

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA MARIA
CENTRO DE CIÊNCIAS NATURAIS E EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

MODOS QUASE-NORMAIS E A
CORRESPONDÊNCIA ADS/CFT

TESE DE DOUTORADO

Alex dos Santos Miranda

Santa Maria, RS, Brasil

2008

**MODOS QUASE-NORMAIS E A
CORRESPONDÊNCIA ADS/CFT**

por

Alex dos Santos Miranda

Tese apresentada ao Curso de Doutorado do Programa de
Pós-Graduação em Física, Área de Concentração em Física,
da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM, RS),
como requisito parcial para a obtenção do grau de
Doutor em Física.

Orientador: Vilson Tonin Zanchin

Santa Maria, RS, Brasil

2008

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA MARIA
CENTRO DE CIÊNCIAS NATURAIS E EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA**

A Comissão Examinadora, abaixo assinada,
aprova a Tese de Doutorado

**MODOS QUASE-NORMAIS E A
CORRESPONDÊNCIA ADS/CFT**

elaborada por
Alex dos Santos Miranda

como requisito parcial para obtenção do grau de
Doutor em Física

COMISSÃO EXAMINADORA:

Vilson Tonin Zanchin, Dr. (UFABC)
(Presidente/Orientador)

Henrique Boschi Filho, Dr. (UFRJ)

Alberto Vazquez Saa, Dr. (UNICAMP)

Matheus Jatkoske Lazo, Dr. (UNIPAMPA)

Sérgio Garcia Magalhães, Dr. (UFSM)

Santa Maria, 25 de abril de 2008.

Aos meus pais José e Vera, e à minha esposa Simoni.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a todas as pessoas que, de uma forma ou de outra, colaboraram para a realização deste trabalho e, em particular:

– Ao professor Vilson Zanchin a orientação sempre dedicada e prestativa, bem como o esforço em colaborar com o trabalho, apesar da distância em alguns momentos. Obrigado Vilson, por todos esses anos de convivência e aprendizado!

– À minha amiga e colaboradora, Jaqueline Morgan, as nossas inúmeras discussões que contribuíram para enriquecer este trabalho, e a ajuda na construção dos gráficos e parte dos cálculos numéricos contidos nesta tese. Valeu Jaque!

– Aos meus colegas do Laboratório de Mecânica Estatística da UFSM, Carlos, Fábio e Eleonir. Obrigado por tudo, das dicas de informática às nossas conversas sobre supercondutores, transições de fase, vidros de spin...

– Aos meus colegas do Laboratório de Micrometeorologia da UFSM. À Carla a amizade, e ao Charles e à Lidiane os nossos inúmeros bate-papos sobre ciência, matemática, filosofia... Valeu pessoal!

– À turma que está na UFABC: Aline, Jonas, Daniel e Gustavo.

– Aos professores do PPGFis que colaboraram para a minha formação.

– Aos funcionários do PPGFis, Saionara e Carlos, o atendimento sempre prestativo e dedicado.

– À minha família o apoio, nos bons e nos maus momentos, e por terem sempre acreditado em mim. Em especial, à Simoni a ajuda na reta final da tese, inclusive com a digitação das referências.

– E, por fim, ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) o apoio financeiro.

*O cientista não estuda a natureza porque ela é útil;
estuda-a porque se delicia com ela,
e se delicia com ela porque ela é bela.*

*Se a natureza não fosse bela,
não valeria a pena conhecê-la e,
se não valesse a pena conhecer a natureza,
não valeria a pena viver.*

Henri Poincaré

RESUMO

Tese de doutorado
Programa de Pós-Graduação em Física
Universidade Federal de Santa Maria

MODOS QUASE-NORMAIS E A CORRESPONDÊNCIA ADS/CFT

AUTOR: ALEX DOS SANTOS MIRANDA

ORIENTADOR: VILSON TONIN ZANCHIN

Data e Local da Defesa: Santa Maria, 25 de abril de 2008.

No presente trabalho, investigou-se o espectro de vibrações eletromagnéticas e gravitacionais de buracos negros anti-de Sitter com horizontes plano-simétricos. Segundo a correspondência AdS/CFT, os modos quase-normais desses buracos negros estão associados aos pólos de funções de correlação de corrente- R e do tensor energia-momento na teoria de campos holograficamente dual: a super-Yang-Mills $\mathcal{N} = 8$ em $2 + 1$ dimensões. Neste estudo, a relação com a teoria de campos foi explorada ao se fixar as condições de contorno que definem os modos quase-normais, bem como na escolha das quantidades invariantes de calibre que governam as perturbações dos buracos negros anti-de Sitter. Para obter as equações de onda gravitacionais, foram utilizados formalismos baseados em variações da métrica e dos escalares de curvatura de Weyl. Entre outros resultados, mostrou-se que as perturbações axiais com número de onda nulo produzem somente pequenas rotações sobre o sistema, enquanto que as perturbações polares conduzem a mudanças na massa e também podem se propagar na forma de ondas gravitacionais cilíndricas. Em relação ao espectro quase-normal, no limite de baixas frequências e grandes comprimentos de onda, algumas relações de dispersão apresentam o comportamento hidrodinâmico característico de uma teoria conformemente invariante, com o aparecimento de modos de difusão, cisalhamento e de onda sonora. Por fim, no setor eletromagnético das perturbações, surgem também modos puramente amortecidos que tendem às frequências de Matsubara de um sistema bosônico no regime de grandes comprimentos de onda.

Palavras-chave: buracos negros; anti-de Sitter; modos quase-normais; AdS/CFT

ABSTRACT

Tese de doutorado
Programa de Pós-Graduação em Física
Universidade Federal de Santa Maria

QUASINORMAL MODES AND THE ADS/CFT CORRESPONDENCE

AUTHOR: ALEX DOS SANTOS MIRANDA

ADVISER: VILSON TONIN ZANCHIN

Local and Date: Santa Maria, April 25nd, 2008.

The electromagnetic and gravitational quasinormal mode spectra of plane-symmetric anti-de Sitter black holes are investigated in the present work. According to the AdS/CFT correspondence, the black hole quasinormal frequencies correspond to the poles of R -current and stress-energy tensor correlation functions in the holographically dual field theory: the $\mathcal{N} = 8$ super-Yang-Mills in $2 + 1$ dimensions. In the present study, this duality is explored in order to choose the quasinormal mode boundary conditions and the gauge invariant variables governing the black hole perturbations. Among the main results, it is shown that zero wavenumber axial perturbations yield only small rotations on the system, while the polar perturbations lead to a change in the mass of the black hole and may also produce cylindrical gravitational waves. In relation to the quasinormal spectra, the long-distance and low-frequency limit of the dispersion relations present the hydrodynamical behavior that is characteristic of a conformally invariant theory, with diffusion, shear and sound-wave modes. In the electromagnetic perturbation sector, it also appears purely damped modes that tend to the bosonic Matsubara frequencies in the long-wavelength regime.

Keywords: black holes; anti-de Sitter; quasinormal modes; AdS/CFT

LISTA DE FIGURAS

2.1	Descrição esquemática do espalhamento de ondas no espaço-tempo de Schwarzschild. Uma onda incidente I é decomposta numa componente transmitida T e numa componente espalhada S . Extraído de Andersson e Jensen (2002).	27
2.2	Gráfico log-log que mostra a evolução de um pacote de ondas gravitacionais gaussiano nas proximidades de um buraco negro de Schwarzschild. Extraído de Cardoso (2003).	28
2.3	O comportamento de duas soluções linearmente independentes para um campo escalar nas vizinhanças de um buraco negro de Schwarzschild. O modo <i>in</i> corresponde a ondas puramente ‘entrantes’ (<i>ingoing</i>) no horizonte (H^+), enquanto o modo <i>up</i> corresponde a ondas puramente ‘saiadoras’ (<i>outgoing</i>) no infinito (I^+). Baseado em Andersson e Jensen (2002).	30
2.4	A estrutura de singularidades de $\tilde{\mathcal{G}}(x, y; \omega)$ na metade inferior do plano ω : os pontos indicam pólos da função de Green e o zig-zag uma linha de corte. Baseado em Ching et al (1995).	31
2.5	Uma recriação da simulação numérica clássica de Vishveshwara (1970). A dependência temporal de $\phi(x, t)$, conforme observada em um ponto fixo x_1 , é resultado da evolução de um pacote de ondas escalares gaussiano nas vizinhanças de um buraco negro de Schwarzschild. Adaptado de Andersson e Jensen (2002).	32
3.1	A expansão perturbativa da teoria de campos (acima) em comparação com aquela da teoria de cordas (abaixo). Uma corda fechada gera uma folha de mundo bidimensional em que o gênero representa a potência da constante de acoplamento das cordas associada com o processo. Extraído de Young (2007).	35
4.1	O diagrama de Kruskal-Szekeres para a solução de buraco negro com simetria plana e constante cosmológica negativa.	45
5.1	As frequências dos modos axiais fundamentais $\mathfrak{w} = (3\omega_R/4\pi T) - i(3\omega_I/4\pi T)$ em função do número de onda normalizado $\mathfrak{q} = 3q/4\pi T$. Os pontos representam resultados numéricos e as linhas contínuas, curvas de ajuste. A parte real da frequência tende à linha tracejada $\omega_R = q$ no limite de $3q/4\pi T$ grande, enquanto a parte imaginária vai a zero nesse mesmo limite. Nas inserções, mostra-se o comportamento da frequência no regime de buracos negros pequenos e de tamanho intermediário.	63
5.2	Gráficos com os resultados numéricos para as frequências polares fundamentais.	63

5.3	A frequência $\mathfrak{w}_s = 3\omega_s/4\pi T$ em função do vetor de onda $\mathfrak{q} = 3q/4\pi T$ (os pontos representam resultados numéricos). A linha pontilhada é $\mathfrak{w}_s = \mathfrak{q}^2/3$ e a linha tracejada é a frequência algebricamente especial $\mathfrak{w}_a = \mathfrak{q}^4/6$. No ponto $P = (\sqrt{3}, 3/2)$, a frequência algebricamente especial cruza a frequência QN puramente amortecida.	65
6.1	As frequências QN eletromagnéticas $\mathfrak{w}_s = 3\omega_s/4\pi T$ em função do vetor de onda $\mathfrak{q} = 3q/4\pi T$. As linhas contínuas representam os modos polares e as tracejadas, os modos axiais. A linha pontilhada é o modo de difusão $\mathfrak{w}_s = \mathfrak{q}^2$ que tende à frequência quase-normal de $n_s = 0$ no limite hidrodinâmico $\mathfrak{w}, \mathfrak{q} \ll 1$	92
6.2	As cinco primeiras frequências dos modos eletromagnéticos axiais comuns, $\mathfrak{w} = (3\omega_R/4\pi T) - i(3\omega_I/4\pi T)$, em função do número de onda normalizado $\mathfrak{q} = 3q/4\pi T$. O número quântico principal n ordena os modos quase-normais comuns, começando pelas frequências com as menores partes imaginárias.	94
6.3	Gráficos das primeiras frequências dos modos eletromagnéticos polares comuns.	94
6.4	Gráficos do primeiro QNM eletromagnético polar comum, mostrando o comportamento da frequência para grandes valores de \mathfrak{q} . As linhas contínuas representam os valores calculados numericamente, enquanto que a linha tracejada é $\omega_R = q$	95
6.5	Gráfico com os valores de $\mathcal{B}_{(1)}(\mathfrak{w}, \mathfrak{q})$ para diferentes frequências puramente imaginárias $\mathfrak{w} = -i\mathfrak{w}_s$ e número de onda normalizado $\mathfrak{q} = 1/5$	97
6.6	As partes real e imaginária da relação de dispersão $\mathfrak{w}(\mathfrak{q})$ do modo hidrodinâmico longitudinal (linhas contínuas). As curvas tracejadas correspondem às frequências do modo de onda sonora (6.80), enquanto a curva pontilhada no gráfico da esquerda representa a relação energia-momento ultrarelativística $\omega_R = q$	98
6.7	A velocidade de grupo $c_s = d\omega_R/dq$ e a derivada $d\omega_I/dq$ em função do número de onda normalizado \mathfrak{q} . No gráfico da esquerda, a linha tracejada representa a velocidade do som $1/\sqrt{2}$ para uma CFT 2+1 dimensional e a linha pontilhada, a velocidade da luz.	98
6.8	As cinco primeiras frequências dos modos gravitacionais axiais não-hidrodinâmicos, $\mathfrak{w} = (3\omega_R/4\pi T) - i(3\omega_I/4\pi T)$, em função do número de onda normalizado $\mathfrak{q} = 3q/4\pi T$. O número quântico principal n ordena os modos quase-normais não-hidrodinâmicos, começando pelas frequências com as menores partes imaginárias.	100
6.9	Gráficos das primeiras frequências dos QNM polares não-hidrodinâmicos.	100

LISTA DE TABELAS

5.1	Frequências dos modos quase-normais fundamentais no regime de grandes buracos negros ($r_0/R \gg qR$) ou altas temperaturas ($T \gg q$).	61
5.2	Frequências dos modos quase-normais fundamentais no regime de buracos negros de tamanho intermediário ($r_0/R \sim qR$) ou temperaturas intermediárias ($T \sim q$).	62
5.3	Frequências dos modos quase-normais fundamentais no regime de pequenos buracos negros ($r_0/R \ll qR$) ou baixas temperaturas ($T \ll q$).	62
5.4	As frequências QN puramente imaginárias para alguns valores selecionados de q . A fórmula $q^2/3$ é um ajuste válido para grandes buracos negros, enquanto que $q^4/6$ é o módulo da frequência algebricamente especial $\mathfrak{w} = -i\mathfrak{w}_a$	64
6.1	Valores aproximados para as frequências $\mathfrak{w} = -i\mathfrak{w}_{\text{lim}}$ e os números de onda q_{lim} limítrofes das relações de dispersão dos modos eletromagnéticos puramente amortecidos.	93
6.2	Os resultados encontrados para as frequências QN dos modos gravitacionais polares. À esquerda, estão os valores obtidos com a utilização da variável mestre de Kovtun-Starinets Z_2 , enquanto à direita, estão aqueles obtidos com a variável de Regge-Wheeler $Z^{(+)}$, já apresentados no capítulo 5.	99

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	14
2	MODOS QUASE-NORMAIS E TEORIA DE PERTURBAÇÕES: UMA REVISÃO	23
2.1	Equações de Einstein e teoria de perturbações	23
2.1.1	As bases da teoria e a relatividade numérica	23
2.1.2	A gravidade linearizada	24
2.1.3	Perturbações num espaço-tempo curvo	26
2.2	Modos quase-normais de buracos negros	27
2.2.1	A relação com os modos normais	27
2.2.2	Definição dos QNM com base em funções de Green	28
3	UMA BREVE HISTÓRIA DA CORRESPONDÊNCIA ADS/CFT	34
3.1	As origens da AdS/CFT	34
3.2	O nascimento da correspondência	35
3.3	Parâmetros e funções de Green	38
3.4	A prescrição minkowskiana de Son-Starinets	39
4	BURACOS NEGROS PLANOS E PERTURBAÇÕES MÉTRICAS	42
4.1	Buracos negros anti-de Sitter	42
4.2	Propriedades do espaço-tempo de fundo	43
4.3	Perturbações métricas no formalismo de Chandrasekhar	46
4.3.1	Formulação geral	46
4.3.2	Perturbações axiais	47
4.3.3	Perturbações polares	48
4.4	Interpretação física das perturbações	49
4.4.1	Setor axial	49
4.4.2	Setor polar	51
5	PERTURBAÇÕES DE CURVATURA E QNM GRAVITACIONAIS	53
5.1	O espaço-tempo de fundo no formalismo de Newman-Penrose	53
5.2	Perturbações de curvatura na formulação de Teukolsky	54

	12
5.3	Propriedades analíticas dos QNM 57
5.4	O método de Horowitz-Hubeny 59
5.5	Resultados numéricos e análise 61
5.5.1	Modos quase-normais comuns 61
5.5.2	Modos puramente amortecidos 64
5.6	O limite de grandes buracos negros dos QNM puramente amortecidos 66
5.7	Modos algebricamente especiais 69
6	FREQÜÊNCIAS QN COMO PÓLOS DE FUNÇÕES DE CORRELAÇÃO
	DE DOIS PONTOS 73
6.1	A teoria de M2-branas 73
6.2	Flutuações no campo eletromagnético 75
6.2.1	Equações para as perturbações axiais 76
6.2.2	Equações para as perturbações polares 77
6.3	Flutuações no campo gravitacional 78
6.3.1	Perturbações axiais no calibre radial 79
6.3.2	Perturbações polares no calibre radial 80
6.4	Funções de Green retardadas e os modos quase-normais 81
6.4.1	Funções de correlação corrente-corrente 82
6.4.2	Funções de correlação do tensor energia-momento 84
6.5	O limite hidrodinâmico 88
6.5.1	Perturbações eletromagnéticas 89
6.5.2	Perturbações gravitacionais 90
6.6	Relações de dispersão 92
6.6.1	Modos quase-normais eletromagnéticos 92
6.6.2	Modos quase-normais gravitacionais 95
7	Considerações finais 101
A	Modos gravitacionais plano-simétricos AdS puros 106
B	Somatório da série para modos de grandes buracos negros 107
C	A teoria da resposta linear 108
D	Funções de correlação em teoria de campos 112
D.1	Correntes conservadas 113

D.2	O tensor energia-momento	114
D.3	CFT tridimensional	116
E	Elementos de hidrodinâmica	118

1 INTRODUÇÃO

O estudo dos aspectos não-perturbativos de sistemas fortemente interagentes e a formulação de uma teoria quântica da gravitação são dois dos principais problemas em aberto na física atual. Exemplos de sistemas em que os constituintes encontram-se fortemente acoplados aparecem em áreas tão distintas quanto a matéria condensada e a física nuclear. Em alguns casos, uma mudança na intensidade do acoplamento leva a uma transição de fase quântica, que é governada por flutuações do estado fundamental do sistema (SACHDEV, 1999). Isso ocorre, por exemplo, nas transições entre estados Hall quânticos,¹ na transição supercondutor-isolante em filmes finos² e nas transições entre ordens magnéticas de isolantes de Mott e supercondutores.³ Muitas vezes, as vizinhanças do ponto crítico quântico, que marca a mudança de fase, são descritas por uma teoria de campos conforme (CFT, *Conformal Field theory*) fortemente interagente à temperatura finita.⁴ Além da invariância por mudança de escala, o grupo de simetrias conformes contém as transformações de Lorentz da relatividade especial como subgrupo; nesse caso, com a velocidade da luz c substituída por uma velocidade menor, característica do material.

Em escalas de energia mais altas, experimentos envolvendo colisões entre íons relativísticos pesados⁵ sugerem a existência de um novo estado da matéria: um plasma formado por quarks e glúons (QGP, *Quark-Gluon Plasma*) fortemente interagentes.⁶ A interação nuclear forte, que atua entre essas partículas, é descrita por uma teoria de calibre não-abeliana baseada no grupo $SU(3)$, a cromodinâmica quântica (QCD, *Quantum Chromodynamics*). As equações de movimento para os graus de liberdade de calibre são não-lineares; além de mediar a interação, os glúons interagem uns com os outros. Em decorrência dessa auto-interação, a QCD é uma teoria assintoticamente livre,⁷ o que significa que a constante de acoplamento efetiva decresce com o aumento da energia. Em princípio, fenômenos como o confinamento dos quarks e a transição da fase hadrônica para o QGP estão fora do limite de validade das técnicas de perturbação usuais. A dependência do acoplamento com a energia também

¹ENGEL et al, 1993; SHAHAR et al, 1997.

²STEINER, BOEBINGER E KAPITULNIK, 2005; SAMBANDAMURTHY et al, 2005; CRANE et al, 2007.

³DEMLER, SACHDEV E ZANG, 2001; KHAYKOVICH et al, 2005; STONE et al, 2007.

⁴Exemplos são encontrados nas transições de fase do modelo de Hubbard bosônico (FISHER et al, 1989; GREINER et al, 2002; SPIELMAN, PHILLIPS E PORTO, 2007), nas transições de dímeros/escadas/camadas de spins acoplados (MATSUMOTO et al, 2001; WANG, BEACH E SANDVIK, 2006) e no ponto crítico ‘desconfinado’ de um antiferromagneto de spin 1/2 (SENTHIL et al, 2004a; 2004b; SANDVIK, 2007).

⁵Resumos sobre os experimentos do RHIC (Colisor de Íons Pesados Relativísticos) são encontrados em ARSENE et al (2005), ADCOX et al (2005), BACK et al (2005) e ADAMS et al (2005).

⁶SHURYAK, 2004; 2005; GYULASSY E MCLERRAN, 2005.

⁷GROSS E WILCZEK, 1973; POLITZER, 1973.

demonstra que a cromodinâmica não é invariante por transformações conformes. Existe, no entanto, uma teoria de calibre não-abeliana que apresenta essa característica: a teoria supersimétrica de Yang-Mills (SYM) com $\mathcal{N} = 4$ supercargas de espinores e grupo de calibre $SU(N)$. Especula-se que a SYM possa capturar alguns aspectos não-perturbativos da QCD, pelo menos nas vizinhanças da temperatura de formação do plasma de quarks e glúons.⁸

Outro desafio enfrentado pela física atual é a implementação consistente dos princípios da mecânica quântica em um modelo de interação gravitacional. No regime de campo fraco, a aplicação das regras usuais de quantização à relatividade geral produz uma teoria perturbativa não-renormalizável: a eliminação de todas as divergências exigiria uma quantidade infinita de parâmetros.⁹ Uma alternativa é quantizar a teoria clássica completa empregando uma formulação hamiltoniana da gravitação. Nesse caso, entretanto, a presença de equações de vínculo representa um sério obstáculo para a obtenção de um modelo canônico de gravidade quântica.¹⁰

Na ausência de uma teoria definitiva, muitas vezes são utilizadas aproximações semi-clássicas em que os campos de matéria são quantizados na forma usual, mas o espaço-tempo curvo permanece clássico. Com essa técnica, Hawking (1975) demonstrou que os buracos negros emitem radiação como se fossem um corpo quente com uma temperatura que depende apenas de suas propriedades: massa, carga elétrica e momento angular. Outras quantidades tipicamente termodinâmicas também foram calculadas. Em unidades de Planck,¹¹ a entropia de um buraco negro é um quarto da área do seu horizonte de eventos.¹² Esse resultado conduziu à idéia de que, tal como um holograma, os graus de liberdade de uma teoria quântica da gravidade encontram-se codificados na fronteira da região em que essa teoria está definida ('T HOOFT, 1993; SUSSKIND, 1995). A derivação da fórmula de entropia de um buraco negro, a partir da contagem de estados quânticos microscópicos, constitui um importante teste à qualquer teoria quântica da gravidade.

Ainda na busca por uma formulação inteiramente quântica, uma abordagem muito explorada nas últimas décadas baseia-se em teorias de supercordas. Para contornar os tradicionais obstáculos encontrados pelos métodos de perturbação, essas teorias abandonam a idéia de que as partículas elementares são objetos pontuais e assumem que elas correspondam às

⁸Ver, por exemplo, SHURYAK E ZAHED (2004) e GUBSER (2007).

⁹'T HOOFT, 1973; 'T HOOFT E VELTMAN, 1974; GOROFF E SAGNOTTI, 1985.

¹⁰Um exemplo de utilização do método canônico é a antiga geometrodinâmica quântica (DEWITT, 1967a; b; c). Atualmente, esse método é empregado com relativo sucesso na gravidade quântica em laços (ASHTEKAR E LEWANDOWSKI, 2004; ROVELLI, 2004).

¹¹As unidades de Planck são definidas pela condição $\hbar = G = c = k_B = 1$.

¹²Uma relação de proporcionalidade entre a área e a entropia de um buraco negro foi originalmente sugerida por Bekenstein (1973, 1974).

excitações de uma corda fundamental.¹³ A quantização de uma corda relativística no espaço-tempo de Minkowski produz uma infinidade de modos com diferentes valores de energia. Um desses modos, com massa zero e spin dois, é identificado com o gráviton, a partícula mediadora da força gravitacional. Os modelos com interação também reproduzem a expansão perturbativa da relatividade geral (HOROWITZ, 2000). Costuma-se dizer, nesse sentido, que as cordas fornecem uma visão unificada das interações fundamentais na qual a gravidade já está quantizada.

Uma das características das teorias envolvendo supercordas é o número de dimensões. Essas teorias são consistentes apenas em espaços-tempos com dez dimensões. As seis dimensões extras precisam ser pequenas o suficiente para não terem sido observadas nos experimentos atuais. Outra dificuldade é a construção de modelos não-perturbativos que sejam independentes do espaço-tempo de fundo (WITTEN, 1993), característica presente na gravitação de Einstein. As descobertas realizadas nos últimos quinze anos, no entanto, são bastante animadoras. Sabe-se agora da existência de uma rede de relações, chamadas de dualidades, ligando as cinco teorias de supercordas mais a supergravidade em onze dimensões. Essas dualidades indicam que todos os modelos são diferentes limites de uma única teoria, cuja formulação ainda é desconhecida e que recebeu o nome de teoria-M (HOŘAVA E WITTEN, 1996).

Enquanto a teoria-M completa ainda está por ser desvendada, as pesquisas em cordas sugerem uma conexão entre a descrição de certos sistemas fortemente acoplados e a gravidade quântica. Os primeiros indícios apareceram nos estudos de teorias de calibre $SU(N)$ com um grande número de cores N . Nesse limite, 't Hooft (1974) observou a existência de cadeias de glúons com um comportamento muito semelhante ao das cordas. Percebeu-se, posteriormente, que essas cordas vivem num espaço com mais dimensões do que aquele em que vivem os glúons (POLYAKOV, 1981). Porém, foi a partir da análise de objetos não-perturbativos estendidos, conhecidos como D-branas, que Maldacena (1998) conjecturou uma equivalência exata entre modelos de supercordas e determinadas teorias de calibre. Essa relação contempla as idéias contidas no princípio holográfico: graus de liberdade gravitacionais em n dimensões estão associados com campos quânticos vivendo na fronteira $(n-1)$ -dimensional desse espaço. O exemplo original, descoberto por Maldacena, indica que a SYM com $\mathcal{N} = 4$ (uma CFT) é equivalente a uma teoria de supercordas fechadas do tipo IIB. As dez dimensões nessa teoria de supercordas assumem um formato particular: cinco dimensões formam uma esfera S^5 e as

¹³As teorias de supercordas são apresentadas, por exemplo, em GREEN, SCHWARZ E WITTEN (1987) e POLCHINSKI (1998).

demais, um espaço com curvatura constante negativa, chamado de anti-de Sitter (AdS). A teoria de campos holográfica é definida sobre o espaço-tempo de Minkowski usual – a fronteira quadridimensional do espaço-tempo anti-de Sitter. Esse resultado ficou conhecido como a correspondência AdS/CFT.¹⁴

Embora tenham ocorrido alguns avanços na busca por uma demonstração formal,¹⁵ a AdS/CFT continua sendo uma conjectura. As primeiras evidências para essa relação baseavam-se em argumentos de simetria e no cálculo de seções de choque de D3-branas.¹⁶ Durante os últimos dez anos, a correspondência foi submetida a uma infinidade de testes quantitativos, nos quais comparam-se os resultados obtidos nos dois lados da dualidade: todos os testes confirmaram a conjectura de Maldacena.

Uma vez aceita como verdadeira, a correspondência AdS/CFT dá origem a inúmeras aplicações.¹⁷ A teoria de calibre definida sobre a fronteira AdS fornece uma formulação (inicial) não-perturbativa e independente do fundo para as teorias de supercordas. Pode-se também utilizar a correspondência para investigar questões fundamentais como o papel das singularidades espaço-temporais (HOROWITZ E ROSS, 1998) e a perda de informações em buracos negros (HAWKING, 2005). Em alguns casos, é possível obter a chamada “função de onda do universo” com a ajuda de simulações Monte-Carlo em teoria de campos.¹⁸ Por outro lado, cálculos puramente gravitacionais têm sido extensamente utilizados no estudo das propriedades não-perturbativas do QGP – o plasma formado por quarks e glúons. Apesar das diferenças entre a SYM e a QCD, os resultados encontrados concordam relativamente bem com as observações experimentais.¹⁹ Foram conseguidas boas estimativas para quantidades como o coeficiente de viscosidade de cisalhamento (POLICASTRO, SON E STARINETS, 2001) e o tempo de termalização do QGP (FRIESS et al, 2007), além da força de arraste sobre um quark pesado em movimento no plasma (GUBSER, 2006). E, surpreendentemente (ZAAENEN, 2007), pesquisas recentes²⁰ também sugerem a possibilidade de se usar a AdS/CFT no estudo de fenômenos de transporte, como o efeito Nernst,²¹ em supercondutores de altas temperaturas. Nesse caso, a teoria de campos dual é definida sobre um espaço-tempo de Minkowski de (2+1) dimensões. Em muitos aspectos, essa teoria é diferente das CFT que descrevem alguns

¹⁴A correspondência AdS/CFT é discutida em detalhes em AHARONY et al (2000).

¹⁵Ver, por exemplo, BERKOVITS (2007) e BERKOVITS E VAFA (2008).

¹⁶KLEBANOV, 1997; GUBSER, KLEBANOV E TSEYTLIN, 1997; GUBSER E KLEBANOV, 1997.

¹⁷Para se ter uma idéia, o trabalho pioneiro de Maldacena (1998) possui hoje mais de 5000 citações, de acordo com a base de dados SPIRES-HEP.

¹⁸BERENSTEIN E COTTA, 2006; 2007; BERENSTEIN, COTTA E LEONARDI, 2008.

¹⁹Revisões são apresentadas, por exemplo, em BOSCHI-FILHO E BRAGA (2006), MATEOS (2007) e PESCHANSKI (2007).

²⁰HERZOG et al, 2007; HARTNOLL E KOVTUN, 2007; HARTNOLL E HERZOG, 2008.

²¹XU et al, 2000; WANG, LI E ONG et al, 2006; LI et al, 2007

dos fenômenos críticos quânticos encontrados em materiais. Mesmo assim, os resultados obtidos para o coeficiente de Nernst, por exemplo, descrevem bem o comportamento observado experimentalmente (HARTNOLL et al, 2007; SACHDEV, 2008).

Do ponto de vista teórico, dispõe-se atualmente de um amplo dicionário relacionando quantidades de um lado e de outro da correspondência. Por exemplo, o funcional gerador das funções de Green na fronteira é identificado com a função de partição das cordas no interior do espaço-tempo AdS.²² Outra característica importante da AdS/CFT é a relação entre as constantes de acoplamento. No limite de N grande, a constante de 't Hooft $\lambda = g_{YM}^2 N$ é uma medida do acoplamento efetivo da SYM. Com λ fixo e grande, a teoria de campos dual torna-se fortemente interagente e os métodos de perturbação perdem sua validade. Para essa combinação de parâmetros, as teorias de cordas podem ser aproximadas pela supergravidade num espaço-tempo com curvatura pequena, isto é, com raio de curvatura muito maior do que o comprimento das cordas. A supergravidade, por sua vez, tem a gravitação de Einstein como limite de baixas energias.

Na prática o interesse em sistemas fortemente acoplados e a simplicidade dos cálculos transformaram a relatividade geral numa das ferramentas mais utilizadas em aplicações da AdS/CFT. A exemplo do que acontece com a cromodinâmica quântica, as equações de movimento de Einstein são não-lineares. Embora se conheça hoje um grande número de soluções exatas (KRAMER et al, 1980) e já se disponha de métodos de integração numérica (GUNDLACH, 2007), a não-linearidade das equações faz com que se recorra, muitas vezes, ao uso de técnicas de aproximação para a análise da dinâmica de objetos compactos. Entre essas técnicas, destaca-se a teoria de perturbações lineares. O estudo das perturbações de uma solução de buraco negro, por exemplo, mostra de que forma campos de teste evoluem nesse espaço-tempo. Em particular, as equações de perturbação revelam como ondas gravitacionais incidentes sobre um buraco negro são espalhadas e absorvidas, além de permitirem testar a estabilidade do horizonte de eventos contra pequenos afastamentos do equilíbrio (CHANDRASEKHAR, 1983).

Com a teoria de perturbações da relatividade geral, também é possível investigar o espectro de vibrações dos buracos negros – os chamados modos quase-normais (QNM, *Quasi-normal Modes*). Esses modos formam um conjunto discreto de oscilações amortecidas que dominam, em tempos intermediários, a resposta dinâmica do sistema a qualquer tipo de perturbação externa. Tal resultado tem sido verificado tanto no nível linearizado (DAVIS et al, 1971), quanto em simulações completamente numéricas para processos de colapso gravitacional estelar (STARK E PIRAN, 1985) e colisões frontais de buracos negros (ANNINOS et al,

²²GUBSER, KLEBANOV E POLYAKOV, 1998; WITTEN, 1998.

1993). A possibilidade de observação, nos próximos anos, da radiação associada aos QNM abre uma nova perspectiva para a tão sonhada astronomia de ondas gravitacionais. Por meio dessas observações, seria possível obter, pelo menos em princípio, uma evidência direta da existência dos buracos negros,²³ bem como estimar os parâmetros associados a eles com uma alta precisão.²⁴

Além das aplicações astrofísicas, no início da década (HOROWITZ E HUBENY, 2000), surgiu uma interpretação dos QNM em termos da correspondência AdS/CFT. Segundo essa correspondência, um buraco negro no espaço-tempo AdS corresponde a um sistema em equilíbrio térmico na CFT, que é caracterizado pela temperatura Hawking do buraco negro. Perturbar essa geometria é equivalente a perturbar o estado térmico correspondente, conforme descrito pela teoria da resposta linear. O tempo de amortecimento da perturbação, dado pelo inverso da parte imaginária do modo fundamental, fornece a escala de tempo para a CFT retornar ao equilíbrio. Sendo assim, com o cálculo de frequências quase-normais (QN) em um espaço AdS, é possível não apenas obter a energia das excitações elementares (parte real dos QNM) como também o tempo de termalização numa CFT fortemente acoplada.

Os diversos estudos sobre QNM de buracos negros AdS se diferenciam pelo número de dimensões do espaço-tempo, pelo campo de perturbação, pela topologia (ou simetria) do horizonte de eventos e pelos parâmetros que caracterizam o buraco negro. Todas essas variantes se refletem na CFT dual, que pode mudar de acordo com as condições do espaço-tempo anti-de Sitter. Perturbações da métrica e do campo eletromagnético no interior do AdS acoplam-se às flutuações do tensor energia-momento e de uma corrente conservada na fronteira desse espaço. Se um espaço-tempo anti-de Sitter de (4+1) dimensões contém, por exemplo, um buraco negro esféricamente simétrico, a teoria de campos holográfica estará definida sobre uma esfera S^3 . Além disso, os parâmetros associados aos buracos negros estão relacionados aos parâmetros que caracterizam o estado de equilíbrio do plasma dual na fronteira do espaço-tempo AdS.

A literatura envolvendo QNM no espaço-tempo anti-de Sitter é bastante extensa, mas vale a pena citar aqui alguns trabalhos de suma importância. A começar pela solução de buraco negro mais simples: a família de buracos negros BTZ, obtida originalmente por Bañados, Teitelboim e Zanelli (1992). Essa solução representa um espaço-tempo assintoticamente AdS de apenas (2+1) dimensões. Para os buracos negros BTZ, as expressões analíticas encontradas para as frequências quase-normais (CARDOSO E LEMOS, 2001a) coincidem exatamente com os

²³Ver, por exemplo, DREYER et al (2004) e BERTI E CARDOSO (2006).

²⁴Revisões sobre os trabalhos tradicionais em modos quase-normais são apresentadas em KOKKOTAS E SCHMIDT (1999) e NOLLERT (1999).

pólos das funções de correlação retardadas na CFT dual em (1+1) dimensões (BIRMINGHAM, SACHS E SOLODUKHIN, 2002). Esse resultado forneceu um teste quantitativo importante para a correspondência AdS/CFT.

Em dimensões mais altas, os trabalhos tradicionalmente se dividem em duas linhas de pesquisa principais, relativamente independentes. Quando se está mais interessado nos aspectos gravitacionais da AdS/CFT, costuma-se investigar o espectro de vibrações de buracos negros quadridimensionais com horizontes (topologicamente) esféricos, como são os casos do Schwarzschild-AdS,²⁵ Reissner-Nordström-AdS²⁶ e Kerr-AdS.²⁷ Essas soluções representam análogos anti-de Sitter dos espaços-tempos que em geral são estudados pela astrofísica relativística. Com isso, pode-se observar as mudanças no espectro quase-normal devido à inclusão de um termo cosmológico nas equações de Einstein. Por exemplo, enquanto num espaço-tempo assintoticamente chato as frequências QN são inversamente proporcionais ao raio do horizonte de eventos, no caso de grandes buracos negros anti-de Sitter essas frequências variam linearmente com o tamanho do buraco negro e, conseqüentemente, com a temperatura do plasma dual.

Com outro enfoque, uma série de pesquisas utilizam os buracos negros AdS como “laboratórios” teóricos para a investigação de propriedades não-perturbativas do QGP.²⁸ Nesse caso, a teoria de campos dual à temperatura finita é a SYM $\mathcal{N} = 4$ com grupo de calibre $SU(N)$, definida sobre o espaço-tempo de Minkowski de (3+1) dimensões. Para N grande, essa teoria é equivalente ao limite de proximidade do horizonte de uma geometria formada pela coleção de N D3-branas paralelas não-extremas. A variedade completa possui dez dimensões, sendo que a parte AdS (4+1)-dimensional do espaço-tempo contém um buraco negro (brana negra) com horizonte de eventos plano-simétrico. O estudo dos QNM dessas branas negras mostrou que o comportamento hidrodinâmico do plasma dual é muito semelhante ao do QGP observado no RHIC. Descobriu-se, por exemplo, um valor universal para a razão entre o coeficiente de viscosidade de cisalhamento (η) e a densidade volumétrica de entropia do plasma (s): $\eta/s = \hbar/4\pi k_B$ (POLICASTRO, SON E STARINETS, 2001). Todas as teorias de campos com modelos gravitacionais duais apresentam o mesmo valor para η/s . Especula-se também que esse seja um limite inferior para qualquer fluido encontrado na natureza (KOVTON, SON E STARINETS, 2005).

²⁵HOROWITZ E HUBENY, 2000; CARDOSO E LEMOS, 2001b; ZHU, WANG E ABDALLA, 2001; KONOPLYA, 2002a; MOSS E NORMAN, 2002; MUSIRI E SIOPSIS, 2003; GIAMMATTEO E JING, 2005.

²⁶WANG, LIN E ABDALLA, 2000; WANG, MOLINA E ABDALLA, 2001; KONOPLYA, 2002b; BERTI E KOKKOTAS, 2003; WANG, LIN E MOLINA, 2004; JING E PAN, 2005.

²⁷CARDOSO et al, 2004a; CARDOSO E DIAS, 2004; GIAMMATTEO E MOSS, 2005.

²⁸Para revisões recentes, ver SON E STARINETS (2007), GUBSER (2007) e PESCHANSKI (2007).

Diante desse quadro geral, o presente trabalho dedica-se ao estudo dos modos quase-normais de um sistema que contempla aspectos de ambas as linhas de pesquisa, a saber, um buraco negro plano-simétrico quadridimensional. Ou seja, mantém-se o número de dimensões que é relevante do ponto de vista astrofísico, porém se investiga uma solução tipo buraco negro que, ao invés da simetria esférica usual, apresenta uma simetria plana. Da perspectiva das teorias de supercordas, os buracos negros quadridimensionais planos surgem da redução dimensional de uma solução de supergravidade em 11 dimensões. Essa solução é gerada por uma ‘pilha’ de M2-branas não-extremas. No limite de proximidade do horizonte, o espaço-tempo completo se separa no produto de uma esfera S^7 por um espaço-tempo anti-de Sitter de (3+1) dimensões. A parte AdS dessa solução de supergravidade satisfaz as equações de Einstein para um espaço-tempo quadridimensional com constante cosmológica negativa. É exatamente essa geometria que será investigada neste trabalho e que se está chamando de buraco negro plano-simétrico. De acordo com a correspondência AdS/CFT, as frequências quase-normais gravitacionais e eletromagnéticas dos buracos negros planos correspondem aos pólos de funções de correlação de dois pontos na teoria de campos holograficamente dual: a super-Yang-Mills com $\mathcal{N} = 8$ supersimetrias num espaço-tempo de Minkowski de (2+1) dimensões.

Em relação à sua estrutura, a tese está organizada da seguinte forma. No capítulo 2, apresenta-se uma revisão da teoria de perturbações lineares em relatividade geral, e se introduz o conceito de QNM de buracos negros assintoticamente chatos com base na conhecida técnica de funções de Green para equações diferenciais parciais. O capítulo 3 contém um resumo da correspondência AdS/CFT, com ênfase especial àqueles aspectos que serão mais importantes para a seqüência da tese, como a prescrição minkowskiana de Son-Starinets (2002). Os primeiros resultados originais deste trabalho aparecem no capítulo 4, onde se discute a interpretação física dos diferentes modos de perturbação gravitacional de um buraco negro plano. No capítulo 5, apresenta-se um estudo das perturbações gravitacionais com base no formalismo de variações de curvatura de Teukolsky (1972). Também são obtidas as frequências dos modos algebricamente especiais, que são soluções exatas das equações de perturbação, bem como um primeiro conjunto de frequências QN gravitacionais. O capítulo 6, por sua vez, tem como objetivo investigar a relação entre as perturbações dos buracos negros planos AdS e as flutuações de corrente conservada e tensor energia-momento na CFT holográfica. Em particular, mostra-se que uma escolha adequada das variáveis ‘mestres’ para os campos eletromagnético e gravitacional conduz diretamente aos pólos das funções de Green retardadas na teoria de campos dual. Calcula-se então o espectro de frequências quase-normais

completo, incluindo um estudo analítico dos modos hidrodinâmicos de difusão, cisalhamento e onda sonora. Finaliza-se a tese, no capítulo 7, com uma discussão e interpretação física dos principais resultados, e as perspectivas de continuidade do trabalho.

No decorrer desta tese, a menos que se diga algo em contrário, utilizar-se-á um sistema de unidades naturais, no qual a velocidade da luz, a constante de Boltzmann e a constante de Planck $\hbar = h/2\pi$ são normalizadas à unidade, $c = k_B = \hbar = 1$. Com isso, todas as quantidades físicas são medidas em unidades de massa (ou energia). Em relação à notação, o asterisco sobrescrito denota conjugação complexa, os índices latinos maiúsculos M, N, \dots variam sobre as coordenadas do espaço-tempo n dimensional completo, os índices gregos μ, ν, \dots apenas sobre as $n - 1$ coordenadas que definem a fronteira do espaço-tempo AdS e os índices latinos minúsculos i, j, \dots variam sobre as $n - 2$ coordenadas espaciais dessa fronteira. As convenções dos sinais para a métrica e os diferentes tensores de curvatura são as mesmas utilizadas no livro clássico *Gravitation* de Misner, Thorne e Wheeler (1973).

2 MODOS QUASE-NORMAIS E TEORIA DE PERTURBAÇÕES: UMA REVISÃO

De um modo geral, os estudos das propriedades clássicas de uma solução de buraco negro utilizam como base a teoria da relatividade de Einstein. Quando essas propriedades caracterizam estados nas vizinhanças do equilíbrio, considera-se uma teoria de perturbações lineares sobre espaços-tempos curvos. Um dos objetivos deste capítulo é apresentar uma breve revisão dessa teoria.¹ Além disso, define-se o conceito de modos quase-normais de buracos negros com base na conhecida técnica de funções de Green para equações diferenciais parciais. Tal definição vale tanto para campos de teste (escalares, eletromagnéticos, Dirac, etc), quanto para flutuações da própria geometria do espaço-tempo.

2.1 Equações de Einstein e teoria de perturbações

2.1.1 As bases da teoria e a relatividade numérica

A teoria geral da relatividade baseia-se num pequeno conjunto de postulados fundamentais; dentre eles, a exigência de que o espaço-tempo seja uma variedade diferenciável sobre a qual uma métrica lorentziana está definida, e que todas as leis físicas da relatividade especial sejam válidas num sistema inercial local da métrica. A estrutura geométrica (dinâmica) do espaço-tempo está vinculada ao conteúdo de massa e energia no universo por meio das equações de Einstein

$$G_{MN} + \Lambda_C g_{MN} = 8\pi G T_{MN}, \quad (2.1)$$

onde G_{MN} representa o tensor de Einstein, Λ_C a constante cosmológica, g_{MN} a métrica do espaço-tempo, T_{MN} o tensor de energia-momento e G a constante da gravitação de Newton. Em (3+1) dimensões, a equação tensorial (2.1) forma um sistema acoplado de dez equações diferenciais parciais, não-lineares e de segunda ordem para as componentes métricas g_{MN} . Essa equação é semelhante, em certos aspectos, às equações de Maxwell do eletromagnetismo, com o tensor T_{MN} exercendo um papel análogo ao da quadricorrente j_M . No entanto, o termo de fonte eletromagnético é totalmente independente dos campos, ao passo que o tensor de energia-momento, em geral, depende da métrica. A dinâmica de uma partícula carregada é governada

¹A teoria de perturbações sobre o espaço-tempo de Minkowski é discutida em livros-texto de gravitação como WEINBERG (1972), MISNER, THORNE E WHEELER (1973), WALD (1984), SCHUTZ (1985) e CARROLL (2003).

pela equação de movimento de Lorentz, que é independente das equações de Maxwell. Na teoria da relatividade, por outro lado, toda a dinâmica do sistema físico (partículas e campos) está contida nas equações de Einstein. Inclusive as leis de conservação de energia e momento são automaticamente satisfeitas, já que a divergência do tensor G_{MN} é identicamente nula.

Assim como ocorre em outros ramos da física, a maior parte dos problemas relativísticos de grande interesse físico são muito difíceis e complexos para serem resolvidos analiticamente. Uma forma de contornar esse obstáculo é recorrer ao uso de técnicas computacionais sofisticadas, integrando numericamente as equações de campo. Esses estudos focam principalmente na investigação da dinâmica de sistemas localizados em regiões de campo gravitacional forte, como nas vizinhanças de estrelas de nêutrons e buracos negros. Apesar de alguns resultados promissores, a eficiência dos algoritmos numéricos é limitada pelo caráter não-linear das equações de evolução (COOK, 2000). Além disso, a covariância geral da teoria impede uma interpretação física direta dos resultados, especialmente na presença de radiação gravitacional (BEETLE E BURKO, 2002). Essas dificuldades são apenas alguns dos problemas encontrados em relatividade numérica.

2.1.2 A gravidade linearizada

Na falta de soluções exatas e códigos numéricos confiáveis, recorre-se muitas vezes a técnicas de aproximação. E entre essas técnicas, aquela que abrange o maior número de aplicações é a teoria de perturbações. Do ponto de vista formal, as perturbações na geometria de um espaço-tempo foram definidas por Stewart e Walker (1974), porém o uso da teoria em relatividade remonta aos trabalhos pioneiros de Einstein em ondas gravitacionais. O campo produzido pelas ondas é geralmente tão fraco que o espaço-tempo permanece essencialmente minkowskiano, ou seja, existe um sistema de coordenadas no qual

$$g_{MN} = \eta_{MN} + h_{MN}, \quad (2.2)$$

onde $|h_{MN}| \ll 1$ e $\eta_{MN} = \text{diag}(-1, +1, +1, +1)$ é a métrica de Minkowski. A mesma decomposição é usada no estudo de efeitos relativísticos no sistema solar, onde $|h_{MN}| \sim |\Phi| \lesssim GM_{\odot}/R_{\odot} \sim 10^{-6}$. Em tais situações, é possível expandir as equações de Einstein em potências de h_{MN} e, sem muita perda de precisão, manter apenas os termos lineares. O formalismo resultante é conhecido como a teoria linearizada da gravidade.

Além de um campo gravitacional fraco, a condição (2.2) também exige que as coordenadas $\{x^M\}$ estejam associadas a um sistema de referência aproximadamente inercial. Esses

sistemas estão relacionados por transformações globais de Lorentz e por mudanças infinitesimais nas coordenadas,

$$x^{M'} = x^M + \xi^M(x), \quad (2.3)$$

onde $|\xi^M| \ll 1$. Frente a uma transformação de Lorentz, as quantidades h_{MN} comportam-se como as componentes de um tensor no espaço-tempo de Minkowski. Por outro lado, ao serem submetidas à transformação (2.3), as perturbações métricas mudam para

$$h_{M'N'} = h_{MN} - \partial_M \xi_N - \partial_N \xi_M, \quad (2.4)$$

enquanto todos os demais escalares, vetores e tensores permanecem inalterados dentro da precisão da teoria linearizada. Em particular, os tensores de curvatura não mudam, o que significa que o próprio espaço-tempo físico se mantém inalterado. As transformações (2.4) formam o chamado grupo de calibre da gravidade linearizada.

De maneira semelhante ao que se faz no eletromagnetismo, costuma-se utilizar a invariância de calibre da teoria linearizada para simplificar as equações de campo resultantes. Por meio de uma escolha especial das coordenadas, é possível impor a condição de calibre de Lorentz

$$\partial_M h_N^M - \frac{1}{2} \partial_N h = 0, \quad (2.5)$$

onde h denota o traço da perturbação métrica, $h = h^M_M = \eta^{MN} h_{MN}$. Com essa condição, as equações de Einstein linearizadas (sem constante cosmológica) assumem a forma da equação de d'Alembert

$$\partial_A \partial^A \bar{h}_{MN} = -16\pi G T_{MN}, \quad (2.6)$$

onde as variáveis \bar{h}_{MN} são definidas por

$$\bar{h}_{MN} = h_{MN} - \frac{1}{2} \eta_{MN} h. \quad (2.7)$$

Na ausência de fontes ($T_{MN} = 0$), as equações (2.6) admitem soluções de onda plana que se propagam à velocidade da luz e possuem dois modos independentes de polarização. São exatamente esses campos clássicos que estão associados com partículas quânticas (grávitons) de massa zero e spin dois no espaço-tempo de Minkowski.

2.1.3 Perturbações num espaço-tempo curvo

Formalmente, a passagem de uma teoria de perturbações no espaço-tempo de Minkowski para uma teoria em um espaço-tempo curvo corresponde simplesmente a uma troca da equação (2.2) por $g_{MN} = g_{MN}^0 + h_{MN}$, onde os h_{MN} são novamente ‘pequenos’ e a métrica g_{MN}^0 é uma solução das equações de campo (2.1). As derivadas parciais são trocadas por derivadas covariantes em relação à nova métrica de fundo, e a equação de onda (sem fontes) recebe contribuições de termos de curvatura:

$$\nabla_A \nabla^A \bar{h}_{MN} + 2R_{ABMN}^0 \bar{h}^{AB} - 2R_{A(M}^0 \bar{h}_{N)}^A = 0, \quad (2.8)$$

onde índices entre parênteses indicam simetrização.

No caso de soluções de buraco negro, o trabalho pioneiro em perturbações métricas foi realizado por Regge e Wheeler (1957) e visava estudar a estabilidade do horizonte de eventos de Schwarzschild contra pequenos afastamentos do equilíbrio. Esse estudo foi posteriormente completado por Zerilli (1970a) e ampliado para a solução eletricamente carregada de Reissner-Nordström por Moncrief (1974a, 1974b). Também foram realizadas pesquisas para investigar as propriedades de um buraco negro como um centro espalhador de ondas planas monocromáticas.²

A propagação de ondas gravitacionais nas vizinhanças de um buraco negro esféricamente simétrico é modelada, em geral, por uma equação de Klein-Gordon do tipo

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial r_*^2} + V_l(r) \right] \phi_l(r, t) = 0, \quad (2.9)$$

onde r e t são as coordenadas radial e temporal de Schwarzschild, e l denota o momento angular da perturbação. A coordenada tartaruga de Regge-Wheeler $r_*(r)$ é uma função unívoca de r que varia no intervalo $(-\infty, +\infty)$. A variável $\phi_l(r, t)$ é usualmente uma quantidade invariante de calibre formada por uma combinação, não necessariamente linear, das perturbações métricas h_{MN} . O potencial efetivo $V_l(r)$ descreve o espalhamento das ondas pela curvatura do espaço-tempo de fundo. Um exemplo típico desse potencial é mostrado na Figura 2.1.

Quando se aplica o procedimento anterior a um buraco negro em rotação, a quebra da simetria esférica provoca uma grande mistura dos h_{MN} , de tal modo que ninguém foi capaz de desacoplar as equações linearizadas correspondentes. A alternativa então foi procurar por um novo formalismo. Teukolsky (1972) mostrou que é possível desacoplar as perturbações gra-

²Ver, por exemplo, CHRZANOWSKI et al (1976) e MATZNER E RYAN (1977).

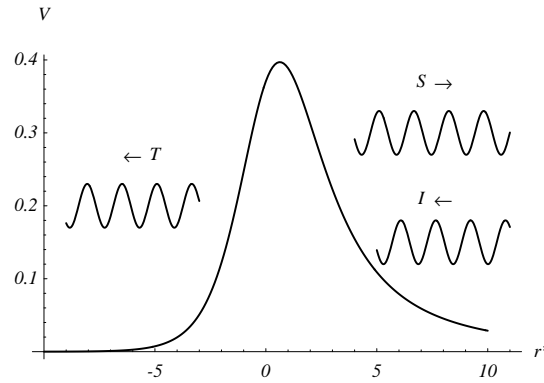


Figura 2.1: Descrição esquemática do espalhamento de ondas no espaço-tempo de Schwarzschild. Uma onda incidente I é decomposta numa componente transmitida T e numa componente espalhada S . Extraído de Andersson e Jensen (2002).

vitacionais da solução de Kerr, bem como separar as variáveis radial e angular do problema, desde que as equações sejam escritas num formalismo de Newman-Penrose (1962). Nessa formulação, não se trabalha mais com variações das componentes métricas, mas sim com perturbações em quantidades puramente escalares, as quais representam as projeções dos tensores de curvatura numa tétrada de vetores nulos e complexos.

2.2 Modos quase-normais de buracos negros

2.2.1 A relação com os modos normais

A experiência cotidiana mostra inúmeros sistemas físicos que, ao vibrarem, selecionam um certo conjunto de frequências ‘naturais’ de ressonância. Por exemplo, a vibração da membrana de um tambor ou das cordas de um violão produz um som ‘característico’, associado com as ondas estacionárias do instrumento. Na ausência de dissipação, qualquer sistema oscilatório, linear e compacto apresenta uma série de estados de movimento harmônico preferenciais, os chamados modos normais de vibração. Cada um desses estados é caracterizado por uma dada frequência real de oscilação e pelas autofunções correspondentes, as quais descrevem a dependência espacial do movimento. O sistema, uma vez perturbado, vibra em uma superposição linear, geralmente infinita, dos modos normais, o que significa que as autofunções formam um conjunto completo.

Quando se leva em conta algum mecanismo de ‘dissipação’, seja num sistema aberto ou acoplado a um meio vizinho, os modos deixam de ser estacionários, tornando-se exponencialmente amortecidos. Isso acontece, por exemplo, com uma corda de violão que perde energia por meio da produção de ondas sonoras no ar. As pulsações de estrelas da seqüência principal também apresentam dissipação se a viscosidade interna não puder ser ignorada. Por

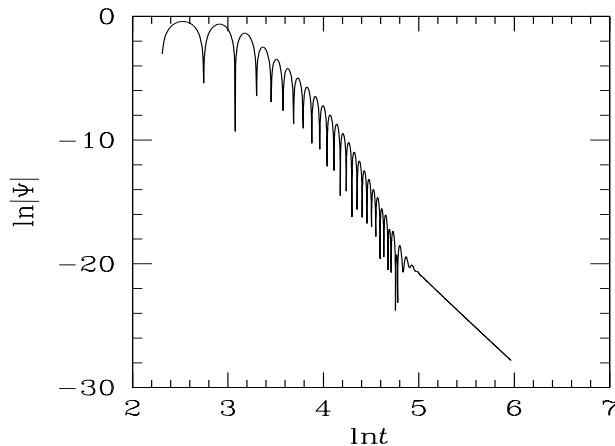


Figura 2.2: Gráfico log-log que mostra a evolução de um pacote de ondas gravitacionais gaussiano nas proximidades de um buraco negro de Schwarzschild. Extraído de Cardoso (2003).

outro lado, na astrofísica relativística, buracos negros e estrelas de nêutrons são sistemas intrinsecamente dissipativos: qualquer oscilação do espaço-tempo implica na geração de ondas gravitacionais, as quais levam energia para o infinito.

A existência de um fator de amortecimento não impede que sistemas oscilatórios apresentem modos de vibração com frequências ‘características’, proximamente relacionadas às ressonâncias de espalhamento. Na física dos buracos negros, Vishveshwara (1970) foi o primeiro a observar essas oscilações amortecidas quando investigava a evolução de um pacote de ondas gravitacionais gaussiano na geometria de Schwarzschild. Conforme mostrado na Figura 2.2, após um rápido pulso inicial, o sinal é dominado durante um certo tempo por oscilações amortecidas de uma única frequência. Press (1971) denominou essas oscilações de modos quase-normais (QNM). A frequência e o tempo de amortecimento desses modos dependem apenas dos parâmetros que caracterizam o buraco negro, sendo totalmente independentes da perturbação inicial. Ao contrário dos modos normais, os QNM não formam um conjunto completo e, portanto, são insuficientes para descrever completamente a dinâmica do sistema. Por exemplo, na Figura 2.2, as oscilações amortecidas aparecem apenas durante um intervalo de tempo limitado e, no final, dão lugar a um decaimento numa lei de potência.

2.2.2 Definição dos QNM com base em funções de Green

Os primeiros cálculos das frequências quase-normais de buracos negros foram realizados por Chandrasekhar e Detweiler (1975). No entanto, uma definição formal para os QNM veio somente com o trabalho de Nollert e Schmidt (1992), os quais utilizaram o tradicional

método da função de Green para expressar soluções de equações diferenciais parciais. A idéia é modelar a resposta de um buraco negro a uma dada perturbação inicial, seja ela resultado da propagação de um campo de teste escalar ou eletromagnético, ou então uma excitação da própria geometria do espaço-tempo. Por uma questão de simplicidade, a revisão que segue trata da propagação de um campo escalar sem massa na geometria de Schwarzschild. Esse campo obedece à equação de Klein-Gordon

$$D\phi(x, t) = [\partial_t^2 - \partial_x^2 + V(x)] \phi(x, t) = 0, \quad (2.10)$$

com o potencial $V(x)$ mostrado na Figura 2.1 e x no lugar da coordenada tartaruga r_* . Para equações de onda do tipo (2.10), a teoria geral das equações diferenciais parciais mostra que, para dados iniciais ‘suaves’ $\phi(x, 0)$ e $\partial_t\phi(x, 0)$, existe uma única solução ‘suave’ $\phi(x, t)$ para todo t e x . Essa solução pode ser escrita como (MORSE E FESHBACH, 1953)

$$\phi(x, t) = \int dy \mathcal{G}(x, y; t) \partial_t \phi(y, 0) + \int dy \partial_t \mathcal{G}(x, y; t) \phi(y, 0), \quad (2.11)$$

para $t > 0$, onde a função de Green retardada $\mathcal{G}(x, y; t)$ é definida por

$$D\mathcal{G}(x, y; t) = \delta(t)\delta(x - y) \quad (2.12)$$

e pela condição causal $\mathcal{G}(x, y; t) = 0$ para $t \leq 0$. Além disso, Kay e Wald (1987) mostraram que, para dados iniciais com suporte compacto sobre superfícies de Cauchy, a solução $\phi(x, t)$ é necessariamente limitada, ou seja, existe uma constante positiva \mathcal{C} tal que $|\phi(x, t)| \leq \mathcal{C}$ para todo t e x . Isso implica, entre outras coisas, que a função de Green possui uma transformada de Fourier

$$\tilde{\mathcal{G}}(x, y; \omega) = \int_0^\infty dt \mathcal{G}(x, y; t) e^{i\omega t}, \quad (2.13)$$

que é uma função analítica de ω para $\text{Im}(\omega) > 0$ e satisfaz a equação diferencial

$$\tilde{D}(\omega)\tilde{\mathcal{G}} = [-\omega^2 - \partial_x^2 + V(x)] \tilde{\mathcal{G}}(x, y; \omega) = \delta(x - y). \quad (2.14)$$

Tradicionalmente, além de um conjunto de condições iniciais, impõe-se condições de fronteira espacial apropriadas para determinar a evolução temporal de $\phi(x, t)$. Em espaços assintoticamente Minkowski, como é o caso de Schwarzschild, o potencial $V(x)$ é positivo e se anula nas extremidades, $V \rightarrow 0$ para $x \rightarrow \pm\infty$. Conseqüentemente, nessas regiões, a solução é formada por uma combinação de ondas planas, $\tilde{\phi} \sim \exp(\pm i\omega x)$. As ondas que se

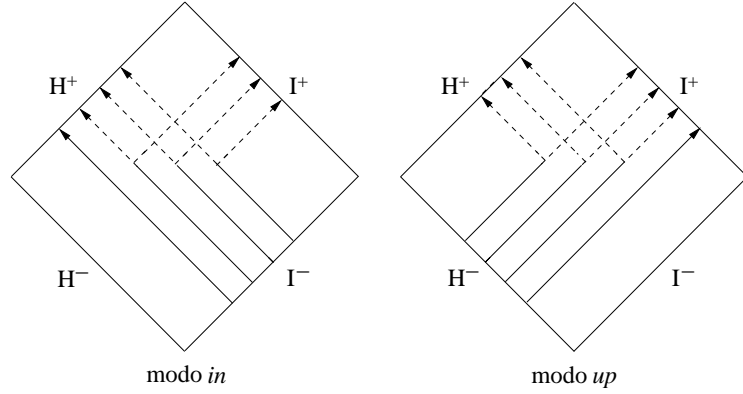


Figura 2.3: O comportamento de duas soluções linearmente independentes para um campo escalar nas vizinhanças de um buraco negro de Schwarzschild. O modo *in* corresponde a ondas puramente ‘entrantes’ (*ingoing*) no horizonte (H^+), enquanto o modo *up* corresponde a ondas puramente ‘saídas’ (*outgoing*) no infinito (I^+). Baseado em Andersson e Jensen (2002).

propagam num espaço curvo e são medidas por um observador distante precisam satisfazer uma condição de onda puramente emergente (*outgoing*) do domínio que se está investigando. Dito de outra forma, nada sai do horizonte de eventos do buraco negro nem do infinito espacial. Em símbolos,

$$\tilde{\phi} \sim e^{+i\omega x} \quad \text{para } x \rightarrow +\infty; \quad \tilde{\phi} \sim e^{-i\omega x} \quad \text{para } x \rightarrow -\infty. \quad (2.15)$$

Essas exigências fazem sentido físico, já que o objetivo é estudar a evolução do campo fora do horizonte de eventos, e não se quer que ondas vindas do infinito continuem a perturbar o buraco negro (NOLLERT, 1999).

A função de Green $\tilde{\mathcal{G}}(x, y; \omega)$ pode agora ser expressa em termos de duas soluções linearmente independentes da equação homogênea $\tilde{D}\tilde{\phi}(x, \omega) = 0$. A primeira solução é escolhida de tal modo que as ondas que cruzam o horizonte são normalizadas à unidade. Essa solução, conhecida como modo *in*, pode ser escrita como

$$\tilde{\phi}^{\text{in}}(x, \omega) \sim \begin{cases} e^{-i\omega x}, & x \rightarrow -\infty, \\ A_{\text{out}}e^{+i\omega x} + A_{\text{in}}e^{-i\omega x}, & x \rightarrow +\infty. \end{cases} \quad (2.16)$$

A segunda solução, conhecida como modo *up*, corresponde a ondas que chegam ao infinito espacial com amplitude unitária:

$$\tilde{\phi}^{\text{up}}(x, \omega) \sim \begin{cases} B_{\text{out}}e^{+i\omega x} + B_{\text{in}}e^{-i\omega x}, & x \rightarrow -\infty, \\ e^{+i\omega x}, & x \rightarrow +\infty. \end{cases} \quad (2.17)$$

O comportamento assintótico dessas duas soluções é mostrado no diagrama de Penrose da

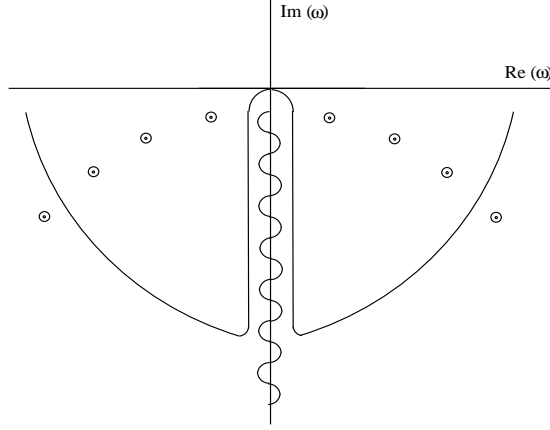


Figura 2.4: A estrutura de singularidades de $\tilde{\mathcal{G}}(x, y; \omega)$ na metade inferior do plano ω : os pontos indicam pólos da função de Green e o zig-zag uma linha de corte. Baseado em Ching et al (1995).

Figura 2.3, onde os símbolos H^- , H^+ , I^- e I^+ representam os horizontes passado e futuro, e os infinitos nulos passado e futuro, respectivamente. Em termos de $\tilde{\phi}^{\text{in}}(x, \omega)$ e $\tilde{\phi}^{\text{up}}(x, \omega)$, a transformada de Fourier da função de Green é dada por

$$\tilde{\mathcal{G}}(x, y; \omega) = -\frac{1}{2i\omega A_{\text{in}}} \begin{cases} \tilde{\phi}^{\text{in}}(x, \omega)\tilde{\phi}^{\text{up}}(y, \omega), & x < y, \\ \tilde{\phi}^{\text{in}}(y, \omega)\tilde{\phi}^{\text{up}}(x, \omega), & x > y, \end{cases} \quad (2.18)$$

onde aqui utilizou-se a relação para o wronskiano

$$W(\omega) = \tilde{\phi}^{\text{in}} \frac{d\tilde{\phi}^{\text{up}}}{dx} - \tilde{\phi}^{\text{up}} \frac{d\tilde{\phi}^{\text{in}}}{dx} = 2i\omega A_{\text{in}}(\omega). \quad (2.19)$$

A solução do problema de valor inicial, em princípio, passaria por uma integração numérica direta das equações homogêneas $\tilde{D}\tilde{\phi}^{\text{in}} = \tilde{D}\tilde{\phi}^{\text{up}} = 0$, juntamente com as condições assintóticas (2.16) e (2.17). Isso precisaria ser feito para todos os valores reais de ω , possibilitando a subsequente inversão de (2.13). Alternativamente, tem se mostrado conveniente deformar o contorno de integração, trocando a linha reta que vai de $\omega = -\infty$ até $\omega = +\infty$ por um semicírculo de raio \mathcal{R} na metade inferior do plano complexo ω , e no final tomar o limite $\mathcal{R} \rightarrow \infty$ (Figura 2.4). O teorema de Cauchy pode então ser usado para expressar $\mathcal{G}(x, y; t)$ como uma soma sobre resíduos mais termos $I_{\mathcal{R}}$ e $I_{\mathcal{S}}$ oriundos da integral sobre o semicírculo e de singularidades de $\tilde{\phi}^{\text{in}}(x, \omega)$ e $\tilde{\phi}^{\text{up}}(x, \omega)$, respectivamente.

As diferentes contribuições para $\mathcal{G}(x, y; t)$ aparecem isoladamente na evolução temporal do campo $\phi(x, t)$. Um exemplo clássico considera a propagação de um pacote de ondas gaussiano, inicialmente centrado em y_0 , no exterior de um buraco negro de Schwarzschild. O resultado dessa perturbação, conforme observado numa posição fixa $x = x_1$, é apresentado na

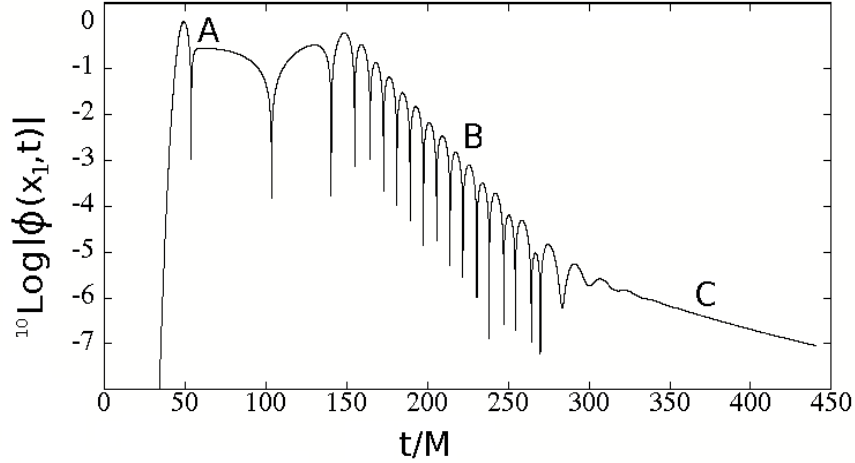


Figura 2.5: Uma recriação da simulação numérica clássica de Vishveshwara (1970). A dependência temporal de $\phi(x, t)$, conforme observada em um ponto fixo x_1 , é resultado da evolução de um pacote de ondas escalares gaussiano nas vizinhanças de um buraco negro de Schwarzschild. Adaptado de Andersson e Jensen (2002).

Figura 2.5. O primeiro pico em A corresponde a uma propagação ‘quase-livre’ desde y_0 até o ponto de observação x_1 , sendo exatamente a contrapartida da evolução no cone de luz do caso $V = 0$. Os picos que seguem referem-se às ondas que são refletidas no horizonte e que se propagam até o observador praticamente sem serem espalhadas pelo potencial. Matematicamente, eles resultam de um termo de ‘contribuição rápida’ que vem da integral $I_{\mathcal{R}}$ e que se anula em tempos suficientemente grandes devido ao fator $\exp(-i\omega t)$.

Em tempos intermediários (entre $t \approx 150M$ e $t \approx 300M$),³ a resposta do buraco negro é dominada por um conjunto de oscilações amortecidas (*ringing*), as quais decaem exponencialmente com o tempo. Segundo o teorema de Cauchy, esse tipo de contribuição é dado por uma soma de resíduos, calculados em todos os pontos singulares de $\mathcal{G}(x, y; \omega)$, contidos no semicírculo de raio \mathcal{R} . Os pólos da função de Green (2.18) localizam-se nos zeros simples ($\omega = \omega_n$) do coeficiente $A_{\text{in}}(\omega)$, sendo representados por pontos na Figura 2.4. Para esses valores (complexos) de frequência, o wronskiano $W(\omega)$ se anula, o que significa que as soluções $\tilde{\phi}^{\text{in}}(x, \omega_n)$ e $\tilde{\phi}^{\text{up}}(x, \omega_n)$ são linearmente dependentes, ou seja, as autofunções correspondentes satisfazem tanto a condição de contorno no horizonte quanto no infinito. Tais soluções, por definição, são os modos quase-normais do buraco negro (CHING et al, 1996). Em outros termos, os modos podem ser vistos como o resultado de repetidos espalhamentos em regiões de x finito. Para certas frequências, as múltiplas reflexões somam-se coerentemente, produzindo uma onda de amplitude máxima.

Nos últimos instantes da perturbação (região C), o sinal vai a zero segundo uma lei de

³Nas unidades adotadas neste trabalho, M representa o produto da massa do buraco negro de Schwarzschild pela constante da gravitação de Newton.

potência (PRICE, 1972), cujo comportamento não pode ser obtido por meio de uma combinação de QNM. Esse decaimento resulta do retroespalhamento das ondas pela ‘cauda’ do potencial, isto é, para valores grandes de x . O limite assintótico de V é muitas vezes formado por uma combinação de uma barreira centrífuga de momento angular l , onde l é um inteiro, mais um termo do tipo $x^{-\alpha}(\ln x)^\beta$ ($\beta = 0, 1$). Por exemplo, para um campo escalar no espaço-tempo de Schwarzschild, $\alpha = 3$ e $\beta = 1$. Nesses casos, o comportamento genérico da perturbação para t grande é $t^{-(2l+\alpha)}(\ln t)^\beta$. Porém, quando α é um inteiro menor do que $2l + 3$, o termo principal se anula, e o próximo termo vai com $t^{-(2l+2\alpha-2)}$ para $\beta = 0$ e $t^{-(2l+\alpha)}$ para $\beta = 1$ (CHING et al, 1995). No formalismo de funções de Green, essa contribuição de ‘tempo tardio’ vem da integral I_S que, por sua vez, está associada com as singularidades da solução $\tilde{\phi}^{\text{up}}(x, w)$. Em geral, essas singularidades são encontradas sobre o eixo $-\text{Im}(\omega)$ e tomam a forma de um linha de corte que vai da origem até o infinito (Figura 2.4).

3 UMA BREVE HISTÓRIA DA CORRESPONDÊNCIA ADS/CFT

Modelos baseados em cordas apareceram inicialmente como uma alternativa para descrever a interação nuclear forte. Hoje eles são reconhecidos como excelentes protótipos de uma teoria de grande unificação que contemple a quantização da gravidade. A correspondência AdS/CFT surge nesse contexto como uma combinação de elementos gravitacionais (espaço-tempo anti-de Sitter) e de interação forte (teoria de calibre não-abeliana). O presente capítulo contém um resumo da AdS/CFT,¹ com ênfase especial àqueles aspectos que serão mais importantes para a seqüência desta tese. Um exemplo é a prescrição minkowskiana (tempo real) de Son-Starinets (2002), que permite o cálculo de funções de dois pontos térmicas dos operadores da CFT a partir de quantidades puramente gravitacionais, ou seja, quantidades definidas sobre o espaço-tempo AdS.

3.1 As origens da AdS/CFT

O caminho que conduziu à AdS/CFT tem como ponto de partida as primeiras tentativas de se utilizar a teoria de cordas para descrever hádrons fortemente interagentes. Essa teoria conseguia explicar a relação entre o spin e a massa de uma ampla variedade de mésons: $J = \alpha' m^2$, onde α' é uma constante conhecida como a inclinação de Regge. Porém, os dados experimentais mostraram que esse modelo não era capaz de reproduzir o comportamento dos hádrons em altas energias, e posteriormente a QCD foi adotada como a descrição correta da interação nuclear forte.

Permanecia a questão sobre como a ação de Yang-Mills, que representa a QCD, poderia conter informações sobre objetos tipo cordas no limite de acoplamento forte. Sabe-se agora que um méson é um estado ligado formado por um par quark-antiquark, cujas linhas de campo de cor estão confinadas num tubo de fluxo. É exatamente esse tubo de fluxo que se comporta como uma corda de determinada tensão. Outra evidência para a relação entre a QCD e a teoria de cordas veio com o trabalho pioneiro de 't Hooft (1974) sobre o limite de N grande de teorias de calibre $SU(N)$. A constante de acoplamento efetiva nesse regime é dada por $\lambda = g_{YM}^2 N$, onde g_{YM} é a constante que usualmente aparece na ação de Yang-Mills. Essas teorias possuem uma expansão perturbativa em que a contribuição de cada um dos termos

¹O material contido neste capítulo baseia-se em revisões realizadas por AHARONY et al (2000), KLEBANOV (2000), ZWIEBACH (2004), YOUNG (2007) e SON E STARINETS (2007).

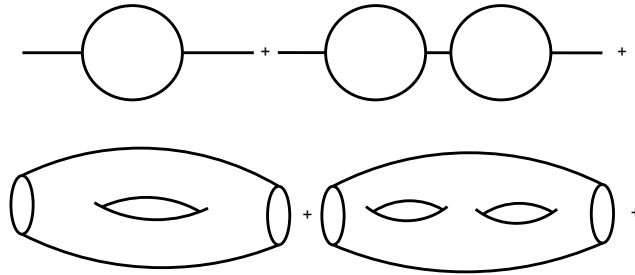


Figura 3.1: A expansão perturbativa da teoria de campos (acima) em comparação com aquela da teoria de cordas (abaixo). Uma corda fechada gera uma folha de mundo bidimensional em que o gênero representa a potência da constante de acoplamento das cordas associada com o processo. Extraído de Young (2007).

depende do gênero g do diagrama correspondente:²

$$\sum_{g=0}^{\infty} N^{2-2g} \sum_{i=0}^{\infty} c_{g,i} \lambda^i = \sum_{g=0}^{\infty} N^{2-2g} f_g(\lambda), \quad (3.1)$$

onde $f_g(\lambda)$ é dada pela soma de todos os diagramas de gênero g . Por exemplo, $f_0(\lambda)$ é a soma de todos os diagramas planares. O ponto importante aqui é que a teoria de perturbações em cordas também se organiza naturalmente numa expansão de gênero (Figura 3.1). A semelhança entre as duas expansões indica uma possível relação entre teorias de cordas e (pelo menos algumas) teorias de calibre.

3.2 O nascimento da correspondência

Um passo importante para se chegar à AdS/CFT foi o estudo de objetos estendidos tridimensionais conhecidos como D3-branas. Dentro das teorias de cordas, as partículas que formam o Modelo Padrão surgem como excitações de cordas abertas de comprimento $l_s = \sqrt{\alpha'}$. Na presença de D-branas, as pontas dessas cordas estão limitadas a se deslocar apenas sobre a brana, daí a letra D de Dirichlet. As D-branas apareceram inicialmente em formulações perturbativas (acoplamento fraco) das teorias de supercordas (DAI, LEIGH E POLCHINSKI, 1989). Existe, no entanto, um outro conjunto de objetos estendidos, chamados de p -branas, que foram originalmente encontrados como soluções clássicas da supergravidade – o limite de baixas energias das teorias de cordas. A solução de 3-brana da supergravidade do tipo IIB é

²O gênero de uma superfície representa o número total de cortes ao longo de curvas fechadas que se pode fazer sem tornar a variedade final desconexa. Em linguagem informal, ele é o número de buracos de uma superfície. Por exemplo, uma esfera (ou plano) possui gênero zero, enquanto um toro (rosca) é caracterizado por $g = 1$.

representada pela métrica³

$$ds^2 = H^{-1/2}(r) [-\mathfrak{h}(r)dt^2 + dx^i dx_i] + H^{1/2}(r) [\mathfrak{h}^{-1}(r)dr^2 + r^2 d\Omega_5^2], \quad (3.2)$$

onde

$$H(r) = 1 + \left(\frac{R}{r}\right)^4 \quad \text{e} \quad \mathfrak{h}(r) = 1 - \left(\frac{r_0}{r}\right)^4, \quad (3.3)$$

e por um campo de 5-forma cujas componentes são dadas por

$$F_{t i_1 i_2 i_3 r} = \varepsilon_{i_1 i_2 i_3} \frac{1}{H^2(r)} \frac{Q}{r^5}. \quad (3.4)$$

Essa solução tem praticamente as mesmas características do buraco negro eletricamente carregado de Reissner-Nordström. Ela possui um horizonte de eventos em $r = r_0$ e uma carga Q sobre o campo de forma (3.4). Entretanto, ao invés da singularidade pontual dos buracos negros tradicionais, aqui a singularidade é estendida sobre as três dimensões espaciais cobertas pelas coordenadas x^i . A exemplo da solução de Reissner-Nordström, a massa M e a carga Q (como funções de R e r_0) possuem valores limitados pela condição $M \geq Q$. Quando esse limite é alcançado, o raio do horizonte é nulo e a solução é dita extrema. É exatamente essa ‘brana negra’ extrema que pode ser vista como o limite de baixas energias de uma ‘pilha’ de D3-branas.

Ao analisar um conjunto de N D3-branas coincidentes, pode-se então adotar duas descrições que, em princípio, são distintas. Uma descrição baseada em branas definidas sobre um espaço-tempo de Minkowski e outra, que toma por base a solução de ‘brana negra’ da supergravidade. O limite de interesse é aquele em que as energias envolvidas são muito menores que a escala de energia das cordas $1/l_s$, ou seja, $E \ll 1/\sqrt{\alpha'}$. Uma das maneiras de se alcançar esse regime é manter a energia limitada e o acoplamento das cordas g_s fixo, enquanto se faz $\alpha' \rightarrow 0$. Em particular, nesse limite, os estados *massivos* das cordas abertas não podem ser acessados, e a física sobre as branas é governada por campos de Yang-Mills sem massa. Além disso, as cordas fechadas, que descrevem os graus de liberdade gravitacionais e que podem se deslocar sobre todo o espaço-tempo, tornam-se livres, já que a constante de Newton em dez dimensões, $G^{(10)} \sim g_s^2(\alpha')^4$, vai a zero. Têm-se, portanto, a teoria supersimétrica de Yang-Mills $SU(N)$ sobre as D3-branas e cordas fechadas desacopladas sobre o espaço-tempo de Minkowski de dez dimensões.

Na descrição de supergravidade, por outro lado, as D3-branas são objetos que atuam

³HOROWITZ E STROMINGER (1991), DUFF E LU (1991) e DUFF, KHURI E LU (1995).

como fontes do campo gravitacional, gerando a versão extrema da métrica (3.2):

$$ds^2 = H(r)^{-1/2} (-dt^2 + dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2) + H(r)^{1/2} (dr^2 + r^2 d\Omega_5^2). \quad (3.5)$$

O fato de g_{tt} não ser constante significa que a energia E_p de um objeto, conforme medida por um observador em r , está relacionada à energia E medida no infinito por um fator de deslocamento para o vermelho: $E = H^{-1/4} E_p$. Dessa forma, as excitações de baixas energias, medidas pelo observador no infinito, podem ser de dois tipos: excitações que se originam próximas ao horizonte ou excitações de baixa energia distantes das branas. Os cálculos das seções de choque de absorção mostram que esses dois tipos de excitações se desacoplam: aquelas que estão distantes o suficiente quase nunca são capturadas pelas D3-branas, enquanto que aquelas próximas às branas não conseguem escapar para o infinito. Como resultado, tem-se que a teoria de baixas energias consiste de duas partes desacopladas: um sistema de cordas fechadas sobre o espaço-tempo chato da região $r \gg R$ e um sistema próximo ao horizonte $r \ll R$, cuja métrica é dada aproximadamente por

$$ds^2 = \left(\frac{r^2}{R^2} \right) (-dt^2 + dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2) + \left(\frac{R^2}{r^2} \right) dr^2 + R^2 d\Omega_5^2, \quad (3.6)$$

e que representa justamente a geometria do espaço $AdS_5 \times S^5$.

Quer seja do ponto de vista da teoria de cordas perturbativa, quer seja do ponto de vista da supergravidade, a descrição de um sistema de D3-branas sempre conduz a modelos desacoplados. Além disso, ambas as descrições apresentam um sistema em comum, formado por cordas fechadas livres sobre um espaço-tempo chato de dez dimensões. A conjectura de Maldacena (1998) afirma que as outras duas teorias também são equivalentes: SYM com $\mathcal{N} = 4$ em (3+1) dimensões é dual à teoria de supercordas do tipo IIB sobre o $AdS_5 \times S^5$.

Os argumentos apresentados acima também se aplicam às soluções clássicas de 2-branas e 5-branas da supergravidade em onze dimensões. Essas soluções são identificadas com ‘pilhas’ de N M2-branas e M5-branas, que conduzem a dualidades similares no contexto da teoria-M. No limite de N grande, conjectura-se que uma determinada teoria de campos em seis dimensões é dual ao $AdS_7 \times S^4$, enquanto que uma teoria de calibre tridimensional com supersimetria máxima é dual ao $AdS_4 \times S^7$. Essa última relação é particularmente relevante para o presente trabalho, que lida com buracos negros planos assintoticamente AdS_4 . Na seqüência deste capítulo, discute-se exclusivamente o caso das D3-branas, porém a generalização para as M-branas é direta.

3.3 Parâmetros e funções de Green

Para que dois modelos sejam holograficamente equivalentes, é necessário que se tenha uma relação de um para um entre elementos no interior e elementos na fronteira de uma determinada região do espaço. No caso da AdS/CFT, existe um mapeamento entre quantidades da teoria de calibre e aquelas encontradas em gravitação. A relação entre as constantes de acoplamento é particularmente importante. A teoria $SU(N)$ de Yang-Mills possui dois parâmetros adimensionais: a constante de acoplamento g_{YM} e o número de cores N . No caso da teoria de supercordas IIB sobre o $AdS_5 \times S^5$, os parâmetros adimensionais são dados pelo acoplamento das cordas g_s e pelo raio anti-de Sitter (e da pentaesfera) expresso em unidades do comprimento da corda, R/l_s . As duas teorias são equivalentes quando os parâmetros estão relacionados por

$$g_{YM}^2 = 4\pi g_s \quad \text{e} \quad g_{YM}^2 N = R^4/l_s^4. \quad (3.7)$$

A relevância da correspondência está no mapeamento de uma teoria, num regime em que os cálculos podem ser realizados usando técnicas bem estabelecidas, em uma outra teoria, cujos parâmetros assumem valores em que essas técnicas perdem a sua validade. Por exemplo, os cálculos na teoria de Yang-Mills tornam-se factíveis no limite em que N é grande e $\lambda = g_{YM}^2 N$ é pequeno. As relações acima mostram que nesse regime a teoria de cordas é caracterizada por um acoplamento g_s fraco e um raio de curvatura R muito menor que o comprimento das cordas. Isso ocorre nas proximidades de singularidades espaço-temporais como aquelas encontradas no interior de buracos negros e no *big bang*. Acredita-se que os efeitos de gravidade quântica sejam relevantes nessas regiões extremas, e as teorias de supercordas ainda não dispõem de técnicas para investigar esse regime. Por outro lado, a descrição da gravidade clássica torna-se eficaz quando $R \gg l_s$, e as cordas são fracamente interagentes quando g_s é pequeno. Nesse limite, tanto N quanto a constante de 't Hooft λ são grandes, de modo que as técnicas usuais de perturbação da teoria de campos perdem a sua validade.

A correspondência AdS/CFT também estabelece uma relação, conhecida como GKP-W, entre um operador $\hat{\mathcal{O}}$ da teoria de calibre e um campo (clássico) ϕ no interior do espaço-tempo anti-de Sitter.⁴ O valor que esse campo assume na fronteira ($u = \frac{1}{r} = 0$) do espaço AdS, $\phi(u, \mathbf{x})|_{u=0} = \phi_0(\mathbf{x})$, acopla-se ao operador $\hat{\mathcal{O}}$ da CFT dual. O gerador das funções de Green conexas na teoria de campos é identificado com o logaritmo da função de partição completa da teoria de cordas. Na aproximação de supergravidade, uma versão euclidiana

⁴GUBSER, KLEBANOV E POLYAKOV, 1998; WITTEN, 1998.

($t \rightarrow it$) da relação GKP-W assume a forma

$$\left\langle e^{\int d^4\mathbf{x}\phi_0(\mathbf{x})\widehat{\mathcal{O}}(\mathbf{x})} \right\rangle_{CFT} = e^{-S[\phi]}, \quad (3.8)$$

onde $S[\phi]$ representa a ação de (super)gravidade para o campo clássico ϕ com a condição de contorno ϕ_0 na fronteira, $u = 0$. Para o cálculo de funções de Green, basta tomar derivadas funcionais de $S[\phi]$ em relação à ϕ_0 e, no final, fazer $\phi_0 = 0$. Dessa forma, a AdS/CFT reduziu o problema de encontrar funções de correlação quânticas na teoria de campos dual a um problema clássico em gravitação. Além disso, no cálculo de funções de dois pontos, é possível limitar-se à parte quadrática em ϕ da ação clássica no espaço AdS.

Dois exemplos do mapeamento operador-campo são particularmente relevantes para este trabalho. Os campos da teoria supersimétrica de Yang-Mills satisfazem uma simetria global $SO(6)$ conhecida como simetria R . Associadas a essa simetria, têm-se uma ‘carga’- R e uma corrente conservada \widehat{J}^μ . De acordo com a AdS/CFT, essa corrente acopla-se ao campo de calibre eletromagnético no interior do espaço-tempo AdS. Outra quantidade que satisfaz uma lei de conservação na CFT é o tensor energia-momento $\widehat{T}^{\mu\nu}$. Nesse caso, a correspondência estabelece uma relação entre as flutuações do tensor energia-momento e as perturbações da métrica anti-de Sitter.

3.4 A prescrição minkowskiana de Son-Starinets

A relação GKP-W foi originalmente formulada para um espaço-tempo de assinatura euclidiana (tempo imaginário) e, desde então, tem sido aplicada com muito sucesso. Um exemplo é o estudo de teorias de campos holográficas à temperatura nula. Nesse caso, as equações para os campos clássicos no espaço-tempo anti-de Sitter admitem uma série de soluções exatas. Essas soluções, junto com propriedades analíticas das funções de Green, levam ao cálculo de propagadores no tempo real.

Quando se considera a presença de um buraco negro, no entanto, a teoria de campos na fronteira passa a ser caracterizada pela temperatura Hawking desse buraco negro. Existem várias propriedades de teorias de calibre à temperatura e densidade finitas que são obtidas diretamente das funções de correlação minkowskianas. Entre essas propriedades está a resposta de um ensemble térmico a pequenas perturbações que o deslocam do equilíbrio, conforme descrito pela teoria da resposta linear. As funções de Green de tempo real podem, em princípio, ser obtidas por meio de uma continuação analítica das versões euclidianas. Ocorre que, na prática, esse método exige que se conheça as funções de correlação euclidianas

para todas as frequências de Matsubara, enquanto que os estudos de um campo no exterior de um buraco negro, em geral, fornecem apenas soluções aproximadas, válidas em certos limites. Essas dificuldades levaram Son e Starinets (2002) a formular uma prescrição minkowskiana que permite o cálculo de funções de dois pontos térmicas diretamente dos resultados obtidos no lado gravitacional da AdS/CFT.

Para entender a receita de Son-Starinets, é conveniente considerar a evolução de um campo escalar $\phi(u, \mathbf{x})$ de massa m nas vizinhanças de um buraco negro assintoticamente anti-de Sitter, cuja métrica tem a forma geral

$$ds^2 = g_{uu}(u)du^2 + g_{\mu\nu}(u)dx^\mu dx^\nu. \quad (3.9)$$

Por hipótese, a fronteira AdS está localizada em $u = u_B$ e o horizonte num ponto $u = u_H$ em que o coeficiente g_{uu} diverge. A equação de campo linearizada para $\phi(u, \mathbf{x})$,

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_u(\sqrt{-g} g^{uu}\partial_u\phi) + g^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu\phi - m^2\phi = 0, \quad (3.10)$$

é resolvida com uma condição de contorno fixa na fronteira. A solução para essa equação pode ser escrita como

$$\phi(u, \mathbf{x}) = \int \frac{d^4\mathbf{k}}{(2\pi)^4} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} f_{\mathbf{k}}(u)\phi_0(\mathbf{k}), \quad (3.11)$$

onde $\phi_0(\mathbf{k})$ representa a transformada de Fourier do campo na fronteira e $f_{\mathbf{k}}(u)$ é uma solução da equação

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_u(\sqrt{-g}g^{uu}\partial_u f_{\mathbf{k}}) - (g^{\mu\nu}k_\mu k_\nu + m^2)f_{\mathbf{k}} = 0 \quad (3.12)$$

com a condição de contorno $f_{\mathbf{k}}(u_B) = 1$ na fronteira e de onda puramente ‘entrante’ no horizonte de eventos $u = u_H$.

Quando se leva em conta a equação de movimento do campo escalar, a ação para as soluções clássicas (*on-shell*) se reduz a termos de superfície

$$S = \int \frac{d^4\mathbf{k}}{(2\pi)^4} \phi_0(-\mathbf{k})\mathcal{F}(u, \mathbf{k})\phi_0(\mathbf{k}) \Big|_{u=u_B}^{u=u_H}, \quad (3.13)$$

onde

$$\mathcal{F}(u, \mathbf{k}) = K\sqrt{-g} g^{uu} f_{-\mathbf{k}}(u)\partial_u f_{\mathbf{k}}(u) \quad (3.14)$$

sendo K uma constante de normalização.

O que a prescrição minkowskiana de Son-Starinets (2002) faz é estabelecer uma relação entre $\mathcal{F}(u, \mathbf{k})$ e a função de Green retardada correspondente ao operador $\hat{\mathcal{O}}$, que se acopla à

ϕ na fronteira do espaço AdS. Postulou-se a seguinte relação (SON E STARINETS, 2002):

$$G^R(\mathbf{k}) = -2\mathcal{F}(u, \mathbf{k})|_{u=u_B}. \quad (3.15)$$

Inicialmente a única justificativa para essa receita era a sua validade em todos os casos passíveis de verificação independente, isto é, com a realização de cálculos em ambos os lados da correspondência. Isso acontece, por exemplo, com o espaço-tempo AdS puro, que é dual a uma teoria de campos à temperatura nula, e com os buracos negros tridimensionais BTZ (BAÑADOS, TEITELBOIM E ZANELLI, 1992), que são equivalentes a uma CFT em (1+1) dimensões.

Apesar da sua simplicidade e eficiência, a prescrição de Son-Starinets não apenas carecia de uma formulação que fosse obtida de primeiros princípios da AdS/CFT, como também não permitia uma ampliação direta para funções de Green com mais de dois pontos. A solução para esses problemas foi encontrada por Herzog e Son (2003), que deram um caráter formal à receita minkowskiana original, bem como a generalizaram para funções de Green de ordens mais altas. Para tanto, eles seguiram sugestões anteriores,⁵ que relacionavam os campos fantasmas do formalismo de Schwinger-Keldysh,⁶ para sistemas à temperatura finita, com os campos que vivem sobre a segunda fronteira do espaço AdS, conforme descrita pela extensão de Kruskal (1960) e Szekeres (1960) dos buracos negros anti-de Sitter.⁷ No presente trabalho, entretanto, será aplicada diretamente a prescrição, formalmente mais simples, de Son-Starinets (2002).

⁵HOROWITZ E MAROLF, 1998; BALASUBRAMANIAN et al, 1999; MALDACENA, 2003.

⁶SCHWINGER, 1961; BAKSHI E MAHANTHAPPA, 1963a,b; KELDYSH, 1964.

⁷As coordenadas de Kruskal-Szekeres para o espaço-tempo de um buraco negro plano-simétrico AdS são apresentadas no capítulo 4.

4 BURACOS NEGROS PLANOS E PERTURBAÇÕES MÉTRICAS

As equações de Einstein com constante cosmológica negativa possuem uma solução de buraco negro com simetria plana. Globalmente, o horizonte de eventos dessa solução admite topologias orientáveis como a cilíndrica, toroidal e planar ou, até mesmo, topologias não-orientáveis como a faixa de Möbius e a garrafa de Klein (BRILL, LOUKO E PELDÁN, 1997). De modo análogo ao caso esférico de Schwarzschild, o campo no exterior do buraco negro é estático, porém assintoticamente anti-de Sitter. Um dos objetivos deste capítulo é discutir algumas das propriedades geométricas desse espaço-tempo. Além disso, apresenta-se uma revisão do trabalho de Cardoso e Lemos (2001c) sobre flutuações da métrica de fundo, conforme analisadas no formalismo de calibre de Chandrasekhar (1983). Essa revisão serve de base para um estudo, apresentado no final do capítulo, sobre o significado físico dos diferentes modos de perturbação gravitacional (MIRANDA E ZANCHIN, 2007).

4.1 Buracos negros anti-de Sitter

No esquema conceitual da relatividade geral, buracos negros surgem naturalmente como soluções exatas das equações de Einstein. De um ponto de vista teórico, esses objetos são de fundamental importância na investigação de fenômenos altamente relativísticos, sejam eles de natureza clássica ou quântica. De um ponto de vista astrofísico, eles podem aparecer como o produto final do colapso gravitacional de estrelas *massivas* ou núcleos de galáxias e como o resultado da contração de flutuações de densidade no universo primordial (MISNER, THORNE E WHEELER, 1973).

Em espaços-tempos assintoticamente Minkowski, a família de Kerr-Newman contém todas as soluções possíveis de buracos negros estacionários. Essas soluções são caracterizadas por apenas três parâmetros (massa, carga elétrica e momento angular), resultado que ficou conhecido como o teorema do *no hair* (ISRAEL, 1967; 1968; CARTER, 1971). Além disso, os horizontes de eventos dos buracos negros assintoticamente Minkowski são necessariamente esféricos (HAWKING, 1971; 1972). A situação muda, no entanto, ao se adicionar um termo de constante cosmológica negativa às equações de Einstein. O espaço então deixa de ser assintoticamente Minkowski e globalmente hiperbólico, e surgem soluções com características de buraco negro, cujos horizontes podem apresentar topologias não-triviais. Para uma revisão,

ver LEMOS (2001).

Particularmente, existem espaços-tempos assintoticamente anti-de Sitter (AdS) nos quais o horizonte esférico da solução Schwarzschild-AdS é trocado por um plano ou hiperbolóide. No caso plano-simétrico, além da topologia planar usual do \mathbb{R}^2 , é possível identificar pontos da superfície e gerar horizontes com topologias multiplamente conexas, como o cilindro, o toro, a faixa de Möbius e a garrafa de Klein (BRILL, LOUKO E PELDÁN, 1997). Também podem ser realizadas transformações de Lorentz ‘proibidas’ no sentido de Stachel (1982), as quais misturam o tempo com uma coordenada angular, produzindo novas geometrias que representam um buraco negro em rotação (LE MOS, 1995; LEMOS E ZANCHIN, 1996). A solução estática com simetria plana é objeto de estudo nesta tese de doutorado.¹

4.2 Propriedades do espaço-tempo de fundo

Em relatividade geral, o conceito de simetria plana é definido de uma forma invariante por meio da teoria dos grupos de transformações contínuas. Dentro dessa teoria, um grupo de Lie r -dimensional é denotado por G_r , e as órbitas tipo-espaço (com dimensão d) de um grupo de movimentos (isometrias) são denotadas por S_d . Com essa notação, um espaço-tempo \mathcal{M} é dito ser plano-simétrico se ele admite um grupo G_3 de movimentos atuando sobre 2-espaços S_2 com curvatura gaussiana nula (KRAMER et al, 1980).

Num universo com constante cosmológica negativa ($\Lambda_C = -3/R^2$), as equações de Einstein para o vácuo ($T_{MN} = 0$) admitem uma única solução com simetria plana (MIRANDA, 2003). A métrica desse espaço-tempo pode ser escrita como

$$ds^2 = -f(r, M)dt^2 + f(r, M)^{-1}dr^2 + \frac{r^2}{R^2}(d\varphi^2 + dz^2), \quad (4.1)$$

onde a função horizonte é dada por

$$f(r, M) = \frac{r^2}{R^2} - \frac{2M}{r} \quad (4.2)$$

e M é um parâmetro relacionado com a massa Arnowitt-Deser-Misner (1962) do sistema. Nas coordenadas escolhidas, os três vetores de Killing tipo-espaço que caracterizam a simetria plana da variedade são dados por ∂_φ , ∂_z e $\varphi\partial_z - z\partial_\varphi$.

¹Na literatura, a solução plano-simétrica descrita acima recebe diferentes denominações: buracos negros chatos anti-de Sitter (ou de Ricci), Schwarzschild-AdS com horizonte invariante por translações, etc. Quando se atribui uma topologia específica ao buraco negro, são utilizadas expressões alternativas como cordas negras, planos negros (ou membranas negras) e buracos negros tipo toro.

O caráter anti-de Sitter da solução de buraco negro se manifesta no limite assintótico $r \rightarrow \pm\infty$. Nessa região, a troca da coordenada radial r por $w = R \ln|r/R|$ transforma (4.1) na métrica padrão do espaço-tempo AdS (CVETIC E GRIFFIES, 1992):

$$ds^2 = e^{2w/R}(-dt^2 + d\varphi^2 + dz^2) + dw^2. \quad (4.3)$$

Para valores finitos de r , o elemento de linha (4.1) apresenta singularidades em $r = 0$ e $r = r_0 = (2MR^2)^{1/3}$. No entanto, da expressão para o escalar de Kretschmann

$$R^{ABCD}R_{ABCD} = \frac{24}{R^4} \left(1 + \frac{2M^2R^4}{r^6} \right), \quad (4.4)$$

observa-se que $r = r_0$ é uma singularidade induzida pelo sistema de coordenadas, enquanto $r = 0$ é uma singularidade intrínseca do espaço-tempo. Esse último resultado mostra que a variedade é naturalmente dividida em duas componentes desconexas e distintas: $r > 0$ e $r < 0$. Já que uma inversão no sinal de r tem o mesmo efeito que uma inversão no sinal de M , a solução com $r < 0$ representa o campo gerado por um sistema de massa negativa. Esse caso não apresenta muito interesse físico e, por isso, não será discutido neste trabalho. Por outro lado, para $r > 0$ e $M > 0$, a existência de uma pseudo-singularidade em $r = r_0$ demonstra que o sistema de coordenadas $\{t, r, \varphi, z\}$ cobre (continuamente) apenas uma parte da variedade, e a solução precisa ser estendida para que se tenha um espaço-tempo ‘máximo’.²

Assim como ocorre com o espaço-tempo de Schwarzschild, é possível estender analiticamente a solução (4.1), para além da hipersuperfície $r = r_0$, por meio da introdução de um sistema de coordenadas de Kruskal-Szekeres $\{u, v, \varphi, z\}$ (MIRANDA, 2003). Nessas coordenadas, o elemento de linha (4.1) transforma-se em

$$ds^2 = -\frac{1}{r}(r^2 + rr_0 + r_0^2)^{3/2} e^{-\sqrt{3}\tan^{-1}\left(\frac{2r+r_0}{\sqrt{3}r_0}\right)}(dv^2 - du^2) + \frac{r^2}{R^2}(d\varphi^2 + dz^2), \quad (4.5)$$

onde r agora é uma função métrica definida implicitamente por

$$u^2 - v^2 = \frac{4R^2}{9r_0^2}(r - r_0)(r^2 + rr_0 + r_0^2)^{-1/2} e^{\sqrt{3}\tan^{-1}\left(\frac{2r+r_0}{\sqrt{3}r_0}\right)}. \quad (4.6)$$

Do elemento de linha (4.5) segue que curvas geodésicas radiais nulas são linhas retas de 45 graus no plano $u - v$. Por causa dessa propriedade, o cone de luz radial no diagrama

²Um espaço-tempo é dito ‘máximo’ se toda geodésica que se origina num ponto arbitrário da variedade pode ser estendida a valores infinitos do parâmetro afim, em ambas as direções, ou então termina sobre uma singularidade intrínseca (D’INVERNO, 1992).

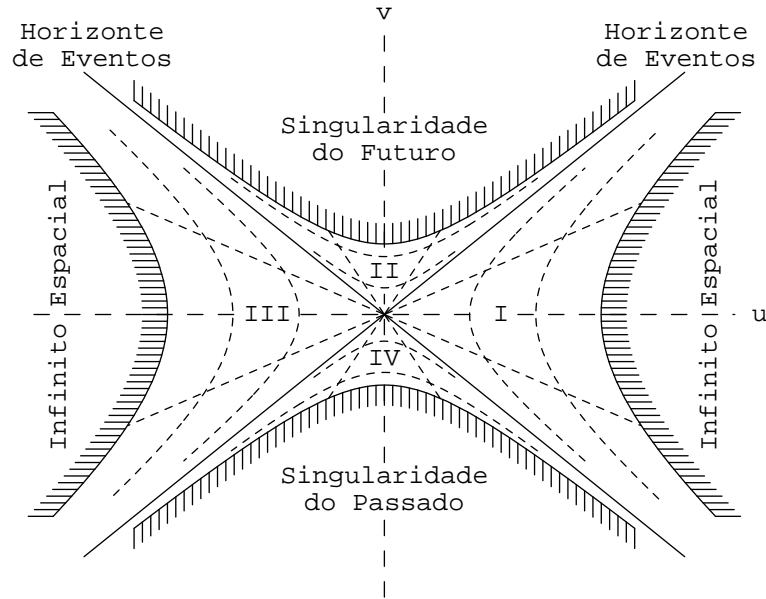


Figura 4.1: O diagrama de Kruskal-Szekeres para a solução de buraco negro com simetria plana e constante cosmológica negativa.

de Kruskal-Szekeres (Figura 4.1) tem a mesma forma como no diagrama espaço-temporal de Minkowski. Em particular, curvas tipo-tempo e geodésicas não-radiais nulas formam ângulos menores do que 45 graus com o eixo vertical v , ao passo que curvas tipo-espaço formam ângulos maiores do que 45 graus com esse mesmo eixo. Isso implica que observadores na região I não podem se comunicar com observadores na região III. Além disso, qualquer partícula que se encontre na região IV deve ter sido criada na singularidade do passado, e qualquer partícula que cair na região II estará condenada a ser destruída na singularidade do futuro. Nesse sentido, a superfície $r = r_0$ é um horizonte de eventos, isto é, a fronteira de todos os eventos acessíveis a um observador externo (nos quadrantes I ou III). Ainda dentro dessa interpretação, a região II é dita ser o interior de um buraco negro e a região IV um buraco branco.

Dependendo da topologia do horizonte de eventos, algumas vezes costuma-se dizer que a métrica (4.1) representa o espaço-tempo de um buraco negro cilíndrico ($0 \leq \varphi \leq 2\pi R$, $-\infty \leq z \leq +\infty$), toroidal ($0 \leq \varphi, z \leq 2\pi R$) ou planar ($-\infty \leq \varphi, z \leq +\infty$).³ Para o toro, M está relacionada simplesmente com a massa do sistema (HUANG E LIANG, 1995); para o cilindro, com a massa por unidade de comprimento da linha z (LEMONS, 1995); e para o plano, com a massa por unidade de área do plano $\varphi - z$ (CAI E ZHANG, 1996).

³Outras opções multiplamente conexas, porém não-orientáveis, são a faixa de Möbius e a garrafa de Klein (BRILL, LOUKO E PELDÁN, 1997).

4.3 Perturbações métricas no formalismo de Chandrasekhar

4.3.1 Formulação geral

Os estudos das perturbações gravitacionais de buracos negros envolvem duas abordagens principais: uma formulação em termos de variações da curvatura de Weyl, que tem como exemplo clássico o trabalho de Teukolsky (1972) na solução de Kerr (1963), e uma análise direta via variações do tensor métrico. Quando se trabalha com flutuações na métrica, um problema que surge é a escolha de um calibre apropriado. No caso de buracos negros (3+1)-dimensionais, o procedimento padrão consiste em decompor as perturbações métricas em harmônicos tensoriais (planos ou esféricos) e escrever as equações de Einstein linearizadas no calibre coordenado de Regge-Wheeler (1957).

Seguindo o trabalho original de Cardoso e Lemos (2001c) sobre as perturbações métricas de um buraco negro plano-simétrico, adota-se aqui uma formulação alternativa, desenvolvida por Chandrasekhar (1983). Dentro dessa formulação, considera-se uma geometria ‘suficientemente geral’

$$ds^2 = -e^{2\nu} dt^2 + e^{2\psi} (d\varphi + q_0 dt + q_2 dz + q_3 dr)^2 + e^{2\mu_2} dz^2 + e^{2\mu_3} dr^2, \quad (4.7)$$

de modo a acomodar qualquer tipo de perturbação do espaço-tempo de fundo. Como é fácil de se observar, a métrica (4.1) é um caso particular do elemento de linha acima, no qual os coeficientes métricos assumem os valores

$$e^{2\nu} = e^{-2\mu_3} = f, \quad e^{2\psi} = e^{2\mu_2} = r^2/R^2 \quad \text{e} \quad q_0 = q_2 = q_3 = 0. \quad (4.8)$$

Sendo assim, no estado perturbado, as funções q_0 , q_2 e q_3 transformam-se em quantidades infinitesimais de primeira ordem, e os coeficientes ν , μ_2 , μ_3 e ψ experimentam as pequenas alterações $\delta\nu$, $\delta\mu_2$, $\delta\mu_3$ e $\delta\psi$.

As variações métricas q_0 , q_2 e q_3 e os incrementos em ν , μ_2 , μ_3 e ψ apresentam diferentes características; por exemplo, somente os q 's induzem rotação no buraco negro. Além disso, o primeiro grupo é ímpar sobre a troca de φ por $-\varphi$, enquanto que o segundo grupo é par. Por causa dessa última propriedade, as funções q_0 , q_2 e q_3 são denominadas perturbações axiais (ou ímpares), e as quantidades $\delta\nu$, $\delta\mu_2$, $\delta\mu_3$ e $\delta\psi$, perturbações polares (ou pares).

As equações para as flutuações métricas são então obtidas através de uma linearização das equações de Einstein, apropriadas para o elemento de linha (4.7), sobre a métrica não-perturbada (4.1). As equações resultantes formam um sistema acoplado no qual as pertur-

bações axiais e polares encontram-se misturadas. No entanto, devido à simetria plana do espaço de fundo, é possível restringir a análise aos modos de perturbação independentes de φ . Nesse caso, as equações de Einstein linearizadas dividem-se em dois grupos: o primeiro grupo envolve somente as quantidades axiais,

$$\left. \begin{aligned} Q_{23,2} - r^2 R^{-2} e^{-2\nu} Q_{03,0} &= 0, \\ Q_{32,3} + 2(r^{-1} + \nu_{,3}) Q_{32} - e^{-4\nu} Q_{02,0} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (4.9)$$

enquanto que o segundo grupo depende apenas das quantidades polares,

$$\left. \begin{aligned} [\partial_3 + (r^{-1} - \nu_{,3})] (\delta\psi + \delta\mu_2)_{,0} - 2r^{-1} \delta\mu_{3,0} &= 0, \\ (\delta\psi + \delta\mu_3)_{,2,0} &= 0, \\ (\delta\psi + \delta\nu)_{,2,3} - (r^{-1} - \nu_{,3}) \delta\nu_{,2} - (r^{-1} + \nu_{,3}) \delta\mu_{3,2} &= 0, \\ [e^{-4\nu} \partial_0 \partial_0 - (r^{-1} + \nu_{,3}) \partial_3] (\delta\psi + \delta\mu_2) - 2r^{-1} \delta\nu_{,3} \\ - r^{-2} R^2 e^{-2\nu} (\delta\psi + \delta\nu)_{,2,2} + 2r^{-1} (r^{-1} + 2\nu_{,3}) \delta\mu_3 &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (4.10)$$

onde a vírgula denota derivada parcial, $Q_{ab} = q_{a,b} - q_{a,b}$ com $a, b = 0, 2, 3$ e foram realizadas as identificações $\{t, \varphi, z, r\} = \{x^0, x^1, x^2, x^3\}$. Dessa forma, as equações para as variações métricas axiais e polares se desacoplam e podem ser tratadas de maneira independente.

4.3.2 Perturbações axiais

Dentro do formalismo de calibre de Chandrasekhar, as perturbações axiais são caracterizadas pelas funções q_0 , q_2 e q_3 . Em termos da quantidade $Q(t, z, r) = fr^2 Q_{32} = fr^2 (q_{3,2} - q_{2,3})$, as equações que governam a evolução dessas perturbações são dadas por

$$\frac{R^2}{r^4} \frac{\partial Q}{\partial z} = -Q_{03,0} = -(q_{0,3} - q_{3,0})_{,0} \quad (4.11)$$

e

$$\frac{f}{r^2} \frac{\partial Q}{\partial r} = +Q_{02,0} = +(q_{0,2} - q_{2,0})_{,0}. \quad (4.12)$$

Formando uma combinação simples entre derivadas parciais de (4.11) e (4.12), é possível desacoplar esse sistema de equações e obter a seguinte equação de onda para $Q(t, z, r)$:

$$r^4 \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{f}{r^2} \frac{\partial Q}{\partial r} \right) - \frac{r^2}{f} \frac{\partial^2 Q}{\partial t^2} = -R^2 \frac{\partial^2 Q}{\partial z^2}. \quad (4.13)$$

Já que o espaço-tempo de fundo é estático e invariante por translações na direção z ,

as perturbações métricas possuem uma dependência em t e z do tipo $e^{-i(\omega t - kz)}$, onde ω é uma frequência, e k é um número de onda cujos valores podem variar de forma contínua ou discreta, dependendo se z é uma coordenada compacta ou não-compacta. Separando a variável $Q(t, z, r)$ na forma $Q(t, z, r) = rR^{-2}Z^{(-)}(r)e^{-i(\omega t - kz)}$ e introduzindo a coordenada tartaruga r_* , definida de tal modo que $dr/dr_* = f$, descobre-se que $Z^{(-)}$ satisfaz a equação unidimensional tipo Schrödinger (CARDOSO E LEMOS, 2001c)

$$\left(\frac{d^2}{dr_*^2} + \omega^2\right) Z^{(-)} = V^{(-)} Z^{(-)}, \quad (4.14)$$

onde o potencial efetivo $V^{(-)}$ é dado por

$$V^{(-)} = \frac{f}{r^3}(rk^2R^2 - 6M). \quad (4.15)$$

Além disso, tendo em vista futuras aplicações, é conveniente introduzir aqui os operadores $\widehat{\Lambda}_\pm$ e $\widehat{\Lambda}^2$, definidos pelas expressões

$$\widehat{\Lambda}_\pm = \frac{d}{dr_*} \pm i\omega \quad \text{e} \quad \widehat{\Lambda}^2 = \widehat{\Lambda}_+ \widehat{\Lambda}_- = \widehat{\Lambda}_- \widehat{\Lambda}_+ = \frac{d^2}{dr_*^2} + \omega^2. \quad (4.16)$$

Nessa nova notação, a equação para $Z^{(-)}$ se reduz a

$$\widehat{\Lambda}^2 Z^{(-)} = V^{(-)} Z^{(-)}. \quad (4.17)$$

4.3.3 Perturbações polares

As perturbações polares são caracterizadas pelas funções $\delta\nu$, $\delta\mu_2$, $\delta\mu_3$ e $\delta\psi$. Novamente, espera-se que essas quantidades tenham uma dependência exponencial em t e z . Supondo que

$$\left. \begin{aligned} \delta\nu &= N(r)e^{-i(\omega t - kz)}, & \delta\mu_2 &= T(r)e^{-i(\omega t - kz)}, \\ \delta\mu_3 &= L(r)e^{-i(\omega t - kz)} & \text{e} & \delta\psi &= V(r)e^{-i(\omega t - kz)}, \end{aligned} \right\} \quad (4.18)$$

obtém-se um sistema de quatro equações lineares de primeira ordem para as funções radiais N , T , L e V . Esse sistema pode ser reduzido a uma única equação diferencial de segunda ordem, similar àquela para $Z^{(-)}$. De fato, mostra-se que, em virtude das equações (4.10), a variável ‘mestre’

$$Z^{(+)}(r) = \left(\frac{rR}{rk^2R^2 + 6M}\right) \left[T(r) + \left(\frac{rk^2R^2 + 3M}{3M}\right) L(r)\right] \quad (4.19)$$

satisfaz a equação unidimensional tipo Schrödinger (CARDOSO E LEMOS, 2001c)

$$\left(\frac{d^2}{dr_*^2} + \omega^2\right) Z^{(+)} = V^{(+)} Z^{(+)}, \quad (4.20)$$

onde o potencial efetivo $V^{(+)}$ é dado por

$$V^{(+)} = \frac{f}{r^3} \left[\frac{72M^3 R^2 + r^2 k^4 R^6 (rk^2 R^2 + 6M) + 36M^2 r (k^2 R^4 + 2r^2)}{R^2 (rk^2 R^2 + 6M)^2} \right]. \quad (4.21)$$

A equação (4.20) também pode ser escrita na forma alternativa

$$\widehat{\Lambda}^2 Z^{(+)} = V^{(+)} Z^{(+)}. \quad (4.22)$$

4.4 Interpretação física das perturbações

As funções $Z^{(+)}$ e $Z^{(-)}$ são quantidades invariantes de calibre, no sentido que elas não mudam (no regime linear) sob a transformação infinitesimal de coordenadas $x^M \rightarrow x^M + \xi^M$, onde ξ^M é um vetor arbitrário de primeira ordem. Em geral, tais funções representam ondas axiais e polares que se propagam sobre o espaço-tempo de fundo e transportam energia do buraco negro para o infinito. Entretanto, no caso particular das perturbações com número de onda nulo ($k = 0$), existem graus de liberdade extras que podem mudar a interpretação física desses modos. Abaixo, discute-se a interpretação física correta desses modos, analisando separadamente os setores axial e polar das perturbações.⁴

4.4.1 Setor axial

Antes de analisar em detalhes as perturbações com número de onda nulo, é interessante considerar o efeito de uma transformação infinitesimal de coordenadas sobre as quantidades q_0 , q_2 e q_3 . Qualquer que seja a dependência coordenada das perturbações, as variações métricas h_{MN} são tais que

$$h_{t\varphi}^{\text{nov}} = q_0 r^2 R^{-2} - \xi_{t,\varphi} - \xi_{\varphi,t}, \quad (4.23)$$

$$h_{z\varphi}^{\text{nov}} = q_2 r^2 R^{-2} - \xi_{z,\varphi} - \xi_{\varphi,z}, \quad (4.24)$$

$$h_{r\varphi}^{\text{nov}} = q_3 r^2 R^{-2} - \xi_{r,\varphi} - \xi_{\varphi,r} + 2r^{-1} \xi_{\varphi}, \quad (4.25)$$

enquanto que as demais componentes representam o setor polar das perturbações. Devido

⁴O material contido nesta seção foi publicado originalmente em MIRANDA E ZANCHIN (2007).

ao desacoplamento dos dois tipos de perturbação, considera-se aqui que as variações polares sejam nulas. Para que isso permaneça válido, a única transformação de calibre possível envolve um vetor independente da coordenada φ , com uma única componente diferente de zero: $\xi_\varphi(t, z, r)$. Da relação (4.24), observa-se que a escolha de um vetor cuja componente satisfaça a equação $q_2 r^2 R^{-2} - \xi_{\varphi,z} = 0$ cancela o termo $h_{z\varphi}^{\text{nov}}o$, deixando apenas q_0 e q_3 como quantidades não-nulas.

Passando para o estudo do modo $k = 0$, considera-se uma nova transformação de calibre, cujo vetor deslocamento infinitesimal tem, como única componente não-nula, uma função apenas de t e r : $\xi_\varphi(t, r)$. Nesse caso, as relações (4.23) e (4.25) se reduzem a

$$h_{t\varphi}^{\text{nov}}o = q_0 r^2 R^{-2} - \xi_{\varphi,t}, \quad (4.26)$$

$$h_{r\varphi}^{\text{nov}}o = q_3 r^2 R^{-2} - r^2 (r^{-2} \xi_\varphi)_{,r}. \quad (4.27)$$

Escolhendo uma função $\xi_\varphi(t, r)$ que seja solução da equação $q_0 r^2 R^{-2} - \xi_{\varphi,t} = 0$, o termo $h_{t\varphi}^{\text{nov}}o$ se anula, e as componentes $(r\varphi)$ e $(t\varphi)$ das equações de Einstein transformam-se em⁵

$$\partial_t^2 q_3 = 0 \quad \text{e} \quad \partial_r (r^4 \partial_t q_3) = 0. \quad (4.28)$$

A primeira equação pode ser diretamente integrada para dar $q_3(t, r) = \mathbf{f}(r)t + \mathbf{g}(r)$. Substituindo essa expressão na segunda das equações (4.28), encontra-se $\mathbf{f}(r) = -3JR^2/r^4$, onde J é uma constante de integração arbitrária. Pode-se agora eliminar $h_{r\varphi}$ por meio de uma nova transformação de calibre, cujo vetor deslocamento tem

$$\xi_\varphi(t, r) = \frac{J}{r}t + r^2 R^{-2} \int \mathbf{g}(r) dr \quad (4.29)$$

como único elemento diferente de zero. Além de eliminar a componente $(r\varphi)$ do tensor variação métrica, essa mudança infinitesimal nas coordenadas afeta também a componente $h_{t\varphi}$, que era originalmente nula. De fato, segue da relação (4.26) que essa função métrica assume um novo valor, dado por

$$h_{t\varphi}^{\text{nov}}o = -\xi_{\varphi,t} = -\frac{J}{r}. \quad (4.30)$$

Reunindo os resultados anteriores, descobre-se que o modo de perturbação axial $k = 0$

⁵Uma lista completa com as equações de Einstein linearizadas encontra-se em CHANDRASEKHAR E FRIEDMAN (1972), CHANDRASEKHAR (1983) e MIRANDA (2003).

leva a uma geometria que pode ser escrita como

$$ds^2 = -f(r, M)dt^2 + f(r, M)^{-1}dr^2 - 2\frac{J}{r}d\varphi dt + \frac{r^2}{R^2}(d\varphi^2 + dz^2). \quad (4.31)$$

Essa métrica representa um espaço-tempo estacionário, sendo uma versão de rotação lenta da solução de buraco negro encontrada originalmente por Lemos (1995). O parâmetro J é proporcional ao momento angular por unidade de comprimento da linha z para uma topologia cilíndrica, e ao momento angular total para uma topologia toroidal. No caso planar, não faz sentido falar num buraco negro em rotação. Quando φ denota uma direção infinita, é possível realizar uma transformação de coordenadas de Lorentz infinitesimal, globalmente bem comportada na definição de Stachel (1982), a qual mistura as variáveis φ e t e reduz a métrica (4.31) à forma original (4.1).

4.4.2 Setor polar

Diferentemente do que acontece com o setor axial, o modo de perturbação polar $k = 0$ não conduz, em geral, a um espaço-tempo estacionário. Frente a uma mudança infinitesimal das coordenadas, as variações métricas associadas a esse tipo de perturbação transformam-se em

$$h_{tt}^{\text{nov}} = -2e^{2\nu}\delta\nu - 2\xi_{t,t} + 2\nu_{,r}e^{4\nu}\xi_r, \quad (4.32)$$

$$h_{\varphi\varphi}^{\text{nov}} = 2r^2R^{-2}\delta\psi - 2\xi_{\varphi,\varphi} - 2re^{2\nu}R^{-2}\xi_r, \quad (4.33)$$

$$h_{zz}^{\text{nov}} = 2r^2R^{-2}\delta\mu_2 - 2\xi_{z,z} - 2re^{2\nu}R^{-2}\xi_r, \quad (4.34)$$

$$h_{rr}^{\text{nov}} = 2e^{-2\nu}\delta\mu_3 - 2\xi_{r,r} - 2\nu_{,r}\xi_r, \quad (4.35)$$

$$h_{tr}^{\text{nov}} = -\xi_{t,r} - \xi_{r,t} + 2\nu_{,r}\xi_t, \quad (4.36)$$

$$h_{tz}^{\text{nov}} = -\xi_{t,z} - \xi_{z,t}, \quad (4.37)$$

$$h_{rz}^{\text{nov}} = -\xi_{r,z} - \xi_{z,r} + 2r^{-1}\xi_z. \quad (4.38)$$

No caso de uma transformação com um vetor deslocamento independente de φ e z , e componentes $\xi_M = (\xi_t, 0, 0, \xi_r)$, as perturbações axiais e as variações h_{tz} e h_{rz} permanecem nulas, enquanto as demais componentes polares mudam de acordo com as relações (4.32)-(4.36). É fácil de observar agora que uma escolha conveniente de $\xi_r(t, r)$ anulará a combinação $h_{\varphi\varphi}^{\text{nov}} + h_{zz}^{\text{nov}}$. Além disso, existe um conjunto de funções $\xi_t(t, r)$ que satisfazem a equação $\xi_{t,r} + \xi_{r,t} - 2\nu_{,r}\xi_t = 0$ e cancelam a variação métrica h_{tr}^{nov} . Nesse novo calibre, a soma $\delta\psi + \delta\mu_2$

é nula, e as componentes (tr) , (rr) e $(\varphi\varphi) + (zz)$ das equações de Einstein reduzem-se a

$$\begin{aligned}\delta\mu_{3,t} &= 0, & \delta\nu_{,r} - \left(\frac{1}{r} + 2\nu_{,r}\right) \delta\mu_3 &= 0, \\ \delta\mu_{3,r} - \delta\nu_{,r} + 2\left(\frac{1}{r} + 2\nu_{,r}\right) \delta\mu_3 &= 0.\end{aligned}\tag{4.39}$$

Essas equações têm como solução

$$\delta\mu_3 = \delta M R^2 / (r^3 - 2MR^2) \quad \text{e} \quad \delta\nu = \delta\mu_3 + \mathfrak{k}(t),\tag{4.40}$$

onde δM é uma constante de integração arbitrária e $\mathfrak{k}(t)$ é uma função que pode ser eliminada mediante uma redefinição da coordenada temporal. Substituindo esses resultados na componente $(\varphi\varphi)$ das equações de campo, encontra-se uma equação de onda para a função $\delta\psi$,

$$\frac{\partial^2}{\partial r_*^2}(r\delta\psi) - \frac{\partial^2}{\partial t^2}(r\delta\psi) = \left[\frac{2f}{R^2} \left(1 + \frac{MR^2}{r^3} \right) \right] (r\delta\psi),\tag{4.41}$$

Dessa forma, num calibre apropriado, o modo de perturbação polar $k = 0$ conduz à geometria

$$ds^2 = -f(r, M + \delta M) dt^2 + f(r, M + \delta M)^{-1} dr^2 + \frac{r^2}{R^2} (e^{2\delta\psi} d\varphi^2 + e^{-2\delta\psi} dz^2).\tag{4.42}$$

Visto que em geral $\delta\psi$ é uma função dependente do tempo, a métrica (4.42) representa um buraco negro dinâmico, com um geometria cilindricamente simétrica e com a função $\delta\psi$ descrevendo a evolução de pequenas ondulações sobre o espaço-tempo de fundo (4.1). Essas ondulações poderiam, em princípio, ser observadas em algum lugar de um tal universo por meio da utilização de um detector de ondas gravitacionais. Observa-se também que a equação (4.41) admite soluções especiais nas quais $\delta\psi$ não depende do tempo, correspondendo a espaços-tempos cilindricamente simétricos estáticos. Além disso, a equação (4.41) admite a solução trivial $\delta\psi = 0$, caso em que a métrica (4.42) representa um buraco negro plano-simétrico, assim como o buraco negro não-perturbado (4.1), porém com um desvio no parâmetro de massa pela quantidade δM . A solução $\delta\psi = 0$ corresponde à perturbação polar $l = 0$ no caso de buracos negros esféricos (ZERILLI, 1970b).

5 PERTURBAÇÕES DE CURVATURA E QNM GRAVITACIONAIS

Este capítulo apresenta um estudo das perturbações gravitacionais de buracos negros planos AdS com base no formalismo de variações de curvatura de Teukolsky (1972). Além de tornar possível uma análise geral das perturbações, levando em conta a dependência em φ , essa investigação conduz a informações importantes, como os modos algebricamente especiais, que são soluções exatas das equações de perturbação. Discute-se também a estabilidade dessa família de buracos negros frente a flutuações do campo gravitacional, e apresentam-se os resultados obtidos para as frequências quase-normais com a utilização do método de Horowitz-Hubeny (2000).¹ Segundo a correspondência AdS/CFT, a parte imaginária da frequência QN fundamental fornece a escala de tempo de termalização na teoria de campos dual em (2+1) dimensões.

5.1 O espaço-tempo de fundo no formalismo de Newman-Penrose

De acordo com a classificação de Petrov, a métrica (4.1) é algebricamente especial do tipo D. Torna-se então conveniente definir as quantidades de Newman-Penrose (1962) em termos da base de vetores nulos de Kinnersley (1969). Nesse caso, os dois vetores reais da base são escolhidos ao longo de geodésicas radiais nulas,

$$D = l^\mu \partial_\mu = \frac{1}{f} (\partial_t + f \partial_r), \quad (5.1)$$

$$\Delta = n^\mu \partial_\mu = \frac{1}{2} (\partial_t - f \partial_r), \quad (5.2)$$

sendo estas as direções nulas (duplas) principais do tensor de Weyl. Para completar a téttrade, têm-se o vetor

$$\delta = m^\mu \partial_\mu = \frac{R}{r\sqrt{2}} (\partial_\varphi + i \partial_z) \quad (5.3)$$

e o seu complexo conjugado $\delta^* = m^{*\mu} \partial_\mu$. Ambos os vetores, m^μ e $m^{*\mu}$, são ortogonais à l^μ e n^μ , e satisfazem a condição de normalização² $m^\mu m_\mu^* = 1$. Em relação a essa base, os únicos

¹O estudo apresentado neste capítulo, com algumas pequenas modificações, encontra-se publicado em MIRANDA E ZANCHIN (2006).

²As definições das quantidades de Newman-Penrose são aquelas introduzidas por Chandrasekhar (1983). Apenas a normalização da base está invertida por conta da diferença na assinatura da métrica.

coeficientes de spin não-nulos são

$$\rho = 1/r, \quad \mu = f/2r, \quad \gamma = -(r^3 + MR^2)/2r^2R^2, \quad (5.4)$$

e os únicos escalares de Weyl e de Ricci não-nulos são

$$\Psi_2 = M/r^3, \quad \Lambda = -1/2R^2. \quad (5.5)$$

5.2 Perturbações de curvatura na formulação de Teukolsky

As equações para as perturbações gravitacionais são aqui obtidas com a utilização do formalismo de Teukolsky (1972). Esse formalismo tem como base o método dos coeficientes de spin de Newman-Penrose (NP), o que permite uma investigação de propriedades gerais de espaços-tempos Petrov tipo D, sem qualquer hipótese simplificadora. Dentro dessa formulação, as mudanças nos coeficientes métricos estão diretamente relacionadas às mudanças nos vetores nulos da tétrada. Além disso, as perturbações nos vetores l^μ , n^μ e m^μ conduzem a alterações de primeira ordem nos escalares de Weyl e de Ricci, e também nos coeficientes de spin. Para obter o sistema completo de equações linearizadas, expandem-se as equações NP sobre o espaço-tempo de fundo de um buraco negro plano e se mantêm apenas os termos de primeira ordem nas funções de perturbação.

Em geral, as equações NP linearizadas formam um grande sistema de equações acopladas, que são muito difíceis de serem resolvidas. Entretanto, para espaços-tempos Petrov tipo D sem fontes, o problema se reduz a resolver um par de equações desacopladas para os invariantes de calibre e tétrada, Ψ_0 e Ψ_4 (TEUKOLSKY, 1973). No presente caso, essas equações assumem as formas simples³

$$[(D + 4\rho + \rho^*)(\Delta + 4\gamma - \mu) - \delta\delta^* + 3\Psi_2]\Psi_0 = 0, \quad (5.6)$$

$$[(\Delta - 3\gamma + \gamma^* - 4\mu - \mu^*)(D + \rho) - \delta^*\delta + 3\Psi_2]\Psi_4 = 0. \quad (5.7)$$

As equações acima já estão linearizadas, tendo em vista que os escalares de Weyl Ψ_0 e Ψ_4 se anulam no estado de equilíbrio e, portanto, devem ser considerados como perturbações de primeira ordem. As outras quantidades assumem os seus valores não-perturbados, dados por (5.1)-(5.5).

As simetrias do espaço-tempo de fundo, junto com as equações de perturbação (5.6)

³Ocorrem algumas inversões de sinais em relação ao trabalho original de Teukolsky (1973), já que ele utilizou uma métrica de assinatura -2 .

e (5.7), indicam que os escalares Ψ_0 e Ψ_4 podem ser colocados na forma de um produto de quatro funções, cada uma dependente apenas de uma das coordenadas: t , r , φ ou z . Além disso, devido ao caráter tipo onda das equações, a dependência dessas funções nas coordenadas t , φ e z é da forma $\exp[-i(\omega t - m\varphi - kz)]$, onde ω é uma frequência, e m e k são componentes de um vetor de onda que podem assumir valores discretos ou contínuos, dependendo se φ e z são coordenadas compactas ou não-compactas, respectivamente. As funções radiais, por sua vez, são convenientemente escritas como

$$\Psi_0(r) = r^{-1}f^{-2}Y_{+2}(r), \quad \Psi_4(r) = r^{-1}Y_{-2}(r), \quad (5.8)$$

onde os subscritos ± 2 estão relacionados aos pesos de spin e pesos conformes dos escalares de Weyl Ψ_0 e Ψ_4 .

As equações resultantes para $Y_{\pm 2}$ assumem a forma padrão

$$\widehat{\Lambda}^2 Y_{\pm 2} + P\widehat{\Lambda}_{\pm} Y_{\pm 2} - QY_{\pm 2} = 0, \quad (5.9)$$

sendo que, para isso, foram introduzidas as quantidades

$$P = \frac{d}{dr_*} \ln \left(\frac{r^4}{f^2} \right), \quad Q = \frac{f}{r^3} (rq^2 R^2 + 6M), \quad (5.10)$$

com $q^2 = m^2 + k^2$.

A teoria de transformação de Chandrasekhar (1983) pode agora ser usada para levar as equações (5.9) em equações unidimensionais tipo Schrödinger,

$$\widehat{\Lambda}^2 Z^{(\pm)} = V^{(\pm)} Z^{(\pm)}. \quad (5.11)$$

Isso é realizado por meio das substituições

$$Y_{+2} = V^{(\pm)} Z^{(\pm)} + (W^{(\pm)} - 2i\omega)\widehat{\Lambda}_- Z^{(\pm)}, \quad (5.12)$$

$$Y_{-2} = V^{(\pm)} Z^{(\pm)} + (W^{(\pm)} + 2i\omega)\widehat{\Lambda}_+ Z^{(\pm)}, \quad (5.13)$$

cujas transformações inversas assumem as formas

$$K^{(\mp)} Z^{(\pm)} = \frac{r^4}{f^2} QY_{+2} - \frac{r^4}{f^2} (W^{(\pm)} - 2i\omega)\widehat{\Lambda}_+ Y_{+2}, \quad (5.14)$$

$$K^{(\pm)} Z^{(\pm)} = \frac{r^4}{f^2} QY_{-2} - \frac{r^4}{f^2} (W^{(\pm)} + 2i\omega)\widehat{\Lambda}_- Y_{-2}, \quad (5.15)$$

onde

$$K^{(\pm)} = q^4 R^4 \pm 12i\omega M. \quad (5.16)$$

Nas equações anteriores, as funções potenciais $V^{(\pm)}$ são dadas por

$$V^{(+)} = \frac{f}{r^3} \left[\frac{72M^3 R^2 + r^2 q^4 R^6 (rq^2 R^2 + 6M) + 36M^2 r (q^2 R^4 + 2r^2)}{R^2 (rq^2 R^2 + 6M)^2} \right], \quad (5.17)$$

$$V^{(-)} = \frac{f}{r^3} (rq^2 R^2 - 6M), \quad (5.18)$$

enquanto as funções auxiliares $W^{(\pm)}$ são, respectivamente,

$$W^{(+)} = -\frac{6M(2r^3 + rq^2 R^4 + 2MR^2)}{r^2 R^2 (rq^2 R^2 + 6M)}, \quad W^{(-)} = -\frac{6M}{r^2}. \quad (5.19)$$

O significado dos sinais (\pm) vem do estudo das perturbações gravitacionais via variações da métrica, conforme discutido por Cardoso e Lemos (2001c) e revisado no capítulo 4 desta tese. Eles estão associados à propriedade de paridade dos coeficientes métricos sob a troca $\varphi \rightarrow -\varphi$ (ou $z \rightarrow -z$). A variável $Z^{(+)}$ representa as perturbações polares (funções pares sob mudança de sinal da coordenada φ ou z), enquanto que $Z^{(-)}$ representa as axiais (ímpares).

Num certo sentido, as equações de onda (5.11) generalizam aquelas encontradas originalmente por Cardoso e Lemos (2001c) e apresentadas nas equações (4.17) e (4.22) do capítulo anterior. Aqui as perturbações dependem de ambas as coordenadas, φ e z , enquanto no trabalho citado acima a análise está restrita às variações métricas independentes de φ . Isso é equivalente a anular o número de onda m , resultando em $q^2 = k^2$. Entretanto, a simetria plana do espaço-tempo de fundo torna possível encontrar novas coordenadas (φ', z') , de tal forma que um dos números de onda, m' ou k' , é zero. Ou seja, sempre é possível encontrar um sistema de coordenadas no qual as perturbações dependem apenas de duas coordenadas espaciais (r e φ ou r e z).

Outro resultado obtido da análise acima está vinculado à constante de Starobinsky (1973), $|\mathcal{C}|^2 = K^{(+)}K^{(-)}$, onde $K^{(\pm)}$ são dados por (5.16). As soluções de $|\mathcal{C}|^2 = 0$ são frequências algebricamente especiais na definição de Chandrasekhar (1984). Conforme será mostrado na Seção 5.5, uma dessas frequências, dada por $\omega = -i\omega_a$ com

$$\omega_a = \frac{q^4 R^4}{12M} = \frac{q^4 R^6}{6r_0^3}, \quad (5.20)$$

aparece nos resultados numéricos em conexão com os QNM puramente amortecidos. As propriedades das perturbações axiais, relacionadas a esses modos algebricamente especiais, são

discutidas em detalhes na Seção 5.7.

5.3 Propriedades analíticas dos QNM

Para resolver as equações de onda (5.11), é necessário impor condições de contorno sobre as possíveis soluções. Inicialmente, no entanto, considere o espaço-tempo assintoticamente chato de Schwarzschild, discutido no capítulo 2 desta tese. As perturbações gravitacionais conduzem a equações tipo Schrödinger cujos potenciais efetivos são nulos no horizonte de eventos e no infinito. Conseqüentemente, próximo a essas extremidades, a solução geral é dada por uma combinação de ondas planas, $Z \rightarrow e^{\pm i\omega r_*}$, onde a coordenada r_* vai de $-\infty$ a $+\infty$. Os QNM são então definidos como soluções que se comportam como ondas puramente entrantes no horizonte, $Z \rightarrow e^{-i\omega r_*}$, e ondas puramente saídas no infinito, $Z \rightarrow e^{+i\omega r_*}$. Essas exigências são satisfeitas apenas por um conjunto discreto de valores complexos de ω , as frequências quase-normais do buraco negro.

Em espaços-tempos assintoticamente AdS, mantém-se a exigência de ondas puramente entrantes no horizonte. Contudo, já que agora a coordenada tartaruga r_* assume um valor finito conforme $r \rightarrow +\infty$, a condição de contorno no infinito espacial precisa ser modificada. Essa condição de contorno pode ser de Dirichlet, Neumann ou Robin, dependendo se o campo, a sua derivada ou uma combinação de ambos se anule, respectivamente. Aqui, como em boa parte da literatura, adotam-se condições de contorno de Dirichlet, já que estas conduzem à conservação de energia na teoria de campos escalares sobre o espaço AdS puro.⁴ Para condições de contorno alternativas, ver o trabalho de Moss e Norman (2002) e também a discussão apresentada no capítulo 6 desta tese.

Tendo definido os QNM, mostra-se abaixo que a parte imaginária das frequências QN assume valores negativos para potenciais estritamente positivos no exterior do buraco negro. A demonstração segue aquela realizada no caso Schwarzschild-AdS por Horowitz e Hubeny (2000). Inicialmente, troca-se a variável Z por $\phi = e^{+i\omega r_*} Z$, de modo que a equação (5.11) se transforma em

$$f \frac{d^2 \phi}{dr^2} + \left(\frac{df}{dr} - 2i\omega \right) \frac{d\phi}{dr} - \frac{V}{f} \phi = 0, \quad (5.21)$$

onde Z , ϕ e V denotam ambos os tipos de perturbação, as polares ($Z^{(+)}$, $\phi^{(+)}$, $V^{(+)}$) e as axiais ($Z^{(-)}$, $\phi^{(-)}$, $V^{(-)}$).

Nas proximidades do horizonte e do infinito espacial, as soluções ϕ que satisfazem as

⁴AVIS, ISHAM E STOREY (1978), BURGESS E LÜTKEN (1985) e COTAESCU (1999).

condições de contorno dos QNM são dadas, respectivamente, por

$$\phi_{r_0} = A \frac{(C_1 R^2 / 3r_0)^{-i\omega R^2 / 3r_0}}{\Gamma[1 - (2i\omega R^2 / 3r_0)]}, \quad (5.22)$$

$$\phi_\infty = B e^{-i\omega R^2 / r} \sin\left(\frac{R^2}{r} \sqrt{\omega^2 - C_2}\right), \quad (5.23)$$

onde A e B são constantes arbitrárias, e $C_1 = V(r_0)/f(r_0)$ e $C_2 = V(\infty)$ são constantes cujos valores dependem do tipo de perturbação.

Multiplica-se agora a equação (5.21) por ϕ^* e integra-se por partes utilizando as soluções assintóticas (5.22) e (5.23). Após alguma álgebra, obtém-se

$$\int_{r_0}^{\infty} \left[f \left| \frac{d\phi}{dr} \right|^2 + \frac{V}{f} |\phi|^2 \right] dr = -\frac{|\omega|^2 |\phi(r_0)|^2}{\text{Im}(\omega)}. \quad (5.24)$$

Já que $f(r)$ assume apenas valores positivos na região exterior ao buraco negro, o sinal da quantidade entre colchetes, no lado esquerdo da equação (5.24), depende essencialmente do sinal de $V(r)$. Para um potencial não-negativo, segue que a parte imaginária das frequências QN é negativa, $\text{Im}(\omega) < 0$. Além disso, observa-se da equação (5.17) que $V^{(+)}$ é positivo na região $r_0 < r < \infty$ para qualquer q e r_0 , e daí se conclui que os buracos negros plano-simétricos AdS são estáveis frente a perturbações polares. O mesmo acontece com as perturbações axiais tão logo os números de onda estejam restritos à $qR^2 \geq \sqrt{3}r_0$. Por outro lado, para $qR^2 < \sqrt{3}r_0$, o potencial $V^{(-)}$ assume valores negativos e o teorema não pode ser aplicado.

Outra característica importante das perturbações de buracos negros planos vem da propriedade de simetria desses espaços-tempos. Essa simetria permite uma mudança na escala de ω , q e r_0 por meio de uma simples transformação de coordenadas: $t = at'$, $x = ax'$, $y = ay'$ e $r = r'/a$, onde a é uma constante (HOROWITZ E HUBENY, 2000). Isso indica que a frequência é uma função homogênea de primeiro grau dos parâmetros q e r_0 , $\omega(aq, ar_0) = a\omega(q, r_0)$. Em particular, pode-se fazer $a = R/r_0$, de tal forma que

$$\omega(q, r_0) = \left(\frac{r_0}{R}\right) \omega\left(\frac{qR}{r_0}, R\right). \quad (5.25)$$

Então, após calcular frequências QN para um dado r_0 , por exemplo, para $r_0 = R$, e para diferentes valores de q , pode-se estimar $\omega(q, r_0)$ por meio da equação anterior. Além disso, os valores de ω para um determinado buraco negro são naturalmente divididos em três regimes: vetores de onda grandes ($qR \gg r_0/R$), de tamanho intermediário ($qR \sim r_0/R$) e pequenos ($qR \ll r_0/R$). No limite de grandes (pequenos) vetores de onda, r_0/R (qR) é desprezível e se

espera que $\omega \propto qR$ ($\omega \propto r_0/R$).

Alternativamente, pode-se fixar o número de onda q e variar o raio do horizonte, o que leva a uma divisão baseada no tamanho do buraco negro: grandes, intermediários e pequenos em comparação com o valor de qR^2 . Essa denominação é particularmente interessante para buracos negros Schwarzschild-AdS, pois nesse caso costuma-se trabalhar com os primeiros multipolos radiativos, $l = 1$ para o campo eletromagnético e $l = 2$ para o campo gravitacional, fazendo-se variar o raio do horizonte de eventos.

Em consonância com a AdS/CFT, também costuma-se introduzir uma frequência e um vetor de onda normalizados pela temperatura Hawking do buraco negro,

$$T = \frac{3}{4\pi} \frac{r_0}{R^2}. \quad (5.26)$$

Essa quantidade é identificada com a temperatura da teoria de campos holográfica, definida na fronteira (2+1)-dimensional do espaço-tempo anti-de Sitter. A nova frequência e o novo número de onda são definidos por

$$\mathfrak{w} = \frac{3\omega}{4\pi T} \quad \text{e} \quad \mathfrak{q} = \frac{3q}{4\pi T}. \quad (5.27)$$

Agora que já foram apresentadas algumas das propriedades analíticas dos QNM, se está em condições de resolver as equações de perturbação (5.11) e encontrar os valores das frequências QN. Em geral, essa tarefa só pode ser realizada por meio de procedimentos numéricos. Por isso, revisa-se a seguir o método que será utilizado no cálculo dos modos de vibração dos buracos negros plano-simétricos.

5.4 O método de Horowitz-Hubeny

Nas últimas décadas, foi desenvolvida uma série de procedimentos numéricos para o cálculo dos QNM de buracos negros. Entre esses procedimentos, destaca-se aqui o método de Horowitz-Hubeny (2000), já que ele é um dos mais adequados para espaços-tempos assintoticamente AdS. Tendo em vista futuras aplicações, reescreve-se abaixo as equações de perturbação numa forma mais apropriada.

Utilizando a frequência normalizada \mathfrak{w} e o vetor de onda normalizado \mathfrak{q} , e trocando a variável independente r por $u = r_0/r$, a equação (5.21) transforma-se em

$$(u^3 - 1) \frac{d^2 \phi}{du^2} + (3u^2 - 2i\mathfrak{w}) \frac{d\phi}{du} + \tilde{V}(u)\phi = 0, \quad (5.28)$$

onde o potencial efetivo modificado $\tilde{V}(u)$ é dado por

$$\tilde{V}^{(+)}(u) = \frac{9u^3 + 3\mathfrak{q}^4 u + \mathfrak{q}^6 + 9\mathfrak{q}^2 u^2 + 18}{(\mathfrak{q}^2 + 3u)^2} \quad (5.29)$$

para perturbações polares e

$$\tilde{V}^{(-)}(u) = \mathfrak{q}^2 - 3u \quad (5.30)$$

para perturbações axiais.

A equação (5.28) possui um ponto singular regular ($u = 1$) na região de interesse, $0 \leq u \leq 1$. Então, pelo teorema de Fuchs, qualquer solução de (5.28) pode ser escrita como uma série de Frobenius generalizada (BUTKOV, 1968). Para explorar o comportamento das soluções próximo ao horizonte, supõe-se que $\phi(u) = (u - 1)^\alpha$, onde α é uma constante a ser determinada. Substituindo essa expressão na equação (5.28) e mantendo termos apenas até a ordem dominante, segue que $\alpha(3\alpha - 2i\mathfrak{w}) = 0$. As raízes dessa equação, $\alpha = 0$ e $\alpha = 2i\mathfrak{w}/3$, estão associadas, respectivamente, às ondas planas que entram e que saem do horizonte de eventos (HOROWITZ E HUBENY, 2000). Já que se deseja apenas modos ‘entrantes’ (*ingoing*), assume-se $\alpha = 0$ e procura-se por soluções da forma

$$\phi(u) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m (1 - u)^m. \quad (5.31)$$

Substituindo (5.31) em (5.28), encontram-se expressões para os a_m 's em termos da frequência \mathfrak{w} e do número de onda \mathfrak{q} . Então, impondo a condição de contorno de Dirichlet na fronteira do espaço-tempo anti-de Sitter, obtém-se

$$\phi(0) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m(\mathfrak{w}, \mathfrak{q}) = 0. \quad (5.32)$$

Sendo assim, o problema de encontrar frequências QN se reduz àquele de obter as raízes da equação (5.32). Claro que, numericamente, não é possível realizar a soma completa na expressão (5.32). Na prática, o que se faz é truncar a série após um grande número de termos e procurar pelos zeros dessa soma parcial. A precisão dos resultados é então verificada com o cálculo da variação relativa entre os zeros de somas parciais consecutivas. Interrompe-se a busca uma vez que se tenha uma precisão de 6 dígitos decimais. Para cada valor de \mathfrak{q} , encontra-se um conjunto infinito de frequências QN (fora da infinidade de frequências possíveis). Essas frequências são usualmente rotuladas pelo número quântico principal n e ordenadas num conjunto que começa pelas raízes com as menores partes imaginárias (em

q	Axial		Polar	
	ω_R	ω_I	ω_R	ω_I
0,002	1,84942	2,66384	1,84945	2,66385
0,004	1,84942	2,66384	1,84945	2,66384
0,02	1,84948	2,66384	1,84963	2,66351
0,04	1,84964	2,66378	1,85027	2,66248
0,2	1,85492	2,66228	1,86960	2,62961
0,4	1,87098	2,65760	1,92488	2,52658

Tabela 5.1: Freqüências dos modos quase-normais fundamentais no regime de grandes buracos negros ($r_0/R \gg qR$) ou altas temperaturas ($T \gg q$).

módulo).

5.5 Resultados numéricos e análise

Utilizou-se o procedimento de Horowitz-Hubeny, descrito acima, para o cálculo dos QNM gravitacionais de buracos negros plano-simétricos AdS. Os principais resultados são apresentados nesta seção. Assim como ocorre com outros buracos negros AdS, surge aqui uma família de modos axiais puramente amortecidos, cujas freqüências são números imaginários puros. Os demais modos, no entanto, são todos regulares, isto é, com freqüências caracterizadas por uma parte real não-nula, responsável pelo comportamento oscilatório das perturbações.

Conforme mencionado no final da seção 5.3, a análise numérica naturalmente se divide em três diferentes regimes, determinados pelo valor de q . Costuma-se dizer que se têm (i) grandes buracos negros (ou altas temperaturas) quando $q \ll 1$; (ii) buracos negros de tamanho intermediário (ou temperaturas intermediárias) se $q \sim 1$; e (iii) pequenos buracos negros (ou baixas temperaturas) quando $q \gg 1$.

É importante também mencionar, neste ponto, que uma parte da análise numérica dos QNM gravitacionais foi realizada por Cardoso e Lemos (2001c). Entretanto, aquele estudo ficou restrito principalmente ao regime de grandes buracos negros (pequenos vetores de onda), sem ampliação para outros intervalos de q . No que segue, realiza-se uma análise mais detalhada, incluindo os regimes de buracos negros pequenos e de tamanho intermediário, de modo a obter relações de dispersão $\omega(q)$ completas.

5.5.1 Modos quase-normais comuns

Inicialmente discute-se o caso dos QNM regulares (comuns), cujas freqüências possuem partes reais e imaginárias não-nulas, $\omega = \omega_R - i\omega_I$. São listados os resultados numéricos

q	Axial		Polar	
	ω_R	ω_I	ω_R	ω_I
1	1,96444	2,62349	2,03016	1,92213
1,25	2,00766	2,59662	2,01082	1,74220
1,67	2,03888	2,49909	2,10507	1,60223
2	2,04735	2,21550	2,30526	1,55218
2,5	2,56487	1,76938	2,72952	1,49964
5	5,24650	1,30006	5,25618	1,27974

Tabela 5.2: Freqüências dos modos quase-normais fundamentais no regime de buracos negros de tamanho intermediário ($r_0/R \sim qR$) ou temperaturas intermediárias ($T \sim q$).

q	Axial		Polar	
	ω_R	ω_I	ω_R	ω_I
20	20,2727	0,916071	20,2727	0,915965
24	24,2668	0,880433	24,2668	0,880379
28	28,2613	0,851793	28,2613	0,851763
32	32,2562	0,827964	32,2562	0,827946
36	36,2516	0,807820	36,2516	0,807810
40	40,2472	0,790246	40,2472	0,790236

Tabela 5.3: Freqüências dos modos quase-normais fundamentais no regime de pequenos buracos negros ($r_0/R \ll qR$) ou baixas temperaturas ($T \ll q$).

das freqüências dos modos fundamentais para alguns valores de q . As quantidades calculadas incluem ambos os tipos de perturbação, axial e polar, e os três regimes definidos anteriormente. Os resultados para buracos negros grandes, de tamanho intermediário e pequenos são mostrados nas tabelas 5.1, 5.2 e 5.3, respectivamente.

A primeira característica a ser observada é que, diferentemente dos espaços-tempos assintoticamente chatos, as perturbações axiais e polares não possuem o mesmo espectro. De fato, a isoespectralidade é recuperada apenas nos limites de grandes e pequenos vetores de onda. Para outros exemplos em que isso ocorre, ver CARDOSO E LEMOS (2001b) e BERTI E KOKKOTAS (2003).

Para grandes buracos negros (q pequeno), os resultados apresentados aqui estão em perfeita concordância com aqueles encontrados por Cardoso e Lemos (2001c). Tanto para perturbações axiais quanto polares, as partes reais e imaginárias das freqüências fundamentais são dadas aproximadamente por

$$\omega_R = 7,75 T = 1,85 \frac{r_0}{R^2} \quad \text{e} \quad \omega_I = 11,16 T = 2,66 \frac{r_0}{R^2}. \quad (5.33)$$

Essas expressões reproduzem aquelas obtidas para grandes buracos negros Schwarzschild-AdS (CARDOSO E LEMOS, 2001b), o que já era esperado, pois um sistema esférico aproxima-se de

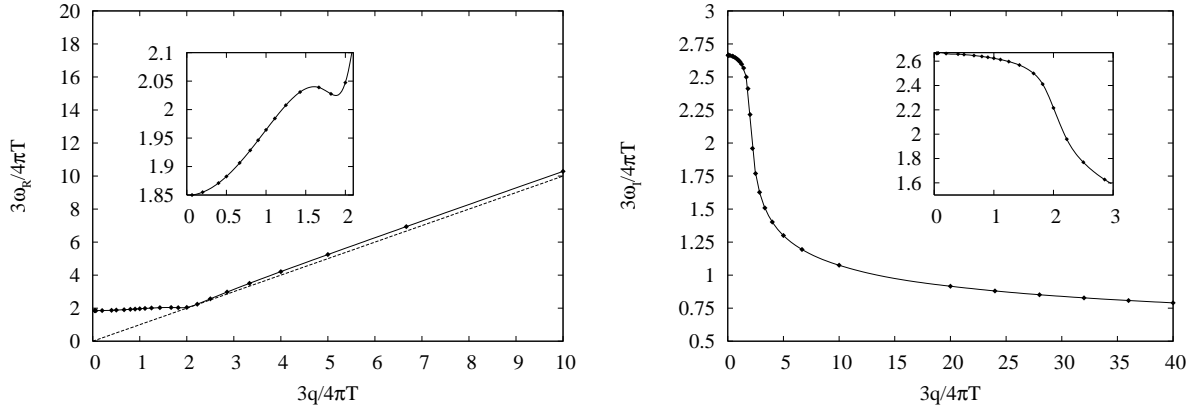


Figura 5.1: As frequências dos modos axiais fundamentais $\mathfrak{w} = (3\omega_R/4\pi T) - i(3\omega_I/4\pi T)$ em função do número de onda normalizado $\mathfrak{q} = 3q/4\pi T$. Os pontos representam resultados numéricos e as linhas contínuas, curvas de ajuste. A parte real da frequência tende à linha tracejada $\omega_R = q$ no limite de $3q/4\pi T$ grande, enquanto a parte imaginária vai a zero nesse mesmo limite. Nas inserções, mostra-se o comportamento da frequência no regime de buracos negros pequenos e de tamanho intermediário.

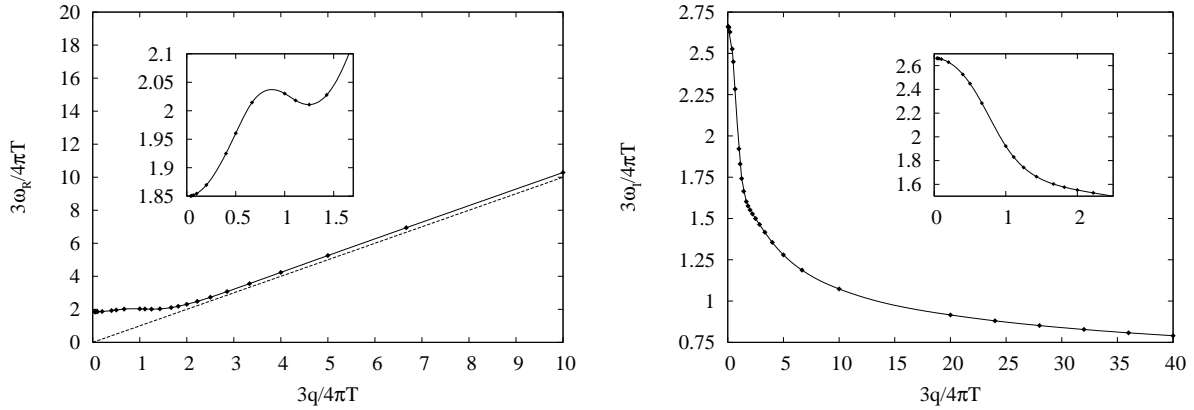


Figura 5.2: Gráficos com os resultados numéricos para as frequências polares fundamentais.

um plano conforme o raio vai a infinito.

Para buracos negros pequenos ($\mathfrak{q} \ll 1$) e de tamanho intermediário ($\mathfrak{q} \sim 1$), as frequências QN não-normalizadas deixam de ser proporcionais ao raio do horizonte (ou à temperatura). Isso pode ser facilmente observado nas figuras 5.1 e 5.2, onde são apresentadas as frequências fundamentais normalizadas $\mathfrak{w} = 3\omega/4\pi T$ para diferentes valores de $\mathfrak{q} = 3q/4\pi T$. A maneira exata na qual \mathfrak{w} altera o seu comportamento inicial, aproximadamente constante, depende da paridade da perturbação. Dentro de uma certa precisão, as frequências fundamentais começam a se desviar da linha

$$\omega = (7,75 - i11,16)T = (1,85 - i2,66)\frac{r_0}{R^2} \quad (5.34)$$

em torno de $\mathfrak{q} = 2$ para as oscilações axiais e de $\mathfrak{q} = 2/5$ para as oscilações polares. Conforme a razão q/T vai a infinito, têm-se $\omega_R \rightarrow q$ e $\omega_I \rightarrow 0$, independentemente do tipo de perturbação.

q	\mathfrak{w}_s	$q^2/3$	q	\mathfrak{w}_s	q	\mathfrak{w}_s	$q^4/6$
0,02	0,000133342	0,000133333	1	0,366519	2,5	6,51103	6,51042
0,04	0,000533409	0,000533333	1,25	0,611520	4	42,6667	42,6667
0,2	0,0133786	0,0133333	1,7	1,43533	5	104,167	104,167
0,25	0,0209443	0,0208333	1,8	1,72508	8	682,667	682,667
0,4	0,0540722	0,0533333	1,9	2,14757	10	1666,67	1666,66
0,5	0,0851610	0,0833333	2,0	2,64636	20	26666,7	26666,7

Tabela 5.4: As frequências QN puramente imaginárias para alguns valores selecionados de q . A fórmula $q^2/3$ é um ajuste válido para grandes buracos negros, enquanto que $q^4/6$ é o módulo da frequência algebricamente especial $\mathfrak{w} = -i\mathfrak{w}_a$.

De fato, no limite de pequenos buracos negros, a dependência de ω em q pode ser prevista com base na propriedade de homogeneidade da frequência:

$$\omega(q, r_0) = qR^2 \omega\left(\frac{1}{R^2}, \frac{r_0/R}{qR}\right) \approx R^2 \omega(1/R^2, 0) q = \text{const.} \times q. \quad (5.35)$$

O que os resultados numéricos mostram é que, pelo menos para os modos fundamentais, a constante de proporcionalidade é igual à unidade. A relação desse resultado com os modos gravitacionais AdS puros é investigada no apêndice A.

5.5.2 Modos puramente amortecidos

Uma das características das perturbações axiais de buracos negros AdS é a presença de modos especiais, puramente amortecidos. Para cada valor de q , encontra-se uma única frequência quase-normal com parte real nula. Os valores dessas frequências, separadas na forma $\mathfrak{w} = -i\mathfrak{w}_s$, estão listados na Tabela 5.4 para alguns valores selecionados de q .

Para grandes buracos negros (q pequeno), os resultados numéricos concordam, novamente, com aqueles obtidos por Cardoso e Lemos (2001c). Dentro de uma certa precisão, as frequências dos modos quase-normais puramente amortecidos são bem descritas pela fórmula $\omega_s = q^2 R^2 / 3r_0$. Um resultado semelhante foi obtido por Cardoso, Konoplya e Lemos (2003) para espaços-tempos Schwarzschild-AdS. Eles encontraram $\omega_s = (l-1)(l+2)R^2/3r_0$, onde l é o momento angular da perturbação. Em princípio, essas duas fórmulas representam apenas bons ajustes aos dados numéricos. No entanto, com base numa expansão de \mathfrak{w}_s em série de potências de q , é possível deduzir analiticamente a expressão para a frequência QN imaginária no limite em que $r_0/R \gg qR$. Esse será o assunto tratado na próxima seção.⁵

Para buracos negros de tamanho intermediário ($q \sim 1$) e fixo ($r_0 = \text{const.}$), a frequência

⁵Nesta tese, apresenta-se uma dedução analítica para o ajuste de ω_s apenas para buracos negros plano-simétricos. Para demonstrações no caso Scharzschild-AdS, ver MIRANDA E ZANCHIN (2006), SIOPSIS (2007) e FRIESS et al (2007).

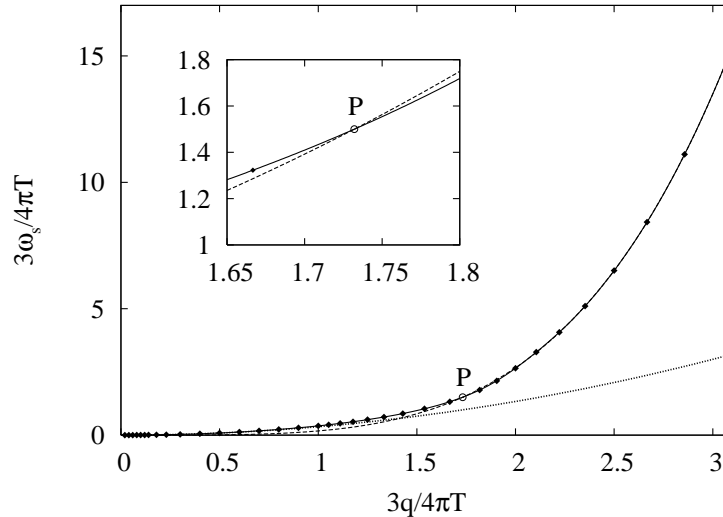


Figura 5.3: A frequência $\omega_s = 3\omega_s/4\pi T$ em função do vetor de onda $\mathbf{q} = 3q/4\pi T$ (os pontos representam resultados numéricos). A linha pontilhada é $\omega_s = q^2/3$ e a linha tracejada é a frequência algebricamente especial $\omega_a = q^4/6$. No ponto $P = (\sqrt{3}, 3/2)$, a frequência algebricamente especial cruza a frequência QN puramente amortecida.

ω_s cresce mais rápido do que $q^2 R^2/3r_0$ conforme o número de onda cresce (ver Figura 5.3). Outra característica especial desse regime está relacionada ao comportamento do potencial modificado $\tilde{V}^{(-)}(u) = q^2 - 3u$ em função da variável $u = r_0/r$. Conforme o valor de q aumenta, o ponto $q = \sqrt{3}$ representa a fronteira a partir da qual o potencial se transforma numa função não-negativa na região $0 \leq u \leq 1$. Em outras palavras, $\tilde{V}^{(-)}(u) \geq 0$ em todos os pontos no exterior de um buraco negro perturbado por um modo axial com $q \geq \sqrt{3}$. No cálculo numérico, o número de onda $q = \sqrt{3}$ também apresenta um comportamento singular. O programa de busca de raízes, baseado no método de Horowitz-Hubeny (2000), falha na procura por uma frequência QN puramente imaginária para $q = \sqrt{3}$. O problema ocorre justamente quando q se aproxima do ponto em que ω_s interceptaria a frequência algebricamente especial $\omega_a = q^4/6$. Isso é indicado pelo ponto P na Figura 5.3, onde são apresentados os valores de ω_s para diferentes números de onda q . Os dados numéricos mostram que $\omega_s > \omega_a$ para todo $q < \sqrt{3}$ e $\omega_s < \omega_a$ para todo $q > \sqrt{3}$.

Para pequenos buracos negros (q grande), os valores da frequência ω_s dos modos puramente amortecidos aproximam-se da frequência algebricamente especial ω_a . De fato, a diferença fracional entre essas frequências é menor do que 10^{-6} para $q = 4$ e decresce conforme $q \rightarrow \infty$. Essa conclusão tem novamente uma contrapartida no caso esférico, conforme pode ser observado dos resultados numéricos encontrados em CARDOSO, KONOPLYA E LEMOS (2003). Mais detalhes sobre a frequência algebricamente especial e sobre o seu caráter (não) quase-normal são apresentados na Seção 5.7.

5.6 O limite de grandes buracos negros dos QNM puramente amortecidos

Embora procedimentos numéricos sejam, em geral, necessários para o cálculo de frequências QN, é possível estudar analiticamente certos regimes do espectro quase-normal. Um exemplo é o limite de grandes buracos negros das perturbações gravitacionais axiais. Mostramos abaixo, em detalhes, o procedimento usado para encontrar uma expressão assintótica para as frequências dos modos puramente amortecidos.

O ponto de partida é o método de Horowitz-Hubeny (2000), descrito na Seção 5.4. Utilizando esse método, descobre-se que as frequências QN axiais são dadas pelas raízes da equação

$$\sum_{m=0}^{\infty} a_m(\mathfrak{w}, \mathfrak{q}) = 0. \quad (5.36)$$

Conseqüentemente, é necessário obter uma expressão analítica para a soma dessa série, a fim de que se possa encontrar valores exatos para a frequência. Tal tarefa é muito difícil de ser realizada para um valor de \mathfrak{q} genérico, mas ela torna-se factível no limite de grandes buracos negros ($\mathfrak{q} \ll 1$) dos modos puramente amortecidos.

Os coeficientes $a_m(\mathfrak{w}, \mathfrak{q})$, que aparecem na expressão (5.36), representam os coeficientes de Fro-benius da solução em série de potências da equação (5.28), porém escrita para perturbações axiais. Eles são dados em termos da frequência e número de onda normalizados pela relação de recorrência

$$a_m = \frac{3(m^2 - m - 1) + \mathfrak{q}^2}{m(3m - 2i\mathfrak{w})} a_{m-1} - \frac{m^2 - 2m - 3}{m(3m - 2i\mathfrak{w})} a_{m-2}, \quad (5.37)$$

onde $a_1 = -[(3 - \mathfrak{q}^2)/(3 - 2i\mathfrak{w})]a_0$ e a equação acima vale para todo $m \geq 2$.

No regime de grandes buracos negros ($qR \ll r_0/R$), o número de onda q torna-se desprezível e a frequência \mathfrak{w} tende a uma constante. Supõe-se então que $\mathfrak{w}(\mathfrak{q})$ possua uma expansão em séries de Taylor em torno de $\mathfrak{q} = 0$, que seja válida sobre o intervalo $0 < \mathfrak{q} < \mathcal{R}$, para algum \mathcal{R} (BUTKOV, 1968). Tal expansão pode ser convenientemente escrita como $2i\mathfrak{w} = \sum_{m=0}^{\infty} b_m \mathfrak{q}^m$, onde b_m são constantes a serem determinadas. Entretanto, nem todos os elementos b_m são independentes, já que uma parte deles pode ser eliminada com base na propriedade de paridade da função $\mathfrak{w}(\mathfrak{q})$. Independentemente do resultado da soma no lado esquerdo de (5.36), o formato da relação de recorrência (5.37) assegura que \mathfrak{w} é uma função de \mathfrak{q}^2 . Isso quer dizer que \mathfrak{w} não muda de sinal frente à transformação $\mathfrak{q} \rightarrow -\mathfrak{q}$, sendo uma função par de \mathfrak{q} . Na série que representa $2i\mathfrak{w}$, apenas as potências pares em \mathfrak{q} devem sobreviver,⁶ e

⁶A única possibilidade de se ter potências ímpares em \mathfrak{q} é no caso em que $\mathfrak{w}(0) = 0$ e o primeiro termo não-nulo na expansão é puramente real. Essa possibilidade será ignorada num primeiro momento. Para mais

daí segue que $b_{2m+1} = 0$ para todo $m \geq 0$. Esse resultado permite que se escreva

$$2i\mathbf{w} = \sum_{m=0}^{\infty} c_m \mathcal{Q}^m, \quad (5.38)$$

onde $\mathcal{Q} = \mathbf{q}^2$ e c_m são constantes a serem determinadas.

A representação em série de $2i\mathbf{w}$ abre a possibilidade de se expandir em séries de Taylor os termos a_m sobre $\mathcal{Q} = 0$. Antes de fazer isso, no entanto, observa-se que o valor de a_0 é arbitrário, já que todos os termos na série (5.36) são proporcionais a esse elemento, e a soma completa é igualada a zero. Por uma questão de simplicidade, escolhe-se aqui $a_0 = 1$. Na seqüência, substitui-se (5.38) na expressão $(3m - 2i\mathbf{w})^{-1}$ e se expande essa quantidade sobre $\mathcal{Q} = 0$. Quando essa expansão é substituída de volta na relação de recorrência (5.37), obtém-se um conjunto de séries de Taylor para os elementos a_m (uma série para cada m). Essas séries podem ser representadas por

$$a_m = \sum_{j=0}^{\infty} \eta_m^j \mathcal{Q}^j, \quad (5.39)$$

onde os elementos η_m^j são funções de c_0, c_1, \dots, c_j . Substituindo as expansões anteriores na equação (5.36) e colecionando termos de mesma potência em \mathcal{Q} , encontra-se

$$[1 + \eta_1^0(c_0) + \eta_2^0(c_0) + \dots] + [\eta_1^1(c_0, c_1) + \eta_1^2(c_0, c_1) + \dots] \mathcal{Q} + \dots = 0. \quad (5.40)$$

O lado esquerdo da equação (5.40) é uma série de potências na variável \mathcal{Q} . Para que a equação completa seja satisfeita, todos os termos entre colchetes devem ser nulos. Dessa forma, o coeficiente de ordem zero fornece uma equação para c_0 , o coeficiente de primeira ordem, com o valor de c_0 calculado anteriormente, fornece uma equação para c_1 , e assim por diante. Para os cálculos que conduzem a c_0 , os primeiros termos relevantes são dados por

$$\eta_1^0 = -\frac{3}{3 - c_0} \quad \text{e} \quad \eta_2^0 = -\frac{3c_0}{2(3 - c_0)(6 - c_0)}. \quad (5.41)$$

Além disso, observa-se em (5.37) que $m = 3$ é um dos zeros da quantidade $(m^2 - 2m - 3)$, de modo que o termo a_3 difere de a_2 apenas por um fator multiplicativo. Isso implica, em particular, que o elemento η_3^0 está relacionado à η_2^0 por

$$\eta_3^0 = \frac{5}{9 - c_0} \eta_2^0. \quad (5.42)$$

detalhes, ver a discussão sobre o modo de onda sonora no capítulo 6.

Junto com a fórmula (5.37), essa relação mostra que todos os elementos subseqüentes também são proporcionais à η_2^0 . De modo mais específico, o m -ésimo coeficiente (para $m \geq 2$) pode ser escrito como

$$\eta_m^0 = \gamma_m(c_0)\eta_2^0, \quad (5.43)$$

onde $\gamma_m(c_0)$ é dado pela fórmula de recorrência:

$$\gamma_m(c_0) = \frac{1}{m(3m - c_0)} [3(m^2 - m - 1)\gamma_{m-1}(c_0) - (m^2 - 2m - 3)\gamma_{m-2}(c_0)], \quad (5.44)$$

com $\gamma_2(c_0) = 1$ e $\gamma_3(c_0) = 5/9$.

Levando em conta os últimos resultados, descobre-se então que o termo independente de \mathcal{Q} na equação (5.40) dá origem à seguinte equação para c_0 :

$$c_0 \left[\frac{1}{(3 - c_0)} + \frac{3}{2(3 - c_0)(6 - c_0)} \sum_{m=2}^{\infty} \gamma_m(c_0) \right] = 0. \quad (5.45)$$

Claramente, a equação acima possui a solução especial $c_0 = 0$, além das raízes que surgem como zeros do termo entre colchetes. A existência dessa solução especial explica porque os QNM puramente amortecidos não se escalam com o tamanho do horizonte, como acontece com os modos regulares, no limite de grandes buracos negros. De fato, os cálculos numéricos mostraram que os modos puramente amortecidos são os únicos dos QNM que, em primeira aproximação, não são proporcionais à r_0 . Esse fato sugere que ele deve estar associado à raiz $c_0 = 0$. Segue então de (5.38) que, para grandes raios do horizonte, a frequência \mathfrak{w} correspondente vai com \mathfrak{q}^2 ($\omega \sim q^2 R^2/r_0$). Por outro lado, os resultados numéricos também indicam que os QNM axiais comuns são proporcionais à r_0 (em primeira aproximação). Disso se conclui que as raízes restantes, obtidas dos zeros do termo entre colchetes na equação (5.45), correspondem aos valores assintóticos da função $2i\mathfrak{w}$ para os QNM regulares.

Para obter o limite de \mathfrak{q} pequeno das frequências QN puramente imaginárias, têm-se então que assumir $c_0 = 0$ e calcular o próximo elemento, c_1 . Nesse caso, os coeficientes η_1^1 e η_2^1 se reduzem a

$$\eta_1^1 = \frac{1 - c_1}{3} \quad \text{e} \quad \eta_2^1 = -\frac{c_1}{12}, \quad (5.46)$$

enquanto os demais elementos η_m^1 (para $m \geq 3$) assumem a forma $\eta_m^1 = \gamma_m(0)\eta_2^1$. Substituindo esses resultados no termo de primeira ordem em \mathcal{Q} da equação (5.40), obtém-se uma equação

algébrica que ao ser resolvida para c_1 produz

$$c_1 = \frac{4}{4 + \gamma}, \quad (5.47)$$

onde acima foi introduzida a quantidade

$$\gamma = \sum_{m=0}^{\infty} \gamma_m(0). \quad (5.48)$$

O problema agora é somar a série que leva à γ . Em geral, essa tarefa é extremamente difícil, mas no presente caso foi possível somar a série (5.48) (ver Apêndice B) e obter o resultado exato $\gamma = 2$. Dessa forma, tem-se $c_1 = 2/3$ e a fórmula assintótica das frequências QN puramente imaginárias segue diretamente de (5.38):

$$\mathfrak{w} = -i\mathfrak{w}_s = -\frac{i}{3}q^2, \quad (5.49)$$

ou, colocando em termos do raio do horizonte e da temperatura, encontra-se

$$\omega = -i\frac{R^2}{3r_0}q^2 = -\frac{i}{4\pi T}q^2. \quad (5.50)$$

Essa expressão representa um resultado exato, válido no limite assintótico de grandes buracos negros (ou altas temperaturas) em comparação com q . A fórmula (5.50) concorda perfeitamente com os ajustes encontrados por meio dos cálculos numéricos.⁷

5.7 Modos algebricamente especiais

Os resultados numéricos para as frequências QN revelaram uma relação próxima entre os modos algebricamente especiais e os QNM puramente amortecidos. Para r_0 fixo, a frequência ω_s aproxima-se dos valores da frequência ω_a conforme o número de onda q tende a infinito. Existe também um ponto de encontro P entre essas duas frequências para uma combinação particular de parâmetros tal que $\tilde{V}^{(-)}(u = 1) = 0$, conforme mostrado na Figura 5.3. Além disso, a relação entre os QNM puramente amortecidos e as frequências algebricamente especiais não se restringe aos buracos negros com simetria plana, mas ela também aparece nas perturbações axiais do espaço-tempo Schwarzschild-AdS. Todos esses fatos demonstram a im-

⁷Após ter deduzido a fórmula (5.50) e ter publicado essa demonstração em MIRANDA E ZANCHIN (2006), tomou-se conhecimento de um trabalho anterior (HERZOG, 2002) que já havia obtido esse mesmo resultado por meio de um procedimento diferente. Para mais detalhes, ver seção 6.5.

portância de uma análise do caráter QN dos modos de perturbação algebricamente especiais, cuja frequência negativa é dada por

$$\mathfrak{w} = -i\mathfrak{w}_a = -i\frac{\mathfrak{q}^4}{6}. \quad (5.51)$$

Para verificar se os modos algebricamente especiais satisfazem as condições de contorno que definem um QNM, é necessário obter a solução $\phi_a^{(-)}(u)$ associada à frequência algebricamente especial $\mathfrak{w} = -i\mathfrak{w}_a$. Já que essa função é um caso particular da solução em série de potências geral (5.31), pode-se usar a relação de recorrência (5.37) para determinar os coeficientes a_m para $\mathfrak{w} = -i\mathfrak{w}_a$. Novamente, assume-se que $a_0 = 1$, de tal modo que os coeficientes a_1 e a_2 são dados, respectivamente, por

$$a_1 = -\frac{3 - \mathfrak{q}^2}{3 - 2i\mathfrak{w}}, \quad a_2 = \frac{\mathfrak{q}^4 - 6i\mathfrak{w}}{4(3 - i\mathfrak{w})(3 - 2i\mathfrak{w})}. \quad (5.52)$$

Observa-se da última expressão que $a_2 = 0$ para a frequência $\mathfrak{w} = -i\mathfrak{w}_a$. Além disso, já que todos os demais elementos a_m (para $m \geq 3$) diferem de a_2 apenas por um fator multiplicativo, tem-se $a_3 = a_4 = \dots = 0$. A solução $\phi_a^{(-)}(u)$, então, se reduz a

$$\phi_a^{(-)}(u) = 1 - \frac{3}{3 + \mathfrak{q}^2}(1 - u). \quad (5.53)$$

Sabe-se do método de Horowitz-Hubeny que a função (5.53) representa uma onda entrante no horizonte de eventos. O problema aqui é verificar se $\phi_a^{(-)}(u)$ satisfaz a condição de Dirichlet no infinito espacial ($u = 0$). Impondo a condição de contorno $\phi_a^{(-)}(0) = 0$, encontra-se uma equação que é satisfeita somente se $\mathfrak{q} = 0$. Isso significa que é necessário um número de onda nulo, a fim de que se tenha uma frequência QN igual à $\omega = -i\omega_a$. Nesse caso, entretanto, as funções de perturbação seriam independentes do tempo e não poderiam representar ondas gravitacionais. Com base nesse resultado, conclui-se que $\omega = -i\omega_a$ não é uma frequência QN, porque a função de onda correspondente $\phi_a^{(-)}(u)$ não satisfaz a condição de contorno no infinito. Ainda assim, ω_a representa um limite assintótico para o comportamento dos QNM puramente amortecidos no regime de pequenos buracos negros (baixas temperaturas) em comparação com o número de onda da perturbação.

Em resumo, mesmo que os cálculos numéricos tenham mostrado que, no limite de horizontes pequenos, ω_s é muito próximo de ω_a , o resultado acima prova que as frequências QN dos modos puramente amortecidos não são exatamente iguais às frequências algebricamente especiais negativas. A linha contínua da Figura 5.3 não coincide com os pontos que repre-

sentam os QNM, nem mesmo no regime de pequenos buracos negros (baixas temperaturas). Existe, no entanto, um ponto especial P, no qual ω_a cruza a linha de ω_s . A resposta à questão se $\omega = -i\omega_a$ corresponde ou não a uma frequência quase-normal naquele ponto específico é apresentada abaixo.

Embora a análise anterior tenha sido bastante geral, ela falha ao testar o caráter quase-normal de $\mathfrak{w} = -i\mathfrak{w}_a$ no caso em que $\tilde{V}^{(-)}(u = 1) = 0$. Essa situação ocorre para uma combinação especial de parâmetros que satisfazem a condição $\mathfrak{q} = 3q/4\pi T = \sqrt{3}$. Nesse caso, as raízes da equação indicial de Frobenius, que são $\alpha = 0$ e $\alpha = 2\mathfrak{w}_a/3 = 1$, diferem por um número inteiro e o método de Horowitz-Hubeny, tal qual foi originalmente formulado, torna-se inválido. Uma das formas de se resolver esse problema é escrever explicitamente a versão axial da equação (5.28) para $\mathfrak{w} = -i\mathfrak{w}_a$ e $\mathfrak{q} = \sqrt{3}$, do que resulta

$$(u^2 + u + 1)\frac{d^2\phi_a^{(-)}}{du^2} + 3(u + 1)\frac{d\phi_a^{(-)}}{du} - 3\phi_a^{(-)} = 0. \quad (5.54)$$

Aqui, $u = 1$ é um ponto regular da equação diferencial acima, e a solução geral para $\phi_a^{(-)}$ pode ser escrita na forma de uma série de Taylor,

$$\phi_a^{(-)}(u) = \sum_{m=0}^{\infty} d_m(1 - u)^m. \quad (5.55)$$

Substituindo essa expressão na equação (5.54), encontra-se, como é usual, que todos os coeficientes d_m (para $m \geq 2$) podem ser expressos em termos dos dois primeiros, d_0 e d_1 . A solução geral da equação (5.54), então, assume a forma

$$\phi_a^{(-)}(u) = d_0 \left[1 + \frac{1}{2} \sum_{m=2}^{\infty} \beta_m(1 - u)^m \right] + d_1 \left[(1 - u) + \sum_{m=2}^{\infty} \beta_m(1 - u)^m \right], \quad (5.56)$$

onde os parâmetros β_m (para todo $m \geq 4$) são dados pela fórmula de recorrência

$$\beta_m = \beta_{m-1} - \frac{(m-3)(m+1)}{3m(m-1)}\beta_{m-2}, \quad (\beta_2 = \beta_3 = 1). \quad (5.57)$$

O primeiro termo entre colchetes em (5.56) representa uma função de perturbação que é constante no horizonte de eventos e, por essa razão, corresponde a uma onda entrante (*ingoing*), enquanto o segundo termo representa uma onda saidora (*outgoing*), já que ela vai com $(1 - u)$ no limite em que $u \rightarrow 1$. Para satisfazer a condição de contorno dos QNM, deve-se fazer $d_1 = 0$ e manter apenas o primeiro termo da solução geral (5.56). Além disso, sem perda de generalidade, pode-se escolher $d_0 = 1$. Por fim, é necessário verificar se a função

$\phi_a^{(-)}(u)$ satisfaz a condição de contorno de Dirichlet no infinito espacial, $u = 0$. Substituindo $d_0 = 1$, $d_1 = 0$ e $u = 0$ em (5.56), segue que

$$\phi_a^{(-)}(0) = 1 + \frac{1}{2} \sum_{m=2}^{\infty} \beta_m. \quad (5.58)$$

Os cálculos numéricos mostram que $\phi_a^{(-)}(0) \simeq 3,29$, da onde se conclui que os modos algebricamente especiais, definitivamente, não são modos quase-normais, nem mesmo para a família de parâmetros que conduz à $\tilde{V}^{(-)}(u = 1) = 0$. Para buraco negro AdS planos, isso corresponde ao ponto P na Figura 5.3, onde as linhas que representam as frequências QN puramente amortecidas e as frequências algebricamente especiais negativas se interceptam. Entre outras coisas, esse resultado mostra que o espectro QNM de alguns buracos negros não apresenta uma frequência imaginária pura particular; justamente para aquele modo específico cujo número de onda satisfaz a equação $3q/4\pi T = \sqrt{3}$.

6 FREQUÊNCIAS QN COMO PÓLOS DE FUNÇÕES DE CORRELAÇÃO DE DOIS PONTOS

Em teorias de campos fortemente interagentes à temperatura finita, um problema importante, porém difícil, é o estudo das propriedades de transporte de quantidades conservadas como energia, momento e carga. Das fórmulas de Kubo (1966), sabe-se que os coeficientes de transporte hidrodinâmicos estão relacionados com os limites de baixas frequências de funções de correlação no tempo real. Ao menos para certas teorias conformemente invariantes, a correspondência AdS/CFT fornece uma ferramenta para o cálculo desses coeficientes com base em estudos de buracos negros assintoticamente anti-de Sitter.

O objetivo deste capítulo é investigar a relação entre perturbações eletromagnéticas e gravitacionais de buracos negros planos AdS e as flutuações de corrente conservada e tensor energia-momento na CFT holográfica. Em particular, mostra-se que uma escolha adequada das variáveis ‘mestres’ para os campos eletromagnético e gravitacional conduz diretamente aos pólos das funções de Green retardadas na teoria de campos dual. Para obter esses pólos, calcula-se então o espectro de frequências QN completo, incluindo um estudo analítico dos modos hidrodinâmicos de difusão, cisalhamento e onda sonora.

6.1 A teoria de M2-branas

A correspondência AdS/CFT relaciona os buracos negros plano-simétricos AdS, discutidos nos últimos dois capítulos, com uma teoria de campos tridimensional à temperatura finita. Para entender essa relação é importante considerar o mapeamento completo.¹ No contexto das teorias de supercordas, surgem objetos bidimensionais estendidos conhecidos como M2-branas (TOWNSEND, 1996). Um conjunto de N M2-branas coincidentes admite duas descrições que, em princípio, são distintas e que levam a uma correspondência entre teoria M/calibre. Sobre o volume de mundo das M2-branas, está definida uma teoria não-abeliana de Yang-Mills em (2+1) dimensões. Além de um grupo de calibre $SU(N)$, essa teoria possui $\mathcal{N} = 8$ supersimetrias. A constante de acoplamento da teoria flui para um acoplamento forte no infravermelho. Acredita-se que esse ‘fluxo’ leve a um ponto fixo estável que descreve uma teoria de campos superconforme (SCFT) (SEIBERG, 1998). Essa SCFT também possui uma simetria de carga- R que se expande para o $SO(8)$.

¹A revisão apresentada nesta seção, baseia-se principalmente em material contido em AHARONY et al (2000), HERZOG (2002) e HERZOG et al (2007).

Do ponto de vista da supergravidade, um conjunto de M2-branas curva o espaço-tempo chato de onze dimensões, conduzindo a uma solução não-extrema das equações de movimento, caracterizada pela métrica²

$$ds^2 = H^{-2/3}(\tilde{r}) [-\mathfrak{h}(\tilde{r})dt^2 + dx^2 + dy^2] + H^{1/3}(\tilde{r}) [\mathfrak{h}^{-1}(\tilde{r})d\tilde{r}^2 + \tilde{r}^2 d\Omega_7^2], \quad (6.1)$$

onde

$$H(\tilde{r}) = 1 + \left(\frac{R_S}{\tilde{r}}\right)^6 \quad \text{e} \quad \mathfrak{h}(\tilde{r}) = 1 - \left(\frac{\tilde{r}_0}{\tilde{r}}\right)^6, \quad (6.2)$$

e por um campo de 4-formas cujo dual de Hodge é dado por

$$\star \mathbf{F}_4 = \mathbf{F}_7 = 6R_S^6 \text{Vol}(S^7) \boldsymbol{\varepsilon}, \quad (6.3)$$

com $\boldsymbol{\varepsilon}$ representando o tensor de Levi-Civita no S^7 .

A conjectura de Maldacena (1998) afirma que a SCFT $\mathcal{N} = 8$ tridimensional é dual à teoria M sobre o espaço-tempo de fundo (6.1). Além disso, a condição de quantização sobre o fluxo \mathbf{F}_4 vincula o parâmetro R_S ao número de branas N :

$$R_S^9 \pi^5 = N^{3/2} \kappa_{11}^2 \sqrt{2}, \quad (6.4)$$

onde κ_{11} é a intensidade do acoplamento gravitacional na supergravidade de (10+1) dimensões (KLEBANOV, 1997). Isso indica que tomar o limite de N grande é o mesmo que tomar o limite de proximidade do horizonte $\tilde{r} \ll R_S$. Nesse regime, a função $H(\tilde{r})$ tende à R_S^6/\tilde{r}^6 e o elemento de linha (6.1) se reduz à

$$ds^2 = \frac{4r^2}{R_S^2} [-\mathfrak{h}(r)dt^2 + dx^2 + dy^2] + \frac{R_S^2}{4r^2} \frac{dr^2}{\mathfrak{h}(r)} + R_S^2 d\Omega_7^2, \quad (6.5)$$

onde na expressão acima foi introduzida uma nova coordenada radial $r = \tilde{r}^2/2R_S$ e agora $\mathfrak{h}(r) = 1 - r_0^3/r^3$. Com as identificações $x = \varphi$, $y = z$ e $R_S = 2R$, a parte AdS da métrica (6.5), descrita pelas coordenadas $\{t, x, y, r\}$, torna-se igual à métrica (4.1), que representa um buraco negro plano assintoticamente anti-de Sitter.³

Apesar da teoria completa ser a supergravidade 11-dimensional sobre o $\text{AdS}_4 \times S^7$, a existência de uma heptaesfera permite que essa teoria seja consistentemente ‘truncada’ numa

²HOROWITZ E STROMINGER, 1991; ITZHAKI et al, 1998; HERZOG, 2002.

³Quando vistos dessa perspectiva, as soluções de buracos negros com simetria plana são algumas vezes chamadas simplesmente de ‘branas negras’.

teoria de Einstein-Maxwell sobre o AdS_4 .⁴ Via redução dimensional de Kaluza-Klein, o campo de Maxwell A_M origina-se como um subgrupo $U(1)$ do grupo de simetrias $SO(8)$ do espaço-tempo completo (6.5). Esse mecanismo também fornece a ação da teoria de Einstein-Maxwell com uma constante cosmológica negativa $\Lambda_C = -3/R^2$:

$$S = \frac{1}{2\kappa_4^2} \int d^4x \sqrt{-g} \left(\mathcal{R} + \frac{6}{R^2} - R^2 F_{MN} F^{MN} \right), \quad (6.6)$$

onde \mathcal{R} denota o escalar de curvatura de Ricci e F_{MN} o tensor campo eletromagnético. Assume-se que as constantes de acoplamento gravitacional em quatro e onze dimensões estejam relacionadas por meio do volume da esfera S^7 (HERZOG et al, 2007),

$$\frac{1}{2\kappa_4^2} = \frac{R_S^7 \text{Vol}(S^7)}{2\kappa_{11}^2}. \quad (6.7)$$

Considerando então que o volume da heptaesfera unitária é $\text{Vol}(S^7) = \pi^4/3$ e utilizando a normalização padrão (6.4) para κ_{11} , encontra-se

$$\frac{1}{2\kappa_4^2} = \frac{\sqrt{2}N^{3/2}}{24\pi R^2}. \quad (6.8)$$

Uma vez estabelecida a relação entre os buracos negros planos AdS e a CFT $\mathcal{N} = 8$ à temperatura finita, pode-se agora utilizar a prescrição de Son-Starinets (2002) para explorar a estrutura analítica das funções de Green retardadas nessa teoria de campos holográfica. Para tanto, será necessário investigar, sob uma nova perspectiva, a evolução de perturbações eletromagnéticas e gravitacionais no espaço-tempo de fundo (4.1).

6.2 Flutuações no campo eletromagnético

Segundo a correspondência AdS/CFT, o campo eletromagnético no interior do espaço-tempo anti-de Sitter acopla-se à corrente de cargas- R na teoria de campos da fronteira. Para encontrar as funções de correlação corrente-corrente na SCFT, precisam ser investigadas as flutuações do campo de calibre A_M , definido implicitamente por

$$F_{MN} = \partial_M A_N - \partial_N A_M. \quad (6.9)$$

As equações de movimento para A_M são assim obtidas da parte eletromagnética da ação (6.6).

⁴Mais detalhes podem ser encontrados, por exemplo, em DUFF, POPE E WARNER (1983), BERENSTEIN, HERZOG E KLEBANOV (2002) e HERZOG et al (2007).

Supondo que F_{MN} é pequeno o suficiente para não modificar a geometria do espaço-tempo de fundo, encontram-se as equações linearizadas de Maxwell

$$\partial_M (\sqrt{-g} g^{MA} g^{NB} F_{AB}) = 0, \quad (6.10)$$

onde g_{MN} representa as componentes da métrica (4.1), o lado AdS do espaço-tempo (6.5).

As simetrias do espaço-tempo de fundo tornam conveniente uma decomposição do campo de calibre nas suas componentes de Fourier,

$$A_M(t, \varphi, z, r) = \int \frac{d\omega dm dk}{(2\pi)^3} e^{-i\omega t + im\varphi + ikz} A_M(\omega, m, k, r). \quad (6.11)$$

Sem qualquer perda de generalidade, é possível escolher o trivetor de onda $\mathbf{p} = (-\omega, \mathbf{p})$, onde $\mathbf{p} = (m, k) = (0, q)$ com $q^2 = m^2 + k^2$. Essa escolha separa as perturbações em dois conjuntos ortogonais de acordo com as suas propriedades frente à troca $\varphi \rightarrow -\varphi$:

- Perturbações axiais (ímpares ou transversais): A_φ ;
- Perturbações polares (pares ou longitudinais): A_t, A_z, A_r .

A ortogonalidade desses dois conjuntos de perturbação permite que elas sejam tratadas de maneira independente. No estudo que segue também será utilizado o valor do determinante da métrica:

$$g_{MN} = \text{diag}(-f, r^2/R^2, r^2/R^2, f^{-1}) \implies \sqrt{-g} = r^2/R^2, \quad (6.12)$$

onde $f(r)$ é a função horizonte introduzida no capítulo 4, equação (4.2).

6.2.1 Equações para as perturbações axiais

A escolha de uma direção preferencial para o vetor de onda envolve uma rotação adequada do sistema de coordenadas no plano $\varphi - z$. Com esse vetor apontando na direção z , o setor axial das perturbações eletromagnéticas é governado pela componente transversal (φ) das equações de Maxwell:

$$f \frac{d^2}{dr^2} A_\varphi + \frac{df}{dr} \frac{d}{dr} A_\varphi + \left(\frac{\omega^2 r^2 - q^2 R^2 f}{f r^2} \right) A_\varphi = 0. \quad (6.13)$$

Além disso, a função A_φ fica diretamente proporcional à componente (φ) do campo elétrico: $E_\varphi = i\omega A_\varphi$. Isso mostra que A_φ é uma quantidade invariante por transformações de calibre e, portanto, uma boa candidata à variável mestre das perturbações axiais. Utilizando a coorde-

nada tartaruga r_* e fazendo $\Psi^{(-)}(r) = A_\varphi(r)$, Cardoso e Lemos (2001c) conseguiram colocar a equação (6.13) na forma de uma equação tipo Schrödinger,

$$\left(\frac{d^2}{dr_*^2} + \omega^2\right) \Psi^{(-)} = f \left(\frac{qR}{r}\right)^2 \Psi^{(-)}. \quad (6.14)$$

Alternativamente, para os estudos que serão realizados na seqüência, torna-se conveniente trocar a variável independente r por $u = r_0/r$ e, por uma questão de padronização, escrever a equação fundamental (6.14) em termos de E_φ :

$$E_\varphi'' + \frac{\mathfrak{h}'}{\mathfrak{h}} E_\varphi' + \frac{\mathfrak{w}^2 - \mathfrak{q}^2 \mathfrak{h}}{\mathfrak{h}^2} E_\varphi = 0. \quad (6.15)$$

Nessa equação, a linha denota derivada em relação à u , a freqüência e o número de onda normalizados são $\mathfrak{w} = 3\omega/4\pi T$ e $\mathfrak{q} = 3q/4\pi T$ e, ao invés da função horizonte f , utilizou-se a função

$$\mathfrak{h}(u) = 1 - u^3. \quad (6.16)$$

6.2.2 Equações para as perturbações polares

Ao investigar as perturbações eletromagnéticas polares, pode-se usar a invariância da teoria frente à transformação $A_M \rightarrow A_M + \partial_M \lambda$ para simplificar as equações de movimento. Uma das possibilidades é escolher o valor de λ de modo que $A_r = 0$. Nesse calibre radial, as componentes⁵ (r), (t) e (z) das equações de Maxwell (6.10) se reduzem a

$$\omega r^2 \frac{d}{dr} A_t + q R^2 f \frac{d}{dr} A_z = 0, \quad (6.17)$$

$$r^2 \frac{d^2}{dr^2} A_t + 2r \frac{d}{dr} A_t - \frac{R^2}{f} (q\omega A_z + q^2 A_t) = 0, \quad (6.18)$$

$$f \frac{d^2}{dr^2} A_z + \frac{df}{dr} \frac{d}{dr} A_z + \frac{1}{f} (\omega q A_t + \omega^2 A_z) = 0. \quad (6.19)$$

Essas equações, no entanto, não são todas independentes: quaisquer duas delas são suficientes para reproduzir a equação restante e determinar as variáveis A_t e A_z . Além disso, esse conjunto de equações é invariante frente às transformações de calibre residuais: $A_t \rightarrow A_t - i\omega\lambda$ e $A_z \rightarrow A_z + iq\lambda$, onde λ é independente de r .

Deste ponto em diante, poder-se-ia adotar tanto A_t quanto A_z como variável primária

⁵No calibre radial, as equações eletromagnéticas polares foram originalmente apresentadas por Herzog (2002). Esse autor, no entanto, utilizou a variável $u = r_0/r$ ao invés da coordenada r , e uma normalização da freqüência e do número de onda que difere por um fator dois em relação àquela definida neste trabalho.

e desacoplar as equações (6.17) à (6.19), encontrando uma única equação diferencial para uma dessas funções. Ocorre que o objetivo aqui é encontrar uma equação de onda que governe as perturbações eletromagnéticas polares, da qual todas as quantidades físicas, incluindo os modos quase-normais, serão obtidas. Nesse sentido, a adoção de A_t ou A_z seria artificial, já que essas quantidades são dependentes do calibre escolhido. Uma alternativa mais adequada é utilizar as componentes do campo elétrico, que são quantidades invariantes de calibre formadas por combinações de A_t e A_z . Nesse caso, a dúvida que surge é qual das componentes escolher, $E_r = dA_t/dr$ ou $E_z = i(qA_t + \omega A_z)$.

Motivados por trabalhos anteriores (RUFFINI, 1973) em buracos negros assintoticamente chatos, Cardoso e Lemos optaram pela componente radial E_r no estudo do campo eletromagnético em espaços-tempos Schwarzschild-AdS (CARDOSO E LEMOS, 2001b), bem como em espaços-tempos anti-de Sitter com simetria plana (CARDOSO E LEMOS, 2001c). Introduzindo a quantidade $\Psi^{(+)}(r) = r^2 E_r(r)$ e utilizando as equações (6.17) e (6.18), eles foram capazes de reduzir o problema a uma equação unidimensional tipo Schrödinger,

$$\left(\frac{d^2}{dr_*^2} + \omega^2\right) \Psi^{(+)} = f\left(\frac{qR}{r}\right)^2 \Psi^{(+)}, \quad (6.20)$$

que é idêntica à equação (6.14) das perturbações axiais. Uma consequência imediata desse resultado é que, com as mesmas condições de contorno, os espectros quase-normais axial e polar são iguais. O que precisa ser justificada é a escolha das condições de contorno, para ambas as perturbações, no caso de buracos negros anti-de Sitter.

De uma forma alternativa e análoga ao trabalho de Kovtun e Starinets (2005) em branas negras de cinco dimensões, adota-se aqui a componente E_z do campo elétrico como variável fundamental das perturbações polares. Em termos da frequência \mathfrak{w} , do número de onda \mathfrak{q} e da variável independente u , o desacoplamento das equações (6.17) e (6.18) para E_z conduz à seguinte equação:

$$E_z'' + \frac{\mathfrak{w}^2 \mathfrak{h}'}{\mathfrak{h}(\mathfrak{w}^2 - \mathfrak{q}^2 \mathfrak{h})} E_z' + \frac{(\mathfrak{w}^2 - \mathfrak{q}^2 \mathfrak{h})}{\mathfrak{h}^2} E_z = 0. \quad (6.21)$$

6.3 Flutuações no campo gravitacional

As perturbações gravitacionais de buracos negros assintoticamente anti-de Sitter acoplam-se ao tensor energia-momento na teoria de campos holográfica. Isso quer dizer que, na fronteira do espaço AdS, os valores assumidos pelas flutuações métricas atuam como fontes no cálculo de funções de Green do operador $\hat{T}^{\mu\nu}$. No caso de buracos negros com simetria

plana, as perturbações gravitacionais já foram objetos de estudo nos capítulos 4 e 5 desta tese. A revisão contida no capítulo 4 seguiu as idéias do trabalho de Cardoso e Lemos (2001c). Este se baseia em variações infinitesimais da métrica e na escolha do calibre coordenado de Chandrasekhar (1983). No capítulo 5, por outro lado, foi apresentado um estudo completamente novo (MIRANDA E ZANCHIN, 2006), que utiliza o formalismo de variações de curvatura de Teukolsky (1972). Obviamente, essas duas formulações não são independentes. Conforme mostrado na seção 5.2, elas estão interligadas por meio da teoria da transformação de Chandrasekhar (1983).

Por ser arbitrária, entretanto, a escolha de um calibre para as perturbações gravitacionais pode variar dependendo do problema em questão. Um calibre tradicional, muito difundido na literatura, é o de Regge-Wheeler (1957). Outra alternativa, especialmente relevante para o presente trabalho, é fixar o sistema de coordenadas de modo que $h_{rt} = h_{r\varphi} = h_{rz} = h_{rr} = 0$. Tendo como objetivo investigar a relação entre os QNM e as funções de correlação, utiliza-se abaixo esse calibre radial para estudar as flutuações gravitacionais de buracos negros anti-de Sitter planos.

6.3.1 Perturbações axiais no calibre radial

A exemplo do que foi feito no estudo do campo eletromagnético, toma-se aqui a transformada de Fourier das variações métricas nas coordenadas t , φ e z , e escolhe-se o trivetor de onda como sendo $p_\mu = (-\omega, 0, q)$. Com essa escolha, o setor axial (transversal) das perturbações gravitacionais fica caracterizado pelas quantidades

$$H_{t\varphi} = h_t{}^\varphi = g^{\varphi\varphi} h_{t\varphi} = (R^2/r^2) h_{t\varphi}, \quad (6.22)$$

$$H_{z\varphi} = h_z{}^\varphi = g^{\varphi\varphi} h_{z\varphi} = (R^2/r^2) h_{z\varphi}. \quad (6.23)$$

A linearização das componentes axiais das equações de Einstein (2.1) leva a um conjunto de três equações acopladas para $H_{t\varphi}$ e $H_{z\varphi}$ (HERZOG, 2002). Dentre esse conjunto, selecionam-se duas equações que são escritas abaixo em termos de u :

$$H'_{t\varphi} + \frac{\mathfrak{q}\mathfrak{h}}{\mathfrak{w}} H'_{z\varphi} = 0; \quad (6.24)$$

$$H''_{t\varphi} - \frac{2}{u} H'_{t\varphi} - \frac{\mathfrak{q}}{\mathfrak{h}} (\mathfrak{w} H_{z\varphi} + \mathfrak{q} H_{t\varphi}) = 0. \quad (6.25)$$

O critério para a escolha da variável mestre axial é a invariância por transformações infinitesimais das coordenadas, equação (2.3). Entre as diferentes combinações de $H_{t\varphi}$ e $H_{z\varphi}$

que são invariantes de calibre, opta-se neste trabalho por⁶

$$Z_1(u) = i(qH_{t\varphi} + \omega H_{z\varphi}). \quad (6.26)$$

Desacoplando as equações (6.24) e (6.25) para $Z_1(u)$, encontra-se a seguinte equação fundamental:

$$Z_1'' - \frac{2(\mathfrak{w}^2 - \mathfrak{q}^2\mathfrak{h})\mathfrak{h} - u\mathfrak{h}'\mathfrak{w}^2}{u\mathfrak{h}(\mathfrak{w}^2 - \mathfrak{q}^2\mathfrak{h})}Z_1' + \frac{\mathfrak{w}^2 - \mathfrak{q}^2\mathfrak{h}}{\mathfrak{h}^2}Z_1 = 0. \quad (6.27)$$

6.3.2 Perturbações polares no calibre radial

Na formulação das perturbações gravitacionais via calibre radial, o setor polar (longitudinal) é descrito pelas variações métricas h_{tt} , $h_{\varphi\varphi}$, h_{zz} e h_{tz} . Esses elementos podem ser usados para definir as quantidades

$$H_{tt} = \frac{1}{f}h_{tt}, \quad H_{\varphi\varphi} = (R^2/r^2)h_{\varphi\varphi}, \quad (6.28)$$

$$H_{zz} = (R^2/r^2)h_{zz}, \quad H_{tz} = (R^2/r^2)h_{tz}. \quad (6.29)$$

Ao linearizar as componentes polares das equações de Einstein (2.1), encontra-se agora um conjunto de sete equações acopladas para as quantidades listadas anteriormente. Desse conjunto, pode-se escolher quatro equações independentes, as quais sozinhas governam toda a evolução desse setor das perturbações. Para a seqüência do trabalho, as equações abaixo são as mais adequadas:

$$H'_{tz} = \frac{2u\mathfrak{w}\mathfrak{q}}{b(u)}(H_{\varphi\varphi} - H_{tt}) + \frac{ua(u)}{2\mathfrak{q}\mathfrak{h}b(u)}(\mathfrak{w}H_{\varphi\varphi} + \mathfrak{w}H_{zz} + 2\mathfrak{q}H_{tz}) - \frac{4\mathfrak{w}\mathfrak{h}}{\mathfrak{q}b(u)}H'_{tt}; \quad (6.30)$$

$$H'_{\varphi\varphi} = \frac{\mathfrak{w}ua(u)}{2\mathfrak{q}^2\mathfrak{h}^2b(u)}(\mathfrak{w}H_{\varphi\varphi} + \mathfrak{w}H_{zz} + 2\mathfrak{q}H_{tz}) - \frac{c(u)}{\mathfrak{q}^2b(u)}H'_{tt} + \frac{2u\mathfrak{w}^2}{\mathfrak{h}b(u)}H_{\varphi\varphi} + \frac{ua(u)}{2\mathfrak{h}b(u)}H_{tt}; \quad (6.31)$$

$$H'_{zz} = \frac{2u}{\mathfrak{h}b(u)}[\mathfrak{w}^2H_{\varphi\varphi} + \mathfrak{w}^2H_{zz} + \mathfrak{q}^2\mathfrak{h}(H_{tt} - H_{\varphi\varphi}) + 2\mathfrak{q}\mathfrak{w}H_{tz}] + \left(\frac{4\mathfrak{h}}{b(u)} + \frac{c(u)}{\mathfrak{q}^2b(u)}\right)H'_{tt} \\ - \frac{u}{2\mathfrak{h}b(u)}[4\mathfrak{w}^2H_{\varphi\varphi} + c(u)H_{tt}] - \frac{\mathfrak{w}uc(u)}{2\mathfrak{q}^2\mathfrak{h}^2b(u)}(\mathfrak{w}H_{\varphi\varphi} + \mathfrak{w}H_{zz} + 2\mathfrak{q}H_{tz}); \quad (6.32)$$

$$H''_{tt} = \frac{2\mathfrak{w}^2}{\mathfrak{h}b(u)}(H_{\varphi\varphi} + H_{zz}) + \frac{2\mathfrak{q}}{\mathfrak{h}b(u)}(2\mathfrak{w}H_{tz} + \mathfrak{q}\mathfrak{h}H_{tt}) + \frac{(2+u^3)}{2u\mathfrak{h}b(u)}[\mathfrak{q}^2H_{\varphi\varphi} + (8+u^3)H'_{tt}]. \quad (6.33)$$

⁶Novamente, a inspiração vem do estudo de branas negras pentadimensionais, conforme encontrado em KOVTUN E STARINETS (2005).

Nas expressões anteriores, foram introduzidas as quantidades

$$a(u) = 3u^4 - 12u - 4\mathfrak{w}^2, \quad b(u) = \mathfrak{h} + 3 \quad \text{e} \quad c(u) = 4\mathfrak{w}^2 - \mathfrak{q}^2 b(u). \quad (6.34)$$

Com a utilização das equações de movimento (6.30)-(6.33), pode-se mostrar que a combinação invariante de calibre

$$Z_2(u) = 4\omega q H_{tz} + 2\omega^2 H_{zz} + [q^2(3 - \mathfrak{h}) - 2\omega^2] H_{\varphi\varphi} + 2q^2 \mathfrak{h} H_{tt} \quad (6.35)$$

obedece à seguinte equação diferencial de segunda ordem:

$$Z_2'' - \frac{4\mathfrak{w}^2(2 + u^3) + \mathfrak{q}^2 d(u)}{u\mathfrak{h}c(u)} Z_2' + \frac{4\mathfrak{w}^4 + \mathfrak{q}^4 \mathfrak{h} b(u) - \mathfrak{q}^2 e(u)}{\mathfrak{h}^2 c(u)} Z_2 = 0, \quad (6.36)$$

onde $d(u) = 4u^3 - 5u^6 - 8$ e $e(u) = 9u^4 \mathfrak{h} + \mathfrak{w}^2(8 - 5u^3)$.

6.4 Funções de Green retardadas e os modos quase-normais

Um importante desafio no estudo dos modos de vibração de buracos negros diz respeito à escolha das condições de contorno. No caso de espaços-tempos assintoticamente Minkowski, existem condições de contorno ‘naturais’, a saber, onda plana entrando no horizonte de eventos e saindo no infinito espacial. Para buracos negros anti-de Sitter, entretanto, não existe nenhuma condição natural a ser imposta no infinito. Em geral, é possível optar por uma condição de Dirichlet, Neumann ou Robin. Além disso, para campos vetoriais e tensoriais, também surge uma ambigüidade na escolha de uma combinação invariante de calibre específica como variável fundamental das perturbações.

Para colocar o trabalho sobre uma base mais sólida, daqui até o final desta tese, adotar-se-á uma definição geral para os QNM, que segue a visão pragmática apresentada por Núñez e Starinets (2003, p. 2, em tradução livre):

Frequências quase-normais de uma perturbação num espaço assintoticamente AdS são definidas como as posições, no plano complexo das frequências, dos pólos das funções de correlação retardadas dos operadores duais àquela perturbação, calculados usando a prescrição AdS/CFT minkowskiana de (SON E STARINETS, 2002) e (HERZOG E SON, 2003).

De acordo com a definição acima, uma vez que já se tenham encontrado as equações de evolução para um determinado campo sobre o AdS, o próximo passo no cálculo dos QNM é relacionar as variáveis fundamentais dessa perturbação à função de Green retardada correspondente. É exatamente dessa relação que vai emergir a condição de contorno no infinito, a

saber, aquela que conduz às singularidades das funções de correlação de dois pontos na teoria de campos da fronteira.

6.4.1 Funções de correlação corrente-corrente

A conjectura de Maldacena (1998) mapeia quantidades encontradas na teoria gravitacional em quantidades da CFT holográfica. No limite de acoplamento forte e N grande, as informações sobre as funções de correlação térmicas da corrente- R estão codificadas nas soluções das equações diferenciais (6.15) e (6.21). O comportamento das componentes do campo elétrico E_j ($j = \varphi, z$) nas vizinhanças do horizonte ($u = 1$) é dado por $E_j = \mathfrak{h}^{\pm i\mathfrak{w}/3}$, onde o expoente negativo/positivo corresponde às ondas planas que entram/saem do buraco negro. Além disso, dependendo do sinal, as perturbações vão atuar como fontes de funções de Green retardadas ou avançadas na teoria de campos dual. Para o cálculo das funções de dois pontos retardadas, opta-se então pelo expoente negativo. Mostra-se necessário, também, investigar o comportamento do campo nas proximidades da fronteira, $u = 0$. Supondo que $E_j \sim u^\alpha$, encontram-se $\alpha = 0$ e $\alpha = 1$. Dessa forma, as soluções de (6.15) e (6.21) que satisfazem uma condição de onda entrante no horizonte apresentam os seguintes comportamentos em torno de $u = 0$:

$$E_\varphi = \mathcal{A}_{(\varphi)}(\mathfrak{w}, \mathfrak{q}) + \dots + \mathcal{B}_{(\varphi)}(\mathfrak{w}, \mathfrak{q})u + \dots; \quad (6.37)$$

$$E_z = \mathcal{A}_{(z)}(\mathfrak{w}, \mathfrak{q}) + \dots + \mathcal{B}_{(z)}(\mathfrak{w}, \mathfrak{q})u + \dots, \quad (6.38)$$

onde as reticências indicam potências em u maiores do que 1. As funções $\mathcal{A}_{(j)}(\mathfrak{w}, \mathfrak{q})$ e $\mathcal{B}_{(j)}(\mathfrak{w}, \mathfrak{q})$, que aparecem acima, são os coeficientes de conexão associados às equações diferenciais de E_φ e E_z .

A solução de buraco negro que está sendo aqui considerada é eletricamente neutra. Do ponto de vista termodinâmico, isso mostra que o plasma dual possui densidade de carga nula, sendo caracterizado apenas pela temperatura Hawking do buraco negro. Outra consequência dessa neutralidade é o formato da ação (6.6): a parte eletromagnética contém apenas termos quadráticos em A_j ou E_j . As derivadas funcionais desses termos vão dar origem às funções de Green de dois pontos na CFT holográfica. Antes disso, no entanto, considera-se uma decomposição de (6.6) do tipo $S = S_{HORIZONTE} + S_B$. Então, utilizando as equações de movimento (6.10), coloca-se a ação de Maxwell da fronteira na forma

$$S_B = \frac{\chi}{2} \lim_{u \rightarrow 0} \int \frac{d\omega dq}{(2\pi)^2} \left[\frac{\mathfrak{h}}{\omega^2 - q^2 \mathfrak{h}} E'_z(u, \mathbf{p}) E_z(u, -\mathbf{p}) + \frac{\mathfrak{h}}{\omega^2} E'_\varphi(u, \mathbf{p}) E_\varphi(u, -\mathbf{p}) \right], \quad (6.39)$$

onde

$$\chi = \frac{8\pi TR^2}{3\kappa_4^2} = \frac{(2N)^{3/2}T}{9} \quad (6.40)$$

é a susceptibilidade de carga do sistema, conforme mostrado por estudos da função resposta densidade-densidade, dentro da aproximação hidrodinâmica (HERZOG, 2002; HERZOG et al, 2007).

Para encontrar as funções de correlação retardadas, as derivadas do campo elétrico são escritas em termos dos valores assumidos pelo trivetor potencial na fronteira, $A_\mu^0(\mathbf{p}) = A_\mu(u \rightarrow 0, \mathbf{p})$. De acordo com as soluções assintóticas (6.37) e (6.38), têm-se

$$E'_z(u, \mathbf{p}) = i(qA_t^0 + \omega A_z^0) \frac{\mathcal{B}_{(z)}(\mathbf{w}, \mathbf{q})}{\mathcal{A}_{(z)}(\mathbf{w}, \mathbf{q})} + \dots, \quad E'_\varphi(u, \mathbf{p}) = i\omega A_\varphi^0 \frac{\mathcal{B}_{(\varphi)}(\mathbf{w}, \mathbf{q})}{\mathcal{A}_{(\varphi)}(\mathbf{w}, \mathbf{q})} + \dots, \quad (6.41)$$

onde as reticências indicam termos de mais altas ordens em u . Agora, substituindo as expressões acima na ação (6.39) e aplicando a prescrição minkowskiana de Son-Starinets (seção 3.4), segue que⁷

$$C_{tt} = \chi \frac{q^2}{(\omega^2 - q^2)} \frac{\mathcal{B}_{(z)}(\mathbf{w}, \mathbf{q})}{\mathcal{A}_{(z)}(\mathbf{w}, \mathbf{q})}, \quad C_{zz} = \chi \frac{\omega^2}{(\omega^2 - q^2)} \frac{\mathcal{B}_{(z)}(\mathbf{w}, \mathbf{q})}{\mathcal{A}_{(z)}(\mathbf{w}, \mathbf{q})}, \quad (6.42)$$

$$C_{tz} = -\chi \frac{\omega q}{(\omega^2 - q^2)} \frac{\mathcal{B}_{(z)}(\mathbf{w}, \mathbf{q})}{\mathcal{A}_{(z)}(\mathbf{w}, \mathbf{q})}, \quad C_{\varphi\varphi} = \chi \frac{\mathcal{B}_{(\varphi)}(\mathbf{w}, \mathbf{q})}{\mathcal{A}_{(\varphi)}(\mathbf{w}, \mathbf{q})}. \quad (6.43)$$

Além disso, conforme discutido no apêndice D, para uma teoria de campos tridimensional à temperatura finita, as funções de correlação corrente-corrente podem ser escritas como

$$C_{tt} = \frac{q^2}{\omega^2 - q^2} \Pi^L(\omega, q) \quad C_{zz} = \frac{\omega^2}{\omega^2 - q^2} \Pi^L(\omega, q), \quad (6.44)$$

$$C_{tz} = -\frac{\omega q}{\omega^2 - q^2} \Pi^L(\omega, q), \quad C_{\varphi\varphi} = \Pi^T(\omega, q). \quad (6.45)$$

Então, comparando essas expressões gerais com os resultados (6.42) e (6.43), encontram-se as auto-energias transversal $\Pi^T(\omega, q)$ e longitudinal $\Pi^L(\omega, q)$:

$$\Pi^T(\omega, q) = \chi \frac{\mathcal{B}_{(\varphi)}(\mathbf{w}, \mathbf{q})}{\mathcal{A}_{(\varphi)}(\mathbf{w}, \mathbf{q})}; \quad \Pi^L(\omega, q) = \chi \frac{\mathcal{B}_{(z)}(\mathbf{w}, \mathbf{q})}{\mathcal{A}_{(z)}(\mathbf{w}, \mathbf{q})}. \quad (6.46)$$

Sendo assim, as funções de dois pontos da corrente- R são completamente determinadas pela razão dos coeficientes de conexão das equações (6.15) e (6.21). Em particular, os pólos das funções de correlação térmicas são dados pelos zeros dos coeficientes $\mathcal{A}_{(\varphi)}(\mathbf{w}, \mathbf{q})$ e $\mathcal{A}_{(z)}(\mathbf{w}, \mathbf{q})$.

⁷Tal qual está expressa em (3.15), a receita minkowskiana produz funções de correlação com índices contravariantes (SON E STARINETS, 2006). Para baixar e levantar índices de quantidades definidas na fronteira, utiliza-se a métrica de Minkowski tridimensional, de modo que $C^{tz} = -C_{tz}$.

De acordo com Núñez e Starinets (2003), os pólos de $C_{\mu\nu}$ servem de definição para as frequências QN eletromagnéticas do buraco negro localizado no interior do espaço-tempo AdS. Essas frequências são então obtidas impondo condições de Dirichlet na fronteira, $u = 0$, sobre as componentes do campo elétrico, E_φ e E_z , que satisfazem a condição de onda entrante no horizonte. Sob essa perspectiva, o horizonte comporta-se como uma superfície perfeitamente absorvedora, enquanto a fronteira comporta-se como um condutor perfeito.

6.4.2 Funções de correlação do tensor energia-momento

No caso das perturbações gravitacionais, a correspondência AdS/CFT estabelece uma relação entre as soluções das equações (6.27) e (6.36) e o tensor energia-momento da CFT dual, permitindo assim a obtenção das funções de correlação correspondentes. Esse mapeamento depende da evolução do campo no interior do espaço-tempo AdS. Nas vizinhanças do horizonte, as variáveis mestres Z_1 e Z_2 possuem o mesmo comportamento que o campo elétrico: $Z_{1,2} \sim \mathfrak{h}^{\pm i\omega/3}$. Para o cálculo das funções de Green retardadas, opta-se então pelo expoente negativo. Na outra extremidade, a fronteira do espaço AdS, as flutuações gravitacionais são tais que

$$Z_1 = \mathcal{A}_{(1)}(\mathfrak{w}, \mathfrak{q}) + \dots + \mathcal{B}_{(1)}(\mathfrak{w}, \mathfrak{q})u^3 + \dots, \quad (6.47)$$

$$Z_2 = \mathcal{A}_{(2)}(\mathfrak{w}, \mathfrak{q}) + \dots + \mathcal{B}_{(2)}(\mathfrak{w}, \mathfrak{q})u^3 + \dots, \quad (6.48)$$

onde as reticências indicam potências em u maiores do que 3. As funções $\mathcal{A}_{(1)}(\mathfrak{w}, \mathfrak{q})$ e $\mathcal{B}_{(1)}(\mathfrak{w}, \mathfrak{q})$ são os coeficientes de conexão associados à equação diferencial (6.27), enquanto $\mathcal{A}_{(2)}(\mathfrak{w}, \mathfrak{q})$ e $\mathcal{B}_{(2)}(\mathfrak{w}, \mathfrak{q})$ representam os coeficientes de (6.36).

Para a continuação deste trabalho, na qual vai se lidar com os termos quadráticos na parte gravitacional da ação (6.6), torna-se conveniente separar a análise, como já é usual, nos setores axial e polar das perturbações.

(a) Setor axial

Tendo em vista que o objetivo deste estudo é o cálculo de funções de dois pontos, pode-se restringir a análise aos termos da ação gravitacional quadráticos nas variações métricas. Além disso, de acordo com a receita de Son-Starinets (2002),⁸ os únicos termos relevantes para a obtenção das funções de correlação retardadas são aqueles que envolvem o quadrado

⁸Ver também a revisão contida em POLICASTRO, SON E STARINETS (2002a).

das derivadas de $H_{\mu\nu}(u)$. No cálculo do escalar de curvatura de Ricci \mathcal{R} para a métrica perturbada, além do surgimento imediato de elementos na forma H'^2 , também aparecem termos do tipo $H''H$. Esses termos, após uma integração por partes, produzem elementos quadráticos nas derivadas primeiras dos $H_{\mu\nu}(u)$. Agrupando as diferentes contribuições, encontra-se a expressão

$$S^{(2)} = \frac{P}{2} \int du d^3x \frac{1}{u^2} \left[H_{t\varphi}'^2 - \mathfrak{h} H_{z\varphi}'^2 \right] + \dots, \quad (6.49)$$

onde a constante P é identificada com a pressão do plasma dual, sendo obtida da fórmula para a densidade de entropia

$$s = \frac{8\sqrt{2}\pi^2}{27} N^{3/2} T^2 \quad (6.50)$$

e da relação termodinâmica de Euler para uma CFT ($\epsilon = 2P$)

$$P = -\epsilon + Ts = -2P + Ts \quad \implies \quad P = 8\sqrt{2}\pi^2 N^{3/2} T^3 / 81, \quad (6.51)$$

onde ϵ é a densidade de energia do sistema (KLEBANOV E TSEYTLIN, 1996).

As relações entre $H'_{t\varphi}$ e $H'_{z\varphi}$ e a variável mestre $Z_1(u)$ podem ser obtidas das equações (6.24)-(6.26). Substituindo essas relações em (6.49) e considerando soluções da equação fundamental (6.27), encontra-se a seguinte expressão para a ação na fronteira:

$$S_B^{(2)} = \frac{P}{2} \lim_{u \rightarrow 0} \int \frac{d\omega dq}{(2\pi)^2} \frac{\mathfrak{h}}{u^2(\omega^2 - q^2\mathfrak{h})} Z_1'(u, \mathbf{p}) Z_1(u, -\mathbf{p}) + \text{termos de contato}, \quad (6.52)$$

onde os termos de contato não contém derivadas das flutuações gravitacionais. Quando incluídos no cálculo das funções de correlação, esses termos tornam-se proporcionais a derivadas de $\delta(x)$ após transformada de Fourier inversa. A remoção deles por meio da adição de contra-termos na ação de supergravidade é conhecida como renormalização holográfica (BIANCHI, FREEDMAN E SKENDERIS, 2002).

Para aplicar a receita de Son-Starinets (seção 3.4), utiliza-se a expansão assintótica (6.47), válida nas vizinhanças de $u = 0$, para escrever a derivada de $Z_1(u)$ em termos dos valores do campo na fronteira, $H_{\mu\nu}^0(\mathbf{p}) = H_{\mu\nu}(u \rightarrow 0, \mathbf{p})$. Substituindo a expressão resultante em (6.52) e utilizando a relação (3.15), adaptada para as perturbações gravitacionais, obtêm-se as funções de correlação retardadas do operador $\hat{T}^{\mu\nu}$:

$$G_{t\varphi, t\varphi} = -3P \frac{q^2}{\omega^2 - q^2} \frac{\mathcal{B}_{(1)}(\mathbf{w}, \mathbf{q})}{\mathcal{A}_{(1)}(\mathbf{w}, \mathbf{q})}; \quad (6.53)$$

$$G_{t\varphi, z\varphi} = 3P \frac{\omega q}{\omega^2 - q^2} \frac{\mathcal{B}_{(1)}(\mathbf{w}, \mathbf{q})}{\mathcal{A}_{(1)}(\mathbf{w}, \mathbf{q})}; \quad (6.54)$$

$$G_{z\varphi,z\varphi} = -3P \frac{\omega^2}{\omega^2 - q^2} \frac{\mathcal{B}_{(1)}(\mathbf{w}, \mathbf{q})}{\mathcal{A}_{(1)}(\mathbf{w}, \mathbf{q})}. \quad (6.55)$$

A exemplo do que ocorre com as funções de correlação corrente-corrente, as funções de dois pontos térmicas associadas ao tensor energia-momento possuem expressões gerais, válidas para qualquer teoria de campos tridimensional invariante por mudanças na escala (ver apêndice D). Para as componentes axiais, têm-se

$$G_{t\varphi,t\varphi} = -\frac{q^2}{2\mathbf{p}^2} G_1(\omega, q), \quad G_{t\varphi,z\varphi} = \frac{\omega q}{2\mathbf{p}^2} G_1(\omega, q), \quad G_{z\varphi,z\varphi} = -\frac{\omega^2}{2\mathbf{p}^2} G_1(\omega, q), \quad (6.56)$$

onde $\mathbf{p}^2 = -\omega^2 + q^2$ é a norma ao quadrado do trivetor de onda \mathbf{p} . Então, comparando essas expressões gerais com os resultados (6.53)-(6.55), encontra-se a função

$$G_1(\omega, q) = -6P \frac{\mathcal{B}_{(1)}(\mathbf{w}, \mathbf{q})}{\mathcal{A}_{(1)}(\mathbf{w}, \mathbf{q})}. \quad (6.57)$$

Observa-se, portanto, que a imposição de uma condição de Dirichlet na fronteira sobre a variável mestre Z_1 ,

$$Z_1(0) = \mathcal{A}_{(1)}(\mathbf{w}, \mathbf{q}) = 0, \quad (6.58)$$

conduz diretamente aos pólos das funções de correlação $G_{t\varphi,t\varphi}$, $G_{t\varphi,z\varphi}$ e $G_{z\varphi,z\varphi}$. E, como consequência disso, ela produz também o espectro de frequências QN associado aos modos de perturbação axiais dos buracos negros planos.

(b) Setor polar

O procedimento realizado para o setor polar das perturbações é muito semelhante. Parte-se de uma expressão para a ação gravitacional na fronteira, que depende apenas dos termos quadráticos nas variações métricas polares (HERZOG, 2003):

$$S_B^{(2)} = \frac{P}{2} \lim_{u \rightarrow 0} \int d^3x \left[\frac{1}{4} (2H_{tt}^2 - 8H_{ty}^2 + H_{tt}H_{\varphi\varphi} + H_{tt}H_{zz}) - \frac{1}{4} (H_{\varphi\varphi} - H_{zz})^2 - \frac{\mathfrak{h}}{2u^2} (H_{tz}^2 + H_{\varphi\varphi}H_{zz} - H_{tt}H_{\varphi\varphi} - H_{tt}H_{zz})' \right]. \quad (6.59)$$

Utiliza-se, então, a definição (6.35) para $Z_2(u)$ e as equações de movimento (6.30)-(6.33) para colocar a ação (6.59) na forma

$$S_B^{(2)} = \frac{P}{2} \lim_{u \rightarrow 0} \int \frac{d\omega dq}{(2\pi)^2} \frac{\mathfrak{h}}{u^2 [4\mathbf{w}^2 - q^2(4 - u^3)]^2} Z_2'(u, \mathbf{p}) Z_2(u, -\mathbf{p}) + S_{CT}^{(2)}, \quad (6.60)$$

onde o termo de contato $S_{CT}^{(2)}$ não contém derivadas das flutuações métricas.

Novamente, para o cálculo das funções de correlação, a derivada da variável mestre é escrita em termos dos valores do campo na fronteira,

$$Z_2(0) = 4\omega q H_{tz}^0 + 2\omega^2 H_{zz}^0 + 2(q^2 - \omega^2) H_{\varphi\varphi}^0 + 2q^2 H_{tt}^0, \quad (6.61)$$

com o uso da expansão assintótica (6.48). Após substituir esse resultado na ação (6.60), toma-se as derivadas funcionais apropriadas⁹ com respeito aos valores dos campos H_{tt}^0 , H_{tz}^0 , H_{zz}^0 e $H_{\varphi\varphi}^0$. No caso das perturbações gravitacionais polares, entretanto, a aplicação da receita de Son-Starinets (3.15) não é direta. É preciso levar em conta de que forma as perturbações métricas h^ν_μ acoplam-se ao tensor energia-momento na fronteira. Esse acoplamento é dado por¹⁰

$$-\frac{1}{2} \int dt d^2x h^\nu_\mu T^\mu_\nu = -\frac{1}{2} \int dt d^2x [H_{tt}^0 T^{tt} + H_{\varphi\varphi}^0 T^{\varphi\varphi} + H_{zz}^0 T^{zz} + 2H_{tz}^0 T^{tz}]. \quad (6.62)$$

Com isso, as funções de correlação polares contravariantes são identificadas com as funções \mathcal{F} 's, definidas para um campo escalar na seção 3.4, por meio das seguintes relações:

$$G^{tt,tt}(\mathbf{p}) = 8\mathcal{F}_{tt,tt}(u, \mathbf{p})\Big|_{u=0}; \quad G^{tt,\varphi\varphi}(\mathbf{p}) = 8\mathcal{F}_{tt,\varphi\varphi}(u, \mathbf{p})\Big|_{u=0}; \quad (6.63)$$

$$G^{tt,zz}(\mathbf{p}) = 8\mathcal{F}_{tt,zz}(u, \mathbf{p})\Big|_{u=0}; \quad G^{tt,tz}(\mathbf{p}) = 4\mathcal{F}_{tt,tz}(u, \mathbf{p})\Big|_{u=0}; \quad (6.64)$$

$$G^{\varphi\varphi,\varphi\varphi}(\mathbf{p}) = 8\mathcal{F}_{\varphi\varphi,\varphi\varphi}(u, \mathbf{p})\Big|_{u=0}; \quad G^{\varphi\varphi,zz}(\mathbf{p}) = 8\mathcal{F}_{\varphi\varphi,zz}(u, \mathbf{p})\Big|_{u=0}; \quad (6.65)$$

$$G^{\varphi\varphi,tz}(\mathbf{p}) = 4\mathcal{F}_{\varphi\varphi,tz}(u, \mathbf{p})\Big|_{u=0}; \quad G^{zz,zz}(\mathbf{p}) = 8\mathcal{F}_{zz,zz}(u, \mathbf{p})\Big|_{u=0}; \quad (6.66)$$

$$G^{zz,tz}(\mathbf{p}) = 4\mathcal{F}_{zz,tz}(u, \mathbf{p})\Big|_{u=0}; \quad G^{tz,tz}(\mathbf{p}) = 2\mathcal{F}_{tz,tz}(u, \mathbf{p})\Big|_{u=0}. \quad (6.67)$$

Os valores assumidos pelas $\mathcal{F}_{\mu\nu,\alpha\beta}$ são lidos diretamente da ação (6.60) com a substituição de Z'_2 e Z_2 pelos valores dos campos na fronteira. Por fim, baixando os índices de $G^{\mu\nu,\alpha\beta}$ com a métrica de Minkowski $\eta_{\mu\nu}$, encontram-se as funções de correlação com índices covariantes,

$$G_{\mu\nu,\alpha\beta} = Q_{\mu\nu,\alpha\beta} G_2(\omega, q), \quad (6.68)$$

onde a função escalar $G_2(\omega, k)$ é dada por

$$G_2(\omega, q) = -6P \frac{\mathcal{B}_{(2)}(\mathbf{w}, \mathbf{q})}{\mathcal{A}_{(2)}(\mathbf{w}, \mathbf{q})} + \text{termos de contato}, \quad (6.69)$$

⁹Derivadas funcionais no sentido definido pela prescrição de Son-Starinets (2002).

¹⁰LIU E TSEYTLIN, 1998; POLICASTRO, SON E STARINETS, 2002b.

e as componentes do tensor $Q_{\mu\nu,\alpha\beta}$ são apresentadas no apêndice D. O resultado anterior mostra, definitivamente, que a imposição da condição de Dirichlet sobre a variável Z_2 leva aos pólos da função $G_2(\omega, q)$ e, por definição, às frequências dos modos de vibração gravitacionais polares.

6.5 O limite hidrodinâmico

De uma forma bastante geral, espera-se que qualquer sistema formado por muitos elementos interagentes apresente, num certo limite, um comportamento descrito pela tradicional mecânica dos fluidos. Embora não exista nenhuma demonstração formal para esse resultado, a intuição física desenvolvida no estudo de diversos sistemas macroscópicos sugere que, no regime de grandes distâncias e baixas frequências em comparação com uma certa escala microscópica, a evolução temporal dos constituintes de toda e qualquer teoria interagente à temperatura finita seja dada pelas leis da hidrodinâmica. Tal comportamento hidrodinâmico aparece, por exemplo, na descrição quântica das vibrações de uma rede cristalina. A quantização desse sistema produz um conjunto de excitações coletivas denominadas de fônons. O comportamento das relações de dispersão dos fônons depende essencialmente da razão do comprimento de onda λ da flutuação pela distância a entre os sítios da rede. No limite em que $\lambda \gg a$, a energia dos chamados fônons acústicos varia linearmente com o momento linear, tendo a velocidade do som no meio como constante de proporcionalidade. Fisicamente, esse resultado já era esperado, tendo em vista que, nesse limite, as ondas não “enxergam” a discretização da rede, e o sistema comporta-se conforme previsto pela mecânica dos meios contínuos.

Algo semelhante acontece com um plasma descrito por uma teoria interagente à temperatura finita T . A escala de comprimento é agora dada pelo livre caminho médio das partículas do sistema, ou então pelo tempo médio entre colisões sucessivas, que é inversamente proporcional à temperatura do plasma. Para flutuações com um período típico muito menor do que $1/T$, o que significa que $\mathfrak{w} = 3\omega/4\pi T \gg 1$ e $\mathfrak{q} = 3q/4\pi T \gg 1$, as partículas permanecem praticamente livres dentro de um ciclo de oscilação, e o sistema pode ser descrito por uma física essencialmente sem colisões, com relações de dispersão dadas aproximadamente por $\omega = q$. Por outro lado, quando o período das oscilações é muito maior do que $1/T$, o que ocorre para $\mathfrak{w} = 3\omega/4\pi T \ll 1$ e $\mathfrak{q} = 3q/4\pi T \ll 1$, as partículas sofrem um grande número de colisões durante um ciclo de oscilação, levando o sistema a um estado de equilíbrio termodinâmico cujas flutuações são bem descritas pelas equações da hidrodinâmica.

6.5.1 Perturbações eletromagnéticas

No limite hidrodinâmico, espera-se que pelo menos um dos modos quase-normais eletromagnéticos apresente o comportamento típico de um modo de difusão (para mais detalhes, ver apêndice E). Para $\mathfrak{w}, \mathfrak{q} \ll 1$, procuram-se soluções das equações de perturbação eletromagnéticas (6.15) e (6.21) na forma de uma série de potências em \mathfrak{w} e \mathfrak{q} , sob a hipótese de que $\mathfrak{w} \sim \mathfrak{q}$. Entretanto, ao invés de expandir a relação de dispersão $\mathfrak{w}(\mathfrak{q})$ na solução de Frobenius das equações de onda, conforme realizado no capítulo 5, expandem-se aqui as próprias variáveis fundamentais E_φ e E_z em torno de $\mathfrak{w} = \mathfrak{q} = 0$.

Ao impor as condições de contorno, é conveniente já ter separado o termo que domina o comportamento dos campos nas proximidades do horizonte. Seguindo a definição de modos quase-normais, trocam-se as componentes do campo elétrico por $F_j = \mathfrak{h}^{i\mathfrak{w}/3} E_j$ (para $j = \varphi, z$), de modo que $F_j(u)|_{u=1} = \text{constante}$ corresponde a uma onda plana entrante no horizonte. Em termos dessas novas variáveis, as equações de perturbação transformam-se em

$$F_j'' + \frac{u^2}{\mathfrak{h}} (2i\mathfrak{w} - 3a_j) F_j' + \frac{1}{\mathfrak{h}^2} [i\mathfrak{w}(2u + u^4 - 3a_j u^4) + \mathfrak{w}^2(1 - u^4) - \mathfrak{q}^2 \mathfrak{h}] F_j = 0, \quad (6.70)$$

onde $a_\varphi = 1$ e $a_z = \mathfrak{w}^2/(\mathfrak{w}^2 - \mathfrak{q}^2 \mathfrak{h})$. Após as mudanças de escala $\mathfrak{w} \rightarrow \lambda \mathfrak{w}$ e $\mathfrak{q} \rightarrow \lambda \mathfrak{q}$ para $\lambda \ll 1$, supõem-se que as soluções das equações (6.70) podem ser colocadas na forma

$$F_j(u) = F_j^0(u) + \lambda F_j^1(u) + \lambda^2 F_j^2(u) + \dots \quad (6.71)$$

Além de solucionar as equações (6.70), as séries de potência acima também precisam satisfazer a condição de contorno de onda entrante no horizonte. De acordo com a relação entre E_j e F_j , o campo elétrico vai com $\mathfrak{h}^{-i\mathfrak{w}/3}$ conforme F_j tende a uma constante no horizonte ou, em termos dos coeficientes de (6.71),

$$F_j^0(1) = \text{constante}, \quad F_j^1(1) = F_j^2(1) = \dots = 0. \quad (6.72)$$

Resolvendo as equações (6.70), ordem a ordem, e impondo as condições de contorno (6.72) sobre as possíveis soluções, encontram-se as expansões do campo elétrico:

$$E_\varphi = C_\varphi \mathfrak{h}^{-i\mathfrak{w}/3} \left[1 - i\mathfrak{w} \frac{\sqrt{3}}{3} \left(\frac{\pi}{3} - \arctan \frac{1+2u}{\sqrt{3}} \right) + \frac{i\mathfrak{w}}{2} \ln \frac{1+u+u^2}{3} + \mathcal{O}(\mathfrak{w}^2) \right]; \quad (6.73)$$

$$E_z = C_z \mathfrak{h}^{-i\mathfrak{w}/3} \left[1 + \frac{i\mathfrak{q}^2}{\mathfrak{w}}(1-u) - i\mathfrak{w} \frac{\sqrt{3}}{3} \left(\frac{\pi}{3} - \arctan \frac{1+2u}{\sqrt{3}} \right) + \frac{i\mathfrak{w}}{2} \ln \frac{1+u+u^2}{3} + \mathcal{O}(\mathfrak{w}^2) \right], \quad (6.74)$$

onde C_φ e C_z são constantes de normalização arbitrárias. Ao impor as condições de Dirichlet na fronteira ($u = 0$) sobre (6.73) e (6.74), observa-se que não existem soluções para $E_\varphi(0) = 0$ compatíveis com a hipótese $\mathfrak{w}, \mathfrak{q} \ll 1$. Do ponto de vista hidrodinâmico, esse resultado já era esperado, visto que não existe difusão de carga na direção transversal ao vetor de onda \mathbf{p} . Por outro lado, a equação $E_z(0) = 0$ conduz à¹¹

$$\mathfrak{w} = -i\mathfrak{q}^2 \quad \implies \quad \omega = -\frac{3i}{4\pi T} k^2, \quad (6.75)$$

de onde se pode ler o coeficiente de difusão $D = 3/4\pi T$.

Uma vez encontrada a relação de dispersão para o modo eletromagnético de difusão, a validade do procedimento anterior poderia ser questionada, já que o resultado final mostrou que $\mathfrak{w} \sim \mathfrak{q}^2$, enquanto que a solução (6.74) foi obtida sob a hipótese de que $\mathfrak{w} \sim \mathfrak{q}$. Uma das maneiras de se conferir esse resultado é introduzir um novo parâmetro $\boldsymbol{\mu} = \mathfrak{w}/\mathfrak{q} \sim \mathfrak{q}$, e resolver a equação (6.70) perturbativamente em $\boldsymbol{\mu}, \mathfrak{q} \ll 1$. Fazendo isso, encontra-se novamente a relação de dispersão $\mathfrak{w} = -i\mathfrak{q}^2$.

6.5.2 Perturbações gravitacionais

No caso das flutuações do tensor energia-momento na teoria de campos dual, a hidrodinâmica prevê a existência de um modo de cisalhamento no setor transversal (axial) e de um modo de onda sonora no setor longitudinal (polar). Para verificar o aparecimento desses modos no espectro QN gravitacional dos buracos negros AdS, investiga-se aqui o regime de \mathfrak{w} e \mathfrak{q} pequenos das equações (6.27) e (6.36).

Com o objetivo de separar, num primeiro momento, o termo dominante no horizonte de eventos, realizam-se as seguintes mudanças de variáveis:

$$H_j(u) = \mathfrak{h}^{i\mathfrak{w}/3} Z_j(u), \quad j = 1, 2. \quad (6.76)$$

Num procedimento semelhante àquele das perturbações eletromagnéticas, expandem-se H_1 e H_2 em séries de potências de \mathfrak{w} e \mathfrak{q} . Essas séries precisam ser boas aproximações para as soluções de (6.27) e (6.36) no limite hidrodinâmico e, além disso, satisfazer a condição de

¹¹Esse resultado foi originalmente encontrado por Herzog (2002, 2003) com base no cálculo (direto) do limite hidrodinâmico das funções de correlação. A comparação com os resultados por ele obtidos serve como um teste para o estudo realizado na seção 6.4.

contorno no horizonte, a saber, $H_j(u)|_{u=1} = \text{constante}$. Até primeira ordem em \mathfrak{w} e \mathfrak{q} , as seguintes expansões satisfazem essas exigências:

$$Z_1 = C_1 \mathfrak{h}^{-i\mathfrak{w}/3} \left[1 + i \frac{\mathfrak{q}^2 \mathfrak{h}}{3\mathfrak{w}} + \mathcal{O}(\mathfrak{w}^2) \right]; \quad (6.77)$$

$$Z_2 = C_2 \mathfrak{h}^{-i\mathfrak{w}/3} \left[2 - u^6 - 4 \frac{\mathfrak{w}^2}{\mathfrak{q}^2} - \frac{4i\mathfrak{w}\mathfrak{h}}{3} + \mathcal{O}(\mathfrak{w}^2) \right], \quad (6.78)$$

onde C_1 e C_2 são constantes de normalização arbitrárias.

A utilização da condição de contorno de Dirichlet na fronteira, $Z_1(0) = 0$, conduz então a um modo quase-normal axial identificado com o modo de cisalhamento,

$$\omega = -iDq^2, \quad (6.79)$$

enquanto que a imposição dessa mesma condição sobre $Z_2(u)$ produz a relação de dispersão característica de um modo de onda sonora,

$$\omega = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}q - \frac{iDq^2}{2}, \quad (6.80)$$

onde a constante de difusão D é dada por

$$D = \frac{\eta}{\epsilon + P} = \frac{1}{4\pi T}. \quad (6.81)$$

Entre outras coisas, a combinação desse resultado com a relação de Euler (6.51) fornece a razão entre o coeficiente de cisalhamento e a densidade de entropia do plasma dual:

$$\frac{\eta}{s} = \frac{\eta T}{\epsilon + P} = \frac{1}{4\pi} \quad \implies \quad \frac{\eta}{s} = \frac{\hbar}{4\pi k_B}, \quad (6.82)$$

sendo que, na última expressão, foram utilizadas unidades de medida convencionais. A razão η/s apresenta o mesmo valor para todas as teorias de campos à temperatura finita com uma descrição gravitacional dual (KOVTON, SON E STARINETS, 2005). Além disso, especula-se que essa razão represente um limite inferior – o limite KSS – para todas as substâncias encontradas na natureza.

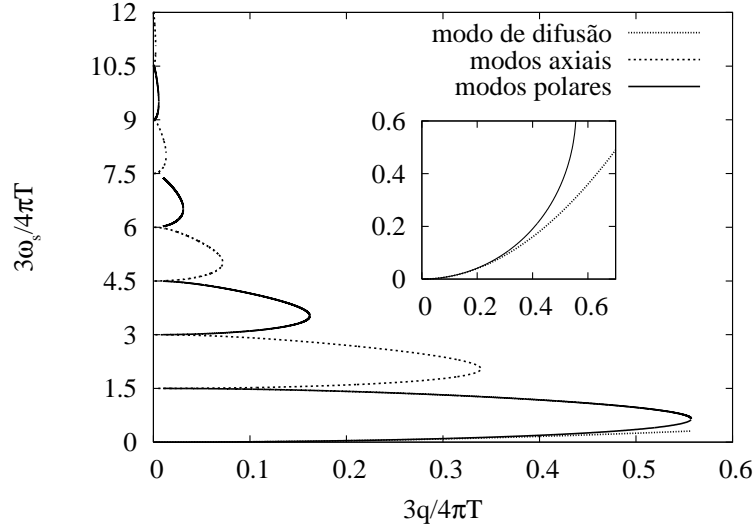


Figura 6.1: As frequências QN eletromagnéticas $\omega_s = 3\omega_s/4\pi T$ em função do vetor de onda $\mathbf{q} = 3q/4\pi T$. As linhas contínuas representam os modos polares e as tracejadas, os modos axiais. A linha pontilhada é o modo de difusão $\omega_s = \mathbf{q}^2$ que tende à frequência quase-normal de $n_s = 0$ no limite hidrodinâmico $\omega, \mathbf{q} \ll 1$.

6.6 Relações de dispersão

O limite hidrodinâmico das equações de perturbação compreende um intervalo muito particular no espaço de valores possíveis de ω e \mathbf{q} . Além da relevância física, esse regime representa um dos poucos exemplos em que se pode encontrar resultados analíticos para as frequências dos modos quase-normais. Em todos os demais casos, é necessário recorrer ao uso de métodos numéricos para encontrar as relações de dispersão $\omega \times \mathbf{q}$. Novamente, utiliza-se aqui o método de Horowitz-Hubeny (seção 5.4) para a obtenção do espectro QN dos buracos negros AdS planos.

6.6.1 Modos quase-normais eletromagnéticos

(a) Modos puramente amortecidos

As perturbações eletromagnéticas de buracos negros anti-de Sitter apresentam um conjunto de modos quase-normais puramente amortecidos. Esses modos, em geral, não podem ser caracterizados como pólos hidrodinâmicos, já que a maior parte deles tende a uma frequência não-nula conforme o número de onda \mathbf{q} vai a zero. Daqui para diante, as frequências puramente imaginárias, tanto axiais quanto polares, serão rotuladas por um número quântico especial, n_s , que assume apenas valores inteiros, começando em $n_s = 0$ para o modo hidrodinâmico de difusão. Já que o setor axial (transversal) das perturbações não apresenta esse tipo de modo, o primeiro QNM axial puramente amortecido é rotulado por $n_s = 1$.

Polar			Axial		
n_s	\mathbf{q}_{lim}	\mathbf{w}_{lim}	n_s	\mathbf{q}_{lim}	\mathbf{w}_{lim}
(0,1)	0,557	entre 0,625 e 0,649	(1,2)	0,339	entre 2,020 e 2,076
(2,3)	0,162	entre 3,524 e 3,527	(3,4)	0,0718	entre 4,991 e 5,045
(4,5)	0,0310	entre 6,511 e 6,515	(5,6)	0,0131	entre 7,944 e 8,081
(6,7)	0,00556	entre 9,504 e 9,514	(7,8)	0,00232	entre 10,959 e 11,059

Tabela 6.1: Valores aproximados para as frequências $\mathbf{w} = -i\mathbf{w}_{\text{lim}}$ e os números de onda \mathbf{q}_{lim} limítrofes das relações de dispersão dos modos eletromagnéticos puramente amortecidos.

Uma característica particular dos modos eletromagnéticos de buracos negros AdS quadridimensionais foi descoberta recentemente por Herzog et al (2007): as funções de correlação corrente-corrente são analíticas em $q = 0$, ou seja, não existem frequências QN para um número de onda nulo. Essa propriedade está intimamente relacionada à dualidade campo elétrico \leftrightarrow campo magnético das equações de Maxwell para o vácuo. De fato, devido a essa propriedade, os coeficientes de conexão associados às equações (6.15) e (6.21) estão relacionados por

$$\frac{\mathcal{B}_{(z)}}{\mathcal{A}_{(z)}} = (\mathbf{w}^2 - \mathbf{q}^2) \frac{\mathcal{A}_{(\varphi)}}{\mathcal{B}_{(\varphi)}}. \quad (6.83)$$

O produto das auto-energias transversal e longitudinal então se reduz a

$$\Pi^T(\omega, q)\Pi^L(\omega, q) = \chi^2(\mathbf{w}^2 - \mathbf{q}^2). \quad (6.84)$$

Além disso, a invariância por rotações para um momento nulo implica em $\Pi^T(\omega, 0) = \Pi^L(\omega, 0)$ (ver apêndice D), de modo que as auto-energias em $q = 0$,

$$\Pi^T(\omega, 0) = \Pi^L(\omega, 0) = \pm\chi\mathbf{w}, \quad (6.85)$$

são funções perfeitamente bem comportadas para quaisquer valores de \mathbf{w} .

De acordo com os resultados numéricos, no limite em que $\mathbf{q} \rightarrow 0$, as frequências QN puramente imaginárias $\omega = -i\omega_s$ são dadas aproximadamente por $\omega_s = \omega_{n_s}$, onde $\omega_{n_s} = 2\pi T n_s$ são as frequências de Matsubara de um sistema bosônico. Conforme pode ser observado na figura 6.1, o pólo hidrodinâmico $n_s = 0$ se destaca entre os demais modos puramente amortecidos somente por apresentar uma frequência nula para $\mathbf{q} = 0$. Na outra extremidade do espectro, os QNM apresentam valores de saturação \mathbf{q}_{lim} para o vetor de onda, a partir dos quais alguns modos puramente imaginários deixam de existir. Exatamente nos pontos de saturação, as relações de dispersão associadas a diferentes valores de n_s se encontram. Os modos polares se agrupam de dois em dois na forma $n_s = \{(0, 1), (2, 3), (4, 5), \dots\}$, enquanto

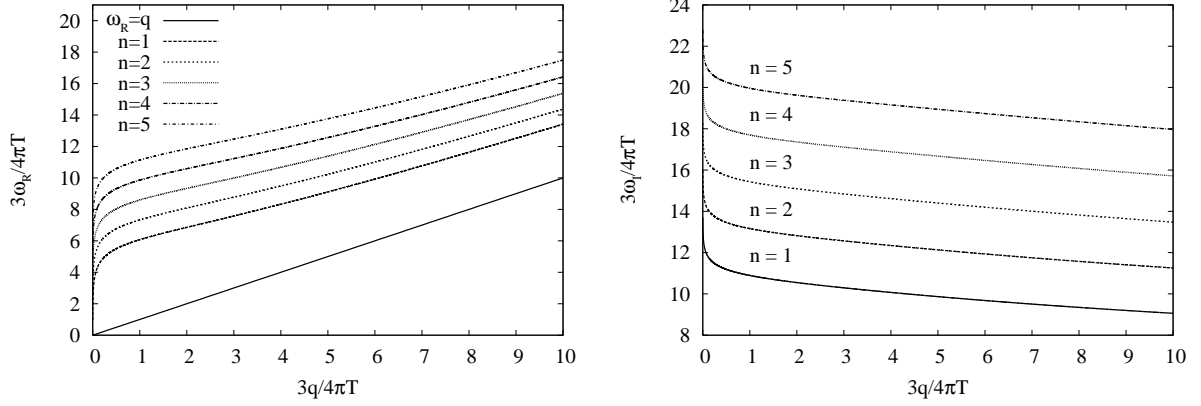


Figura 6.2: As cinco primeiras freqüências dos modos eletromagnéticos axiais comuns, $\mathfrak{w} = (3\omega_R/4\pi T) - i(3\omega_I/4\pi T)$, em função do número de onda normalizado $q = 3q/4\pi T$. O número quântico principal n ordena os modos quase-normais comuns, começando pelas freqüências com as menores partes imaginárias.

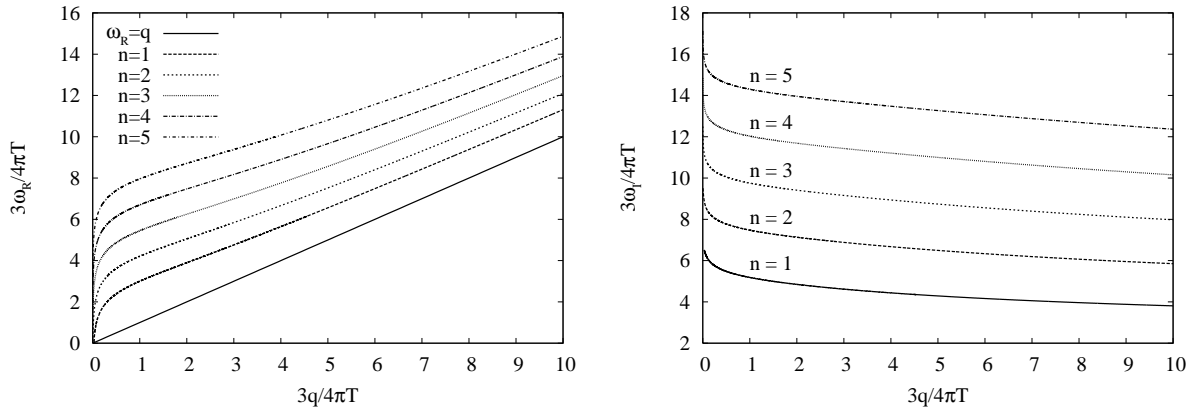


Figura 6.3: Gráficos das primeiras freqüências dos modos eletromagnéticos polares comuns.

que os axiais formam os pares $n_s = \{(1, 2), (3, 4), (5, 6), \dots\}$. Os valores limítrofes para \mathfrak{w}_s e q são apresentados na tabela 6.1 para $n_s = 0, 1, 2, \dots, 8$.

(b) Modos quase-normais comuns

As perturbações eletromagnéticas dos buracos negros anti-de Sitter também apresentam uma família de modos quase-normais comuns (regulares) com partes reais não-nulas. Os resultados encontrados para as freqüências ($\mathfrak{w} = \mathfrak{w}_R - i\mathfrak{w}_I$) dos primeiros cinco modos, rotulados por n , são apresentados nas figuras 6.2 e 6.3 para as flutuações axiais e polares, respectivamente.

Os resultados numéricos aqui obtidos mostram que os buracos negros AdS não são bons ‘osciladores’. Uma das formas de se mensurar a qualidade de um oscilador é por meio do fator $Q = \omega_R/2\omega_I$. De uma forma geral, os modos eletromagnéticos para q pequeno apresentam $Q \ll 1$. Por exemplo, no caso do modo polar fundamental com $q = 0,0311$, tem-se $Q = 0,00347$, o que caracteriza um sistema fortemente amortecido. Somente para

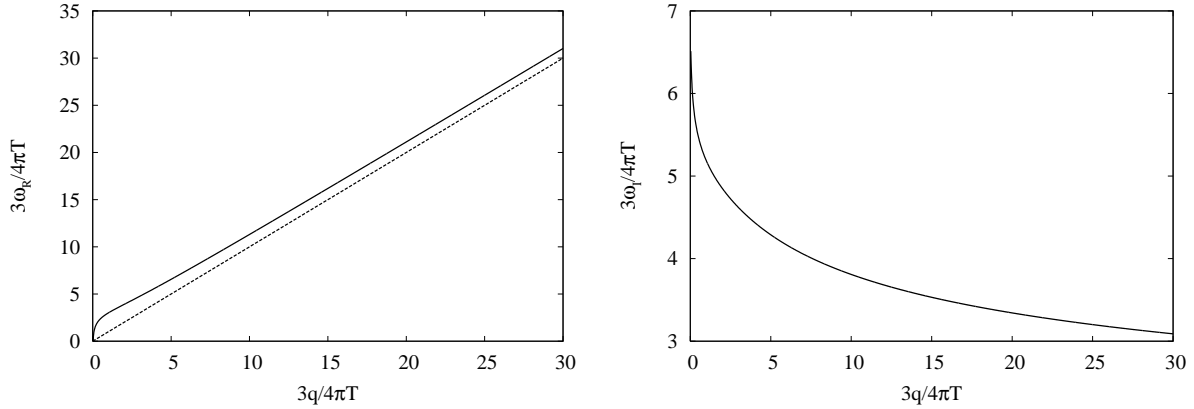


Figura 6.4: Gráficos do primeiro QNM eletromagnético polar comum, mostrando o comportamento da frequência para grandes valores de q . As linhas contínuas representam os valores calculados numericamente, enquanto que a linha tracejada é $\omega_R = q$.

números de onda maiores é que o fator Q se aproxima da unidade. Ainda em relação ao primeiro modo polar comum, $Q = 1$ para um número de onda normalizado ao redor de 6,7 e o fator de qualidade chega a 1,8 para $q \approx 12$.

Do ponto de vista da teoria de campos holográfica, pode-se tentar interpretar a parte real das frequências QN como a energia de excitações de quase-partículas no plasma dual, definido na fronteira do espaço AdS. Esse tipo de interpretação, no entanto, faz sentido apenas para modos com fator de qualidade $Q \gg 1$. Realmente, segundo o princípio de incerteza de Heisenberg, a incerteza nas energias das quase-partículas é da ordem de ω_I . Sendo assim, um fator Q menor ou da ordem da unidade implica numa incerteza ΔE tão grande quanto a própria energia $E = \omega_R$, inviabilizando qualquer significado físico imediato que se possa atribuir às excitações de quase-partículas.

No regime em que $Q \gg 1$ e a interpretação de quase-partícula torna-se viável, os gráficos em 6.4 mostram que as frequências dos modos eletromagnéticos comuns tendem à relação de dispersão que é característica de uma partícula de massa zero: $\omega_R = q$. Além disso, o tempo de decaimento da perturbação diverge no limite em que $q \rightarrow \infty$. Todos esses resultados são compatíveis com o que se espera dos pólos das funções de correlação de uma teoria de campos à $T = 0$.

6.6.2 Modos quase-normais gravitacionais

(a) Modos hidrodinâmicos

No caso dos modos de perturbação gravitacionais, torna-se conveniente dividir a análise dos resultados de acordo com o comportamento das relações de dispersão no limite em que

$q \rightarrow 0$. Num primeiro momento, serão analisados aqueles modos, ditos hidrodinâmicos, que apresentam uma frequência nula para $q = 0$. Todos os demais QNM serão chamados de modos não-hidrodinâmicos. Além disso, a fim de comparar os resultados desta seção com aqueles do capítulo 5, as funções $\Psi^{(\pm)}$ e $Z^{(\pm)}$, que satisfazem equações tipo Schrödinger, serão associadas aos nomes de Regge-Wheeler, enquanto as quantidades $E_{\varphi,z}$ e $Z_{1,2}$, que conduzem diretamente aos pólos das funções de correlação na super-Yang-Mills, serão chamadas de variáveis de Kovtun-Starinets.

Em princípio, poder-se-ia imaginar que a imposição de condições de Dirichlet, na fronteira do AdS, sobre as variáveis de Kovtun-Starinets produz um conjunto totalmente novo de frequências QN, quando comparado com aquele proveniente das variáveis de Regge-Wheeler. Existem alguns indícios, no entanto, de que esse possa não ser exatamente o caso, especialmente para as flutuações transversais. Em primeiro lugar, as quantidades eletromagnéticas $\Psi^{(-)}$ e E_{φ} diferem apenas por uma constante de proporcionalidade, e as semelhanças nas definições das variáveis axiais eletromagnéticas e gravitacionais de Kovtun-Starinets sugerem que o mesmo possa ocorrer entre $Z^{(-)}$ e Z_1 . Outra evidência vem do estudo do limite hidrodinâmico (grandes buracos negros) das perturbações gravitacionais axiais, conforme realizado nas seções 5.6 e 6.5. Embora os métodos empregados sejam diferentes, em ambos os casos os espectros quase-normais apresentam o comportamento típico de um modo de cisalhamento com o mesmo coeficiente de difusão $D = 1/4\pi T$, quer seja com o uso de $Z^{(-)}$, quer seja com a utilização de Z_1 .

Para obter as relações entre as variáveis de Regge-Wheeler e de Kovtun-Starinets, o procedimento padrão consiste em encontrar as equações de transformação que levam as quantidades do formalismo de calibre de Chandrasekhar naquelas do formalismo de calibre radial. Opta-se aqui, no entanto, por um procedimento alternativo, que utiliza a relação entre os Z 's e as quantidades da formulação completamente invariante de calibre de Kodama, Ishibashi e Seto (2000):

$$Z_1 = \frac{1}{r} F_t = \frac{f}{r^2} \partial_r [r Z^{(-)}], \quad (6.86)$$

onde F_t é uma das quantidades que aparecem na formulação citada acima. Na fronteira do espaço-tempo anti-de Sitter, as variáveis mestres axiais Z_1 e $Z^{(-)}$ diferem apenas por um fator multiplicativo,

$$Z_1(u)|_{u=0} = \frac{1}{R^2} Z^{(-)}(u)|_{u=0}, \quad (6.87)$$

demonstrando assim que o espectro quase-normal axial obtido a partir de $Z^{(-)}$ é o mesmo que seria obtido com Z_1 .

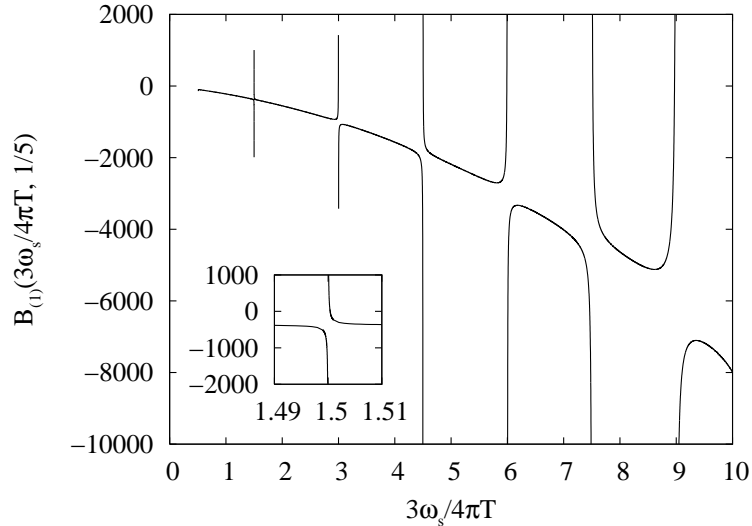


Figura 6.5: Gráfico com os valores de $\mathcal{B}_{(1)}(\mathfrak{w}, \mathfrak{q})$ para diferentes frequências puramente imaginárias $\mathfrak{w} = -i\mathfrak{w}_s$ e número de onda normalizado $\mathfrak{q} = 1/5$.

Os resultados para o QNM hidrodinâmico transversal, que se reduz ao modo de cisalhamento (6.79) no infravermelho, já foram apresentados na seção 5.5 (figura 5.3). Além disso, argumentos puramente gravitacionais foram utilizados na seção 5.7 para demonstrar que a curva $\mathfrak{w}_s \times \mathfrak{q}$ apresenta uma ‘descontinuidade’ no ponto $P = (\sqrt{3}, 3/2)$. Para ser mais explícito, o programa de busca de raízes não encontra QNM puramente amortecido para qualquer múltiplo inteiro da frequência fundamental de Matsubara: $\omega_s = 2\pi T, 4\pi T, \dots$. Uma relação de dispersão ‘descontínua’, no entanto, não é o que seria esperado do ponto de vista da teoria de campos dual. Uma possível solução para esse problema surge da identificação das frequências QN com os pólos das funções de correlação do tensor energia-momento. Ainda que o coeficiente de conexão $\mathcal{A}_{(1)}(\mathfrak{w}, \mathfrak{q})$ seja diferente de zero no ponto P, as funções de Green transversais podem apresentar divergências provenientes das singularidades de $\mathcal{B}_{(1)}(\mathfrak{w}, \mathfrak{q}) = Z_1'''(0)/6$. Por exemplo, para $\mathfrak{q} = 1/5$, os resultados numéricos apresentados na figura 6.5 mostram que o coeficiente $\mathcal{B}_{(1)}(\mathfrak{w}, \mathfrak{q})$ diverge para as frequências $\mathfrak{w}_s = 3/2, 3, 9/2, 6, \dots$. Ao aplicar o mesmo procedimento para $\mathfrak{q} = \sqrt{3}$, problemas de convergência impedem que se calcule $\mathcal{B}_{(1)}(\mathfrak{w}, \sqrt{3})$ para valores de \mathfrak{w}_s menores do que 2, 6. Com isso, a análise numérica não permite que se chegue a uma conclusão sobre a existência de um QNM nos pontos em que a relação de dispersão hidrodinâmica cruza as frequências de Matsubara $\omega_s = 2\pi T n_s$.

Ao passar das perturbações axiais para as polares, encontra-se uma situação completamente distinta. O limite hidrodinâmico de $Z_2(u)$ mostra a existência de um modo de onda sonora que não está presente no espectro quase-normal obtido da variável $Z^{(+)}$. Na figura 6.6 são apresentadas as relação de dispersão para o QNM hidrodinâmico longitudinal. A parte real da frequência mostra claramente a passagem do limite hidrodinâmico $\omega_R = q/\sqrt{2}$ para

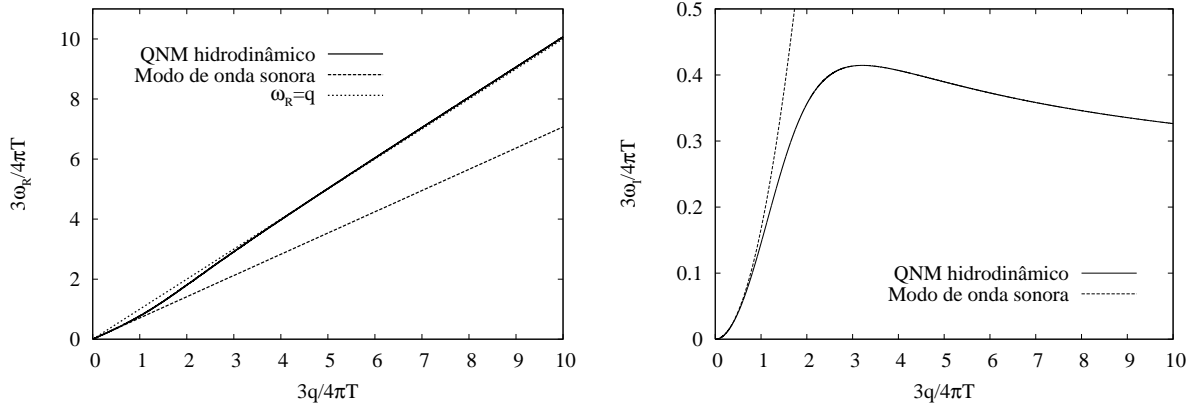


Figura 6.6: As partes real e imaginária da relação de dispersão $\omega(\mathbf{q})$ do modo hidrodinâmico longitudinal (linhas contínuas). As curvas tracejadas correspondem às frequências do modo de onda sonora (6.80), enquanto a curva pontilhada no gráfico da esquerda representa a relação energia-momento ultrarrelativística $\omega_R = q$.

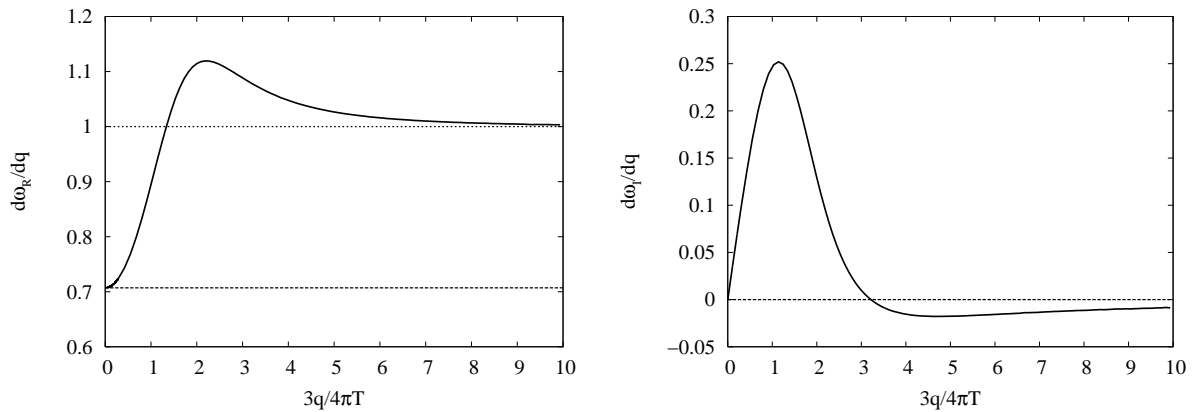


Figura 6.7: A velocidade de grupo $c_s = d\omega_R/dq$ e a derivada $d\omega_I/dq$ em função do número de onda normalizado q . No gráfico da esquerda, a linha tracejada representa a velocidade do som $1/\sqrt{2}$ para uma CFT 2+1 dimensional e a linha pontilhada, a velocidade da luz.

um regime caracterizado pela ausência de ‘colisões’ no plasma dual, $\omega_R = q$. Entre esses dois extremos, a velocidade de grupo das ondas, definida por $c_s = d\omega_R/dq$, assume valores superiores inclusive à velocidade da luz. Os gráficos da figura (6.7) mostram que $c_s > 1$ para todos os números de onda maiores do que $q \approx 1,336$ e o tempo de decaimento da perturbação alcança um mínimo (ω_I é máximo) para valores de q entre 3,213 e 3,214. Observe, no entanto, que c_s ultrapassa a velocidade da luz em regiões que estão fora do regime hidrodinâmico, de modo que essa velocidade de grupo superluminal não pode ser interpretada como a velocidade do som no meio.

(b) Modos não-hidrodinâmicos

Convencionou-se chamar aqui de modos não-hidrodinâmicos a todos aqueles QNM que apresentam uma abertura (*gap*) na relação de dispersão quando o momento linear é nulo.

q	Kovtun-Starinets		Regge-Wheeler	
	ω_R	ω_I	ω_R	ω_I
0,004	1.84942	2.66385	1,84945	2,66384
0,04	1,84964	2,66379	1,85027	2,66248
0,4	1,87207	2,65770	1,92488	2,52658
1	2,00603	2,62917	2,03016	1,92213
2	2,60256	2,56803	2,30526	1,55218
5	5,57791	2,25854	5,25618	1,27974
10	10,5703	1,94304	10,2839	1.07342

Tabela 6.2: Os resultados encontrados para as frequências QN dos modos gravitacionais polares. À esquerda, estão os valores obtidos com a utilização da variável mestre de Kovtun-Starinets Z_2 , enquanto à direita, estão aqueles obtidos com a variável de Regge-Wheeler $Z^{(+)}$, já apresentados no capítulo 5.

Existe de fato uma infinidade desses modos para qualquer valor de q . No caso das flutuações axiais, em que o espectro associado à Z_1 é o mesmo de $Z^{(-)}$, o objetivo desta seção é apenas completar os dados já contidos no capítulo 5, contemplando também as frequências QN dos modos $n = 2, 3, 4, 5$. Tais resultados são mostrados na figura 6.8. As relações de dispersão para diferentes valores de n apresentam basicamente o mesmo comportamento que foi apresentado na figura 5.1: existe um “róton” mínimo (local) para valores intermediários de q , e a curva $\omega_R \times q$ tende à relação energia-momento ultrarelativística $\omega_R = q$ no limite de $q \rightarrow \infty$.

Por outro lado, as flutuações longitudinais (ou polares) apresentam espectros QN distintos, conforme são impostas as mesmas condições de contorno sobre Z_2 ou $Z^{(+)}$. Os resultados para as frequências QN dos modos de perturbação gravitacional polar, com base em Z_2 , são apresentadas na figura 6.9. Observe que agora a parte real ω_R é uma função monotonicamente crescente de q , não apresentando os máximos e mínimos locais contidos nas relações de dispersão do espectro de $Z^{(+)}$ (ver figura 5.2). Uma comparação mais detalhada entre os valores obtidos com as variáveis de Regge-Wheeler (resultados do capítulo anterior) e de Kovtun-Starinets (resultados desta seção) é mostrada na tabela 6.2. Não é difícil de perceber que os dados são praticamente idênticos para pequenos valores de q e que eles voltam a se aproximar no limite de q grande. As diferenças mais acentuadas encontram-se no regime em que o número de onda q é da mesma ordem de grandeza da temperatura Hawking do buraco negro. Além disso, as partes reais das frequências são relativamente próximas se comparadas com as diferenças nos tempos de decaimento das perturbações ($\tau = 1/\omega_I$).

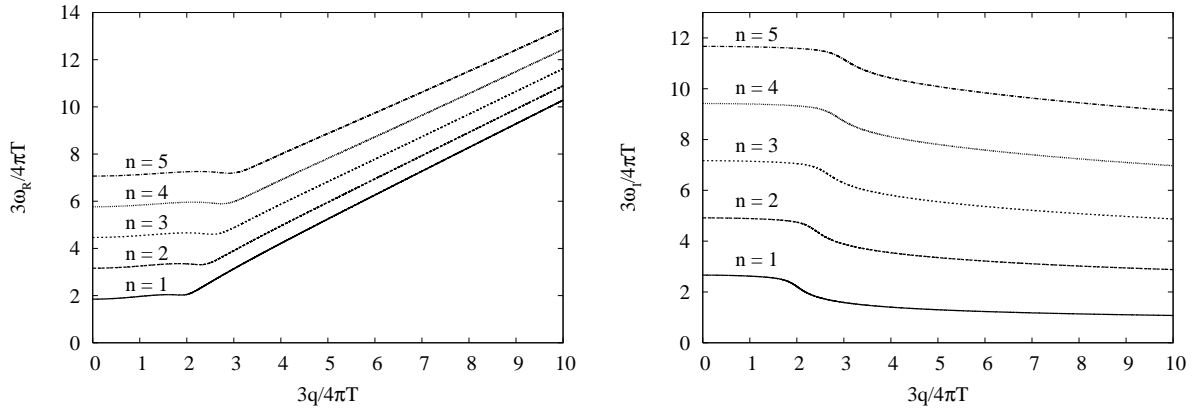


Figura 6.8: As cinco primeiras freqüências dos modos gravitacionais axiais não-hidrodinâmicos, $\omega = (3\omega_R/4\pi T) - i(3\omega_I/4\pi T)$, em função do número de onda normalizado $q = 3q/4\pi T$. O número quântico principal n ordena os modos quase-normais não-hidrodinâmicos, começando pelas freqüências com as menores partes imaginárias.

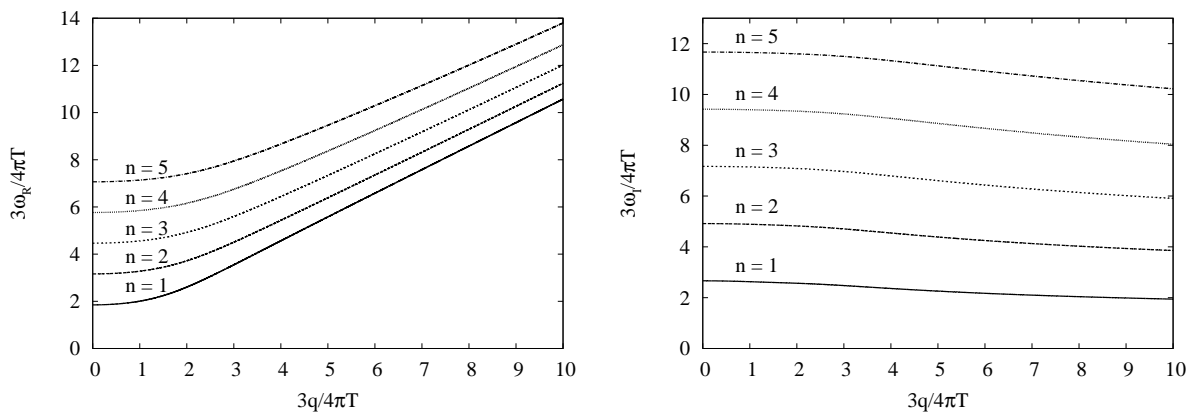


Figura 6.9: Gráficos das primeiras freqüências dos QNM polares não-hidrodinâmicos.

7 Considerações finais

Investigou-se ao longo deste trabalho o comportamento das perturbações gravitacionais e eletromagnéticas de buracos negros plano-simétricos assintoticamente anti-de Sitter. Para as flutuações do campo gravitacional, descobriu-se que os modos de perturbação com número de onda nulo possuem as seguintes características: (i) o modo axial produz uma geometria estacionária, que representa uma versão de rotação lenta da solução de buraco negro de Lemos (1995) e (ii) a perturbação polar conduz a uma mudança no parâmetro de massa e à produção de ondas gravitacionais. Se, por um lado, o resultado para o setor axial é análogo àquele de uma perturbação dipolar ímpar de um buraco negro esférico (ZERILLI, 1970b); por outro lado, o modo polar com número de onda nulo apresenta um comportamento totalmente inesperado. Uma perturbação desse tipo conduz a uma pequena mudança no parâmetro de massa, a exemplo do que acontece com uma perturbação tipo-monopolo num buraco negro de Schwarzschild. No entanto, ao invés de resultar numa geometria estática, o espaço-tempo perturbado é dinâmico, ocorrendo a propagação de ondas gravitacionais cilíndricas. A razão para essa diferença é que uma perturbação independente dos ângulos θ e φ de um buraco negro esférico não altera a simetria do espaço-tempo de fundo e, conseqüentemente, pelo teorema de Birkhoff, a geometria resultante é necessariamente estática. Aqui, uma perturbação independente de φ e z conduz, em geral, a um espaço-tempo com simetria cilíndrica, no sentido que o grupo completo de isometrias espaço-temporais possui apenas dois vetores de Killing tipo-espaço, ∂_φ e ∂_z . E, conforme é bem conhecido desde a solução de radiação de Einstein-Rosen, um sistema dinâmico com simetria cilíndrica é responsável pela emissão de ondas gravitacionais.

Os resultados obtidos nesta tese também têm implicações para o estudo do colapso gravitacional de matéria que seria responsável pela formação de um buraco negro AdS com simetria plana. Ao analisar esse problema, Lemos (1998, 1999) argumentou que o colapso de uma configuração plano-simétrica de massa se daria sempre com a emissão de radiação. Consistente com essa observação, ele descreveu a geometria no exterior de uma ‘estrela plana’ por meio de uma métrica de Vaidya modificada e ‘casou’ essa solução, na superfície da estrela, com uma métrica tipo Friedmann-Robertson-Walker para o interior. Ocorre que, segundo a análise aqui apresentada, uma perturbação que mantém a simetria plana do espaço-tempo de fundo não leva à produção de ondas gravitacionais. Esse resultado mostra-se consistente também com a existência de uma versão plano-simétrica do teorema de Birkhoff (BRONNIKOV

E KOVALCHUK, 1980; MIRANDA, 2003). Sendo assim, para investigar os diferentes aspectos do colapso de matéria com simetria plana, pode-se fazer uso da métrica (4.1) para representar a solução no exterior desse sistema. Tal observação é particularmente importante para estudos futuros em espaços-tempos plano-simétricos com n dimensões.

Para o estudo das flutuações com um vetor de onda arbitrário, foram utilizados diferentes formalismos de perturbação, bem como diferentes escolhas de variáveis mestres. Enquanto que as variáveis de Regge-Wheeler mostram-se convenientes por satisfazer equações de onda simples, similares às da mecânica quântica, mostrou-se no capítulo 6 desta tese que as variáveis de Kovtun-Starinets conduzem diretamente aos pólos das funções de correlação na teoria de campos dual. No caso específico das perturbações gravitacionais, as equações de onda axiais e polares também foram obtidas com um procedimento baseado no formalismo de Teukolsky (1972) e na teoria da transformação de Chandrasekhar (1983). Esses métodos permitiram que se tratasse em pé de igualdade as duas coordenadas espaciais φ e z , bem como forneceram as frequências algebricamente especiais associadas às ondas gravitacionais radiadas pelos buracos negros.

Em relação à teoria da transformação de Chandrasekhar, observa-se que o conjunto de transformações duais, que levam as variações da curvatura de Weyl $Y_{\pm 2}$ nas variáveis mestres $Z^{(\pm)}$, representa um conjunto particular no universo de transformações possíveis. Tais transformações duais são caracterizadas não apenas por apresentar uma relação simples entre os potenciais axial e polar, $V^{(\pm)}(r) = \pm 6M(df/dr_*) + 36M^2f^2 + q^4R^4f$, mas também por conduzir a um conjunto de equações tipo Schrödinger em que os potenciais efetivos são independentes da frequência. Embora não tenha sido verificado neste trabalho, certamente existem transformações que mapeiam as quantidades $Y_{\pm 2}$ do formalismo de Teukolsky nas variáveis de Kovtun-Starinets Z_1 e Z_2 . Possivelmente, essas transformações possam levar a novas interpretações e resultados analiticamente simples, como as frequências especiais $\omega = \pm i\omega_a$, que seriam importantes para um entendimento da estrutura analítica das funções de correlação na teoria supersimétrica de Yang-Mills.

Os modos quase-normais calculados neste trabalho são responsáveis pelo comportamento de ‘tempo tardio’ das perturbações gravitacionais e eletromagnéticas dos buracos negros AdS planos. Na teoria de campos holográfica, a parte imaginária do QNM fundamental fornece a escala de tempo τ para o sistema retornar ao equilíbrio térmico, $\text{Im}[\omega] = -1/\tau$. Com o método de Horowitz-Hubeny (2000), foram encontradas as frequências QN normalizadas \mathfrak{w} para diferentes valores do número de onda \mathfrak{q} .

Ao contrário do que fora obtido com o uso das variáveis de Regge-Wheeler $\Psi^{(\pm)}$, as

flutuações eletromagnéticas axiais (transversais) e polares (longitudinais), governadas pelas variáveis de Kovtun-Starinets, possuem diferentes espectros quase-normais. Tanto na direção transversal quanto longitudinal, existem famílias de modos puramente amortecidos que tendem às frequências de Matsubara de um sistema bosônico, $\omega = -2i\pi T n_s$, no limite de pequenos vetores de onda \mathbf{q} . Resultados semelhantes já haviam sido obtidos para branas negras pentadimensionais (NÚÑEZ E STARINETS, 2003), $\omega = 2\pi T n_s(1 - i)$, porém o significado físico dessa seqüência infinita de pólos ainda não está claro.

Além da analiticidade em $q = 0$ das funções de dois pontos da corrente- R , outra característica particular das flutuações eletromagnéticas em quatro dimensões espaço-temporais é a existência de um ‘corte’ no momento linear, denotado por \mathbf{q}_{lim} , que limita o aparecimento de frequências QN puramente imaginárias. Esse corte tem importantes implicações no tempo de termalização τ . Para valores de \mathbf{q} no intervalo $0 < \mathbf{q} < \mathbf{q}_{\text{lim}}$, o parâmetro τ é dado pelo inverso do modo puramente amortecido fundamental, $\tau = 1/\omega_s$. Para valores de \mathbf{q} acima de \mathbf{q}_{lim} , os tempos de decaimento são determinados pelos QNM fundamentais comuns, $\tau = 1/\omega_I$, diminuindo drasticamente o seu valor. Para se ter um idéia, no caso das flutuações polares, o valor de τ passa abruptamente de $0,38/T$ para $0,044/T$ conforme \mathbf{q} cruza $\mathbf{q}_{\text{lim}} \approx 0,557$.

Os resultados numéricos para as flutuações gravitacionais mostram que o tempo de termalização dos modos axiais é determinado pela parte imaginária da frequência QN hidrodinâmica, $\omega = -i\omega_s$, para vetores de onda no intervalo $0 < \mathbf{q} < 1,94$. Isso quer dizer que τ varia linearmente com a temperatura Hawking do buraco negro, pelo menos no regime de validade ($\mathbf{q} \ll 1$) do modo de cisalhamento: $\tau \approx 4\pi T/q^2$. A passagem para valores maiores de \mathbf{q} marca também a passagem (aqui contínua) para um regime em que o tempo de decaimento é determinado pelo QNM axial comum fundamental. Isso ocorre para um valor de $\mathbf{q} \approx 1,94$ e uma frequência $\omega_I \approx 2,3$. Além disso, nesse ponto, o tempo de termalização alcança o seu valor mínimo: $\tau \approx 1/10T$. Por outro lado, no caso das flutuações polares, o tempo de decaimento das perturbações é sempre determinado pelo QNM hidrodinâmico que se reduz ao modo de onda sonora (6.80) no limite de $\mathbf{w}, \mathbf{q} \ll 1$.

Em relação à estabilidade dos buracos negros AdS planos, mostrou-se analiticamente que, para um potencial positivo definido, a parte imaginária das frequências QN é sempre negativa, independentemente do modo de perturbação gravitacional considerado. Não é difícil de perceber também que o mesmo tipo de análise se aplica às perturbações eletromagnéticas. Por sua vez, os resultados numéricos mostram que todas as frequências QN têm uma parte imaginária negativa, incluindo os casos em que o potencial efetivo assume valores negativos fora do horizonte de eventos. Esses resultados, conjuntamente, implicam que os buracos ne-

gros plano-simétricos AdS são realmente estáveis frente a perturbações eletromagnéticas e gravitacionais.

Deste ponto em diante, cabe interpretar as relações de dispersão obtidas no presente trabalho em termos das propriedades de um plasma na super-Yang-Mills, bem como comparar essas relações com o comportamento de sistemas bem conhecidos, como um gás de elétrons. A temperatura Hawking do buraco negro AdS é identificada com a temperatura do plasma em equilíbrio térmico. No capítulo 5, investigou-se o comportamento das frequências QN no limite em que $\mathfrak{q} \ll 1$. Desse estudo ficou claro que as relações de dispersão dos modos não-hidrodinâmicos para $\mathfrak{q} \ll 1$ são semelhantes à relação energia-momento de uma partícula relativística: $4\mathfrak{w}^2 = -c_0(c_0 + 2c_1\mathfrak{q}^2)$. A parte real de \mathfrak{w} é idêntica ao modo coletivo RPA, também conhecido como plasmon, que aparece no estudo de um gás de elétrons interagentes. A frequência do plasma \mathfrak{w}_p é dada pela parte imaginária do coeficiente c_0 : $\mathfrak{w}_p = \text{Im}[c_0]/2$. A diferença aqui é o surgimento de um fator de amortecimento, responsável pelo decaimento das perturbações. Já que $\text{Re}[c_0] \sim \text{Im}[c_0]$, não é possível interpretar esses modos como quase-partículas, visto que a incerteza na energia, $\Delta E \sim \omega_I$, é tão grande quanto a própria energia das excitações, $E = \omega_R$.

No caso específico das flutuações longitudinais de $\hat{T}^{\mu\nu}$, torna-se conveniente explorar ainda mais a analogia com um sistema de partículas interagentes. Poder-se-ia dizer, nesse sentido, que a relação de dispersão do pólo hidrodinâmico mostra a passagem do som termodinâmico (ou primeiro som), no regime em que $\mathfrak{w} \ll 1$, para um modo que Landau chamou de som zero, no extremo oposto $\mathfrak{w} \gg 1$. O som zero é composto por quase-partículas, que surgem num regime em que o período das flutuações é muito menor do que o tempo médio $1/T$ entre colisões sucessivas. Nesse regime, as colisões podem ser desprezadas e as quase-partículas praticamente não decaem. Esse quadro é consistente com o nosso resultado para a parte imaginária das frequências quase-normais: $\tau = 1/\omega_I \rightarrow \infty$ conforme $\mathfrak{q} \rightarrow \infty$. Por outro lado, o som termodinâmico exige equilíbrio local, de modo que as frequências precisam ser muito menores do que a temperatura, para que as colisões dominem e os modos de perturbação decaiam.

O papel da velocidade de Fermi k_F/m no caso de um gás de elétrons é exercido na SYM pela velocidade da luz $c = 1$. Em geral, a velocidade do som zero é um pouco maior do que k_F/m , o que lembra o comportamento mostrado na figura 6.7, onde a velocidade de grupo $c_s > 1$ para todo $\mathfrak{q} > 1$, 336. Essa propagação superluminal, que à primeira vista parece violar o princípio de causalidade, já foi observada em outros sistemas descritos por teorias de campos relativísticos. Por exemplo, ao estudar o efeito Casimir em eletrodinâmica quânti-

ca, Scharnhorst (1990) demonstrou que, quando as flutuações de vácuo obedecem condições periódicas de contorno, as correções em dois laços do tensor de polarização conduzem a uma propagação superluminal dos fótons. Embora essa questão ainda seja polêmica, argumenta-se que o movimento superluminal viola a causalidade somente se o espaço-tempo é invariante por transformações de Lorentz globais (SHORE, 2003). Já que as condições de contorno no efeito Casimir e a presença do plasma na SYM quebram a invariância de Lorentz, em princípio, a causalidade é preservada. Além disso, a velocidade de interesse para a propagação de sinais, e conseqüentemente para a definição dos cones de luz, não é a velocidade de grupo, e sim a velocidade da frente de onda v_{wf} , dada pelo limite de $\omega \rightarrow \infty$ da velocidade de fase $v_{ph} = \omega/q$. O primeiro gráfico de 6.7 mostra que v_{ph} tende à $c = 1$ no limite de altas frequências, e as oscilações no plasma da SYM preservam assim o princípio de causalidade.

A quebra da simetria de Lorentz, mencionada acima, devido à presença do plasma tem implicações no espaço-tempo AdS. A passagem para um referencial em movimento no plasma implica numa mudança na forma da métrica anti-de Sitter. Se a direção do *boost* for compacta, como $\varphi \rightarrow \varphi + 2\pi R$, então a transformação de Lorentz é globalmente ‘proibida’ na definição de Stachel (1982), de modo que se tem uma nova solução das equações de Einstein: os buracos negros em rotação de Lemos (1995). O estudo dos modos de vibração desses buracos negros, bem como da solução eletricamente carregada de Lemos e Zanchin (1996), representa uma extensão natural do trabalho apresentado nesta tese. Outra generalização consiste em investigar buracos negros plano-simétricos em n dimensões. Parte desse trabalho já se encontra na dissertação de Morgan (2007).

A Modos gravitacionais plano-simétricos AdS puros

Este apêndice discute, de forma breve, como encontrar os modos de perturbação gravitacional em espaços-tempos AdS puros com simetria plana. Os resultados obtidos aqui servem de comparação para os QNM gravitacionais no limite de pequenos buracos negros (ou baixas temperaturas), conforme apresentados na seção 5.5.

Para as perturbações gravitacionais, as equações de onda relevantes para esse caso são obtidas da equação (5.11), assumindo $M = 0$ em todos os lugares em que o parâmetro de massa aparece. Por exemplo, os potenciais $V^{(\pm)}$ reduzem-se a um mesmo valor constante, $V^{(\pm)} = q^2$. As equações resultantes são, então, dadas por

$$\frac{d^2 Z^{(\pm)}}{dr_*^2} + (\omega^2 - q^2) Z^{(\pm)} = 0. \quad (\text{A.1})$$

Em termos da coordenada radial $r = 1/r_*$, as soluções de (A.1) são da forma

$$Z^{(\pm)} = \begin{cases} a^{(\pm)} e^{i\sqrt{\omega^2 - q^2}/r} + b^{(\pm)} e^{-i\sqrt{\omega^2 - q^2}/r}, & \omega^2 \neq q^2, \\ c^{(\pm)} + \frac{d^{(\pm)}}{r}, & \omega^2 = q^2, \end{cases} \quad (\text{A.2})$$

onde $a^{(\pm)}$, $b^{(\pm)}$, $c^{(\pm)}$ e $d^{(\pm)}$ são constantes de integração.

No caso em que $\omega^2 \neq q^2$, a solução é analítica em todo o intervalo que é de interesse para comparação com os QNM de pequenos buracos negros: $0 < r < \infty$. Conseqüentemente, a única condição que ω precisa satisfazer é $\omega^2 > q^2$, a fim de evitar que as ondas cresçam exponencialmente no limite em que $r \rightarrow 0$. No entanto, surgem restrições adicionais a esses modos ao se impor as condições de contorno usuais para os QNM em espaços-tempos AdS: nenhuma onda pode sair do horizonte do buraco negro, localizado em $r = r_0 \rightarrow 0$; e nenhuma onda pode propagar-se para o infinito espacial, $r \rightarrow \infty$. Essas condições implicam em $a^{(\pm)} = 0$ e $b^{(\pm)} = 0$, o que significa que ondas com $\omega^2 \neq k^2$ se anulam.

Restam, então, apenas as soluções em que $\omega^2 = q^2$. Nesse caso, de fato, não existem ondas na direção radial, tal que as soluções $Z^{(\pm)} = c^{(\pm)} + d^{(\pm)}/r$, para $r > 0$, representam ondas que viajam ao longo das direções espaciais ortogonais à direção r . Em outras palavras, não existem ondas saindo do horizonte de eventos nem tão pouco propagando-se para o infinito espacial. Considerando estes como os modos plano-simétricos AdS puros, as frequências deles, dadas por $\omega = q$, concordam com o resultado encontrado numericamente para pequenos buracos negros.

B Somatório da série para modos de grandes buracos negros

Mostra-se aqui como a série apresentada em (5.48) pode ser somada exatamente. Já que ela é uma série alternada, é importante não apenas provar a sua convergência, mas também testar a sua convergência absoluta. Por indução matemática, encontra-se que a série (5.48) pode ser escrita como uma combinação de sete termos

$$\gamma = 2 + \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_m^1 + \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_m^2 + \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_m^3 + \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_m^4 + \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_m^5 + \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_m^6, \quad (\text{B.1})$$

onde os elementos α_m^i ($i = 1, 2, \dots, 6$) são dados por

$$\begin{aligned} \alpha_m^1 &= (-1)^m \frac{2}{3^{3m+2}(6m+5)}, & \alpha_m^2 &= (-1)^{m+1} \frac{2}{3^{3m}(6m+1)}, \\ \alpha_m^3 &= (-1)^m \frac{1}{3^{3m}(6m+1)(3m+1)}, & \alpha_m^4 &= (-1)^m \frac{6m+5}{3^{3m+2}(3m+1)(2m+1)}, \\ \alpha_m^5 &= (-1)^m \frac{6m+5}{3^{3m+2}(3m+2)(2m+1)}, & \alpha_m^6 &= (-1)^m \frac{12m+11}{3^{3m+2}(3m+2)(6m+5)}. \end{aligned}$$

Tem-se, então, uma soma de seis séries, de tal modo que, ao demonstrar a convergência absoluta de cada uma delas, prova-se também a convergência absoluta da série completa $\sum_m \gamma_m(0)$. Com esse propósito, calcula-se o limite

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{|\alpha_{m+1}^i|}{|\alpha_m^i|} = \frac{1}{3^3} \quad (\text{B.2})$$

e se verifica que ele é menor do que a unidade para qualquer i . Aplicando o teste da razão de D'Alembert, conclui-se que cada série individual é absolutamente convergente. Esse resultado mostra que a soma final para γ é independente da ordem dos elementos na série alternada. Em particular, pode-se adicionar os termos α_m^i sobre todo i antes de realizar a soma sobre m . Ao fazer isso, encontra-se o resultado simples

$$\sum_{i=1}^6 \alpha_m^i = \alpha_m^1 + \alpha_m^2 + \dots + \alpha_m^6 = 0 \quad (\text{B.3})$$

para qualquer valor de m e, conseqüentemente, a soma sobre m dá zero. Dessa forma, a soma da série (B.1) resulta em $\gamma = 2$.

C A teoria da resposta linear

Tendo em vista que os principais resultados obtidos neste trabalho dizem respeito aos pólos das funções de Green de uma teoria quântica de campos, torna-se importante apresentar aqui de que forma essas funções estão relacionadas a quantidades fisicamente relevantes como, por exemplo, a susceptibilidade magnética e a condutividade elétrica de um sistema. Encontrar tais relações é o objetivo principal da teoria da resposta linear: sonda-se o sistema por meio de uma perturbação fraca e se investiga a resposta dele dentro da aproximação linear. A revisão contida neste apêndice está baseada na monografia clássica de Negele e Orland (1998).

Considera-se, inicialmente, um sistema que no tempo t_i está no autoestado $|\psi_\alpha(t_i)\rangle$ do hamiltoniano \hat{H} . Posteriormente, esse sistema é colocado sob a ação de um campo externo dependente do tempo, $U(t)$, que se acopla a ele por meio do operador \hat{O}_1 ,

$$\hat{H}_U(t) = \hat{H} + U(t)\hat{O}_1, \quad (\text{C.1})$$

onde estados e operadores são dados na representação de Schrödinger.

Para sistemas com hamiltonianos dependentes do tempo, uma forma conveniente de representar o operador evolução é por meio de uma exponencial ordenada no tempo. Define-se o produto ordenado no tempo de um conjunto de operadores de criação e destruição dependentes do tempo por

$$T \left[\hat{O}_{\alpha_1}(t_1)\hat{O}_{\alpha_2}(t_2)\dots\hat{O}_{\alpha_n}(t_n) \right] = \zeta^P \hat{O}_{\alpha_{P_1}}(t_{P_1})\hat{O}_{\alpha_{P_2}}(t_{P_2})\dots\hat{O}_{\alpha_{P_n}}(t_{P_n}), \quad (\text{C.2})$$

onde ζ é -1 para férmions e $+1$ para bósons, e P é uma permutação de $\{1, 2, \dots, n\}$ que coloca em ordem cronológica os tempos,

$$t_{P_1} > t_{P_2} > t_{P_3} > \dots > t_{P_n}, \quad (\text{C.3})$$

e em ordem normal os operadores de criação e destruição. Nesse sentido, a exponencial ordenada no tempo é dada por

$$T e^{-\int_{t_a}^{t_b} \hat{A}(t) dt} = \lim_{N \rightarrow \infty} e^{-\epsilon \hat{A}(t_N)} e^{-\epsilon \hat{A}(t_{N-1})} \dots e^{-\epsilon \hat{A}(t_2)} e^{-\epsilon \hat{A}(t_1)}, \quad (\text{C.4})$$

sendo $\epsilon = (t_b - t_a)/N$ e $t_n = t_a + n\epsilon$.

Em termos da exponencial ordenada no tempo definida anteriormente, o operador evolução do sistema pode ser escrito como

$$\widehat{\mathcal{U}}(t, t_i) = T e^{-i \int_{t_i}^t \widehat{H}_U(t') dt'} . \quad (\text{C.5})$$

Esse operador é solução da equação de movimento

$$i \frac{d}{dt} \widehat{\mathcal{U}}(t, t_i) = \widehat{H}_U(t) \widehat{\mathcal{U}}(t, t_i), \quad (\text{C.6})$$

e ainda satisfaz a condição de contorno

$$\widehat{\mathcal{U}}(t_i, t_i) = T e^{-i \int_{t_i}^{t_i} \widehat{H}_U(t') dt'} = 1. \quad (\text{C.7})$$

Por definição, o operador evolução temporal conecta vetores de estado em instantes de tempo distintos. Se o sistema encontra-se no autoestado $|\psi_\alpha\rangle$ no tempo t_i , então

$$|\psi_\alpha(t)\rangle = \widehat{\mathcal{U}}(t, t_i) |\psi_\alpha\rangle = T e^{-i \int_{t_i}^t \widehat{H}_U(t') dt'} |\psi_\alpha\rangle. \quad (\text{C.8})$$

A resposta da função de onda à atuação de um campo externo infinitesimal entre os instantes t_i e t é, dessa forma, dada por

$$\delta |\psi(t)\rangle [U] \Big|_{U=0} = \int_{t_i}^t dt_1 \delta U(t_1) \frac{\delta \widehat{\mathcal{U}}(t, t_i)}{\delta U(t_1)} \Big|_{U=0} |\psi_\alpha(t_i)\rangle. \quad (\text{C.9})$$

A derivada funcional que aparece na equação anterior segue da variação de (C.5) com respeito ao campo externo $U(t)$,

$$\frac{\delta \widehat{\mathcal{U}}(t, t_i)}{\delta U(t_1)} \Big|_{U=0} = -i T e^{-i \int_{t_1}^t \widehat{H}_U(t') dt'} \widehat{\mathcal{O}}_1 T e^{-i \int_{t_i}^{t_1} \widehat{H}_U(t') dt'} \Big|_{U=0}. \quad (\text{C.10})$$

Substituindo esse resultado na equação (C.9), obtém-se

$$\delta |\psi(t)\rangle = -i \int_{t_i}^t dt_1 \delta U(t_1) e^{-i \widehat{H} t} \widehat{\mathcal{O}}_1^{(U)}(t_1) |\psi_\alpha^{(t)}\rangle, \quad (\text{C.11})$$

onde o operador $\widehat{\mathcal{O}}_1^{(U)}(t)$ na representação de interação está relacionado ao operador $\widehat{\mathcal{O}}_1$ na representação de Schrödinger por

$$\widehat{\mathcal{O}}_1^{(U)}(t) = e^{i \widehat{H} t} \widehat{\mathcal{O}}_1 e^{-i \widehat{H} t} \quad (\text{C.12})$$

e o vetor de estado $|\psi^{(t)}\rangle$ na representação de interação está relacionado ao vetor de estado $|\psi(t)\rangle$ na representação de Schrödinger por

$$|\psi^{(t)}\rangle = e^{i\hat{H}t}|\psi(t)\rangle. \quad (\text{C.13})$$

De acordo com a interpretação padrão da mecânica quântica, o próprio vetor de estado associado a um sistema não é uma quantidade diretamente observável. O que pode ser medido, por exemplo, é o valor esperado de um operador $\hat{\mathcal{O}}_2$, avaliado no tempo t_2 com o sistema no estado $|\psi(t_2)\rangle$:

$$\langle\psi(t_2)|\hat{\mathcal{O}}_2|\psi(t_2)\rangle = \langle\psi_\alpha(t_i)|\hat{\mathcal{U}}^\dagger(t_2, t_i)\hat{\mathcal{O}}_2\hat{\mathcal{U}}(t_2, t_i)|\psi_\alpha(t_i)\rangle. \quad (\text{C.14})$$

A dependência desse valor esperado em $U(t)$ está inteiramente contida no produto de operadores $\hat{\mathcal{U}}^\dagger(t_2, t_i)\hat{\mathcal{O}}_2\hat{\mathcal{U}}(t_2, t_i)$. Sendo assim, a variação de $\langle\psi(t_2)|\hat{\mathcal{O}}_2|\psi(t_2)\rangle$ frente a uma perturbação infinitesimal no campo externo é dada por

$$\delta\langle\psi(t_2)|\hat{\mathcal{O}}_2|\psi(t_2)\rangle = \int_{t_i}^{t_2} dt_1 \delta U(t_1) \langle\psi_\alpha(t_i)| \left[\frac{\delta}{\delta U(t_1)} \hat{\mathcal{U}}^\dagger(t_2, t_i) \hat{\mathcal{O}}_2 \hat{\mathcal{U}}(t_2, t_i) \right]_{U=0} |\psi_\alpha(t_i)\rangle, \quad (\text{C.15})$$

ou então, utilizando (C.10) no cálculo da derivada funcional acima, encontra-se

$$\delta\langle\psi(t_2)|\hat{\mathcal{O}}_2|\psi(t_2)\rangle = -i \int_{-\infty}^{+\infty} dt_1 \delta U(t_1) \theta(t_2 - t_1) \langle\psi_\alpha^{(t)}| \left[\hat{\mathcal{O}}_2^{(t)}(t_2), \hat{\mathcal{O}}_1^{(t)}(t_1) \right] |\psi_\alpha^{(t)}\rangle, \quad (\text{C.16})$$

onde o limite inferior da integral foi estendido para $-\infty$ de modo a incluir todas as possíveis variações de $U(t_1)$.

Numa situação em que o estado inicial $|\psi_\alpha\rangle$ não é bem determinado, mas dado por uma mistura estatística de estados num ensemble canônico, por exemplo, é necessário tomar uma média termodinâmica com peso estatístico dado pelo operador densidade

$$\hat{\rho} = Z^{-1} e^{-\hat{H}/T}, \quad (\text{C.17})$$

onde Z é a função de partição do sistema, $Z = \text{Tr}[\exp(-\hat{H}/T)]$. Com isso, a variação do valor médio do operador $\hat{\mathcal{O}}_2$ transforma-se em

$$\delta\langle\hat{\mathcal{O}}_2(t_2)\rangle = -i \int_{-\infty}^{+\infty} dt_1 \delta U(t_1) \theta(t_2 - t_1) \left\langle \left[\hat{\mathcal{O}}_2^{(t)}(t_2), \hat{\mathcal{O}}_1^{(t)}(t_1) \right] \right\rangle, \quad (\text{C.18})$$

ou seja, a mudança em $\langle\hat{\mathcal{O}}_2(t_2)\rangle$ devido a uma perturbação acoplada à $\hat{\mathcal{O}}_1$ é dada pela função

resposta

$$D(1, 2) = \frac{\delta \langle \widehat{\mathcal{O}}_2(t_2) \rangle}{\delta U(t_1)} = -i \theta(t_2 - t_1) \left\langle \left[\widehat{\mathcal{O}}_2^{(I)}(t_2), \widehat{\mathcal{O}}_1^{(I)}(t_1) \right] \right\rangle, \quad (\text{C.19})$$

onde os parênteses angulares denotam a média termodinâmica representada pelo operador densidade (C.17).

Observa-se, portanto, que a resposta de um sistema a um potencial externo é caracterizada pelas funções de correlação $\langle \widehat{\mathcal{O}}_2^{(I)}(t_2) \widehat{\mathcal{O}}_1^{(I)}(t_1) \rangle$. Em outras palavras, um coeficiente de transporte que caracteriza a dissipação em um sistema é dado por um elemento de matriz das flutuações termodinâmicas ou de estado fundamental de um operador. Tal resultado é conhecido como o teorema da flutuação-dissipação. Como exemplos do resultado geral (C.19), têm-se a susceptibilidade magnética e a condutividade elétrica de um sistema. A primeira quantidade é dada em termos de funções de correlação spin-spin $\langle \widehat{\boldsymbol{\sigma}}(x_1, t_1) \cdot \widehat{\boldsymbol{\sigma}}(x_2, t_2) \rangle$, já que um campo magnético externo acopla-se a uma rede de spins por meio de $\widehat{\boldsymbol{\sigma}}(x) \cdot \mathbf{H}(x)$. De maneira similar, um campo elétrico acopla-se a um sistema de partículas carregadas por meio do potencial vetor $\widehat{\mathbf{j}} \cdot \mathbf{A}$, num calibre em que $\Phi = 0$ e $\mathbf{E} = -\partial \mathbf{A} / \partial t$. Dessa forma, a condutividade elétrica é dada por funções de correlação corrente-corrente $\langle \widehat{\mathbf{j}}(x_1, t_1) \cdot \widehat{\mathbf{j}}(x_2, t_2) \rangle$.

D Funções de correlação em teoria de campos

No presente apêndice discute-se a estrutura de índices de Lorentz das funções de correlação retardadas de correntes conservadas e do tensor energia-momento. Essa análise é bastante geral, sendo válida para teorias quânticas de campos relativísticos num espaço-tempo de Minkowski D -dimensional. O estudo se baseia em revisão apresentada por Kovtun e Starinets (2005).

Assume-se inicialmente a invariância da teoria por translações e rotações. A idéia é analisar a estrutura de índices das seguintes funções de Green:

$$C_{\mu\nu}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = -i\theta(x^0 - y^0)\langle [\hat{J}_\mu(\mathbf{x}), \hat{J}_\nu(\mathbf{y})] \rangle; \quad (\text{D.1})$$

$$G_{\mu\nu,\alpha\beta}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = -i\theta(x^0 - y^0)\langle [\hat{T}_{\mu\nu}(\mathbf{x}), \hat{T}_{\alpha\beta}(\mathbf{y})] \rangle. \quad (\text{D.2})$$

Já que os valores esperados referem-se a estados invariantes por translações, torna-se conveniente tomar a transformada de Fourier das funções de Green,

$$C_{\mu\nu}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = \int \frac{d^D\mathbf{k}}{(2\pi)^D} e^{i\mathbf{k}(\mathbf{x}-\mathbf{y})} C_{\mu\nu}(\mathbf{k}), \quad (\text{D.3})$$

o mesmo acontecendo com $G_{\mu\nu,\alpha\beta}(\mathbf{x} - \mathbf{y})$. Na equação acima, $\mathbf{k} = (k_0, \mathbf{k})$ é o vetor momento linear D -dimensional, $\mathbf{kx} = k_0x^0 + \mathbf{kx}$. Assume-se, aqui, que os valores esperados de todas as cargas globais sejam nulos no estado de equilíbrio, o que significa considerar sistemas com potenciais químicos nulos. Com isso, a invariância CPT do estado de equilíbrio implica em

$$C_{\mu\nu}(\mathbf{k}) = C_{\nu\mu}(\mathbf{k}), \quad (\text{D.4})$$

$$G_{\mu\nu,\alpha\beta}(\mathbf{k}) = G_{\alpha\beta,\mu\nu}(\mathbf{k}). \quad (\text{D.5})$$

Além disso, devido à simetria de $\hat{T}_{\mu\nu}$, as funções de correlação do tensor energia-momento são tais que

$$G_{\mu\nu,\alpha\beta}(\mathbf{k}) = G_{\nu\mu,\alpha\beta}(\mathbf{k}) = G_{\mu\nu,\beta\alpha}(\mathbf{k}). \quad (\text{D.6})$$

A conservação de $\hat{J}_\mu(\mathbf{x})$ e $\hat{T}_{\mu\nu}(\mathbf{x})$ indica que as funções de correlação podem ser definidas de modo que satisfaçam as seguintes identidades de Ward:

$$k^\mu C_{\mu\nu}(\mathbf{k}) = 0; \quad (\text{D.7})$$

$$k^\mu G_{\mu\nu,\alpha\beta}(\mathbf{k}) = 0. \quad (\text{D.8})$$

Se, além disso, a teoria é invariante por mudanças na escala, então as funções de correlação do tensor energia-momento satisfazem uma identidade de Ward extra,

$$\eta^{\mu\nu} G_{\mu\nu,\alpha\beta}(\mathbf{k}) = 0. \quad (\text{D.9})$$

Por sua vez, a combinação da hermiticidade de $\widehat{J}_\mu(\mathbf{x})$ e $\widehat{T}_{\mu\nu}(\mathbf{x})$ com a invariância por rotações implica em

$$C_{\mu\nu}(k_0, \mathbf{k}) = C_{\mu\nu}(-k_0, \mathbf{k})^*, \quad (\text{D.10})$$

$$G_{\mu\nu,\alpha\beta}(k_0, \mathbf{k}) = G_{\mu\nu,\alpha\beta}(-k_0, \mathbf{k})^*. \quad (\text{D.11})$$

D.1 Correntes conservadas

As identidades de Ward (D.7) para o vácuo indicam que a função de correlação corrente-corrente é proporcional ao operador de projeção sobre vetores conservados,

$$P_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{\mathbf{k}^2}, \quad (\text{D.12})$$

onde $\mathbf{k}^2 = -k_0^2 + \mathbf{k}^2$. Com isso, todas as componentes $C_{\mu\nu}(\mathbf{k})$ são determinadas por uma única função escalar $\Pi(\mathbf{k}^2)$:

$$C_{\mu\nu}(\mathbf{k}) = P_{\mu\nu} \Pi(\mathbf{k}^2). \quad (\text{D.13})$$

Nos casos em que se considera o valor esperado num estado que não é invariante por transformações de Lorentz, como por exemplo, um estado de equilíbrio termodinâmico no ensemble canônico, torna-se então conveniente dividir o projetor $P_{\mu\nu}$ nas suas partes transversal e longitudinal,

$$P_{\mu\nu} = P_{\mu\nu}^T + P_{\mu\nu}^L, \quad (\text{D.14})$$

onde $P_{\mu\nu}^T$ e $P_{\mu\nu}^L$ são projetores mutuamente ortogonais ($P_{\alpha\mu}^T \eta^{\mu\nu} P_{\nu\beta}^L = 0$), definidos por

$$P_{00}^T = 0, \quad P_{0i}^T = 0, \quad P_{ij}^T = \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{\mathbf{k}^2}, \quad P_{\mu\nu}^L = P_{\mu\nu} - P_{\mu\nu}^T. \quad (\text{D.15})$$

Esses projetores satisfazem as relações $k^\mu P_{\mu\nu}^T = k^\mu P_{\mu\nu}^L = 0$ e, por essa razão, qualquer expressão construída a partir de $P_{\mu\nu}^T$ e $P_{\mu\nu}^L$ satisfaz automaticamente o vínculo de conservação de corrente. Sendo assim, num estado invariante apenas por rotações, a função de correlação

corrente-corrente é determinada por duas funções escalares independentes,

$$C_{\mu\nu}(\mathbf{k}) = P_{\mu\nu}^T \Pi^T(k_0, \mathbf{k}^2) + P_{\mu\nu}^L \Pi^L(k_0, \mathbf{k}^2). \quad (\text{D.16})$$

Quando $\Pi^T = \Pi^L = \Pi$, essa expressão se reduz à forma invariante de Lorentz (D.13). Além disso, devido à invariância por rotações, os limites para $\mathbf{k} \rightarrow 0$ das auto-energias transversais e longitudinais coincidem,

$$\lim_{\mathbf{k} \rightarrow 0} \Pi^T(k_0, \mathbf{k}^2) = \lim_{\mathbf{k} \rightarrow 0} \Pi^L(k_0, \mathbf{k}^2). \quad (\text{D.17})$$

D.2 O tensor energia-momento

No vácuo, a função de correlação de dois pontos do tensor energia-momento pode ser escrita como uma soma de cinco termos admitidos pelas simetrias (D.5) e (D.6) e proporcionais à $\eta_{\mu\nu}\eta_{\alpha\beta}$, $(\eta_{\mu\alpha}\eta_{\nu\beta} + \eta_{\mu\beta}\eta_{\nu\alpha})$, $(\eta_{\mu\nu}k_\alpha k_\beta + k_\mu k_\nu \eta_{\alpha\beta})$, $(\eta_{\mu\alpha}k_\nu k_\beta + \eta_{\nu\alpha}k_\mu k_\beta + \eta_{\mu\beta}k_\nu k_\alpha + \eta_{\nu\beta}k_\mu k_\alpha)$ e $k_\mu k_\nu k_\alpha k_\beta$. No entanto, somente duas combinações lineares desses termos são compatíveis com a identidade de Ward (D.8). Tais combinações podem ser escolhidas como $P_{\mu\nu}P_{\alpha\beta}$ e $P_{\mu\alpha}P_{\nu\beta} + P_{\mu\beta}P_{\nu\alpha}$ onde $P_{\mu\nu}$ é o projetor definido na seção anterior. Uma forma conveniente de escrever $G_{\mu\nu,\alpha\beta}(\mathbf{k})$ é

$$G_{\mu\nu,\alpha\beta}(\mathbf{k}) = P_{\mu\nu}P_{\alpha\beta}G_B(\mathbf{k}^2) + H_{\mu\nu,\alpha\beta}G_S(\mathbf{k}^2), \quad (\text{D.18})$$

onde

$$H_{\mu\nu,\alpha\beta} = \frac{1}{2}(P_{\mu\alpha}P_{\nu\beta} + P_{\mu\beta}P_{\nu\alpha}) - \frac{1}{D-1}P_{\mu\nu}P_{\alpha\beta} \quad (\text{D.19})$$

é um projetor sobre tensores simétricos conservados e sem traço, o qual é construído de modo a satisfazer $\eta^{\mu\nu}H_{\mu\nu,\alpha\beta} = 0$. No caso de uma teoria invariante por mudanças na escala, tem-se $G_B(\mathbf{k}^2) = 0$, e a função de correlação assume a forma simples

$$G_{\mu\nu,\alpha\beta} = H_{\mu\nu,\alpha\beta}G_S(\mathbf{k}^2). \quad (\text{D.20})$$

Se o valor esperado refere-se a um estado que não é invariante por transformações de Lorentz, tal como o estado de um sistema em equilíbrio termodinâmico num ensemble canônico, torna-se então conveniente separar $H_{\mu\nu,\alpha\beta}$ em dois projetores ortogonais formados a partir de $P_{\mu\nu}^T$ e

$P_{\mu\nu}^L$. Um combinação importante é

$$S_{\mu\nu\alpha\beta} = \frac{1}{2} (P_{\mu\alpha}^T P_{\nu\beta}^L + P_{\mu\alpha}^L P_{\nu\beta}^T + P_{\mu\beta}^T P_{\nu\alpha}^L + P_{\mu\beta}^L P_{\nu\alpha}^T). \quad (\text{D.21})$$

Devido à ortogonalidade de $P_{\mu\nu}^T$ e $P_{\mu\nu}^L$, a combinação anterior satisfaz $k^\mu S_{\mu\nu,\alpha\beta} = 0$ e também $\eta^{\mu\nu} S_{\mu\nu,\alpha\beta} = 0$. Uma outra combinação independente com as mesmas propriedades é dada por

$$Q_{\mu\nu,\alpha\beta} = \frac{1}{D-1} \left[(D-2) P_{\mu\nu}^L P_{\alpha\beta}^L + \frac{1}{D-2} P_{\mu\nu}^T P_{\alpha\beta}^T - (P_{\mu\nu}^T P_{\alpha\beta}^L + P_{\mu\nu}^L P_{\alpha\beta}^T) \right]. \quad (\text{D.22})$$

Como ocorre com qualquer projetor, os quadrados de $S_{\mu\nu,\alpha\beta}$ e $Q_{\mu\nu,\alpha\beta}$ reproduzem a eles próprios. Além disso, um projetor é ortogonal ao outro, $S_{\mu\nu,\alpha\beta} \eta^{\alpha\lambda} \eta^{\beta\rho} Q_{\lambda\rho,\sigma\tau} = 0$. Portanto, o projetor $H_{\mu\nu,\alpha\beta}$ pode ser separado em

$$H_{\mu\nu,\alpha\beta} = S_{\mu\nu,\alpha\beta} + Q_{\mu\nu,\alpha\beta} + L_{\mu\nu,\alpha\beta}, \quad (\text{D.23})$$

onde $L_{\mu\nu,\alpha\beta}$ é ortogonal a ambos, $S_{\mu\nu,\alpha\beta}$ e $Q_{\mu\nu,\alpha\beta}$. Dessa forma, numa teoria invariante por mudanças na escala, a função de correlação do tensor energia-momento pode ser escrita como uma soma de três estruturas de índices independentes:

$$G_{\mu\nu,\alpha\beta} = S_{\mu\nu,\alpha\beta} G_1(k_0, \mathbf{k}^2) + Q_{\mu\nu,\alpha\beta} G_2(k_0, \mathbf{k}^2) + L_{\mu\nu,\alpha\beta} G_3(k_0, \mathbf{k}^2). \quad (\text{D.24})$$

Pode-se mostrar que, devido à invariância por rotações, os limites de $\mathbf{k} \rightarrow 0$ (com k_0 fixo) das três funções escalares coincidem,

$$\lim_{\mathbf{k} \rightarrow 0} G_1(k_0, \mathbf{k}^2) = \lim_{\mathbf{k} \rightarrow 0} G_2(k_0, \mathbf{k}^2) = \lim_{\mathbf{k} \rightarrow 0} G_3(k_0, \mathbf{k}^2). \quad (\text{D.25})$$

Numa teoria que não é invariante por mudanças na escala, são necessárias duas funções escalares extras para especificar $G_{\mu\nu,\alpha\beta}(\mathbf{k})$. Elas multiplicam duas combinações lineares independentes de $P_{\mu\nu}^T P_{\alpha\beta}^T$, $P_{\mu\nu}^L P_{\alpha\beta}^L$ e $(P_{\mu\nu}^T P_{\alpha\beta}^L + P_{\mu\nu}^L P_{\alpha\beta}^T)$; uma das escolhas possíveis é

$$\begin{aligned} G_{\mu\nu,\alpha\beta}(\mathbf{k}) = & + \left[P_{\mu\nu}^T P_{\alpha\beta}^T + \frac{1}{2} (P_{\mu\nu}^T P_{\alpha\beta}^L + P_{\mu\nu}^L P_{\alpha\beta}^T) \right] C_T(k_0, \mathbf{k}^2) \\ & + \left[P_{\mu\nu}^L P_{\alpha\beta}^L + \frac{1}{2} (P_{\mu\nu}^T P_{\alpha\beta}^L + P_{\mu\nu}^L P_{\alpha\beta}^T) \right] C_L(k_0, \mathbf{k}^2) \\ & + S_{\mu\nu,\alpha\beta} G_1(k_0, \mathbf{k}^2) + Q_{\mu\nu,\alpha\beta} G_2(k_0, \mathbf{k}^2) + L_{\mu\nu,\alpha\beta} G_3(k_0, \mathbf{k}^2). \end{aligned} \quad (\text{D.26})$$

Quando $C_T = C_L = G_B$ e $G_1 = G_2 = G_3 = G_S$, essa expressão se reduz exatamente à forma invariante de Lorentz (D.18).

D.3 CFT tridimensional

Um exemplo particularmente interessante para o presente trabalho é o de uma teoria de campos tridimensional conforme à temperatura finita. Nesse caso específico, o número de dimensões ($D = 3$) faz com que os projetores $S_{\mu\nu,\alpha\beta}$ e $Q_{\mu\nu,\alpha\beta}$ sejam não apenas ortogonais, mas também suplementares em relação ao espaço de projeção de $H_{\mu\nu,\alpha\beta}$. Em símbolos,

$$H_{\mu\nu,\alpha\beta} = S_{\mu\nu,\alpha\beta} + Q_{\mu\nu,\alpha\beta}, \quad (\text{D.27})$$

e o projetor $L_{\mu\nu,\alpha\beta}$ é identicamente nulo. No lado gravitacional da AdS/CFT, esse resultado reflete a ausência de perturbações gravitacionais tensoriais num espaço-tempo quadridimensional, tendo em vista a inexistência de um tensor simétrico com traço e divergência nulos sobre o \mathbb{R}^2 .

Escolhendo o trivetor momento linear de modo que $k_\mu = (-\omega, 0, q)$, a componente transversal da função de correlação corrente-corrente assume a forma

$$C_{x^1x^1}(\mathbf{k}) = \Pi^T(\omega, q), \quad (\text{D.28})$$

enquanto que as componentes longitudinais ficam dadas por

$$C_{tt}(\mathbf{k}) = \frac{q^2}{\omega^2 - q^2} \Pi^L(\omega, q), \quad (\text{D.29})$$

$$C_{tx^2}(\mathbf{k}) = -\frac{\omega q}{\omega^2 - q^2} \Pi^L(\omega, q), \quad (\text{D.30})$$

$$C_{x^2x^2}(\mathbf{k}) = \frac{\omega^2}{\omega^2 - q^2} \Pi^L(\omega, q). \quad (\text{D.31})$$

As correlações da densidade de momento transversal são determinadas por $G_1(\omega, q)$:

$$G_{tx^1,tx^1}(\mathbf{k}) = \frac{1}{2} \frac{q^2}{(\omega^2 - q^2)} G_1(\omega, q); \quad (\text{D.32})$$

$$G_{tx^1,x^1x^2}(\mathbf{k}) = -\frac{1}{2} \frac{\omega q}{(\omega^2 - q^2)} G_1(\omega, q); \quad (\text{D.33})$$

$$G_{x^1x^2,x^1x^2}(\mathbf{k}) = \frac{1}{2} \frac{\omega^2}{(\omega^2 - q^2)} G_1(\omega, q). \quad (\text{D.34})$$

As correlações da densidade de momento longitudinal, densidade de energia e tensões diago-

nais são determinadas por $G_2(\omega, q)$,

$$G_{\mu\nu,\alpha\beta}(\mathbf{k}) = Q_{\mu\nu,\alpha\beta}(\omega, q)G_2(\omega, q), \quad (\text{D.35})$$

onde as componentes do projetor $Q_{\mu\nu,\alpha\beta}$ são dadas por:

$$Q_{tt,tt} = \frac{1}{2} \frac{q^4}{(\omega^2 - q^2)^2}; \quad Q_{tt,tx^2} = -\frac{1}{2} \frac{\omega q^3}{(\omega^2 - q^2)^2}; \quad (\text{D.36})$$

$$Q_{tt,x^1x^1} = -\frac{1}{2} \frac{q^2}{(\omega^2 - q^2)^2}; \quad Q_{tt,x^2x^2} = \frac{1}{2} \frac{\omega^2 q^2}{(\omega^2 - q^2)^2}; \quad (\text{D.37})$$

$$Q_{x^1x^1,x^1x^1} = \frac{1}{2}; \quad Q_{x^1x^1,tx^2} = \frac{1}{2} \frac{\omega q}{(\omega^2 - q^2)^2}; \quad (\text{D.38})$$

$$Q_{x^1x^1,x^2x^2} = -\frac{1}{2} \frac{\omega^2}{(\omega^2 - q^2)^2}; \quad Q_{x^2x^2,x^2x^2} = \frac{1}{2} \frac{\omega^4}{(\omega^2 - q^2)^2}; \quad (\text{D.39})$$

$$Q_{x^2x^2,tx^2} = -\frac{1}{2} \frac{\omega^3 q}{(\omega^2 - q^2)^2}; \quad Q_{tx^2,tx^2} = \frac{1}{2} \frac{\omega^2 q^2}{(\omega^2 - q^2)^2}. \quad (\text{D.40})$$

E Elementos de hidrodinâmica

O comportamento hidrodinâmico de um sistema impõe uma série de restrições sobre a forma das funções de correlação no espaço-tempo de Minkowski (POLICASTRO, SON E STARINETS, 2002a). Em particular, os pólos das funções de Green retardadas apresentam formatos específicos, dependentes apenas de um conjunto de parâmetros do fluido que representa o limite contínuo do sistema. No caso das flutuações numa densidade de corrente, j^0 evolui de acordo com a equação da difusão (lei de Fick),

$$\partial_0 j^0 = D \nabla^2 j^0, \quad (\text{E.1})$$

onde D é uma constante de difusão com dimensão de comprimento. Essa equação corresponde a um modo puramente amortecido, cuja relação de dispersão é $\omega = -iDq^2$. De um modo similar, as flutuações nas componentes do tensor energia-momento $T^{\mu\nu}$ satisfazem as equações hidrodinâmicas linearizadas

$$\partial_0 \tilde{T}^{00} + \partial_i \tilde{T}^{0i} = 0, \quad \partial_0 \tilde{T}^{0i} + \partial_j \tilde{T}^{ij} = 0, \quad (\text{E.2})$$

onde

$$\tilde{T}^{00} = T^{00} - \langle T^{00} \rangle = T^{00} - \epsilon, \quad \tilde{T}^{0i} = T^{0i}, \quad (\text{E.3})$$

$$\tilde{T}^{ij} = T^{ij} - P\delta^{ij} = -\frac{1}{\epsilon + P} \left[\eta \left(\partial_i T^{0j} + \partial_j T^{0i} - \frac{2}{3} \delta^{ij} \partial_k T^{0k} \right) + \zeta \delta^{ij} \partial_k T^{0k} \right], \quad (\text{E.4})$$

sendo ϵ e P a densidade de energia e a pressão, η e ζ os coeficientes de viscosidade de cisalhamento e de volume, respectivamente. Flutuações transversais na densidade de momento T^{0i} produzem um modo de cisalhamento caracterizado por uma frequência puramente imaginária,

$$\omega = -i \frac{\eta}{\epsilon + P} q^2. \quad (\text{E.5})$$

Por outro lado, as flutuações da densidade de energia T^{00} e da componente longitudinal da densidade de momento T^{0i} apresentam um modo de onda sonora, cuja relação de dispersão é dada por

$$\omega = \pm c_s q - \frac{i}{2} \frac{1}{\epsilon + P} \left(\zeta + \frac{4}{3} \eta \right) q^2, \quad (\text{E.6})$$

onde $c_s^2 = \partial P / \partial \epsilon$. No caso de teorias tridimensionais conformemente invariantes, o tensor energia-momento possui traço nulo, o que implica em $\zeta = 0$, $\epsilon = 2P$ e $c_s = 1/\sqrt{2}$.

Referências Bibliográficas

- [1] ADAMS, J. et al. Experimental and theoretical challenges in the search for the quark-gluon plasma: The STAR Collaboration's critical assessment of the evidence from RHIC collisions. *Nuclear Physics A*, v. 757, p. 102-83, 2005.
- [2] ADCOX, K. et al. Formation of dense partonic matter in relativistic nucleus-nucleus collisions at RHIC: Experimental evaluation by the PHENIX Collaboration. *Nuclear Physics A*, v. 757, p. 184-283, 2005.
- [3] AHARONY, S. S. et al. Large N field theories, string theory and gravity. *Physics Reports*, v. 323, p. 183-386, 2000.
- [4] ANDERSSON, N.; JENSEN, B. P. Scattering by black holes. In: PIKE, R.; SABATIER, P. *Scattering*. Londres: Academic Press, 2002. p. 1607-26.
- [5] ANNINOS, P. et al. The collision of two black holes. *Physical Review Letters*, v. 71, p. 2851-54, 1993.
- [6] ARNOWITT, R.; DESER, S.; MISNER, C. W. The dynamics of general relativity. In: WITTEN, L. *Gravitation: an introduction to current research*. New York: Wiley, 1962. p. 227-65.
- [7] ARSENE, I. et al. Quark-gluon plasma and color glass condensate at RHIC? The perspective from the BRAHMS experiment. *Nuclear Physics A*, v. 757, p. 1-27, 2005.
- [8] ASHTEKAR, A.; LEWANDOWSKI, J. Background independent quantum gravity: A status report. *Classical and Quantum Gravity*, v. 21, p. R53-R152, 2004.
- [9] AVIS, S. J.; ISHAM, C. J.; STOREY, D. Quantum field theory in anti-de Sitter space-time. *Physical Review D*, v. 18, n. 10, p. 3565-76, 1978.
- [10] BACK, B. B. et al. The PHOBOS perspective on discoveries at RHIC. *Nuclear Physics A*, v. 757, p. 28-101, 2005.
- [11] BAKSHI, P. M.; MAHANTHAPPA, K. T. Expectation value formalism in quantum field theory, 1. *Journal of Mathematical Physics*, v. 04, p. 1-4, 1963a.
- [12] BAKSHI, P. M.; MAHANTHAPPA, K. T. Expectation value formalism in quantum field theory, 2. *Journal of Mathematical Physics*, v. 04, p. 1-12, 1963b.

- [13] BALASUBRAMANIAN, V. et al. Holographic probes of anti-de Sitter space-times. *Physical Review D*, v. 59, cod. 104021, p. 1-14, 1999.
- [14] BAÑADOS, M.; TEITELBOIM, C.; ZANELLI, J. Black hole in three-dimensional space-time. *Physical Review Letters*, v. 69, p. 1849-51, 1992.
- [15] BEETLE, C.; BURKO, L. M. A radiation scalar for numerical relativity. *Physical Review Letters*, v. 89, cod. 271101, 2002.
- [16] BEKENSTEIN, J. D. Black holes and entropy. *Physical Review D*, v. 7, p. 2333-46, 1973.
- [17] BEKENSTEIN, J. D. Generalized second law of thermodynamics in black-hole physics. *Physical Review D*, v. 9, p. 3292-300, 1974.
- [18] BERENSTEIN, D.; COTTA, R. Aspects of emergent geometry in the AdS/CFT context. *Physical Review D*, v. 74, cod. 026006, p. 1-10, 2006.
- [19] BERENSTEIN, D.; COTTA, R. A Monte-Carlo study of the AdS/CFT correspondence: An exploration of quantum gravity effects. *Journal of High Energy Physics*, v. 04, cod. 071, p. 1-37, 2007.
- [20] BERENSTEIN, D.; COTTA, R.; LEONARDI, R. Numerical tests of AdS/CFT at strong coupling. hep-th/0801.2739. Disponível em: <<http://arxiv.org>> p. 1-23, 2008.
- [21] BERENSTEIN, D.; HERZOG, C. P.; KLEBANOV, Baryon spectra and AdS/CFT correspondence. *Journal of High Energy Physics*, v. 06, cod. 047, p. 1-23, 2002.
- [22] BERKOVITS, N. A new limit of the $AdS_5 \times S^5$ sigma model. *Journal of High Energy Physics*, v. 08, cod. 011, p. 1-29, 2007.
- [23] BERKOVITS, N.; VAFA, C. Towards a worldsheet derivation of the Maldacena conjecture. *Journal of High Energy Physics*, v. 03, cod. 031, p. 1-22, 2008.
- [24] BERTI, E.; CARDOSO, V. Supermassive black holes or boson stars? Hair counting with gravitational wave detectors. *International Journal of Modern Physics D*, v. 15, p. 2209-16, 2006.
- [25] BERTI, E.; KOKKOTAS, K. D. Quasinormal modes of Reissner-Nordström-anti-de Sitter black holes: Scalar, electromagnetic, and gravitational perturbations. *Physical Review D*, v. 67, cod. 064020, 2003.

- [26] BIANCHI, M.; FREDMAN, D.; SKENDERIS, K. Holographic renormalization. *Nuclear Physics B*, v. 631, p. 159-194, 2002.
- [27] BIRMINGHAM, D.; SACHS, I.; SOLODUKHIN, S. N. Conformal field theory interpretation of black hole quasinormal modes. *Physical Review Letters*, v. 88, cod. 151301, 2002.
- [28] BOSCHI-FILHO, H.; BRAGA, N. R. F. AdS/CFT correspondence and strong interactions. *Proceedings of the 5th International Conference on Mathematical Methods in Physics*, p. 1-15, 2006.
- [29] BRILL, D. R.; LOUKO, J.; PELDÁN, P. Thermodynamics of (3+1)-dimensional black holes with toroidal or higher genus horizons. *Physical Review D*, v. 56, p. 3600-10, 1997.
- [30] BRONNIKOV, K. A.; KOVALCHUK, M. A. On a generalization of Birkhoff's theorem. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, v. 13, p. 187-9, 1980.
- [31] BURGESS, C. P.; LÜTKEN, C. A. Propagators and effective potentials in anti-de Sitter Space. *Physical Letters*, v. 153B, n. 3, p. 137-41, 1985.
- [32] BUTKOV, E. *Mathematical Physics*. Massachusetts: Addison-Wesley, 1968.
- [33] CAI, R.; ZHANG, Y. Black plane solutions in four-dimensional spacetimes. *Physical Review D*, v. 54, p. 4891-8, 1996.
- [34] CARDOSO, V. *Quasinormal modes and gravitational radiation in black hole spacetimes*. 2003. 222f. Tese (Doutorado em Física) – Universidade Técnica de Lisboa, Lisboa, 2003.
- [35] CARDOSO, V.; DIAS, O. J. C. Small Kerr-anti-de Sitter black holes are unstable. *Physical Review D*, v. 70, cod. 084011, 2004.
- [36] CARDOSO, V. et al. Black-hole bomb and superradiant instabilities. *Physical Review D*, v. 70, cod. 044039, 2004.
- [37] CARDOSO, V.; KONOPLYA, R. A.; LEMOS, J. P. S. Quasinormal frequencies of Schwarzschild black holes in anti-de Sitter spacetimes: A complete study of the overtone asymptotic behavior. *Physical Review D*, v. 68, cod. 044024, 2003.
- [38] CARDOSO, V.; LEMOS, J. P. S. Scalar, electromagnetic, and Weyl perturbations of BTZ black holes: Quasinormal modes. *Physical Review D*, v. 63, cod. 124015, 2001a.

- [39] CARDOSO, V.; LEMOS, J. P. S. Quasinormal modes of Schwarzschild-anti-de Sitter Black Holes: Electromagnetic and gravitational perturbations. *Physical Review D*, v. 64, cod. 084017, 2001b.
- [40] CARDOSO, V.; LEMOS, J. P. S. Quasi-normal modes of toroidal, cylindrical and planar black holes in anti-de Sitter spacetimes: Scalar, electromagnetic and gravitational perturbations. *Classical and Quantum Gravity*, v. 18, p. 5257-67, 2001c.
- [41] CARROLL, S. M. *Spacetime and geometry: an introduction to general relativity*. San Francisco: Benjamin Cummings, 2003.
- [42] CARTER, B. Axisymmetric black hole has only two degrees of freedom. *Physical Review Letters*, v. 26, p. 331-3, 1971.
- [43] CHAN, J. S. F.; MANN, R. B. Scalar wave falloff in asymptotically anti-de Sitter backgrounds. *Physical Review D*, v. 55, p. 7546-62, 1997.
- [44] CHAN, J. S. F.; MANN, R. B. Scalar wave falloff in topological black hole backgrounds. *Physical Review D*, v. 59, cod. 064025, 1999.
- [45] CHANDRASEKHAR, S. *The Mathematical Theory of Black Holes*. New York: Oxford University Press, 1983.
- [46] CHANDRASEKHAR, S. On algebraically special perturbations of black holes. *Proceedings of the Royal Society of London A*, v. 392, p. 1-13, 1984.
- [47] CHANDRASEKHAR, S.; DETWEILER, S. The quasi-normal modes of the Schwarzschild black hole. *Proceedings of the Royal Society of London A*, v. 344, p. 441-52, 1975.
- [48] CHANDRASEKHAR, S.; FRIEDMAN, J. L. On the stability of axisymmetric systems to axisymmetric perturbations in general relativity. I. The equations governing nonstationary, stationary, and perturbed systems. *The Astrophysical Journal*, v. 175, p. 379-405, 1972.
- [49] CHING, E. S. C. et al. Wave propagation in gravitational systems: Late time behavior. *Physical Review D*, v. 52, p. 2118-32, 1995.
- [50] CHING, E. S. C. et al. Wave propagation in gravitational systems: Completeness of quasinormal modes. *Physical Review D*, v. 54, p. 3778-91, 1996.

- [51] CHRZANOWSKI, P. L. et al. Zero-mass plane waves in nonzero gravitational backgrounds. *Physical Review D*, v. 14, p. 317-26, 1976.
- [52] COOK, G. B. Initial data for numerical relativity. *Living Reviews in Relativity*, v. 3, n. 5, 2000.
- [53] COTAESCU, I. I. Remarks on the quantum modes of the scalar field on AdS_{d+1} space-time. *Physical Review D*, v. 60, cod. 107504, p. 1-2, 1999.
- [54] CRANE, R. W. et al. Survival of superconducting correlations across the two-dimensional superconductor-insulator transition: A finite-frequency study. *Physical Review B*, v. 75, cod. 184530, p. 1-7, 2007.
- [55] CVETIC, M.; GRIFFIES, S. Gravitational effects in supersymmetric domain walls backgrounds. *Physics Letters B*, v. 285, p. 27-34, 1992.
- [56] DAI, J; LEIGH, R. G.; POLCHINSKI, J. New connections between string theories. *Modern Physics Letters A*, v. 4, p. 2073-83, 1989.
- [57] DAVIS, M. et al. Gravitational radiation from a particle falling radially into a Schwarzschild black hole. *Physical Review Letters*, v. 27, p. 1466-69, 1971.
- [58] DEMLER, E.; SACHDEV, S.; ZHANG, Y. Spin-ordering quantum transitions of superconductors in a magnetic field. *Physical Review Letters*, v. 87, cod. 067202, p. 1-4, 2001.
- [59] DEWITT, B. S. Quantum theory of gravity. I. The canonical theory. *Physical Review*, v. 160, p. 1113-48, 1967a.
- [60] DEWITT, B. S. Quantum theory of gravity. II. The manifestly covariant theory. *Physical Review*, v. 162, p. 1195-239, 1967b.
- [61] DEWITT, B. S. Quantum theory of gravity. III. Applications of the covariant theory. *Physical Review*, v. 162, p. 1239-56, 1967c.
- [62] D'INVERNO, R. A. *Introducing Einstein's relativity*. New York: Oxford University Press, 1992.
- [63] DREYER, O. et al. Black hole spectroscopy: Testing general relativity through gravitational wave observations. *Classical and Quantum Gravity*, v. 21, p. 787-804, 2004.

- [64] DUFF, M. J.; KHURI, L. L.; LU, J. X. String solitons. *Physics Reports*, v. 259, p. 213-326, 1995.
- [65] DUFF, M. J.; LU, J. X. Elementary five-brane solutions of $D = 10$ supergravity. *Nuclear Physics B*, v. 354, p. 141-53, 1991.
- [66] DUFF, M. J.; POPE, C. N.; WARNER, N. P. Cosmological and coupling constants in Kaluza-Klein supergravity. *Physics Letters B*, v. 130, p. 254-266, 1983.
- [67] ENGEL, L. W. et al. Microwave frequency dependence of integer quantum Hall effect: Evidence for finite-frequency scaling. *Physical Review Letters*, v. 71, p. 2638-41, 1993.
- [68] FISHER, M. P. A. et al. Boson localization and the superfluid-insulator transition. *Physical Review B*, v. 40, p. 546-70, 1989.
- [69] FRIESS, J. J. et al. Expanding plasmas and quasinormal modes of anti-de Sitter black holes. *Journal of High Energy Physics*, v. 04, cod. 080, p. 1-48, 2007.
- [70] GIAMMATTEO, M.; JING, J. Dirac quasinormal frequencies in Schwarzschild-AdS space-time. *Physical Review D*, v. 71, cod. 024007, 2005.
- [71] GIAMMATTEO, M.; MOSS, I. G. Gravitational quasinormal modes for Kerr anti-de Sitter black holes. *Classical and Quantum Gravity*, v. 22, p. 1803-24, 2005.
- [72] GOROFF, M. H.; SAGNOTTI, A. Quantum gravity at two loops. *Physics Letters B*, v. 160, p. 81-6, 1985.
- [73] GREEN, M. B.; SCHWARZ, J. H.; WITTEN, E. *Superstring Theory*. Cambridge: Cambridge University Press, 1987.
- [74] GREINER, M. et al. Quantum phase transition from a superfluid to a Mott insulator in a gas of ultracold atoms. *Nature*, v. 415, p. 39-44, 2002.
- [75] GROSS, D. J.; WILCZEK, F. Asymptotically free gauge theories. *Physical Review D*, v. 8, p. 3633-52, 1973.
- [76] GUBSER, S. S. Heavy ion collisions and black hole dynamics. *General Relativity and Gravitation*, v. 39, p. 1533-8, 2007.
- [77] GUBSER, S. S. Drag force in AdS/CFT. *Physical Review D*, v. 74, cod. 126005, p. 1-4, 2006.

- [78] GUBSER, S. S.; KLEBANOV, I. R. Absorption by branes and Schwinger terms in the world volume theory. *Physics Letters B*, v. 413, p. 41-8, 1997.
- [79] GUBSER, S. S.; KLEBANOV, I. R.; POLYAKOV, A. M. Gauge theory correlators from non-critical string theory. *Physics Letters B*, v. 428, p. 105-14, 1998.
- [80] GUBSER, S. S.; KLEBANOV, I. R.; TSEYTLIN, A. A. String theory and classical absorption by three-branes. *Nuclear Physics B*, v. 499, p. 217-40, 1997.
- [81] GUNDLACH, C. Summary of GR18 numerical relativity parallel sessions. gr-qc/0711.2170. Disponível em: <<http://arxiv.org>> p. 1-6, 2007.
- [82] GYULASSY, M.; MCLERRAN, L. New forms of QCD matter discovered at RHIC. *Nuclear Physics A*, v. 750, p. 30-63, 2005.
- [83] HARTNOLL, S. A. et al. Theory of the Nernst effect near quantum phase transitions in condensed matter and in dyonic black holes. *Physical Review B*, v. 76, cod. 144502, p. 1-23, 2007.
- [84] HARTNOLL, S. A.; HERZOG, C. P. Impure AdS/CFT. hep-th/0801.1693. Disponível em: <<http://arxiv.org>> p. 1-28, 2008.
- [85] HARTNOLL, S. A.; KOVTUN, P. K. Hall conductivity from dyonic black holes. *Physical Review D*, v. 76, cod. 066001, p. 1-7, 2007.
- [86] HARTNOLL, S. A.; KOVTUN, P. K. Hall conductivity from dyonic black holes. *Physical Review D*, v. 76, cod. 066001, p. 1-7, 2007.
- [87] HAWKING, S. W. Gravitational radiation from colliding black holes. *Physical Review Letters*, v. 26, p. 1344-6, 1971.
- [88] HAWKING, S. W. Black holes in general relativity. *Communications in Mathematical Physics*, v. 25, p. 152-66, 1972.
- [89] HAWKING, S. W. Particle creation by black holes. *Communications in Mathematical Physics*, v. 43, p. 199-220, 1975.
- [90] HAWKING, S. W. Information loss in black holes. *Physical Review D*, v. 72, cod. 084013, p. 1-4, 2005.
- [91] HERZOG, C. P. The hydrodynamics of M-theory. *Journal of High Energy Physics*, v. 12, cod. 026, p. 1-17, 2002.

- [92] HERZOG, C. P. The sound of M theory. *Physical Review D*, v. 68, cod. 024013, p. 1-8, 2003.
- [93] HERZOG, C. P. et al. Quantum critical transport, duality, and M theory. *Physical Review D*, v. 75, cod. 085020, p. 1-20, 2007.
- [94] HERZOG, C. P.; SON, D. T. Schwinger-keldysh propagators from AdS/CFT. *Journal of High Energy Physics*, v. 03, cod. 046, p. 1-14, 2003.
- [95] HOŘAVA, P.; WITTEN, E. Heterotic and type I string dynamics from eleven dimensions. *Nuclear Physics B*, v. 460, p. 506-24, 1996.
- [96] HOROWITZ, G. T. Quantum gravity at the turn of the millennium. gr-qc/0011089. Disponível em: <<http://arxiv.org>> p. 1-18, 2000.
- [97] HOROWITZ, G. T.; HUBENY, V. E. Quasinormal modes of AdS black holes and the approach to thermal equilibrium. *Physical Review D*, v. 62, cod. 024027, 2000.
- [98] HOROWITZ, G. T.; MAROLF, D. A new approach to string cosmology. *Journal of High Energy Physics*, v. 07, cod. 014, p. 1-18, 1998.
- [99] HOROWITZ, G. T.; ROSS, S. F. Possible resolution of black hole singularities from large N gauge theory. *Journal of High Energy Physics*, v. 04, cod. 015, p. 1-9, 1998.
- [100] HOROWITZ, G. T.; STROMINGER, A. Black strings and P-branes. *Nuclear Physics B*, v. 360, p. 197-209, 1991.
- [101] HUANG, C.; LIANG, C. A torus-like black hole. *Physics Letters A*, v. 201, p. 27-32, 1995.
- [102] ISRAEL, W. Event horizons in static vacuum spacetimes. *Physical Review*, v. 164, p. 1776-9, 1967.
- [103] ISRAEL, W. Event horizons in static electrovac space-times. *Communications in Mathematical Physics*, v. 8, p. 245-60, 1968.
- [104] ITZHAKI, N. et al. Supergravity and the large N limit of theories with sixteen supercharges. *Physical Review D*, v. 58, cod. 046004, p. 1-11, 1998.
- [105] JING, J.-L.; PAN, Q.-Y. Dirac quasinormal frequencies of Schwarzschild-anti-de Sitter and Reissner-Nordstrom-anti-de Sitter black holes. *Physical Review D*, v. 71, cod. 124011, 2005.

- [106] KAY, B. S.; WALD, R. M. Linear stability of Schwarzschild under perturbations which are non-vanishing on the bifurcation 2-sphere. *Classical and Quantum Gravity*, v. 4, p. 893-8, 1987.
- [107] KELDYSH, L. V. Diagram technique for nonequilibrium processes. *Zhurnal Eksperimental'noi i Teoreticheskoi Fiziki*, v. 47, p. 1515-27, 1964.
- [108] KERR, R. P. Gravitational field of a spinning mass as an example of algebraically special metrics. *Physical Review Letters*, v. 11, p. 237-8, 1963.
- [109] KHAYKOVICH, B. et al. Field-induced transition between magnetically disordered and ordered phases in underdoped $\text{La}_{2-x}\text{Sr}_x\text{CuO}_4$. *Physical Review B*, v. 71, cod. 220508, p. 1-4, 2005.
- [110] KINNERSLEY, W. Type D vacuum metrics. *Journal of Mathematical Physics*, v. 10, 1195-1203, 1969.
- [111] KLEBANOV, I. R. World volume approach to absorption by non-dilatonic branes. *Nuclear Physics B*, v. 496, p. 231-42, 1997.
- [112] KLEBANOV, I. R. TASI lectures: Introduction to the AdS/CFT correspondence. hep-th/0009139. Disponível em: <<http://arxiv.org>> p. 1-36, 2000.
- [113] KLEBANOV, I. R.; TSEYTLIN, A. A. Entropy of near-extremal black p -branes. *Nuclear Physics B*, v. 475, p. 164-78, 1996.
- [114] KOKKOTAS, K. D.; SCHMIDT, B. G. Quasi-normal modes of stars and black holes. *Living Reviews in Relativity*, v. 2, n. 2, 1999.
- [115] KONOPLYA, R. A. Quasinormal modes of a small Schwarzschild anti-de Sitter black hole. *Physical Review D*, v. 66, cod. 044009, 2002a.
- [116] KONOPLYA, R. A. Decay of a charged scalar field around a black hole: Quasinormal modes of RN, RNAdS, and dilaton black holes. *Physical Review D*, v. 66, cod. 084007, 2002b.
- [117] KOVTUN, P. K.; SON, D. T.; STARINETS, A. O. Viscosity in strongly interacting quantum field theories from black hole physics. *Physical Review Letters*, v. 94, cod. 111601, p. 1-4, 2005.

- [118] KOVTUN, P. K.; STARINETS, A. O. Quasinormal modes and holography. *Physical Review D*, v. 72, cod. 086009, p. 1-16, 2005.
- [119] KRAMER, D. et al. *Exact solutions of Einstein's field equations*. Cambridge: Cambridge University Press, 1980.
- [120] KRUSKAL, M. D. Maximal extension of Schwarzschild metric. *Physical Review*, v. 119, p. 1743-5, 1960.
- [121] KUBO, R. The fluctuation-dissipation theorem. *Reports on Progress in Physics*, v. 29, p. 255-84, 1966.
- [122] LEMOS, J. P. S. Three dimensional black holes and cylindrical general relativity. *Physics Letters B*, v. 353, p. 46-51, 1995.
- [123] LEMOS, J. P. S. Gravitational collapse to toroidal, cylindrical, and planar black holes. *Physical Review D*, v. 57, p. 4600-5, 1998.
- [124] LEMOS, J. P. S. Collapsing shells of radiation in anti-de Sitter spacetimes and the hoop and cosmic censorship conjectures. *Physical Review D*, v. 59, cod. 044020, p. 1-3, 1999.
- [125] LEMOS, J. P. S. Black holes with toroidal, cylindrical and planar horizons in anti-de Sitter spacetimes in general relativity and their properties. *Astronomy and Astrophysics: Recent Developments*, Proceedings of the 10th Portuguese Meeting on Astronomy and Astrophysics, 2001.
- [126] LEMOS, J. P. S.; ZANCHIN, V. T. Rotating charged black strings and three-dimensional black holes. *Physical Review D*, v. 54, p. 3840-53, 1996.
- [127] LI, L. et al. Low-temperature vortex liquid in $\text{La}_{2-x}\text{Sr}_x\text{CuO}_4$. *Nature Physics*, v. 3, p. 311-4, 2007.
- [128] LIU, H.; TSEYTLIN, A. A. $D = 4$ super Yang-Mills, $D = 5$ gauged supergravity and $D = 4$ conformal supergravity. *Nuclear Physics B*, v. 533, p. 88-108, 1998.
- [129] MALDACENA, J. M. The large N limit of superconformal field theories and supergravity. *Advances in Theoretical and Mathematical Physics*, v. 2, p. 231-52, 1998.
- [130] MALDACENA, J. M. Eternal black holes in anti-de Sitter. *Journal of High Energy Physics*, v. 04, cod. 021, p. 1-17, 2003.

- [131] MATEOS, D. String theory and quantum chromodynamics. *Classical and Quantum Gravity*, v. 24, p. S713-39, 2007.
- [132] MATSUMOTO, M. et al. Ground-state phase diagram of quantum Heisenberg antiferromagnets on the anisotropic dimerized square lattice. *Physical Review B*, v. 65, cod. 014407, p. 1-8, 2001.
- [133] MATZNER, R. A.; RYAN, M. P. Low-frequency limit of gravitational scattering. *Physical Review D*, v. 16, p. 1636-42, 1977.
- [134] MIRANDA, A. S. *Perturbações gravitacionais em buracos negros cilíndricos, toroidais e planares*. 2003. 110f. Dissertação (Mestrado em Física) – Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria, 2003.
- [135] MIRANDA, A. S.; ZANCHIN, V. T. Quasinormal modes of plane-symmetric anti-de Sitter black holes: A complete analysis of the gravitational perturbations. *Physical Review D*, v. 73, cod. 064034, 2006.
- [136] MIRANDA, A. S.; ZANCHIN, V. T. Gravitational perturbations and quasinormal modes of black holes with non-spherical topology. *International Journal of Modern Physics D*, v. 16, p. 421-6, 2007.
- [137] MISNER, C. W.; THORNE, K. S.; WHEELER, J. A. *Gravitation*. New York: W. H. Freeman and Company, 1973.
- [138] MONCRIEF, V. Odd-parity stability of a Reissner-Nordström black hole. *Physical Review D*, v. 9, p. 2707-9, 1974a.
- [139] MONCRIEF, V. Stability of Reissner-Nordström black holes. *Physical Review D*, v. 10, p. 1057-9, 1974b.
- [140] MORGAN, J. *Modos quase-normais de buracos negros plano-simétricos anti-de Sitter em d dimensões*. 2007. 87f. Dissertação (Mestrado em Física) – Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria, 2007.
- [141] MORSE, P. M.; FESHBACH, H. *Methods of Theoretical Physics*. New York: McGraw-Hill, 1953.
- [142] MOSS, I. G.; NORMAN, J. P. Gravitational quasinormal modes for anti-de Sitter black holes. *Classical and Quantum Gravity*, v. 19, p. 2323-32, 2002.

- [143] MUSIRI, S.; SIOPSIS, G. Perturbative calculation of quasi-normal modes of Schwarzschild black holes. *Classical and Quantum Gravity*, v. 20, p. L285-91, 2003.
- [144] NEGELE, J. W.; ORLAND, H. *Quantum many-particle systems*. Boulder: Westview Press, 1998.
- [145] NEWMAN, E.; PENROSE, R. An Approach to gravitational radiation by a method of spin coefficients. *Journal of Mathematical Physics*, v. 3, p. 566-78, 1962.
- [146] NOLLERT, H. Quasinormal modes: the characteristic ‘sound’ of black holes and neutron stars. *Classical and Quantum Gravity*, v. 16, R159-R216, 1999.
- [147] NOLLERT, H.; SCHMIDT, B. G. Quasinormal modes of Schwarzschild black holes: Defined and calculated via Laplace transformation. *Physical Review D*, v. 45, p. 2617-27, 1992.
- [148] NÚÑEZ, A.; STARINETS, A. O. AdS/CFT correspondence, quasinormal modes, and thermal correlators in $\mathcal{N} = 4$ supersymmetric Yang-Mills theory. *Physical Review D*, v. 67, cod. 120413, p. 1-12, 2003.
- [149] PESCHANSKI, R. B. Quark-gluon plasma/black hole duality from gauge/gravity correspondence. hep-ph/0710.0756. Disponível em: <<http://arxiv.org>> p. 1-6, 2007.
- [150] POLCHINSKI, J. *String Theory*. Cambridge: Cambridge University Press, 1998.
- [151] POLICASTRO, G.; SON, D. T.; STARINETS, A. O. Shear viscosity of strongly coupled $\mathcal{N} = 4$ supersymmetric Yang-Mills plasma. *Physical Review Letters*, v. 87, cod. 081601, p. 1-4, 2001.
- [152] POLICASTRO, G.; SON, D. T.; STARINETS, A. O. From AdS/CFT correspondence to hydrodynamics. *Journal of High Energy Physics*, v. 09, cod. 043, p. 1-16, 2002a.
- [153] POLICASTRO, G.; SON, D. T.; STARINETS, A. O. From AdS/CFT correspondence to hydrodynamics, II. Sound waves. *Journal of High Energy Physics*, v. 12, cod. 054, p. 1-16, 2002b.
- [154] POLITZER, D. H. Reliable perturbative results for strong interactions? *Physical Review D*, v. 30, p. 1346-9, 1973.
- [155] POLYAKOV, A. M. Quantum geometry of bosonic strings. *Physics Letters B*, v. 103, p. 207-10, 1981.

- [156] PRESS, W. H. Long wave trains of gravitational waves from a vibrating black hole. *The Astrophysical Journal*, v. 170, L105-L108, 1971.
- [157] PRICE, R. H. Nonspherical perturbations of relativistic gravitational collapse. I. Scalar and gravitational perturbations. *Physical Review D*, v. 5, p. 2419-38, 1972.
- [158] REGGE, T.; WHEELER, J. A. Stability of a Schwarzschild singularity. *Physical Review*, v. 108, p. 1063-9, 1957.
- [159] ROVELLI, C. *Quantum Gravity*. Cambridge: Cambridge University Press, 2004.
- [160] RUFFINI, R. *Black Holes: les Astres Occlus*. New York: Gordon and Breach, 1973.
- [161] SACHDEV, S. *Quantum Phase Transitions*. Cambridge: Cambridge University Press, 1999.
- [162] SACHDEV, S. Quantum magnetism and criticality. cond-mat.str-el/0711.3015. Disponível em: <<http://arxiv.org>> p. 1-39, 2008.
- [163] SAMBANDAMURTHY, G. et al. Experimental evidence for a collective insulating state in two-dimensional superconductors. *Physical Review Letters*, v. 94, cod. 017003, p. 1-4, 2005.
- [164] SANDVIK, A. W. Evidence for deconfined quantum criticality in a two-dimensional Heisenberg model with four-spin interactions. *Physical Review Letters*, v. 98, cod. 2272202, p. 1-4, 2007.
- [165] SCHUTZ, B. F. *A first Course in general relativity*. Cambridge: Cambridge University Press, 1985.
- [166] SCHARNHORST, K. On propagation of light in the vacuum between plates. *Physics Letters B*, v. 236, p. 354-9, 1990.
- [167] SCHWINGER, J. S. Brownian motion of a quantum oscillator. *Journal of Mathematical Physics*, v. 02, p. 407-32, 1961.
- [168] SEIBERG, N. Notes on theories with 16 supercharges. *Nuclear Physics B*, v. 67, p. 158-71, 1998.
- [169] SENTHIL, T. et al. Deconfined quantum critical points. *Science*, v. 303, p 1490-4, 2004a.

- [170] SENTHIL, T. et al. Quantum criticality beyond the Landau-Ginzburg-Wilson paradigm. *Physical Review B*, v. 70, cod. 144407, p. 1-33, 2004b.
- [171] SHAHAR, D. et al. A different view of the quantum Hall plateau-to-plateau transitions. *Physical Review Letters*, v. 79, p. 479-82, 1997.
- [172] SHORE, G. M. Quantum gravitational optics. *Contemporary Physics*, v. 44, p. 503-21, 2003.
- [173] SHURYAK, E. Why does the quark-gluon plasma at RHIC behave as a nearly ideal fluid? *Progress in Particle and Nuclear Physics*, v. 53, p. 273-303, 2004.
- [174] SHURYAK, E. What RHIC experiments and theory tell us about properties of quark-gluon plasma? *Nuclear Physics A*, v. 750, p. 64-83, 2005.
- [175] SHURYAK, E.; ZAHED, I. Understanding the strong coupling limit of the $\mathcal{N} = 4$ supersymmetric Yang-Mills theory at finite temperature. *Physical Review D*, v. 69, cod. 046005, p. 1-13, 2004.
- [176] SIOPSIS, G. Low frequency quasi-normal modes of AdS black holes. *Journal of High Energy Physics*, v. 05, cod. 042, p. 1-14, 2007.
- [177] SON, D. T.; STARINETS, A. O. Minkowski-space correlators in AdS/CFT correspondence: Recipe and applications. *Journal of High Energy Physics*, v. 09, cod. 042, p. 1-24, 2002.
- [178] SON, D. T.; STARINETS, A. O. Hydrodynamics of R -charged black holes. *Journal of High Energy Physics*, v. 03, cod. 052, p. 1-19, 2006.
- [179] SON, D. T.; STARINETS, A. O. Viscosity, black holes, and quantum field theory. *Annual Review of Nuclear and Particle Science*, v. 57, p. 95-118, 2007.
- [180] SPIELMAN, I. B.; PHILLIPS, W. D.; PORTO, J. V. Mott-insulator transition in a two-dimensional atomic bose gas. *Physical Review Letters*, v. 98, cod. 080404, p. 1-4, 2007.
- [181] STACHEL, J. Globally stationary but locally static space-times: A gravitational analog of the Aharonov-Bohm effect. *Physical Review D*, v. 26, p. 1281-90, 1982.
- [182] STARK, R. F.; PIRAN, T. Gravitational-wave emission from rotating gravitational collapse. *Physical Review Letters*, v. 55, p. 891-4, 1985.

- [183] STAROBINSKY, A. A. Amplification of waves during reflection from a rotating "black hole". *Soviet Physics JETP*, v. 37, p. 28, 1973.
- [184] STEINER, M. A.; BOEBINGER, G.; KAPITULNIK, A. Possible field-tuned superconductor-insulator transition in high- T_c superconductors: Implications for pairing at high magnetic fields. *Physical Review Letters*, v. 94, cod. 107008, p. 1-4, 2005.
- [185] STEWART, J. M.; WALKER, M. Perturbations of spacetimes in general relativity. *Proceedings of the Royal Society of London A*, v. 341, p. 49-74, 1974.
- [186] STONE, M. B. et al. Field-driven phase transitions in a quasi-two-dimensional quantum antiferromagnet. *New Journal of Physics*, v. 9, cod. 31, p. 1-32, 2007.
- [187] SUSSKIND, L. The world as a hologram. *Journal of Mathematical Physics*, v. 36, p. 6377-96, 1995.
- [188] SZEKERES, G. On the singularities of a Riemannian manifold. *Publicationes Mathematicae Debrecen*, v. 7, p. 285-301, 1960.
- [189] TEUKOLSKY, S. A. Rotating black holes: Separable wave equations for gravitational and electromagnetic perturbations. *Physical Review Letters*, v. 29, p. 1114-8, 1972.
- [190] TEUKOLSKY, S. A. Perturbations of a rotating black hole. I. Fundamental equations for gravitational, electromagnetic, and neutrino-Field perturbations. *Astrophysical Journal*, v. 185, p. 635-48, 1973.
- [191] 'T HOOFT, G. An algorithm for the poles at dimension four in the dimensional regularization procedure. *Nuclear Physics B*, v. 62, p. 444-60, 1973.
- [192] 'T HOOFT, G. A planar diagram theory for strong interactions. *Nuclear Physics B*, v. 72, p. 461-73, 1974.
- [193] 'T HOOFT, G. Dimensional reduction in quantum gravity. gr-qc/9310026. Disponible em: <<http://arxiv.org>> p. 1-13, 1993.
- [194] T' HOOFT, G.; VELTMAN, M. One-loop divergencies in the theory of gravitation. *Annales de l'institut Henri Poincaré (A) Physique théorique*, v. 20, p. 69-94, 1974.
- [195] TOWNSEND, P. K. D-branes from M-branes. *Physics Letters*, v. 373, p. 68-75, 1996.
- [196] VISHVESHWARA, C. V. Scattering of gravitational radiation by a Schwarzschild black-hole. *Nature*, v. 227, p. 936-8, 1970.

- [197] WALD, R. M. *General Relativity*. Chicago: The University of Chicago Press, 1984.
- [198] WANG, B.; ABDALLA, E.; MANN, R. B. Scalar wave propagation in topological black hole backgrounds. *Physical Review D*, v. 65, cod. 084006, 2002.
- [199] WANG, L.; BEACH, K. S. D.; SANDVIK, A. W. High-precision finite-size scaling analysis of the quantum-critical point of $S=1/2$ Heisenberg antiferromagnetic bilayers. *Physical Review B*, v. 73, cod. 014431, p. 1-10, 2006.
- [200] WANG, Y.; LI, L.; ONG, N. P. Nernst effect in high- T_c superconductors. *Physical Review B*, v. 73, cod. 024510, p. 1-20, 2006.
- [201] WANG, B.; LIN, C.-Y.; ABDALLA, E. Quasinormal modes of Reissner-Nordström anti-de Sitter black holes. *Physics Letters B*, v. 481, p. 79-88, 2000.
- [202] WANG, B.; LIN, C.-Y.; MOLINA, C. Quasinormal behavior of massless scalar field perturbation in Reissner-Nordström anti-de Sitter spacetimes. *Physical Review D*, v. 70, cod. 064025, 2004.
- [203] WANG, B.; MOLINA, C.; ABDALLA, E. Evolution of a massless scalar field in Reissner-Nordström anti-de Sitter spacetimes. *Physical Review D*, v. 63, cod. 084001, 2001.
- [204] WEINBERG, S. *Gravitation and cosmology: Principles and applications of the general theory of relativity*. New York: John Wiley & Sons, 1972.
- [205] WITTEN, E. Quantum background independence in string theory. hep-th/9306122. Disponível em: <<http://arxiv.org>> p. 1-24, 1993.
- [206] WITTEN, E. Anti de Sitter space and holography. *Advances in Theoretical and Mathematical Physics*, v. 2, p. 253-91, 1998.
- [207] YOUNG, D. *The AdS/CFT correspondence: Classical, quantum, and thermodynamical aspects*. 2007. 189f. Tese (Doutorado em Física) – The University of British Columbia, Vancouver, 2007.
- [208] Xu, Z. A. et al. Vortex-like excitations and the onset of superconducting phase fluctuation in underdoped $\text{La}_{2-x}\text{Sr}_x\text{CuO}_4$. *Nature*, v. 406, p. 486-8, 2000.
- [209] ZAAANEN, J. A black hole full of answers. *Nature*, v. 448, p. 1000-1, 2007.

- [210] ZERILLI, F. J. Effective potential for even-parity Regge-Wheeler gravitational perturbation equations. *Physical Review Letters*, v. 24, p. 737-8, 1970a.
- [211] ZERILLI, F. J. Gravitational field of a particle falling in a Schwarzschild geometry analyzed in tensor harmonics. *Physical Review D*, v. 2, p. 2141-60, 1970b.
- [212] ZHU, J.-M.; WANG, B.; ABDALLA, E. Object picture of quasinormal ringing on the background of small Schwarzschild anti-de Sitter black holes. *Physical Review D*, v. 63, cod. 124004, 2001.
- [213] ZWIEBACH, B. *A first course in string theory*. Cambridge: Cambridge University Press, 2004.