de controle  $u$  suave.

Através destes resultados experimentais, também é possível notar que a envoltória do sinal de normalização  $m$  (Figura 4.5) estabiliza em regime permanente e, ao mesmo tempo, apresenta valores bem elevados, que é uma característica de controladores adaptativos robustos.

Através da Figura 4.6 é possível notar que a função  $\sigma$ -modification tende para zero e, deste modo, pode-se concluir que o algoritmo de adaptação paramétrica é capaz de levar o vetor de ganhos  $\theta$  para um conjunto solução.

Nestes resultados, também é possível verificar que os elementos do vetor de ganhos  $\theta$  (Figuras 4.7 e 4.8) apresentam rápida convergência. É possível confirmar que, apesar do vetor inicial  $\theta_{(0)}$  ser bem diferente do vetor de convergência  $\theta$ , em regime permanente, o sistema adaptativo consegue prover uma rápida convergência com um reduzido período

transitório.

As Figuras 4.9 e 4.10 demonstram experimentalmente a convergência dos elementos da diagonal principal da matriz de covariância  $\mathbf{P}$  para valores não nulos em regime permanente.

## 4.1.1.1 Resposta transitória: abordagem por realimentação de estados

Os eventos apresentados a seguir são os mesmos descritos no Capítulo 3.

A Figura 4.11 apresenta a saída do sistema em malha fechada  $y$  e a saída do modelo de referência  $y_m$  na coordenada  $\alpha$  durante o evento 1.

A Figura 4.12 apresenta a saída do sistema em malha fechada  $y$  e a saída do modelo de referência  $y_m$  na coordenada  $\beta$  durante o evento 1.

A Figura 4.13 apresenta a saída do sistema em malha fechada  $y$  e a saída do modelo de referência  $y_m$  na coordenada  $\alpha$  durante o evento 4.

A Figura 4.14 apresenta a saída do sistema em malha fechada  $y$  e a saída do modelo de referência  $y_m$  na coordenada  $\beta$  durante o evento 4.

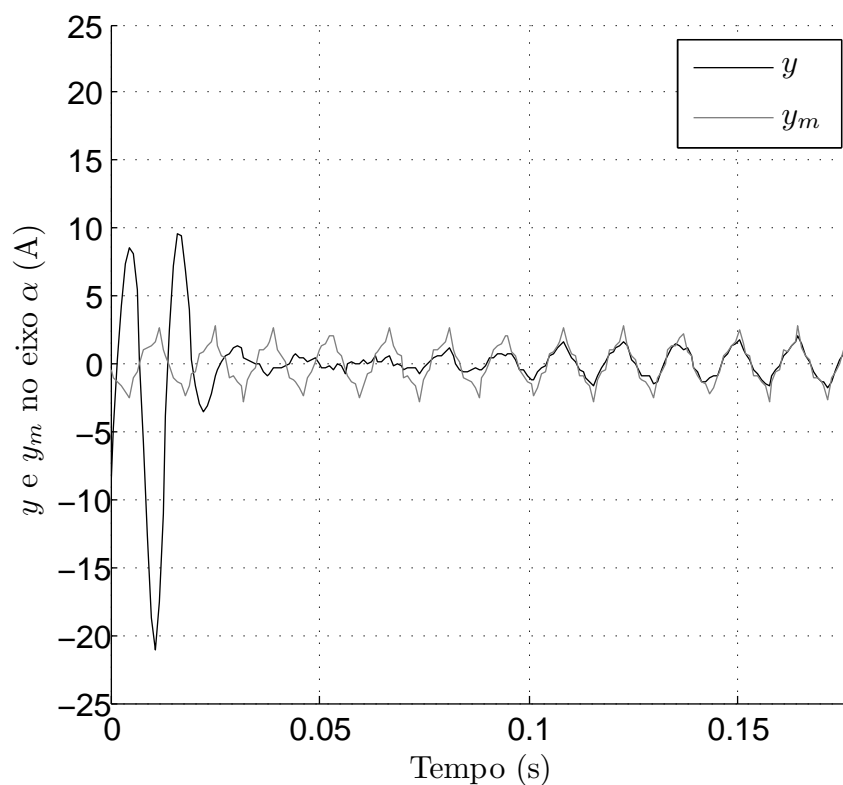


Figura 4.11 – Transitório no evento 1 - Saída da planta em malha fechada  $y$  e saída do modelo de referência  $y_m$  na coordenada  $\alpha$ : realimentação de estados.

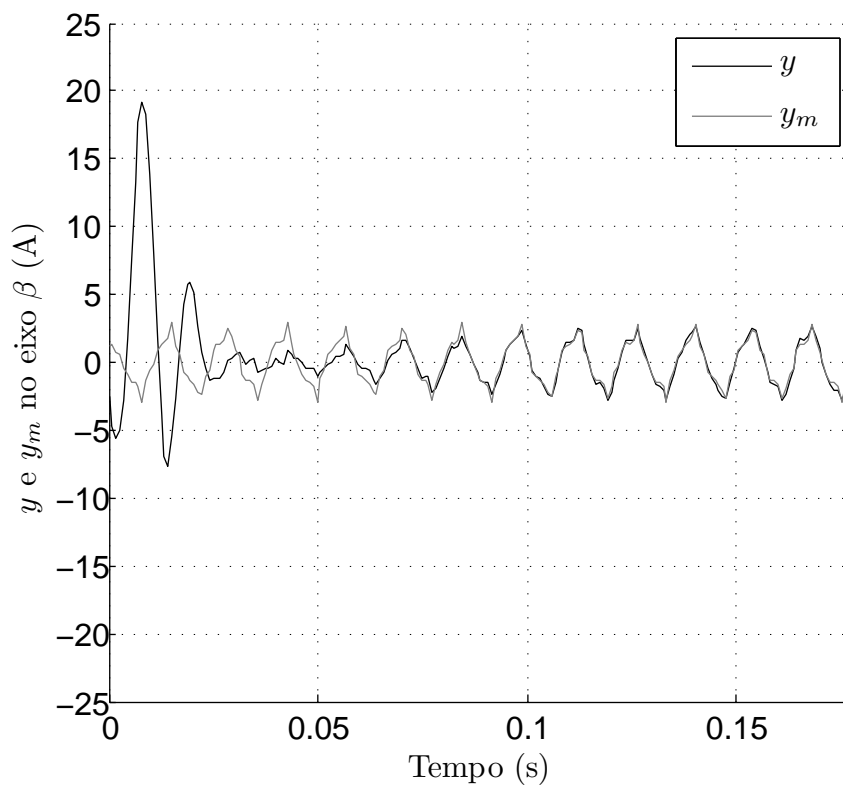


Figura 4.12 – Transitório no evento 1 - Saída da planta em malha fechada  $y$  e saída do modelo de referência  $y_m$  na coordenada  $\beta$ : realimentação de estados.

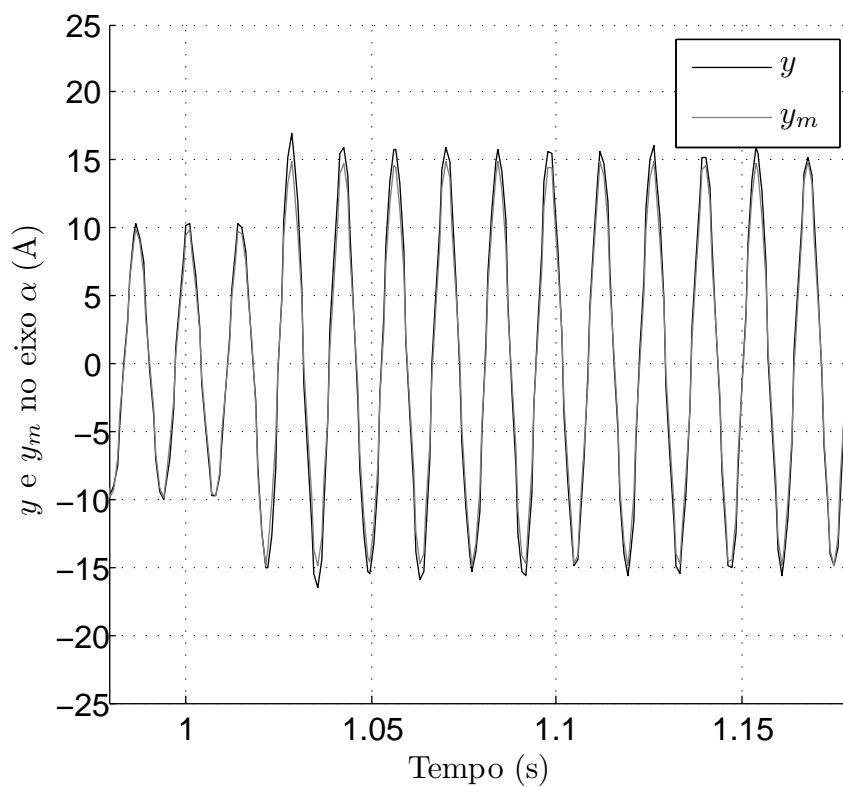


Figura 4.13 – Transitório no evento 4 - Saída da planta em malha fechada  $y$  e saída do modelo de referência  $y_m$  na coordenada  $\alpha$ : realimentação de estados.

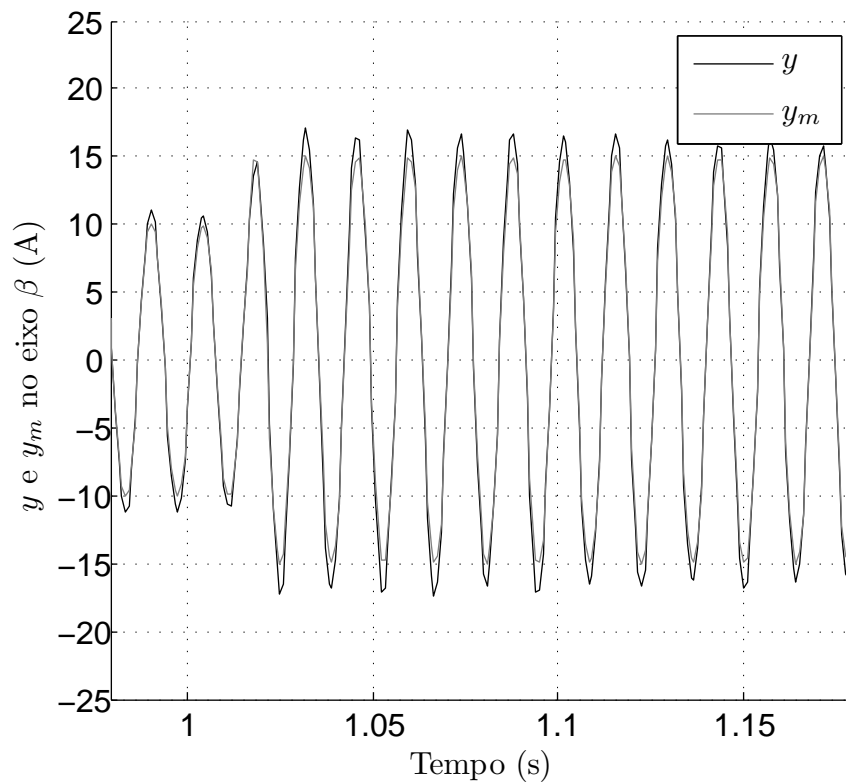


Figura 4.14 – Transitório no evento 4 - Saída da planta em malha fechada  $y$  e saída do modelo de referência  $y_m$  na coordenada  $\beta$ : realimentação de estados.

Através das Figuras 4.11 e 4.12 é possível confirmar experimentalmente a capacidade do algoritmo proposto de estabilizar a saída da planta  $y$  quando o sistema é inicializado com condições iniciais incertas e/ou não sabidas.

As Figuras 4.13 e 4.14 mostram a resposta do sistema em regime permanente. É possível notar, mais uma vez, que a saída da planta  $y$  converge para a saída do modelo de referência  $y_m$  em regime permanente.

## 4.2 Resultados experimentais utilizando a abordagem entrada-saída

Os parâmetros utilizados na validação experimental do algoritmo, no ensaio de conexão com a rede de energia utilizando a abordagem entrada-saída, são idênticos aos apresentados no Capítulo 3 (Tabela 3.3).

### 4.2.1 Ensaio conectado à rede

As Figuras 4.15 à 4.24 apresentam os resultados do conversor conectado à rede.

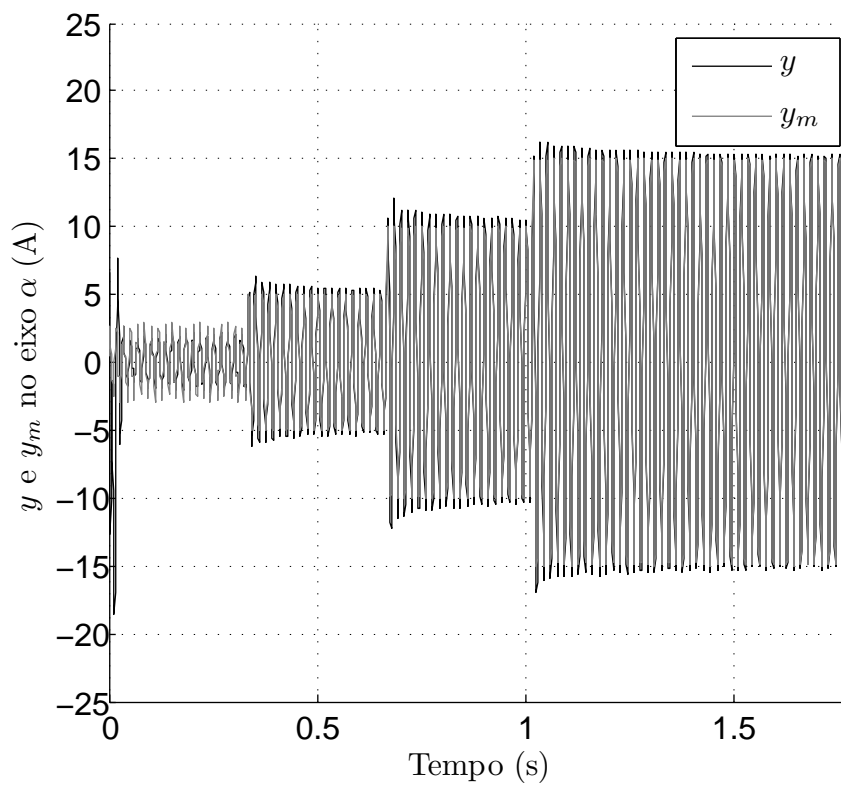


Figura 4.15 – Saída da planta em malha fechada  $y$  e saída do modelo de referência  $y_m$  em coordenada  $\alpha$ : entrada-saída.

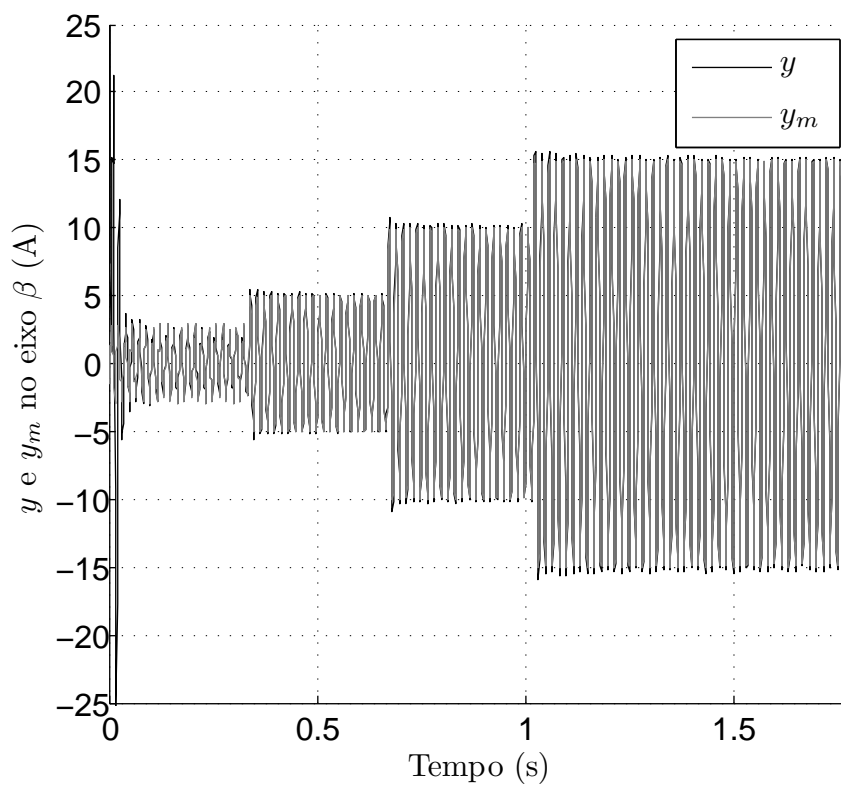
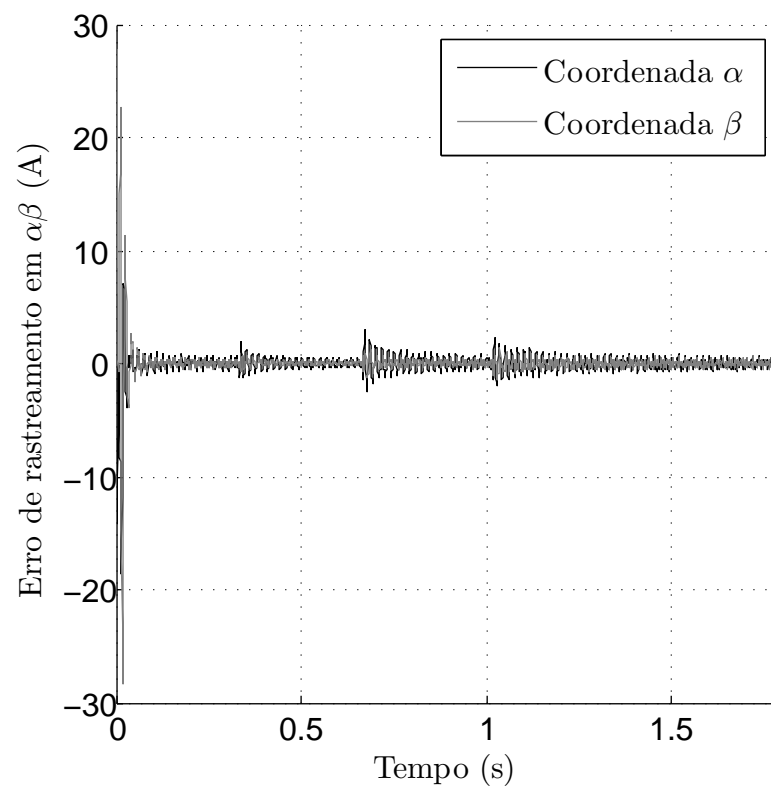
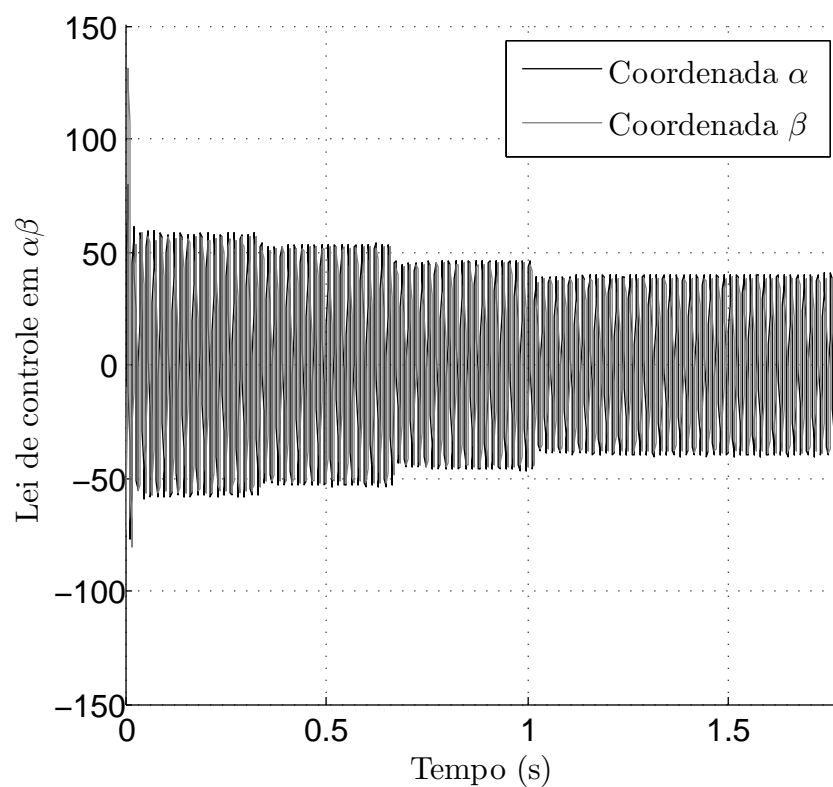
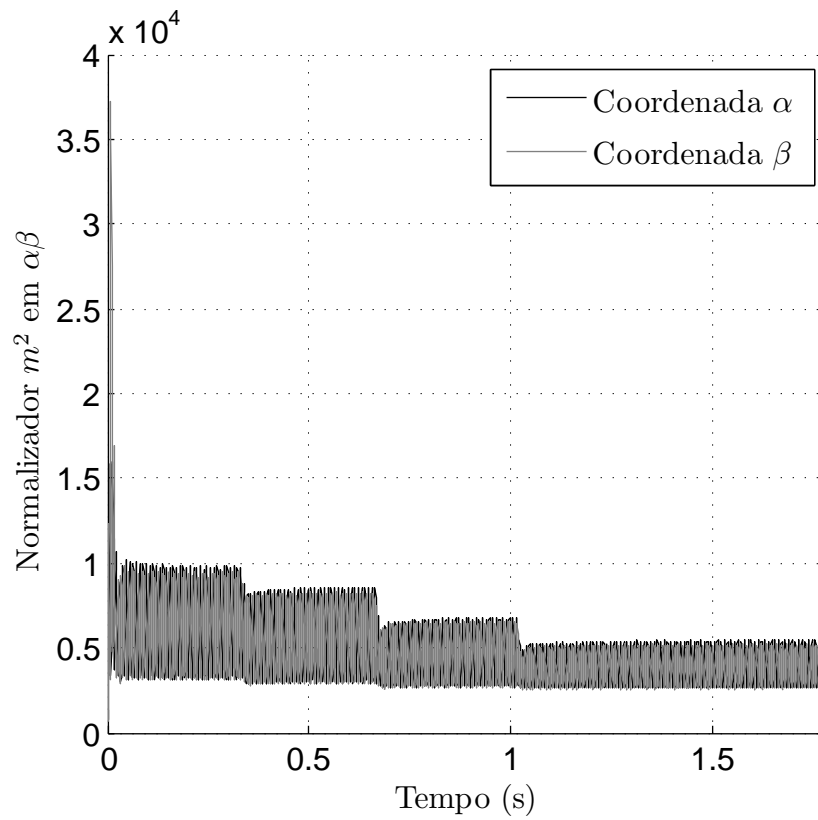
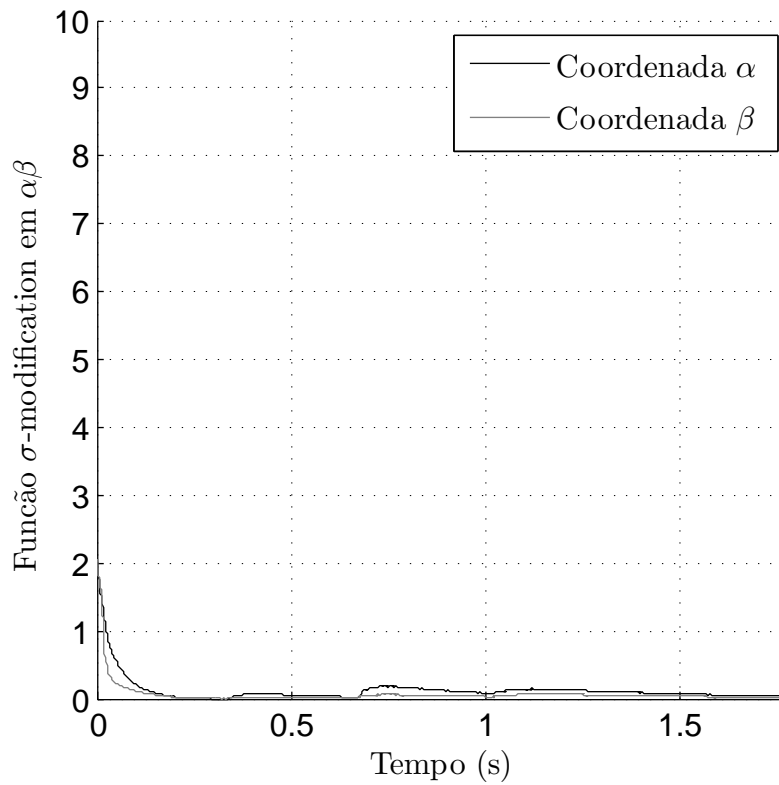
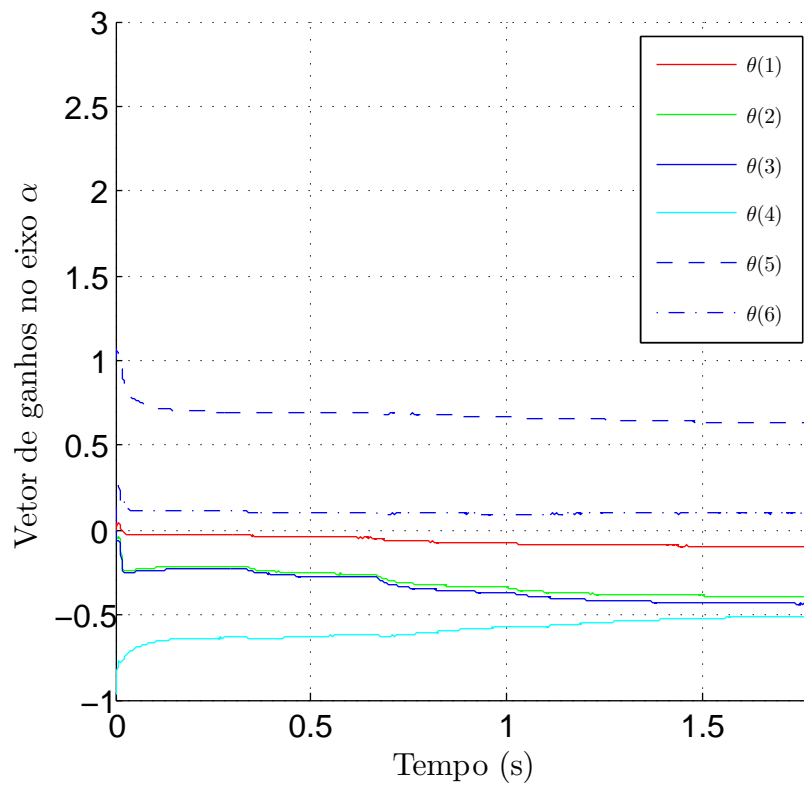
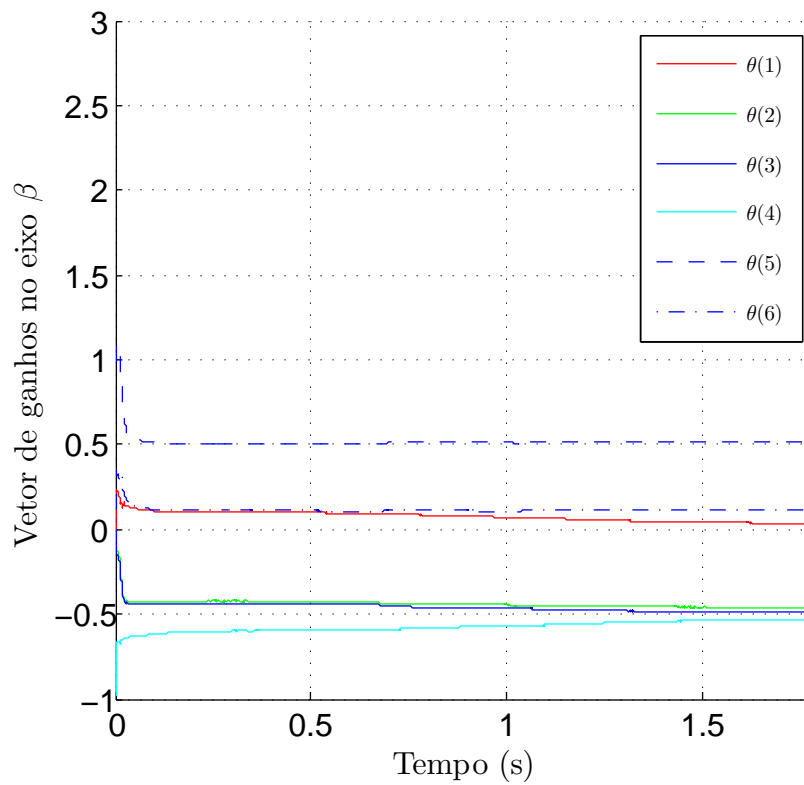


Figura 4.16 – Saída da planta em malha fechada  $y$  e saída do modelo de referência  $y_m$  em coordenada  $\beta$ : entrada-saída.



Figura 4.17 – Erro de rastreamento em coordenadas  $\alpha\beta$ : entrada-saída.Figura 4.18 – Lei de controle em coordenadas  $\alpha\beta$ : entrada-saída.

Figura 4.19 – Normalizador  $m^2$  em coordenadas  $\alpha\beta$ : entrada-saída.Figura 4.20 – Função  $\sigma$ -modification em coordenadas  $\alpha\beta$ : entrada-saída.

Figura 4.21 – Vetor de ganhos  $\theta$  no eixo  $\alpha$ : entrada-saída.Figura 4.22 – Vetor de ganhos  $\theta$  no eixo  $\beta$ : entrada-saída.

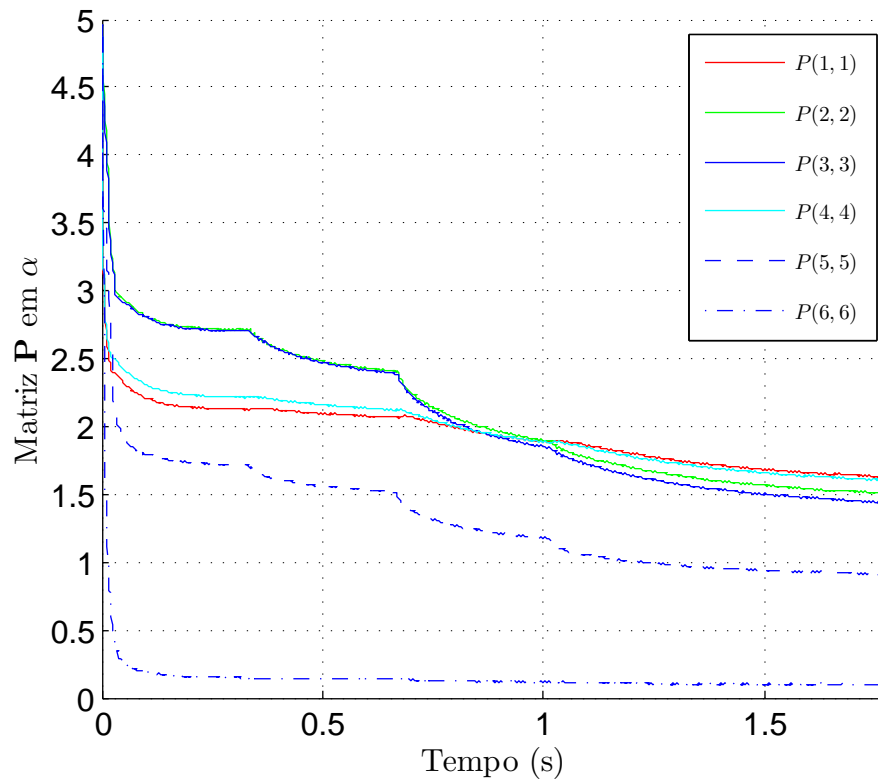


Figura 4.23 – Elementos da diagonal principal da matriz  $\mathbf{P}$  em  $\alpha$ : entrada-saída.

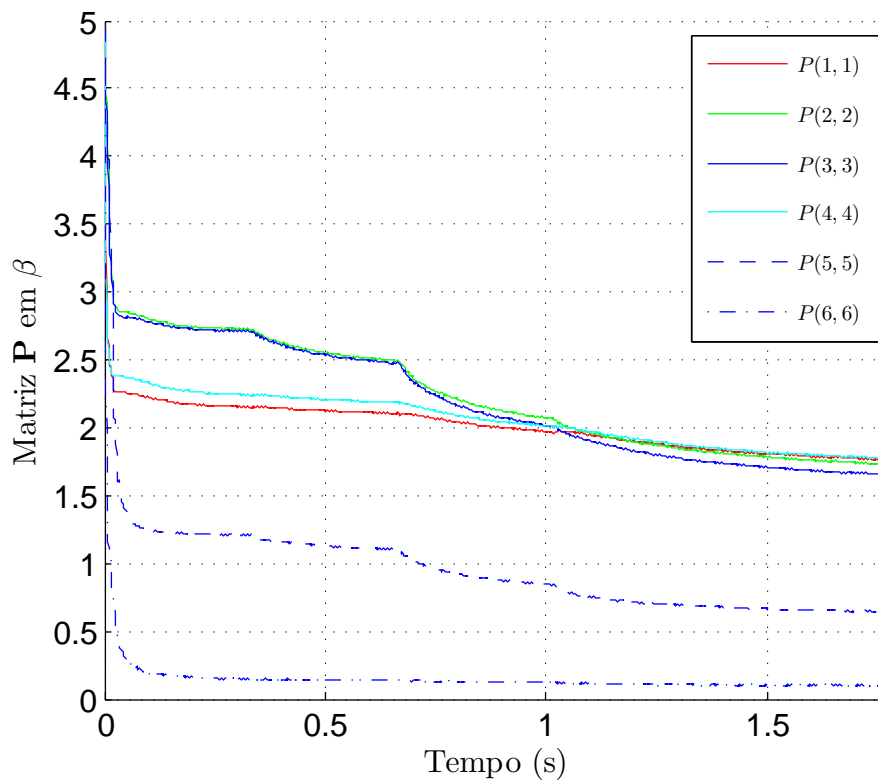


Figura 4.24 – Elementos da diagonal principal da matriz  $\mathbf{P}$  em  $\beta$ : entrada-saída.

Através das Figuras 4.15 e 4.16 pode se verificar que a envoltória da saída da planta  $y$  em malha fechada segue rapidamente a envoltória da saída do modelo de referência  $y_m$ . Estes dois resultados demonstram a capacidade que o controlador RMRAC proposto tem de convergir em regime permanente.

A Figura 4.17 mostra a capacidade do controlador em minimizar o erro de rastreamento. Mesmo na presença de variações de referências em curto período de tempo, o controlador se mostra capaz de atenuar este erro no período transitório apresentado.

A ação de controle  $u$  (Figura 4.18) não apresenta saturação em nenhum ponto da simulação, o que mostra que o controlador tem a capacidade de estabilizar a planta com uma ação de controle  $u$  suave.

É possível notar que a envoltória do sinal de normalização  $m$  (Figura 4.19) estabiliza em regime permanente e, ao mesmo tempo, apresenta valores bem elevados, que é uma característica de controladores adaptativos robustos, pois para normalizar todos os sinais da malha fechada, o sinal  $m$  deve assumir valores maiores que os outros sinais da malha adaptativa.

Através da Figura 4.20 é possível notar que a função  $\sigma$ -modification tende para zero e, deste modo, pode-se concluir que o algoritmo de adaptação paramétrica é capaz de levar o vetor de ganhos  $\theta$  para um conjunto solução.

As Figuras 4.21 e 4.22 apresentam a rápida convergência do vetor de ganhos  $\theta$  para um conjunto solução. É possível notar que, apesar do vetor inicial  $\theta_{(0)}$  ser bem diferente do vetor de convergência  $\theta$ , em regime permanente, o sistema adaptativo consegue prover uma rápida convergência com um reduzido período transitório.

As Figuras 4.23 e 4.24 mostram a convergência dos elementos da diagonal principal da matriz de covariância  $\mathbf{P}$  para valores não nulos em regime permanente.

## 4.2.1.1 Resposta transitória: abordagem entrada-saída

Os eventos apresentados a seguir são os mesmos descritos no Capítulo 3.

A Figura 4.25 apresenta a saída do sistema em malha fechada  $y$  e a saída do modelo de referência  $y_m$  na coordenada  $\alpha$  durante o evento 1.

A Figura 4.26 apresenta a saída do sistema em malha fechada  $y$  e a saída do modelo de referência  $y_m$  na coordenada  $\beta$  durante o evento 1.

A Figura 4.27 apresenta a saída do sistema em malha fechada  $y$  e a saída do modelo de referência  $y_m$  na coordenada  $\alpha$  durante o evento 4.

A Figura 4.28 apresenta a saída do sistema em malha fechada  $y$  e a saída do modelo de referência  $y_m$  na coordenada  $\beta$  durante o evento 4.

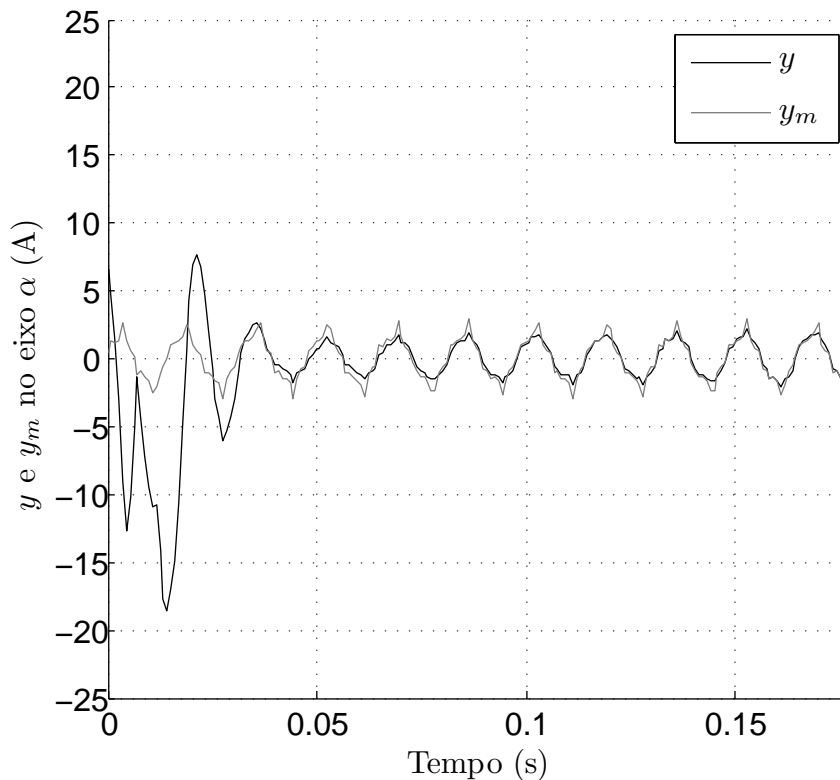


Figura 4.25 – Transitório no evento 1 - Saída da planta em malha fechada  $y$  e saída do modelo de referência  $y_m$  na coordenada  $\alpha$ : entrada-saída.

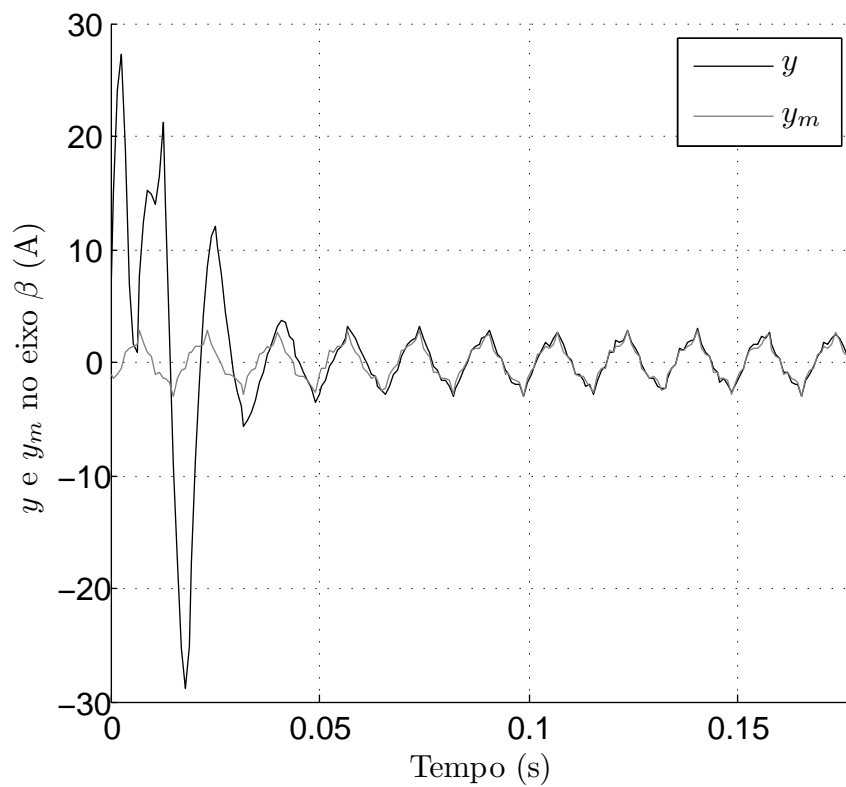


Figura 4.26 – Transitório no evento 1 - Saída da planta em malha fechada  $y$  e saída do modelo de referência  $y_m$  na coordenada  $\beta$ : entrada-saída.

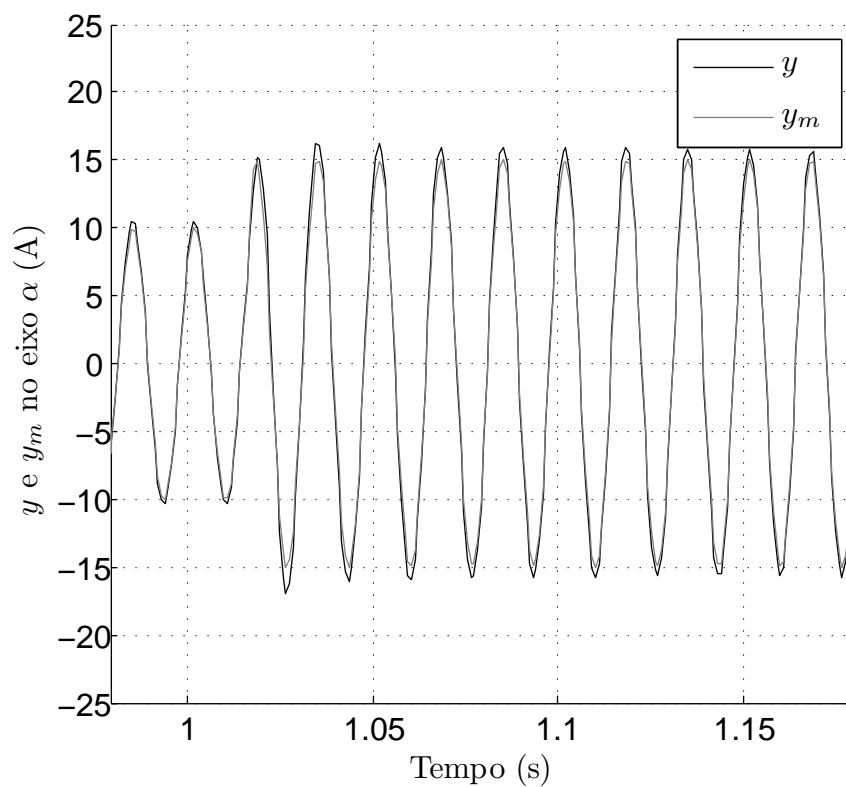


Figura 4.27 – Transitório no evento 4 - Saída da planta em malha fechada  $y$  e saída do modelo de referência  $y_m$  na coordenada  $\alpha$ : entrada-saída.

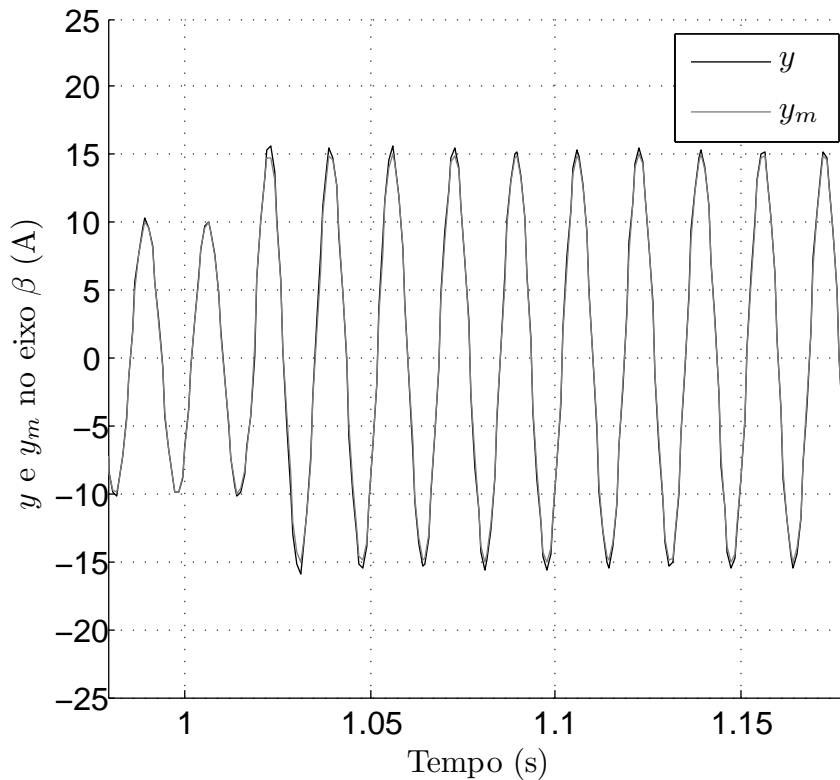


Figura 4.28 – Transitório no evento 4 - Saída da planta em malha fechada  $y$  e saída do modelo de referência  $y_m$  na coordenada  $\beta$ : entrada-saída.

Através das Figuras 4.25 e 4.26 é possível verificar a capacidade do algoritmo de estabilizar a saída da planta  $y$  quando o sistema é inicializado com condições iniciais incertas e/ou não sabidas.

As Figuras 4.27 e 4.28 mostram a resposta do sistema em regime permanente. É possível notar que, rapidamente, a saída da planta  $y$  converge para a saída do modelo de referência  $y_m$  em regime permanente.

### 4.3 Conclusão do capítulo

Este capítulo apresentou a implementação do controlador RMRAC proposto aplicado ao controle de corrente em um conversor trifásico (a três fios) com filtro LCL de saída conectado à rede de energia.

Resultados experimentais foram apresentados para mostrar a eficácia do controlador proposto, no que diz respeito a estabilidade, convergência do vetor de ganhos e dos sinais internos da malha fechada. Bons resultados foram obtidos tanto na abordagem por realimentação de estados quanto na abordagem entrada-saída. Observou-se que diante das variações citadas, a lei de controle não saturou e os parâmetros da lei de controle (vetor  $\theta$ ) se adaptaram rapidamente, a fim de minimizar o erro de rastreamento no sistema



de controle. Pode-se notar que a matriz  $\mathbf{P}$  converge para uma matriz constante, ou seja, o algoritmo RLS proposto converge para um algoritmo gradiente em regime permanente. Deste modo, em regime permanente o algoritmo de identificação mantém-se operante.

Pode-se notar que os resultados experimentais do sistema de controle utilizando a abordagem entrada-saída apresenta desempenho ligeiramente superior aos resultados do sistema utilizando a abordagem realimentação de estados. Na abordagem entrada-saída, a saída da planta  $y$  segue a saída do modelo de referência  $y_m$  mais rapidamente. Pode-se ajustar o filtro  $(\mathbf{F}, \mathbf{q})$  para obter esta melhora de desempenho, no caso da abordagem entrada-saída. Portanto este filtro age com um grau de liberdade a mais para o ajuste do controlador.

É importante notar que os resultados experimentais são muito semelhantes aos de simulação, o que corrobora a teoria apresentada. Outro aspecto interessante é que todos os sinais monitorados no eixo  $\alpha$  convergem para valores próximos aos do eixo  $\beta$ .



## 5 Conclusões

Esta Tese de doutorado apresentou um novo controlador adaptativo por modelo de referência, totalmente desenvolvido em tempo discreto, aplicado a sistemas conectados à rede de energia elétrica. Este controlador utiliza um identificador modificado de parâmetros robusto, baseado no método dos mínimos quadrados recursivos. Neste novo identificador de parâmetros, modificações foram realizadas para impôr robustez ao algoritmo, conforme foi apresentado no Capítulo 2. Em relação a estrutura do controlador, foi utilizada a abordagem por realimentação de estados e a abordagem entrada-saída (onde apenas a saída da planta é realimentada). A prova de estabilidade foi desenvolvida para ambas as abordagens. Nesta prova, foi demonstrado que os sinais internos da malha fechada são limitados e que o erro de rastreamento é pequeno na presença de dinâmicas não modeladas. A análise de estabilidade robusta do controlador é apresentada incluindo dinâmicas não modeladas. Por meio destas análises, restrições de projeto (em tempo discreto) foram obtidas.

Para a validação do algoritmo proposto, resultados de simulação e experimentais de um sistema de controle de corrente de um conversor conectado à rede elétrica com filtro LCL foram apresentados. O Capítulo 3 apresentou o projeto do controlador aplicado ao controle de corrente (pelo lado da rede) de um conversor trifásico (a três fios) com filtro LCL de saída, conectado à rede energia. Resultados de simulação foram apresentados para mostrar a eficácia do controlador proposto, no que diz respeito a estabilidade e resposta transitória.

Através do Capítulo 4, pode-se ver que o controlador apresentou bom desempenho no controle da corrente pelo lado da rede. Observou-se que, diante das variações citadas, a lei de controle não saturou e os parâmetros da lei de controle (vetor  $\theta$ ) se adaptaram rapidamente, a fim de minimizar o erro de rastreamento no sistema de controle. Os controladores apresentados, tanto na abordagem por realimentação de estado quanto na abordagem entrada-saída, foram projetados sem o conhecimento prévio da indutância da rede. Outro aspecto interessante é que o vetor de ganhos  $\theta$  inicial, ou seja  $\theta_{(0)}$ , está longe do valor de convergência. É importante notar que os resultados experimentais são muito semelhantes aos de simulação, o que corrobora a teoria apresentada. Outro detalhe a ser salientado é que todos os sinais monitorados no eixo  $\alpha$  convergem para valores próximos aos do eixo  $\beta$ . Estas características destacam as boas características de estabilidade e desempenho do controlador proposto.

Pode-se notar que a matriz  $\mathbf{P}$  converge para uma matriz constante, ou seja, o algoritmo RLS proposto converge para um algoritmo gradiente em regime permanente. Deste modo, em regime permanente o algoritmo de identificação mantém-se operante.

Por fim, pode-se garantir que a estrutura de controle adaptativo proposta pode ser aplicada ao controle de diversas plantas sujeitas à dinâmicas não modeladas e a distúrbios

exógenos limitados, desde que a planta em questão respeite as hipóteses apresentadas.

### 5.1 Artigos científicos publicados e patentes registradas na linha de pesquisa da Tese

A seguir, os trabalhos científicos produzidos durante o desenvolvimento desta Tese são apresentados.

1. Tambara, R. V. ; Massing, J. R. ; Pinheiro, H. ; Gründling, H. A. A digital RMRAC controller based on a modified RLS algorithm applied to the control of the output currents of an LCL-filter connected to the grid. In: 2013 15th European Conference on Power Electronics and Applications (EPE'13), 2013. Lille, France.

2. Tambara, R. V. ; Dupont, F. H. ; Della Flora, L. ; Gründling, H. A. Digital implementation of a RMRAC controller using Z Transform and Delta Transform. In: 2011 Brazilian Power Electronics Conference (COBEP'11), 2011, Natal.

3. Tambara, R. V. ; Dupont, F. H. ; Della Flora, L. ; Gründling, H. A. Analysis of performance of an RMRAC controller in discrete-time via Z transform and Delta transform. In: IECON'11 37th Annual Conference of IEEE Industrial Electronics, 2011, Melbourne.

4. Tambara, R. V. ; Della Flora, L. ; Gründling, H. A. Projeto de um Controlador Adaptativo Robusto por Modelo de Referência aplicado a uma Fonte de Potência CA. In: Congresso Brasileiro de Automática (CBA'10), 2010, Bonito - MS.

5. Vieira, R. P. ; Stefanello, M. ; Tambara, R. V. ; Gründling, H. A. Controle de corrente por modos deslizantes e abordagem multi-malha para conversores com filtro LCL. In: Congresso Brasileiro de Automática (CBA'14), 2014, Belo Horizonte - MG.

6. Vieira, R. P. ; Stefanello, M. ; Tambara, R. V. ; Gründling, H. A. Sliding Mode Control in a Multi-loop Framework for Current Control of a Grid-tied Inverter via LCL-filter. IECON'14 - 40th Annual Conference of the IEEE Industrial Electronics Society. Dallas, TX - USA.

7. Vieira, R. P. ; Stefanello, M. ; Tambara, R. V. ; Gründling, H. A. Sliding Mode Control in a Multi-loop Framework for Current Control of a Grid-tied Inverter via LCL-filter. IECON'14 - 40th Annual Conference of the IEEE Industrial Electronics Society. Dallas, TX - USA.

8. Scherer, L. G. ; Tambara, R. V. ; Camargo, R. F. de ; Gründling, H. A. Controle adaptativo discreto aplicado à regulação de tensão de sistemas com gerador de indução. In: Congresso Brasileiro de Automática (CBA'14), 2014, Belo Horizonte - MG.

9. Scherer, L. G. ; Tambara, R. V. ; Botterón, F. ; Camargo, R. F. de ; Gründling, H. A. Discrete-time Adaptive Control Applied to Voltage Regulation of Induction Generator Based Systems. IECON'14 - 40th Annual Conference of the IEEE Industrial

Electronics Society. Dallas, TX - USA.

10. Tambara, R. V. ; Gründling, H. A. ; Pinheiro, H. ; Massing, J. R. Sistema e método de controle adaptativo de conversores estáticos conectado à rede. 2013, Brasil. Patente: Privilégio de Inovação. Número do registro: BR1020130327603, data de depósito: 19/12/2013, título: "SISTEMA E MÉTODO DE CONTROLE ADAPTATIVO DE CONVERSORES ESTÁTICOS CONECTADOS À REDE", Instituição de registro:INPI - Instituto Nacional da Propriedade Industrial.



## REFERÊNCIAS

- ANDERSON, B. D. O.; LANDAU, I. D. Least squares identification and the robust strict positive real property. **Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications, IEEE Transactions on**, v. 41, Issue: 9, p. 601 – 607, 1994.
- ASTRÖM, K. J. Adaptive feedback control. **Proceedings of the IEEE**, v. 75, p. 185 – 217, 1987.
- \_\_\_\_\_. Robust and adaptive pole placement. **American Control Conference**, Atlanta, Ga, USA, p. 2423 – 2428, 1988.
- ASTRÖM, K. J.; KANNIAH, J. A fast adaptive controller for motion control. **Motion Control Proceedings, Asia-Pacific Workshop on Advances in**, p. 63 – 68, 1993.
- ASTRÖM, K. J.; WITTENMARK, B. A survey of adaptive control applications. **Decision and Control, Proceedings of the 34th IEEE Conference on**, v. 1, p. 649 – 654, 1995.
- ASTRÖM K. J., H. P.; STERNBY, J. Zeros of sampled systems. **Decision and Control including the Symposium on Adaptive Processes, 19th IEEE Conference on**, v. 19, p. 1077 – 1081, 1980.
- CÂMARA, H. T. **Uma contribuição ao controle de motores de indução trifásicos sem o uso de sensores mecânicos**. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria, UFSM, 2007.
- CARATI, E. G.; MONTAGNER, V. M.; GRÜNDLING, H. A. A single-phase ac power source using robust model reference adaptive control. **IEEE International Conference on Industrial Electronics, Control and Instrumentation**, p. 1428 – 1432, 2000.
- CARATI, E. G.; RICHTER, C. M.; GRÜNDLING, H. A. A three-phase ac power source using robust model reference. **Proceedings of the 39th IEEE Conference on Decision and Control**, Sydney, Australia, p. 4078 – 4083, 2000.
- CARDOSO, R. et al. Kalman filter based synchronisation methods. **IET Generation, Transmission and Distribution**, v. 2, n. 4, p. 542–555, July 2008.
- COCCIA, A. et al. Control method for single-phase grid connected lcl filter inverter. **United States Patent**, n. US20110221420A1, 2011.
- DATTA, A. Robustness of discrete-time adaptive controllers: An input-output approach. **IEEE Transactions on Automatic Control**, v. 38, n. 12, p. 1207 – 1211, 1993.
- DUARTE, M. A.; NARENDRA, K. S. A new approach to model reference adaptive control. **International Journal of Adaptive Control and Signal Processing**, v. 3, p. 53–73, 1989.

- FLORA, L. D.; GRÜNDLING, H. A. Design of a robust model reference adaptive voltage controller for an electrodynamic shaker. **Revista Brasileira de Eletrônica de Potência (SOBRAEP)**, v. 13, n. 3, p. 133 – 140, 2008.
- GABE, I. J.; MONTAGNER, V. F.; PINHEIRO, H. Design and implementation of a robust current controller for vsi connected to the grid through an lcl filter. **IEEE Transactions on Power Electronics**, v. 24, n. 6, p. 1444 – 1452, 2009.
- GIRI, F. et al. A globally convergent pole placement indirect. **IEEE Transaction on Automatic Control**, v. 34, n. 3, 1989.
- GOODWIN, G. C.; HILL, D. J.; PALANISWAMI, M. A perspective on convergence of adaptive control. **Automatica**, v. 20, n. 5, p. 519–531, 1984.
- GOODWIN, G. C.; SIN, K. S. **Adaptive Filtering Prediction and Control**. Englewood Cliffs, New Jersey: [s.n.], 1984.
- GRÜNDLING, H. A. **Controle Adaptativo Robusto por Modelo de Referência**. Tese (Doutorado) — Instituto Tecnológico de Aeronautica, ITA, 1995.
- GRÜNDLING, H. A.; CARATI, E. G.; PINHEIRO, J. R. A robust model reference adaptive controller for ups applications. **Proceedings on IEEE International Conference Industrial Electronics, Control Instrumentation**, New Orleans, LA, p. 901 – 905, 1997.
- HSU, L. Variable structure model reference adaptive control (vs-mrac) using only input and output measurements: Part ii. **Proceedings of the 27th Conference on Decision and Control**, v. 3, p. 2396 – 2401, 1988.
- IOANNOU, P.; DATTA, A. Robust adaptive control: A unified approach. **Proceedings of the IEEE**, v. 79, p. 1736 – 1768, 1991.
- IOANNOU, P. A.; SUN, J. **Robust Adaptive Control**. [S.l.: s.n.], 1996.
- IOANNOU, P. A.; TSAKALIS, K. S. A robust direct adaptive controller. **IEEE Transactions on Automatic Control**, v. 31, n. 2, p. 1033 – 1043, 1986.
- \_\_\_\_\_. A robust discrete-time adaptive controller. **IEEE Proceedings of 25th Conference on Decision and Control**, n. 2, p. 1033 – 1043, 1986.
- \_\_\_\_\_. The class of unmodeled dynamics in robust adaptive control. **American Control Conference, 1988**, Atlanta, Ga, USA, p. 337 – 342, 1988.
- KHOO, I. H.; REDDY, H. C. Delta operator based design of 1-d and 2-d filters: An overview. **Circuits and Systems, APCCAS, IEEE Asia Pacific Conference on**, p. 1442 – 1445, 2008.



- LAM H. K., S. L. D.; BAN, X. Fuzzy control of non-linear systems using parameter-dependent polynomial fuzzy model. **Control Theory and Applications, IET**, v. 11, n. 6, p. 1645 – 1653, 2012.
- LI, G.; GEVERS, M. Comparative study of finite wordlength effects in shift and delta operator parameterizations. **IEEE Transactions on Automatic Control**, v. 38, n. 5, p. 803 – 807, 1993.
- LINDGREN, M.; SVENSSON, J. Control of a voltage-source converter connected to the grid through an lcl-filter-application to active filtering. **Proceedings of PESC'98**, p. 229 – 235, 1998.
- LISERRE M., B. F.; TEODORESCU, R. Stability of photovoltaic and wind turbine grid-connected inverters for a large set of grid impedance values. **IEEE Transactions on Power Electronics**, v. 21, n. 1, p. 263 – 272, 2006.
- LOZANO-LEAL, R.; COLLADO, J.; MONDIÉ, S. Model reference adaptive control without a priori knowledge of the high frequency gain. **IEEE Transactions on Automatic Control**, v. 35, n. 1, p. 71 – 78, 1990.
- LOZANO-LEAL, R.; GOODWIN, G. C. A globally convergent adaptive pole placement algorithm without a persistency of excitation requirement. **Automatic Control, IEEE Transactions on**, p. 795 – 798, 1985. ISSN 0018-9286.
- MACCARI L.A. ; MASSING, J. . S. L. . R. C. . P. H. . O. R. . F. M. V. Lmi-based control for grid-connected converters with lcl filters under uncertain parameters. **Power Electronics, IEEE Transactions on**, v. 29, p. 3776–3785, 2014.
- MARIETHOZ, S.; BECCUTI, A. G.; MORARI, M. Analysis and optimal current control of a voltage source inverter connected to the grid through an lcl filter. **Records of IEEE Power Electronics Specialists**, p. 2132 – 2138, 2008.
- MARTINS, O. S. **Comparação de técnicas de controle de velocidade Sensorless aplicadas a motores de indução em plataforma DSP**. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria, UFSM, 2006.
- MASSING, J. et al. Adaptive current control for grid-connected converters with lcl-filter. **Industrial Electronics, IEEE Transactions on**, v. 59, p. 4681 – 4693, 2012.
- MIDDLETON, R. H.; GOODWIN, G. C. **Digital Estimation and Control: A Unified Approach**. [S.l.]: Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1990.
- MILLER, D. E. A new approach to adaptive control: no nonlinearities. **Systems and Control Letters**, v. 49, p. 67–79, 2003.
- MORSE, A. S. A three-dimensional universal controller for the adaptive stabilization of any strictly proper minimum-phase system with relative degree not exceeding two. **Automatic Control, IEEE Transactions on**, v. 30 , Issue: 12, p. 1188 – 1191, 1985.

- NARENDRA, K.; LIN, Y.-H.; VALAVANI, L. Stable adaptive controller design, part ii: Proof of stability. **Automatic Control, IEEE Transactions on**, v. 25, Issue: 3, p. 440 – 448, 1980.
- NARENDRA, K. S.; ANNASWAMY, A. M. A new adaptive law for robust adaptation without persistent excitation. **Automatic Control, IEEE Transactions on**, v. 32, p. 134 – 145, 1987. ISSN 0018-9286.
- NEWMAN, M. J.; HOLMES, D. G. Delta operator digital filters for high performance inverter applications. **IEEE Transaction on Power Electronics**, v. 18, n. 1, p. 454 – 477, 2003.
- OGATA, K. **Discrete-time Control Systems**. 2. ed. Universidade de Michigan: [s.n.], 1995. ISBN 0130342815, 9780130342812.
- PADGETT, W. T.; ANDERSON, D. V. **Fixed-Point Signal Processing**. [S.l.]: Carnegie Mellon University, 2009.
- PINHEIRO, H. et al. Modulação space vector para inversores alimentados em tensão: Uma abordagem unificada. **SBA: Controle e Automação**, v. 16, n. 1, p. 13–24, Janeiro 2005.
- PONNALURI, S.; SERPA, L. Dc/ac converter with dampened lcl filter distortions. **United States Patent**, n. US7450405B2, 2008.
- QINGZHENG, G.; FEI, G.; CHANGMAO, Z. Indirect robust model reference adaptive control for discrete-time system with output uncertainty. **Proceedings of the 30th Chinese Control Conference**, p. 2216 – 2221, 2011.
- RIBEIRO, L. A. S.; JACOBINA, C. B.; LIMA, A. M. N. Estimacão de parâmetros e velocidade de máquinas. **Revista da SBA Controle e Automação**, v. 8, p. 66 – 76, 1997.
- RICHTER, C. M. **Teoria de Controle Adaptativo Robusto Multivariável por Modelo de Referência**. Tese (Doutorado) — Universidade Federal de Santa Maria, 2003.
- ROHRS, C. E. et al. Robustness of adaptive control algorithms in the presence of unmodeled dynamics. **Decision and Control, 1982 21st IEEE Conference on**, v. 21, p. 3–11, 1982.
- SÁEZ, V. et al. Fixed point implementation of iir filters using delta operator applied to distributed power generation systems. **IECON'10 - 36th Annual Conference on IEEE Industrial Electronics Society**, p. 1709 – 1714, 2010.
- SALGADO, M. E.; GOODWIN, G. C.; MIDDLETON, R. H. Modified least squares algorithm incorporating exponential resetting and forgetting. **Control International Journal**, v. 47, n. 2, p. 477 – 491, 1988.

STEFANELLO, M. **Projeto e desenvolvimento de uma Fonte de Potência CA Trifásica a quatro fios**. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria, UFSM, 2006.

STEFANELLO, M. **Controle Adaptativo Robusto de Estrutura Variável por Modelo de Referência Aplicado a Filtros Ativos de Potência**. Tese (Doutorado) — Universidade Federal de Santa Maria, UFSM, 2010.

STEFANELLO, M.; GRÜNDLING, H. Stability analysis of a combined direct and variable structure adaptive control. **Control Theory and Applications, IET**, v. 5, p. 764 – 774, 2010.

STEFANELLO, M. et al. Design of a robust model reference adaptive control for a shunt active power filter. p. 158 – 163, 2008.

TAMBARA, R. V. **Desenvolvimento de uma Fonte de Potência CA para geração de Formas de onda de até 2kHz**. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Santa Maria, UFSM., 2010.

TAMBARA, R. V. et al. Analysis of performance of an rmrac controller in discrete-time via z transform and delta transform. **37th Annual Conference on IEEE Industrial Electronics Society (IECON)**, p. 492 – 497, 2011.

\_\_\_\_\_. Digital implementation of a rmrac controller using z transform and delta transform. **Congresso Brasileiro de Eletrônica de Potência (COBEP)**, Natal, RN, 2011.

\_\_\_\_\_. Projeto de um controlador adaptativo robusto por modelo de referência aplicado a uma fonte de potência ca. **Congresso Brasileiro de Automática (CBA)**, Bonito - MS, 2010.

\_\_\_\_\_. A digital rmrac controller based on a modified rls algorithm applied to the control of the output currents of an lcl-filter connected to the grid. **European Power Electronics conference (EPE)**, Lille, France, 2013.

TONG Y., W. C.; ZHANG, L. Stabilisation of discrete-time switched positive linear systems via time- and state-dependent switching laws. **Control Theory and Applications, IET**, v. 11, n. 6, p. 1603 – 1609, 2012.

WANG Y., S. X. W. G.; ZUO, Z. Brief paper -finite-time stability for continuous-time switched systems in the presence of impulse effects. **Control Theory and Applications, IET**, v. 11, n. 6, p. 1741 – 1744, 2012.

WEN, G. et al. Stochastic consensus in directed networks of agents with non-linear dynamics and repairable actuator failures. **Control Theory and Applications, IET**, v. 11, n. 6, p. 1583 – 1593, 2012.

YU, D.; ILLINDALA, S.; ALKHOULI, O. M. Power inverter control for grid-tie transition. **United States Patent**, n. US7450405B2, 2011.



## APÊNDICES

---



## Apêndice A – Resultados experimentais obtidos através de Osciloscópio

Este Apêndice apresenta resultados experimentais das correntes trifásicas controladas do lado da rede ( $i_{ga}$ ,  $i_{gb}$  e  $i_{gc}$ ). Estes resultados foram obtidos através do osciloscópio Tektronix DPO 3034.

Referências de corrente com amplitude de 2 A, 5 A, 10 A e 15 A são utilizadas. Salienta-se que, na partida do sistema, uma referência de corrente com harmônicas (3<sup>a</sup>, 5<sup>a</sup>, 7<sup>a</sup> e 11<sup>a</sup>) é utilizada para acelerar o processo de adaptação, ou seja, utiliza-se um sinal persistentemente excitante.

## A.1 Controlador RMRAC por realimentação de estados

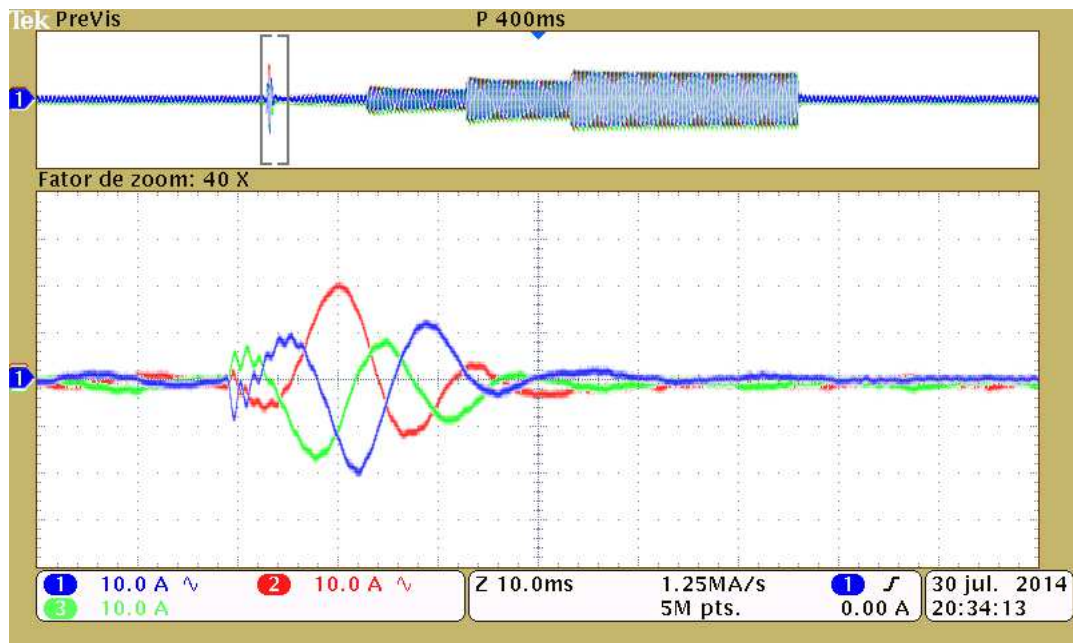


Figura A.1 – Ensaio conectado à rede: Resultado experimental das correntes  $i_{ga}$ ,  $i_{gb}$  e  $i_{gc}$  com controle por realimentação de estados - (10A/div).

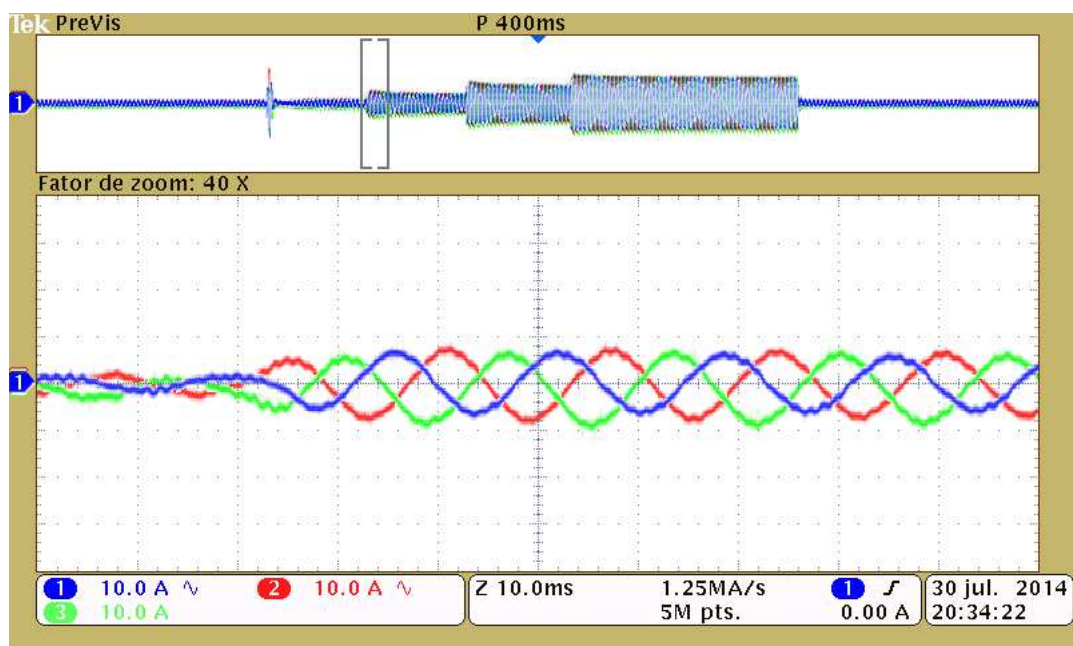


Figura A.2 – Ensaio conectado à rede: Resultado experimental das correntes  $i_{ga}$ ,  $i_{gb}$  e  $i_{gc}$  com controle por realimentação de estados - (10A/div).



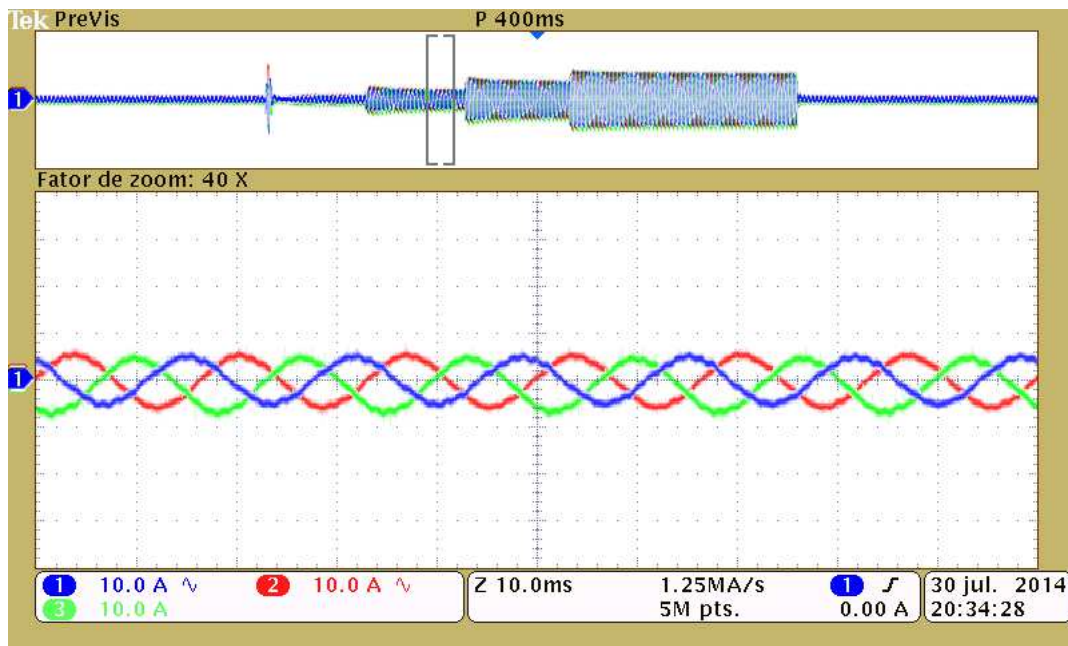


Figura A.3 – Ensaio conectado à rede: Resultado experimental das correntes  $i_{ga}$ ,  $i_{gb}$  e  $i_{gc}$  com controle por realimentação de estados - (10A/div).

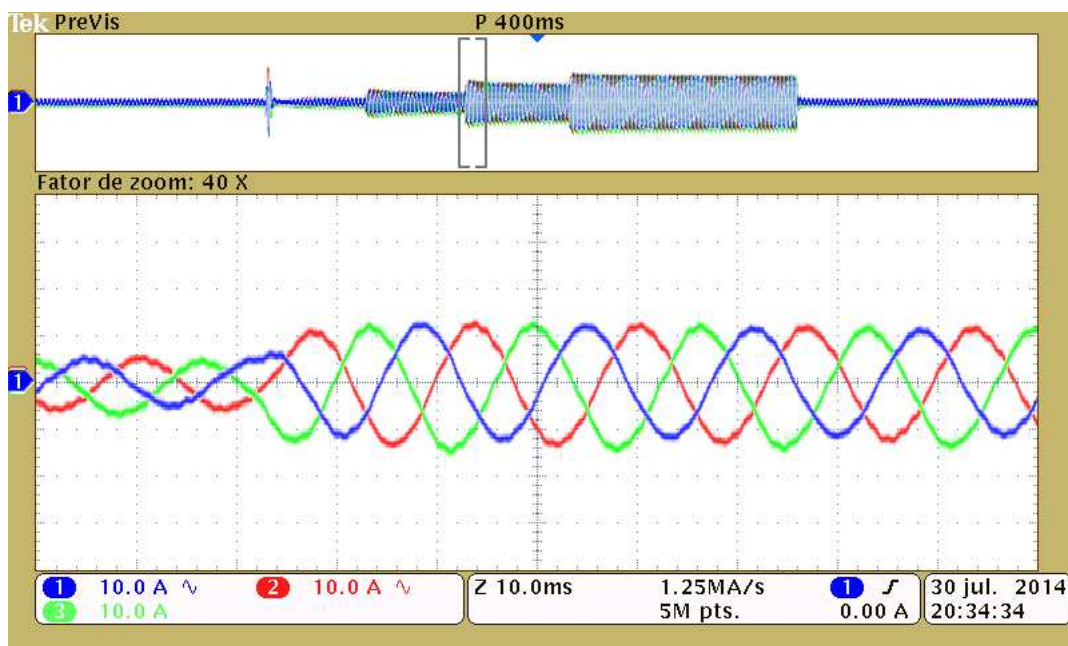


Figura A.4 – Ensaio conectado à rede: Resultado experimental das correntes  $i_{ga}$ ,  $i_{gb}$  e  $i_{gc}$  com controle por realimentação de estados - (10A/div).

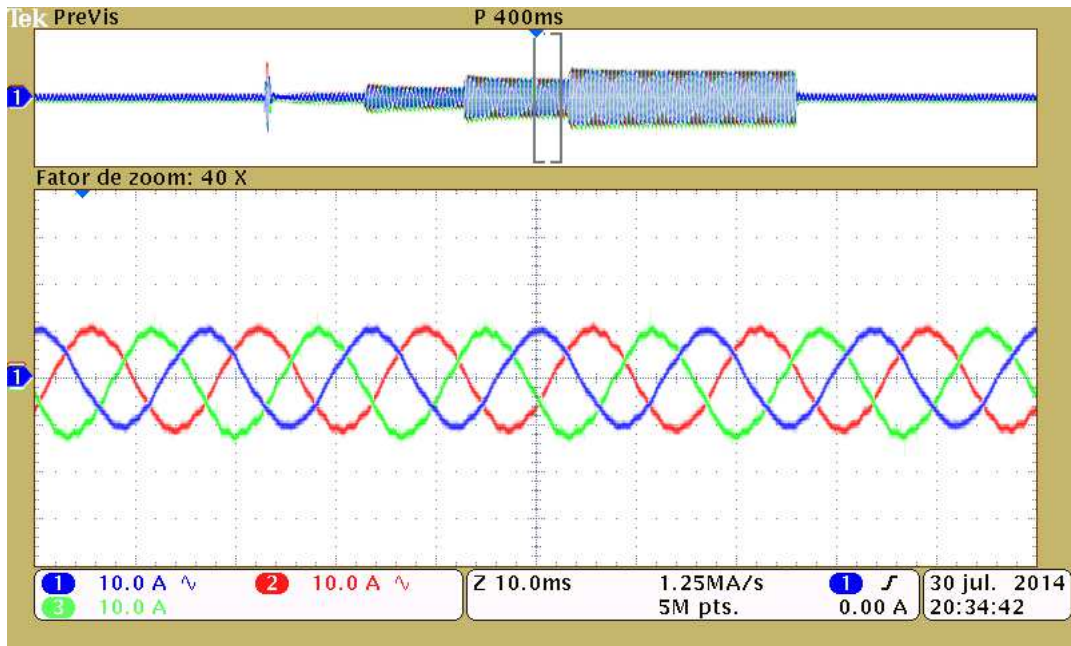


Figura A.5 – Ensaio conectado à rede: Resultado experimental das correntes  $i_{ga}$ ,  $i_{gb}$  e  $i_{gc}$  com controle por realimentação de estados - (10A/div).

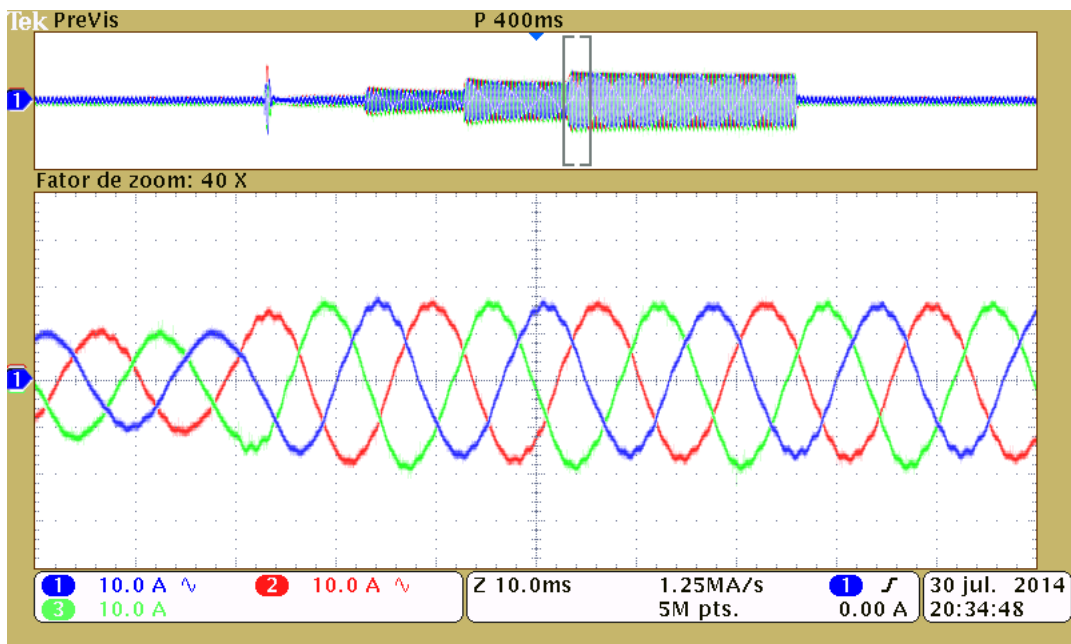


Figura A.6 – Ensaio conectado à rede: Resultado experimental das correntes  $i_{ga}$ ,  $i_{gb}$  e  $i_{gc}$  com controle por realimentação de estados - (10A/div).

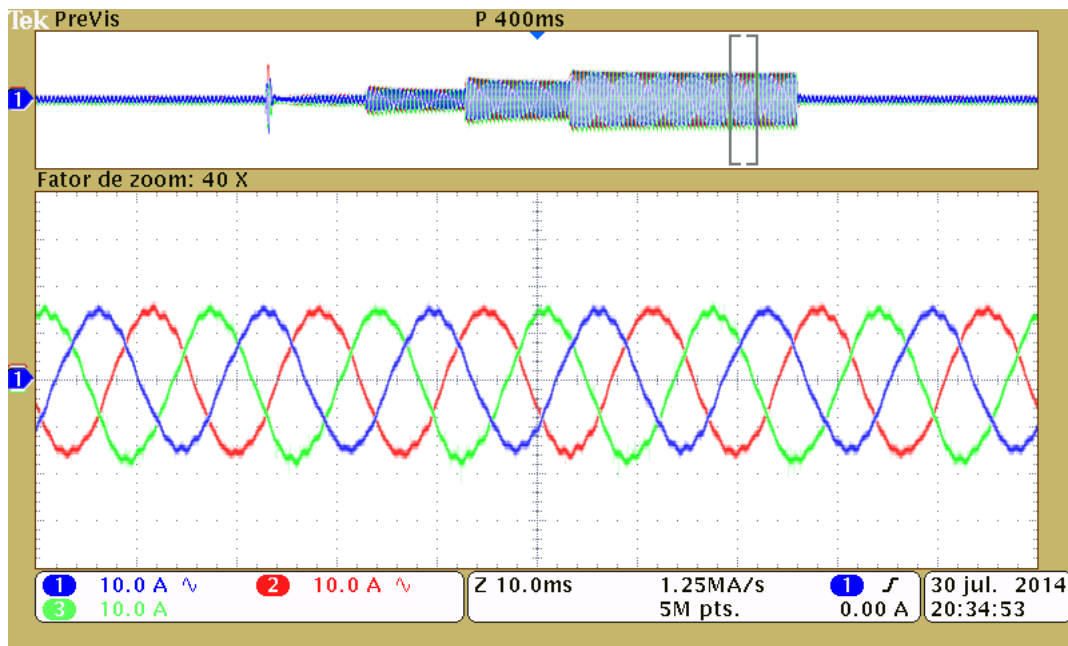


Figura A.7 – Ensaio conectado à rede: Resultado experimental das correntes  $i_{ga}$ ,  $i_{gb}$  e  $i_{gc}$  com controle por realimentação de estados - (10A/div).

## A.2 Controlador RMRAC com abordagem entrada-saída

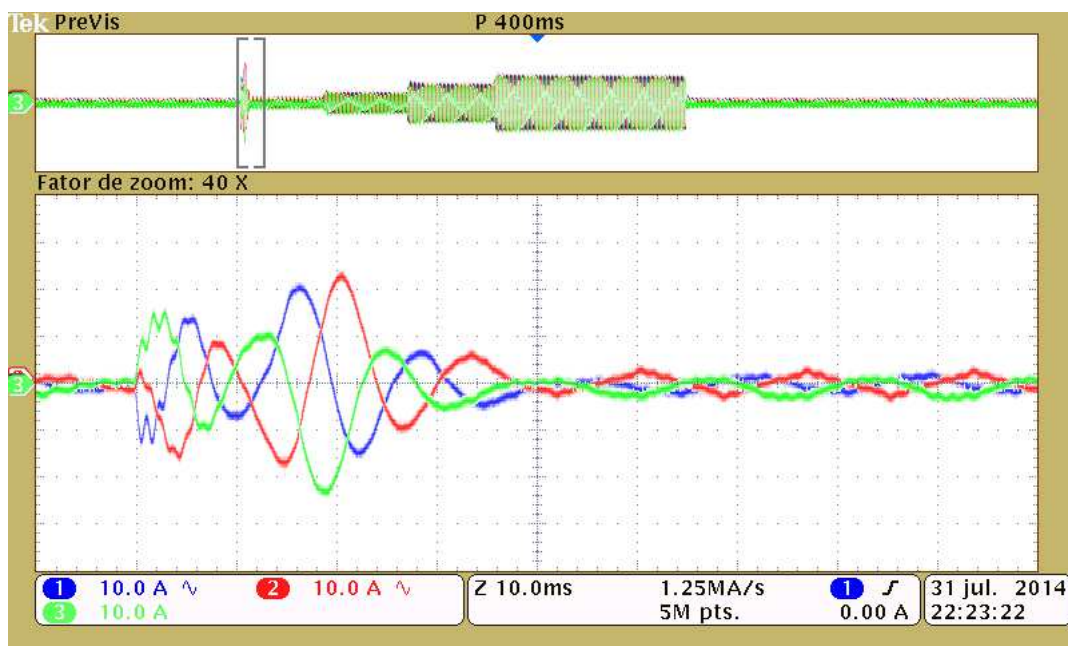


Figura A.8 – Ensaio conectado à rede: Resultado experimental das correntes  $i_{ga}$ ,  $i_{gb}$  e  $i_{gc}$  com controle entrada-saída - (10A/div).

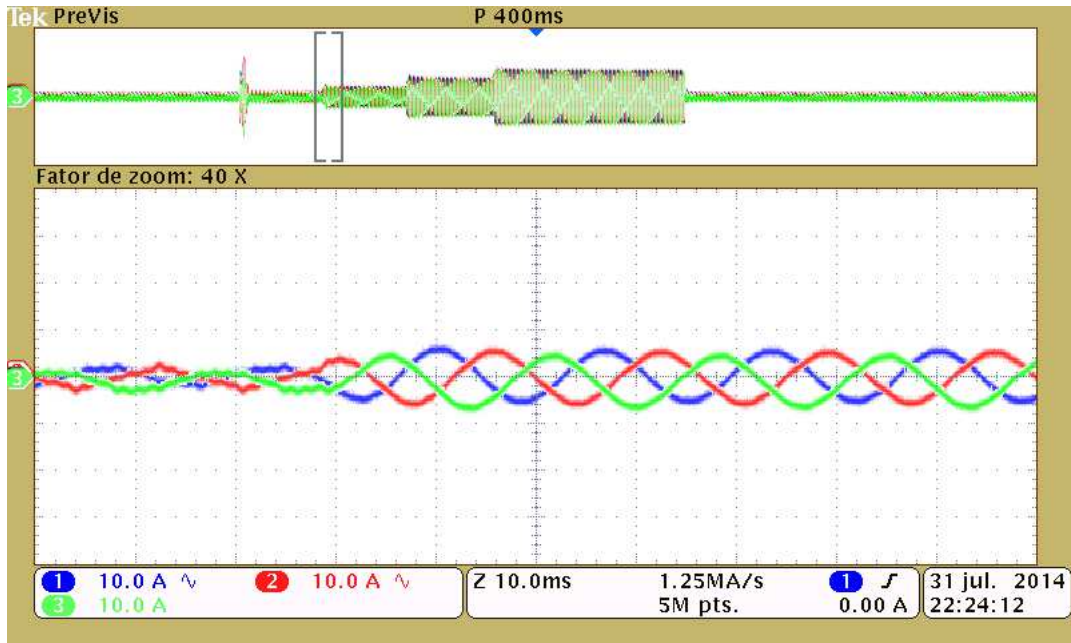


Figura A.9 – Ensaio conectado à rede: Resultado experimental das correntes  $i_{ga}$ ,  $i_{gb}$  e  $i_{gc}$  com controle entrada-saída - (10A/div).

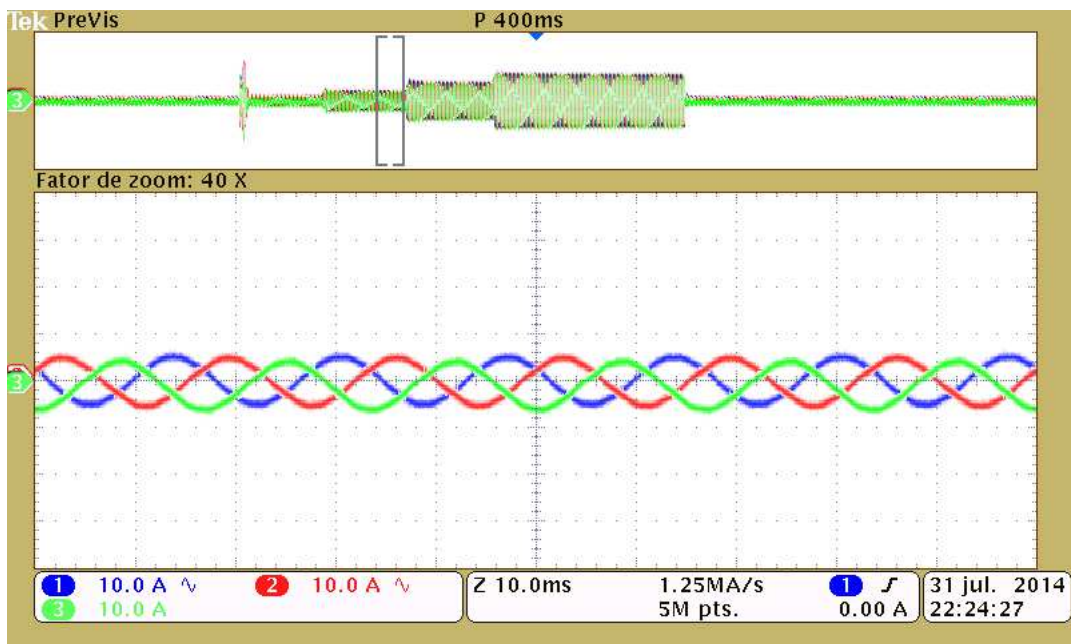


Figura A.10 – Ensaio conectado à rede: Resultado experimental das correntes  $i_{ga}$ ,  $i_{gb}$  e  $i_{gc}$  com controle entrada-saída - (10A/div).



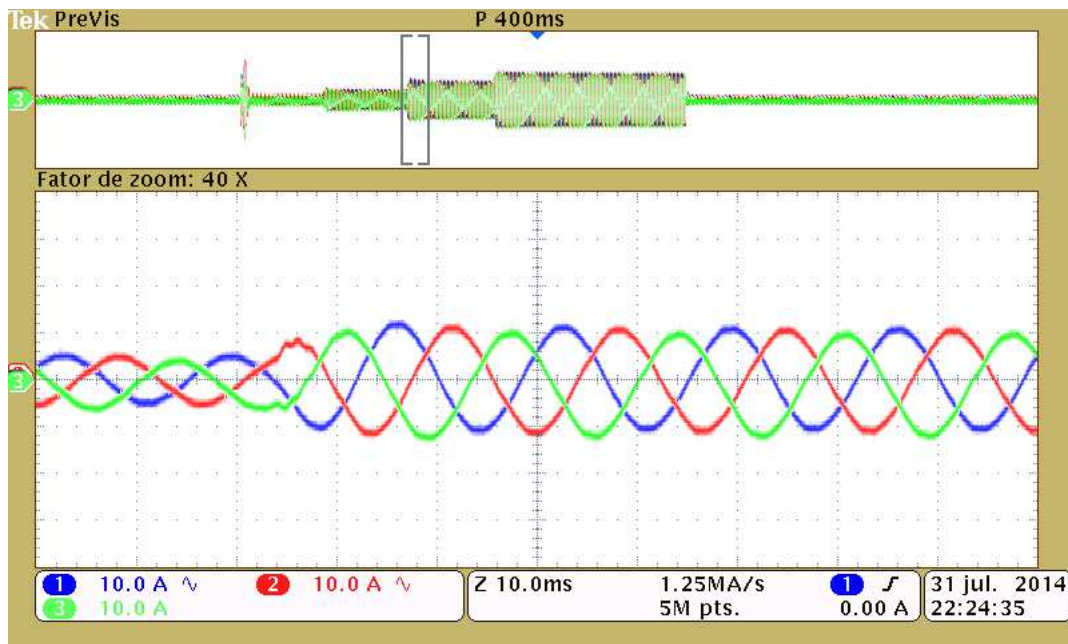


Figura A.11 – Ensaio conectado à rede: Resultado experimental das correntes  $i_{ga}$ ,  $i_{gb}$  e  $i_{gc}$  com controle entrada-saída - (10A/div).

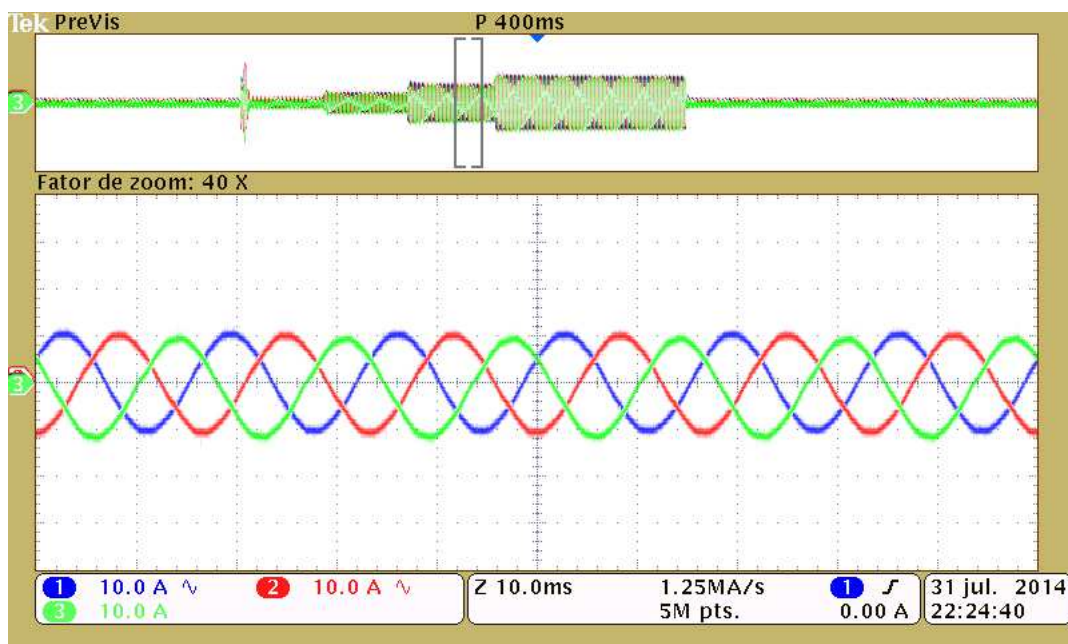


Figura A.12 – Ensaio conectado à rede: Resultado experimental das correntes  $i_{ga}$ ,  $i_{gb}$  e  $i_{gc}$  com controle entrada-saída - (10A/div).

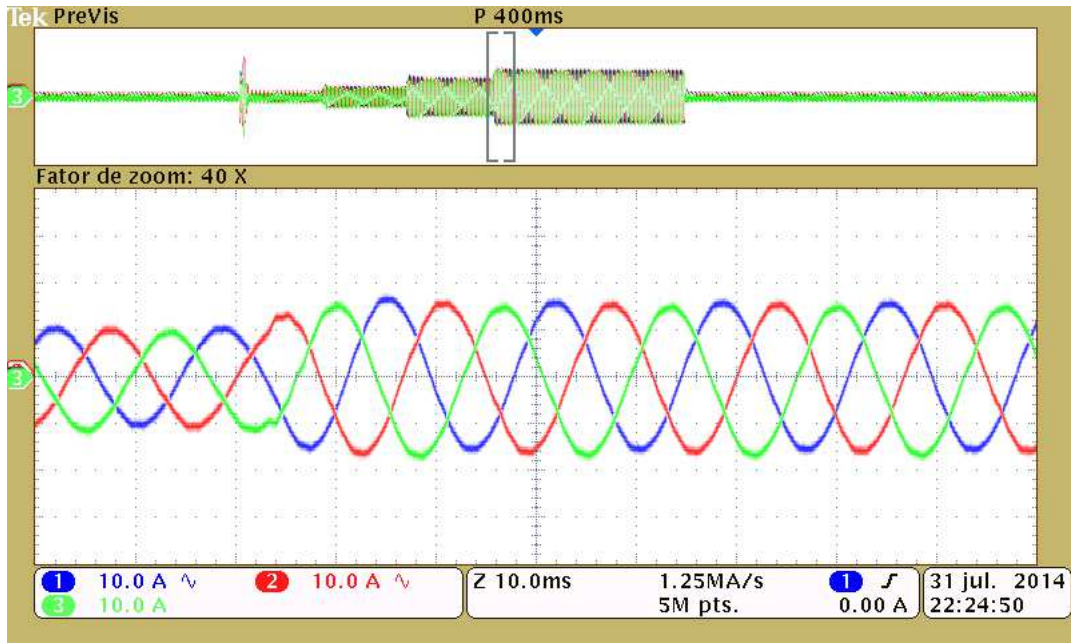


Figura A.13 – Ensaio conectado à rede: Resultado experimental das correntes  $i_{ga}$ ,  $i_{gb}$  e  $i_{gc}$  com controle entrada-saída - (10A/div).

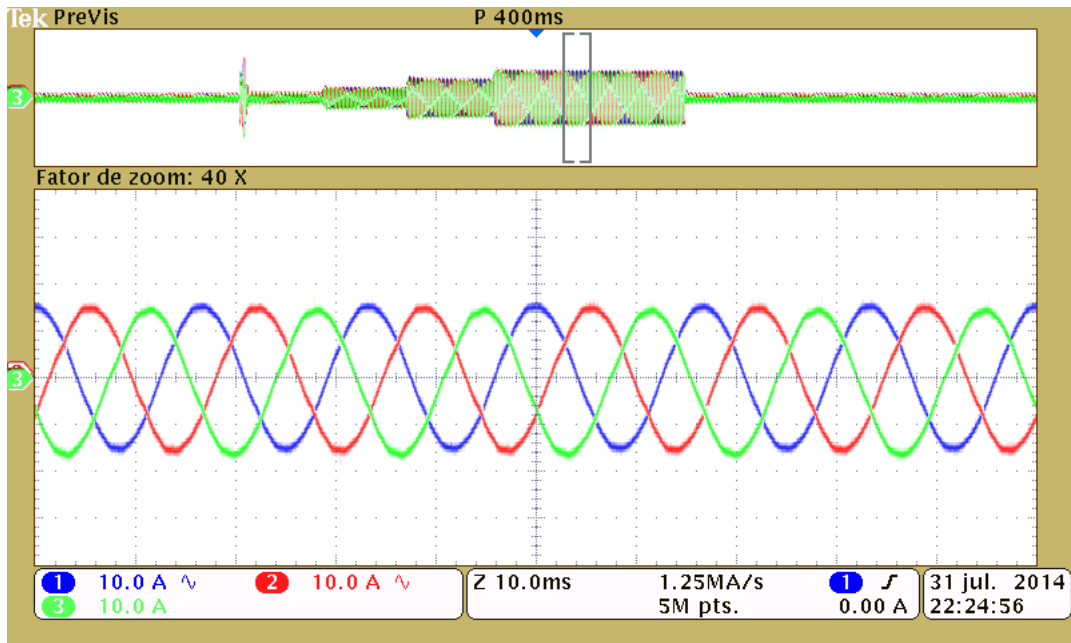


Figura A.14 – Ensaio conectado à rede: Resultado experimental das correntes  $i_{ga}$ ,  $i_{gb}$  e  $i_{gc}$  com controle entrada-saída - (10A/div).

## Apêndice B – Equação não-mínima para o erro de estados

### B.3 Aborgadem por espaço de estados

A planta (2.4) pode ser reescrita como

$$y(k) = G_p(z)u(k) + \mu G_p(z)q(z) \frac{\Delta_m(z)}{q(z)} u(k) + \mu \Delta_a(z)u(k) \quad (\text{B.1})$$

onde  $q(z)$  é um polinômio arbitrário de grau  $n^* - 1$  com raízes  $q(z/p_0)$  estáveis. A representação em espaço de estados da planta é dada por

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_{(k+1)} &= \mathbf{A}_p \mathbf{X}_{(k)} + \mathbf{B}_p u(k) + \mu \bar{\mathbf{B}}_p \eta_m(k) \\ y(k) &= \mathbf{C}_p^T \mathbf{X}_{(k)} + \mu \eta_a(k) \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

onde  $(\mathbf{A}_p, \mathbf{B}_p, \mathbf{C}_p)$  é a mínima representação em espaço de estados de  $G_p(z)$ ,  $\eta_a(k) = \Delta_a(z)u(k)$ ,  $\eta_m(k) = \bar{\Delta}_m(z)u(k)$ ,  $\bar{\mathbf{B}}_p$  depende de  $\mathbf{B}_p$  e dos coeficientes de  $q(z)$ ,  $\bar{\Delta}_m(z) = \Delta_m(z)/q(z)$  é própria, os polos de  $\bar{\Delta}_m(z/p_0)$  são estáveis e  $G_p(z)q(z)$  é estritamente própria.

A partir de (2.25) e desde que  $\phi_{(k)} = \theta_{(k)} - \theta^*$ , pode-se escrever a ação de controle  $u$  da seguinte forma

$$u(k) = -\frac{1}{\theta_u^*} \left[ \phi_{(k)}^T \omega(k) + \theta_1^{*T} \mathbf{X}_{(k)} + r(k) \right] \quad (\text{B.3})$$

Substituindo (B.3) em (B.2)

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_{(k+1)} &= \mathbf{A}_c \mathbf{X}_{(k)} + \mathbf{B}_c \left[ \phi_{(k)}^T \omega(k) + r(k) \right] + \mu \bar{\mathbf{B}}_p \eta_m(k) \\ y(k) &= \mathbf{C}_p^T \mathbf{X}_{(k)} + \mu \eta_a(k) \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

onde  $\mathbf{A}_c = \left[ \mathbf{A}_p - \frac{\mathbf{B}_p}{\theta_u^*} \theta_1^{*T} \right]$  é uma matriz estável e  $\mathbf{B}_c = -\frac{\mathbf{B}_p}{\theta_u^*}$ . Considerando (B.3) e (B.4) tem-se o modelo de referência  $W_m(z) = \mathbf{C}_p^T (z\mathbf{I} - \mathbf{A}_c)^{-1} \mathbf{B}_c$  e pode-se escrever a seguinte representação não-mínima em espaço de estados para o modelo de referência

$$\begin{aligned} \omega_{m(k+1)} &= \mathbf{A}_c \omega_{m(k)} + \mathbf{B}_c r(k) \\ y_{m(k)} &= \mathbf{C}_p^T \omega_{m(k)} \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

É possível definir  $\mathbf{e}_{(k)} = \mathbf{X}_{(k)} - \omega_{m(k)}$  e o modelo do erro de rastreamento em espaço de estados é dado por

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_{(k+1)} &= \mathbf{A}_c \mathbf{e}_{(k)} + \mathbf{B}_c \left( \phi_{(k)}^T \omega_{m(k)} \right) + \mu \bar{\mathbf{B}}_p \eta_m(k) \\ e_{1(k)} &= \mathbf{C}_p^T \mathbf{e}_{(k)} + \mu \eta_a(k) \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

#### B.4 Aborgadem entrada-saída

A planta (2.4) pode ser reescrita como

$$y(k) = G_p(z)u(k) + \mu G_p(z)q(z) \frac{\Delta_m(z)}{q(z)} u(k) + \mu \Delta_a(z)u(k) \quad (\text{B.7})$$

onde  $q(z)$  é um polinômio arbitrário de grau  $n^* - 1$  com raízes  $q(z/p_0)$  estáveis. A representação em espaço de estados da planta é dada por

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_{(k+1)} &= \mathbf{A}_p \mathbf{X}_{(k)} + \mathbf{B}_p u(k) + \mu \bar{\mathbf{B}}_p \eta_m(k) \\ y(k) &= \mathbf{h}^T \mathbf{X}_{(k)} + \mu \eta_a(k) \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

onde  $(\mathbf{A}_p, \mathbf{B}_p, \mathbf{h}^T)$  é a mínima representação em espaço de estados de  $G_p(z)$ ,  $\eta_a(k) = \Delta_a(z)u(k)$ ,  $\eta_m(k) = \bar{\Delta}_m(z)u(k)$ ,  $\bar{\mathbf{B}}_p$  depende de  $\mathbf{B}_p$  e dos coeficientes de  $q(z)$ ,  $\bar{\Delta}_m(z) = \Delta_m(z)/q(z)$  é própria, os polos de  $\bar{\Delta}_m(z/p_0)$  são estáveis e  $G_p(z)q(z)$  é estritamente própria.

A partir de (2.45), (B.8) e desde que  $\phi_{(k)} = \theta_{(k)} - \theta^*$ , pode-se escrever

$$u(k) = -\frac{1}{\theta_u^*} \left[ \phi_{(k)}^T \boldsymbol{\omega}_{(k)} + r(k) + \theta_1^{*T} \boldsymbol{\omega}_{1(k)} + \theta_2^{*T} \boldsymbol{\omega}_{2(k)} + \theta_y^* \left( \mathbf{h}^T \mathbf{X}_{(k)} + \mu \eta_a(k) \right) \right] \quad (\text{B.9})$$

Definindo o vetor de estados aumentado  $\mathbf{Y}_c = \left[ \mathbf{X}^T \quad \boldsymbol{\omega}_1^T \quad \boldsymbol{\omega}_2^T \right]$  e considerando (B.8) e (B.9), pode-se obter

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}_{c(k+1)} &= \mathbf{A}_c \mathbf{Y}_{c(k)} + \mathbf{B}_c \left( \phi_{(k)}^T \boldsymbol{\omega}_{(k)} + r(k) \right) + \mu \mathbf{B}_{c1} \eta_a(k) + \mu \mathbf{B}_{c2} \eta_m(k) \\ y(k) &= \mathbf{h}_c^T \mathbf{Y}_{c(k)} + \mu \eta_a(k) \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

Considerando (B.9) e (B.10) tem-se o modelo de referência  $W_m(z) = \mathbf{h}_c^T (z\mathbf{I} - \mathbf{A}_c)^{-1} \mathbf{B}_c$  e pode-se escrever a seguinte representação não-mínima em espaço de estados para o modelo de referência

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega}_{m(k+1)} &= \mathbf{A}_c \boldsymbol{\omega}_{m(k)} + \mathbf{B}_c r(k) \\ y_m(k) &= \mathbf{h}_c^T \boldsymbol{\omega}_{m(k)} \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$

É possível definir  $\mathbf{e}_{(k)} = \mathbf{Y}_{c(k)} - \boldsymbol{\omega}_{m(k)}$  e o modelo do erro de rastreamento em espaço de estados é dado por

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_{(k+1)} &= \mathbf{A}_c \mathbf{e}_{(k)} + \mathbf{B}_c \left( \phi_{(k)}^T \boldsymbol{\omega}_{(k)} \right) + \mu \mathbf{B}_{c1} \eta_a(k) + \mu \mathbf{B}_{c2} \eta_m(k) \\ e_1(k) &= \mathbf{h}_c^T \mathbf{e}_{(k)} + \mu \eta_a(k) \end{aligned} \quad (\text{B.12})$$