



**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA MARIA
CENTRO DE CIÊNCIAS NATURAIS E EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA**

**UMA SOLUÇÃO PARA A EQUAÇÃO DA ENERGIA
CINÉTICA TURBULENTA EMPREGANDO
O MÉTODO DAS CARACTERÍSTICAS**

TESE DE DOUTORADO

Charles Rogério Paveglio Szinvelski

Santa Maria, RS, Brasil

2009

**UMA SOLUÇÃO PARA A EQUAÇÃO DA ENERGIA
CINÉTICA TURBULENTA EMPREGANDO
O MÉTODO DAS CARACTERÍSTICAS**

por

Charles Rogério Paveglio Szinvelski

Tese apresentada ao Curso de Doutorado do Programa de Pós-Graduação em Física, Área de Concentração em Física, da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM, RS), como requisito parcial para a obtenção do grau de **Doutor em Física.**

Orientador: Gervásio Annes Degrazia

Co-Orientador: Antônio Gledson de Oliveira Goulart

Santa Maria, RS, Brasil

2009

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA MARIA
CENTRO DE CIÊNCIAS NATURAIS E EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA**

A Comissão Examinadora, abaixo assinada,
aprova a Tese de Doutorado

**UMA SOLUÇÃO PARA A EQUAÇÃO DA ENERGIA
CINÉTICA TURBULENTA EMPREGANDO
O MÉTODO DAS CARACTERÍSTICAS**

elaborada por
Charles Rogério Paveglio Szinvelski

como requisito parcial para obtenção do grau de
Doutor em Física

COMISSÃO EXAMINADORA:

Gervásio Annes Degrazia, Dr. (UFSM)
(Presidente/Orientador)

Antônio Gledson de Oliveira Goulart, Dr. (UNIPAMPA)
(Co-Orientador)

José Carlos Merino Mombach, Dr. (UFSM)

Matheus Jatkoske Lazo, Dr. (FURG)

Otávio Costa Acevedo, Dr. (UFSM)

Santa Maria, 31 de Agosto de 2009.

À Lidiane.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a todas as pessoas e entidades que, de uma forma ou de outra, colaboraram para a realização deste trabalho e, em destaque:

- À minha mãe Maria pelo sustento, incentivo, carinho e amor que sempre me é dado.
- Ao meu irmão Tiago, que além de nossa matiz e vivência em comum, pelo apreço e carinho.
- Ao meu grande amigo Fábio pelo apoio, companherismo e amizade de longa data.
- Aos colegas e amigos Alex e Guilherme pelas discussões e ensinamentos de física, matemática e filosofias!
- Aos professores Gervásio Annes Degrazia e Antônio Gledson de Oliveira Goulart pela orientação e coorientação, respectivamente.
- Ao PPGFis pela oportunidade e disponibilização dos recursos, materiais e humanos, necessários para a realização deste trabalho.
- A CAPES pelo suporte financeiro.
- À Lidiane, ... *per tutto quello che mi dai anche quando non lo sai.*

...

– *Gato Cheshire ... quer fazer o favor de me dizer qual é o caminho que eu devo tomar?*

– *Isso depende muito do lugar para onde você quer ir, disse o gato.*

– *Não me interessa muito para onde ... – disse Alice.*

– *Não tem importância então o caminho que você tomar – disse o gato.*

– *... contando que eu chegue a algum lugar, acrescentou Alice como uma explicação.*

– *Ah, disso pode ter certeza – disse o gato – desde que caminhe bastante.*

Lewis Carrol - Alice no país das maravilhas.

RESUMO

Tese de doutorado
Programa de Pós-Graduação em Física
Universidade Federal de Santa Maria

UMA SOLUÇÃO PARA A EQUAÇÃO DA ENERGIA CINÉTICA TURBULENTA EMPREGANDO O MÉTODO DAS CARACTERÍSTICAS

AUTOR: CHARLES ROGÉRIO PAVEGLIO SZINVELSKI

ORIENTADOR: GERVÁSIO ANNES DEGRAZIA

CO-ORIENTADOR: ANTÔNIO GLEDSON DE OLIVEIRA GOULART

Data e Local da Defesa: Santa Maria, 31 de Agosto de 2009.

No presente trabalho, utilizando o Método das Característica e recursos numéricos, apresenta-se uma solução para a Equação de Evolução Espectral de Densidade de Energia Cinética Turbulenta para uma Camada Limite Convectiva (CLC) no período da manhã.

Apresenta-se três modelos para a evolução espectral da densidade de energia. O primeiro modelo, baseado na suposição de um regime de turbulência isotrópica, considera apenas termos de transferência de energia inercial e de dissipação viscosa. O segundo modelo adiciona o termo de produção de energia devido o início da ação do parâmetro de fluxo de calor na superfície, porém considerá-se um termo de transferência de energia inercial anisotrópico. O terceiro modelo emprega uma configuração mista dos dois modelos anteriores, admitindo, desta forma, regiões distintas de atuação para os termos de transferência inercial.

Os resultados obtidos modelaram a evolução da CLC. Neste caso, o crescimento do espectro de energia modelado se deu pela inserção de energia na região de baixos números de onda, região em que o termo de transferência de energia anisotrópico não consegue transferir a energia inserida pelo termo de produção de energia. Observa-se que em uma região de número de onda mais alto existe uma estabilização da variação do parâmetro temporal sobre as curvas características planas (CCP), indicando que a variação do número de onda governará a evolução do espectro de energia. Fato que estabelece um tipo de critério de estacionariedade para de regimes de escoamento turbulento.

Palavras-chave: Equação da Energia Cinética Turbulenta; Método das Características; Teorema de Cauchy-Kowalevsky; Modelo Tridimensional de Kristensen para o Espectro de Energia Cinética Turbulenta.

ABSTRACT

Tese de doutorado
Programa de Pós-Graduação em Física
Universidade Federal de Santa Maria

A SOLUTION FOR THE TURBULENT KINETIC ENERGY EQUATION EMPLOYING THE METHOD OF CHARACTERISTICS

AUTHOR: CHARLES ROGÉRIO PAVEGLIO SZINVELSKI

ADVISER: GERVÁSIO ANNES DEGRAZIA

ADVISER: ANTÔNIO GLEDSON DE OLIVEIRA GOULART

Local and Date: Santa Maria, August 31nd, 2009.

In this study, using the Method of Characteristics and numeric resources, presents a solution to the equation Spectral Density Evolution of Turbulent Kinetic Energy for a Convective Boundary Layer (CBL) in the morning.

It presents three models for the evolution of spectral energy density. The first model, based on the assumption of a system of isotropic turbulence, considering only terms of energy transfer inertial and viscous dissipation. The second model adds the term energy production due to the onset of action of the parameter of heat flux on the surface, but consider it a term of energy transfer inertial anisotropy. The third model employs a mixed configuration of the two previous models, assuming thus distinct regions of operation to inertial transfer terms.

The results shaped the evolution of the CLC. In this case, the growth of the energy spectrum is modeled by inserting energy in the region of low wave numbers, a region in which the term of anisotropic energy transfer can not transfer the energy introduced by the energy production term. It is observed that in a region of wave number higher there is a stabilization of the parameter variation temporal on the plane characteristics curves (PCC), indicating that the variation of wave number govern the evolution of the energy spectrum. This fact establishes a kind of criterion for stationarity of turbulent flow regimes.

Keywords: Turbulent Kinetic Energy Equation; Method of Characteristic; Cauchy-Kowalevs-ky Theorem; Tridimensional Kristensen Model for Turbulent Kinetic Energy.

LISTA DE FIGURAS

2.1	Forma característica de um espectro tridimensional para uma turbulência bem desenvolvida. Figura adaptada de: Medeiros (2005).	16
2.2	Espectro tridimensional calculado a partir da Equação (2.57) para os caso não-isotrópico e Equação (2.59) para o caso isotrópico. A função Ξ é sugerida por Moeng (1984).	33
2.3	Espectro tridimensional calculado a partir da Equação (2.57) para os caso não-isotrópico e Equação (2.59) para o caso isotrópico. A função Ξ é sugerida por Højstrup (1982).	33
2.4	Espectro tridimensional calculado a partir da Equação (2.57) para os caso não-isotrópico. A função Ξ é sugerida por Moeng (1984).	34
2.5	a) Esboço geométrico da relação do campo vetorial \mathbf{V} e o vetor normal $\hat{\mathbf{n}}$ de S ($\mathbf{V} \subset$ Plano Tangente à S). b) Representação geométrica da <i>curva integral</i> \mathcal{C} . c) Concepção geométrica da construção da <i>superfície integral</i> , candidata à <i>superfície solução</i> do Problema de Cauchy. d) <i>Superfície solução</i> gerada pela curva inicial Γ e suas curvas característica \mathcal{C} . Figura modificada a partir de figuras de Levandosky(2002) - Fig. 2.1-a) à Fig. 2.1-c); e Iório (2001) - Fig. 2.1-d).	51
2.6	Representação gráfica da solução da Equação (2.107), de sua curva inicial, de sua curva característica e das respectivas projeções planas.	53
3.1	Espectro de energia tridimensional calculado a partir da 3.29. O espectro inicial é dado pela Equação (2.59) e a função Ξ é a sugerida por Moeng (1984).	65
3.2	Comparação entre a lei dos $k^{-5/3}$ de Kolmogorov e o espectro de energia tridimensional calculado a partir da 3.29. Espectro inicial dado pela Equação (2.59). A função Ξ é sugerida por Moeng (1984).	66
3.3	Espectro de energia tridimensional calculado a partir da solução da Equação (3.37) para $\frac{z}{z_i} = 0, 2$. A função Ξ é sugerida por Moeng (1984).	69
3.4	Espectro de energia tridimensional calculado a partir da solução da Equação (3.37) para $\frac{z}{z_i} = 0, 5$. A função Ξ é sugerida por Moeng (1984).	69
3.5	Espectro de energia tridimensional calculado a partir da solução da Equação (3.37) para $\frac{z}{z_i} = 0, 8$. A função Ξ é sugerida por Moeng (1984).	70
3.6	Representação gráfica dos termos \mathbf{H} , \mathbf{W}_b , \mathbf{W}_a e $\mathbf{W}_a + \mathbf{W}_b$	71

3.7	Campo de vetores associado $\frac{dk'(s, r)}{dr} = Ak'^{5/3}$	72
3.8	Campo de vetores associado a $\frac{dk'(s, r)}{dr} = A_1k'^{1/3}$	72
3.9	Espectro de energia tridimensional calculado a partir da solução da Equação (3.37) para $\frac{z}{z_i} = 0, 2$. A função Ξ é sugerida por Moeng (1984).	74
3.10	Espectro de energia tridimensional calculado a partir da solução da Equação (3.37) para $\frac{z}{z_i} = 0, 5$. A função Ξ é sugerida por Moeng (1984).	74
3.11	Espectro de energia tridimensional calculado a partir da solução da Equação (3.37) para $\frac{z}{z_i} = 0, 8$. A função Ξ é sugerida por Moeng (1984).	75
D.1	a) <i>Cone de Monge</i> e seus planos formadores. b) <i>Campo de cones</i> sobre a <i>superfície integral</i> . c) Esboço geométrico das propriedades da <i>faixa característica</i> . d) Construção da <i>faixa característica</i> a partir da <i>faixa inicial</i> e suas respectivas <i>curvas suportes</i> . Figura modificada a partir de figuras de John (1981) - Fig. 2.3-a) e Fig. 2.3-b); e Nandakumaran e Prasad (1999) - Fig. 2.3-c) e Fig. 2.4-d). 95	

LISTA DE TABELAS

2.1	Constantes do polinômio interpolador para $\frac{z}{z_i} = 0, 2$	35
2.2	Constantes do polinômio interpolador para $\frac{z_i}{z} = 0, 5$	35
2.3	Constantes do polinômio interpolador para $\frac{z_i}{z} = 0, 8$	35
2.4	Análise de Erro do polinômio interpolador para $\frac{z}{z_i} = 0, 2$	36
2.5	Análise de Erro do polinômio interpolador para $\frac{z_i}{z} = 0, 5$	36
2.6	Análise de Erro do polinômio interpolador para $\frac{z_i}{z} = 0, 8$	36
3.1	Parâmetros meteorológicos para a CLC.	65
A.1	Constante c_1	78
B.1	Constante c_2	79

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	13
2	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	15
2.1	Espectro de Densidade de Energia Tridimensional	15
2.1.1	A Função Espectro de Energia	16
2.1.2	Espectro Tridimensional Escrito em Função dos Espectros Unidimensionais	30
2.1.3	Interpolação Polinomial para o Espectro Tridimensional Válido para uma Turbulência Não-Isotrópica	34
2.2	Equação Dinâmica para o Espectro de Densidade de Energia	37
2.2.1	Dinâmica da correlação da velocidade de um ponto	37
2.2.2	Dinâmica da correlação da velocidade entre dois pontos	39
2.2.3	Turbulência Homogênea	42
2.2.4	A Equação Dinâmica para o Espectro de Energia	44
2.3	Equações Diferenciais Parciais – EDP’s.	47
2.3.1	Conceitos Gerais e Notação	47
2.3.2	O Método das Características	49
2.3.3	Condição Não-Characterística	53
2.3.4	Considerações	56
3	MODELOS DE EVOLUÇÃO ESPECTRAL DA DENSIDADE DE ENERGIA PARA A CAMADA LIMITE CONVECTIVA - CLC.	57
3.1	Parametrizações e Adimensionalizações	58
3.1.1	Termo de Convecção Térmica	58
3.1.2	Termo de Transferência de Energia Cinética por Efeito Inercial	60
3.1.3	Termo de Produção de Energia por efeito Mecânico	62
3.1.4	Adimensionamento dos termos de Dissipação de Energia por Viscosidade Molecular e Variação temporal do Espectro de Densidade de Energia	62
3.1.5	A Equação de Evolução para o Espectro de Densidade de Energia Turbulenta Adimensionalizada	63
3.2	Modelo Isotrópico	63
3.3	Um Modelo Anisotrópico	66

3.4	Modelo Híbrido	70
4	CONCLUSÃO	76
5	SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS	77
A	Determinação da constante c_1	78
B	Determinação da constante c_2	79
C	Notação multi-indices e exemplos	80
C.1	Notação multi-indices	80
C.2	Exemplos	80
C.2.1	Exemplo de ordenação de multi-índices (Seção B.1 - Item 3.)	81
C.2.2	Uma exemplificação da equivalência entre a Equação (2.100) e a Equação (2.101)	81
D	Resultados sobre Existência e Unicidade de solução local para EDP's	83
D.1	Teorema de Cauchy-Kowalevski	83
D.2	Resultados sobre Existência e Unicidade de solução local para EDP's de 1ª Ordem.	92
D.2.1	Abordagem Geométrica do Método das Características	92
D.2.2	Existência Local e Unicidade de Solução para uma EDP de Ordem 1: Caso Não-Linear Geral.	97
D.2.3	Existência Local e Unicidade de Solução para uma EDP de Ordem 1: Caso Quasilinear	103
D.2.4	Existência Local e Unicidade de Solução para uma EDP de Ordem 1: Caso Linear	104

1 INTRODUÇÃO

A idéia de elaboração de um modelo físico que descreva a evolução da energia cinética turbulenta (ECT) no período da manhã baseado na hipótese de convergência para um regime de turbulência bem desenvolvida, abrange diversos argumentos relacionados à fenomenologia do sistema físico.

Tal modelo deve proporcionar uma base teórica para a interpretação e extrapolação dos dados envolvidos no fenômeno natural. A gênese de tal modelo, necessariamente, será calçada na percepção dos elementos e fatores envolvidos na evolução do processo natural. Neste ponto, devido a complexidade de qualquer fenômeno natural, faz-se necessário uma representação idealizada. Esta aproximação se dá através da confecção de parâmetros relacionados ao evento. Estes parâmetros são expressões e/ou equações substitutas dos termos desconhecidos envolvidos no processo, e neles reside a confiabilidade do modelo. Basicamente, neste tipo de descrição, estabelece-se um modelo quando constrói-se um equacionamento que relacione os parâmetros envolvidos e sua evolução durante o processo.

O modelo de evolução espectral de densidade de energia num período típico de crescimento da camada limite convectiva (CLC) está baseado num sistema de equações diferenciais parciais conhecidos como Equações de Navier-Stokes (HINZE, 1975). Este modelo prediz a evolução da energia cinética turbulenta na CLC a partir da parametrização das formas de produção, dissipação e transferência de energia. O modelo resultante é uma Equação Diferencial Parcial (EDP) de primeira ordem. O método para a obtenção de soluções adotado é o Método das Características. Justifica-se a escolha deste método por não ser um método restritivo, isto é, ele aplica-se a qualquer EDP de primeira ordem e, ainda, permite o emprego de técnicas numéricas que são facilmente incorporadas pelo método.

Ainda, trabalhos clássicos sobre a evolução espectral da ECT abordam o problema em situações de quase-estacionaridade, admitindo um estado de equilíbrio e independência temporal dos parâmetros que descrevem a estrutura da CLP (Goulart et al. (2007) apud Driedonks e Tennekes (1984), apud Kaimal et al. (1976) e apud Caughey (1982)). Em seu trabalho Kristensen et al. (1989) constrói espectros de densidade de energia 3D a partir de espectros unidimensionais que descrevem situações de escoamento turbulentos não-isotrópicos. Como já citado, Hinze (1975) fornece uma dedução para uma equação que descreve a evolução temporal do espectro de densidade de ECT em função dos termos de produção ou consumo de energia cinética turbulenta (Goulart (2001) apud Batchelor (1953)), de produção de ener-

gia por efeito mecânico (Abentroth (2007)), de transferência inercial de energia cinética e de dissipação de energia por viscosidade molecular (ver Pao (1965), Yeh e Atta (1973), Goulart et al. (2003)). Também, é apresentada em Hinze (1975), assim como em Tennekes e Lumley (1972) e em Pao (1965), uma solução para a evolução do espectro 3D para o intervalo universal. Trabalhos recentes, como Goulart et al. (2003), Goulart et al. (2007) e Goulart et al. (2008), utiliza-se desta equação de evolução temporal do espectro de densidade de energia para sugerir modelos teóricos (semi-numéricos) para a obtenção de expressões que descrevam o comportamento da função espectral de ECT para todo o intervalo de número de onda, seja para situações típica de decaimento (Goulart et al. (2003) e Goulart et al. (2008)) ou crescimento (Goulart et al. (2007)) da energia cinética turbulenta na CLC. Outros modelos, como LES, também são empregados para descrição, e comparação com modelos espectrais, da evolução do espectro de densidade de ECT (para o decaimento da CLC citam-se: Nieuwstadt e Brost (1986) e Sorbjan (1997)).

Neste trabalho, apresenta-se três modelos para a evolução espectral da densidade de energia cinética turbulenta para um período típico de crescimento da CLC. O primeiro, baseado na suposição de um regime de turbulência isotrópica, considera apenas termos de transferência de energia inercial e de dissipação viscosa. O segundo, adiciona o termo de fonte de energia devido a inserção do parâmetro de fluxo de calor na superfície, porém considerá-se um termo de transferência de energia inercial anisotrópico. O terceiro, emprega uma configuração mista dos dois modelos anteriores, admitindo, desta forma, regiões distintas de atuação para os termos de transferência inercial.

O trabalho está estruturado em cinco capítulos. O segundo capítulo fornece as fundamentações físicas e matemáticas relacionados ao modelo construído. Na parte física expõem-se as contas e metodologia desenvolvido por Kristensen et al. (1989) para a construção do espectro 3D a partir de espectros unidimensionais da energia cinética turbulenta e, também, reproduz-se a dedução da equação de evolução espectral de densidade de energia. Na segunda parte fundamenta-se o método matemático para a obtenção da solução. O terceiro capítulo apresenta uma breve descrição dos parâmetros utilizados na elaboração dos três modelos de evolução espectral, juntamente com a construção e análise das soluções encontradas. O quarto capítulo encerra as conclusões e o quinto capítulo apresenta possíveis encaminhamentos de trabalhos futuros.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Nesse capítulo serão estabelecidos os conceitos, as equações, os parâmetros e o método a serem utilizados no decorrer desse trabalho. Inicia-se com a construção do espectro de densidade de energia cinética turbulenta tridimensional a partir de espectros unidimensionais, conforme o procedimento desenvolvido por KRISTENSEN et al., 1989. Segue-se a dedução da Equação Dinâmica do Espectro de Densidade de Energia (ou simplesmente, Equação Dinâmica do Espectro de Energia), baseado no desenvolvimento encontrado em HINZE, 1975. A fundamentação matemática, em um primeiro instante, consiste na exposição do *Método de Cauchy* – o Método das Características, no enunciado dos teoremas de existência e unicidade de soluções clássicas e sua aplicabilidade às Equações Diferenciais Parciais – EDP's (FOLLAND, 1995).

2.1 Espectro de Densidade de Energia Tridimensional

O comportamento observado do espectro de energia turbulenta pode auxiliar de maneira decisiva na escolha de escalas típicas de velocidade e comprimento, fundamentais na obtenção dos parâmetros turbulento (Degrazia e Goulart (2005)). A forma geral do espectro de energia de uma turbulência bem desenvolvida está representado na Figura 2.1.

O espectro apresentado na Figura 2.1 apresenta três regiões características: a primeira corresponde aos baixos números de onda (baixas frequências); a segunda inicia em k_2 e vai até os comprimentos de onda da ordem da microescala de Kolmogorov e a terceira aos altos números de onda (altas frequências).

O intervalo que inicia próximo de zero e se estende até o número de onda k_1 corresponde aos grandes turbilhões de caráter permanente, que não possuem a maior parcela de energia turbulenta total. O intervalo entre k_1 e k_2 corresponde aos turbilhões mais energéticos, ou seja, aos que contém a maior parcela de energia turbulenta total. Na primeira região é que se dá a entrada de energia, através de fontes mecânicas, pelo cisalhamento do vento médio, bem como, por fontes térmicas, que produzem uma instabilidade térmica. Nela, os turbilhões são não-isotrópicos e suas propriedades dependem da forma como foram gerados. Além disso, nesta região é que os grandes turbilhões interagem com os contornos, superfície e camada de inversão na CLP.

No subintervalo inercial, que corresponde ao intervalo dos números de onda k_2 a k_3 , a turbulência é isotrópica ou próxima da condição de isotropia. Neste intervalo a energia

não é gerada nem consumida, apenas é transferida dos maiores turbilhões para os menores a uma taxa ϵ por unidade de massa. A turbulência nesse intervalo tem caráter estacionário e é inteiramente determinada pela taxa ϵ (KOLMOGOROV, 1941), conseqüentemente pode-se aplicar a lei dos $(-5/3)$ de Kolmogorov dada por:

$$\mathbf{E}(k) = \alpha \epsilon^{2/3} k^{-5/3} \quad (2.1)$$

em que α é a constante de Kolmogorov e $\mathbf{E}(k)$ é a densidade espectral de energia.

Na terceira região as forças viscosas de origem molecular dissipam a energia cinética turbulenta (ECT).

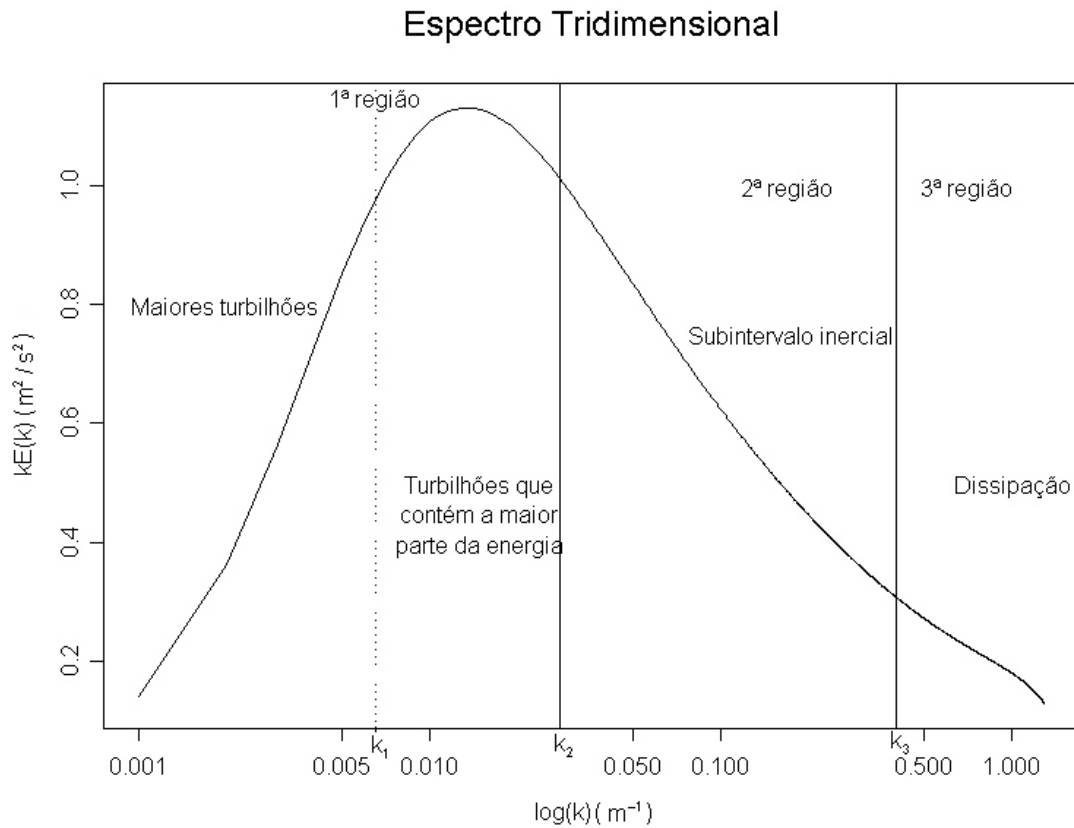


Figura 2.1: Forma característica de um espectro tridimensional para uma turbulência bem desenvolvida. Figura adaptada de: Medeiros (2005).

2.1.1 A Função Espectro de Energia

Seja um campo de velocidade turbulento homogêneo. para este campo a média da velocidade é constante no espaço e o tensor autocorrelação é dado em Kristensen et al. (1989)

e expresso por

$$\mathbf{R}_{ij}(\vec{r}) = \langle (u_i(\vec{x})) (u_j(\vec{x} + \vec{r})) \rangle \quad (2.2)$$

Admitindo \mathbf{R}_{ij} é simétrico ¹, isto é,

$$\mathbf{R}_{ij}(-\vec{r}) = \mathbf{R}_{ji}(\vec{r}) = \mathbf{R}_{ij}(\vec{r}) \quad (2.3)$$

Isto significa que \mathbf{R}_{ij} . Assume-se que o campo seja isotrópico, no sentido de que não há uma direção preferencial no espaço. Ainda, desde que assume-se homogeneidade em todas as direções, o vento de cisalhamento pode ser desconsiderado.

Por convenção, caracteriza-se o vetor unitário \mathbf{i}_1 , como sendo o componente ao longo da direção do vento médio, o vetor unitário \mathbf{i}_3 , corresponde ao componente vertical e o vetor unitário \mathbf{i}_2 é definido como $\mathbf{i}_2 = \mathbf{i}_3 \times \mathbf{i}_1$.

Nas condições estipuladas acima, uma forma apropriada para o tensor espectral,

$$\Phi_{i,j}(\vec{k}) = \frac{1}{8\pi^3} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{R}_{i,j}(\vec{r}) \exp(-i\vec{k} \cdot \vec{r}) d^3r, \quad (2.4)$$

com $d^3r = dr_1 dr_2 dr_3$, é

$$\Phi_{i,j}(\vec{k}) = \sum_{l=1}^3 A_l(k) \left\{ \delta_{li} - \frac{k_l k_i}{k^2} \right\} \left\{ \delta_{lj} - \frac{k_l k_j}{k^2} \right\}, \quad (2.5)$$

com $A_1(k)$, $A_2(k)$ e $A_3(k)$ sendo funções reais de k , com $k = |\vec{k}|$ e \vec{k} é o vetor número de onda.

Da integração do espectro de densidade de energia referido na Seção 2.2.4 e definido pela expressão, $\mathbf{E}(k) = \frac{1}{2} \int dA(k) \Phi_{i,i}(\vec{k})$ e integrando o traço do tensor espectral no espaço do número de onda sobre uma superfície esférica de raio $k = \text{constante}$, isto é,

$$\mathbf{E}(k) = \frac{k^2}{2} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \sum_{i=1}^3 \Phi_{i,i}(r, \theta, \phi) \sin\theta d\theta d\phi. \quad (2.6)$$

A dupla integração é facilmente calculada, obtendo

$$\mathbf{E}(k) = \frac{4\pi}{3} k^2 [A_1(k) + A_2(k) + A_3(k)]. \quad (2.7)$$

¹Invariância frente reflexões e translações.

De fato, a expressão para $\Phi_{i,i}(k)$ é dada por:

$$\begin{aligned}\Phi_{i,i}(\vec{k}) &= \sum_{l=1}^3 A_l(k) \left[\delta_{li} - \frac{k_l k_i}{k^2} \right]^2 \\ &= A_1(k) \left[\delta_{1i} - \frac{k_1 k_i}{k^2} \right]^2 + A_2(k) \left[\delta_{2i} - \frac{k_2 k_i}{k^2} \right]^2 + A_3(k) \left[\delta_{3i} - \frac{k_3 k_i}{k^2} \right]^2,\end{aligned}\quad (2.8)$$

Então

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^3 \Phi_{i,i}(\vec{k}) &= \sum_{i=1}^3 A_1(k) \left[\delta_{1i} - \frac{k_1 k_i}{k^2} \right]^2 + A_2(k) \left[\delta_{2i} - \frac{k_2 k_i}{k^2} \right]^2 + A_3(k) \left[\delta_{3i} - \frac{k_3 k_i}{k^2} \right]^2 \\ &= A_1(k) + A_2(k) + A_3(k) + A_1(k) \left[\frac{-2k_1^2}{k^2} + \frac{k_1^4}{k^4} + \frac{k_1^2 k_2^2}{k^4} + \frac{k_1^2 k_3^2}{k^4} \right] + \\ &\quad A_2(k) \left[\frac{-2k_2^2}{k^2} + \frac{k_2^4}{k^4} + \frac{k_2^2 k_1^2}{k^4} + \frac{k_2^2 k_3^2}{k^4} \right] + A_3(k) \left[\frac{-2k_3^2}{k^2} + \frac{k_3^4}{k^4} + \frac{k_3^2 k_1^2}{k^4} + \frac{k_3^2 k_2^2}{k^4} \right]\end{aligned}\quad (2.9)$$

Substituindo a Equação (2.9) na Equação (2.6), e lembrando que em coordenadas esféricas,

$$k_1 = k \text{sen} \phi \cos \theta, \quad (2.10a)$$

$$k_2 = k \text{sen} \phi \text{sen} \theta, \quad (2.10b)$$

$$k_3 = k \cos \theta, \quad (2.10c)$$

os termos dentro dos colchetes podem ser reescritos, mediante a mudança de coordenadas, da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}\left[\frac{-2k_1^2}{k^2} + \frac{k_1^4}{k^4} + \frac{k_1^2 k_2^2}{k^4} + \frac{k_1^2 k_3^2}{k^4} \right] &= -2 \text{sen}^2 \phi \cos^2 \theta + \text{sen}^4 \phi \cos^4 \theta + \\ &\quad \text{sen}^4 \phi \cos^2 \theta \text{sen}^2 \theta + \text{sen}^2 \phi \cos^2 \phi \cos^2 \theta,\end{aligned}\quad (2.11a)$$

$$\begin{aligned}\left[\frac{-2k_2^2}{k^2} + \frac{k_2^4}{k^4} + \frac{k_2^2 k_1^2}{k^4} + \frac{k_2^2 k_3^2}{k^4} \right] &= -2 \text{sen}^2 \phi \text{sen}^2 \theta + \text{sen}^4 \phi \text{sen}^4 \theta + \\ &\quad \text{sen}^4 \phi \cos^2 \theta \text{sen}^2 \theta + \text{sen}^2 \phi \cos^2 \phi \text{sen}^2 \theta,\end{aligned}\quad (2.11b)$$

$$\begin{aligned}\left[\frac{-2k_3^2}{k^2} + \frac{k_3^4}{k^4} + \frac{k_3^2 k_1^2}{k^4} + \frac{k_3^2 k_2^2}{k^4} \right] &= -2 \cos^2 \phi + \cos^4 \phi + \text{sen}^2 \phi \cos^2 \phi \cos^2 \theta + \\ &\quad \text{sen}^2 \phi \cos^2 \phi \text{sen}^2 \theta,\end{aligned}\quad (2.11c)$$

daí ²

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \sum_{i=1}^3 \Phi_{i,i}(r, \theta, \phi) \operatorname{sen}\phi d\theta d\phi \\
&= [A_1(k) + A_2(k) + A_3(k)] \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}\phi d\theta d\phi \\
&+ A_1(k) \int_0^\pi \int_0^{2\pi} [-2\operatorname{sen}^3\phi \cos^2\theta + \operatorname{sen}^5\phi \cos^4\theta + \operatorname{sen}^5\phi \cos^2\theta \operatorname{sen}^2\theta + \operatorname{sen}^3\phi \cos^2\phi \cos^2\theta] d\theta d\phi \\
&+ A_2(k) \int_0^\pi \int_0^{2\pi} [-2\operatorname{sen}^3\phi \operatorname{sen}^2\theta + \operatorname{sen}^5\phi \operatorname{sen}^4\theta + \operatorname{sen}^5\phi \cos^2\theta \operatorname{sen}^2\theta + \operatorname{sen}^3\phi \cos^2\phi \operatorname{sen}^2\theta] d\theta d\phi \\
&+ A_3(k) \int_0^\pi \int_0^{2\pi} [-2\operatorname{sen}\phi \cos^2\phi + \operatorname{sen}\phi \cos^4\phi + \operatorname{sen}^3\phi \cos^2\phi \cos^2\theta + \operatorname{sen}^3\phi \cos^2\phi \operatorname{sen}^2\theta] d\theta d\phi \\
&\stackrel{2}{=} 4\pi [A_1(k) + A_2(k) + A_3(k)] - \frac{4\pi}{3} A_1(k) - \frac{4\pi}{3} A_2(k) - \frac{4\pi}{3} A_3(k) \\
&= \frac{8\pi}{3} [A_1(k) + A_2(k) + A_3(k)].
\end{aligned}$$

Portanto

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(k) &= \frac{k^2}{2} \frac{8\pi}{3} [A_1(k) + A_2(k) + A_3(k)] \\
&= \frac{4\pi}{3} k^2 [A_1(k) + A_2(k) + A_3(k)].
\end{aligned} \tag{2.12}$$

As funções reais $A_1(k)$, $A_2(k)$ e $A_3(k)$ serão determinadas a partir dos espectros unidimensionais $F_L(k)$ (componente longitudinal da velocidade), $F_T(k)$ (componente transversal da velocidade) e $F_V(k)$ (componente vertical da velocidade). O espectro unidimensional $F_{ii}^1(k)$ com o vetor número de onda na direção longitudinal pode ser derivado a partir de $\Phi_{i,i}(\vec{k})$ como sugerido por Lumley e Panofsky (1964),

$$F_{ii}^1(k) = \int_{-\infty}^{\infty} dk_2 \int_{-\infty}^{\infty} dk_3 \Phi_{i,i}(\vec{k}). \tag{2.13}$$

Sendo que as componentes do tensor espectral no espaço do número de onda são dadas

²Foram usados os resultados:

$$\begin{array}{lll}
1. \int_0^\pi \operatorname{sen}^3\phi d\phi = \frac{4}{3} & 2. \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2\theta d\theta = \pi & 3. \int_0^{2\pi} \cos^4\theta d\theta = \frac{3\pi}{4} \\
4. \int_0^\pi \operatorname{sen}^5\theta d\theta = \frac{16}{15} & 5. \int_0^{2\pi} \cos^2\theta d\theta = \pi & 6. \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2\theta \cos^2\theta d\theta = \frac{\pi}{4} \\
7. \int_0^\pi \operatorname{sen}^3\phi \cos^2\phi d\phi = \frac{4}{15} & 8. \int_0^\pi \sin^4\theta d\theta = \frac{3\pi}{4} & 9. \int_0^\pi \operatorname{sen}\phi \cos^2\phi d\phi = \frac{2}{3} \\
10. \int_0^\pi \operatorname{sen}\phi \cos^4\phi d\phi = \frac{2}{5} & &
\end{array}$$

por:

$$\Phi_{1,1}(k) = A_1(k) \left(1 - \frac{k_1^2}{k^2}\right)^2 + A_2(k) \frac{k_1^2 k_2^2}{k^4} + A_3(k) \frac{k_1^2 k_3^2}{k^4}, \quad (2.14a)$$

$$\Phi_{2,2}(k) = A_1(k) \frac{k_1^2 k_2^2}{k^4} + A_2(k) \left(1 - \frac{k_2^2}{k^2}\right)^2 + A_3(k) \frac{k_2^2 k_3^2}{k^4}, \quad (2.14b)$$

$$\Phi_{3,3}(k) = A_1(k) \frac{k_1^2 k_3^2}{k^4} + A_2(k) \frac{k_2^2 k_3^2}{k^4} + A_3(k) \left(1 - \frac{k_3^2}{k^2}\right)^2. \quad (2.14c)$$

Usando coordenadas polares em κ e ω , como segue

$$k_2 = \kappa \cos \omega, \quad (2.15a)$$

$$k_3 = \kappa \sin \omega, \quad (2.15b)$$

$$k_1 = k_1, \quad (2.15c)$$

$$k^2 = k_1^2 + \kappa^2, \quad (2.15d)$$

obtém-se

$$\Phi_{1,1}(\kappa, \omega, k_1) = A_1 \left[\frac{\kappa^2}{(k_1^2 + \kappa^2)} \right]^2 + A_2 \frac{k_1^2 \kappa^2 \cos^2 \omega}{(k_1^2 + \kappa^2)^2} + A_3 \frac{k_1^2 \kappa^2 \sin^2 \omega}{(k_1^2 + \kappa^2)^2}, \quad (2.16a)$$

$$\Phi_{2,2}(\kappa, \omega, k_1) = A_1 \frac{k_1^2 \kappa^2 \cos^2 \omega}{(k_1^2 + \kappa^2)^2} + A_2 \left[1 - \frac{\kappa^2 \cos^2 \omega}{(k_1^2 + \kappa^2)} \right]^2 + A_3 \frac{\kappa^4 \sin^2 \omega \cos^2 \omega}{(k_1^2 + \kappa^2)^2}, \quad (2.16b)$$

$$\Phi_{3,3}(\kappa, \omega, k_1) = A_1 \frac{k_1^2 \kappa^2 \sin^2 \omega}{(k_1^2 + \kappa^2)^2} + A_2 \frac{\kappa^4 \sin^2 \omega \cos^2 \omega}{(k_1^2 + \kappa^2)^2} + A_3 \left[1 - \frac{\kappa^2 \sin^2 \omega}{(k_1^2 + \kappa^2)} \right]^2. \quad (2.16c)$$

para $A_1 = A_1(\kappa, k_1)$, $A_2 = A_2(\kappa, k_1)$ e $A_3 = A_3(\kappa, k_1)$.

Substituindo Equação (2.16a) na Equação (2.13), para $i = 1$, tem-se

$$\begin{aligned} F_L(k_1) &= F_{11}^1(k_1) = \int_{-\infty}^{\infty} dk_2 \int_{-\infty}^{\infty} dk_3 \Phi_{1,1}(\vec{k}) \\ &= \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} \kappa d\kappa d\omega \left\{ A_1 \left[\frac{\kappa^2}{(k_1^2 + \kappa^2)} \right]^2 + A_2 \frac{k_1^2 \kappa^2 \cos^2 \omega}{(k_1^2 + \kappa^2)^2} + A_3 \frac{k_1^2 \kappa^2 \sin^2 \omega}{(k_1^2 + \kappa^2)^2} \right\} \\ &= 2\pi \int_0^{\infty} \left[A_1 \frac{\kappa^3}{(k_1^2 + \kappa^2)^2} + A_2 \frac{k_1^2 \kappa^3}{2(k_1^2 + \kappa^2)^2} + A_3 \frac{k_1^2 \kappa^3}{2(k_1^2 + \kappa^2)^2} \right] d\kappa. \end{aligned}$$

Fazendo a seguinte mudança de variável:

$$K^2 = k_1^2 + \kappa^2 \quad \Rightarrow \quad 2K dK = 2\kappa d\kappa$$

$$\kappa \rightarrow \infty \Rightarrow K \rightarrow \infty$$

$$\kappa \rightarrow 0 \Rightarrow K \rightarrow k_1$$

$$F_L(k_1) = 2\pi \int_{k_1}^{\infty} \left[A_1(K) (K^2 - k_1^2)^2 + A_2(K) \frac{k_1}{2} (K^2 - k_1^2) + A_3(K) \frac{k_1}{2} (K^2 - k_1^2) \right] \frac{dK}{K^3}.$$

Chamando $k_1 = k$, obtém-se o espectro unidimensional longitudinal,

$$F_L(k) = F_{11}^1(k) = 2\pi \int_k^{\infty} (K^2 - k^2) \left[(K^2 - k^2) A_1(K) + \frac{1}{2} k^2 (A_2(K) + A_3(K)) \right] \frac{dK}{K^3}, \quad (2.17)$$

lembrando que k corresponde à componente longitudinal do vetor número de onda.

De maneira similar obtém-se os espectros unidimensionais transversal e vertical dados, respectivamente, por

$$F_T(k) = F_{22}^1(k) = \pi \int_k^{\infty} \left[k^2 (K^2 - k^2) A_1(K) + \frac{1}{4} (3K^2 + 2K^2 k^2 + 3k^4) A_2(K) + \frac{1}{4} (K^2 - k^2)^2 A_3(K) \right] \frac{dK}{K^3}, \quad (2.18)$$

e

$$F_V(k) = F_{33}^1(k) = \pi \int_k^{\infty} \left[k^2 (K^2 - k^2) A_1(K) + \frac{1}{4} (K^2 - k^2)^2 A_2(K) + \frac{1}{4} (3K^2 + 2K^2 k^2 + 3k^4) A_3(K) \right] \frac{dK}{K^3}. \quad (2.19)$$

Se a turbulência é isotrópica existe duas relações entre as componentes unidimensionais e a derivada primeira da componente longitudinal do espectro $F'_L(k)$: $F_T(k) = F_V(k)$ e $2F_T(k) = F_L(k) - kF'_L(k)$ (ver PANOFSKY; DUTTON, 1984). Embora o caso que se esteja analisando é não-isotrópico, pode-se usar estas relações e definir os resultados,

$$H(k) = F_T(k) - F_V(k) \quad (2.20)$$

e

$$J(k) = F_L(k) - kF'_L(k) - (F_T(k) + F_V(k)). \quad (2.21)$$

Substituindo as Equações (2.18) e (2.19) na (2.20), da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
H(k) &= F_T(k) - F_V(k) \\
&= \pi \int_k^\infty \left[k^2 (K^2 - k^2) A_1(K) + \frac{1}{4} (3K^2 + 2K^2 k^2 + 3k^4) A_2(K) + \frac{1}{4} (K^2 - k^2)^2 A_3(K) \right] \frac{dK}{K^3} \\
&\quad - \pi \int_k^\infty \left[k^2 (K^2 - k^2) A_1(K) + \frac{1}{4} (K^2 - k^2)^2 A_2(K) + \frac{1}{4} (3K^2 + 2K^2 k^2 + 3k^4) A_3(K) \right] \frac{dK}{K^3} \\
&= \pi \int_k^\infty (A_2(K) - A_3(K)) \left[\frac{1}{4} (3K^2 + 2K^2 k^2 + 3k^4) - \frac{1}{4} (K^2 - k^2)^2 \right] \frac{dK}{K^3} \\
&= \pi \int_k^\infty (A_2(K) - A_3(K)) \frac{1}{2} (K^2 + k^2)^2 \frac{dK}{K^3}.
\end{aligned}$$

Consequentemente

$$H(k) = \frac{\pi}{2} \int_k^\infty (A_2(K) - A_3(K)) (K^2 + k^2)^2 \frac{dK}{K^3}. \quad (2.22)$$

Agora, substituindo as Equações (2.17), (2.18) e (2.19) na (2.21),

$$\begin{aligned}
J(k) &= F_L(k) - kF'_L(k) - (F_T(k) + F_V(k)) \\
&= 2\pi \int_k^\infty \left\{ (K^2 - k^2) (K^2 + 3k^2) A_1(K) + \left[-\frac{k^2}{2} (K^2 - k^2) + k^4 \right] A_2(K) \right. \\
&\quad \left. + \left[-\frac{k^2}{2} (K^2 - k^2) + k^4 \right] A_3(K) \right\} \frac{dK}{K^3} \\
&\quad - 2\pi \int_k^\infty \left[k^2 (K^2 - k^2) A_1(K) + \frac{1}{2} (K^4 + k^4) A_2(K) + \frac{1}{2} (K^4 + k^4) A_3(K) \right] \frac{dK}{K^3} \\
&= 2\pi \int_k^\infty \left[(K^2 - k^2) (K^2 + 2k^2) A_1(K) - \frac{1}{2} (K^2 - k^2) (K^2 + 2k^2) A_2(K) \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{2} (K^2 - k^2) (K^2 + 2k^2) A_3(K) \right] \frac{dK}{K^3}.
\end{aligned}$$

O que resulta em

$$J(k) = 2\pi \int_k^\infty \left[A_1(K) - \frac{A_2(K) + A_3(K)}{2} \right] (K^2 - k^2) (K^2 + 2k^2) \frac{dK}{K^3}. \quad (2.23)$$

Portanto, conhecendo os espectros unidimensionais é possível determinar duas relações entre $A_1(K)$, $A_2(K)$ e $A_3(K)$ a partir das Equação (2.22) e Equação (2.23).

A obtenção dessas relações são feitas mediante a introdução novas variáveis,

$$s = k^{-2}, \quad (2.24a)$$

$$t = K^{-2}, \quad (2.24b)$$

$$f(s) = H\left(s^{-\frac{1}{2}}\right) s^2, \quad (2.25a)$$

$$g(s) = J\left(s^{-\frac{1}{2}}\right) s^2, \quad (2.25b)$$

$$\alpha(t) = \pi \left[A_2\left(t^{-\frac{1}{2}}\right) - A_3\left(t^{-\frac{1}{2}}\right) \right], \quad (2.26a)$$

$$\beta(t) = \pi \left[A_1\left(t^{-\frac{1}{2}}\right) - \left(\frac{A_2\left(t^{-\frac{1}{2}}\right) + A_3\left(t^{-\frac{1}{2}}\right)}{2} \right) \right], \quad (2.26b)$$

A partir das novas variáveis pode-se reformular as equações (2.22) e (2.23), como segue

$$\begin{aligned} H\left(s^{-\frac{1}{2}}\right) &= \frac{\pi}{2} \int_s^0 \left[A_2\left(t^{-\frac{1}{2}}\right) - A_3\left(t^{-\frac{1}{2}}\right) \right] \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{s} \right)^2 \frac{-dt}{2} \\ H\left(s^{-\frac{1}{2}}\right) s^2 &= -\frac{1}{4} \int_s^0 \pi \left[A_2\left(t^{-\frac{1}{2}}\right) - A_3\left(t^{-\frac{1}{2}}\right) \right] (s+t)^2 \frac{dt}{t^2}, \end{aligned}$$

daí

$$f(s) = \frac{1}{4} \int_0^s (s+t)^2 \alpha(t) \frac{dt}{t^2}. \quad (2.27)$$

E

$$\begin{aligned} J\left(s^{-\frac{1}{2}}\right) &= 2\pi \int_s^0 \left[A_1\left(t^{-\frac{1}{2}}\right) - \frac{A_2\left(t^{-\frac{1}{2}}\right) + A_3\left(t^{-\frac{1}{2}}\right)}{2} \right] \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{s} \right) \left(\frac{1}{t} + \frac{2}{s} \right) \frac{-dt}{2} \\ &= \int_0^s \pi \left[A_1\left(t^{-\frac{1}{2}}\right) - \frac{A_2\left(t^{-\frac{1}{2}}\right) + A_3\left(t^{-\frac{1}{2}}\right)}{2} \right] \frac{(s-t)(s+2t)}{s^2} \frac{dt}{t^2} \\ J\left(s^{-\frac{1}{2}}\right) s^2 &= \int_0^s \beta(t) (s-t)(s+2t) \frac{dt}{t^2}, \end{aligned}$$

e assim

$$g(s) = \int_0^s (s-t)(s+2t) \beta(t) \frac{dt}{t^2}. \quad (2.28)$$

Derivando a Equação (2.27) três vezes ³ em relação a s ,

$${}^3 \frac{d}{ds} \int_{a(\xi)}^{b(\xi)} f(x, \xi) dx = \int_{a(\xi)}^{b(\xi)} \frac{\partial f(x, \xi)}{\partial \xi} dx + f(b, \xi) \frac{db(\xi)}{d\xi} - f(a, \xi) \frac{da(\xi)}{d\xi}$$

$$\begin{aligned}
f(s) &= \frac{1}{4} \int_0^s (s+t)^2 \alpha(t) \frac{dt}{t^2}, \\
f'(s) &= \frac{1}{4} \frac{d}{ds} \int_0^s (s+t)^2 \alpha(t) \frac{dt}{t^2} \\
&\stackrel{3}{=} \frac{1}{4} \left[\int_0^s 2(s+t) \alpha(t) \frac{dt}{t^2} + 4\alpha(s) \right], \\
f''(s) &= \frac{1}{4} \frac{d}{ds} \left[\int_0^s 2(s+t) \alpha(t) \frac{dt}{t^2} + 4\alpha(s) \right] \\
&\stackrel{3}{=} \frac{1}{4} \left[\int_0^s 2\alpha(t) \frac{dt}{t^2} + 4\frac{\alpha(s)}{s} + \alpha'(s) \right], \\
f'''(s) &= \frac{1}{4} \frac{d}{ds} \left[\int_0^s 2\alpha(t) \frac{dt}{t^2} + 4\frac{\alpha(s)}{s} + \alpha'(s) \right] \\
&\stackrel{3}{=} \alpha''(s) + \frac{\alpha'(s)}{s} - \frac{1}{2} \frac{\alpha(s)}{s^2},
\end{aligned}$$

segue a equação diferencial ordinária,

$$\alpha''(s) + \frac{1}{s}\alpha'(s) - \frac{1}{2s^2}\alpha(s) = f'''(s) \quad (2.29)$$

Utilizando o mesmo procedimento acima, isto é, derivando a Equação (2.28) três vezes em relação a s , como segue

$$\begin{aligned}
g(s) &= \int_0^s (s-t)(s+2t) \beta(t) \frac{dt}{t^2}, \\
g'(s) &= \frac{d}{ds} \int_0^s (s-t)(s+2t) \beta(t) \frac{dt}{t^2} \\
&\stackrel{3}{=} \int_0^s (2s+t) \beta(t) \frac{dt}{t^2}, \\
g''(s) &= \frac{d}{ds} \int_0^s (2s+t) \beta(t) \frac{dt}{t^2} \\
&\stackrel{3}{=} \int_0^s 2\beta(t) \frac{dt}{t^2} + \frac{3\beta(s)}{s}, \\
g'''(s) &= \frac{d}{ds} \int_0^s 2\beta(t) \frac{dt}{t^2} + \frac{3\beta(s)}{s} \\
&\stackrel{3}{=} -\frac{\beta(s)}{s^2} + \frac{3\beta'(s)}{s},
\end{aligned}$$

obtem-se a seguinte equação diferencial ordinária,

$$\frac{3}{s}\beta'(s) - \frac{1}{s^2}\beta(s) = g'''(s). \quad (2.30)$$

Resolve-se as equações (2.29) e (2.30) através de técnicas clássicas. Usa-se a variação de parâmetros e Equação de Euler para resolver a Equação (2.29) e fator integrante para a Equação (2.30) (KRISTENSEN et al., 1989; BOYCE W. E., 1999).

Segue o procedimento para resolver Equação (2.29):

A equação homogênea associada a Equação (2.29) é dada pela Equação de Euler:

$$\alpha''(s) + \frac{1}{s}\alpha'(s) - \frac{1}{2s^2}\alpha(s) = 0,$$

supondo $\alpha = s^r$, e então substituindo na equação acima

$$\begin{aligned} s^r \left[r(r-1) + r - \frac{1}{2} \right] &= 0 \\ r(r-1) + r - \frac{1}{2} &= 0 \\ r^2 - \frac{1}{2} &= 0 \quad \Rightarrow \quad r = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}, \end{aligned}$$

logo

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= s^{\frac{\sqrt{2}}{2}}, \\ \alpha_2 &= s^{-\frac{\sqrt{2}}{2}}, \end{aligned}$$

daí a solução homogênea é:

$$\alpha_h(s) = a_1 s^{\frac{\sqrt{2}}{2}} + a_2 s^{-\frac{\sqrt{2}}{2}}.$$

A solução particular, associada a parte não-homogênea, é calculada pela técnica de variação dos parâmetros, dada por:

$$\begin{aligned} \alpha_h(s) &= -s^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \int \frac{s^{-\frac{\sqrt{2}}{2}} f'''(s)}{-\frac{\sqrt{2}}{s}} ds + s^{-\frac{\sqrt{2}}{2}} \int \frac{s^{\frac{\sqrt{2}}{2}} f'''(s)}{-\frac{\sqrt{2}}{s}} ds \\ &= \frac{s^{\frac{\sqrt{2}}{2}}}{\sqrt{2}} \int s^{1-\frac{\sqrt{2}}{2}} f'''(s) ds - \frac{s^{-\frac{\sqrt{2}}{2}}}{\sqrt{2}} \int s^{1+\frac{\sqrt{2}}{2}} f'''(s) ds, \end{aligned}$$

sendo que

$$W(\alpha_1, \alpha_2) = \begin{vmatrix} \alpha_1(s) & \alpha_2(s) \\ \alpha_1'(s) & \alpha_2'(s) \end{vmatrix} = -\frac{\sqrt{2}}{2} s^{-1} + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) s^{-1} = -\frac{\sqrt{2}}{s}. \quad (2.31)$$

Com os resultados anteriores, obtém-se a solução geral:

$$\alpha(s) = a_1 s^{\frac{\sqrt{2}}{2}} + a_2 s^{-\frac{\sqrt{2}}{2}} + \frac{s^{\frac{\sqrt{2}}{2}}}{\sqrt{2}} \int s^{1-\frac{\sqrt{2}}{2}} f'''(s) ds - \frac{s^{-\frac{\sqrt{2}}{2}}}{\sqrt{2}} \int s^{1+\frac{\sqrt{2}}{2}} f'''(s) ds. \quad (2.32)$$

Resolve-se Equação (2.30), através do processo:

$$\begin{aligned}\frac{3}{s}\beta'(s) - \frac{1}{s^2}\beta(s) &= g'''(s) \\ \beta'(s) - \frac{1}{3s}\beta(s) &= \frac{s}{3}g'''(s),\end{aligned}$$

o fator integrante associado é:

$$\mu(s) = \exp\left(-\frac{1}{3}\int\frac{ds}{s}\right) = s^{-\frac{1}{3}},$$

segue que

$$\frac{d}{ds}\left[s^{-\frac{1}{3}}\beta(s)\right] = \frac{s}{3}g'''(s)s^{-\frac{1}{3}}$$

logo

$$\beta(s) = \frac{s^{\frac{1}{3}}}{3}\int s^{\frac{2}{3}}g''' ds + c s^{\frac{1}{3}} \quad (2.33)$$

Com o propósito de obter soluções definidas, Kristensen et al. (1989) consideraram que a energia turbulenta

$$\mathcal{E} = \int_0^\infty \mathbf{E}(k) dk \quad (2.34)$$

seja finita. Para isto, assume-se que as funções $A_i(k)$ com $i = 1, 2, 3$ são leis de potência no limite $k \rightarrow \infty$, isto é, quando $s \rightarrow 0$. Seja

$$\max_{k \rightarrow \infty} [A_1(k), A_2(k), A_3(k)] \propto k^{-2\lambda}. \quad (2.35)$$

Usando as equações (2.12) e (2.35) na (2.34),

$$\mathcal{E} \propto \int_0^\infty k^{2(1-\lambda)} dk \propto \lim_{R \rightarrow \infty} k^{(3-2\lambda)} \quad (2.36)$$

que é finito se, e somente se,

$$3 - 2\lambda < 0 \Rightarrow \lambda > \frac{3}{2} \quad (2.37)$$

Usando as equações (2.22) até (2.28), verifica-se que

$$\begin{aligned}H(k) &\propto k^{2(1-\lambda)} \\ J(k) &\propto k^{2(1-\lambda)}\end{aligned} \quad (2.38)$$

$$\begin{aligned}f(s) &\propto s^{1+\lambda} \\ g(s) &\propto s^{1+\lambda}\end{aligned} \quad (2.39)$$

$$\begin{aligned}\alpha(s) &\propto s^\lambda \\ \beta(s) &\propto s^\lambda\end{aligned}\tag{2.40}$$

Aplicando os resultados expressos pelas equações (2.39), (2.37) e (2.40), nas soluções indefinidas (2.32) e (2.33), obtém-se as seguintes soluções definidas:

$$\alpha(s) = \frac{s^{1/\sqrt{2}}}{\sqrt{2}} \int_0^s t^{1-1/\sqrt{2}} f'''(t) dt - \frac{s^{-1/\sqrt{2}}}{\sqrt{2}} \int_0^s t^{1+1/\sqrt{2}} f'''(t) dt\tag{2.41}$$

e

$$\beta(s) = \frac{s^{1/3}}{3} \int_0^s t^{2/3} g'''(t) dt.\tag{2.42}$$

Com as Equações (2.24) e (2.26), tem-se duas equações para determinar A_1 , A_2 e A_3 . Com o auxílio da Equação (2.17), obtém-se a terceira, mediante o processo:

$$\begin{aligned}F_L(k) &= 2\pi \int_k^\infty (K^2 - k^2) \left[(K^2 - k^2) A_1(K) + \frac{1}{2} k^2 (A_2(K) + A_3(K)) \right] \frac{dK}{K^3}, \\ \frac{dF_L}{dk} &= 2\pi \frac{d}{dk} \int_k^\infty (K^2 - k^2) \left[(K^2 - k^2) A_1(K) + \frac{1}{2} k^2 (A_2(K) + A_3(K)) \right] \frac{dK}{K^3} \\ &\stackrel{3}{=} 2\pi \int_k^\infty \left[-4k (K^2 - k^2) A_1(K) + k (K^2 - 2k^2) (A_2(K) + A_3(K)) \right] \frac{dK}{K^3}, \\ \frac{1}{k} \frac{dF_L}{dk} &= 2\pi \int_k^\infty \left[-4 (K^2 - k^2) A_1(K) + (K^2 - 2k^2) (A_2(K) + A_3(K)) \right] \frac{dK}{K^3}, \\ \frac{d}{dk} \left(\frac{1}{k} \frac{dF_L}{dk} \right) &= 2\pi \frac{d}{dk} \int_k^\infty \left[-4 (K^2 - k^2) A_1(K) + (K^2 - 2k^2) (A_2(K) + A_3(K)) \right] \frac{dK}{K^3} \\ &\stackrel{3}{=} 2\pi \int_k^\infty \left[8k A_1(K) - 4k (A_2(K) + A_3(K)) \right] \frac{dK}{K^3} + \frac{1}{k} (A_2(k) + A_3(k)), \\ \frac{k}{2\pi} \frac{d}{dk} \left(\frac{1}{k} \frac{dF_L}{dk} \right) &= 8k^2 \int_k^\infty \left[A_1(K) - \frac{(A_2(K) + A_3(K))}{2} \right] \frac{dK}{K^3} + (A_2(k) + A_3(k)) \\ &\stackrel{2.24}{=} \frac{8k^2}{\pi} \int_0^s \left[\pi A_1(t^{-\frac{1}{2}}) - \frac{(A_2(t^{-\frac{1}{2}}) + A_3(t^{-\frac{1}{2}}))}{2} \right] \frac{dt}{2} + (A_2(k) + A_3(k)) \\ &\stackrel{2.26b}{=} \frac{4k^2}{\pi} \int_0^{1/k^2} \beta(s) ds + (A_2(k) + A_3(k)),\end{aligned}$$

logo

$$A_2(k) + A_3(k) = \frac{k}{2\pi} \frac{d}{dk} \left(\frac{1}{k} \frac{dF_L}{dk} \right) - \frac{4k^2}{\pi} \int_0^{1/k^2} \beta(s) ds.\tag{2.43}$$

Substituindo a Equação (2.42) na integral da Equação (2.43), tem-se

$$\int_0^{1/k^2} \beta(s) ds = \int_0^{1/k^2} \left[\frac{s^{1/3}}{3} \int_0^s t^{2/3} g'''(t) dt \right] ds.$$

Fazendo a integração por partes, mediante a substituição:

$$\begin{aligned} u &= \int_0^s t^{2/3} g'''(t) dt & dv &= \frac{s^{1/3}}{3} ds \\ du &\stackrel{3}{=} s^{2/3} g'''(s) ds & v &= \frac{s^{4/3}}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^{1/k^2} \beta(s) ds &= \frac{s^{4/3}}{4} \int_0^s t^{2/3} g'''(t) dt \Big|_0^{1/k^2} - \frac{1}{4} \int_0^{1/k^2} s^2 g'''(s) ds \\ &= \frac{3}{4} \frac{1}{k^2} \beta(k^{-2}) - \frac{1}{4} \int_0^{1/k^2} s^2 g'''(s) ds \\ &= \frac{3}{4} \frac{\pi}{k^2} \left[A_1(k) - \frac{(A_2(k) + A_3(k))}{2} \right] - \frac{1}{4} \int_0^s t^2 g'''(t) dt, \end{aligned}$$

daí

$$\begin{aligned} \frac{4k^2}{\pi} \int_0^{1/k^2} \beta(s) ds &= \frac{4k^2}{\pi} \frac{3}{4} \frac{\pi}{k^2} \left[A_1(k) - \frac{(A_2(k) + A_3(k))}{2} \right] - \frac{4k^2}{\pi} \frac{1}{4} \int_0^s t^2 g'''(t) dt \\ &= 3A_1(k) - \frac{3}{2} (A_2(k) + A_3(k)) - \frac{1}{\pi s} \int_0^s t^2 g'''(t) dt. \end{aligned}$$

Assim, substituindo o resultado acima na Equação (2.43), resulta:

$$A_2(k) + A_3(k) = \frac{k}{2\pi} \frac{d}{dk} \left(\frac{1}{k} \frac{dF_L}{dk} \right) - 3A_1(k) + \frac{3}{2} (A_2(k) + A_3(k)) + \frac{1}{\pi s} \int_0^s t^2 g'''(t) dt.$$

Portanto

$$3A_1(k) - \frac{(A_2(k) + A_3(k))}{2} = \frac{k}{2\pi} \frac{d}{dk} \left(\frac{1}{k} \frac{dF_L}{dk} \right) + \frac{s^{-1}}{\pi} \int_0^s t^2 g'''(t) dt. \quad (2.44)$$

Reescrevendo a Equação (2.26b) da seguinte forma,

$$\frac{1}{\pi} \beta(t) - A_1(t^{-\frac{1}{2}}) = - \left(\frac{A_2(t^{-\frac{1}{2}}) + A_3(t^{-\frac{1}{2}})}{2} \right),$$

e usando os resultados (2.42) e (2.24), obtém-se

$$\frac{s^{1/3}}{3\pi} \int_0^s t^{2/3} g'''(t) dt - A_1(k) = - \left(\frac{A_2(k) + A_3(k)}{2} \right),$$

combinando este último resultado com a Equação (2.44), obtém-se a seguinte equação para

$A_1(k)$:

$$A_1(k) = \frac{k}{4\pi} \frac{d}{dk} \left(\frac{1}{k} \frac{dF_L}{dk} \right) + \frac{1}{2\pi} \left[s^{-1} \int_0^s t^2 g'''(t) dt - \frac{s^{1/3}}{3} \int_0^s t^{2/3} g'''(t) dt \right]. \quad (2.45)$$

Subtraindo as equações (2.26a) e (2.26b), e usando (2.24) tem-se

$$\frac{\alpha(s)}{2\pi} - \frac{\beta(s)}{\pi} + A_1(k) = A_2(k),$$

Pelas equações (2.45), (2.41) e (2.42), segue que

$$A_2(k) = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{s^{1/\sqrt{2}}}{\sqrt{2}} \int_0^s t^{1-1/\sqrt{2}} f'''(t) dt - \frac{s^{-1/\sqrt{2}}}{\sqrt{2}} \int_0^s t^{1+1/\sqrt{2}} f'''(t) dt \right] - \frac{1}{\pi} \frac{s^{1/3}}{3} \int_0^s t^{2/3} g'''(t) dt \\ + \frac{k}{4\pi} \frac{d}{dk} \left(\frac{1}{k} \frac{dF_L}{dk} \right) + \frac{1}{2\pi} \left[s^{-1} \int_0^s t^2 g'''(t) dt - \frac{s^{1/3}}{3} \int_0^s t^{2/3} g'''(t) dt \right],$$

Conseqüentemente,

$$A_2(k) = \frac{k}{4\pi} \frac{d}{dk} \left(\frac{1}{k} \frac{dF_L}{dk} \right) + \frac{1}{2\pi} \left[s^{-1} \int_0^s t^2 g'''(t) dt - \frac{s^{1/3}}{3} \int_0^s t^{2/3} g'''(t) dt \right. \\ \left. + \frac{s^{1/\sqrt{2}}}{\sqrt{2}} \int_0^s t^{1-1/\sqrt{2}} f'''(t) dt - \frac{s^{-1/\sqrt{2}}}{\sqrt{2}} \int_0^s t^{1+1/\sqrt{2}} f'''(t) dt \right]. \quad (2.46)$$

Substituindo as equações (2.45) e (2.46) na Equação (2.44), obtém-se $A_3(k)$, que é dada por

$$A_3(k) = \frac{k}{4\pi} \frac{d}{dk} \left(\frac{1}{k} \frac{dF_L}{dk} \right) - \frac{1}{2\pi} \left[-s^{-1} \int_0^s t^2 g'''(t) dt + \frac{s^{1/3}}{3} \int_0^s t^{2/3} g'''(t) dt \right. \\ \left. + \frac{s^{1/\sqrt{2}}}{\sqrt{2}} \int_0^s t^{1-1/\sqrt{2}} f'''(t) dt - \frac{s^{-1/\sqrt{2}}}{\sqrt{2}} \int_0^s t^{1+1/\sqrt{2}} f'''(t) dt \right]. \quad (2.47)$$

Finalmente, substituindo as Equações (2.45), (2.46) e (2.47) em (2.7), obtém-se a seguinte expressão para o espectro de energia em termos da derivada segunda do espectro longitudinal e de uma função que é definida para uma turbulência homogênea e não-isotrópica,

$$\mathbf{E}(k) = k^3 \frac{d}{dk} \left(\frac{1}{k} \frac{dF_L}{dk} \right) + 2k^4 \int_0^{1/k^2} s^2 g'''(s) ds - \frac{14}{9} k^{4/3} \int_0^{1/k^2} s^{2/3} g'''(s) ds. \quad (2.48)$$

No caso de uma turbulência homogênea e isotrópica, a equação para o espectro tridimensional possui apenas o termo da derivada segunda do espectro longitudinal, isto é,

$$\mathbf{E}(k) = k^3 \frac{d}{dk} \left(\frac{1}{k} \frac{dF_L}{dk} \right). \quad (2.49)$$

2.1.2 Espectro Tridimensional Escrito em Função dos Espectros Unidimensionais

Seguindo Degrazia et al. (2000), e outros trabalhos similares como Buligon et al. (2008), pode-se escrever os espectros Eulerianos unidimensionais em função da frequência dado por como:

$$\frac{n S_i^E(n)}{w_*^2} = \frac{1,06 c_i f \psi_\epsilon^{2/3} \left(\frac{z}{z_i} \right)^{2/3}}{(f_m^*)_i^{5/3} \left[1 + 1,5 \left(\frac{f}{(f_m^*)_i} \right) \right]^{5/3}}, \quad (2.50)$$

com:

- $c_i = \alpha_i \alpha_u (2\pi\kappa)^{-2/3}$; α_i é derivado experimentalmente a partir do espectro para cada componentes de direção do vento, e vale 1, $\frac{4}{3}$ e $\frac{4}{3}$ para u (componente longitudinal), v (componente transversal) e w (componente vertical), respectivamente; e $\alpha_u = 0,5 \pm 0,05$ (CHAMPAGNE et al., 1977; SORBJAN, 1989) e $\kappa = 0,4$ é a constante de von Kármán;
- $f = \frac{nz}{U(z)}$, é a frequência reduzida onde z é a altura acima do solo e $U(z) = U$ é a velocidade média do vento horizontal e n é a frequência;
- $\psi_\epsilon = \frac{\epsilon_b z_i}{w_*^3}$ é a taxa de dissipação adimensional, $\epsilon_b = \Xi (w_*^3/z_i)$ é a taxa média de dissipação térmica do ECT (CAUGHEY; PALMER, 1979; HØJSTRUP, 1982; WILSON, 1997); com $\Xi = \left[\left(1 - \frac{z}{z_i} \right)^2 \left(\frac{z}{-L} \right)^{-2/3} + 0,75 \right]^{3/2}$ (HØJSTRUP, 1982) ou $\Xi = 0,081 + 0,335 \exp \left[-\frac{\left(\frac{z}{z_i} - 0,2 \right)}{0,588} \right]$ (MOENG, 1984);
- z é a altura acima do solo;
- z_i é o topo da camada limite convectiva;
- $(f_m^*)_i = \frac{z}{(\lambda_m)_i}$ é a frequência reduzida do pico espectral convectivo, onde $(\lambda_m)_i$ é o comprimento de onda associado ao máximo do espectro vertical (KAIMAL et al., 1976; CAUGHEY, 1982; DEGRAZIA; ANFONSSI, 1998), com:

$$(\lambda_m)_u = (\lambda_m)_v = 1,5z_i$$

$$(\lambda_m)_w = 1,8z_i \left[1 - \exp \left(\frac{-4z}{z_i} \right) - 0,0003 \exp \left(\frac{8z}{z_i} \right) \right],$$

- $w_* = (u_*)_0 \left(\frac{z_i}{\kappa|L|} \right)^{1/3}$ é a escala de velocidade convectiva;
- L é o comprimento de Monin-Obukov;
- $(u_*)_0$ é a velocidade de fricção na superfície;

Os espectros unidimensionais em função de n e k com $k = \frac{2\pi n}{U}$, estão relacionados pela equação $F_i(k) = \frac{U}{2\pi} S_i^E(n)$, portanto

$$F_i(k) = \frac{a_i}{(1 + b_i k)^{\frac{5}{3}}}, \quad (2.51)$$

com $a_i = \frac{1,06}{2\pi} c_i \psi_\epsilon^{2/3} \left(\frac{z}{z_i} \right)^{5/3} z_i w_*^2 [(f_m^*)_i]^{-5/3}$, $b_i = \frac{1,5}{2\pi} \left(\frac{z}{z_i} \right) z_i [(f_m^*)_i]^{-1}$ e $i = u, v$ e w .

O objetivo é obter um modelo para o tensor espectral a partir dos três componentes do espectro, calculados em um único ponto. Para isso, utiliza-se os resultados $\alpha(s)$, $\beta(s)$ e $A_2 + A_3$, dados, respectivamente, pelas Equações (2.41), (2.42) e (2.43), em termos do espectro unidimensional Equação (2.51). Porém, deve-se antes, calcular $f'''(s)$ e $g'''(s)$.

Relembrando as Equação (2.20) e (2.21) escritas mediante as novas variáveis Equação (2.24) e (2.21), segue que,

$$f(s) = s^2 \left[F_v \left(s^{-\frac{1}{2}} \right) - F_w \left(s^{-\frac{1}{2}} \right) \right],$$

$$g(s) = s^2 \sum_{i=1}^3 m_i F_i \left(s^{-\frac{1}{2}} \right),$$

com $m_1 = 2$ e $m_2 = m_3 = -1$.

Definindo $f_i(s) = s^2 F_i \left(s^{-\frac{1}{2}} \right)$ tem-se

$$f(s) = f_v(s) - f_w(s) \text{ e} \quad (2.53a)$$

$$g(s) = \sum_{i=1}^3 m_i f_i(s). \quad (2.53b)$$

Substituindo $k = s^{-1/2}$ em Equação (2.51), obtém-se

$$f_i(s) = D_i \frac{s^{17/6}}{(1 + \sqrt{B_i s})^{\frac{5}{3}}}, \quad (2.54)$$

com $D_i = a_i b_i^{-5/3}$ e $B_i = b_i^{-2}$.

A derivada terceira de Equações (2.54) é:

$$f'''(s) = \sum_{n=0}^2 \frac{C_n D_i B_i^{n/2} s^{\frac{3n-1}{6}}}{(1 + \sqrt{B_i s})^{\frac{14}{3}}}, \quad (2.55)$$

com $C_0 = \frac{935}{216}$, $C_1 = \frac{315}{108}$ e $C_2 = \frac{135}{216}$. E

$$g'''(s) = \sum_{i=1}^3 m_i f'''(s), \quad (2.56)$$

Inserindo a Equação (2.56) na Equação (2.48), obtém-se

$$\mathbf{E}(k) = k^3 \frac{d}{dk} \left(\frac{1}{k} \frac{dF_u}{dk} \right) + \sum_{i=1}^3 m_i D_i \sum_{n=0}^2 C_n B_i^{n/2} \left(2k^4 I_{1i} - \frac{14}{9} k^{4/3} I_{2i} \right), \quad (2.57)$$

com

$$I_{1i} = \int_0^{1/k^2} \frac{s^{\frac{3n+11}{6}}}{(1 + \sqrt{B_i s})^{\frac{14}{3}}} ds, \quad (2.58a)$$

$$I_{2i} = \int_0^{1/k^2} \frac{s^{\frac{n+1}{2}}}{(1 + \sqrt{B_i s})^{\frac{14}{3}}} ds \quad (2.58b)$$

e

$$k^3 \frac{d}{dk} \left(\frac{1}{k} \frac{dF_u}{dk} \right) = \frac{5a_u b_u k (3 + 11b_u k)}{9 (1 + b_u k)^{11/3}}. \quad (2.59)$$

Resolve-se numericamente as integrais da Equação (2.58) através do algoritmo de Romberg (BURDEN; FAIRES, 2003) e da linguagem de programação FORTRAN. Os espectros são mostrados nas Figuras (2.2), (2.3) e (2.4).

Na seção seguinte, apresenta-se a um método de interpolação para a curva do espectro tridimensional válido para turbulência não-isotrópica.

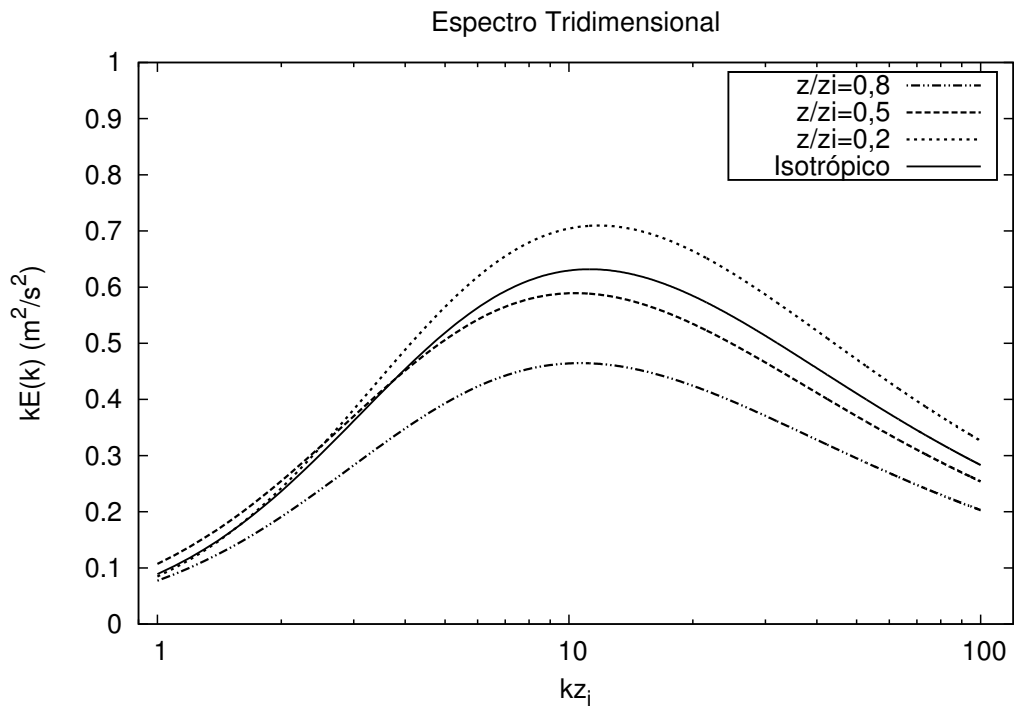


Figura 2.2: Espectro tridimensional calculado a partir da Equação (2.57) para os caso não-isotrópico e Equação (2.59) para o caso isotrópico. A função Ξ é sugerida por Moeng (1984).

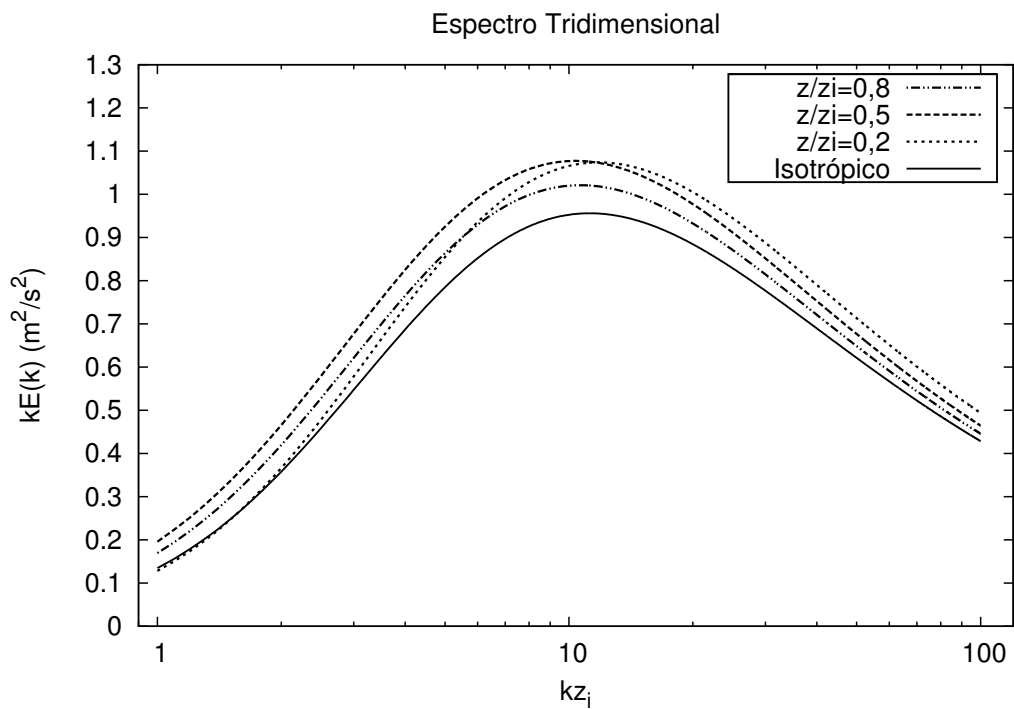


Figura 2.3: Espectro tridimensional calculado a partir da Equação (2.57) para os caso não-isotrópico e Equação (2.59) para o caso isotrópico. A função Ξ é sugerida por Højstrup (1982).

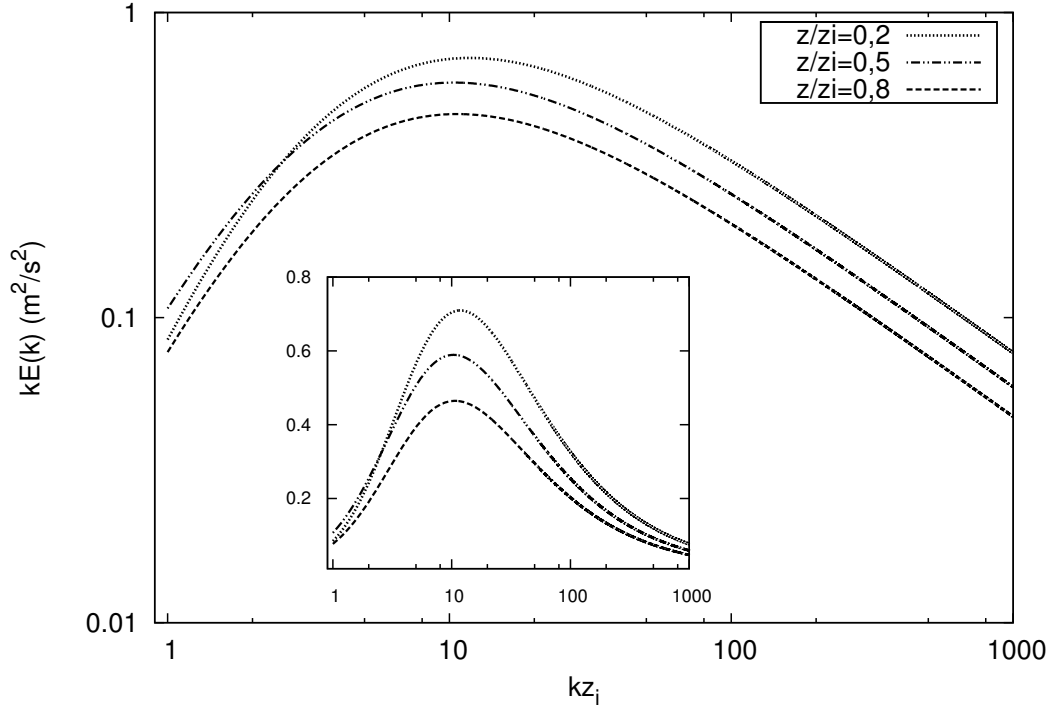


Figura 2.4: Espectro tridimensional calculado a partir da Equação (2.57) para os caso não-isotrópico. A função Ξ é sugerida por Moeng (1984).

2.1.3 Interpolação Polinomial para o Espectro Tridimensional Válido para uma Turbulência Não-Isotrópica

A interpolação do espectro tridimensional válido para turbulência não-isotrópica, é feita mediante a aplicação do método numérico de *Spline Cúbico*, o algoritmo pode ser encontrado no livro dos autores Burden e Faires (2003).

O *spline cúbico* interpolador S para a função $\mathbf{E}(k_*)$, definida nos números $k_{*0} < k_{*1} < \dots < k_{*n}$ e satisfazendo $S'''(k_{*0}) = S'''(k_{*n}) = 0$, para $k_{*j} \leq k_* \leq k_{*j+1}$, sendo que $j = 1, \dots, n-1$ e $k_* = k z_i$; tem a forma de polinômios escritos como:

$$S(k_*) = S(k_{*j}) = a_{*j} + b_{*j}(k_* - k_{*j}) + c_{*j}(k_* - k_{*j})^2 + d_{*j}(k_* - k_{*j})^3,$$

sendo que a_{*j}, b_{*j}, c_{*j} e d_{*j} são constantes.

Assim para $1 \leq k_* \leq 100$, tem-se os seguintes polinômios interpoladores:

Tabela 2.1: Constantes do polinômio interpolador para $\frac{z}{z_i} = 0, 2$.

$k_{*j} \leq k_* \leq k_{*j+1}$	a_*	b_*	c_*	d_*
$1 \leq k_* \leq 1, 5$	93, 194	57, 558	0, 000	-21, 953
$1, 5 \leq k_* \leq 2$	119, 228	41, 093	-32, 930	12, 882
$2 \leq k_* \leq 3$	133, 153	17, 825	-13, 606	2, 772
$3 \leq k_* \leq 5$	140, 143	-1, 073	-5, 292	0, 930
$5 \leq k_* \leq 10$	124, 270	-11, 079	0, 289	0, 011
$10 \leq k_* \leq 20$	77, 474	-7, 362	0, 455	-0, 013
$20 \leq k_* \leq 40$	36, 530	-2, 107	0, 071	-0, 001
$40 \leq k_* \leq 100$	14, 363	-0, 523	0, 009	0, 000

Tabela 2.2: Constantes do polinômio interpolador para $\frac{z}{z_i} = 0, 5$.

$k_{*j} \leq k_* \leq k_{*j+1}$	a_*	b_*	c_*	d_*
$1 \leq k_* \leq 1, 5$	117, 835	38, 639	0, 000	-20, 772
$1, 5 \leq k_* \leq 2$	134, 558	23, 060	-31, 158	14, 534
$2 \leq k_* \leq 3$	140, 115	2, 803	-9, 357	2, 226
$3 \leq k_* \leq 5$	135, 787	-9, 232	-2, 678	0, 590
$5 \leq k_* \leq 10$	111, 331	-12, 865	0, 861	-0, 030
$10 \leq k_* \leq 20$	64, 797	-6, 495	0, 413	-0, 012
$20 \leq k_* \leq 40$	29, 399	-1, 758	0, 061	-0, 001
$40 \leq k_* \leq 100$	11, 325	-0, 409	0, 007	0, 000

Tabela 2.3: Constantes do polinômio interpolador para $\frac{z}{z_i} = 0, 8$.

$k_{*j} \leq k_* \leq k_{*j+1}$	a_*	b_*	c_*	d_*
$1 \leq k_* \leq 1, 5$	84, 851	32, 925	0, 000	-16, 126
$1, 5 \leq k_* \leq 2$	99, 298	20, 831	-24, 189	10, 841
$2 \leq k_* \leq 3$	105, 022	4, 774	-7, 926	1, 811
$3 \leq k_* \leq 5$	103, 680	-5, 648	-2, 495	0, 510
$5 \leq k_* \leq 10$	86, 486	-9, 506	0, 566	-0, 016
$10 \leq k_* \leq 20$	51, 062	-5, 072	0, 321	-0, 009
$20 \leq k_* \leq 40$	23, 339	-1, 385	0, 048	-0, 001
$40 \leq k_* \leq 100$	9, 024	-0, 328	0, 005	0, 000

Tabela 2.4: Análise de Erro do polinômio interpolador para $\frac{z}{z_i} = 0, 2$.

k_*	$\mathbf{E}(k_*)$	$S(k_*)$	$ \mathbf{E}(k_*) - S(k_*) $
1, 2	104, 529	105, 364	0, 835
1, 7	126, 232	125, 992	0, 239
2, 5	139, 009	139, 133	0, 124
4, 0	134, 707	134, 332	0, 375
7, 0	103, 354	102, 937	0, 416
15, 0	50, 433	51, 293	0, 860
30, 0	21, 485	21, 510	0, 025
55, 0	8, 289	8, 998	0, 709
Erro Quadrático Médio =			0, 403

Tabela 2.5: Análise de Erro do polinômio interpolador para $\frac{z}{z_i} = 0, 5$.

k_*	$\mathbf{E}(k_*)$	$S(k_*)$	$ \mathbf{E}(k_*) - S(k_*) $
1, 2	125, 396	126, 331	0, 934
1, 7	138, 039	137, 769	0, 270
2, 5	139, 455	139, 581	0, 126
4, 0	124, 467	124, 126	0, 340
7, 0	88, 805	88, 777	0, 027
15, 0	41, 176	41, 828	0, 651
30, 0	16, 989	17, 078	0, 089
55, 0	6, 561	7, 054	0, 493
Erro Quadrático Médio =			0.212

Tabela 2.6: Análise de Erro do polinômio interpolador para $\frac{z}{z_i} = 0, 8$.

k_*	$\mathbf{E}(k_*)$	$S(k_*)$	$ \mathbf{E}(k_*) - S(k_*) $
1, 2	91, 307	92, 004	0, 697
1, 7	102, 583	102, 382	0, 201
2, 5	105, 653	105, 749	0, 096
4, 0	96, 047	95, 779	0, 268
7, 0	69, 606	69, 523	0, 083
15, 0	32, 592	33, 124	0, 532
30, 0	13, 537	13, 591	0, 054
55, 0	5, 216	5, 626	0, 410
Erro Quadrático Médio =			0, 142

2.2 Equação Dinâmica para o Espectro de Densidade de Energia

2.2.1 Dinâmica da correlação da velocidade de um ponto

A equação dinâmica para o espectro de energia é derivada do princípio de conservação de momento, expressa pelas equações de Navier-Stokes (HINZE, 1975; STULL, 1988),

$$\frac{\partial U_i}{\partial t} + U_k \frac{\partial U_i}{\partial x_k} = -g\delta_{i3} - 2\epsilon_{ikj}\Omega_k U_j - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{il}}{\partial x_l}, \quad (2.60)$$

onde $(U_1, U_2, U_3) = (U, V, W)$ são as componentes da velocidade, e $(x_1, x_2, x_3) = (x, y, z)$ são as coordenadas cartesianas. ϵ_{ikj} é o símbolo Levi-Civita.

O primeiro e o segundo termo do lado esquerdo da Equação (2.60) representam, respectivamente, a conservação de momento (inércia)⁴ e o transporte advectivo da velocidade⁵. Os termos do lado direito da Equação (2.60) representam: a ação da gravidade somente na direção vertical (primeiro termo), a influência da rotação da Terra (efeito de Coriolis [segundo termo]), a aceleração causada em um elemento de fluido devido ao gradiente de pressão⁶ (terceiro termo) e o tensor tensão (quarto termo).

O tensor tensão para um fluido Newtoniano é dado por,

$$\tau_{il} = \mu \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_l} + \frac{\partial U_l}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{il} \nabla \cdot \mathbf{U} \right), \quad (2.61)$$

sendo μ a viscosidade do fluido, δ_{il} é o delta Kronecker ($1, i = l; 0, i \neq l$) e os termos: $\frac{\partial U_i}{\partial x_l}$, $\frac{\partial U_l}{\partial x_i}$ e $\frac{2}{3} \delta_{il} \nabla \cdot \mathbf{U}$ representantes dos efeitos de pressão, de viscosidade e de dilatação, respectivamente, exercidos sobre um elemento de fluido.

Utiliza-se a Equação (2.61) no quarto termo da Equação (2.60),

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{il}}{\partial x_l} = \frac{\mu}{\rho} \left\{ \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_l^2} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\frac{\partial U_l}{\partial x_l} \right] - \left(\frac{2}{3} \right) \delta_{il} \frac{\partial}{\partial x_l} (\nabla \cdot \mathbf{U}) \right\}, \quad (2.62)$$

sendo $\nu = \frac{\mu}{\rho}$ a viscosidade cinemática. Ainda, assumindo incompressibilidade, $\frac{\partial U_l}{\partial x_l} = 0$ a Equação (2.62) reduz-se a

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{il}}{\partial x_l} = \nu \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_l^2}. \quad (2.63)$$

⁴Corresponde a variação Euleriana de velocidade, ou seja, a variação temporal da velocidade em um único ponto do campo de velocidade.

⁵A soma desses dois termos equivale a variação temporal total do campo de velocidade ou variação Lagrangiana deste campo.

⁶O sinal negativo indica que a aceleração causada é sempre contrária ao gradiente de pressão ou seja, a força devido a este termo tem sentido que aponta da região de alta para baixa pressão.

Com os componentes do vetor velocidade angular da rotação da Terra Ω_k dados por $(0, \omega \cos \phi, \omega \sin \phi)$, sendo ϕ a latitude e ω a velocidade angular da Terra. Frequentemente, usa-se a expressão $f_c \epsilon_{ik3} U_k$, onde $f_c = 2\omega \sin \phi$ é o parâmetro de Coriolis em vez do termo $-2\epsilon_{ikj} \Omega_k U_j$.

Com os resultados acima e assumindo a aproximação de Boussinesq⁷, podemos reescrever Equação (2.60) como:

$$\frac{\partial U_i}{\partial t} + U_k \frac{\partial U_i}{\partial x_k} = - \left(1 - \frac{\Theta}{\Theta_0} \right) g \delta_{i3} + f_c \epsilon_{ik3} U_k - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_l^2}, \quad (2.64)$$

sendo Θ a temperatura potencial.

Desprezando o efeito da rotação da Terra, e assumindo um escoamento turbulento, as variáveis velocidade, temperatura e pressão podem ser escritas na forma de uma quantidade média mais parte turbulenta, isto é:

$$\begin{aligned} U_i &= \bar{U}_i + u_i, \\ P &= \bar{P} + p, \\ \Theta &= \bar{\Theta} + \theta. \end{aligned} \quad (2.65)$$

Substituindo na Equação (2.64),

$$\frac{\partial (\bar{U}_i + u_i)}{\partial t} + (\bar{U}_k + u_k) \frac{\partial (\bar{U}_i + u_i)}{\partial x_k} = - \left(1 - \frac{(\bar{\Theta} + \theta)}{\Theta_0} \right) g \delta_{i3} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial (\bar{P} + p)}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 (\bar{U}_i + u_i)}{\partial x_l^2}, \quad (2.66)$$

ou

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial t} + \frac{\partial u_i}{\partial t} + \bar{U}_k \left(\frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right) + u_k \left(\frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right) = \\ - g \delta_{i3} + \left(\frac{\bar{\Theta}}{\Theta_0} \right) g \delta_{i3} + \left(\frac{\theta}{\Theta_0} \right) g \delta_{i3} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{P}}{\partial x_i} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \left(\frac{\partial^2 \bar{U}_i}{\partial x_l^2} + \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_l^2} \right). \end{aligned} \quad (2.67)$$

Utilizando a incompressibilidade do fluido, $\frac{\partial u_k}{\partial x_k} = 0$, multiplicando por u_i temos

⁷Essa aproximação despreza as variações na densidade de fluido, exceto aquelas associadas com os termos de flutuabilidade da Equação de movimento Equação (2.64). Fisicamente, ela despreza a compressibilidade elástica do meio, sendo as variações de densidade resultantes da variação de temperatura. [Stull (1988) e Lemes e Moura (2002).]

$u_i \frac{\partial u_k}{\partial x_k} = 0$, somando nas Equações (2.67) e observando que $u_i \frac{\partial u_k}{\partial x_k} + u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} = \frac{\partial (u_i u_k)}{\partial x_k}$, tem-se

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial t} + \frac{\partial u_i}{\partial t} + \bar{U}_k \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_k} + \bar{U}_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + u_k \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_k} + \frac{\partial (u_i u_k)}{\partial x_k} = \\ - g\delta_{i3} + \left(\frac{\bar{\Theta}}{\Theta_0} \right) g\delta_{i3} + \left(\frac{\theta}{\Theta_0} \right) g\delta_{i3} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{P}}{\partial x_i} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \left(\frac{\partial^2 \bar{U}_i}{\partial x_i^2} + \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_i^2} \right). \end{aligned} \quad (2.68)$$

Aplicando o processo de decomposição de Reynolds⁸ e suas propriedades nas Equações (2.67), (STULL, 1988; SORBJAN, 1989) obtém-se,

$$\frac{\partial \bar{U}_i}{\partial t} + \bar{U}_k \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_k} + \frac{\partial (\bar{u}_i \bar{u}_k)}{\partial x_k} = -g\delta_{i3} + \left(\frac{\bar{\Theta}}{\Theta_0} \right) g\delta_{i3} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{P}}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 \bar{U}_i}{\partial x_i^2}, \quad (2.69)$$

Subtraindo (2.68) e (2.69),

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \bar{U}_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + u_k \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_k} + \frac{\partial}{\partial x_k} (u_i u_k - \bar{u}_i \bar{u}_k) = \left(\frac{\theta}{\Theta_0} \right) g\delta_{i3} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_i^2}. \quad (2.70)$$

2.2.2 Dinâmica da correlação da velocidade entre dois pontos

Seguindo Hinze (1975), toma-se a Equação (2.70) em um ponto genérico A e multiplicando, esta, por $(u_j)_B$, a componente da velocidade em um ponto genérico B ,

$$\begin{aligned} (u_j)_B \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} \right)_A + (u_j)_B (\bar{U}_k)_A \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right)_A + (u_j)_B (u_k)_A \left(\frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_k} \right)_A = \\ - (u_j)_B \left[\frac{\partial}{\partial x_k} (u_i u_k - \bar{u}_i \bar{u}_k) \right]_A + (u_j)_B \left(\frac{\theta}{\Theta_0} \right)_A g\delta_{i3} - \frac{1}{\rho} (u_j)_B \left(\frac{\partial p}{\partial x_i} \right)_A + \nu (u_j)_B \left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_i^2} \right)_A. \end{aligned} \quad (2.71)$$

De maneira similar, toma-se a Equação (2.70) em um ponto genérico B e multiplica-se

⁸O processo de decomposição em uma parte média e outra turbulenta, como indicado no Sistema (2.65), objetiva a redução do amplo intervalo de escalas e de frequências encontrado nas equações que modelam escoamentos turbulentos. Essa redução baseia-se na observação que as escalas temporais características das componentes médias e turbulentas sejam distintas, isto é, existe uma *falha espectral* (Stull (1988) e Lemes e Moura (2002)) e, ainda, em um regime de escoamento turbulento estacionário e homogêneo, sob o qual, pode-se admitir que é indiferente utilizar um operador média temporal, ou espacial ou sob ensemble (hipótese de ergodicidade) para o tratamento das propriedades médias dos componentes turbulentos.

por $(u_i)_A$, a velocidade em um ponto genérico A ,

$$\begin{aligned} & (u_i)_A \left(\frac{\partial u_j}{\partial t} \right)_B + (u_i)_A (\overline{U}_k)_B \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_k} \right)_B + (u_i)_A (u_k)_B \left(\frac{\partial \overline{U}_j}{\partial x_k} \right)_B = \\ & - (u_j)_A \left[\frac{\partial}{\partial x_k} (u_j u_k - \overline{u_j u_k}) \right]_B + (u_i)_A \left(\frac{\theta}{\Theta_0} \right)_B g \delta_{j3} - \frac{1}{\rho} (u_i)_A \left(\frac{\partial p}{\partial x_j} \right)_B + \nu (u_i)_A \left(\frac{\partial^2 u_j}{\partial x_l^2} \right)_B. \end{aligned} \quad (2.72)$$

Adicionando as duas equações, Equação (2.71) e Equação (2.72), resulta

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} (u_i)_A (u_j)_B + (\overline{U}_k)_A \left(\frac{\partial}{\partial x_k} \right)_A (u_i)_A (u_j)_B + (\overline{U}_k)_B \left(\frac{\partial}{\partial x_k} \right)_B (u_i)_A (u_j)_B + (u_j)_B (u_k)_A \left(\frac{\partial \overline{U}_i}{\partial x_k} \right)_A \\ & + (u_i)_A (u_k)_B \left(\frac{\partial \overline{U}_j}{\partial x_k} \right)_B = - \left(\frac{\partial}{\partial x_k} \right)_A (u_j)_B (u_i)_A (u_k)_A - \left(\frac{\partial}{\partial x_k} \right)_B (u_i)_A (u_j)_B (u_k)_B \\ & + \left(\frac{\partial}{\partial x_k} \right)_A (u_j)_B (\overline{u_i u_k})_A + \left(\frac{\partial}{\partial x_k} \right)_B (u_i)_A (\overline{u_j u_k})_B + [(u_j)_B \theta_A \delta_{i3} + (u_i)_A \theta_B \delta_{j3}] \frac{g}{\Theta_0} \\ & - \frac{1}{\rho} \left[\left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_A p_A (u_j)_B + \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \right)_B p_B (u_i)_A \right] + \nu \left[\left(\frac{\partial^2}{\partial x_l^2} \right)_A \left(\frac{\partial^2}{\partial x_l^2} \right)_B \right] (u_i)_A (u_j)_B. \end{aligned} \quad (2.73)$$

Devido a não homogeneidade da turbulência, os valores médios de vários produtos das velocidades turbulentas que aparecem na Equação (2.73) são funções não somente da distância entre os pontos A e B , mas também da localização destes pontos no campo turbulento. Com o objetivo de fazer a distinção entre distância e localização, introduzem-se as novas variáveis independentes (HINZE, 1975),

$$\xi_k = (x_k)_B - (x_k)_A \quad \text{e} \quad (2.74a)$$

$$(x_k)_{AB} = \frac{1}{2} [(x_k)_A + (x_k)_B]. \quad (2.74b)$$

A Equação (2.73), que originalmente era função de $(x_k)_A$ e $(x_k)_B$, após a mudança de variável Equações (2.74) será função de ξ_k e $(x_k)_{AB}$, sendo que

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_k} \right)_A = \left(\frac{\partial}{\partial x_k} \right)_{AB} \frac{\partial (x_k)_{AB}}{\partial (x_k)_A} + \frac{\partial}{\partial \xi_k} \frac{\partial \xi_k}{\partial (x_k)_A} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_k} \right)_{AB} - \frac{\partial}{\partial \xi_k}, \quad (2.75a)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_k} \right)_B = \left(\frac{\partial}{\partial x_k} \right)_{AB} \frac{\partial (x_k)_{AB}}{\partial (x_k)_B} + \frac{\partial}{\partial \xi_k} \frac{\partial \xi_k}{\partial (x_k)_B} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_k} \right)_{AB} + \frac{\partial}{\partial \xi_k}, \quad (2.75b)$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x_l^2}\right)_A = \frac{1}{4} \left(\frac{\partial^2}{\partial x_l^2}\right)_{AB} + \frac{\partial^2}{\partial \xi_l^2} - \left(\frac{\partial}{\partial x_k}\right)_{AB} \frac{\partial}{\partial \xi_k}, \quad (2.76a)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2}{\partial x_l^2}\right)_B &= \frac{1}{4} \left(\frac{\partial^2}{\partial x_l^2}\right)_{AB} + \frac{\partial^2}{\partial \xi_l^2} + \left(\frac{\partial}{\partial x_k}\right)_{AB} \frac{\partial}{\partial \xi_k}, \\ \left(\frac{\partial^2}{\partial x_l^2}\right)_A + \left(\frac{\partial^2}{\partial x_l^2}\right)_B &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2}{\partial x_l^2}\right)_{AB} + 2 \frac{\partial^2}{\partial \xi_l^2}. \end{aligned} \quad (2.76b)$$

Assim, substituindo os resultados (2.75) e (2.76) na Equação (2.73), tomando a média em relação do tempo, e definindo os tensores de correlação velocidade-velocidade, pressão-velocidade e temperatura-velocidade,

$$\mathbf{Q}_{i,j}(x_1, x_2, x_3, \xi_1, \xi_2, \xi_3, t) = \overline{(u_i)_A (u_j)_B}, \quad (2.77a)$$

$$\mathbf{S}_{i,kj}(x_1, x_2, x_3, \xi_1, \xi_2, \xi_3, t) = \overline{(u_i)_A (u_j)_B (u_k)_B}, \quad (2.77b)$$

$$\mathbf{S}_{ik,j}(x_1, x_2, x_3, \xi_1, \xi_2, \xi_3, t) = \overline{(u_j)_B (u_i)_A (u_k)_A}, \quad (2.77c)$$

$$\mathbf{K}_{p,j}(x_1, x_2, x_3, \xi_1, \xi_2, \xi_3, t) = \overline{p_A (u_j)_B}, \quad (2.77d)$$

$$\mathbf{K}_{i,p}(x_1, x_2, x_3, \xi_1, \xi_2, \xi_3, t) = \overline{p_B (u_i)_A}, \quad (2.77e)$$

$$\mathbf{T}_{\theta,j}(x_1, x_2, x_3, \xi_1, \xi_2, \xi_3, t) = \overline{\theta_A (u_j)_B}, \quad (2.77f)$$

$$\mathbf{T}_{i,\theta}(x_1, x_2, x_3, \xi_1, \xi_2, \xi_3, t) = \overline{\theta_B (u_i)_A}, \quad (2.77g)$$

obtém-se,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{Q}_{i,j} + \mathbf{Q}_{k,j} \left(\frac{\partial \overline{U_i}}{\partial x_k}\right)_A + \mathbf{Q}_{i,k} \left(\frac{\partial \overline{U_j}}{\partial x_k}\right)_B + \frac{1}{2} [(\overline{U_k})_A + (\overline{U_k})_B] \left(\frac{\partial}{\partial x_k}\right)_{AB} \mathbf{Q}_{i,j} \\ + [(\overline{U_k})_B - (\overline{U_k})_A] \frac{\partial}{\partial \xi_k} \mathbf{Q}_{i,j} = [\delta_{i3} \mathbf{T}_{\theta,j} + \delta_{j3} \mathbf{T}_{i,\theta}] \frac{g}{\Theta_0} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_k}\right)_{AB} (\mathbf{S}_{i,kj} + \mathbf{S}_{ik,j}) \\ - \frac{\partial}{\partial \xi_k} (\mathbf{S}_{i,kj} - \mathbf{S}_{ik,j}) - \frac{1}{\rho} \left[\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_{AB} \mathbf{K}_{p,j} + \left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)_{AB} \mathbf{K}_{i,p} \right] \\ + \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial}{\partial \xi_i} \mathbf{K}_{p,j} - \frac{\partial}{\partial \xi_j} \mathbf{K}_{i,p} \right] + \frac{1}{2} \nu \left(\frac{\partial^2}{\partial x_l^2}\right)_{AB} \mathbf{Q}_{i,j} + 2\nu \frac{\partial^2}{\partial x_l^2} \mathbf{Q}_{i,j}. \end{aligned} \quad (2.78)$$

A Equação (2.78) é a completa equação dinâmica para a correlação dupla da velocidade $(\mathbf{Q}_{i,j})_{A,B}$, sendo válida para o caso de uma turbulência não homogênea, não-isotrópica, mas sujeita a força da gravidade e a uma força de empuxo. Ainda, esta equação é aplicada para a baixa atmosfera e em escalas, sob as quais a força de Coriolis pode ser desprezada. O termo de empuxo se deve ao aquecimento ou resfriamento da superfície da Terra.

2.2.3 Turbulência Homogênea

Se considerarmos um escoamento turbulento homogêneo, as derivadas da correlação em relação a $(x_k)_{AB}$ desaparecem, sendo assim o sistema representado pela Equação (2.78) reduzem-se a

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{Q}_{i,j} + \mathbf{Q}_{k,j} \left(\frac{\partial \overline{U}_i}{\partial x_k} \right)_A + \mathbf{Q}_{i,k} \left(\frac{\partial \overline{U}_j}{\partial x_k} \right)_B + [(\overline{U}_k)_B - (\overline{U}_k)_A] \frac{\partial}{\partial \xi_k} \mathbf{Q}_{i,j} \\ & = [\delta_{i3} \mathbf{T}_{\theta,j} + \delta_{j3} \mathbf{T}_{i,\theta}] \frac{g}{\Theta_0} - \frac{\partial}{\partial \xi_k} (\mathbf{S}_{i,kj} - \mathbf{S}_{ik,j}) - \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial}{\partial \xi_j} \mathbf{K}_{i,p} - \frac{\partial}{\partial \xi_i} \mathbf{K}_{p,j} \right] + 2\nu \frac{\partial^2}{\partial x_l^2} \mathbf{Q}_{i,j} \quad (2.79) \end{aligned}$$

Somente existe turbulência homogênea e com cisalhamento se o movimento médio do escoamento tiver direção, sentido e velocidade constante, e um gradiente lateral constante através de todo o campo (HINZE, 1975).

Sem perda de generalidade, segundo (HINZE, 1975), pode-se descrever a os efeitos médios da turbulência em um sistema de coordenadas tal que o principal escoamento paralelo é ao longo de uma das coordenadas do sistema de referência. Assim, assume-se que o movimento é na direção x_1 , que existe um gradiente constante da velocidade na direção x_2 e que não existem movimentos médios nas direções x_2 e x_3 , hipóteses expressas matematicamente por

$$\begin{aligned} \overline{U}_1 &= f(x_2) \\ \overline{U}_2 &= \overline{U}_3 = 0 \\ \frac{d\overline{U}_1}{dx_2} &= \text{constante} \end{aligned}$$

Com estas condições a Equação (2.79) pode ser reescrita como segue,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{Q}_{i,j} + \left(\delta_{i1} \mathbf{Q}_{2,j} + \delta_{j1} \mathbf{Q}_{i,2} + \xi_2 \frac{\partial}{\partial \xi_1} \mathbf{Q}_{i,j} \right) \frac{d\overline{U}_1}{dx_2} &= [\delta_{i3} \mathbf{T}_{\theta,j} + \delta_{j3} \mathbf{T}_{i,\theta}] \frac{g}{\Theta_0} - \frac{\partial}{\partial \xi_k} (\mathbf{S}_{i,kj} - \mathbf{S}_{ik,j}) \\ &\quad - \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial}{\partial \xi_j} \mathbf{K}_{i,p} - \frac{\partial}{\partial \xi_i} \mathbf{K}_{p,j} \right) + 2\nu \frac{\partial^2}{\partial x_l^2} \mathbf{Q}_{i,j} \quad (2.81) \end{aligned}$$

Neste caso, ao considerar turbulência homogênea e um especial sistema de coordenadas, as propriedades da turbulência não serão modificadas se o sinal das coordenadas forem modificadas simultaneamente, então substituindo ξ_1 por $-\xi_1$, ξ_2 por $-\xi_2$ e ξ_3 por $-\xi_3$. Isto é, o ponto $\xi_i = 0$ é o centro da simetria para este tipo de descrição de escoamento turbulento.

Considerando a propriedade de invariância sob translação de um campo turbulento homogêneo, obtém-se as relações,

$$\begin{aligned}
\overline{[(u_i)_A (u_j)_B]} (\xi_1, \xi_2, \xi_3) &= \overline{[(u_i)_A (u_j)_B]} (-\xi_1, -\xi_2, -\xi_3), \\
\overline{[(u_i)_A (u_k)_B (u_j)_B]} (\xi_1, \xi_2, \xi_3) &= \overline{[(u_i)_A (u_k)_B (u_j)_B]} (-\xi_1, -\xi_2, -\xi_3), \\
\overline{[(u_i)_A (u_k)_A (u_j)_B]} (\xi_1, \xi_2, \xi_3) &= \overline{[(u_i)_A (u_k)_A (u_j)_B]} (-\xi_1, -\xi_2, -\xi_3), \\
\overline{[p_A (u_j)_B]} (\xi_1, \xi_2, \xi_3) &= \overline{[p_A (u_j)_B]} (-\xi_1, -\xi_2, -\xi_3), \\
\overline{[p_B (u_i)_A]} (\xi_1, \xi_2, \xi_3) &= \overline{[p_B (u_i)_A]} (-\xi_1, -\xi_2, -\xi_3), \\
\overline{[\theta_A (u_j)_B]} (\xi_1, \xi_2, \xi_3) &= \overline{[\theta_A (u_j)_B]} (-\xi_1, -\xi_2, -\xi_3), \\
\overline{[\theta_B (u_i)_A]} (\xi_1, \xi_2, \xi_3) &= \overline{[\theta_B (u_i)_A]} (-\xi_1, -\xi_2, -\xi_3).
\end{aligned}$$

Para um campo turbulento homogêneo a propriedade de invariância frente a reflexão também deve ser satisfeita, com isso os tensores devem satisfazer as relações:

$$\begin{aligned}
\overline{[(u_i)_A (u_j)_B]} (\xi_1, \xi_2, \xi_3) &= \overline{[(u_i)_A (u_j)_B]} (-\xi_1, -\xi_2, -\xi_3), \\
\overline{[(u_i)_A (u_k)_B (u_j)_B]} (\xi_1, \xi_2, \xi_3) &= -\overline{[(u_i)_A (u_k)_B (u_j)_B]} (-\xi_1, -\xi_2, -\xi_3), \\
\overline{[(u_i)_A (u_k)_A (u_j)_B]} (\xi_1, \xi_2, \xi_3) &= -\overline{[(u_i)_A (u_k)_A (u_j)_B]} (-\xi_1, -\xi_2, -\xi_3), \\
\overline{[p_A (u_j)_B]} (\xi_1, \xi_2, \xi_3) &= -\overline{[p_A (u_j)_B]} (-\xi_1, -\xi_2, -\xi_3), \\
\overline{[p_B (u_i)_A]} (\xi_1, \xi_2, \xi_3) &= -\overline{[p_B (u_i)_A]} (-\xi_1, -\xi_2, -\xi_3), \\
\overline{[\theta_A (u_j)_B]} (\xi_1, \xi_2, \xi_3) &= -\overline{[\theta_A (u_j)_B]} (-\xi_1, -\xi_2, -\xi_3), \\
\overline{[\theta_B (u_i)_A]} (\xi_1, \xi_2, \xi_3) &= -\overline{[\theta_B (u_i)_A]} (-\xi_1, -\xi_2, -\xi_3).
\end{aligned}$$

Combinando as expressões obtidas acima, segue que:

$$\mathbf{Q}_{i,j} (\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \mathbf{Q}_{i,j} (-\xi_1, -\xi_2, -\xi_3) = \mathbf{Q}_{j,i} (\xi_1, \xi_2, \xi_3), \quad (2.84a)$$

$$\mathbf{S}_{i,kj} (\xi_1, \xi_2, \xi_3) = -\mathbf{S}_{i,kj} (-\xi_1, -\xi_2, -\xi_3) = -\mathbf{S}_{kj,i} (\xi_1, \xi_2, \xi_3), \quad (2.84b)$$

$$\mathbf{S}_{ik,j} (\xi_1, \xi_2, \xi_3) = -\mathbf{S}_{ik,j} (-\xi_1, -\xi_2, -\xi_3) = -\mathbf{S}_{j,ik} (\xi_1, \xi_2, \xi_3), \quad (2.84c)$$

$$\mathbf{K}_{p,j} (\xi_1, \xi_2, \xi_3) = -\mathbf{K}_{p,j} (-\xi_1, -\xi_2, -\xi_3) = -\mathbf{K}_{j,p} (\xi_1, \xi_2, \xi_3), \quad (2.84d)$$

$$\mathbf{K}_{i,p} (\xi_1, \xi_2, \xi_3) = -\mathbf{K}_{i,p} (-\xi_1, -\xi_2, -\xi_3) = -\mathbf{K}_{p,i} (\xi_1, \xi_2, \xi_3), \quad (2.84e)$$

$$\mathbf{T}_{\theta,j} (\xi_1, \xi_2, \xi_3) = -\mathbf{T}_{\theta,j} (-\xi_1, -\xi_2, -\xi_3) = -\mathbf{T}_{j,\theta} (\xi_1, \xi_2, \xi_3), \quad (2.84f)$$

$$\mathbf{T}_{i,\theta} (\xi_1, \xi_2, \xi_3) = -\mathbf{T}_{i,\theta} (-\xi_1, -\xi_2, -\xi_3) = -\mathbf{T}_{\theta,i} (\xi_1, \xi_2, \xi_3). \quad (2.84g)$$

No que se refere a simetria para correlações tripla da velocidade pode-se trocar a ordem de dois índices correspondentes ao mesmo ponto, o que não altera em nada as componentes do tensor. Então

$$\mathbf{S}_{i,kj} = \mathbf{S}_{i,jk}, \quad (2.85a)$$

$$\mathbf{S}_{ik,j} = \mathbf{S}_{ki,j}. \quad (2.85b)$$

Pode-se reescrever alguns termos de Equação (2.81), utilizando as relações (2.84) e (2.85), termos como

$$-\frac{\partial}{\partial \xi_k} (\mathbf{S}_{i,kj} - \mathbf{S}_{ik,j}) = \frac{\partial}{\partial \xi_k} (\mathbf{S}_{jk,i} + \mathbf{S}_{ik,j}) \mathbf{S}_{i,jk} = \mathbf{S}_{i,j}, \quad (2.86a)$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi_j} \mathbf{K}_{i,p} - \frac{\partial}{\partial \xi_i} \mathbf{K}_{p,j} = \frac{\partial}{\partial \xi_j} \mathbf{K}_{i,p} + \frac{\partial}{\partial \xi_i} \mathbf{K}_{j,p} = \mathbf{P}_{i,j}, \quad (2.86b)$$

e substituindo tais relações nos termos correspondentes a Equação (2.81),

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{Q}_{i,j} + \left(\delta_{i1} \mathbf{Q}_{2,j} + \delta_{j1} \mathbf{Q}_{i,2} + \xi_2 \frac{\partial}{\partial \xi_1} \mathbf{Q}_{i,j} \right) \frac{d\bar{U}_1}{dx_2} = [\delta_{i3} \mathbf{T}_{\theta,j} + \delta_{j3} \mathbf{T}_{i,\theta}] \frac{g}{\Theta_0} + \mathbf{S}_{i,j} - \frac{1}{\rho} \mathbf{P}_{i,j} + 2\nu \frac{\partial^2}{\partial x_l^2} \mathbf{Q}_{i,j} \quad (2.87)$$

A Equação (2.87) descreve a variação no tempo da correlação entre dois pontos das componentes turbulentas da velocidade em um campo turbulento homogêneo.

2.2.4 A Equação Dinâmica para o Espectro de Energia

A equação dinâmica para o espectro de energia é obtida a partir das seguintes transformadas de Fourier,

$$\mathbf{Q}_{i,j}(\vec{\xi}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E}_{i,j}(\vec{k}, t) \exp(i\vec{k} \cdot \vec{\xi}) d^3k, \quad (2.88a)$$

$$\mathbf{S}_{i,j}(\vec{\xi}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{W}_{i,j}(\vec{k}, t) \exp(i\vec{k} \cdot \vec{\xi}) d^3k, \quad (2.88b)$$

$$\mathbf{P}_{i,j}(\vec{\xi}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{F}_{i,j}(\vec{k}, t) \exp(i\vec{k} \cdot \vec{\xi}) d^3k, \quad (2.88c)$$

$$\mathbf{T}_{\theta,j}(\vec{\xi}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{H}_{\theta,j}(\vec{k}, t) \exp(i\vec{k} \cdot \vec{\xi}) d^3k, \quad (2.88d)$$

$$\mathbf{T}_{i,\theta}(\vec{\xi}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{H}_{i,\theta}(\vec{k}, t) \exp(i\vec{k} \cdot \vec{\xi}) d^3k, \quad (2.88e)$$

onde $\vec{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$, $\vec{k} = (k_1, k_2, k_3)$ e $d^3k = dk_1 dk_2 dk_3$.

Para determinar a transformada de Fourier do termo $\xi_2 \frac{\partial}{\partial \xi_1} \mathbf{Q}_{i,j}$, utiliza-se expressão dada por (2.88a), seguido da sua respectiva derivada em relação a componente ξ_1 , obtendo, assim, com a multiplicação de ξ_2 , o resultado

$$\xi_2 \frac{\partial}{\partial \xi_1} \mathbf{Q}_{i,j}(\vec{\xi}, t) = i \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \xi_2 k_1 \mathbf{E}_{i,j}(\vec{k}, t) \exp(i\vec{k} \cdot \vec{\xi}) d^3 k. \quad (2.89)$$

Fazendo a integração por partes em relação a k_2 e, simultaneamente, assumindo que $\lim_{k_2 \rightarrow \infty} \mathbf{E}_{i,j} = 0$,

$$\xi_2 \frac{\partial}{\partial \xi_1} \mathbf{Q}_{i,j}(\vec{\xi}, t) = - \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} k_1 \frac{\partial \mathbf{E}_{i,j}(\vec{k}, t)}{\partial k_2} \exp(i\vec{k} \cdot \vec{\xi}) d^3 k. \quad (2.90)$$

De maneira semelhante, obtém-se que a transformada de Fourier dos termos $\frac{\partial^2}{\partial \xi_i^2} \mathbf{Q}_{i,j}$,

$$\frac{\partial^2}{\partial \xi_i^2} \mathbf{Q}_{i,j}(\vec{\xi}, t) = - \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |\vec{k}|^2 \mathbf{E}_{i,j}(\vec{k}, t) \exp(i\vec{k} \cdot \vec{\xi}) d^3 k. \quad (2.91)$$

Com as equações (2.88a)-(2.88e), a Equação (2.90) e a Equação (2.91), obtém-se a equação dinâmica para o espectro de energia em função do número de onda \vec{k} e do tempo t escrita a seguir,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E}_{i,j} + \left(\delta_{i1} \mathbf{E}_{2,j} + \delta_{j1} \mathbf{E}_{i,2} - k_1 \frac{\partial}{\partial k_2} \mathbf{E}_{i,j} \right) \frac{d\bar{U}_1}{dx_2} = [\delta_{i3} \mathbf{H}_{\theta,j} + \delta_{j3} \mathbf{H}_{i,\theta}] \frac{g}{\Theta_0} + \mathbf{W}_{i,j} \\ - \frac{1}{\rho} \mathbf{F}_{i,j} - 2\nu |\vec{k}|^2 \mathbf{E}_{i,j}. \end{aligned} \quad (2.92)$$

Para obter uma equação para o espectro de energia, o qual é obtido a partir do traço do tensor $\mathbf{E}_{i,j}$, multiplica-se a Equação (2.92) por δ_{ij} , resultando na contração dos índices i e j . No entanto, para turbulência homogênea, segue da equação da continuidade que $\mathbf{P}_{i,i}(\vec{\xi}, t) = 0$, pois $\frac{\partial}{\partial \xi_i} \mathbf{K}_{i,p}(\vec{\xi}, t) = 0$, isto é, quando assume-se a contração o termo de pressão desaparece. Lembrando, ainda, que $\mathbf{E}_{i,j} = \mathbf{E}_{j,i}$. Sendo assim,

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E}_{i,i} + \left(2\mathbf{E}_{1,2} - k_1 \frac{\partial}{\partial k_2} \mathbf{E}_{i,i} \right) \frac{d\bar{U}_1}{dx_2} = [\mathbf{H}_{\theta,3} + \mathbf{H}_{3,\theta}] \frac{g}{\Theta_0} + \mathbf{W}_{i,i} - 2\nu |\vec{k}|^2 \mathbf{E}_{i,i}. \quad (2.93)$$

Em turbulência isotrópica é possível expressar as funções correlações e as funções espectrais em termos de um único escalar, isto é, ou a distância r , ou o número de onda k , respectivamente.

Batchelor (1953) sugere fazer o mesmo procedimento para turbulência não-isotrópica porém homogênea pela média das funções correlação e espectral sobre todas as direções de r e k nos correspondentes espaços. Então, tomando a média destas funções sobre uma superfície esférica de raio $r = \text{constante}$ e $k = \text{constante}$, respectivamente. Por exemplo,

$$\overline{\mathbf{E}_{i,i}(\vec{k}, t)} = \frac{1}{4\pi k^2} \int dA(k) \mathbf{E}_{i,i}(\vec{k}, t), \quad (2.94a)$$

$$\overline{\mathbf{Q}_{i,i}(\vec{\xi}, t)} = \frac{1}{4\pi r^2} \int dA(r) \mathbf{Q}_{i,i}(\vec{\xi}, t). \quad (2.94b)$$

A relação entre $\overline{\mathbf{E}_{i,i}(\vec{k}, t)}$ e $\overline{\mathbf{Q}_{i,i}(\vec{\xi}, t)}$ é dada pela transformada inversa da Equação (2.88a) (HINZE, 1975 pp.204), isto é,

$$\overline{\mathbf{E}_{i,i}(\vec{k}, t)} = \frac{1}{8\pi^3} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\mathbf{Q}_{i,i}(\vec{\xi}, t)} \exp(-i\vec{k} \cdot \vec{\xi}) d^3\xi, \quad (2.95)$$

com $d^3\xi = d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3$.

Em coordenadas esféricas,

$$\overline{\mathbf{E}_{i,i}(\vec{k}, t)} = \frac{1}{8\pi^3} \int_0^{\infty} dk \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\theta \overline{\mathbf{Q}_{i,i}(\vec{\xi}, t)} r^2 \sin\theta \exp(-ikr \cos\theta),$$

daí,

$$\overline{\mathbf{E}_{i,i}(\vec{k}, t)} = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{\infty} dr r^2 \frac{\sin(kr)}{kr} \overline{\mathbf{Q}_{i,i}(\vec{\xi}, t)}, \quad (2.96)$$

ou,

$$\overline{\mathbf{Q}_{i,i}(\vec{\xi}, t)} = 4\pi \int_0^{\infty} dr r^2 \frac{\sin(kr)}{kr} \overline{\mathbf{E}_{i,i}(\vec{k}, t)}. \quad (2.97)$$

Da mesma forma que é feito para o caso isotrópico ((HINZE, 1975) pp.195), define-se as funções correlação e espectrais através das funções dependentes do tempo e de r ou k nos correspondentes espaços.

$$\mathbf{E}(k, t) = 2\pi k^2 \overline{\mathbf{E}_{i,i}(\vec{k}, t)}, \quad (2.98a)$$

$$\mathbf{M}(k, t) = -2\pi k^2 \left[\overline{2\mathbf{E}_{1,2}(\vec{k}, t)} - k_1 \frac{\partial}{\partial k_2} \overline{\mathbf{E}_{i,i}(\vec{k}, t)} \right] \frac{d\overline{U}_1}{dx_2}, \quad (2.98b)$$

$$\mathbf{H}(k, t) = 2\pi k^2 \left[\overline{\mathbf{H}_{\theta,3}(\vec{k}, t)} + \overline{\mathbf{H}_{3,\theta}(\vec{k}, t)} \right], \quad (2.98c)$$

$$\mathbf{W}(k, t) = 2\pi k^2 \overline{\mathbf{W}_{i,i}(\vec{k}, t)}, \quad (2.98d)$$

Com o conjunto das definições (2.98), reescreve-se a Equação (2.93) como segue,

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E}(k, t) = \mathbf{H}(k, t) \frac{g}{\Theta_0} + \mathbf{M}(k, t) + \mathbf{W}(k, t) - 2\nu k^2 \mathbf{E}(k, t). \quad (2.99)$$

A Equação (2.99) descreve a dinâmica do espectro de energia tridimensional. Os termos que compõem esta equação representam a variação temporal da função espectro de energia (primeiro termo); a produção ou consumo de energia cinética turbulenta (ECT [segundo termo]), a produção de energia por efeito mecânico (terceiro termo); a transferência inercial de energia cinética, que se dá na direção dos maiores para os menores turbilhões, o que caracteriza o efeito cascata (quarto termo) e a dissipação de energia por viscosidade molecular (quinto termo), respectivamente.

2.3 Equações Diferenciais Parciais – EDP’s.

A Equação (2.99) obtida anteriormente descreve a evolução temporal do espectro de densidade de energia relacionados com os termos de produção e/ou consumo de energia por efeito térmico e efeito mecânico, transferência inercial de energia e dissipação molecular de energia, excetuando este último e aquele primeiro, todos os demais termos requererão uma parametrização.

Como será descrito adiante, o modelo a ser resolvido neste estudo toma a forma de uma EDP de 1ª ordem. Sob essa consideração, nas seções abaixo estabelecerá-se a notação, classificação e o Método das Características para a resolução de uma EDP 1ª ordem, bem como os enunciados dos teoremas de existências e unicidade local da solução.

2.3.1 Conceitos Gerais e Notação

Uma EDP geral de ordem k pode ser representada como

$$F(\mathbf{x}, (\partial^\alpha u)_{|\alpha| \leq k}) = 0. \quad (2.100)$$

sendo F e u funções das variáveis $\mathbf{x} \in \Omega$ e $(u_\alpha)_{|\alpha| \leq k} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}(k)}$, com Ω um conjunto aberto em \mathbb{R}^n (Folland (1995)).⁹

⁹Esta notação, a princípio um tanto insólita - porém recorrente em trabalhos e livros da área equivale à representação clássica para uma EDP geral:

$$F(\mathbf{x}, u, \partial_1 u, \dots, \partial_n u, \partial_1^2 u, \dots, \partial_n^k u) = 0. \quad (2.101)$$

No Apêndice C, a equivalência entre as notações usadas nas equações (2.100) e (2.101) é exemplificada para uma EDP “geral” de 2ª ordem ($k = 2$) via a *notação multi-índice*.

A função $u = u(\mathbf{x})$ em Ω é uma *solução clássica* da Equação (2.100) se as suas derivadas $\partial^\alpha u$, ocorrentes em F , sejam contínuas em Ω e satisfaçam $F(\mathbf{x}, (\partial^\alpha u(\mathbf{x}))_{|\alpha| \leq k}) = 0, \forall \mathbf{x} \in \Omega$ (Folland (1995)). Neste trabalho buscará-se soluções clássicas.

Ainda, o conceito de solução em EDP's pode ser estendido para *soluções fracas* e/ou *soluções generalizadas*. As primeiras representam funções soluções não-suficientemente diferenciáveis, a ponto que não possam ser substituída na EDP (por exemplo, que satisfaçam a lei de conservação integral mas não a sua equivalente diferencial), e as segundas generalizam o próprio conceito de função via Teoria de Distribuições, as *funções generalizadas* (Ver Iório e Iório (1998), Braga (2006) e Cardaro e Kawano (2002)). Cabe salientar que toda solução fraca ou clássica é uma solução generalizada.

Classificam-se EDP's quanto a sua *linearidade* ou *não-linearidade*. Uma EDP é dita *linear* quando pode ser escrita como

$$\sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha(\mathbf{x}) \partial^\alpha u = f(\mathbf{x}), \quad (2.102)$$

e uma EDP *não-linear* tem sua forma representada, de maneira geral, pela Equação (2.100). A parte da equação que contém as derivadas de maior ordem determina, em muitos casos, propriedades relativas as soluções; essa parte é chamada *parte principal* da EDP. As equações não-lineares com parte principal linear nomeiam-se *quasilineares* e são da forma:

$$\sum_{|\alpha|=k} a_\alpha(\mathbf{x}, (\partial^\beta u)_{|\beta| \leq k-1}) \partial^\alpha u = b(\mathbf{x}, (\partial^\beta u)_{|\beta| \leq k-1}), \quad (2.103)$$

dentro desta classe de EDP's, quando $a_\alpha = a_\alpha(\mathbf{x})$, diz-se que a EDP é *semilinear*.

Se, na Equação (2.100), Equação (2.102) e Equação (2.103) acima, $f \equiv b \equiv 0$, dizemos que a EDP é *homogênea*, caso contrário *não-homogênea*. Ver Iório (2001) e Folland (1995).

A forma equivalente, como EDP 1ª ordem, à Equação (2.100), à Equação (2.102) e à Equação (2.103) são, respectivamente,

$$F(\mathbf{x}, (\partial^\alpha u)_{|\alpha| \leq 1}) \equiv F(x_1, \dots, x_n, u, \partial_1 u, \dots, \partial_n u) = 0, \quad (2.104)$$

$$\sum_{|\alpha| \leq 1} a_\alpha(\mathbf{x}) \partial^\alpha u = f(\mathbf{x}) \Leftrightarrow \sum a_j(\mathbf{x}) \partial_j u + c(\mathbf{x}) u = b(\mathbf{x}) \quad (2.105)$$

e

$$\sum_{|\alpha|=1} a_\alpha(\mathbf{x}, u) \partial^\alpha u = b(\mathbf{x}, u) \Leftrightarrow \sum a_j(\mathbf{x}, u) \partial_j u = b(\mathbf{x}, u). \quad (2.106)$$

2.3.2 O Método das Características

O *Método das Características* aplica-se na resolução de EDP's de primeira ordem, além de fornecer uma base teórica às questões de existência, de unicidade e de propriedades das soluções - que será tratado na próxima seção. Nesta seção tratar-se-á da aplicação do método para a obtenção das soluções. Para isto toma-se como exemplo a *Equação de Advecção unidimensional*:

$$u_t + cu_x = 0, \quad (2.107)$$

em que c uma constante real. A unidimensionalidade, aqui, é relativa à variável espacial (no caso $x \in \mathbb{R}$), porém a função-solução é de duas variáveis (a saber, $u \equiv u(x, t)$); ainda, conforme as definições acima, a Equação (2.107) é uma EDP de primeira ordem, linear e homogênea. Sua solução será construída a partir de “considerações” geométricas, e as questões de existência, unicidade e propriedades serão postergadas nesta abordagem.

Inicialmente, suponha existir a solução u da Equação (2.107). O gráfico associado a u é o conjunto $S \doteq \{x, t, u(x, t)\}$, e em cada ponto (x, t) o valor do vetor normal ($\hat{\mathbf{n}}$) de S é conhecido: $\hat{\mathbf{n}} = (u_x, u_t, -1)$.

Da Equação (2.107), extrai-se o vetor $\mathbf{V} = (1, c, 0)$ (o *campo de direções* associado à EDP) e observa-se que: $\mathbf{V} \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0$, para $\hat{\mathbf{n}}$ - o vetor normal à S , gráfico da solução u . Portanto, $(1, c, 0)$ é perpendicular à $(u_x, u_t, -1)$ em cada ponto $(x, t, u(x, y))$, e $(1, c, 0)$ está no *plano tangente* à S (ver Figura 2.5-a); logo, esta será a dica para a construção de u : procurar S tal que em cada ponto (x, t, z) de S , o vetor $(1, c, 0)$ pertença ao plano tangente de S em (x, t, z) e $z \equiv u(x, t)$ (Levandosky (2002), John (1982) e Biezuner (2007)).

Cabe destacar que a Equação (2.107) é um caso particular da EDP linear de primeira ordem:

$$a(x, t)u_x + b(x, t)u_t = c(x, t), \quad (2.108)$$

onde $a(x, t) = c$, $b(x, t) = 1$ e $c(x, t) = 0$.

Deseja-se que $\mathbf{V} = (a(x, t), b(x, t), c(x, t))$ esteja contido no plano tangente de S em cada ponto (x, t, z) de S . Para isto, construir-se-á uma *curva integral* \mathcal{C} , ou *curva característica* da Equação (2.108), associada ao *campo vetorial* \mathbf{V} ; tal curva é parametrizada por r e, em

cada ponto da curva \mathcal{C} , o vetor $(a(x(r), t(r)), b(x(r), t(r)), c(x(r), t(r)))$ será tangente à \mathcal{C} (ver Figura 2.5-b)), logo \mathcal{C} deverá satisfazer o sistema de EDO's:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dr} &= a(x(r), t(r)), \\ \frac{dt}{dr} &= b(x(r), t(r)), \text{ e} \\ \frac{dz}{dr} &= c(x(r), t(r)).\end{aligned}\tag{2.109}$$

em posse de todas as *curvas características* associadas à Equação (2.108), se admite que a união destas formarão a superfície S , denominada *superfície integral* para V (Levandosky (2002) e John (1982)). Ainda, não pode-se afirmar que S é a *superfície solução* de Equação (2.108), para isto é necessário que S possa ser descrita como o gráfico de uma função $z = u(x, t), \forall (x, t) \in \Omega$.

Para a Equação (2.107), o sistema característico associado é dado por:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dr} = c, & \frac{dt}{dr} = 1, & \frac{dz}{dr} = 0. \end{cases}\tag{2.110}$$

A idéia geométrica do método é construir a superfície integral S , de tal modo, que contenha à curva $\Gamma := \{x, 0, \phi(x)\} \equiv \{\gamma, \phi(x)\}$ ¹⁰, e a partir dela obter as curvas características que montam S ; para isto considera-se o ponto de intersecção de \mathcal{C} e Γ , a saber $(x_0, 0, \phi(x_0))$ (ver Figura 2.5-c)), logo pode-se tomar

$$\begin{aligned}x(0) &= x_0, \\ t(0) &= 0, \\ z(0) &= \phi(x_0),\end{aligned}\tag{2.111}$$

como condições iniciais para o Sistema (2.110). A princípio, x_0 é qualquer, o que valida considerar o eixo- x como uma curva auxiliar e, algebricamente, representa o parâmetro s , com o qual parametriza-se a curva inicial. Assim, obtém-se o *Sistema Característico*, com condições iniciais dadas:

¹⁰ γ é a projeção plana da curva inicial Γ .

$$\begin{cases} \frac{dx}{dr}(s, r) = c, & x(s, 0) = s \\ \frac{dt}{dr}(s, r) = 1, & t(s, 0) = 0 \\ \frac{dz}{dr}(s, r) = 0, & z(s, 0) = \phi(s) \end{cases}, \quad (2.112)$$

cuja solução é:

$$x(r) = cr + c_1(s),$$

$$t(r) = r + c_2(s),$$

$$z(r) = c_3(s),$$

satisfazendo

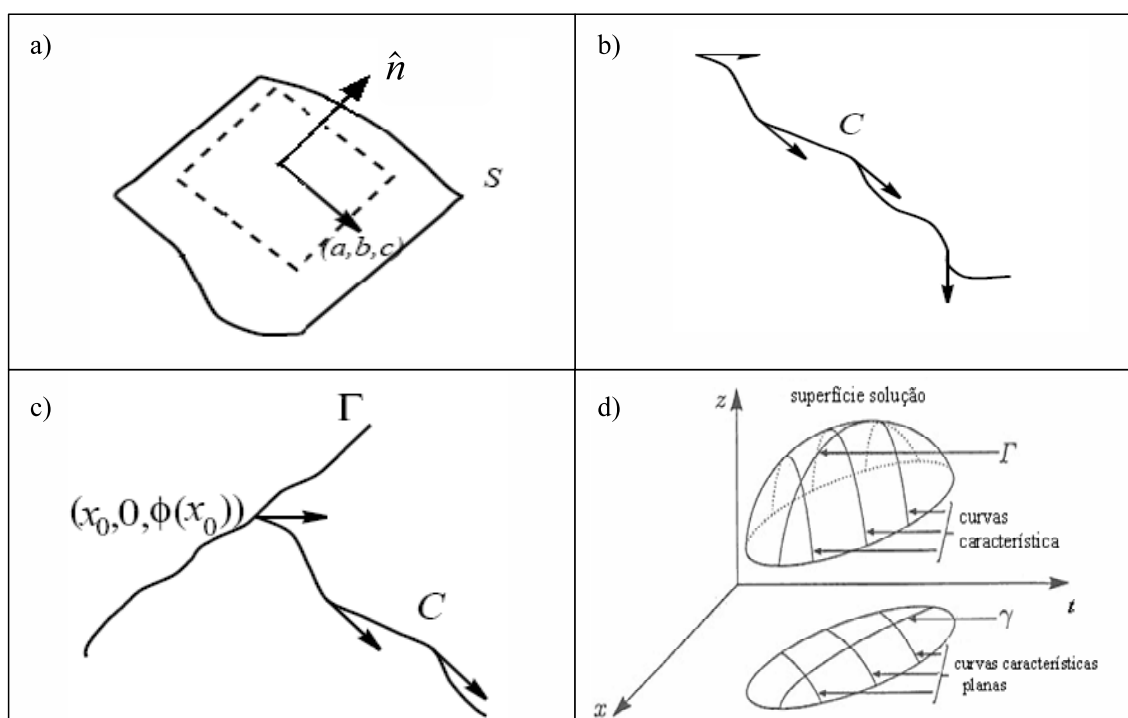


Figura 2.5: **a)** Esboço geométrico da relação do campo vetorial \mathbf{V} e o vetor normal $\hat{\mathbf{n}}$ de S ($\mathbf{V} \subset$ Plano Tangente à S). **b)** Representação geométrica da *curva integral* \mathcal{C} . **c)** Concepção geométrica da construção da *superfície integral*, candidata à *superfície solução* do Problema de Cauchy. **d)** *Superfície solução* gerada pela curva inicial Γ e suas curvas característica \mathcal{C} . Figura modificada a partir de figuras de Levandosky(2002) - Fig. 2.1-a) à Fig. 2.1-c); e Iório (2001) - Fig. 2.1-d).

$$\begin{aligned}x(s, 0) &= c_1(s) = s, \\t(s, 0) &= c_2(s) = 0, \\z(s, 0) &= c_3(s) = \phi(s),\end{aligned}$$

e finalmente, obtém-se

$$\begin{cases}x(s, r) = cr + s \\t(s, r) = r \\z(s, r) = \phi(s)\end{cases} \quad (2.113)$$

O sistema acima representa a superfície integral S constituída da união de todas as curvas características, parametrizadas pelas equações contidas no Sistema (2.113), que interceptam a curva inicial Γ . Porém, a solução está dada nos parâmetros r e s ! É o interesse é obtê-la nas variáveis x e t . Para isto, resolve-se as duas primeiras equações do Sistema (2.113), tal que se obtenha $r(x, t)$ e $s(x, t)$. Em particular, obtém-se

$$\begin{cases}s(x, t) = x - ct \\r(x, t) = t\end{cases} \quad (2.114)$$

Conseqüentemente, estabeleceu-se uma transformação biunívoca entre os sistemas de coordenadas (x, t) e (r, s) . Quando esta transformação satisfizer o *Teorema da Aplicação Inversa*, a mudança de variáveis é de classe C^1 e que é verificada para este exemplo, pode-se garantir localmente a existência e unicidade da solução; logo, a superfície integral é a própria superfície solução

$$u(x, t) \equiv z(s(x, t), r(x, t)) = \phi(x - ct). \quad (2.115)$$

O Sistema (2.114) representa a projeção das curvas características encontradas num aberto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ (onde $\gamma \subseteq \Omega$), neste caso as *curvas características planas* (Ver Figura 2.5-d).

A Solução (2.115) é solução de uma EDO e, de certa forma, pode-se sintetizar que *o Método das Características transforma um Problema de Valor Inicial para EDP's num Problema de Valor Inicial para EDO's via um difeomorfismo*¹¹.

Como ilustração (Figura 2.6), representa o gráfico da solução da Equação de Difusão

¹¹Sejam U e V abertos do espaço euclidiano. Uma bijeção $f : U \rightarrow V$, chama-se *difeomorfismo* de U sobre V quando f é diferenciável e sua inversa $f^{-1} : V \rightarrow U$ também o é (Lima (2000) pg. 277).

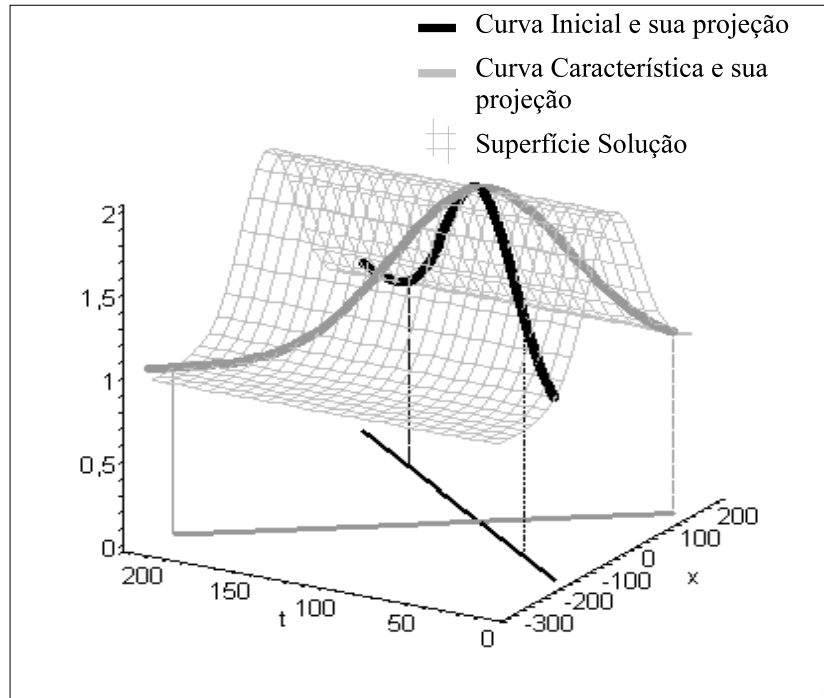


Figura 2.6: Representação gráfica da solução da Equação (2.107), de sua curva inicial, de sua curva característica e das respectivas projeções planas.

Unidimensional (Equação (2.107)) para $c = 2$, $x_0 = -155$ e $\phi(x) = 1 + \exp\left(\frac{-x^2}{10000}\right)$, no domínio $(x, t) \in \Omega := \mathbb{R} \times (0, \infty)$.

As considerações desta seção são, basicamente, uma mescla de abordagens e exposições do *método das características para EDP's de primeira ordem* retirados das seguintes bibliografias: Levandosky (2002), Biezuner (2007) e Iório (2001).

2.3.3 Condição Não-Characterística

Basicamente, a idéia do método apresentado na seção anterior reside numa *condição de transversalidade* para a condição inicial $\Gamma := (\gamma, \phi)$, onde diz-se que γ é *não-característica*; isto é, condiciona-se que a condição inicial não deva ser uma *hipersuperfície característica*¹², ou seja, que os vetores do *campo de direções* em um ponto P da hipersuperfície γ , não sejam tangentes à γ em P (Folland (1995)).

A EDP de primeira ordem dada pela Equação (2.107) é a situação mais simples possível (linear, homogênea e com coeficientes constantes), mesmo assim evidência a dependência da existência, da unicidade e das propriedades sobre a solução em relação aos dados iniciais; a análise das seguintes situações se dará via comparação das projeções das *curvas características*

¹²Na seção 2.2 a *curva característica* era construída como a curva pela qual os vetores do *campo de direções* (*campo vetorial*) eram tangentes à ela.

e da curva inicial γ :

i. *A curva inicial é uma curva característica.*

Neste caso, $\gamma \doteq x - ct = 0 \Rightarrow (cs, s)$, $s \in I \subset \mathbb{R}$. Considerando (por ora, deixa-se a parte a obtenção deste sistema) a solução do sistema:

$$\begin{cases} x(r, s) = cr + c_1(s), & x(r=0, s) = cs \\ t(r, s) = r + c_2(s), & t(r=0, s) = s \end{cases},$$

é dado por

$$\begin{cases} x(r, s) = cr + cs \\ t(r, s) = r + s, \end{cases},$$

afim de obter a bijeção, resolve-se r e s em função de (x, t) , porém o sistema não permite esta inversão. Dele se obtém, apenas, que $x-ct=0$, e logo, de $z = \phi(s)$ a projeção da solução é a própria *curva característica plana*, que é a própria curva inicial projetada e fora dela não há nenhuma informação sobre a solução. Ainda, $z = \phi(0)$ é constante, logo há uma infinidade de soluções possíveis ao problema; se a *ci*: $\phi(s) = \phi(s)$, com ϕ não-constante o problema não admite solução. (Ver Iório (2001).)

ii. *γ com vetores tangentes paralelos aos vetores tangentes da curva característica plana.*

Seja, $ci \doteq x - \frac{c}{2}t^2 = 0 \Rightarrow (\frac{c}{2}s^2, s)$, $s \in I \subset \mathbb{R}$. Em $s = 1$ os vetores tangentes a curva característica e a curva inicial são paralelos. Nesta situação, obtém-se uma solução para r e para s , sob a forma:

$$s = 1 \pm \sqrt{1 + \frac{2}{c}(x - ct)} \quad \text{e} \quad r = t - 1 \mp \sqrt{1 + \frac{2}{c}(x - ct)},$$

desde que $x - ct \geq -\frac{c}{2}$; assim, $z = \phi(s)$ terá restrições em seu domínio, e se a diferenciabilidade de z for procurada há de se restringir, ainda mais, o domínio de validade para a solução (para $z \in C^1$ deve-se ter $x - ct > -\frac{c}{2}$)¹³.

Estas “situações anômolos” decorrem do fato de que *curvas características planas*¹⁴ e γ possuam vetores tangentes paralelos em seus domínios de validade; assim, uma situação

¹³Não é regra geral a perda da diferenciabilidade para este tipo de situação, ver em Iório (2001) os exemplos 1.2 e 1.3 (pgs 42-44); e há outras situações que exijam condições de compatibilidade para que z possa existir (pgs 17-20).

¹⁴Nas situações acima analisou-se apenas as projeções das *curvas características* e γ , e como se verá isto é suficiente para determinar a *Condição Não-Characterística*.

ótima seria evitar tal fato. Isto se daria, quando a condição inicial satisfizer a *Condição Não-Characterística*.

Para definir esta condição, observa-se que (a luz das considerações logo acima) γ não tenha vetores tangentes as *curvas características projetadas* em qualquer ponto destas; logo, os vetores tangentes em questão são linearmente independentes. Considerando a Equação (2.109), equivaleria a dizer que $\left\| \begin{pmatrix} \gamma'_1(s) & a(\gamma_1(s), \gamma_2(s)) \\ \gamma'_2(s) & b(\gamma_1(s), \gamma_2(s)) \end{pmatrix} \right\| \neq 0$, isto é, os vetores tangentes de γ não são paralelos aos vetores projetados do *campo de direção* (que formam as *curvas características*) definidos sobre um ponto P em Γ , logo não pertencem ao plano tangente de γ em P_γ . Mas, se não pertencem ao plano tangente de γ em P_γ , necessariamente se tem $(a(\gamma_1(s), \gamma_2(s)), b(\gamma_1(s), \gamma_2(s))) \cdot (-\gamma'_2(s), \gamma'_1(s)) \neq 0$, que equivale dizer que o vetor (a, b) não é ortogonal ao *campo normal* de γ em P_γ .¹⁵

Para o caso geral, a generalização é imediata

$$\nabla_{\mathbf{z}} F(\Gamma(\mathbf{s}), z_j(g(\mathbf{s}))) \cdot N(\gamma(\mathbf{s})) \neq 0 \quad (2.116)$$

$$\begin{array}{c} \Downarrow \\ \left\| \begin{array}{cccc} \frac{\partial \gamma_1}{\partial s_1} & \cdots & \frac{\partial \gamma_1}{\partial s_{n-1}} & \frac{\partial F}{\partial z_1}(\gamma(\mathbf{s}), \phi(\gamma(\mathbf{s})), z_j(\gamma(\mathbf{s}))) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial \gamma_n}{\partial s_1} & \cdots & \frac{\partial \gamma_n}{\partial s_{n-1}} & \frac{\partial F}{\partial z_n}(\gamma(\mathbf{s}), \phi(\gamma(\mathbf{s})), z_j(\gamma(\mathbf{s}))) \end{array} \right\| \neq 0, \end{array} \quad (2.117)$$

onde $N(\gamma(\mathbf{s}))$ representa o *campo normal* da hipersuperfície inicial γ , de dimensão n . E suas respectivas variações¹⁶ para os *Problemas de Cauchy* relativos à Equação (2.106) e à Equação (2.105) são

$$\left\| \begin{array}{cccc} \frac{\partial \gamma_1}{\partial s_1} & \cdots & \frac{\partial \gamma_1}{\partial s_{n-1}} & a_1(\gamma(\mathbf{s}), \phi(\gamma(\mathbf{s}))) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial \gamma_n}{\partial s_1} & \cdots & \frac{\partial \gamma_n}{\partial s_{n-1}} & a_n(\gamma(\mathbf{s}), \phi(\gamma(\mathbf{s}))) \end{array} \right\| \neq 0, \quad (2.118)$$

e

$$\left\| \begin{array}{cccc} \frac{\partial \gamma_1}{\partial s_1} & \cdots & \frac{\partial \gamma_1}{\partial s_{n-1}} & a_1(\gamma(\mathbf{s})) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial \gamma_n}{\partial s_1} & \cdots & \frac{\partial \gamma_n}{\partial s_{n-1}} & a_n(\gamma(\mathbf{s})) \end{array} \right\| \neq 0. \quad (2.119)$$

¹⁵Para as situações acima, bastaria tomar $\gamma \doteq (s, 0)$ como na Seção 2.2.2,

$$(1, c) \cdot (-0, 1) = \left\| \begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 0 & c \end{array} \right\| = c \neq 0, \quad \forall r \in I \subset \mathbb{R}.$$

E conseqüentemente seria garantida a *Condição Não-Carterística*.

¹⁶Ver final da Seção D.2.1.

2.3.4 Considerações

Não é recomendado aplicar o *Método das Características* para EDP's de ordem superiores a 1 para a determinação da solução, salvo algumas exceções com específicas condições iniciais ou de contorno (ver Iório (2001) - Capítulo 5). Porém, dentro da classe de EDP's Semi-Lineares de 2ª Ordem (ou maior), a sua aplicação permite descrever a EDP em sua forma canônica, onde as curvas características fornecem uma expressão mais simples da EDP em questão, via uma mudança de coordenadas adequada. Há muito mais a ser dito sobre este assunto, mas este não é o objetivo do presente trabalho¹⁷.

Mas, sua aplicação a EDP's de primeira ordem permite a quebra da EDP em um sistema de EDO's de primeira ordem, sobre o qual, na variável que descreve as curvas características os termos derivativos parciais de u são condensados em uma derivada total em relação àquela variável. Sendo assim, a EDP é substituída por uma EDO. E esta é a sinopse da *Método das Características*.

A descrição acima, caracteriza o método pela simplicidade inerente a construção, ou não-construção, da solução; o qual, fornece o próprio caminho de demonstração para os teoremas de existência e unicidade local para soluções de EDP's de ordem 1. Além disto, permite um entendimento global (mesmo simplificado em relação a EDP's de ordem superiores a 1) do papel das condições iniciais ou de contorno para a questão da existência, unicidade e propriedades da solução (Ver Apêndice D).

Outro destaque do método é o paralelo geométrico via interação das propriedades geométricas de superfícies (ou hiperfícies) e dos vetores do campo vetorial associado a EDP. Fato que permite, em \mathbb{R}^2 , uma visualização da interação dos entes geométricos envolvidos, bem como suas condições de aplicabilidade e propriedades que, os entes, devam cumprir para determinar a solução. Indiscutivelmente, uma vantagem a favor da compreensão e manipulação do *Método das Características* (Ver Seção D.2.1).

¹⁷Para maiores detalhes, ver Iório (2001), Iório e Iório (1998), John (1982), Machado (2004).

3 MODELOS DE EVOLUÇÃO ESPECTRAL DA DENSIDADE DE ENERGIA PARA A CAMADA LIMITE CONVECTIVA - CLC.

It is impossible to explain honestly the beauties of the laws of nature without some deep understanding of mathematics.

Richard Feynman

Admitido que a Equação (2.99) governa a evolução temporal do espectro de densidade de energia, basta agora a descrição das equações constitutivas. Posto a forma desses parâmetros mais a inserção de uma condição inicial – *c.i.*, obtém-se um Problema de Valor Inicial – PVI ¹ e, conseqüentemente, elabora-se um pretenso modelo que descreva tal evolução.

Esse capítulo, em um primeiro momento, apresentará as parametrizações para os termos de

- convecção térmica $\frac{g}{\Theta_0} \mathbf{H}(k, t)$;
- produção de energia mecânico $\mathbf{M}(k, t)$;
- transferência de energia cinética por efeito inercial $\mathbf{W}(k, t)$;

além de uma adimensionalização das variáveis t e k , bem como dos parâmetros envolvidos no modelo.

Em posse dessas equações constitutivas, são apresentados três modelos (desconsidera-se o efeito de produção de energia mecânica, $\mathbf{M}(k, t)$, neste primeiro estudo) para a evolução da densidade espectral de energia. No primeiro desses modelos considerá-se uma turbulência globalmente isotrópica e sem o termo $\frac{g}{\Theta_0} \mathbf{H}(k, t)$, porém considerando a sugestão de Pao (1965) para o termo $\mathbf{W}(k, t)$. Em um segundo momento, utiliza-se o termo de transferência

¹Seja γ uma hipersuperfície (Um subconjunto $\gamma \subset \mathbb{R}^n$ é chamado de hipersuperfície de classe C^k ($1 \leq k \leq \infty$) se para cada $\mathbf{x}_0 \in \gamma$ há um conjunto aberto $V \subset \mathbb{R}^n$ contendo \mathbf{x}_0 e uma função real $\phi \in C^k(V)$ tal que $\nabla\phi$ está definida em $\gamma \cap V = \{\mathbf{x} \in V : \phi(\mathbf{x}) = 0\}$, Folland (1995)) de classe C^k . Se u é uma função de classe C^{k-1} , os valores de $u, \partial_\nu u, \dots, \partial_\nu^{k-1} u$ sobre γ definem as condições iniciais, chamadas *condições de Cauchy* para u (∂_ν é a derivada normal sobre γ (Para γ, V, ϕ acima, o vetor $\nabla\phi(\mathbf{x})$ é perpendicular à γ em \mathbf{x} para cada $\mathbf{x} \in \gamma \cup V$. Com isto, define-se o vetor unitário normal a γ em cada ponto $\mathbf{x} \in \gamma$, o qual varia continuamente com \mathbf{x} , dado por $\nu(\mathbf{x}) = \pm \frac{\nabla\phi(\mathbf{x})}{|\nabla\phi(\mathbf{x})|}$). Uma hipersuperfície definida sob estas condições é dita *orientável* (Folland (1995)). Neste trabalho serão consideradas somente hipersuperfícies orientáveis.) ; ainda, sempre considerar-se-á possível parametrizar γ contendo a origem, onde $\nu \perp x_n = 0$, Folland (1995)). Ao impor condições iniciais determina-se um *problema de valor inicial* ou *problema de Cauchy*.

de energia para a turbulência anisotrópica sugerido no trabalho de Goulart (2001), Abenroth (2007), Goulart et al. (2003) e Goulart et al. (2007); mais o termo convecção térmica $\frac{g}{\Theta_0} \mathbf{H}(k, t)$ (BATCHELOR, 1949). Finalmente, será construído um modelo misto para a evolução temporal do espectro de densidade de energia, considerando a atuação dos diferentes termos $\mathbf{W}(k, t)$ (propostos por Pao (1965) e Goulart (2001)) em regiões de número de onda distintos. Esse modelo reproduz as características de estacionaridade e quase-estacionaridade para a região de números de onda altos devido a atuação do termo de transferência de energia inercial de Pao (1965).

3.1 Parametrizações e Adimensionalizações

Seguindo Goulart (2001), utilizam-se os parâmetros de adimensionamento:

$$t_* = \frac{w_* t}{z_i} \quad (3.1a)$$

$$Re = \frac{w_* z_i}{\nu} \quad (3.1b)$$

$$\psi_\epsilon = \frac{\epsilon z_i}{w_*^3} \quad (3.1c)$$

$$k' = k z_i \quad (3.1d)$$

e

$$S(z) = \frac{\phi_m u_*}{\kappa z} \quad (3.2)$$

sendo w_* a escala característica de velocidade convectiva [m/s], z_i a altura da CLC [m], Re o número de Reynolds (ν – coeficiente de viscosidade molecular [m^2/s]), ψ_ϵ a taxa de dissipação térmica adimensional, ϵ a taxa média de dissipação térmica da ECT [m^2/s^3], u_* a velocidade de cisalhamento [m/s], ϕ_m a taxa de dissipação mecânica adimensional, $S(z)$ a variação em z da velocidade média [s^{-1}] e κ a constante de von Kármán.

3.1.1 Termo de Convecção Térmica

No termo de produção ou perda de energia cinética por convecção térmica na Equação (2.99) assumir-se-á que $\mathbf{H}(k, t)$ pode ser decomposto no produto entre um termo que depende apenas do número de onda e outro que depende apenas do tempo, isto é,

$$\frac{g}{\Theta_0} \mathbf{H}(k, t) = \frac{g}{\Theta_0} H_0(k) T(t), \quad (3.3)$$

em que $T(t)$ é uma função que descreve o crescimento temporal do fluxo de calor na superfície e $H_0(k)$ depende somente das condições características da CLP em um regime de turbulência bem desenvolvido.

Na determinação de $H_0(k)$ será considerada a hipótese de Batchelor (1953), que assume que a transferência de energia do fluxo médio para o fluxo turbulento ocorre de forma contínua. Tal análise não considera qualquer escala de tempo característico na parametrização. Considerando-se que $H_0(k)$ depende do gradiente de temperatura potencial (na camada bem misturada será substituído pelo termo de contragradiente γ_c), do número de onda k , da razão de dissipação de energia cinética ϵ_0 e da intensidade da energia cinética centrada em torno do número de onda k , isto é, $k\mathbf{E}_0(k)$, sendo que $\mathbf{E}_0(k)$ é a densidade espectral tridimensional da camada limite convectiva bem desenvolvida (ver Seção 2.1), dessa forma escreve-se através de uma análise dimensional o seguinte resultado:

$$\frac{g}{\Theta_0} H_0(k, z) = \frac{g}{\Theta_0} \gamma_c c_1 \epsilon^{-1/3} k^{-2/3} \mathbf{E}_0(k, z) \quad (3.4)$$

em que c_1 é uma constante a ser determinada a partir das condições iniciais (Apêndice A).

A partir da definição de velocidade convectiva obtém-se

$$\frac{g}{\Theta_0} = \frac{w_*^3}{z_i} \overline{(w\theta)_0} \quad (3.5)$$

em que $\overline{(w\theta)_0}$ é o fluxo de calor na superfície, w_* é a velocidade convectiva e z_i é a altura da (STULL, 1988).

Para a função $T(t)$, que descreve o crescimento no tempo de $\mathbf{H}(k, t)$, será considerado a equação sugerida por Sorbjan (1997), escrita como:

$$T(t) = \text{sen}(\Omega t) \quad (3.6)$$

em que Ω é a frequência angular.

Substituindo as Equações (3.4), (3.6) e (3.5) em Equação (3.3), obtém-se a seguinte formulação para o termo de produção ou perda de energia devido ao empuxo térmico:

$$\frac{g}{\Theta_0} \mathbf{H}(k, t) = \frac{w_*^3}{z_i} \overline{(w\theta)_0} \gamma_c c_1 \epsilon^{-1/3} k^{-2/3} \mathbf{E}_0(k) \text{sen}(\Omega t) \quad (3.7)$$

Efetuando o adimensionamento

$$\begin{aligned}
\frac{g}{\Theta_0} \mathbf{H}(k, t) &= \frac{g}{\Theta_0} H_0(k) T(t) \\
&= \left(\frac{g}{\Theta_0} \gamma_c c_1 \epsilon^{-1/3} k^{-2/3} \mathbf{E}_0(k) \right) \times \left(\text{sen}(\Omega t) \right) \\
&= \left(\frac{w_*^3}{(\bar{w}\theta)_0} \frac{\partial \theta}{\partial z} c_1 \epsilon^{-1/3} k^{-2/3} \mathbf{E}_0(k) \cdot \frac{z_i^{2/3} w_*}{z_i^{2/3} w_*} \right) \times \left(\text{sen} \left(t_* \frac{z_i}{w_*} \Omega \right) \right) \\
&= \left(\frac{w_*^3}{(\bar{w}\theta)_0} \frac{\partial \theta}{\partial z} c_1 (k z_i)^{-2/3} \frac{w_*}{\epsilon^{1/3}} \frac{z_i^{2/3}}{z_i w_*} \mathbf{E}_0(k) \right) \times \left(\text{sen} \left(\frac{z_i \Omega}{w_*} t_* \right) \right) \\
&= \left(\frac{w_*^2}{(\bar{w}\theta)_0} \frac{\partial \theta}{\partial z} c_1 (k')^{-2/3} \frac{w_*}{(z_i \epsilon)^{1/3}} \mathbf{E}_0(k') \right) \times \left(\text{sen} \left(\frac{z_i \Omega}{w_*} t_* \right) \right) \tag{3.8} \\
&= \left(\frac{w_*^2}{(\bar{w}\theta)_0} \frac{\partial \theta}{\partial z} c_1 \psi_\epsilon^{-1/3} (k')^{-2/3} \mathbf{E}_0(k') \right) \times \left(\text{sen} \left(\frac{z_i \Omega}{w_*} t_* \right) \right) \\
&= \left[\frac{w_* z_i}{(\bar{w}\theta)_0} \frac{\partial \theta}{\partial z} c_1 \psi_\epsilon^{-1/3} (k')^{-2/3} \mathbf{E}_0(k') \text{sen} \left(\frac{z_i \Omega}{w_*} t_* \right) \right] \frac{w_*}{z_i} \\
&= [H_0(k') T(t_*)] \frac{w_*}{z_i} = \mathbf{H}(k', t_*) \frac{w_*}{z_i}
\end{aligned}$$

3.1.2 Termo de Transferência de Energia Cinética por Efeito Inercial

Um fluxo turbulento é composto de turbilhões de diferentes tamanhos ou comprimentos de onda. Os pequenos turbilhões ficam expostos ao campo de tensão gerado pelos grandes turbilhões. Este campo de tensão aumenta a vorticidade dos pequenos turbilhões e, conseqüentemente, sua energia cinética. Desta forma há uma transferência de energia cinética dos grandes turbilhões para os turbilhões cada vez menores, até que seja alcançada a microescala de Kolmogorov e a energia seja dissipada em forma de calor. Este processo está representado pelo termo $\mathbf{W}(k, t)$ na Equação (2.99) (Trecho retirado da bibliografia:(GOULART, 2001)) .

Ainda, em (GOULART, 2001), sugere-se o uso da expressão sugerida por Pao (1965), para um fluxo turbulento isotrópico, dada pela seguinte equação:

$$\mathbf{W}_a(k, t) = -\frac{\partial}{\partial k} \left[\alpha^{-1} \epsilon^{1/3} k^{5/3} \mathbf{E}(k, t) \right]. \tag{3.9}$$

Efetuando a derivada e o adimensionamento:

$$\begin{aligned}
\mathbf{W}_a(k, t) &= -\frac{\partial}{\partial k} \left[\alpha^{-1} \epsilon^{1/3} k^{5/3} \mathbf{E}(k, t) \right] \\
&= -\alpha^{-1} \epsilon^{1/3} \frac{5}{3} k^{2/3} \mathbf{E}(k, t) - \alpha^{-1} \epsilon^{1/3} k^{5/3} \frac{\partial \mathbf{E}(k, t)}{\partial k} \\
&= -\alpha^{-1} \epsilon^{1/3} \frac{5}{3} k^{2/3} \mathbf{E}(k, t) \times \frac{z_i^{2/3}}{z_i} - \alpha^{-1} \epsilon^{1/3} k^{5/3} \frac{\partial \mathbf{E}(k, t)}{\partial k} \times \frac{z_i^{5/3}}{z_i^{5/3}} \\
&= -\alpha^{-1} \epsilon^{1/3} \frac{5}{3} (kz_i)^{2/3} \mathbf{E}(k, t) \frac{z_i^{1/3}}{z_i} - \alpha^{-1} \epsilon^{1/3} (kz_i)^{5/3} \frac{\partial \mathbf{E}(k, t)}{\partial k} \times \frac{z_i^{1/3}}{z_i^2} \\
&= -\frac{5}{3} \alpha^{-1} (\epsilon z_i)^{1/3} (kz_i)^{2/3} \mathbf{E}(k, t) \frac{1}{z_i} \times \frac{w_*}{w_*} - \alpha^{-1} (\epsilon z_i)^{1/3} (kz_i)^{5/3} \frac{\partial \mathbf{E}(k', t_*)}{\partial k'} \frac{1}{z_i^2} \times \frac{w_*}{w_*} \\
&= -\frac{5}{3} \alpha^{-1} \frac{(\epsilon z_i)^{1/3}}{w_*} (kz_i)^{2/3} \mathbf{E}(k', t_*) \frac{w_*}{z_i} - \alpha^{-1} \frac{(\epsilon z_i)^{1/3}}{w_*} (kz_i)^{5/3} \frac{\partial \mathbf{E}(k', t_*)}{\partial k'} \frac{w_*}{z_i} \\
&= -\left[\frac{5}{3} \alpha^{-1} \psi_\epsilon^{1/3} (k')^{2/3} \mathbf{E}(k', t_*) + \alpha^{-1} \psi_\epsilon^{1/3} (k')^{5/3} \frac{\partial \mathbf{E}(k', t_*)}{\partial k'} \right] \frac{w_*}{z_i} = \mathbf{W}_a(k', t_*) \frac{w_*}{z_i}
\end{aligned} \tag{3.10}$$

O termo de transferência inercial de energia relacionado para uma turbulência homogênea mas não-isotrópica, uma situação de existência do termo de fonte de energia convectiva $\mathbf{H}(k, t)$, é representado pela expressão $\mathbf{W}_b(k, t)$; em (GOULART, 2001) é sugerida a seguinte expressão para $\mathbf{W}_b(k, t)$

$$\mathbf{W}_b(k, t) = -\frac{\partial}{\partial k} \left[\frac{c_2}{w_* z_i} \epsilon^{2/3} k^{1/3} \mathbf{E}(k, t) \right]. \tag{3.11}$$

Efetuada a derivada e o adimensionamento:

$$\begin{aligned}
\mathbf{W}_b(k, t) &= -\frac{\partial}{\partial k} \left[\frac{c_2}{w_* z_i} \epsilon^{2/3} k^{1/3} \mathbf{E}(k, t) \right] \\
&= -\frac{c_2}{w_* z_i} \epsilon^{2/3} \frac{\partial}{\partial k} \left[k^{1/3} \mathbf{E}(k, t) \right] \\
&= -\frac{c_2}{w_* z_i} \epsilon^{2/3} \left[\frac{1}{3} k^{-2/3} \mathbf{E}(k, t) + k^{1/3} \frac{\partial \mathbf{E}(k, t)}{\partial k} \right] \\
&= -\frac{c_2}{w_* z_i} \epsilon^{2/3} \frac{1}{3} (k)^{-2/3} \mathbf{E}(k, t) \times \frac{z_i^{2/3} w_*^2}{z_i^{2/3} w_*^2} - \frac{c_2}{w_* z_i} \epsilon^{2/3} k^{1/3} \frac{\partial \mathbf{E}(k, t)}{\partial k} \times \frac{z_i^{1/3} w_*^2 z_i}{z_i^{1/3} w_*^2 z_i} \\
&= -\frac{c_2}{3} \frac{(\epsilon z_i)^{2/3}}{w_*^2} (kz_i)^{-2/3} \mathbf{E}(k', t_*) \frac{w_*}{z_i} - c_2 \frac{(\epsilon z_i)^{2/3}}{w_*^2} (kz_i)^{1/3} \frac{\partial \mathbf{E}(k', t_*)}{\partial k'} \times \frac{w_*}{z_i} \\
&= \left[-\frac{c_2}{3} \psi_\epsilon^{2/3} (k')^{-2/3} \mathbf{E}(k', t_*) - c_2 \psi_\epsilon^{2/3} (k')^{1/3} \frac{\partial \mathbf{E}(k', t_*)}{\partial k'} \right] \frac{w_*}{z_i} \\
&= \mathbf{W}_b(k', t_*) \frac{w_*}{z_i}
\end{aligned} \tag{3.12}$$

Em seu trabalho (GOULART, 2001), utiliza-se da coexistência destes termos de trans-

ferência de energia, isto é:

$$\mathbf{W}(k, t) = \mathbf{W}_a(k, t) + \mathbf{W}_b(k, t). \quad (3.13)$$

$$\mathbf{W}(k, t) = \mathbf{W}_a(k, t) + \mathbf{W}_b(k, t) = [\mathbf{W}_a(k', t_*) + \mathbf{W}_b(k', t_*)] \frac{w_*}{z_i} = \mathbf{W}(k', t_*) \frac{w_*}{z_i}. \quad (3.14)$$

3.1.3 Termo de Produção de Energia por efeito Mecânico

Este termo é tomado como em Abentroth (2007)

$$\mathbf{M}(k, t) = c_m S(z) \epsilon^{-\frac{1}{3}} k^{-\frac{2}{3}} \mathbf{E}(k, t) \quad (3.15)$$

e adimensionalizando:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}(k, t) &= c_m S(z) \epsilon^{-\frac{1}{3}} k^{-\frac{2}{3}} \mathbf{E}(k, t) \times \frac{z_i^{\frac{2}{3}}}{z_i^{\frac{2}{3}}} \\ &= c_m S(z) \epsilon^{-\frac{1}{3}} (k z_i)^{-\frac{2}{3}} \mathbf{E}(k, t) \times z_i z_i^{-1/3} \frac{w_*}{w_*} \\ &= c_m S(z) \frac{w_*}{(\epsilon z_i)^{1/3}} (k z_i)^{-\frac{2}{3}} \mathbf{E}(k, t) \frac{z_i}{w_*} \\ &= c_m \frac{\phi_m u_*}{\kappa z} \psi_\epsilon^{-1/3} k'^{-2/3} \mathbf{E}(k', t_*) \frac{z_i}{w_*} \times \frac{w_*^2 z_i^2}{z_i^2 w_*^2} \\ &= \left[c_m \frac{z_i^2 u_*}{w_*^2} \frac{\phi_m \psi_\epsilon^{-1/3}}{\kappa z} k'^{-2/3} \mathbf{E}(k', t_*) \right] \frac{w_*}{z_i} = \mathbf{M}(k', t_*) \cdot \frac{w_*}{z_i} \end{aligned} \quad (3.16)$$

3.1.4 Adimensionamento dos termos de Dissipação de Energia por Viscosidade Molecular e Variação temporal do Espectro de Densidade de Energia

O termo de dissipação de energia é dado por

$$-2\nu k^2 \mathbf{E}(k, t) \quad (3.17)$$

com,

$$\begin{aligned} -2\nu k^2 \mathbf{E}(k, t) &= -2\nu k^2 \mathbf{E}(k, t) \times \frac{z_i^2 w_*}{z_i^2 w_*} \\ &= -2 \frac{\nu}{w_* z_i^2} (k z_i)^2 \mathbf{E}(k', t_*) \frac{w_*}{z_i} = -\frac{2}{Re} k'^2 \mathbf{E}(k', t_*) \frac{w_*}{z_i} \end{aligned} \quad (3.18)$$

e a variação temporal de energia:

$$\frac{\partial \mathbf{E}(k, t)}{\partial t} \quad (3.19)$$

com adimensionalização,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{E}(k, t)}{\partial t} &= \frac{\partial \mathbf{E}(k, t)}{\partial t} \times \frac{z_i w_*}{z_i w_*} \\ &= \frac{\partial \mathbf{E}(k', t_*)}{\partial \left(\frac{w_*}{z_i} t\right)} \frac{w_*}{z_i} \\ &= \frac{\partial \mathbf{E}(k', t_*)}{\partial t_*} \frac{w_*}{z_i} \end{aligned} \quad (3.20)$$

3.1.5 A Equação de Evolução para o Espectro de Densidade de Energia Turbulenta Adimensionalizada

Com as expressões acima, obtêm-se:

$$\frac{\partial \mathbf{E}(k', t_*)}{\partial t_*} = \mathbf{M}(k', t_*) + \mathbf{W}(k', t_*) + \mathbf{H}(k', t_*) - \frac{2}{R_e} k'^2 \mathbf{E}(k', t_*). \quad (3.21)$$

3.2 Modelo Isotrópico

Em um fluxo turbulento isotrópico a equação dinâmica para a função espectro de densidade de energia é obtida desprezando-se² os termos de produção de energia por efeito mecânico $\mathbf{M}(k', t_*)$ e o de produção ou perda de energia por efeito térmico $\mathbf{H}(k', t_*)$, assim a Equação (3.21) pode ser escrita da seguinte forma:

$$\frac{\partial \mathbf{E}(k', t_*)}{\partial t_*} = W_a(k', t_*) - \frac{2}{R_e} k'^2 \mathbf{E}(k', t_*). \quad (3.22)$$

Substituindo $W_a(k', t_*)$, dada pela Equação (3.10), na Equação (3.22) tem-se a equação adimensional,

$$\frac{\partial \mathbf{E}(k', t_*)}{\partial t_*} + \alpha^{-1} \psi_\epsilon^{1/3} (k')^{5/3} \frac{\partial \mathbf{E}(k', t_*)}{\partial k'} + \left(\frac{5}{3} \alpha^{-1} \psi_\epsilon^{1/3} (k')^{2/3} + \frac{2}{R_e} k'^2 \right) \mathbf{E}(k', t_*) = 0. \quad (3.23)$$

Tomando como condição inicial³:

$$\mathbf{E}_0(k') = \mathbf{E}(k', t_0), \quad (3.24)$$

²Esses termos atuam em determinadas faixas de número de onda, fato que acarretaria a quebra da hipótese de isotropia global.

³Observe que a *c.i.* deve satisfazer a EDP acima.

obtém-se um PVI.

Resolve-se a Equação (3.23) pelo método das características (ver Seção 2.3.2).

Para obter a mudança de variável adequada (IÓRIO, 2001), resolve-se a EDO:

$$1 \cdot dk' - A(k')^{5/3} dt_* = 0 \Leftrightarrow cte = At_* + \frac{3}{2}(k')^{-2/3}$$

com $A = \alpha^{-1}\psi_\epsilon^{1/3}$. Mudando a variável t_* para o parâmetro r e $cte = \frac{3}{2}s^{-2/3}$, obtém-se

$$\begin{aligned} r &= t_*, \\ k' &= \left(s^{-2/3} - \frac{2}{3}Ar \right)^{-3/2}. \end{aligned}$$

A mudança de variável procurada é:

$$T : \begin{cases} r = t_* \\ s = \left(k'^{-2/3} + \frac{2}{3}At_* \right)^{-3/2} \end{cases} \Leftrightarrow T^{-1} : \begin{cases} t_* = r \\ k' = \left(s^{-2/3} - \frac{2}{3}Ar \right)^{-3/2}. \end{cases} \quad (3.25)$$

Sendo que,

$$\frac{\partial(s, r)}{\partial(k', t_*)} = \begin{vmatrix} s_{k'} & s_{t_*} \\ r_{k'} & r_{t_*} \end{vmatrix} = k'^{-2/3} + \frac{2}{3}At_* \neq 0. \quad (3.26)$$

Esta mudança de variável permite escrever: $\mathbf{E}(k', t_*) = V(s, r)$, de fato:

$$\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t_*} + Ak'^{5/3} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial k'}. \quad (3.27)$$

Efetuada a transformada para as novas variáveis, tem-se a equação diferencial ordinária e, a respectiva condição inicial, ambas nas variáveis s e r :

$$\begin{cases} \frac{\partial V(s, r)}{\partial r} + \left[B \left(s^{-2/3} - \frac{2}{3}Ar \right)^{-1} + C \left(s^{-2/3} - \frac{2}{3}Ar \right)^{-3} \right] V(s, r) = 0, \\ V(s, r = 0) = E_0 \end{cases} \quad (3.28)$$

sendo que $B = \frac{5}{3}\alpha^{-1}\psi_\epsilon^{1/3}$ e $C = \frac{2}{R_e}$.

Resolvendo o problema de Cauchy Equação (3.28) (BOYCE W. E., 1999), obtém-se a solução final:

$$\mathbf{E}(k', t_*) = \mathbf{E}_0 \left[\left(k'^{-2/3} + \frac{2}{3} A t_* \right)^{-3/2} \right] \cdot \left[k' \left(k'^{-2/3} + \frac{2}{3} A t_* \right)^{-3/2} \right]^{-5/3} \cdot \exp \left\{ -\frac{3C}{4A} \left[k'^{4/3} - \left(k'^{-2/3} + \frac{2}{3} A t_* \right)^{-2} \right] \right\}. \quad (3.29)$$

Na Tabela 3.1 apresenta-se os parâmetros meteorológicos calculados para a CLC. Dados obtidos a partir do experimento B de Moeng e Sullivan (1994), Moeng e Sullivan (1989) e Nieuwstadt e Brost (1986).

Tabela 3.1: Parâmetros meteorológicos para a CLC.

z_i	$(\overline{w\theta_0})$	$\frac{z_i}{L}$	Ω	u_*	u_g	v_g	ν	γ_c	$\frac{\partial \theta}{\partial z}$	f_c
m	mK/s		s^{-1}	m/s	m/s	m/s	m^2/s	K/m	K/m	s^{-1}
1100	0,06	-18	$7,27 \times 10^{-5}$	0,56	10	10	$1,5 \times 10^{-5}$	10^{-3}	10^{-3}	10^{-4}

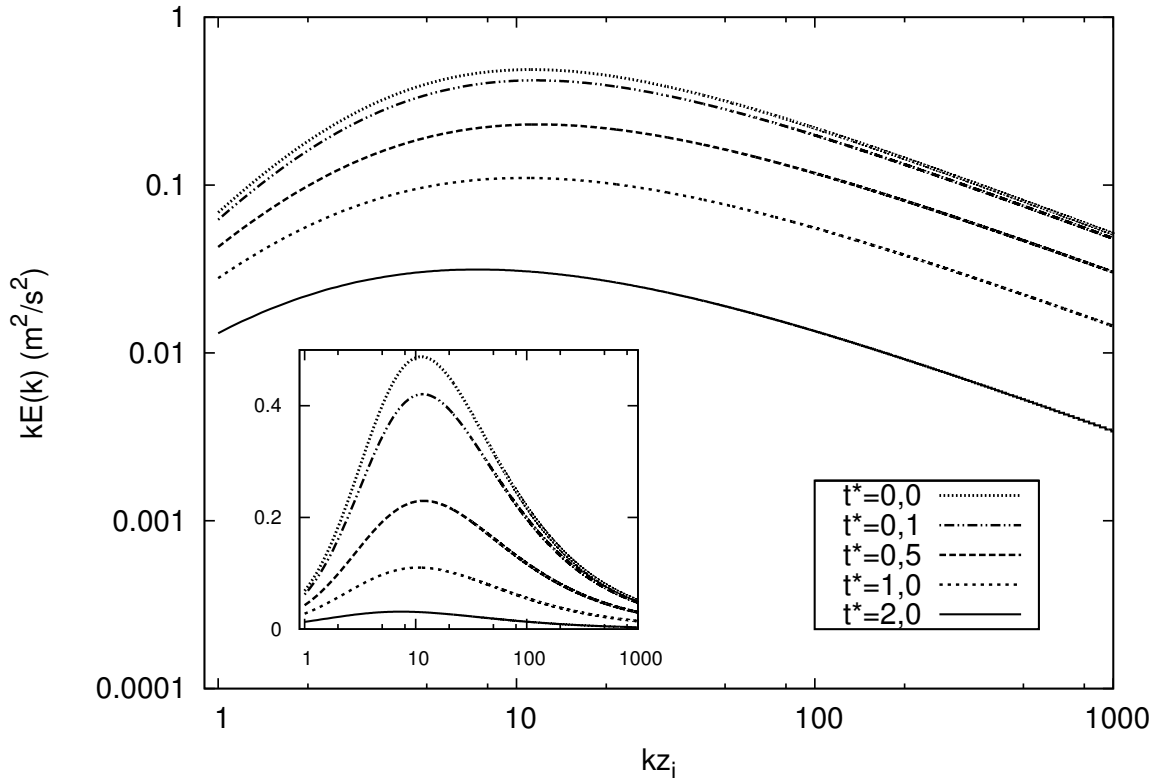


Figura 3.1: Espectro de energia tridimensional calculado a partir da 3.29. O espectro inicial é dado pela Equação (2.59) e a função Ξ é a sugerida por Moeng (1984).

Como uma ilustração, construi-se a Figura 3.1 que representa-se o espectro de energia tridimensional calculado a partir da Equação (3.29). O espectro inicial é dado pela Equação (2.59) e a função Ξ (ver página 30, Seção 2.1) é a sugerida por Moeng (1984).

Na Figura 3.2 apresenta-se os mesmos espectros que os da Figura 3.1, no entanto, compara-se com a expressão sugerida por Kolmogorov Equação (2.1), nela se observa uma disparidade no decaimento dos espectros obtidos admitindo como condição inicial a Equação (2.59). Isso ocorre devido ao fato de que a Equação (2.59) não satisfaz a Equação (3.22).

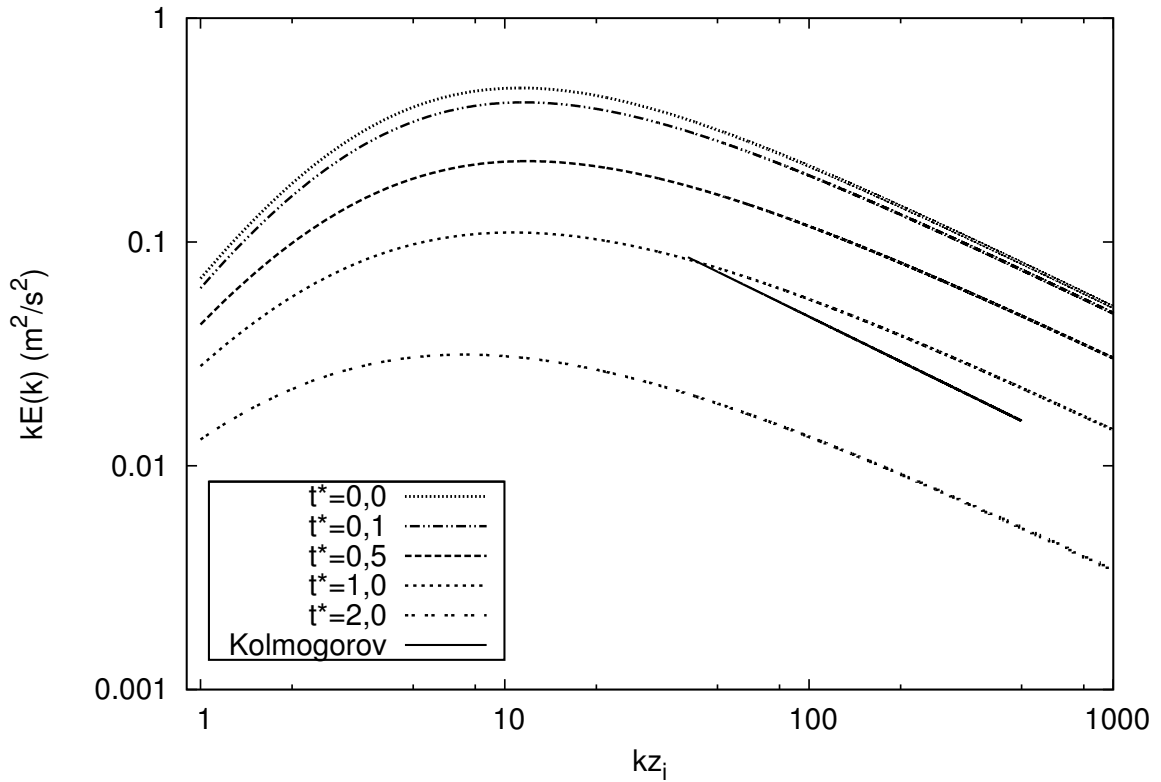


Figura 3.2: Comparação entre a lei dos $k^{-5/3}$ de Kolmogorov e o espectro de energia tridimensional calculado a partir da 3.29. Espectro inicial dado pela Equação (2.59). A função Ξ é sugerida por Moeng (1984).

3.3 Um Modelo Anisotrópico

Para um escoamento turbulento anisotrópico a equação dinâmica para a função espectro de densidade de energia é obtida desprezando-se o termo de produção de energia por efeito mecânico $\mathbf{M}(k', t_*)$, e considerando o termo \mathbf{W}_b a Equação (3.21) pode ser escrita da seguinte forma:

$$\frac{\partial \mathbf{E}(k', t_*)}{\partial t_*} = \mathbf{H}(k', t_*) + \mathbf{W}_b(k', t_*) - \frac{2}{R_e} k'^2 \mathbf{E}(k', t_*), \quad (3.30)$$

isto é,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{E}(k', t_*)}{\partial t_*} + \left(c_2 \psi_\epsilon^{2/3} (k')^{1/3} \right) \frac{\partial \mathbf{E}(k', t_*)}{\partial k'} + \left(\frac{c_2}{3} \psi_\epsilon^{2/3} (k')^{-2/3} + \frac{2}{R_e} k'^2 \right) \mathbf{E}(k', t_*) = \\ \frac{w_* z_i}{(\bar{w}\theta)_0} \frac{\partial \theta}{\partial z} c_1 \psi_\epsilon^{-1/3} (k')^{-2/3} \mathbf{E}_0(k') \operatorname{sen} \left(\frac{z_i \Omega}{w_*} t_* \right), \end{aligned} \quad (3.31)$$

com condição inicial⁴:

$$\mathbf{E}(k', t_* = 0) = 0. \quad (3.32)$$

Resolve-se a Equação (3.31) pelo método das características (ver Seção 2.3.2). A mudança de variável ótima é dada pela solução do *Sistema Característico* (IÓRIO, 2001), com condições iniciais dadas:

$$\begin{cases} \frac{dt_*(s,r)}{dr} = 1, & t_*(s, r=0) = 0 \\ \frac{dk'(s,r)}{dr} = A_1 k'^{1/3}, & k'(s, r=0) = s \end{cases}, \quad (3.33)$$

cuja solução é:

$$\begin{aligned} t_*(s, r) &= r, \\ k'(s, r) &= \left(s^{2/3} + \frac{2}{3} A_1 r \right)^{3/2}, \end{aligned} \quad (3.34)$$

com $A_1 = c_2 \psi_\epsilon^{2/3}$ e c_2 é dado no Apêndice B.

A mudança de variável procurada é:

$$T : \begin{cases} r = t_* \\ s = \left(k'^{2/3} - \frac{2}{3} A_1 t_* \right)^{3/2} \end{cases} \Leftrightarrow T^{-1} : \begin{cases} t_* = r \\ k' = \left(s^{2/3} + \frac{2}{3} A_1 r \right)^{3/2} \end{cases} \quad (3.35)$$

desde que,

$$\frac{\partial(s, r)}{\partial(k', t_*)} = \begin{vmatrix} s_{k'} & s_{t_*} \\ r_{k'} & r_{t_*} \end{vmatrix} = \left(k'^{2/3} - \frac{2}{3} A_1 t_* \right)^{1/2} k'^{-1/3} \neq 0. \quad (3.36)$$

A mudança de variável permite escrever: $\mathbf{E}(k', t_*) = V(s, r)$ e efetuando a transformada para as novas variáveis⁵, tem-se a equação diferencial ordinária e, a respectiva condição

⁴Significa que na origem da evolução temporal da CLC é considerado nula a densidade de energia em qualquer número de onda.

⁵ $\exists(k', t_*) \in \Omega$ tal que não garantirá a bijeção entre T e T^{-1} , as consequências disto estão delineadas na Seção 2.2.4.

inicial, ambas nas variáveis s e r :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial V(s, r)}{\partial r} + \left[B_1 \left(s^{2/3} + \frac{2}{3} A_1 r \right)^{-1} + C \left(s^{2/3} + \frac{2}{3} A_1 r \right)^3 \right] V(s, r) = \\ D \left(s^{2/3} + \frac{2}{3} A_1 r \right)^{-1} \mathbf{F}_0 \operatorname{sen} \left(\frac{z_i \Omega}{w_*} r \right), \\ V(s, r = 0) = 0, \end{array} \right. \quad (3.37)$$

sendo que $B_1 = \frac{A_1}{3}$, $C = \frac{2}{R_e}$, $D = \frac{w_* z_i}{(\overline{w\theta})_0} \frac{\partial \theta}{\partial z} c_1 \psi_\epsilon^{-1/3}$ e c_1 é calculado no Apêndice A. A função \mathbf{F}_0 corresponde ao termo de fonte e está relacionada com o espectro tridimensional $\mathbf{E}_0(k')$ sugerido por Kristensen et al. (1989).

Resolvendo o problema de Cauchy (Equação (3.37)) numericamente⁶ pelo algoritmo de Runge-Kutta de quarta ordem (BURDEN; FAIRES, 2003). Apresentam-se os espectro de energia tridimensional calculados a partir do sistema (3.37) para: $\frac{z}{z_i} = 0,2$ (Figura 3.3), $\frac{z}{z_i} = 0,5$ (Figura 3.4) e $\frac{z}{z_i} = 0,8$ (Figura 3.5), respectivamente. A função Ξ é a sugerida por Moeng (1984).

Para $\frac{z}{z_i} = 0,5$ e $\frac{z}{z_i} = 0,2$, nos espectros mais energéticos verifica-se um ponto de intersecção entre os espectros de 4 e 6h. Este fato é um indicativo que os termos de transferência de energia, $\mathbf{W}_b(k', t_*)$, e/ou $\mathbf{H}(k', t_*)$, da forma pela qual foram parametrizados, não sejam adequados; salienta-se, ainda, que ambos termos são sensíveis a variação dos valores das constantes multiplicativas⁷ contidas em suas expressões. Um outro fator de sensibilidade se dá na assunção de valores para o termo de fluxo de calor na superfície, $(\overline{w\theta}_0)$.

⁶Optou-se pela solução numérica pois, embora, o PVI (3.37) seja uma EDO linear de primeira ordem e sua solução obtida via *fatores integrantes* (BOYCE W. E., 1999), transformando o problema numa resolução de uma integral, a qual, neste caso, não possui uma antiderivada numa forma fechada e analítica. Ficando, assim, a solução ($V(s, r) = E(k', t_*)$) na forma: $V(s, r) = \frac{D\mathbf{F}_0(s)}{\mu(r, s)} \int \mu(r) \cdot \operatorname{sen}(cte \cdot r) \cdot \frac{\exp\left(\frac{3C}{8A} \left(s^{2/3} + \frac{2A}{3}r\right)^4\right)}{\left(s^{2/3} + \frac{2A}{3}r\right)^{-1/2}} dr$, com $\mu(r, s) = \left(s^{2/3} + \frac{2A}{3}r\right)^{1/2} \exp\left(\frac{3C}{8A} \left(s^{2/3} + \frac{2A}{3}r\right)^4\right)$.

⁷Os Apêndices B e C, apresentam o cálculo dos valores numéricos destas constantes baseados em argumentos de Goulart (2001).

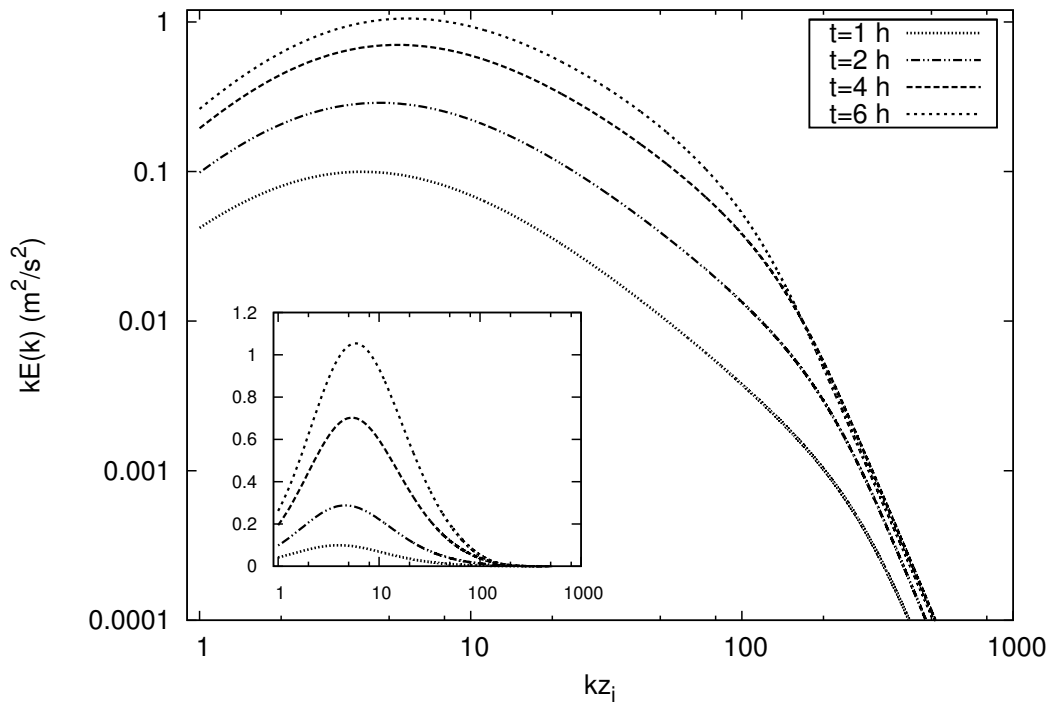


Figura 3.3: Espectro de energia tridimensional calculado a partir da solução da Equação (3.37) para $\frac{z}{z_i} = 0,2$. A função Ξ é sugerida por Moeng (1984).

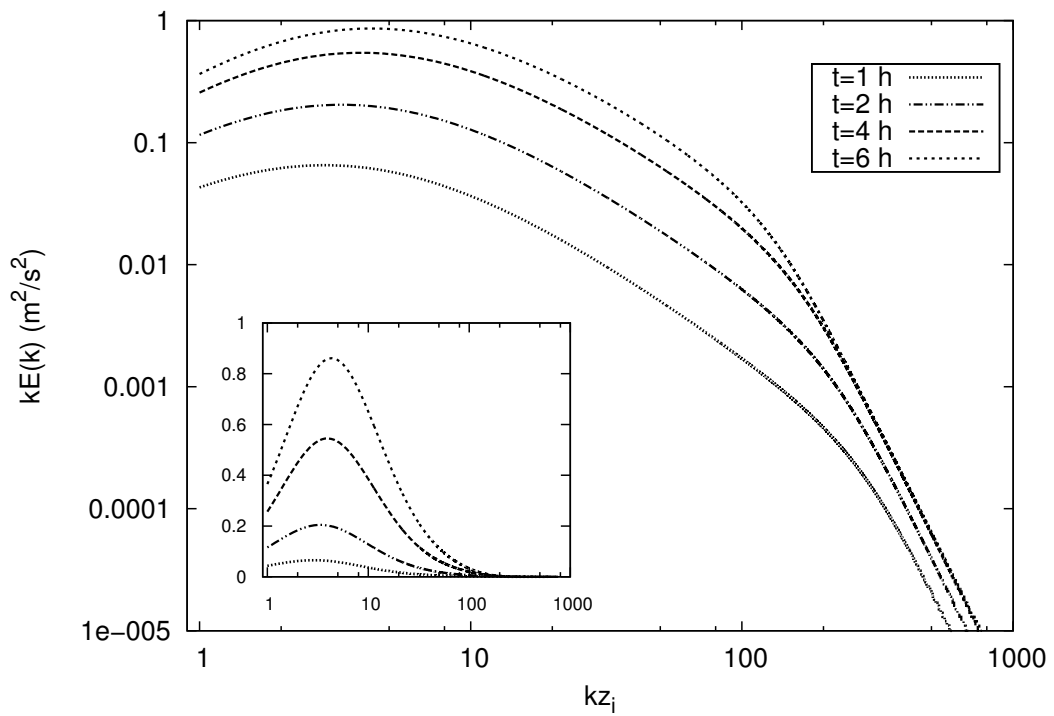


Figura 3.4: Espectro de energia tridimensional calculado a partir da solução da Equação (3.37) para $\frac{z}{z_i} = 0,5$. A função Ξ é sugerida por Moeng (1984).

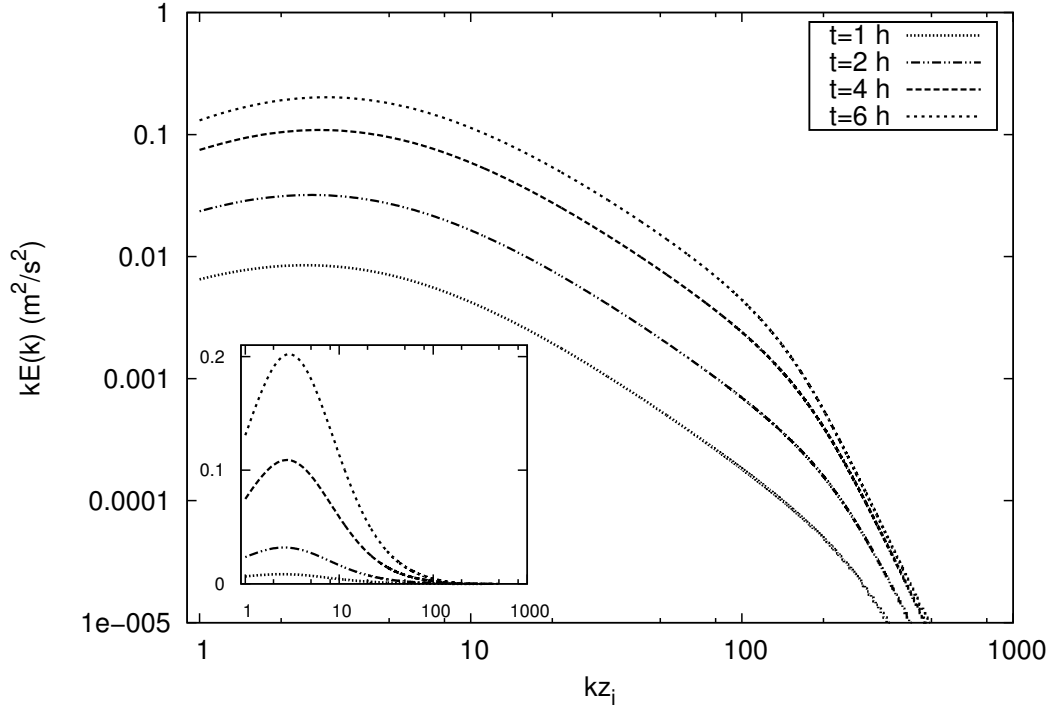


Figura 3.5: Espectro de energia tridimensional calculado a partir da solução da Equação (3.37) para $\frac{z}{z_i} = 0,8$. A função Ξ é sugerida por Moeng (1984).

3.4 Modelo Híbrido

O modelo anisotrópico acima não apresenta o comportamento típico da lei de $-5/3$ no subintervalo inercial, onde espera-se um comportamento de quase-estacionaridade (KOLMOGOROV, 1941). É desejável que qualquer modelo que pretenda descrever a evolução da energia turbulenta reproduza tal comportamento. Ainda, o termo \mathbf{W}_b utilizado acima para representar a transferência de energia inercial num escoamento turbulento anisotrópico apresenta a peculiaridade de se tornar positivo para determinados números de onda, como exibe a Figura 3.6. Nota-se, também, a disparidade das magnitudes de \mathbf{W}_b e \mathbf{H} para baixos números de onda, fato que acarreta em um excedente de energia na atmosfera, característica desejável para descrever o fenômeno de crescimento da CLC. Aliado a estes fatos, percebe-se que o termo \mathbf{W}_a é efetivo na transferência de energia para o subintervalo inercial (Pao (1965) o formulou para este fim).

Das considerações acima, parece natural intuir um modelo híbrido que represente a dinâmica espectral de energia. Tal modelo apresentaria características anisotrópicas para baixos números de onda (região de atuação de \mathbf{W}_b) e características isotrópicas no intervalo universal (região de atuação de \mathbf{W}_a), evitando a assunção de uma hipótese de coexistência local de turbulência isotrópica e anisotrópica.

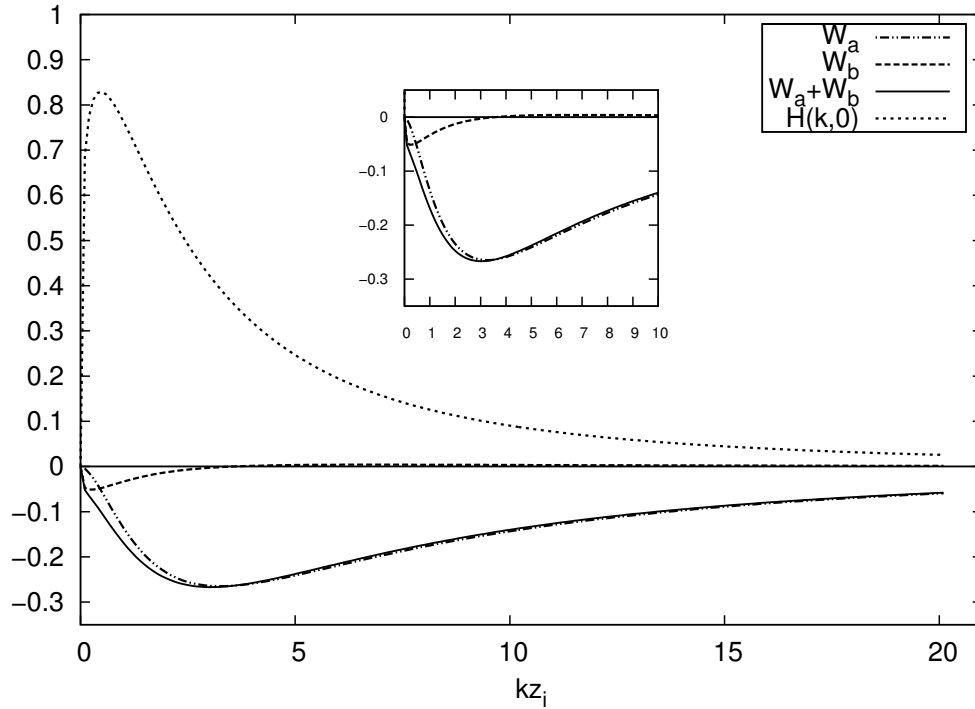


Figura 3.6: Representação gráfica dos termos \mathbf{H} , \mathbf{W}_b , \mathbf{W}_a e $\mathbf{W}_a + \mathbf{W}_b$.

A construção deste modelo híbrido baseia-se na capacidade do método das características em revelar as propriedades intrínsecas do sistema estudado (quando modelados por uma EDP). A análise abaixo demonstra essa “aptidão” natural do método.

A Figura 3.7 representa o *campo de direções* associados a EDO:

$$\frac{dk'(s, r)}{dr} = Ak'^{5/3}, \quad k'(s, r = 0) = s^8.$$

Observa-se que para baixos valores de números de onda é possível caracterizar um comportamento assintótico para as curvas características planas, isto é, para qualquer valor de do parâmetro r , sem perda de generalidade – r_{espec} , haverá uma curva característica plana se aproximando assintoticamente a reta (k, r_{espec}) ⁹. Percebe-se que, embora a variação temporal exista, para um determinado valor de k_i esta variação torna-se insignificante e praticamente constante. Como este parâmetro r está diretamente relacionado com a variação temporal pode-se considerar que nessa região o modelo é estacionário.

Diferentemente do que revela o *campo de direções* de $\frac{dk'(s, r)}{dr} = A_1 k'^{1/3}$ (Ver Figura 3.8.).

De posse destas constatações, o modelo híbrido é construído da junção dos dois modelos anteriores, basicamente, considerar-se-á que o termo de produção (ou perda) de energia

⁸Associado ao modelo isotrópico, e sua solução gera as curvas características planas.

⁹Esta peculiaridade causaria complicações numa tentativa de resolução numérica do PVI, pois para cada curva característica plana haveria uma barreira assintótica.

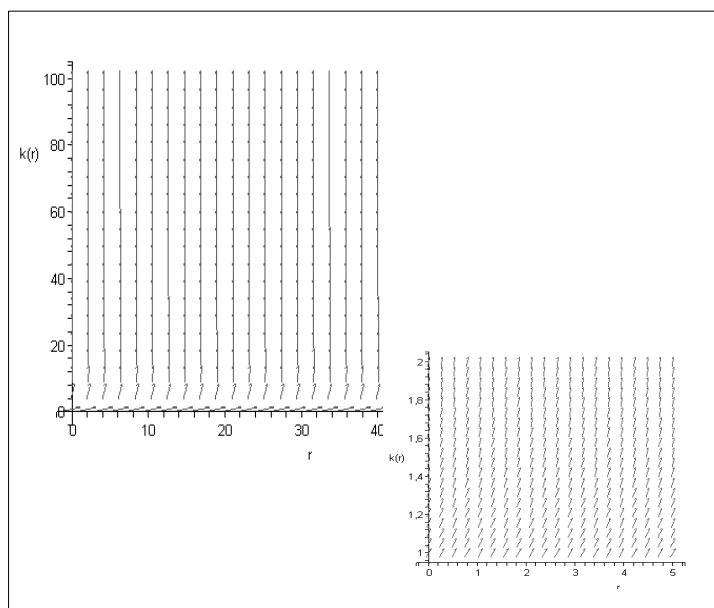


Figura 3.7: Campo de vetores associado $\frac{dk'(s, r)}{dr} = Ak'^{5/3}$.

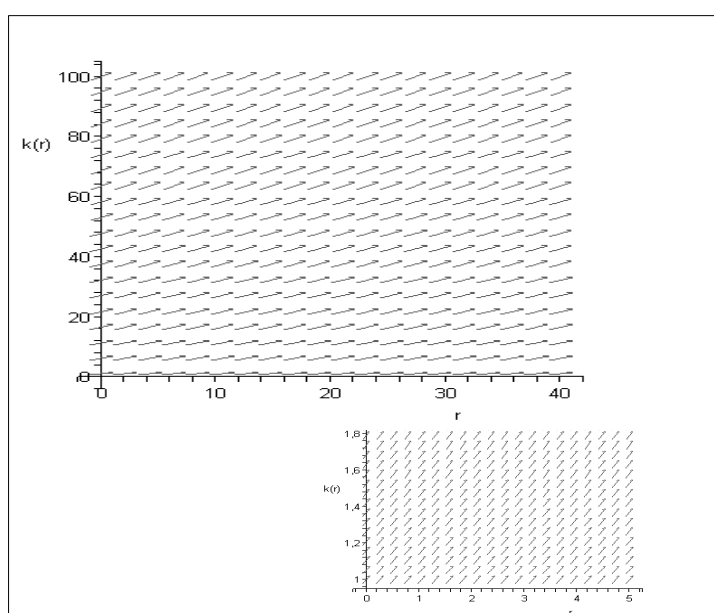


Figura 3.8: Campo de vetores associado a $\frac{dk'(s, r)}{dr} = A_1 k'^{1/3}$.

por convecção térmica atuará em todo o domínio de número de onda. Assim, no domínio $D := \{(1, k_i) \times [0, 40]\}^{10}$ utiliza-se o método de resolução do PVI (3.37). A solução obtida servirá de condição inicial à EDO¹¹:

$$A \cdot (k')^{5/3} \frac{\partial \mathbf{E}(k', t_*)}{\partial k'} + \left(B \cdot (k')^{2/3} + C \cdot k'^2 \right) \mathbf{E}(k', t_*) = D \cdot (k')^{-2/3} \mathbf{F}_0(k') \text{sen} \left(\frac{z_i \Omega}{w_*} t_* \right). \quad (3.38)$$

com $A = \alpha^{-1} \psi_\epsilon^{1/3}$, $B = \frac{5}{3} \alpha^{-1} \psi_\epsilon^{1/3}$, $C = \frac{2}{R_e}$, $D = \frac{w_* z_i}{(\bar{w}\theta)_0} \frac{\partial \theta}{\partial z} c_1 \psi_\epsilon^{-1/3}$ e $\mathbf{F}_0(k')$ segue a definição anterior.

A condição inicial terá que satisfazer: $\forall r_0 \Rightarrow k_i = k_0 + \frac{2A}{3} r_0$, logo

$$E(k_i) = E_{W_b} \left(k_0 + \frac{2A}{3} r_0 \right).$$

Montando o PVI¹²:

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{E}(k', t_*)}{\partial k'} + \left(\frac{5}{3} \cdot (k')^{-1} + \frac{C}{A} \cdot k'^{1/3} \right) \mathbf{E}(k', t_*) = \frac{D}{A} \cdot (k')^{-7/3} \mathbf{F}_0(k') \text{sen} \left(\frac{z_i \Omega}{w_*} t_* \right) \\ E(k_i) = E_{W_b} \left(k_0 + \frac{2A}{3} r_0 \right), \end{cases} \quad (3.39)$$

cuja solução é:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(k', r_0) = & \frac{\frac{D}{A} \cdot \mathbf{F}_0(k') \text{sen} \left(\frac{z_i \Omega}{w_*} r_0 \right)}{\mu(r)} \cdot \int_{k_i}^{k'} \left(\frac{\exp\left(\frac{3}{4} \cdot \frac{C}{A} k^{4/3}\right)}{k^{2/3}} \right) dk \\ & + E(k_i, r_0) \cdot \left(\frac{k_i}{k'} \right) \cdot \exp \left(\frac{3}{4} \cdot \frac{C}{A} (k_i^{4/3} - k'^{4/3}) \right), \end{aligned} \quad (3.40)$$

com $\mu(r) = (k')^{5/3} \cdot \exp \left(\frac{3}{4} \cdot \frac{C}{A} (k')^{4/3} \right)$.

Os resultados apresentados nas Figuras 3.9, 3.10 e 3.11 forneceram as características esperadas e parametrizadas para a evolução espectral da densidade de energia, uma vez que para baixos números de onda verifica-se uma inserção efetiva de energia líquida na CLC possibilitando o crescimento desta, e ao tomar números de ondas maiores a curva de densidade de energia reproduz o comportamento padrão da lei de potências $k^{-5/3}$.

¹⁰Valores padrões utilizados: $t = 1h$, $k_i = 3$; $t = 2h$, $k_i = 4$; $t = 4h$, $k_i = 7$ e $t = 6h$, $k_i = 8$.

¹¹Uma vez considerado estacionário o problema, elimina-se a variação temporal da Equação (3.30).

¹²Uma EDO linear de primeira ordem e sua solução obtida via *fatores integrantes* (BOYCE W. E., 1999), transformando o problema numa resolução de uma integral, a qual, neste caso, não possui uma antiderivada numa forma fechada e analítica. Porém será resolvida pelo Método de Integração de Romberg (BURDEN; FAIRES, 2003).

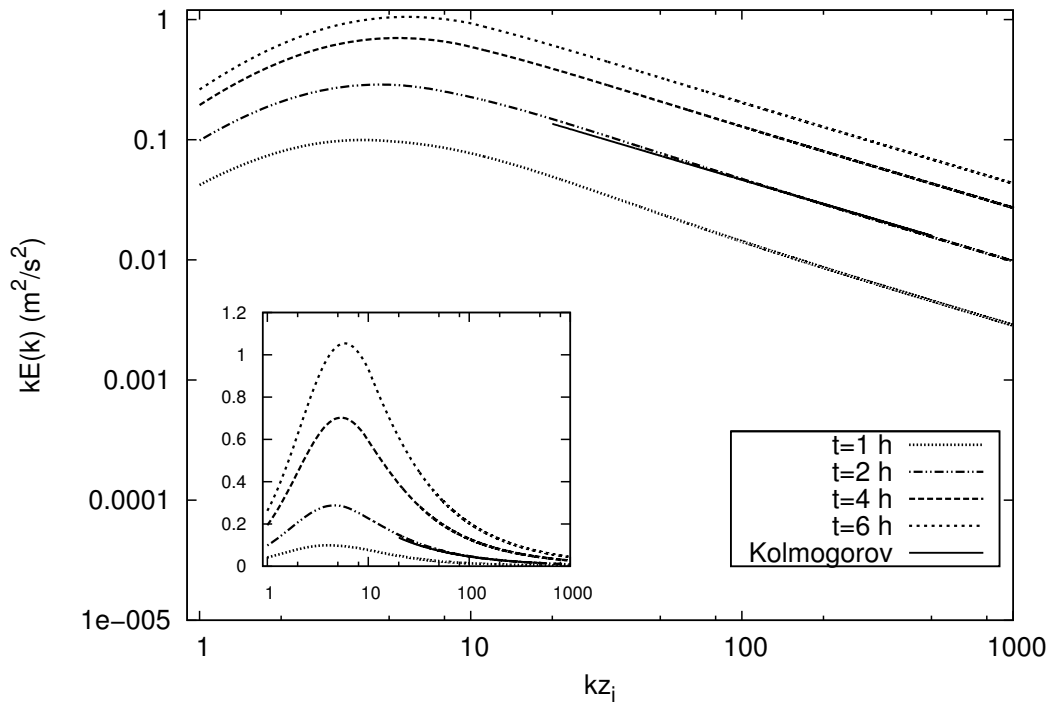


Figura 3.9: Espectro de energia tridimensional calculado a partir da solução da Equação (3.37) para $\frac{z}{z_i} = 0,2$. A função Ξ é sugerida por Moeng (1984).

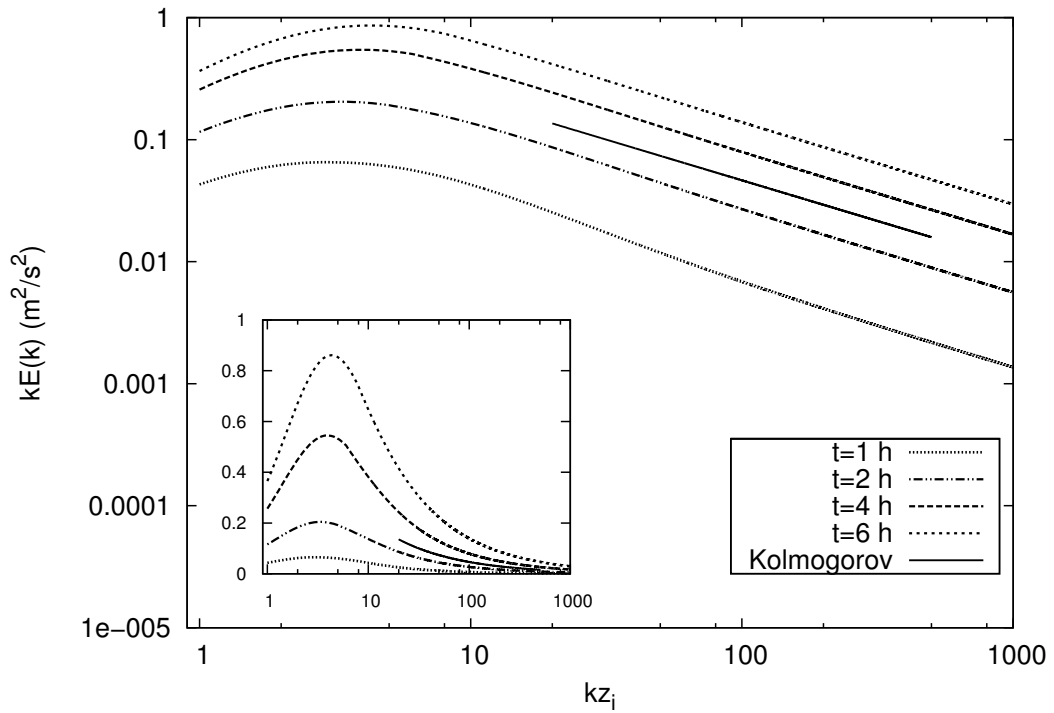


Figura 3.10: Espectro de energia tridimensional calculado a partir da solução da Equação (3.37) para $\frac{z}{z_i} = 0,5$. A função Ξ é sugerida por Moeng (1984).

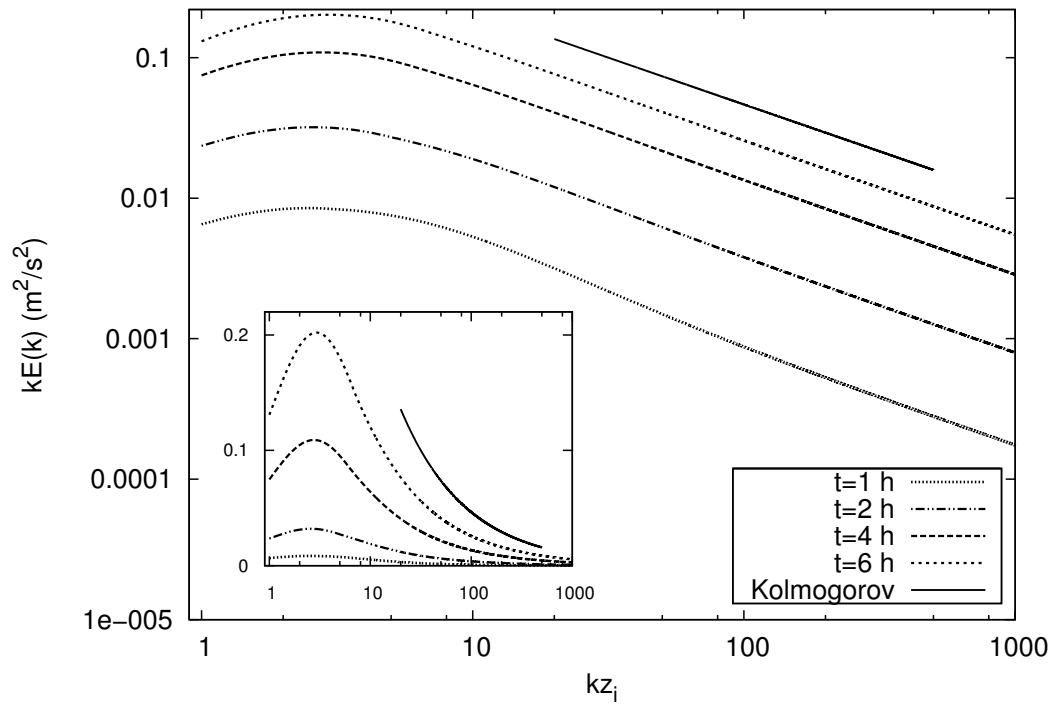


Figura 3.11: Espectro de energia tridimensional calculado a partir da solução da Equação (3.37) para $\frac{z}{z_i} = 0,8$. A função Ξ é sugerida por Moeng (1984).

4 CONCLUSÃO

No presente estudo, a partir das Equações de Navier-Stokes deduz-se uma equação para a evolução do espectro de densidade de energia em um regime de escoamento de turbulência homogênea e não-isotrópica. Despreza-se o termo de convecção mecânica e admite-se duas parametrizações distintas sugeridas por Pao (1965) e Goulart (2001) para o termo de transferência de energia inercial. Para o termo de produção de energia por efeito térmico emprega-se a parametrização de Batchelor (1949). Da combinação destas parametrizações, formulou-se três modelos de evolução espectral de energia, todos recaindo na forma de uma EDP de primeira ordem linear.

Para a obtenção do PVI foi admitido que o espectro de densidade de energia inicial era nulo na origem do tempo (período do nascer do sol); esse fechamento garante que a curva inicial (função inicial) seja solução da respectiva EDP.

A abordagem do PVI (a obtenção de soluções) foi feita pelo Método das Características. Na seção referente a fundamentação matemática evidencio-se o caráter geométrico inerente ao método e sua capacidade reveladora das propriedades intrínsecas do sistema modelado; salienta-se, ainda, que a aplicabilidade é irrestrita a qualquer tipo de EDP de primeira ordem ou sistemas de EDP's de primeira ordem. Mesmo, quando não é possível uma solução analítica e fechada, o método mostra-se adaptável ao emprego com técnicas numéricas.

Desde o início, a intenção da investigação era elaborar um modelo híbrido que combina regimes distintos de escoamento turbulento; esta meta só foi possível ao observar o comportamento das curvas características planas (CCP's) nas distintas parametrizações para o termo de transferência de energia por efeito inercial \mathbf{W} .

Os resultados obtidos, neste estudo foram satisfatórios, uma vez que modelou-se a evolução da CLC. O crescimento do espectro de energia modelado se deu pela inserção de energia na região de baixos números de onda, região em que o termo de transferência de energia \mathbf{W}_b não consegue transferir, na mesma proporção, a energia inserida pelo termo de fonte \mathbf{H} . Observa em domínios de número de onda mais alto uma estabilização da variação do parâmetro temporal sobre a CCP (ver Figura 3.7), indicando que a variação do número de onda governará a evolução do espectro de energia. Neste ponto cabe salientar que as CCP's indicam que qualquer modelo que almeja reproduzir esse comportamento, se for modelado por uma EDP de ordem 1, necessariamente deverá apresentar esse comportamento assintótico, o que estabelece um tipo de critério de identificação de regimes de escoamento turbulento.

5 SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

Um trabalho imediato, seria, a partir dos espectros gerados pelo modelo híbrido, deduzir espectros de energia unidimensionais em função do tempo e a partir deles determinar coeficientes de difusão temporais utilizados em modelos de dispersão. Porém, uma sugestão de pesquisa na área desenvolvida neste trabalho seria uma reanálise e uma reparametrização dos termos que compõem a Equação (2.99), que descreve a evolução espectral de energia cinética turbulenta na CLC, seja por tratamento empírico ou teórico (como o feito para \mathbf{W} em Yeh e Atta (1973)). Ainda, elaborar um modelo mais realístico, no qual considera a evolução temporal de parâmetros como a altura da CLC (z_i), w_* e outros. Atenta-se para a constatação da sensibilidade dos modelos anisotrópicos em relação ao parâmetro fluxo de calor sensível na superfície, fato que merece uma maior atenção no desenvolvimento de modelos futuros.

Uma segunda linha de pesquisa seria aplicação do modelo semi-numérico para equações diferenciais (ED), como ED's estocásticas (trabalhada em Szinvelski et al. (2006)), em modelos relacionados a EDP's de 1ª ordem. Um exemplo seria adotar hipóteses menos restritivas para o problema de *meandro* desenvolvido nos artigos Degrazia et al. (2008) e Degrazia et al. (2007). Em áreas de Física Não-Linear, no estudos de tópicos relacionados a *Equação de Burgers*, em Sistemas Dinâmicos e em Mecânica Analítica.

A Determinação da constante c_1

Para calcular o valor da constante c_1 considera-se a Equação (3.4):

$$\frac{g}{\Theta_0} H_0(k, z) = \frac{g}{\Theta_0} \gamma_c c_1 \epsilon^{-1/3} k^{-2/3} \mathbf{E}_0(k, z)$$

e a fórmula sugerida por Moeng e Sullivan (1994) para o termo de empuxo térmico (*buoyancy*) na CLP,

$$\frac{g}{\Theta_0} H_0(k) = \frac{w_*^3}{z_i} \left(1 - 1, 2 \frac{z}{z_i} \right) \quad (\text{A.1})$$

Estas equações podem relacionar-se através da equação:

$$\frac{g}{\Theta_0} H_0(k) = \int_0^\infty \frac{g}{\Theta_0} H_0(k, z) dk \quad (\text{A.2})$$

Resultando na equação para c_1 dada por:

$$c_1 = \frac{\left(1 - 1, 2 \frac{z}{z_i} \right) \epsilon^{1/3} \overline{(w\theta)_0}}{\gamma_c \int_0^\infty k^{-2/3} \mathbf{E}_0(k, z) dk} \quad (\text{A.3})$$

sendo que $\overline{(w\theta)_0}$ é dado pela Equação (3.5).

Observe que ambos, c_1 e $\mathbf{E}_0(k, z)$, dependem dos valores de $\frac{z}{z_i}$.

A partir dos dados fornecidos na Tabela 3.1 e os espectros tridimensionais $\mathbf{E}(k, z)$, calculados através dos polinômios interpoladores adimensionais (Seção 2.1.3) com $k = \frac{k'}{z_i}$, obtém-se os valores para c_1 , mostrados na tabela a seguir:

Tabela A.1: Constante c_1 .

$\frac{z}{z_i}$	0, 2	0, 5	0, 8
c_1	0, 12	0, 06	0, 007

B Determinação da constante c_2

A determinação da constante c_2 é obtida a partir da componente do termo de transferência de energia cinética, relacionado com a fonte de energia convectiva $W_b(k, t)$ (Equação (3.11)). Supondo que o valor máximo deste termo, em módulo, seja igual ao do empuxo térmico sugerido por Moeng e Sullivan (1994), em $t = 0$, isto é:

$$\frac{g}{\Theta_0} H_0(k, 0) = | [W_b(k, 0)]_{\text{máximo}} | \quad (\text{B.1})$$

o valor máximo do segundo termo da Equação (B.1) é calculado derivando a equação para $W_b(k, t)$ e igualando a zero, o resultado desta equação são os possíveis pontos de máximo (SWOKOWSKI, 1994).

Substituindo as equações 3.11 e A.1 em B.1, tem-se a fórmula para o cálculo de c_2 como segue

$$c_2 = \frac{w_*^4 \left(1 - 1, 2 \frac{z}{z_i}\right)}{\epsilon^{2/3} \left| \left[\frac{\partial}{\partial k} (k^{1/3} \mathbf{E}_0(k)) \right]_{\text{máximo}} \right|} \quad (\text{B.2})$$

sendo que c_2 e $\mathbf{E}_0(k)$ dependem dos valores de $\frac{z}{z_i}$.

Considerando os parâmetros meteorológicos dados na Tabela 3.1 e os espectros tridimensionais $\mathbf{E}_0(k)$, calculados através dos polinômios interpoladores adimensionais (Seção 2.1.3) com $k = \frac{k'}{z_i}$, obtém-se os valores para c_2 , mostrados na tabela a seguir:

Tabela B.1: Constante c_2 .

$\frac{z}{z_i}$	0, 2	0, 5	0, 8
c_2	0, 51	0, 34	0, 06

C Notação multi-índice e exemplos

C.1 Notação multi-índice

Seja a n -upla $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ de inteiros não-negativos (\mathbb{Z}_+), define-se:

1. *Operações básicas sobre multi-índices.*

- (a) $|\alpha| = \sum_{j=1}^n \alpha_j$;
- (b) $\alpha! = \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n$;
- (c) $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n}$.

2. *Aplicado ao Operador ∂ .*

O operador ∂ aplicado a uma função escalar é definido como:

$$\partial u = (\partial_1 u, \partial_2 u, \dots, \partial_n u) \equiv \nabla u, \text{ onde } \partial_j = \frac{\partial}{\partial x_j}. \text{ O próprio operador } \textit{Gradiente}.$$

Por sua vez ∂^α define-se como:

$$\partial^\alpha = \prod_{j=1}^n \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \right)^{\alpha_j} = \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \dots \frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x_n^{\alpha_n}} = \frac{\partial^{\alpha_1 + \dots + \alpha_n}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

3. *Ordenação de um conjunto multi-índices.*

A ordenação de elementos multi-índices é definida como:

$$\begin{array}{ccc} |\alpha| < |\beta| \text{ ou,} & \text{se } |\alpha| = |\beta| & \text{então } \alpha_i < \beta_i \\ \Downarrow & \Downarrow & \Downarrow \\ \sum_{j=1}^n \alpha_j < \sum_{j=1}^n \beta_j, & \sum_{j=1}^n \alpha_j = \sum_{j=1}^n \beta_j & \text{(ie, } i \text{ é o maior } n^\circ \text{ com } \alpha_i \neq \beta_i). \end{array}$$

4. *A amostra $a_\alpha (|\alpha| \leq k)$.*

$a_\alpha (|\alpha| \leq k) \in \mathbb{C}^{N(k)}$ é a representação de uma coleção de termos $(a_\alpha)_{|\alpha| \leq k} \in \mathbb{C}$, onde $N(k)$ é a cardinalidade do conjunto $\Lambda := \{\alpha : |\alpha| \leq k\}$. Esquemáticamente, $a_\alpha (|\alpha| \leq k) := ((a_{1\alpha})_{|\alpha| \leq k}, \dots, (a_{N(k)\alpha})_{|\alpha| \leq k})$, para $j \alpha \in \Lambda$, e $j = 1, \dots, N(k)$.

C.2 Exemplos

Esta seção apresentará exemplos associados aos itens 3. e 4. de B.1, além de um exemplo que se utiliza das operações sobre multi-índices e derivadas para demonstrar a equivalência entre a Equação (2.100) e a Equação (2.101).

C.2.1 Exemplo de ordenação de multi-índices (Seção B.1 - Item 3.)

Sejam dois multi-índices dados por: $\alpha = (1, 3, 4)$ e $\beta = (0, 4, 4) \Rightarrow |\alpha| = 8 = |\beta|$ mas, para $i = 2 \Rightarrow \alpha_2 = 3$ e, $\beta_2 = 4$, onde $\alpha_2 < \beta_2$ e $\alpha_2 \neq \beta_2 \therefore \alpha < \beta$.

C.2.2 Uma exemplificação da equivalência entre a Equação (2.100) e a Equação (2.101)

Na Equação (2.100), tem-se uma função F dependente das variáveis \mathbf{x} e $u_\alpha \in \mathbb{C}^{N(k)}$, onde u_α é uma amostra como em Item 4. - Seção B.1.

Uma exemplificação da equivalência entre a Equação (2.100) e a Equação (2.101), para a situação simplificada de $k = 2$ em \mathbb{R}^3 , e a_α é o termo que acompanha a derivada, da forma $a_\alpha \partial^\alpha u^1$, para um particular multi-índice α , e que obedeça às regras expostas nos Itens 1-4, Seção B.1, logo:

1. para $k = 2 \Rightarrow |\alpha| \leq 2$;
2. seja $(\partial^\alpha u)$, uma parte qualquer da Equação (2.100), o multi-índice especificado representa a ocorrência e a ordem das derivadas relativas as coordenadas do espaço, neste exemplo (em \mathbb{R}^3) há 3 coordenadas ($\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$), logo $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ com $\alpha_i \in \mathbb{Z}_+$;
3. $|\alpha| \leq 2 \Rightarrow \alpha \in \Lambda$, onde $\Lambda \doteq \{\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), \alpha_i \in \mathbb{Z}_+ : |\alpha| \leq 2\}$, assim

$$\Lambda \doteq \left\{ \begin{array}{llll} {}_1\alpha = (2, 0, 0), & {}_2\alpha = (1, 1, 0), & {}_3\alpha = (1, 0, 1), & {}_4\alpha = (0, 2, 0), \\ {}_5\alpha = (0, 1, 1), & {}_6\alpha = (0, 0, 2), & {}_7\alpha = (1, 0, 0), & {}_8\alpha = (0, 1, 0), \\ {}_9\alpha = (0, 0, 1), & {}_{10}\alpha = (0, 0, 0) & & \end{array} \right\},$$

um conjunto de α 's possíveis para esta situação (postos em ordem decrescente);

4. conforme o Item 2 - Seção B.1, este conjunto contempla todas as situações de derivadas da incógnita u para $k = 2$ em \mathbb{R}^3 . E, em particular,

$$a_\alpha \equiv a_{(1,1,0)} \Rightarrow \left(a_{(1,1,0)} \right)_{2 \leq 2} \in \mathbb{C}^{10} \text{ é o termo que acompanha termo-derivada}$$

$$\partial^{(1,1,0)} = \frac{\partial^2}{\partial x_1^1 \partial x_2^1 \partial x_3^0} = \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2};$$

5. a cardinalidade de Λ é $N(k) = 10$, e equivale dizer que a função F na Equação (2.100) é uma função composta por uma soma de 10 elementos da forma $a_\alpha \partial^\alpha u$, onde $a_\alpha(\mathbf{x}, \partial^\alpha u)$ e $u(\mathbf{x})$, logo é possível escrever uma EDP associada a este conjunto, com no máximo 10 termos “derivativos”.

¹Embora a Equação (2.100) contemple casos como $\exp(\partial_1 u) + \text{sen}(\partial_2 u) \partial_3 u = 0$ ou similares, admitira-se, para efeito de exemplificação e fixação da notação, EDP's da forma

$$\sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha(\mathbf{x}, (\partial^\alpha u)_{|\alpha| \leq k}) \partial^\alpha u = 0.$$

Logo, para Ω um conjunto aberto em \mathbb{R}^3 , com $\mathbf{x} \in \Omega$ e $(u_\alpha)_{|\alpha| \leq k} \in \mathbb{C}^{N(k)}$ para $k = 2$, e $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, com $\alpha_i \in \mathbb{Z}_+$, formando a seguinte Equação Diferencial Parcial Geral de ordem 2:

$$F(\mathbf{x}, (\partial^\alpha u)_{|\alpha| \leq 2}) = 0 \Leftrightarrow$$

$$a_{(2,0,0)}(\mathbf{x}, (\partial^\alpha u)) \partial_1^2 u + a_{(1,1,0)}(\mathbf{x}, (\partial^\alpha u)) \partial_1 \partial_2 u + a_{(1,0,1)}(\mathbf{x}, (\partial^\alpha u)) \partial_1 \partial_3 u +$$

$$a_{(0,2,0)}(\mathbf{x}, (\partial^\alpha u)) \partial_2^2 u + a_{(0,1,1)}(\mathbf{x}, (\partial^\alpha u)) \partial_2 \partial_3 u + a_{(0,0,2)}(\mathbf{x}, (\partial^\alpha u)) \partial_3^2 u +$$

$$a_{(1,0,0)}(\mathbf{x}, (\partial^\alpha u)) \partial_1 u + a_{(0,1,0)}(\mathbf{x}, (\partial^\alpha u)) \partial_2 u + a_{(0,0,1)}(\mathbf{x}, (\partial^\alpha u)) \partial_3 u + a_{(0,0,0)} \hat{\mathbf{1}} = 0,$$

onde $\partial^{1\alpha} = \partial^{(2,0,0)} = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2 \partial x_2^0 \partial x_3^0} = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}$, $\partial^{2\alpha} = \partial^{(1,1,0)} = \frac{\partial^2}{\partial x_1^1 \partial x_2^1 \partial x_3^0} = \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2}$,

$$\partial^{3\alpha} = \partial^{(1,0,1)} = \frac{\partial^2}{\partial x_1^1 \partial x_2^0 \partial x_3^1} = \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_3}, \quad \partial^{4\alpha} = \partial^{(0,2,0)} = \frac{\partial^2}{\partial x_1^0 \partial x_2^2 \partial x_3^0} = \frac{\partial^2}{\partial x_2^2},$$

$$\vdots$$

$$\partial^{9\alpha} = \partial^{(0,0,1)} = \frac{\partial^1}{\partial x_1^0 \partial x_2^0 \partial x_3^1} = \frac{\partial}{\partial x_3}, \quad \partial^{10\alpha} = \partial^{(0,0,0)} = \frac{\partial^0}{\partial x_1^0 \partial x_2^0 \partial x_3^0} = \hat{\mathbf{1}},$$

e $a_{(0,0,0)} \hat{\mathbf{1}} \equiv f(\mathbf{x}, u)$. O que permite concluir:

$$F(\mathbf{x}, (\partial^\alpha u)_{|\alpha| \leq 2}) \equiv F(\mathbf{x}, \partial_1^2 u, \partial_1 \partial_2 u, \partial_1 \partial_3 u, \partial_2^2 u, \partial_2 \partial_3 u, \partial_3^2 u, \partial_1 u, \partial_2 u, \partial_3 u, u) = 0,$$

análoga a Equação (2.101), para $k = 2$, exceto pela ordenação multi-indicial.

D Resultados sobre Existência e Unicidade de solução local para EDP's

Esse apêndice é baseado na discussão encontrada no livro: *Introduction to Partial Differential Equations, Ronald Folland* (FOLLAND, 1995).

D.1 Teorema de Cauchy-Kowalevski

A EDP geral de k -ésima ordem é dada por:

$$F(\mathbf{x}, (\partial^\alpha u)_{|\alpha| \leq k}) = 0. \quad (\text{D.1})$$

Para definir um *problema de Cauchy* (um problema de valor inicial), toma-se S sendo uma hipersuperfície de classe C^k . Se u é uma função de classe C^{k-1} definida sobre S , as quantidades $u, \partial_\nu u, \dots, \partial_\nu^{k-1} u$ sobre S são chamados de *Condições de Cauchy* de u sobre S .

Adota-se uma nova notação, na qual entende-se $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$ e denota as coordenadas por (\mathbf{x}, t) , com $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$. Derivadas com respeito a variável \mathbf{x} serão denotadas por ∂_{x_j} ou $\partial_{\mathbf{x}}^\alpha$, com $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1})$, e as derivadas em relação a t como ∂_t^j .

Essa readequação de notação permite reescrever o *problema de Cauchy* da seguinte forma:

Dadas as funções $\phi_0, \phi_1, \dots, \phi_{k-1}$ de \mathbf{x} , resolva

$$\begin{cases} F(\mathbf{x}, t, (\partial_{\mathbf{x}}^\alpha \partial_t^j u)_{|\alpha|+j \leq k}) = 0 \\ \partial_t^j u(\mathbf{x}, 0) = \phi_j(\mathbf{x}) \quad (0 \leq j < k) \end{cases}. \quad (\text{D.2})$$

Se u é uma função de classe C^r com $r \geq k$, então as condições de Cauchy $\{\phi_j\}$ determinam todas as derivadas $\partial_{\mathbf{x}}^\alpha \partial_t^j u$ sobre S com $j \leq k$ e $|\alpha| + j \leq r$.

O único desconhecido na Equação (D.2) sobre S é $\partial_t^k u$. Logo o *problema de Cauchy* será bem comportado se a Equação (D.2) pode ser resolvida para $\partial_t^k u$.

Para o caso geral, a equação²

$$F(\mathbf{x}, 0, (\partial_{\mathbf{x}}^\alpha \phi_j(\mathbf{x}))_{|\alpha|+j \leq k, j < k}, u_{0k}) = 0, \quad (\text{D.3})$$

u_{0k} poderá ser determinada como uma função de \mathbf{x} sobre S se satisfazer uma condição não-

¹De fato: $\partial_{\mathbf{x}}^\alpha \partial_t^j u(\mathbf{x}, 0) = \partial_{\mathbf{x}}^\alpha \phi_j(\mathbf{x})$.

² $u_{0k} = \partial_{\mathbf{x}}^0 \phi_k(\mathbf{x}) = \partial_t^k u(\mathbf{x}, 0)$.

característica: $u_{0k}(\mathbf{x}) \in C^1 \subset S$ se $F(\mathbf{x}, 0, (\partial_{\mathbf{x}}^\alpha \phi_j(\mathbf{x}))_{|\alpha|+j \leq k, j < k}, u_{0k}(\mathbf{x})) = 0$ e $\frac{\partial F}{\partial u_{0k}}(\mathbf{x}, 0, (\partial_{\mathbf{x}}^\alpha \phi_j(\mathbf{x}))_{|\alpha|+j \leq k, j < k}, u_{0k}(\mathbf{x})) \neq 0, \forall \mathbf{x}$. Neste caso, para $F = 0$ u_{0k} pode ser escrita como uma função de classe C^1 para as quantidades restantes na vizinhança de S , isto é,

$$\partial_t^k u = G(\mathbf{x}, 0, (\partial_{\mathbf{x}}^\alpha \phi_j(\mathbf{x}))_{|\alpha|+j \leq k, j < k}, u_{0k}). \quad (\text{D.4})$$

Com isto o problema de Cauchy toma a forma:

$$\begin{cases} \partial_t^k u = G(\mathbf{x}, 0, (\partial_{\mathbf{x}}^\alpha \phi_j(\mathbf{x}))_{|\alpha|+j \leq k, j < k}, u_{0k}) \\ \partial_t^j u(\mathbf{x}, 0) = \phi_j(\mathbf{x}) \quad (0 \leq j < k) \end{cases}. \quad (\text{D.5})$$

A condição de Cauchy, $\{\phi_j\}$, juntamente com a Equação (D.4) determinam todas as derivadas de u de ordem $\leq k$ sobre S ³.

Tem-se a proposição:

Proposição 1 *Suponha que $G, \phi_0, \dots, \phi_{k-1}$ sejam funções analíticas. Então há uma única função analítica u que satisfaz Equação (D.4) tal que $\partial_t^k u(\mathbf{x}, 0) = \phi(\mathbf{x})$ para $0 < j < k$.*

Demonstração. Da hipótese de $G, \phi_0, \dots, \phi_{k-1}$ serem funções analíticas, isto é, admitem uma expansão em série de Taylor em uma vizinhança de, sem perda de generalidade, $t_0 = 0$ e que seja diferenciável em todo o domínio de definição. Assim, considere que há uma outra função v que satisfaça as condições da proposição e que satisfaça a Equação (D.4): $\partial_t^k v = G(\mathbf{x}, 0, (\partial_{\mathbf{x}}^\alpha \phi_j(\mathbf{x}))_{|\alpha|+j \leq k, j < k}, v_{0k})$ e que $\partial_t^k v(\mathbf{x}, 0) = \phi(\mathbf{x})$, sobre S , logo $\partial_{\mathbf{x}}^\alpha \partial_t^j v(\mathbf{x}, 0) = \partial_{\mathbf{x}}^\alpha \phi_j(\mathbf{x})$. Assim como u , mas pela unicidade da representação em Série de Taylor na vizinhança t_0 , tem-se: $u = v$. ■

Através do problema de Cauchy tirá-se a unicidade da solução, porém a existência é uma outra questão. O procedimento acima aponta um caminho para a demonstração da existência de solução. A idéia é determinar todas as derivadas de u em torno da origem e substituí-las na fórmula de Taylor, e para completar a demonstração bastaria mostrar que a série de potências obtida é convergente.

Para tal demonstração é, tecnicamente, conveniente substituir o problema dado numa EDP de ordem K por um sistema de EDP's de 1ª ordem. O teorema abaixo estabelece essa transformação.

³Para G suficientemente suave as derivadas de maiores ordem de u também podem ser determinadas.

Teorema 1 *O problema de Cauchy dado pelo Sistema (D.5) é equivalente a um problema de Cauchy para o Sistema quasilinear de 1ª ordem,*

$$\begin{cases} \partial_t Y = \sum_1^{n-1} A_j(\mathbf{x}, t, Y) \partial_{x_j} Y + B(\mathbf{x}, t, Y), \\ Y(\mathbf{x}, 0) = \Phi(\mathbf{x}) \end{cases} \quad (\text{D.6})$$

no senso que a solução de um problema é a solução de outro modelo. Aqui Y, B e Φ são funções reais, os A_j 's são funções matriciais e A_j, B e Φ são explicitamente determinadas pelas funções em (D.5).

Demonstração. O vetor Y possui componentes (y_{α_j}) para $0 \leq |\alpha| + j \leq k$. Está subentendido que: $\partial_{\mathbf{x}}^{\alpha} \partial_t^j u = y_{\alpha_j}$. Ainda, se α é um multi-índice distinto de zero, $i = i(\alpha)$ denotará o menor número tal que $\alpha_i \neq 0$, e 1_i denotará o multi-índice com 1 na i -ésima posição e 0 nas demais.

O sistema a ser resolvido será:

$$\begin{cases} \partial_t y_{\alpha_j} = y_{\alpha(j+1)} & (|\alpha| + j < k) \\ \partial_t y_{\alpha_j} = \partial_{x_i} y_{(\alpha-1_i)(j+1)} & (|\alpha| + j = k, j < k) \\ \partial_t y_{0k} = \frac{\partial G}{\partial t} + \sum_{|\alpha|+j < k} \frac{\partial y_{\alpha_j}}{\partial G} y_{\alpha(j+1)} + \sum_{|\alpha|+j=k, j < k} \frac{\partial y_{\alpha_j}}{\partial G} \partial_{x_i} y_{(\alpha-1_i)(j+1)} \end{cases}, \quad (\text{D.7})$$

e as condições iniciais dadas por

$$\begin{cases} y_{\alpha_j}(\mathbf{x}, 0) = \partial_{\mathbf{x}}^{\alpha} \phi_j(\mathbf{x}) & (j < k) \\ y_{0k}(\mathbf{x}, 0) = G(\mathbf{x}, 0, (\partial_{\mathbf{x}}^{\alpha} \phi_j(\mathbf{x}))_{|\alpha|+j \leq k, j < k}, u_{0k}) \end{cases}. \quad (\text{D.8})$$

Se u é uma solução de Equação (D.5) então as funções $\partial_{\mathbf{x}}^{\alpha} \partial_t^j u$ satisfaz os sistemas (D.7) e (D.8). De maneira inversa, agora, se y_{α_j} satisfaz (D.7) e (D.8), basta verificar que $u = y_{00}$ satisfaz Equação (D.5).

A primeira equação do Sistema (D.7) implica que

$$y_{\alpha(j+l)} = \partial_t^l y_{\alpha_j} \quad (j+l \leq k), \quad (\text{D.9})$$

e a segunda equação, para $|\alpha| + j = k$ e $j < k$

$$\partial_t y_{\alpha_j} = \partial_t \partial_{x_i} y_{(\alpha-1_i)j}, \quad (\text{D.10})$$

mediante a integração a da equação acima, obtém-se

$$y_{\alpha j}(\mathbf{x}, t) = \partial_{x_i} y_{(\alpha-1)_i j}(\mathbf{x}, t) + c_{\alpha j}(\mathbf{x}), \quad (\text{D.11})$$

para algum $c_{\alpha j}(\mathbf{x})$, mas pela primeira equação de (D.8):

$$y_{\alpha j}(\mathbf{x}, 0) = \partial_{\mathbf{x}}^{\alpha} \phi_j(\mathbf{x}) = \partial_{x_i} \partial_{\mathbf{x}}^{(\alpha-1)_i} \phi_j(\mathbf{x}) = \partial_{x_i} y_{(\alpha-1)_i j}(\mathbf{x}, 0),$$

logo $c_{\alpha j}(\mathbf{x}) = 0$, e conseqüentemente temos:

$$y_{\alpha j} = \partial_{x_i} y_{(\alpha-1)_i j}, \quad (|\alpha| + j = k, j < k). \quad (\text{D.12})$$

Agora, pela terceira equação do sistema (D.7), Equação (D.9) e Equação (D.12) tem-se

$$\begin{aligned} \partial_t y_{0k} &= \frac{\partial G}{\partial t} + \sum_{|\alpha|+j < k, j < k} \frac{\partial G}{\partial y_{\alpha j}} y_{\alpha(j+1)} + \sum_{|\alpha|+j=k, j < k} \frac{\partial G}{\partial y_{\alpha j}} \partial_{x_i} y_{(\alpha-1)_i(j+1)} \\ &= \frac{\partial G}{\partial t} + \sum_{|\alpha|+j < k, j < k} \frac{\partial G}{\partial y_{\alpha j}} \frac{\partial y_{\alpha j}}{\partial t} + \sum_{|\alpha|+j=k, j < k} \frac{\partial G}{\partial y_{\alpha j}} \frac{\partial y_{\alpha j}}{\partial t} \\ &= \frac{\partial G}{\partial t} + \sum_{|\alpha|+j \leq k, j < k} \frac{\partial G}{\partial y_{\alpha j}} \frac{\partial y_{\alpha j}}{\partial t} \\ &= \frac{\partial}{\partial t} [G(\mathbf{x}, t, y_{\alpha j})] \end{aligned} \quad (\text{D.13})$$

integrando em t

$$y_{0k} = G(\mathbf{x}, t, y_{\alpha j}) + c_{0k}(\mathbf{x}),$$

para algum c_{0k} . Mas, pela segunda equação de (D.8),

$$y_{0k}(\mathbf{x}, 0) = G(\mathbf{x}, 0, y_{\alpha j}(\mathbf{x}, 0)),$$

porém

$$\phi_j(\mathbf{x}) = \partial_t^j u(\mathbf{x}, 0) = \partial_{\mathbf{x}}^{\alpha} \partial_t^j u(\mathbf{x}, 0) = y_{\alpha j}$$

∴

$$\begin{aligned} y_{0k}(\mathbf{x}, 0) &= G(\mathbf{x}, 0, y_{\alpha j}(\mathbf{x}, 0)) \quad \text{logo} \\ &= G(\mathbf{x}, 0, y_{\alpha j}(\mathbf{x}, 0)) + c_{0k}(\mathbf{x}) \\ &= G(\mathbf{x}, 0, y_{\alpha j}(\mathbf{x}, 0)) \Rightarrow c_{0k}(\mathbf{x}) = 0 \end{aligned}$$

e assim,

$$y_{0k} = G(\mathbf{x}, t, (y_{\alpha j})_{|\alpha|+j \leq k, j < k}). \quad (\text{D.14})$$

A Equação (D.14) obtida é semelhante à Equação (D.5); basta agora estabelecer uma fórmula de recorrência para $y_{\alpha j}$, para obter $y_{00} = u$. Para isto, deve-se mostrar que

$$y_{\alpha j} = \partial_{x_i} y_{(\alpha-1_i)j}, \quad \alpha \neq 0. \quad (\text{D.15})$$

A prova segue por indução sobre $k - j - |\alpha|$, com o passo inicial $k = j + |\alpha|$ fora estabelecido na Equação (D.12).

Por (D.7)(primeira equação), (Equação (D.9)) e a hipótese de indução

$$\partial_t y_{\alpha j} = y_{\alpha(j+1)} = \partial_{x_i} y_{(\alpha-1_i)(j+1)} = \partial_t \partial_{x_i} y_{(\alpha-1_i)j},$$

assim (ao integrar),

$$y_{\alpha j}(\mathbf{x}, t) = \partial_{x_i} y_{(\alpha-1_i)j}(\mathbf{x}, t) + c_{\alpha j}(\mathbf{x}),$$

pela primeira equação do Sistema (D.7)

$$y_{\alpha j}(\mathbf{x}, 0) = \partial_{\mathbf{x}}^{\alpha} \phi_j(\mathbf{x}) = \partial_{x_i} \partial_{\mathbf{x}}^{\alpha} \phi_j(\mathbf{x}) = \partial_{x_i} y_{(\alpha-1_i)j}(\mathbf{x}, 0),$$

logo, comparando as duas últimas expressões: $c_{\alpha j} = 0$. Comprovando, assim, a afirmação (D.15).

Assim, por (D.12) e (D.15), repetidamente em $y_{\alpha j}$:

$$y_{\alpha j} = \partial_{\mathbf{x}}^{\alpha} \partial_t^j y_{00}. \quad (\text{D.16})$$

Assim, por (D.16), (D.14) e (D.8), tem-se $u = y_{00}$ que satisfaz o problema de Cauchy (D.5). ■

O próximo teorema proporcionará mais uma simplificação, a saber:

Teorema 2 *O problema de Cauchy (D.6) é equivalente a um outro problema de mesma forma, no qual $\Phi = 0$ e A_1, \dots, A_{n-1}, B não dependem de t .*

Demonstração. Para eliminar Φ basta tomar $U(\mathbf{x}, t) = Y(\mathbf{x}, t) - \Phi(\mathbf{x})$. Então Y satisfará (D.6) \Leftrightarrow se U satisfaz

$$\partial_t U = \sum_1^{n-1} \tilde{A}_i(\mathbf{x}, t, U) \partial_{x_i} U + \tilde{B}(\mathbf{x}, t, U), \quad U(\mathbf{x}, 0) = 0,$$

com $\tilde{A}_i(\mathbf{x}, t, U) = A_i(\mathbf{x}, t, U + \Phi)$ e $\tilde{B}(\mathbf{x}, t, U) = B(\mathbf{x}, t, U + \Phi) + \sum_1^{n-1} A_i(\mathbf{x}, t, U + \Phi) \partial_{x_i} \Phi$.

Agora, para eliminar t de \tilde{A}_i e \tilde{B} adiciona-se uma componente extra u^0 a U que satisfaça $\partial_t u^0 = 1$ e $u^0(\mathbf{x}, 0) = 0$, logo $u^0 = t$. observado isto, substitui-se t por u^0 em \tilde{A}_i e \tilde{B} , que acarreta em uma nova equação e condição inicial em (D.6). ■

Agora, conforme os teoremas anteriores a analiticidade é preservada e a existência de solução do problema de Cauchy D.5 reduz-se ao teorema:

Teorema 3 *Suponha que B é uma função analítica em \mathbb{R}^N e A_1, \dots, A_{n-1} funções matriciais reais analíticas $N \times N$ definidas na vizinhança da origem de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^N$. Então há uma vizinhança da origem em \mathbb{R}^n sobre a qual o problema de Cauchy*

$$\begin{cases} \partial_t Y = \sum_1^{n-1} A_j(\mathbf{x}, Y) \partial_{x_j} Y + B(\mathbf{x}, Y) \\ Y(\mathbf{x}, 0) = 0 \end{cases}, \quad (\text{D.17})$$

tem uma única solução analítica.

Demonstração. Sejam $Y = (y_1, \dots, y_N)$, $B = (b_1, \dots, b_N)$ e $A_i = (a_{ml}^i)_{m,l=1}^N$. Procura-se $y_m = \sum c_m^{\alpha 0} x^\alpha t^j$, ($m = 1, \dots, N$) de (D.17).

Das condições de Cauchy, $Y(\mathbf{x}, 0) = 0 \Leftrightarrow 0 = \sum c_m^{\alpha 0} x^\alpha t^0$ como cada um dos x_i 's são independentes tem-se: $c_m^{\alpha 0} = 0, \forall \alpha, m$.

Para determinar $c_m^{\alpha j}$, $j > 0$, substitui a série de potências⁴ em (D.17), isto é,

$$\partial_t y_m = \sum_{i,l} a_{ml}^i(\mathbf{x}, y_1, \dots, y_N) \partial_{x_i} y_l + b_m(\mathbf{x}, y_1, \dots, y_N). \quad (\text{D.18})$$

⁴Seja $f(\mathbf{x}) = \sum a_\alpha (\mathbf{x} - \mathbf{x}^0)^\alpha$ convergente para $\mathbf{x} = \mathbf{x}^0 \in \mathbb{R}^n$. Seja,

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{x} : \mathbb{R}^m & \rightarrow & \mathbb{R}^n \\ \xi & \mapsto & \mathbf{x}(\xi) \end{array}$$

e se \mathbf{x} é uma função analítica, tem-se $\mathbf{x} = \sum b_\beta (\xi - \xi^0)^\beta$, com $b_\beta \in \mathbb{R}^n$ e $\mathbf{x}(\xi^0) = b_0 = \mathbf{x}^0$. Logo a função composta

$$\begin{aligned} F(\xi) = f(\mathbf{x}(\xi)) &= f\left(\sum_{\beta \neq 0} b_\beta (\xi - \xi^0)^\beta\right) = \sum a_\alpha \left(\sum_{\beta \neq 0} b_\beta (\xi - \xi^0)^\beta - \sum_{\beta=0} b_0 (\xi - \xi^0)^0\right)^\alpha \\ &= \sum a_\alpha \left(\sum_{\beta \neq 0} b_\beta (\xi - \xi^0)^\beta - b_0\right)^\alpha = \sum c_\gamma (\xi - \xi^0)^\gamma \end{aligned}$$

com $c_\gamma = P_\gamma((a_\alpha)'s, (b_\beta)'s)$. P_γ é um polinômio universal (independendo das séries envolvidas) com $\alpha_j \leq \gamma_j$ e $\beta_j \leq \gamma_j, \forall j$.

segue que as séries por y_k 's dentro das a_{ml}^i produz-se uma série de potências em \mathbf{x} e t cujo os coeficientes são polinômios com coeficientes não-negativos para $c_k^{\alpha j}$ e os coeficientes da Série de Taylor de a_{ml}^i , isto é, $a_{ml}^i \left(\mathbf{x}, \sum c_1^{\alpha j} \mathbf{x}^\alpha t^j, \dots, \sum c_N^{\alpha j} \mathbf{x}^\alpha t^j \right)$.

Resumidamente, o lado direito da Equação (D.18) é um polinômio da forma $\sum_{\alpha j} P_m^{\alpha j} \left((c_k^{\beta l})_{l \leq j}, \text{coeficiente de } A_i \text{ e } B \right) \mathbf{x}^\alpha t^j$, com $P_m^{\alpha j}$ um polinômio com coeficientes não-negativos. No lado esquerdo da Equação (D.18) tem-se: $\sum_{\alpha j} (j+1) c_m^{\alpha(j+1)} \mathbf{x}^\alpha t^j$.

Portanto, $c_m^{\alpha(j+1)} = (j+1)^{-1} P_m^{\alpha j} \left((c_k^{\beta l})_{l \leq j}, \text{coeficiente de } A_i \text{ e } B \right)$, assim, se conhecido $c_k^{\beta l}$ com $l \leq j$, o valor de $c_k^{\beta l}$ pode ser determinado para $l = j+1$. Por indução, pode-se determinar todos os valores de $c_k^{\beta l}$ e, precisamente, acha-se

$$c_m^{\alpha j} = Q_m^{\alpha j} (\text{coeficiente de } A_i \text{ e } B),$$

com $Q_m^{\alpha j}$ um polinômio com coeficientes não-negativos.

Agora, supõem-se a existência de um outro problema de Cauchy

$$\begin{cases} \partial_t \tilde{Y} = \sum_1^{n-1} \tilde{A}_j(\mathbf{x}, \tilde{Y}) \partial_{x_j} \tilde{Y} + \tilde{B}(\mathbf{x}, \tilde{Y}), \\ \tilde{Y}(\mathbf{x}, 0) = 0 \end{cases}, \quad (\text{D.19})$$

$\tilde{Y} \in \mathbb{R}^N$, com as seguintes características

- solução analítica conhecida próximo de $(0, 0)$;
- as séries de Taylor de \tilde{A}_i e \tilde{B} majorizam os de A_i e B .

Então a solução $\tilde{Y} = (\tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_N)$ deste problema é dada por: $\tilde{y}_m = \sum \tilde{c}_m^{\alpha j} x^\alpha t^j$, com $\tilde{c}_m^{\alpha j} = Q_m^{\alpha j}$ (coeficiente de \tilde{A}_i e \tilde{B}). Sendo Q um polinômio tal qual os anteriores. Se $Q_m^{\alpha j} \in \mathbb{Z}_+$, segue que

$$|c_m^{\alpha j}| = |Q_m^{\alpha j} (\text{coeficiente de } A_i \text{ e } B)| \leq Q_m^{\alpha j} (\text{coeficiente de } \tilde{A}_i \text{ e } \tilde{B}) = \tilde{c}_m^{\alpha j}.$$

Portanto \tilde{Y} majoriza Y ($|y_m| \leq \tilde{y}_m, \forall m = 1, \dots, N$), fato que garantirá a convergência de Y próximo a origem.

Esse sistema que majoriza o problema de Cauchy é de fácil construção. Como se vê:

Para $M > 0$ suficientemente grande e $r > 0$ suficientemente pequeno as séries A_i e B

são todas majoradas por séries dadas por⁵

$$\frac{Mr}{r - (x_1 + \cdots + x_{n-1}) - (y_1 + \cdots + y_N)}$$

Assim, consideramos o seguinte problema de Cauchy: para $m = 1, \dots, N$,

$$\begin{cases} \partial_t y_m = \frac{Mr}{r - \sum x_j - \sum y_j} \left[\sum_i \sum_j \partial_{x_i} y_j + 1 \right], \\ y_m(\mathbf{x}, 0) = 0 \end{cases} \quad (\text{D.20})$$

Resolve-se esse problema:

$s = x_1 + \cdots + x_{n-1}$ e $\partial_s = \partial_{x_1} + \cdots + \partial_{x_{n-1}}$, assim $y_j(\mathbf{x}, t) = u(x_1 + \cdots + x_{n-1})$ para $j = 1, \dots, N$.

Assim,

$$\begin{aligned} \partial_t u &= \frac{Mr}{r - s - Nu} \left[\sum_i \sum_j \partial_{x_i} u + 1 \right] \Rightarrow \\ \partial_t u &= \frac{Mr}{r - s - Nu} \left[(\partial_{x_1} u + \cdots + \partial_{x_1} u) + \cdots + (\partial_{x_{n-1}} u + \cdots + \partial_{x_{n-1}} u) + 1 \right] \Rightarrow, \\ \partial_t u &= \frac{Mr}{r - s - Nu} [N(n-1)\partial_s u + 1]. \end{aligned}$$

Ainda,

$$\begin{aligned} y_j(\mathbf{x}, t) &= u(x_1 + \cdots + x_{n-1}, t) \Rightarrow \partial_{x_i} y_j(\mathbf{x}, t) \\ &= \partial_{x_i} u = \partial_{x_i} u \cdot \partial_{x_i} (x_1 + \cdots + x_{n-1}) \cdot \\ &= \partial_{x_i} u \cdot 1 = \partial_{x_i} u \end{aligned}$$

Logo, $Y = (y_1, \dots, y_N)$ satisfaz Equação (D.21). Mas a equação:

$$\begin{cases} \partial_t u = \frac{Mr}{r-s-Nu} [N(n-1)\partial_s u + 1], \\ u(s, 0) = 0 \end{cases}, \quad (\text{D.21})$$

pode ser resolvida pelo Método das Características. Como segue:

$$(r - s - Nu)\partial_t u - mrN(n-1)\partial_s u = Mr$$

⁵Dados $M, r > 0$ a função $f(\mathbf{x}) = \frac{Mr}{r - (x_1 + \cdots + x_n)}$ é analítica no retângulo $\{\mathbf{x} : \max |x_j| < r/n\}$. Pela séries geométricas e o teorema multinomial, a série de Taylor é dada por: $f(\mathbf{x}) = M \sum_0^\infty \frac{(x_1 + \cdots + x_n)^k}{r^k} = M \sum_{|\alpha|} \frac{|\alpha|!}{\alpha! r^{|\alpha|}} \mathbf{x}^\alpha$, sendo absolutamente convergente para $\max |x_j| < r/n$.

Ainda, para $\sum a_\alpha \mathbf{x}^\alpha$ convergente num retângulo $\{\mathbf{x} : \max |x_j| < R\}$. Então a série geométrica dada anteriormente pode ser achada tal que majorize $\sum a_\alpha \mathbf{x}^\alpha$.

que equivale resolver o seguinte sistema de EDO's:

$$\begin{cases} \frac{dt}{d\tau} = r - s - Nu, & t(0) = 0 \\ \frac{ds}{d\tau} = MrN(n-1), & s(0) = \sigma, \\ \frac{du}{d\tau} = Mr, & u(0) = 0 \end{cases} \quad (\text{D.22})$$

com solução

$$\begin{cases} t = \frac{1}{2}MrN(n-1)\tau^2 + (r - \sigma)\tau \\ s = -MrN(n-1)\tau + \sigma \\ u = Mr\tau \end{cases} \quad (\text{D.23})$$

Ao reescrever nas variáveis⁶ s e t obtém-se

$$u = \frac{(r - s) - \sqrt{(r - s)^2 - 2MrNnt}}{Nn}. \quad (\text{D.24})$$

A expressão solução é analítica para s e t suficientemente próximo da origem. Logo, a solução obtida $u(s, t)$ majora a solução u procurada em torno de $(0, 0)$.

■

O desenvolvido acima é a demonstração do teorema:

Teorema 4 (Teorema de Cauchy-Kowalevski.) *Se $G, \phi_0, \dots, \phi_{k-1}$ são funções analíticas próximo da origem, então há uma vizinhança em torno da origem sobre a qual o problema de Cauchy (D.2) possui uma única solução analítica.*

Cabe observar que o teorema de Cauchy-Kowalevski asserta sobre a existência e unicidade de uma solução analítica em torno de um ponto. Dada uma hipersuperfície S , há uma solução analítica próximo de qualquer ponto de S . Cabe salientar que, não esta restringida a existência de outras soluções não-analíticas nesta vizinhança, salvo para o caso linear, no qual o *Teorema de unicidade de Holmgren* demonstra não existir qualquer outra solução não-analítica nessa vizinhança.

⁶A C.I. $u(s, 0) = 0$, acarreta no sinal negativo na expressão de $u(r, s)$.

D.2 Resultados sobre Existência e Unicidade de solução local para EDP's de 1ª Ordem.

D.2.1 Abordagem Geométrica do Método das Características

Seja uma EDP de primeira ordem em \mathbb{R}^2 , e sua forma equivalente a uma equação em parâmetros ⁷

$$F(x, y, u, u_x, u_y) = 0 \quad (\text{D.25})$$

e

$$F(x, y, z, z_1, z_2) = 0. \quad (\text{D.26})$$

Sendo z dado por $z = u(x, y)$, e define-se os parâmetros como $z_1 = u_x$ e $z_2 = u_y$, e impõem-se que $F \in C^2$.

Admitindo que haja uma *superfície integral* S e sobre ela considera-se um ponto $P_0 = (x(t_0) = x_0, y(t_0) = y_0, z(t_0) = z_0), t_0 \in I \subset \mathbb{R}$, neste ponto está bem definido *vetor direção*⁸ - \mathbf{V}_{P_0} associado à EDP; por P_0 construi-se-á a curva $\mathcal{C} \doteq (x(t), y(t), z(t)) \subset S$, a qual terá como vetor tangente em P_0 o vetor \mathbf{V}_{P_0} .

Primeiramente, este vetor tangente à \mathcal{C} (em qualquer ponto $P \in \mathcal{C}$, como será provado adiante), pertencerá ao plano tangente da *superfície integral* S (candidata à *superfície solução*), donde valerá: $(x(t), y(t), z(x(t), y(t))) \cdot \underbrace{(z_x, z_y, -1)}_{\text{vetor normal}} = 0$, para um dado $t \in I \subset \mathbb{R}$. Este plano tangente, contendo $P_0 = (x_0, y_0, z_0 \equiv u_0)$, tem a seguinte equação:

$$z - z_0 = p(x - x_0) + q(y - y_0), \quad \text{com } p = z_1 \quad \text{e} \quad q = z_2. \quad (\text{D.27})$$

Observe que, estes valores, p e q , são desconhecidos - pois não se sabe, *a priori*, qual é a forma z ; e a equação acima define uma família de planos (relativos aos parâmetros p e q) contendo o ponto P_0 . Porém estes parâmetros devem satisfazer

$$F(x_0, t_0, z_0, p, q) = 0, \quad (\text{D.28})$$

e assim pode-se escrever ou $p = p(q)$ ou $q = q(p)$. Logo, determina-se uma família de planos a um parâmetro contendo P_0 - incluído o plano tangente da *superfície solução* em P_0 .

⁷É difícil dissociar a natureza geométrica do *Método das Características*, Kiefer (1960) expõem bem esta relação.

⁸Pertencente ao *campo de direções* da EDP.

Sem perda de generalidade assume-se $F_q \neq 0$ ($q = q(p)$), e portanto

$$\begin{aligned}
z - z_0 &= p(x - x_0) + q(y - y_0) \stackrel{\frac{d}{dp}}{\Rightarrow} (x - x_0) + \frac{dq}{dp}(y - y_0) = 0 \Rightarrow \frac{dq}{dp} = -\frac{x - x_0}{y - y_0} \\
F(x_0, t_0, z_0, p, q) &= 0 \stackrel{\frac{d}{dp}}{\Rightarrow} F_p + F_q \frac{dq}{dp} = 0 \Rightarrow \frac{dq}{dp} = -\frac{F_p}{F_q} \\
\Rightarrow \frac{x - x_0}{F_p} &= \frac{y - y_0}{F_q} \Rightarrow y - y_0 = \frac{F_q}{F_p}(x - x_0) \quad \text{em} \quad z - z_0 = p(x - x_0) + q(y - y_0) \\
\Rightarrow \frac{x - x_0}{F_p} &= \frac{z - z_0}{pF_p + qF_q}, \quad \text{logo} \quad \frac{x - x_0}{F_p} = \frac{y - y_0}{F_q} = \frac{z - z_0}{pF_p + qF_q} \quad (\text{D.29})
\end{aligned}$$

define o vetor direção $((F_p, F_q, pF_p + qF_q))$ das retas contidas nos respectivos planos pertencentes à família de planos tangentes, e a união de todas estas *retas geratrizes* e o ponto P_0 formam o *cone de Monge* (Ver Figura D.1-a)). Neste “*campo de cones*” (Ver Figura D.1-b)), dentre todos os planos gerados⁹ apenas e somente aqueles que contenham a reta definida pela Equação (D.29) serão os planos tangentes da *superfície integral*. Isto é, a *superfície integral* será tangente a um especificado cone de vértice P_0 com a curva, cuja reta do vetor direção é dado por $(F_p, F_q, pF_p + qF_q)$ (Ver Figura D.1).

Para criar a equivalente da *curva característica* da Seção (2.2), exigir-se-á que¹⁰

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = F_p, \\ \frac{dy}{dt} = F_q \quad \text{e} \\ \frac{dz}{dt} = pF_p + qF_q. \end{cases} \quad (\text{D.30})$$

Isto é, o vetor tangente a curva candidata à *curva característica* em P_0 tenha direção paralela ao vetor direção do *cone de monge*, e sobre o qual, apenas uma destas direções geradas representará o vetor tangente à \mathcal{C} pertencente ao plano tangente à *superfície integral* em P_0 .

As incógnitas p e q , no Sistema (D.30), não possibilitam, ainda, a determinação da direção característica. Para isto, é necessário estabelecer sob que condições os valores $p(t_0)$ e $q(t_0)$ satisfarão a condição de que o vetor $(p(t_0), q(t_0), -1)$ seja normal a *superfície integral* (há a necessidade de duas equações para completar o Sistema (D.30)).

Sobre a Equação (D.26), toma-se a derivada em relação à y

⁹E a medida que se especifica p e q forma-se um conjunto de planos que envolvem o *cone de monge*.

¹⁰Aqui fica claro a forma do *campo de direções* exigida pela Equação (D.44).

$$\begin{aligned}
\partial_y \{F(x, y, z, p, q) = 0\} &\Rightarrow F_y + F_z z_y + F_p p_y + F_q q_y = 0 \\
&\stackrel{F \in C^2 \Rightarrow q_x = p_y}{\Leftrightarrow} F_y + q F_z + q_x F_p + q_y F_q = 0 \\
&\Rightarrow q_x F_p + q_y F_q = -(F_y + q F_z),
\end{aligned}$$

mas, se (x_0, y_0, z_0) está sobre a *superfície integral* segue que

$$q'(t_0) = \left. \frac{d}{dt} q(x(t), y(t)) \right|_{t=t_0} = q_x \left. \frac{dx(t)}{dt} \right|_{t=t_0} + q_y \left. \frac{dy(t)}{dt} \right|_{t=t_0} = q_x F_p + q_y F_q$$

logo,

$$q'(t_0) = -F_y - q F_z, \quad (\text{D.31})$$

e analogamente para p'

$$p'(t_0) = -F_x - p F_z, \quad (\text{D.32})$$

como t_0 é qualquer ponto da *superfície integral*, as *curvas características* serão dadas pelo *sistema característico*

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = F_p, \\ \frac{dy}{dt} = F_q \\ \frac{dz}{dt} = p F_p + q F_q, \\ \frac{dp}{dt} = -F_x - p F_z \quad \text{e} \\ \frac{dq}{dt} = -F_y - q F_z. \end{cases} \quad (\text{D.33})$$

Este sistema contém as condições necessárias para a determinação da *curva característica* associada à Equação (D.26). Nota-se que na determinação de uma destas curvas contendo P_0 fora necessário estabelecer informações sobre o plano (que contém P_0) em que esta reside, este conjunto - curva e plano em P_0 - determina uma *faixa característica* (Ver Figura D.1-c)), e a *curva característica* é dita *suporte* desta faixa.

Semelhante ao feito na Seção (2.2), as *faixas características* serão construídas a partir de uma *faixa inicial*; que por sua vez, a construção desta *faixa inicial* é similar ao da construção de uma *faixa característica*. Primeiramente, construi-se uma *curva suporte inicial*, $(\alpha(s), \beta(s), \phi(s))$ - a condição inicial parametrizada. Esta *curva suporte inicial* deverá estar contida por planos (Ver Figura D.1-d)), e em qualquer um destes planos terá-se como vetor

normal: $(p(s), q(s), -1)$, para algum particular s sobre a curva suporte; logo satisfazendo

$$F(\alpha(s), \beta(s), \phi(s), p(s), q(s)) = 0. \quad (D.34)$$

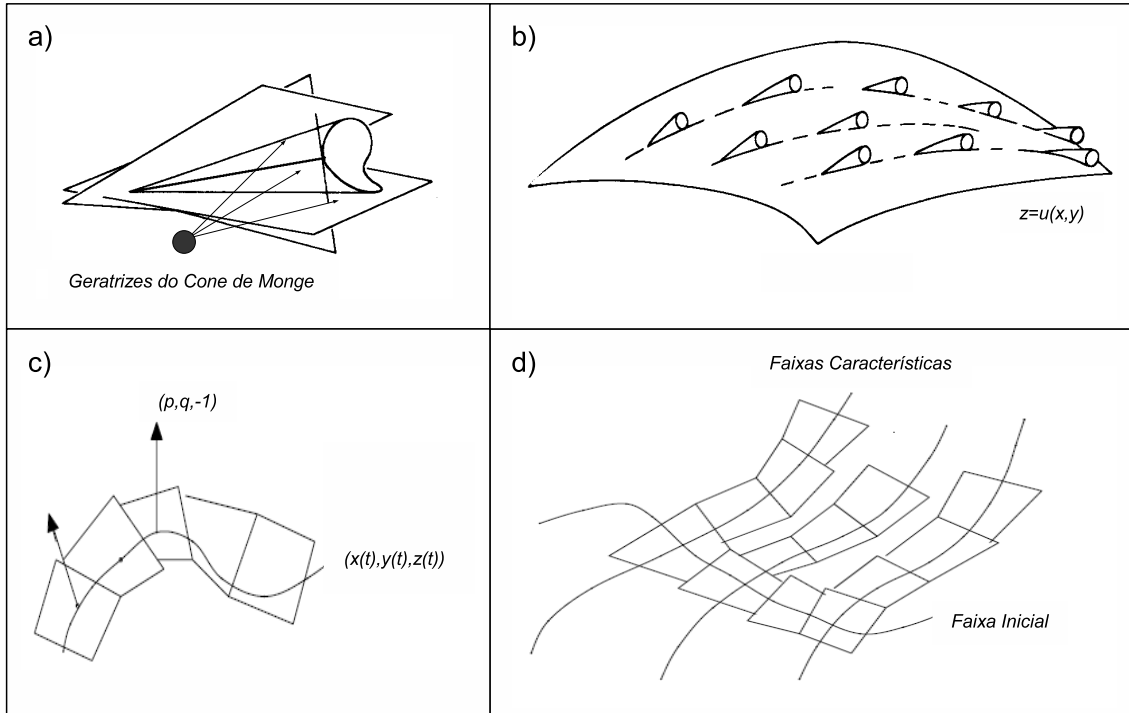


Figura D.1: **a)** *Cone de Monge* e seus planos formadores. **b)** *Campo de cones* sobre a *superfície integral*. **c)** Esboço geométrico das propriedades da *faixa característica*. **d)** Construção da *faixa característica* a partir da *faixa inicial* e suas respectivas *curvas suportes*. Figura modificada a partir de figuras de John (1981) - Fig. 2.3-a) e Fig. 2.3-b); e Nandakumaran e Prasad (1999) - Fig. 2.3-c) e Fig. 2.4-d).

Observe que, novamente, há uma equação para duas incógnitas. A condição auxiliar decorrerá do fato que z deva conter esta curva inicial ($z(\alpha(s), \beta(s)) = \phi(s)$, para $s \in I \subset \mathbb{R}$), e portanto a condição auxiliar será dada por

$$\phi'(s) = z_x \alpha'(s) + z_y \beta'(s) = \alpha'(s)p(s) + \beta'(s)q(s); \quad (D.35)$$

logo as *faixas características* são soluções do Sistema de EDO's de 1ª ordem

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx(s,t)}{dt} = F_p(x(s,t), y(s,t), z(s,t), p(s,t), q(s,t)) \\ \frac{dy(s,t)}{dt} = F_q(x(s,t), y(s,t), z(s,t), p(s,t), q(s,t)) \\ \frac{dz(s,t)}{dt} = p(s,t)F_p(x(s,t), y(s,t), z(s,t), p(s,t), q(s,t)) \\ \quad + q(s,t)F_q(x(s,t), y(s,t), z(s,t), p(s,t), q(s,t)) \\ \frac{dp(s,t)}{dt} = -F_x(s,t) - p(s,t)F_z(x(s,t), y(s,t), z(s,t), p(s,t), q(s,t)) \\ \frac{dq(s,t)}{dt} = -F_y(s,t) - q(s,t)F_z(x(s,t), y(s,t), z(s,t), p(s,t), q(s,t)) \end{array} \right. , \quad (\text{D.36})$$

com condições iniciais

$$\left\{ \begin{array}{l} x(s, t_0) = \alpha(s) \\ y(s, t_0) = \beta(s) \\ z(s, t_0) = f(s) \\ F(\alpha(s), \beta(s), \phi(s), p(s, t_0), q(s, t_0)) = 0 \\ \phi'(s) = \alpha'(s)p(s, t_0) + \beta'(s)q(s, t_0) \end{array} \right. . \quad (\text{D.37})$$

Conforme o Teorema (10.8) - pg 383 (Doering e Lopes (2005)), as hipóteses requeridas para a existência e unicidade da solução de um sistema de EDO de 1ª Ordem são garantidas ao supor $F \in C^2$ e conseqüentemente $F_p, F_q, F_z, F_x, F_y, p$ e $q \in C^1$. Este resultado garante não somente a existência como a unicidade destas *faixas características*.

Uma vez determinada as equações e condições de existência das *faixas características* para o caso geral, Equação (D.33), as demais situações são derivadas facilmente, como segue:

1. *Caso Quasilinear*. A Equação (2.106) equivale a

$$F(\mathbf{x}, (\partial^\alpha u)_{|\alpha| \leq 1}) = \sum a_j(\mathbf{x}, u) \partial_j u - b(\mathbf{x}, u) = 0 \quad (\text{D.38})$$

e conseqüentemente, $\frac{\partial F}{\partial z_j} = a_j(\mathbf{x}, u)$ e $\sum z_j \frac{\partial F}{\partial z_j} = b(\mathbf{x}, u)$. Aqui, não há necessidade de equações extras, são independentes de z_j (no sistema formado o número de equações é o mesmo que o número de incógnitas). Para exemplificar, em \mathbb{R}^2 o *cone de Monge* degenera em uma linha (ver Figura D.1-b)), e o vetor diretor é dado pela equação da reta

$$\frac{x - x_0}{a_1(x, y, z)} = \frac{y - y_0}{a_2(x, y, z)} = \frac{z - z_0}{b(x, y, z)}. \quad (\text{D.39})$$

2. *Caso linear.* A Equação (2.105) recai em uma situação mais simplificada ainda. Pois a dependência em u inexistente, portanto o sistema dado por $\frac{\partial F}{\partial z_j} = a_j(\mathbf{x})$ já é completo, e as *curvas características* são as suas próprias *projeções características* em seu domínio de validade Ω . Logo,

$$\frac{x_1 - x_{10}}{a_1(\mathbf{x})} = \dots = \frac{x_n - x_{n0}}{a_n(\mathbf{x})}, \quad (\text{D.40})$$

já formam um sistema completo para a determinação do vetor diretor a curva projeção da *curva característica*. E assim, u é dada pela resolução imediata de

$$\frac{du(\mathbf{x}(t))}{dt} = c(\mathbf{x}(t)). \quad (\text{D.41})$$

Os resultados e comentários desta seção estão baseados nas bibliografias: Biezuner (2007), Alonso (2005), Nandakumaran e Prasad (1999) e John (1982).

D.2.2 Existência Local e Unicidade de Solução para uma EDP de Ordem 1: Caso Não-Linear Geral.

Seja a EDP de 1ª ordem geral

$$F(x_1, \dots, x_n, u, \partial_1 u, \dots, \partial_n u) = 0, \quad (\text{D.42})$$

com $F : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 , a princípio (Evans (1997)). Sua equivalente em forma de uma equação de parâmetros é

$$F(x_1, \dots, x_n, y, z_1, \dots, z_n) = 0, \quad (\text{D.43})$$

associa-se $y = u(\mathbf{x})$ e $z_j = \partial_j u$, com $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, um aberto que conterá o domínio de solução da Equação (D.42).

Conforme Folland (1995), segue que o campo vetorial associado à Equação (D.43) é:

$$\nabla_{\mathbf{z}} F = \frac{d\mathbf{x}}{dt} \Leftrightarrow \frac{\partial F}{\partial z_j} = \frac{dx_j}{dt} \quad (\forall j = 1, \dots, n),^{11} \quad (\text{D.44})$$

¹¹Seja u , solução da Equação (D.42) e dada uma parametrização à curva: $(\mathbf{x}(t)) \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$. Têm-se que

e sua solução é uma família de curvas cujos vetores tangentes, em qualquer ponto destas curvas, são dados por $\nabla_{\mathbf{z}}F$. Além disto, ao longo destas curvas a quantidade y deve descrever u ao longo das curvas $\mathbf{x}(t)$

$$\frac{dy}{dt} = \sum \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{dx_j}{dt} = \sum z_j \frac{\partial F}{\partial z_j}. \quad (\text{D.45})$$

Não pode-se definir como curvas características pertencente à hipersuperfície integral - S , as curvas que satisfaçam à Equação (D.44) e à Equação (D.45); pois as incógnitas z_j ainda são desconhecidas.¹²

As equações extras, necessárias para a determinação dos z_j (descrevem as derivadas de u ao longo das curvas $\mathbf{x}(t)$), seguem de

$$\frac{dz_j}{dt} = \sum \frac{\partial z_j}{\partial x_k} \frac{dx_k}{dt} = \sum \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\frac{\partial u}{\partial x_j} \right] \frac{\partial F}{\partial z_k} \stackrel{u \in C^2}{=} \sum \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\frac{\partial u}{\partial x_k} \right] \frac{\partial F}{\partial z_k} = \sum \frac{\partial z_k}{\partial x_j} \frac{\partial F}{\partial z_k},$$

e diferenciando a Equação (D.43) em relação a x_j ,

$$0 = \frac{\partial F}{\partial x_j} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial x_j} + \sum \frac{\partial F}{\partial z_k} \frac{\partial z_k}{\partial x_j} = \frac{\partial F}{\partial x_j} + z_j \frac{\partial F}{\partial y} + \sum \frac{\partial z_k}{\partial x_j} \frac{\partial F}{\partial z_k}.$$

Combinando estas duas últimas condições, obtém-se

$$\frac{dz_j}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial x_j} - z_j \frac{\partial F}{\partial y}. \quad (\text{D.46})$$

O conjunto de equações formado pela a Equação (D.44), a Equação (D.45) e a Equação (D.46), geram um sistema de $2n + 1$ equações diferenciais ordinárias para as $2n + 1$ variáveis x_j, y e z_j .

Como condições iniciais, assume-se uma hipersuperfície $\gamma \in C^1$, com representação paramétrica local dada por: $\mathbf{x} = \gamma(\mathbf{s})$ e sobre esta define-se uma função $\phi \in C^1$ ¹³:

$$\Gamma : u|_{\gamma} = \phi \Leftrightarrow \mathbf{x}(\mathbf{s}, 0) = \gamma(\mathbf{s}) \text{ e } y(\mathbf{s}, 0) = \phi(\gamma(\mathbf{s})).^{14} \quad (\text{D.47})$$

$\frac{du_{x_j}}{dt} = \sum_i u_{x_i x_j} \frac{dx_j}{dt}$, mas $\partial_{x_j}\{F = 0\} \Leftrightarrow F_{x_j} + F_u u_{x_j} + \sum_i F_{u_j} u_{x_i} u_{x_j} = 0$, imediatamente percebe-se que

$\frac{dx_j}{dt} = F_{u_j}$. Na Seção 2.3, apresentou-se uma justificativa geométrica para esta formulação em \mathbb{R}^2 .

¹²O problema consiste em um sistema de $(n + 1)$ equações e $(2n + 1)$ incógnitas.

¹³Para maior generalidade, diz-se que a γ é uma variedade de dimensão $(n - 1)$ em \mathbb{R}^n , a qual pode ser representada localmente como o gráfico de uma função $f : \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$.

¹⁴Sem perda de generalidade admite-se $t_0 = 0$.

Novamente, requerer-se-á condições extras para especificar os valores z_j 's sobre a hipersuperfície Γ gerados pela Equação (D.46). Para isto, sobre γ observa-se que

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial y}{\partial s_k} \stackrel{y \equiv \phi(\gamma(\mathbf{s}))}{=} \sum \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial s_k} = \sum_{\mathbf{x}=\gamma(\mathbf{s}) \Leftrightarrow x_j \equiv \gamma_j(\mathbf{s})} \frac{\partial y}{\partial x_j} \frac{\partial \gamma_j}{\partial s_k} = \sum_{\phi \equiv u(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in \gamma} z_j \frac{\partial \gamma_j}{\partial s_k}, \quad (1 \leq k \leq n-1) \\ F(\gamma(\mathbf{s}), \phi(\gamma(\mathbf{s})), z_j(\gamma(\mathbf{s}))) = 0. \end{array} \right. \quad (\text{D.48})$$

Estas n -equações em n -variáveis, z_1, \dots, z_n , sobre γ completam as n -equações requeridas anteriormente, e conseqüentemente a resolução de um *Problema de valor inicial de uma EDP's de primeira ordem* é substituído por um *Problema de valor inicial para um sistema de EDO's de primeira ordem*.

Ainda, sobre o Sistema (D.48), as z_j 's determinadas por este são dependentes da existência e da unicidade, ou não, da solução deste sistema de equações. *A priori*, não se conhece a forma do Sistema (D.48), e conseqüentemente, resultados definitivos sobre existência e unicidade deverão ser verificados problema a problema, sendo válidas as seguintes possibilidades:

- a. z_j é solução única do Sistema (D.48), logo existe uma única condição inicial associado ao problema (e esta é a situação admitida no restante do texto desta seção);
- b. existem múltiplas z_j , determinando múltiplas possibilidades para a condição inicial. Logo, a solução é única sobre cada uma destas condições iniciais, mas há mais que uma escolha possível para a descrição da condição inicial;
- c. não existe z_j que satisfazem o Sistema (D.48), o que expõem o fato de o *Problema de Cauchy* ser um problema *mal posto*;

Embora o sistema formado pela Equação (D.44), Equação (D.45), Equação (D.46), Sistema (D.47) e o Sistema (D.48) acima tenha solução única para y ($F \in C^2$ - ver Doering e Lopes (2005), pois satisfaz as hipóteses do Teorema (10.8) - pg 383), a existência da solução u não está garantida; Pois, ainda, não se validou a expressão $y = u(\mathbf{x})$. O primeiro passo para esta validação se dará ao verificar a existência de uma *transformação de coordenadas* $(\mathbf{s}, t) \mapsto \mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{s}, t)$ invertível, tal que $\mathbf{s} = \mathbf{s}(\mathbf{x})$ e $t = t(\mathbf{x}) \in C^1$.

De fato, tal *mudança de coordenadas* (nos moldes descrito acima) será garantida mediante a observação de algumas condições relacionadas à condição inicial associado ao problema, mais especificamente se γ for uma *Hipersuperfície Não-Characterística* (ver Seção 2.2.4). Logo, para $z_1, \dots, z_n \in C^1$ satisfazendo o Sistema (D.48) sobre γ devem satisfazer

$$\left\| \begin{array}{cccc} \frac{\partial \gamma_1}{\partial s_1} & \cdots & \frac{\partial \gamma_1}{\partial s_{n-1}} & \frac{\partial F}{\partial z_1}(\gamma(\mathbf{s}), \phi(\gamma(\mathbf{s})), \mathbf{z}(\gamma(\mathbf{s}))) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial \gamma_n}{\partial s_1} & \cdots & \frac{\partial \gamma_n}{\partial s_{n-1}} & \frac{\partial F}{\partial z_n}(\gamma(\mathbf{s}), \phi(\gamma(\mathbf{s})), \mathbf{z}(\gamma(\mathbf{s}))) \end{array} \right\| \neq 0, \quad (\text{D.49})$$

e conseqüentemente vale

$$\left\| \begin{array}{cccc} \frac{\partial x_1}{\partial s_1} & \cdots & \frac{\partial x_1}{\partial s_{n-1}} & \frac{\partial x_1}{\partial t} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial x_n}{\partial s_1} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial s_{n-1}} & \frac{\partial x_n}{\partial t} \end{array} \right\| \neq 0, \quad (\text{D.50})$$

logo, pelo *Teorema das Funções Implícitas* existem as funções $\mathbf{s} = \mathbf{s}(\mathbf{x})$ e $t = t(\mathbf{x}) \in C^1$, tal que vale localmente $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{s}, t)$, isto é, em uma vizinhança do ponto $P_0 \in \gamma$.

Logo, o sistema:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx_j}{dt} = \frac{\partial F}{\partial z_j} \\ \frac{dy}{dt} = \sum \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{dx_j}{dt} = \sum z_j \frac{\partial F}{\partial z_j} \\ \frac{dz_j}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial x_j} - z_j \frac{\partial F}{\partial y} \\ \mathbf{x}(\mathbf{s}, 0) = \gamma(\mathbf{s}), \quad y(\mathbf{s}, 0) = \phi(\gamma(\mathbf{s})) \\ \frac{\partial y}{\partial s_j} = \sum z_k \frac{\partial \gamma_k}{\partial s_j} \Leftrightarrow \partial_{s_k} \phi(g(\mathbf{s})) = \partial_{s_k} \gamma(\mathbf{s}) z_j(\mathbf{s}, 0) \\ F(\gamma(\mathbf{s}), \phi(\gamma(\mathbf{s})), z_j(\gamma(\mathbf{s}))) = 0 \end{array} \right., \quad (\text{D.51})$$

permite obter x_j, y and z_j , como funções de \mathbf{s} e t .

A Condição (D.49) garante que o mapeamento $(\mathbf{s}, t) \mapsto \mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{s}, t)$ possa ser invertido, logo \mathbf{s} e $t \in C^1$ são funções de \mathbf{x} em torno de uma vizinhança de $P_0 \in \gamma$ (O Teorema (10.8) - pg 383 (Doering e Lopes (2005)) garante a unicidade da solução de um Sistema de EDO's nesta vizinhança de P_0).

Até o momento apenas $y = y(\mathbf{s}(\mathbf{x}), t(\mathbf{x}))$ foi obtida. Para garantir a existência e unicidade da solução u da Equação (D.42), deve-se mostrar que, agora garantida, a definição $y(\mathbf{s}(\mathbf{x}), t(\mathbf{x})) = u(\mathbf{x})$ satisfaz a Equação (D.43) e que $z_j = \partial_j u(\mathbf{x})$.

De fato, pode-se escrever $y = u(\mathbf{x}) = u(\mathbf{s}, t)$, logo u

i. satisfaz a condição inicial, $u(\gamma(\mathbf{s})) = y(\mathbf{s}(\mathbf{x}), 0) = \phi(\gamma(\mathbf{s}))$ (pela Equação (D.47));

ii. em volta de Γ , para algum \mathbf{s}_0 , tem-se

$$\begin{aligned}\partial_t F(\mathbf{x}(\mathbf{s}, t), u(\mathbf{s}, t), z_j(\mathbf{s}, t)) &= F_{\mathbf{x}} \mathbf{x}_t + F_u u_t + F_{z_j} \partial_t z_j \\ &= \underbrace{\quad}_{\text{por (D.51)}} = 0,\end{aligned}$$

com condição inicial dada pela Equação (D.48):

$$F(\mathbf{x}(\mathbf{s}, 0), u(\mathbf{s}, 0), z_j(\mathbf{s}, 0)) = 0 \therefore F(\mathbf{x}(\mathbf{s}, t), u(\mathbf{s}, t), z_j(\mathbf{s}, t)) = 0;$$

Logo, se a curva característica tem um ponto em comum a superfície integral, toda a curva estará contida nesta;

iii. e dadas $u_{\mathbf{x}}$, pela *Regra da Cadeia* obtém-se:

$$\begin{cases} u_{s_k} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial s_k}, \quad k = 1, \dots, (n-1) \\ u_t = \sum_{j=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial t} \end{cases}, \quad (\text{D.52})$$

A matriz associada a este sistema é a própria *Matriz Jacobiana*,

$\begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial s_1} & \dots & \frac{\partial x_1}{\partial s_{n-1}} & \frac{\partial x_1}{\partial t} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial x_n}{\partial s_1} & \dots & \frac{\partial x_n}{\partial s_{n-1}} & \frac{\partial x_n}{\partial t} \end{pmatrix}$, que devido à *Condição Não-Characterística* possui determinante diferente de zero. Assim, o sistema acima tem solução única.

Agora observe que, da segunda equação dos Sistema (D.51):

$$u_t = \sum \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{dx_j}{dt} = \sum z_j \frac{\partial F}{\partial z_j} \quad (\text{D.53})$$

Sobre a primeira equação do Sistema (D.52) deriva-se em t

$$\begin{aligned}\partial_t \left[u_{s_k} - \sum z_j \partial_{s_k} x_j \right] &= \partial_t \left[u_{s_k} - \sum z_j \partial_{s_k} x_j \right] - \underbrace{\frac{u_t - \sum z_j F_{z_j}}{0}} \\ &= \partial_t \left[u_{s_k} - \sum z_j \partial_{s_k} x_j \right] - \partial_{s_k} \left[u_t - \sum z_j \partial_t x_j \right] \\ &= u_{t s_k} - \sum \partial_t z_j \partial_{s_k} x_j - \sum z_j \partial_{t s_k} x_j \\ &\quad - u_{s_k t} + \sum \partial_{s_k} z_j \partial_t x_j + \sum z_j \partial_{s_k t} x_j \\ &= \sum \partial_t z_j \partial_{s_k} x_j + \sum \partial_{s_k} z_j \partial_t x_j \\ &= - \underbrace{\sum \left(-\partial_{x_j} F - z_j F_u \right) \partial_{s_k} x_j}_{3^{\text{a}} \text{ equação de (D.51)}} + \underbrace{\sum \partial_{s_k} z_j \partial_{z_j} F}_{1^{\text{a}} \text{ equação de (D.51)}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum z_j F_u \partial_{s_k} x_j + \underbrace{\sum \partial_{x_j} F \partial_{s_k} x_j}_{F_{s_k} = \sum F_{x_j} \partial_{s_k} x_j + F_u u_{s_k} + \sum F_{z_j} \partial_{s_k} z_j} + \sum \partial_{s_k} z_j \partial_{z_j} F \\
&= \sum z_j F_u \partial_{s_k} x_j - F_u u_{s_k} - \sum F_{z_j} \partial_{s_k} z_j + \sum \partial_{s_k} z_j \partial_{z_j} F \\
&= \left(\sum z_j \partial_{s_k} x_j - u_{s_k} \right) F_u.
\end{aligned} \tag{D.54}$$

Nomeando $H(\mathbf{s}, t) = \{h_{s_k}(\mathbf{s}, t) = \{u_{s_k} - \sum z_j \partial_{s_k} x_j, \text{ logo a Equação (D.54) permite escrever o sistema de } (n - 1) \text{ EDO's sintetizados por}$

$$\partial_t H(\mathbf{s}, t) = -H(\mathbf{s}, t) F_u \tag{D.55}$$

cuja solução é $H(\mathbf{s}, t) = H(\mathbf{s}, 0) \exp\left(-\int_0^t F_u dt'\right)$. Notar que a condição inicial associada é dada por $H(\mathbf{s}, 0) = \phi'(\gamma(\mathbf{s})) - \sum \gamma'(\mathbf{s}) z_j(\mathbf{s}, 0) = 0$, logo $H(\mathbf{s}, t) = \mathbf{0}$ e é única. Com isso, obtém-se

$$\begin{cases} u_{s_k} = \sum z_j \partial_{s_k} x_j, & k = 1, \dots, (n - 1) \\ u_t = \sum z_j \partial_t x_j \end{cases}. \tag{D.56}$$

Como z_j é solução deste sistema (pelos mesmos motivos de Equação (D.52)), segue que $z_j = u_{x_j}$ para $j = 1, \dots, n$.

Assim, $u(\mathbf{x}) = y(\mathbf{s}(\mathbf{x}), t(\mathbf{x}))$ satisfaz, simultaneamente, à Equação (D.42), à Equação (D.43), $u = \phi$ em γ , Itens *i*, *ii*, e *iii* e os Item *a* acima; logo é válida a *existência* e a *unicidade* de u definida em um aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

A discussão precedente é, de fato, uma demonstração “comentada” do seguinte teorema:

Teorema 5 (Existência Local e Unicidade de Solução para uma EDP Geral) *Suponha $F : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 . Seja γ uma hipersuperfície de Ω e $\phi : \gamma \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 . Se γ, ϕ satisfizerem a Condição Não-Characterística (Condição (D.49))*

$$\left\| \begin{pmatrix} \frac{\partial \gamma_1}{\partial s_1} & \cdots & \frac{\partial \gamma_1}{\partial s_{n-1}} & \frac{\partial F}{\partial z_1}(\gamma(\mathbf{s}), \phi(\gamma(\mathbf{s})), \mathbf{z}(\gamma(\mathbf{s}))) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial \gamma_n}{\partial s_1} & \cdots & \frac{\partial \gamma_n}{\partial s_{n-1}} & \frac{\partial F}{\partial z_n}(\gamma(\mathbf{s}), \phi(\gamma(\mathbf{s})), \mathbf{z}(\gamma(\mathbf{s}))) \end{pmatrix} \right\| \neq 0,$$

e o sistema formado pelo Sistema (D.47) e pelo Sistema (D.48), admitir solução única (Condição de Compatibilidade), então para qualquer vizinhança suficientemente pequena Ω' de γ

em \mathbb{R}^n existe uma única solução u de classe C^1 associada ao Problema de Cauchy

$$\begin{cases} F(\mathbf{x}, (\partial^\alpha u)_{|\alpha| \leq 1}) = 0 \\ u = \phi \quad \text{em } \gamma \end{cases}. \quad (\text{D.57})$$

D.2.3 Existência Local e Unicidade de Solução para uma EDP de Ordem 1: Caso Quasilinear

Uma vez estabelecido o Teorema 5 para a existência e unicidade de solução para uma EDP geral de primeira ordem, as demais situações são simplificadas em decorrência da forma do problema. Estas simplificações são observadas tanto nas condições associadas e no cálculo formal requeridos, como nos entes geométricos utilizados (ver Seção D.2.1).

Seja o caso *quasilinear*, dado pela Equação (2.106). Embora a idéia do procedimento permaneça a mesma: dada a normal associada ao gráfico de $u(\mathbf{x})$, $(\partial_1 u, \dots, \partial_n u, -1)$, e da (Equação (2.106)) tem-se o *campo vetorial* $\mathbf{A}(\mathbf{x}) = (a_1(\mathbf{x}, y), \dots, a_n(\mathbf{x}, y), b(\mathbf{x}, y))$ é tangente ao gráfico $y = u(\mathbf{x})$ em qualquer ponto; logo as *curvas integrais* do *campo vetorial* \mathbf{A} em \mathbb{R}^{n+1} , as quais são dadas pela resolução das E.D.O.(s)

$$\frac{dx_j}{dt} = a_j(\mathbf{x}, y), \quad \frac{dy}{dt} = b(\mathbf{x}, y),$$

com $\mathbf{x}(t)$ as curvas parametrizadas. Ainda, se $u = \phi$, sobre uma hipersuperfície inicial γ , representada parametricamente pelo mapeamento: $\gamma : \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ e tomadas as coordenadas s_1, \dots, s_{n-1} em \mathbb{R}^{n-1} satisfazendo a *Condição Não-Characterística*:

$$(a_1(\gamma(\mathbf{s}), \phi(\gamma(\mathbf{s}))), \dots, a_n(\gamma(\mathbf{s}), \phi(\gamma(\mathbf{s})))) \cdot N(\gamma(\mathbf{s})) \neq 0,$$

garantindo a existência de uma bijeção local entre (\mathbf{s}, t) e (\mathbf{x}) , mais precisamente, vale o teorema:

Teorema 6 (Existência Local e Unicidade de Solução para uma EDP Quasilinear)

Seja γ uma hipersuperfície de classe C^1 em $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ e suponha a_j, b funções $C^1(\Omega)$ reais e ϕ de classe C^1 em γ . Suponha também que o vetor $(a_1(\mathbf{x}, \phi(\mathbf{x})), \dots, a_n(\mathbf{x}, \phi(\mathbf{x})))$ é não-tangente à γ , $\forall \mathbf{x} \in \gamma$. Então para qualquer vizinhança suficientemente pequena Ω' de γ em \mathbb{R}^n há uma única solução $u \in C^1$ de $\sum_{|\alpha|=1} a_\alpha(\mathbf{x}, u) \partial^\alpha u = b(\mathbf{x}, u)$ sobre Ω que satisfaz $u = \phi$ sobre γ .

Demonstração. (Conforme Folland (1995).)

Unicidade - Qualquer hipersuperfície γ pode ser coberta por conjuntos abertos, sobre os quais a hipersuperfície admita uma representação paramétrica $\mathbf{x} = \gamma(\mathbf{s})$, onde para cada aberto Ω_j , suficientemente pequeno, as curvas características são todas distintas (isto

é, resolvido o problema sobre cada um destes conjuntos, pela unicidade, as soluções locais concordarão sobre os seus domínios comuns e portanto juntas darão a solução para toda γ), e o gráfico de u deve ser a união das *curvas integrais* de \mathbf{A} em Ω passando por $\Gamma = (\gamma, \phi)$.

Existência - Embora, a discussão sobre unicidade fora colocada a parte, ela é decorrente da existência e unicidade do P.V.I. para o sistema de EDO's em t , com $\mathbf{s} \in \mathbb{R}^{n-1}$:

$$\begin{cases} \frac{\partial x_j}{\partial t}(\mathbf{s}, t) = a_j(\mathbf{x}(\mathbf{s}, t), y(\mathbf{s}, t)) & , \quad x_j(\mathbf{s}, 0) = \gamma_j(\mathbf{s}) \\ \frac{\partial y}{\partial t}(\mathbf{s}, t) = b(\mathbf{x}(\mathbf{s}, t), y(\mathbf{s}, t)) & , \quad y(\mathbf{s}, 0) = \phi(\gamma(\mathbf{s})) \end{cases}, \quad (\text{D.58})$$

com única solução (\mathbf{x}, y) definida para t 's pequenos, e (\mathbf{x}, y) sendo funções de \mathbf{s} e t , de classe C^1 , e de que $u(\mathbf{x}) = y(\mathbf{s}(\mathbf{x}), t(\mathbf{x}))$ em Ω , como será verificado.

Primeiramente, observa-se que da *Condição Não-Characterística*, (Equação (2.118), e conseqüentemente garantida a aplicabilidade *Teorema da Função Implícita*), garante-se que a bijeção $(\mathbf{s}, t) \rightarrow \mathbf{x}(\mathbf{s}, t)$, é invertível sobre uma vizinhança Ω de γ produzindo \mathbf{s} e t como funções C^1 de \mathbf{x} sobre Ω tais que $t(\mathbf{x}) = 0$ e $\gamma(\mathbf{s}(\mathbf{x})) = \mathbf{x}$ quando $\mathbf{x} \in \gamma$; e claramente $u = \phi$ sobre γ , além do mais, u satisfaz à Equação (2.106), como segue:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n a_j \partial_j u &= \sum_{j=1}^n a_j \left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{\partial u}{\partial s_k} \frac{\partial s_k}{\partial x_j} + \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial x_j} \right) &= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\partial u}{\partial s_k} \sum_{j=1}^n a_j \frac{\partial s_k}{\partial x_j} + \frac{\partial u}{\partial t} \sum_{j=1}^n a_j \frac{\partial t}{\partial x_j} \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\partial u}{\partial s_k} \sum_{j=1}^n \frac{\partial x_j}{\partial t} \frac{\partial s_k}{\partial x_j} + \frac{\partial u}{\partial t} \sum_{j=1}^n \frac{\partial x_j}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial x_j} &= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\partial u}{\partial s_k} \underbrace{\frac{\partial t}{\partial s_k}}_{=0} + \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial t} \\ &= 0 + \frac{\partial u}{\partial t} = b, \end{aligned}$$

desde que s_k e t sejam funcionalmente independentes. Isto completa a prova.

D.2.4 Existência Local e Unicidade de Solução para uma EDP de Ordem 1: Caso Linear

No caso linear, a terceira equação do Sistema (D.58) é desacoplada das duas primeiras, fato que gerará *curvas características* projetadas no domínio Ω e a validade da bijeção $(\mathbf{s}, t) \rightarrow \mathbf{x}(\mathbf{s}, t)$ não é influenciada por u , e será dada pela *Condição Não-Characterística*: $(a_1(\gamma(\mathbf{s})), \dots, a_n(\gamma(\mathbf{s}))) \cdot N(\gamma(\mathbf{s})) \neq 0$, estabelecendo o seguinte resultado:

Teorema 7 (Existência Local e Unicidade de Solução para uma EDP Linear) *Suponha γ uma hipersuperfície de classe C^1 em Ω , a qual é não-característica: $(a_1(\mathbf{x}), \dots, a_n(\mathbf{x}))$ é não-tangente à γ , $\forall \mathbf{x} \in \gamma$ - ver Condição (2.119), e que a_j, b, f são funções reais de classe $C^1(\Omega)$ e ϕ de classe $C^1(\gamma)$. Então para qualquer vizinhança suficientemente pequena de Ω'*

de γ em \mathbb{R}^n há uma única solução $u \in C^1(\Omega)$ de $\sum_j a_j(\mathbf{x})\partial_j u + b(\mathbf{x})u = f$ em Ω que satisfaz $u = \phi$ sobre γ .

Demonstração. As curvas características serão dadas por

$$\begin{cases} \frac{\partial x_j}{\partial t}(\mathbf{s}, t) = a_j(\mathbf{x}(\mathbf{s}, t)) \\ x_j(\mathbf{s}, 0) = \gamma_j(\mathbf{s}) \end{cases}, \quad (\text{D.59})$$

como é válida a *condição Não-Characterística* está garantida a bijeção diferenciável

$(\mathbf{s}, t) \rightarrow \mathbf{x}(\mathbf{s}, t)$, pois a solução única do sistema de EDO's acima é garantida se o determinante Jacobiano $\frac{\partial(\mathbf{x})}{\partial(\mathbf{s}, t)} \neq 0$ do difeomorfismo em questão; e ainda, ao longo destas curvas a solução u da Equação (2.105) deve satisfazer

$$\frac{du}{dt} = \sum \partial_j u \frac{dx_j}{dt} = \sum a_j \partial_j u = f - bu. \quad (\text{D.60})$$

A solução da Equação (2.105) equivale a solução da EDO dada pela Equação (D.60), com valor inicial dado por $u = \phi$ sobre a hipersuperfície γ , e a existência e unicidade é garantida pelo *Teorema de Picard* (Boyce W. E. (1999)), já que a_j, b, f e ϕ são funções reais de classe C^1 e é válida a Condição (2.119), garantindo a bijeção acima em γ .

Referências Bibliográficas

- ABENTROTH, R. A. *Parametrização do Decaimento da turbulência na Camada Limite Convectiva*. Dissertação (Mestrado em Engenharia) — Universidade Federal Do Rio Grande do Sul - UFRGS, Porto Alegre, RS, Brazil, 2007.
- ALONSO, I. P. *Primer Curso de Ecuaciones en Derivadas Parciales*. Ed. online. Almeria, ES: <http://www.uam.es/personal_pdi/ciencias/ireneo/cursos.htm>, 2005. 334 p.
- BATCHELOR, G. K. Diffusion in a field of homogeneous turbulence, eulerian analysis. *Australian Journal of Scientist Research*, v. 2, p. 437–450, 1949.
- BATCHELOR, G. K. The theory of homogeneous turbulence. *The Theory of Homogeneous Turbulence*, Cambridge: Cambridge University Press, 1953, 1953.
- BIEZUNER, R. J. *Equações Diferenciais Parciais I/II*. Ed. online. Brasil: Disponível em: <<http://www.mat.ufmg.br/rodney/>>, 2007.
- BOYCE W. E., D. P. R. C. *Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Contorno*. Brasil: LTC - Livros Técnicos e Científicos Editora S.A., 1999.
- BRAGA, C. R. *Notas de Física-Matemática. Equações Diferenciais, Funções de Green e Distribuições*. 1 ed. ed. São Paulo, BR: Livraria da Física, 2006. 195 p.
- BULIGON, L. et al. Algebraic Formulation for the Dispersion Parameters in an Unstable Planetary Boundary Layer: Application in the Air Pollution Gaussian Model. *The Open Atmospheric Science Journal*, Bentham, v. 2, n. 1, p. 153–159, 2008.
- BURDEN, R. L.; FAIRES, J. D. *Análise Numérica*. São Paulo: Thomson, 2003.
- CARDARO, P. D.; KAWANO, A. *O Delta de Dirac. Uma Introdução à Teoria das Distribuições para a Engenharia*. 1. ed. São Paulo, BR: Livraria da Física, 2002. 78 p.
- CAUGHEY, S. J. Observed characteristics of the atmospheric boundary layer. In: Nieuwstadt F. T. M., and van Dop, H. (Eds.). *Atmospheric Turbulence and Air Pollution Modelling.*, p. 107–158, 1982.
- CAUGHEY, S. J.; PALMER, S. G. Some aspects of turbulence structure through the depth of the convective boundary layer. *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society*, v. 105, p. 811–827, 1979.

CHAMPAGNE, F. H. et al. Flux measurements, flux estimation techniques, and fine scale turbulence measurements in the instable surface layer over land. *Journal Atmospheric Society*, v. 34, p. 515–520, 1977.

DEGRAZIA, G. et al. Turbulence dissipation rate derivation for meandering occurrences in a stable planetary boundary layer. *Atmos. Chem. Phys Discussion*, v. 7, p. 15251–15276, 2007.

DEGRAZIA, G. et al. Turbulence dissipation rate derivation for meandering occurrences in a stable planetary boundary layer. *Atmos. Chem. Phys*, v. 8, p. 1713–1721, 2008.

DEGRAZIA, G. A.; ANFONSSI, D. Estimation of the Kolmogorov constant C_0 from classical statistical diffusion theory. *Atmospheric Environment*, v. 22, 1998.

DEGRAZIA, G. A. et al. Turbulence parameterisation for PBL dispersion models in all stability conditions. *Atmospheric Environment*, v. 34, p. 3575–3583, 2000.

DEGRAZIA, G. A.; GOULART, A. G. O. Aplicações da dinâmica de fluidos em escoamentos na camada limite planetária. *Ciência e Natura*, Ed. Especial, p. 10–57, 2005.

DOERING, C. I.; LOPES, A. O. *Equações Diferenciais Ordinárias*. 1. ed. Rio de Janeiro, BR: IMPA, 2005. 421 p.

DRIEDONKS, A. G. M.; TENNEKES, T. Entrainment effects in the well-mixed atmospheric boundary layer. *Boundary-Layer Meteorology*, v. 30, p. 75–105, 1984.

EVANS, L. C. *Partial Differential Equations - Graduate Studies in Mathematics - Volume 19*. 1. ed. USA: American Mathematical Society, 1997. 662 p.

FOLLAND, G. B. *Introduction to Partial Differential Equations*. 2^a. ed. New Jersey U.S.A.: Princeton Academic Press, 1995.

GOULART, A. et al. A theoretical model for the study of convective turbulence decay and comparison with large-eddy simulation data. *Boundary Layer-Meteorology*, v. 107, p. 143–155, 2003.

GOULART, A. G. et al. A new model for the cbl growth based on the turbulent kinetic energy equation. *Environmental Fluid Mechanics*, v. 007, p. 409–419, 2007.

GOULART, A. G. et al. An analytical solution for the nonlinear spectrum equation by the decomposition method. *Journal of Physics A*, v. 41, p. 8 pp, 2008.

GOULART, A. G. O. *Desenvolvimento de um Modelo Espectral para o Estudo do Decaimento da Turbulência na Camada Limite Convectiva*. Tese (Doutorado em Física) — Universidade Federal De Santa Maria - UFSM, Santa Maria, RS, Brazil, 2001.

HINZE, J. O. *Turbulence*. [S.l.]: Mc Graw Hill, 1975. 790pg p.

HØJSTRUP, J. Velocity spectra in the unstable surface planetary boundary layer. *Journal of Atmospheric Science*, v. 39, p. 2239–2248, 1982.

IÓRIO, R. J.; IÓRIO, V. M. *Equações Diferenciais Parciais: Uma Introdução*. Rio de Janeiro, BR: IMPA - Projeto Euclides, 1998. 372 p.

IÓRIO, V. M. *EDP. Um Curso de Graduação*. 2ª. ed. Rio de Janeiro, BR: IMPA, 2001. 300 p.

JOHN, F. *Partial Differential Equations*. 2ª. ed. New York, U.S.A.: Sprienger-Verlag New York Inc., 1982. 259 p.

KAIMAL, J. C. et al. Turbulence structure in the convective boundary layer. *Journal of Atmospheric Science*, v. 33, p. 2152–2226, 1976.

KIEFER, B. *Equações Diferenciais a Derivadas Parciais de Primeira Ordem*. Porto Alegre: Multilith, 1960. 100 p.

KOLMOGOROV, A. N. The local structure of turbulence in incompressible viscous fluid for large reynolds number. *Doklady Akademik Nauk SSSR*, (reprinted in Proceedings of the Royal Society London A 434, 9-13, 1991), v. 30, p. 9–13, 1941.

KRISTENSEN, L. et al. The spectral velocity tensor for homogeneous boundary-layer turbulence. *Boundary-Layer Meteorology*, Springer, v. 47, n. 1, p. 149–193, 1989.

LEMES, M. A. M.; MOURA, A. D. *Fundamentos da dinâmica aplicados à meteorologia e Oceanografia*. Ribeirão Preto, SP: Holos Editora Ltda., 2002. 296 p.

LEVANDOSKY, J. *Math 220A. Partial Differential Equations of Applied Mathematics. Fall 2002*. Ed. online. Stanford, USA: Disponível em:
<<http://www.stanford.edu/class/math220a/handouts/firstorder.pdf>>, 2002.

LIMA, E. L. *Curso de análise volume 2*. 6ª. ed. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 2000. 557 p.

LUMLEY, J.; PANOFSKY, H. *The structure of atmospheric turbulence*. [S.l.]: New York Interscience-Wiley, 1964.

- MACHADO, K. D. *Equações Diferenciais Aplicadas à Física*. Ponta Grossa: Editora UEPG, 2004. 600 p.
- MEDEIROS, L. E. *Decaimento da Turbulência na Camada Superficial*. Dissertação (Mestrado em Física) — Universidade Federal De Santa Maria - UFSM, Santa Maria, RS, Brazil, 2005.
- MOENG, C. A large-eddy-simulation model for the study of planetary boundary-layer turbulence. *Journal of the Atmospheric Sciences*, v. 41, p. 2052–2062, 1984.
- MOENG, C.; SULLIVAN, P. Evaluation of turbulent transport and dissipation closures in second-order modeling. *Journal of the atmospheric sciences*, American Meteorological Society, v. 46, n. 16, p. 2311–2330, 1989.
- MOENG, C.; SULLIVAN, P. A comparison of shear-and buoyancy-driven planetary boundary layer flows. *Journal of the atmospheric sciences*, American Meteorological Society, v. 51, n. 7, p. 999–1022, 1994.
- NANDAKUMARAN, A. K.; PRASAD, P. *First Order partial Differential Equations*. Ed. on-line. Índia: <<http://www.math.iitb.ac.in/cpde05/akn-pp-first%20order%20PDE.pdf>>, 1999. 19 p.
- NIEUWSTADT, F.; BROST, R. The decay of convective turbulence. *Journal of the Atmospheric Sciences*, v. 43, p. 532–546, 1986.
- PANOFSKY, H.; DUTTON, J. *Atmospheric turbulence*. New York: John Wiley & Sons, 1984.
- PAO, Y. Structure of turbulent velocity and scalar fields at large wavenumbers. *Physics of Fluids*, v. 8, p. 1063–1075, 1965.
- SORBJAN, Z. *Structure of the atmospheric boundary layer*. New Jersey.: Prentice Hall, 1989. 317 p.
- SORBJAN, Z. Decay of convective turbulence revisited. *Boundary-Layer Meteorology*, v. 82, p. 501–515, 1997.
- STULL, R. B. *An Introduction to Boundary Layer Meteorology*. New Jersey: Kluwer Academic Publishers, 1988. 666 p.
- SWOKOWSKI, E. W. *Cálculo com Geometria Analítica. Volume I*. 2^a. ed. São Paulo. BR: Makron Books, 1994. 789 p.

SZINVELSKI, C. et al. Semi-analytical solution of the asymptotic Langevin Equation by the Picard Iterative Method. *Environmental Modelling and Software*, Elsevier, v. 21, n. 3, p. 406–410, 2006.

TENNEKES, H.; LUMLEY, J. K. *A First Course in Turbulence*. Massachusetts: The MIT Press, 1972. 301 p.

WILSON, K. A three-dimensional correlation/spectral model for turbulent velocities in a convective boundary layer. *Boundary-Layer Meteorology*, v. 85, p. 35–52, 1997.

YEH, T. T.; ATTA, C. H. V. Spectral transfer of scalar and velocity fields in heated-grid turbulence. *Journal of Fluid Mechanics*, v. 58, p. 233–261, 1973.