

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA MARIA  
CENTRO DE CIÊNCIAS NATURAIS E EXATAS  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA E  
ENSINO DE FÍSICA

Roberta Lied

**CONSTRUÇÕES COM RÉGUA E COMPASSO ENVOLVENDO  
LUGARES GEOMÉTRICOS: UMA PROPOSTA DINÂMICA ALIADA A  
TEORIA DE REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA**

Santa Maria, RS  
2016

**Roberta Lied**

**CONSTRUÇÕES COM RÉGUA E COMPASSO ENVOLVENDO LUGARES  
GEOMÉTRICOS: UMA PROPOSTA DINÂMICA ALIADA A TEORIA DE  
REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA**

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Ensino de Física, Área de Concentração em Educação Matemática, da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM, RS), como requisito parcial para obtenção do grau de **Mestre em Educação Matemática**.

**Orientadora: Prof<sup>ª</sup> Dr<sup>ª</sup> Inês Farias Ferreira**

**Santa Maria, RS, Brasil  
2016**

**Roberta Lied**

**CONSTRUÇÕES COM RÉGUA E COMPASSO ENVOLVENDO LUGARES  
GEOMÉTRICOS: UMA PROPOSTA DINÂMICA ALIADA A TEORIA DE  
REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA**

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Ensino de Física, Área de Concentração em Educação Matemática, da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM, RS), como requisito parcial para obtenção do grau de **Mestre em Educação Matemática**.

**Aprovada em 24, agosto, 2016:**

**Prof<sup>ª</sup> Dr<sup>ª</sup> Inês Farias Ferreira (UFSM)**  
(Orientadora)

**Prof<sup>ª</sup> Dr<sup>ª</sup> Leandra Anversa Fioreze (UFRGS) – Videoconferência**

**Prof<sup>ª</sup> Dr<sup>ª</sup> Rita de Cássia Pistóia Mariani (UFSM)**

**Prof<sup>ª</sup> Dr<sup>ª</sup> Carmen Vieira Mathias (UFSM)**

Santa Maria, RS  
2016

## **AGRADECIMENTOS**

Agradeço a Deus pela vida, pela saúde e por ter me concedido a oportunidade de realizar o Curso.

À minha família pelo apoio e incentivo.

À minha orientadora, pela dedicação e contribuição com seus conhecimentos.

Aos professores do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática- UFSM.

Aos professores da banca examinadora.

Muito obrigada por tudo!

## RESUMO

### CONSTRUÇÕES COM RÉGUA E COMPASSO ENVOLVENDO LUGARES GEOMÉTRICOS: UMA PROPOSTA DINÂMICA ALIADA A TEORIA DE REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA

AUTOR: Roberta Lied

ORIENTADORA: Inês Farias Ferreira

O foco desta dissertação está no estudo de lugares geométricos, e possui como objetivo de pesquisa: “Investigar a mobilização de registros de representação semiótica por meio de atividades didáticas, envolvendo lugares geométricos, em dois ambientes de aprendizagem: quando se faz uso de papel, lápis, régua e compasso e do *software* GeoGebra”. Assim, nesta perspectiva de pesquisa, foi elaborada e aplicada uma sequência de atividades junto a alunos do curso de graduação em matemática da Universidade Federal de Santa Maria. A fundamentação teórica baseou-se na teoria de registros de representação semiótica de Raymond Duval. Cabe ressaltar que, esta teoria de aprendizagem possui um referencial vasto quanto ao processo de visualização e, conseqüentemente, apresenta relevância no processo de ensino e aprendizagem de geometria. Por ser uma pesquisa de abordagem qualitativa, a análise dos resultados deu-se a partir das percepções e procedimentos elaborados pelos alunos no decorrer do desenvolvimento da sequência de atividades. Nesse sentido, foram analisados quais registros de representação semiótica foram utilizados pelos alunos nos dois ambientes de ensino propostos. A partir desta análise, verificou-se que foram contempladas as diferentes apreensões e modos de ver uma figura geométrica, distinguidas por Duval. Sendo que, o uso do *software* GeoGebra favoreceu o aspecto visual dos objetos matemáticos, com ênfase no registro figural.

**Palavras-chave:** Lugares Geométricos. Registros de Representação Semiótica. GeoGebra.

## ABSTRACT

### **RULER-AND-COMPASS CONSTRUCTIONS INVOLVING GEOMETRIC PLACES: A DYNAMIC PROPOSAL ALLIED WITH REGISTERS OF SEMIOTICS REPRESENTATION THEORY**

AUTHOR: Roberta Lied  
ADVISOR: Inês Farias Ferreira

The focus of this thesis is on the study of geometric places, and it has as objective research: "to investigate the mobilization of registers of semiotic representation through educational activities involving geometric places in two learning environments: when using paper, pencil, ruler and compass and when using GeoGebra software." Therefore, under the light of this research perspective, a series of activities were designed and implemented with the undergraduate students in Mathematics at the Federal University of Santa Maria. The theoretical foundation is based on Raymond Duval's Registers of Semiotics Representation Theory. It should be noted that this theory of learning has an extensive reference on the visualization process and, thus, has relevance in the teaching and learning of geometry. As a qualitative research, the analysis of the results occurred from the perceptions and procedures developed by the students during the development of the sequence of activities. In this sense, we analyzed which registers of semiotics representation were used by students in the two proposed learning environments. From this analysis, it was found that the different seizures and ways of seeing a geometrical figure distinguished by Duval were contemplated. In addition to that, the use of GeoGebra software favored the visual aspect of mathematical objects, with emphasis on figural register.

**Keywords:** Geometric places. Register of Semiotics Representation. GeoGebra.

## **LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS**

**BDTD** – Bancos de Dados de Teses e Dissertações

**CAPES** – Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior

**DCG** – Disciplina Complementar de Graduação

**GA** – Geometria Analítica

**GD** – Geometria Dinâmica

**LD** – Livro Didático

**PCN** - Parâmetros Curriculares Nacionais

**PIBID** – Programa de Iniciação à Docência

**PROLICEN** – Programa de Licenciaturas

**RAI** – Registro Algébrico

**RF** – Registro Figural

**RLN** - Registro Língua Natural

**RSb** – Registro Simbólico

**TIC** – Tecnologias de Informação e Comunicação

**TRRS** - Teoria de Registros de Representação Semiótica

**UFMS** – Universidade Federal de Santa Maria

**UNIPLAC** - Universidade do Planalto Catarinense

**UFSC** – Universidade Federal de Santa Catarina

**UFPE** – Universidade Federal de Pernambuco

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Lugar geométrico: circunferência.....	22
Figura 2 - Lugar geométrico: reta mediatriz.....	23
Figura 3 - Lugar geométrico: bissetriz. ....	24
Figura 4 – Resolução da atividade 01 (a) - Aluno A.....	42
Figura 5 - Resolução da atividade 01 (e) - Aluno B.....	43
Figura 6 - Resolução da atividade 02 (d) - Aluno B.....	51
Figura 7 - Resolução da atividade 02 (j) - Aluno B.....	52
Figura 8 - Resolução da atividade 02 (k) - Aluno F. ....	53
Figura 9 - Resolução da atividade 03 (g) - Aluno A. ....	59
Figura 10 - Resolução da atividade 03 (g) - Aluno C.....	59
Figura 11 - Resolução da atividade 04 (a) - Aluno A.....	63
Figura 12 - Resolução da atividade 05 (b) - Aluno A. ....	71
Figura 13 - Resolução da atividade 05 (b) - Aluno D. ....	72
Figura 14 - Resolução da atividade 05 (e) - Aluno D.....	73
Figura 15 - Resolução da atividade 05 (e) - Aluno C.....	73
Figura 16 - Resolução da atividade 05 (e) - Aluno C.....	74
Figura 17 – Resolução da atividade 05 (h) - Aluno F. ....	75
Figura 18 - Resolução da atividade 05 (n) - Aluno E.....	76
Figura 19 - Resolução da atividade 06 (a) - Aluno D.....	81
Figura 20 - Resolução da atividade 06 (a) - Aluno G.....	82
Figura 21 - Resolução da atividade 06 (c) - Aluno D.....	82
Figura 22 - Resolução da atividade 06 (c) - Aluno A.....	83

## LISTA DE QUADROS

Quadro 1 - Trabalhos selecionados no levantamento bibliográfico. ....	16
Quadro 2 – Apreensões e registros contemplados em cada atividade proposta. ....	37
Quadro 3 - Roteiro da atividade 01. ....	39
Quadro 4 - Registros e apreensões mobilizados na atividade 01. ....	41
Quadro 5 - Roteiro da atividade 02. ....	46
Quadro 6 - Registros e apreensões mobilizadas na atividade 02.....	48
Quadro 7 - Roteiro da atividade 03. ....	54
Quadro 8 - Registros e apreensões mobilizadas na atividade 03.....	56
Quadro 9 - Roteiro da atividade 04. ....	61
Quadro 10 - Registros e apreensões mobilizadas na atividade 04.....	62
Quadro 11 - Roteiro da atividade 05. ....	66
Quadro 12 - Registros e apreensões mobilizadas na atividade 05.....	69
Quadro 13- Roteiro da atividade 06. ....	78
Quadro 14 - Registros e apreensões mobilizadas na atividade 06.....	79
Quadro 15 - Links das atividades no GeoGebra.....	91

## SUMÁRIO

<b>INTRODUÇÃO E JUSTIFICATIVA.....</b>	<b>11</b>
<b>1. REVISÃO DA LITERATURA .....</b>	<b>15</b>
1.1. LEVANTAMENTO BIBLIOGRÁFICO .....	15
1.2. REFLEXÕES SOBRE GEOMETRIA E SEU ENSINO.....	20
1.3. CONSIDERAÇÕES ACERCA DE LUGARES GEOMÉTRICOS .....	21
1.4. O USO DE RECURSOS TECNOLÓGICOS NO ENSINO E APRENDIZAGEM DE GEOMETRIA .....	24
1.4.1. CONSIDERAÇÕES ACERCA DOS AMBIENTES DE GEOMETRIA DINÂMICA .....	26
<b>2. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA.....</b>	<b>29</b>
2.1. TEORIA DE REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA.....	29
2.2. A GEOMETRIA ALIADA AOS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA .....	30
2.2.1. O REGISTRO EM LÍNGUA NATURAL E SUAS OPERAÇÕES DISCURSIVAS NO ENSINO DE GEOMETRIA.....	32
2.3. AMBIENTES INFORMATIZADOS E A PRODUÇÃO DE REPRESENTAÇÕES ...	33
<b>3. CAMINHO METODOLÓGICO E EXPERIÊNCIA DIDÁTICA .....</b>	<b>35</b>
3.1. CAMINHO METODOLÓGICO .....	35
3.1.1. DESCRIÇÃO DAS ATIVIDADES .....	36
<b>ATIVIDADE 01.....</b>	<b>39</b>
<b>ATIVIDADE 02.....</b>	<b>46</b>
<b>ATIVIDADE 03.....</b>	<b>54</b>
<b>ATIVIDADE 04.....</b>	<b>61</b>
<b>ATIVIDADE 05.....</b>	<b>66</b>
<b>ATIVIDADE 06.....</b>	<b>78</b>
<b>4. CONSIDERAÇÕES FINAIS.....</b>	<b>85</b>
<b>REFERÊNCIAS .....</b>	<b>88</b>
<b>APÊNDICE .....</b>	<b>91</b>

## INTRODUÇÃO E JUSTIFICATIVA

As ideias que justificam a trajetória desta pesquisa baseiam-se em aspectos relacionados à minha experiência acadêmica. Na graduação, no período de 2010-2013 tive os primeiros contatos com o uso de recursos tecnológicos como ferramenta didática na disciplina de Geometria Plana e Desenho Geométrico, ofertada no 1º semestre do curso. Nesta disciplina houve alguns momentos de incorporação do *software* de Geometria Dinâmica (GD), GeoGebra, com os conteúdos matemáticos que estavam sendo desenvolvidos. Embora tenham sido poucas aulas com a inclusão desse recurso tecnológico, oportunizaram inicialmente uma melhor visualização do que estava sendo abordado, contribuindo para uma melhor compreensão dos conceitos e propriedades envolvidas. Posteriormente, já no 7º semestre do curso, cursei uma disciplina complementar de graduação (DCG), a qual, entre outros objetivos, tinha como proposta explorar alguns *softwares* matemáticos disponíveis na *internet*.

Além disso, no ano de 2011 fui bolsista do Programa de Licenciaturas - PROLICEN, onde foi desenvolvido um projeto que tinha como título: “Concepção, produção e aplicação de um conteúdo educacional digital destinado ao ensino de triângulos e suas propriedades”. Neste trabalho foi desenvolvida uma sequência de atividades a qual foi aplicada junto a alunos do ensino fundamental. Como resultados observou-se que as mesmas trouxeram contribuições satisfatórias no ensino e aprendizagem do assunto através do uso do *software* GeoGebra em atividades com caráter investigativo.

Partindo das leituras e dos resultados obtidos em 2011 foi proposto um outro projeto, em 2012, que tinha como título: “A *Webquest* no ensino de matemática: uma investigação acerca dos triângulos retângulos e suas propriedades”. Neste projeto foi elaborada e aplicada uma *Webquest* com atividades envolvendo o estudo dos triângulos retângulos. Com o desenvolvimento deste trabalho foi possível utilizar recursos diferenciados no ensino de matemática, onde os mesmos propiciaram uma autonomia no desenvolvimento das atividades envolvidas. Além disso, verificou-se o impacto positivo que conteúdos digitais, como o que fora construído, poderiam fornecer dentro do ambiente escolar.

No período de 2012 - 2013 fui bolsista do Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência (PIBID) da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM). Entre outras ações desenvolvidas, atuei em um projeto junto a alunos do 9º ano de uma escola pública estadual do município de Santa Maria/RS. Este projeto tinha como um de seus objetivos desenvolver estratégias inovadoras voltadas ao processo de ensino e aprendizagem de matemática e suas tecnologias. Neste período foram desenvolvidas oficinas que abordaram alguns conteúdos

específicos de Geometria, como por exemplo, áreas de algumas figuras planas, tais como: quadriláteros, pentágonos, hexágonos e outros polígonos. Nestas oficinas utilizou-se como ferramenta de apoio o *software* GeoGebra. As atividades elaboradas tiveram também um caráter investigativo, oportunizando aos alunos constituírem reflexões, conjecturas e descobertas para que, concomitantemente, buscassem construir alguns conhecimentos matemáticos e socializassem com a turma.

Após a formatura, em 2013, senti necessidade de usar alguns recursos computacionais em minha prática docente. No entanto, mesmo tendo alguma experiência com o uso de *softwares* matemáticos, senti falta de mais subsídios para utilizá-los como uma ferramenta mediadora no processo de ensino e aprendizagem, ou seja, integrada nas atividades propostas, pois não desejava usá-los como um recurso que permitisse apenas a reprodução do que poderia ser feito no quadro e giz (lápiz e papel).

Em 2014, com o meu ingresso no mestrado, comecei a desenvolver algumas pesquisas referentes ao ensino de alguns conteúdos geométricos aliados ao uso de recursos tecnológicos. Para isso foi realizado um levantamento bibliográfico onde percebeu-se pouca ênfase em construções geométricas envolvendo o assunto lugares geométricos. Após este levantamento, buscou-se uma fundamentação teórica que pudesse constituir a pesquisa a ser desenvolvida em que envolvesse esse assunto e aliando-o ao uso do *software* GeoGebra. Assim, escolheu-se a Teoria de Registros de Representação Semiótica (TRRS) de Raymond Duval. Este pesquisador afirma que: “ensinar matemática” é antes de tudo possibilitar o desenvolvimento geral das capacidades de raciocínio, de análise e de visualização (DUVAL, 2003, p. 11). Esta afirmação se justifica, pois a matemática depende muito das representações, visto que os seus objetos de estudo não são perceptíveis de maneira direta pelos sentidos humanos. Dessa forma, faz-se necessário as notações simbólicas, códigos, tabelas, gráficos e esquemas que possam representar esses objetos, ou seja, os registros semióticos.

Neste sentido, buscou-se aliar o uso de registros aos ambientes informatizados, na perspectiva indicada por Gravina (2013) quando afirma que:

Os diferentes *softwares* de Geometria Dinâmica podem contribuir muito para a exploração de conteúdos em sala de aula, pois possibilitam a representação de um mesmo objeto, com diferentes registros de representação. (GRAVINA, 2013, p.5).

Diante disso, buscou-se como objetivo de pesquisa, “Investigar a mobilização dos registros de representação semiótica por meio de atividades didáticas, envolvendo lugares geométricos, em dois ambientes de aprendizagem: quando se faz uso de papel, lápis, régua e compasso e do *software* GeoGebra”.

Nesta perspectiva, então foi elaborada uma sequência de atividades que fora aplicada posteriormente junto a alunos de licenciatura e bacharelado do curso de matemática na disciplina de Geometria Espacial, ofertada no 5º semestre de curso, para alunos da licenciatura e, 3º semestre para alunos do bacharelado. Escolheu-se este perfil de alunos pois, estes já possuíam alguma experiência no uso do *software* GeoGebra, bem como, já haviam visto o conteúdo de lugares geométricos na disciplina de Geometria Plana, cursada pela maioria no semestre anterior.

Para isso, o caminho percorrido, passou pelas seguintes etapas:

- Pesquisa a respeito da TRRS, na área de Educação Matemática, identificando pesquisas que têm sido realizadas fazendo-se uso da mesma. Bem como, apropriar-se desta teoria, principalmente no que diz respeito, a visualização em Geometria.

- Realização de um estudo sobre alguns resultados relacionados a lugares geométricos, assim identificando pesquisas neste tema, tanto desenvolvidas no âmbito do ensino da educação básica, como também do ensino superior.

- Investigação a respeito das contribuições/limitações que *softwares* matemáticos, dentro da concepção de GD, podem fornecer quando utilizados para a exploração de alguns lugares geométricos da geometria euclidiana plana.

- Desenvolvimento e aplicação de uma sequência de atividades aliadas a TRRS, que abordasse construções geométricas com régua e compasso, e também com uso do *software* GeoGebra envolvendo o assunto lugares geométricos.

- Análise dos resultados obtidos no que diz respeito a mobilização de registros de representação semiótica na resolução dessa sequência de atividades por alunos do curso de graduação em matemática da UFSM.

Para atender a esta proposta, a dissertação está constituída em quatro capítulos. O primeiro capítulo, descreve o levantamento bibliográfico realizado referente a pesquisas que abordam o tema de investigação, juntamente com uma reflexão a respeito do processo de ensino e aprendizagem de geometria no ambiente escolar. Também apresenta considerações a respeito do uso de recursos tecnológicos em sala de aula, em especial, do *software* GeoGebra.

No segundo capítulo é abordada a TRRS no âmbito do ensino da geometria, trazendo também algumas reflexões sobre o ensino da mesma em ambientes informatizados, aliados a essa teoria de aprendizagem.

No capítulo três, encontra-se o caminho metodológico percorrido, bem como a descrição da sequência de atividades e os resultados obtidos a luz da TRRS.

Por último, o quarto capítulo é destinado às considerações finais da pesquisa, onde são feitas algumas ponderações referentes ao uso, nas atividades, de instrumentos físicos (régua e compasso) e do software GeoGebra tendo como aporte teórico a TRRS.

## 1. REVISÃO DA LITERATURA

Neste capítulo, inicialmente, traz-se um levantamento bibliográfico de pesquisas em âmbito nacional que abordam o ensino de geometria, em especial, lugares geométricos. Segue-se juntamente uma reflexão a respeito do processo de ensino e aprendizagem de geometria no ambiente escolar. Também são descritas pesquisas envolvendo o uso de recursos tecnológicos nas aulas de matemática, mostrando suas potencialidades, benefícios e desafios no processo de ensino e aprendizagem. Por fim, apresentam-se os ambientes de GD, suas características e o *software* GeoGebra, o qual fora utilizado como um dos ambientes didáticos da presente pesquisa.

### 1.1. LEVANTAMENTO BIBLIOGRÁFICO

Para realizar este levantamento bibliográfico, inicialmente, fez-se uma pesquisa em âmbito nacional, nos Bancos de Dados de Teses e Dissertações (BDTD) dos programas de pós-graduação e da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), buscando-se dissertações e teses que apresentassem os seguintes objetos de estudo: registros de representação semiótica, geometria, lugares geométricos, uso de recursos tecnológicos.

O intuito desta pesquisa bibliográfica foi inteirar-se diante da problemática proposta e também conhecer o que tem sido produzido nos últimos anos a este respeito. Para subsidiar este trabalho, foram selecionados 06 (seis) trabalhos, dentre eles, 05 (cinco) dissertações e 01 (uma) tese, que melhor se adequaram ao trabalho que seria desenvolvido. Destes 06 trabalhos selecionados, 02 (dois) tinham como objeto matemático lugares geométricos, onde foram exploradas sequências de atividades, sendo que um deles foi desenvolvido somente utilizando instrumentos físicos (régua e compasso) e, no outro trabalho fora abordado dois ambientes: lápis/papel e o uso *software* de GD, como mostra o quadro 1.

Quadro 1 - Trabalhos selecionados no levantamento bibliográfico.

<b>Instituição/ Ano</b>	<b>Autor (a)</b>	<b>Título</b>	<b>Público alvo</b>	<b>Conteúdo matemático</b>	<b>Ambiente de exploração</b>	<b>Aporte teórico</b>
UFSM/ 2015	Marinela da Silveira Boemo	Registros de representação semiótica mobilizados no estudo de sistemas lineares no 2º ano do ensino médio em um colégio de São Sepé/RS.	Alunos do 2º ano do ensino médio	Sistemas lineares	Livro didático, cadernos dos alunos e o GeoGebra	TRRS
UFSM/ 2015	Paula Gabrieli Santos de Assunção	Perímetro e área: Uma engenharia didática utilizando o GeoGebra sob o olhar das representações semióticas.	Alunos do 7º ano do ensino fundamental	Áreas e perímetros	<i>Software</i> GeoGebra	TRRS
UNIJUÍ/ 2014	Franciele Catelan Cardoso	O ensino da geometria analítica em um curso de licenciatura em matemática: Uma análise da organização do processo educativo sob a ótica dos registros de representação semiótica.	Alunos de licenciatura em matemática	Geometria analítica	<i>Software</i> GeoGebra	TRRS
UNIBAN/ 2011	Anderson Antônio de Araújo	Abordagem de alguns lugares geométricos planos em um ambiente de geometria dinâmica.	Alunos do 9º ano do ensino fundamental	Lugares geométricos	Lápis/papel e Cabri-Géomètre	Teoria das situações didáticas
UFPE/ 2007	Iolanda Andrade Campos Almeida	Identificando rupturas entre significados e significantes nas construções geométricas: um estudo em traçados de lugares geométricos bidimensionais, envolvendo pontos, retas e circunferências.	Alunos de licenciatura em desenho e plástica	Lugares geométricos	Lápis/papel e instrumentos físicos	TRRS
UFSC/ 2006	Ivone Catarina Freitas Buratto	Representação semiótica no ensino da geometria: Uma alternativa metodológica na formação de professores.	Alunos de licenciatura em matemática	Áreas e perímetros	Lápis/papel e instrumentos físicos	TRRS

Fonte: CAPES. Elaborado pela autora.

A seguir é feita uma breve descrição de cada um dos trabalhos selecionados.

Boemo (2015), em sua pesquisa, objetivou investigar o estudo de sistemas lineares por meio da coordenação dos registros de representação semiótica no 2º ano do ensino médio em um Colégio de São Sepé/RS, durante o ano letivo de 2014. Para tanto, a pesquisadora analisou o livro didático (LD) adotado pela escola, os registros dos cadernos de matemática dos alunos e os protocolos de três sequências de atividades desenvolvidas junto aos 126 (cento e vinte e seis) alunos que constituíam as turmas deste ano letivo.

Quanto ao sistema representacional de maior destaque nos LD, entre todas as atividades propostas, independentemente da seção que está inserido, foi o registro algébrico (RAI). Sendo que este assumiu esta posição em 50,56% das atividades. A pesquisadora também coloca em sua análise dos cadernos dos alunos, que mesmo as turmas estando sobre a regência do mesmo professor nem sempre a quantidade e o formato das atividades propostas aos alunos mantiveram-se as mesmas e que o professor optou por privilegiar atividades não extraídas do livro didático.

Por meio da análise das sequências de atividades envolvendo sistemas lineares, Boemo (2015), ressalta que a forma dinâmica como as atividades foram apresentadas, além de promover subsídios para identificar como ocorreu o estudo de sistemas lineares também contribuiu para ampliar os entendimentos dos alunos no que se referia às variáveis visuais pertinentes.

Outro trabalho de dissertação analisado foi de Assumpção (2015), onde este tinha como questão norteadora: “Uma abordagem dinâmica pode contribuir no processo de ensino e aprendizagem de geometria para alunos do 7º ano do Ensino Fundamental, relativa aos conceitos de perímetro e área de polígonos, à luz da teoria dos registros de representação semiótica?”. Para tanto, a autora elaborou, aplicou e avaliou uma sequência de atividades, desenvolvida no GeoGebra, seguindo os pressupostos da teoria de registros de representação semiótica.

Com base na análise dos resultados, Assumpção (2015) constatou a aquisição de conhecimentos relativos ao estudo de perímetros e áreas de polígonos com a utilização de um ambiente dinâmico, sob a ótica da teoria dos registros de representação semiótica. Além disso, a autora coloca como satisfatórias as funcionalidades do *software* GeoGebra, uma vez que este serviu como ferramenta mediadora, favorecendo o processo de visualização dos sujeitos da pesquisa, na resolução das atividades com ênfase no registro figural.

Já, na pesquisa de Cardoso (2014), esta elaborou uma dissertação tendo como problemática central o processo de ensino da geometria analítica (GA) e o registro de

representação semiótica desse conceito em uma turma de licenciandos em matemática que estavam cursando o último semestre do curso. Esta pesquisadora, identificou no planejamento da professora colaboradora, um grande potencial em relação às possibilidades de conversão dos registros e a utilização do *software* GeoGebra como recurso fundamental no desenvolvimento dessa proposta. Porém, percebeu a resistência de alguns licenciandos em realizarem as conversões propostas, pois a maioria buscou resolver as atividades lançando mão de apenas um registro.

Deste modo, Cardoso (2014) afirma a importância da interpretação global da potencialidade das atividades, visando a análise das mesmas a partir de diferentes registros: gráficos, algébricos e numéricos. Bem como, a conversão em vários sentidos, não ficando apenas na solução gráfica ou algébrica.

Outro trabalho analisado foi o de Araújo (2011), onde este procurou responder a duas questões ligadas a lugares geométricos. Mais especificamente, a primeira foi: “Como o conceito de lugar geométrico tem sido tratado nos livros didáticos ao longo das últimas décadas?”. A segunda envolvia o seguinte questionamento: “O uso de um *software* de Geometria Dinâmica amplia as possibilidades de ação, formulação e validação em uma situação a-didática do estudo de lugares geométricos planos?”.

Para responder a estas questões este autor apresentou os resultados de uma pesquisa exploratória realizada com seis estudantes do 9º ano do ensino fundamental de uma escola estadual da cidade de Itararé – SP. Para embasá-la foram tomados como referências a engenharia didática de Michèle Artigue, a teoria das situações didáticas e o contrato didático da Guy Brousseau.

Ainda, neste trabalho foram elaboradas e aplicadas oito atividades referentes a lugares geométricos para dois grupos de estudantes. A pesquisa chegou a dois resultados. O primeiro, diz respeito a noção de lugar geométrico que evoluiu ao longo do tempo, mas só recentemente tem sido abordada de maneira mais qualificada nos livros didáticos. O segundo refere-se aos benefícios que o ambiente de GD pode trazer no processo de ensino e aprendizagem do estudo de lugares geométricos, pois através dele é possível dispor de um número bem maior de informações e de maneira mais rápida que no ambiente de papel e lápis, facilitando, assim, a formação do conceito de lugares geométricos.

A tese de Almeida (2007) discute a identificação de rupturas entre significados e significantes de um conceito, verificando a relação desta ruptura com o fato de não se empregar os princípios relativos a lugares geométricos quando se está resolvendo problemas de construções geométricas.

Almeida (2007) coloca que o fato dos alunos apresentarem dificuldades na resolução de problemas com construções geométricas encontra-se na formulação de estratégias para resolvê-los. Neste momento, não são empregados e nem envolvidos os princípios relativos a obtenção de lugares geométricos. A pesquisadora também acrescenta que é importante que a figura geométrica seja entendida como sendo constituída de diferentes conjuntos de lugares geométricos, pois serão esses lugares geométricos que vão caracterizar e individualizar a mesma.

Almeida (2007) ainda ressalta que os alunos se limitam a repetir métodos, desconsiderando completamente as propriedades e as representações do objeto que está sendo construído. Outro fator observado pela pesquisadora está ligado às justificativas apresentadas, onde notou que os sujeitos envolvidos não conseguiram elaborar um argumento que justificasse a estratégia adotada para a resolução de um referido problema.

Em face da análise dos resultados a pesquisadora entendeu como fundamental a busca por abordagens didático-metodológicas diferenciadas, que possam fornecer contribuições para os alunos, no que diz respeito a uma melhor compreensão dos conhecimentos geométricos.

Por fim, a dissertação desenvolvida por Buratto (2006), propõe uma alternativa metodológica para o ensino e aprendizagem da geometria com uma abordagem fundamentada nos registros de representação semiótica e o processo de apreensões em geometria.

A partir das análises das atividades aplicadas junto aos licenciandos do 5º semestre do curso de licenciatura em matemática, da Universidade do Planalto Catarinense (UNIPLAC), Buratto (2006) coloca que poderia se obter um resultado satisfatório se não fossem as condições precárias em que a geometria é ensinada. Neste trabalho a pesquisadora propõe um conjunto de situações de aprendizagem visando o ensino de conceitos de geometria, apoiada nos diferentes tipos de registros.

Buratto (2006) ainda ressalta que a geometria, quando ensinada através de situações-problema envolvendo os registros de representação semiótica e seus tratamentos próprios, propicia que as figuras se tornem um objeto de exploração heurístico, levando o licenciando a um crescimento visual e a uma desenvoltura na sua capacidade interpretativa da matemática.

Com base nesse breve levantamento bibliográfico buscou-se justificar a relevância no estudo do objeto matemático escolhido e da proposta da presente pesquisa. Além disso, pode ser observado inúmeras propostas de práticas de ensino relativas a geometria, pois de acordo com os resultados encontrados, este conteúdo matemático ainda não está totalmente presente nas aulas de matemática.

## 1.2. REFLEXÕES SOBRE GEOMETRIA E SEU ENSINO

A importância do estudo de tópicos da geometria é exposta nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) (BRASIL, 1998) onde, através do seu ensino podem ser desenvolvidas capacidades cognitivas fundamentais aos alunos, pois por meio de seu estudo é possível desenvolver um raciocínio visual do pensamento geométrico. Assim, observa-se a sua relevância em situações cotidianas no exercício de diversas profissões, por exemplo, na engenharia, na mecânica, na arquitetura, etc., que demandam do indivíduo a capacidade de organizar o pensamento geometricamente. Como complementa Lorenzato:

A Geometria está por toda parte..., mas é preciso conseguir enxergá-la... mesmo não querendo, lidamos em nosso cotidiano com as ideias de paralelismo, perpendicularismo, congruência, semelhança, proporcionalidade, medição (comprimento, área, volume), simetria: seja pelo visual (formas), seja pelo uso no lazer, na profissão, na comunicação oral, cotidianamente se estamos envolvidos com a Geometria. (LORENZATO, 1995, p. 5).

Crescenti (2005) também reforça que a geometria é uma área da matemática que, além de proporcionar capacidades e habilidades próprias de sua especificidade, possui uma vasta aplicabilidade, isto é, a partir dela existe a possibilidade de solucionar problemas práticos em várias áreas do conhecimento e do cotidiano. O que vem ao encontro do que é exposto nos PCN, quando este retrata o papel fundamental que a geometria desempenha no currículo escolar, pois a medida em que permite ao aluno desenvolver o seu modo de compreender, descrever e representar o mundo em que vive.

Dessa forma quando é proposto aos alunos realizarem a representação de um objeto geométrico por meio de um desenho, estes procuram encontrar uma relação entre a representação do objeto e algumas de suas propriedades para constitui-lo de uma forma mais compatível com a imagem mental global que têm o referido objeto. Em vista disso, os PCN propõem buscar atividades com um caráter mais dinâmico para este estudo, com o objetivo de permitir o desenvolvimento desses conceitos geométricos de uma forma mais significativa para o aluno. Também coloca que, atualmente, existem *softwares* que exploram problemas envolvendo transformações geométricas, que podem possibilitar ao aluno uma visualização mais detalhada do que está sendo proposto a ele.

No entanto, o ensino de geometria tem-se apresentado de forma bastante precário. Neste sentido, Facco (2003), menciona que alguns professores restringem o seu ensino a apenas na identificação de figuras geométricas e associações com nomes, ao uso de fórmulas e notações.

Raramente oferecem a possibilidade destes transitarem nos vários registros de que a geometria dispõe.

Lorenzato (1995, p. 1), coloca que esta restrição nos conteúdos geométricos advém de que “muitos professores não detêm os conhecimentos geométricos necessários para realização de suas práticas pedagógicas” e, ainda, acrescenta que “presentemente, está estabelecido um círculo vicioso: a geração que não estudou geometria não sabe como ensiná-la”. Nesse contexto, Lorenzato (1995) também aponta como um dos fatores principais para o descaso com o ensino de geometria, a falta de conhecimentos geométricos, por parte dos professores, necessários para a perfeita efetivação das suas atividades profissionais, decorrente de uma formação deficiente.

Essa deficiência na formação docente em relação aos conhecimentos geométricos mínimos necessários vai refletir diretamente em sua prática, tanto, em aspectos teóricos como também metodológicos. O que vem ao encontro de Assumpção (2015, p. 26) quando afirma que: “o ensino de geometria, necessita de estratégias que possam se adaptar tanto no que diz respeito às exigências do currículo escolar, como também, aos recursos didáticos que emergem atualmente”.

Outro aspecto que cabe salientar é que, em geral, o aluno pode até ser capaz de utilizar uma determinada fórmula ou propriedade geométrica. Mas, no entanto, não tem ideia do que realmente significa o resultado que obtém. Entende-se que este fato está intrinsecamente ligado na abordagem dada no processo de ensino.

Nessa ótica, esta pesquisa pretende explorar, por meio de algumas atividades envolvendo lugares geométricos, diferentes registros em dois contextos distintos, a fim de discutir algumas possibilidades e/ou dificuldades que emergem quando se faz uso de recursos computacionais.

### 1.3. CONSIDERAÇÕES ACERCA DE LUGARES GEOMÉTRICOS

Uma figura geométrica se caracteriza por determinadas propriedades que a individualizam. Assim, entende-se por lugar geométrico como sendo um conjunto de infinitos pontos em um plano que satisfazem uma determinada propriedade. Almeida (2007), em outras palavras, indica que:

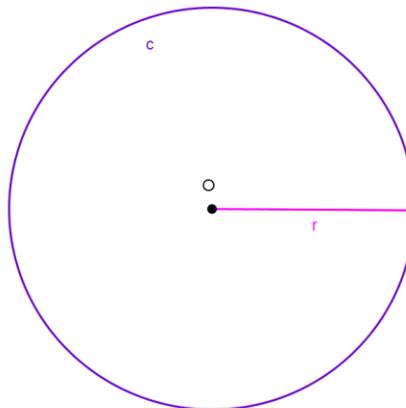
(...) toda figura geométrica incorpora um conjunto de propriedade que a individualiza. Cada conjunto de propriedades, por sua vez, é um conjunto, em que todos os elementos desse conjunto gozam da mesma propriedade que chamamos ‘lugar geométrico’. (ALMEIDA, 2007, p. 67).

Dessa forma a resolução gráfica de um problema geométrico consiste em determinar um conjunto de pontos que satisfazem uma determinada propriedade. Acredita-se que compreender as propriedades geométricas que estão ligadas a uma figura e como elas se relacionam possibilita um melhor entendimento dos conceitos geométricos. Existem diversos tipos de lugares geométricos, sendo que, os mais usuais são: circunferência, reta mediatriz, bissetriz, reta paralela e arco capaz.

Na sequência de atividades que esta pesquisa propõe estão sendo explorados três destes: circunferência, reta mediatriz e bissetriz.

Calfa (1997) define a circunferência como sendo “O lugar geométrico dos pontos que estão a uma distância dada  $r$  de um ponto dado  $O$  é uma circunferência de centro em  $O$  e raio  $r$ ”. (CALFA, 1997, p. 91). A circunferência é, portanto, o lugar geométrico dos pontos que equidistam de um ponto fixo (Figura 1).

Figura 1 - Lugar geométrico: circunferência.



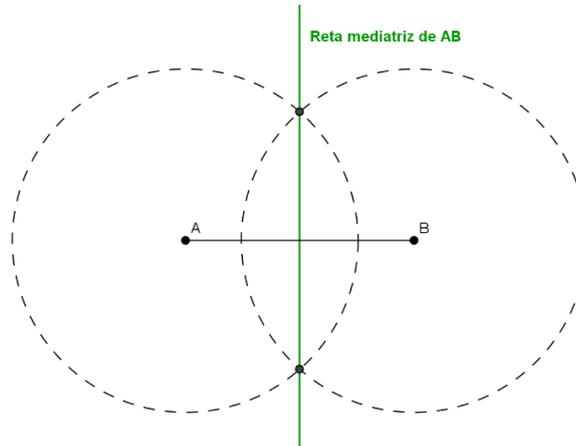
Fonte: Elaborado pela autora.

Ainda, segundo Calfa (1997), “O lugar geométrico dos pontos que equidistam de dois pontos dados é a reta mediatriz do segmento que une os dois pontos”. (CALFA, 1997, p. 119). A reta mediatriz é, portanto, o lugar geométrico dos pontos equidistantes de dois pontos dados.

Para a sua construção, dado um segmento  $\overline{AB}$  qualquer, centra-se o compasso em  $A$ , com abertura qualquer, maior que a metade de  $\overline{AB}$ , descreve-se um arco acima e outro abaixo do segmento dado. Após, com centro em  $B$  e, com a mesma abertura repete-se a operação

anterior. Nas interseções dos arcos determinam-se os pontos, que ligados geram a reta mediatriz, como ilustra a figura 2.

Figura 2 - Lugar geométrico: reta mediatriz.

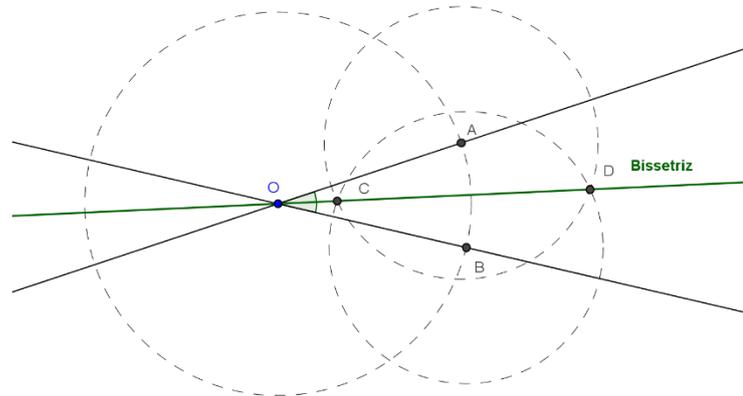


Fonte: Elaborado pela autora.

Ainda baseado em Calfa (1997), tem-se “O lugar geométrico dos pontos que equidistam de duas retas concorrentes dadas é o par de bissetrizes dos ângulos formados pelas duas retas”. (CALFA, 1997, p. 121). Ou ainda, o lugar geométrico dos pontos equidistantes dos lados de um ângulo dado.

Para a sua construção é dado um ângulo qualquer com vértice  $O$ . Então, com o compasso centrado em  $O$ , abertura qualquer, determina-se sobre os lados do ângulo, os pontos  $A$  e  $B$  e com centro do compasso em  $A$ , abertura qualquer, traça-se um arco de circunferência. Após, com mesma abertura da anterior e centro em  $B$  traça-se outro arco que determinará os pontos  $C$  e  $D$  da interseção com o anterior. Sendo que, da união dos pontos  $O$  e  $C$  (ou  $O$  e  $D$ ), obtém-se a bissetriz do ângulo dado, como mostra a figura 3.

Figura 3 - Lugar geométrico: bissetriz.



Fonte: Elaborado pela autora.

Partindo das definições e construções geométricas anteriores, concorda-se com Almeida (2007) quando esta afirma que:

(..) fazer uma construção geométrica pode ser sintetizada como sendo um processo de construir conjuntos de ‘lugares geométricos’, que são constituídos de propriedades e sob as quais se processam associações às propriedades do próprio objeto a ser construído. (ALMEIDA, 2007, p. 91).

Corroborando a esta perspectiva, busca-se neste trabalho elaborar atividades que visem a exploração da ideia de lugares geométricos de uma forma dinâmica, pois, muitas vezes, é difícil para os alunos imaginarem um ponto se movendo no papel ao longo de um outro ente geométrico. Além disso, encontram também dificuldades em perceberem que o conjunto desses pontos correspondem a um lugar geométrico definido, identificando as propriedades que este possui. O caráter dinâmico que se pretende criar através das atividades está ligado diretamente às características de *softwares* de GD que possibilitam uma visualização e manipulação de diferentes objetos geométricos construídos através de suas ferramentas.

#### 1.4. O USO DE RECURSOS TECNOLÓGICOS NO ENSINO E APRENDIZAGEM DE GEOMETRIA

É notável a influência do meio social e de todos os seus aparatos ao comportamento e desenvolvimento do homem. Uma vez que, este vem transformando gradativamente a natureza e seu modo de vida com o uso da tecnologia. Nesse sentido, tem se apropriado desses meios de

forma que estes se tornam essenciais nas atividades mais básicas de seu cotidiano. A sociedade e, conseqüentemente a escola, são impulsionadas a lidar com uma avalanche de informações e de novas possibilidades de comunicação, por meio das tecnologias de informação e comunicação (TIC).

Com esses avanços tecnológicos da sociedade atual, o desafio de incorporar ao trabalho escolar novas formas de comunicar e conhecer é lançado no cotidiano dos professores. Neste sentido, busca-se inserir a tecnologia na educação de forma orientada com o objetivo de explorar de forma reflexiva e investigativa os mais diferentes assuntos.

Kenski (2009) considera esses recursos não apenas como um suporte tecnológico para as atividades de sala de aula, pois eles interferem na forma de pensar, de relacionar e de adquirir os conhecimentos. A pesquisadora coloca, ainda, a televisão e o computador como recursos de comunicação que deram suporte a educação e provocaram mediações entre o enfoque do professor, a compreensão do aluno e o conteúdo apresentado por esses meios.

Para tanto, acredita-se que o ensino de qualquer disciplina pode se tornar inovador quando apresenta aos alunos metodologias diversificadas e integradas ao uso de recursos tecnológicos. Em particular, tratando-se da disciplina de matemática, os PCN enfatizam a importância desta área no cotidiano das pessoas, afirmando que:

A Matemática também faz parte da vida das pessoas como criação humana, ao mostrar que ela tem sido desenvolvida para dar respostas às necessidades e preocupações de diferentes culturas, em diferentes momentos históricos, e aqui leva-se em conta a importância de se incorporar ao seu ensino os recursos das Tecnologias da Comunicação. (BRASIL, 1998, p.59).

Hoje com as políticas educacionais vigentes a maioria das escolas já possui laboratórios de informática com computadores prontos para serem usados em práticas docentes. Outra tecnologia disponível que pode contribuir nas aulas é o celular, tornando as aulas mais dinâmicas, envolventes e criativas.

De acordo com Gravina (2013), o uso por si só desses recursos não é suficiente. Nesse sentido, é necessário identificar o papel que o professor desenvolve nesse contexto escolar tecnológico. Daí a importância de uma formação docente que inclua o uso de diferentes recursos tecnológicos em atividades de ensino.

Ainda, Kenski (2009) ressalta que, quando esses recursos são utilizados de forma correta eles provocam alterações significativas na relação entre professor e aluno. Além disso, podem proporcionar um maior aprofundamento nos conteúdos propostos. O que vem ao encontro com a ideia da pesquisadora na qual o professor pode lecionar de forma diferenciada e que abarque maior domínio dos conteúdos pelos alunos.

Refletindo acerca do que fora exposto, entende-se que a escola pode criar espaços para o uso de recursos tecnológicos com a finalidade de auxiliar a prática docente, a fim de que estes possam intervir como ferramenta facilitadora no processo de ensino de certos conteúdos matemáticos. Em particular, no ensino de geometria, fazendo com que o conhecimento seja construído pelo aluno a partir de percepções e ações por ele mesmo demandas, pois a representação física de um objeto de estudo pode interferir na construção de conceitos geométricos. Dessa forma, os recursos tecnológicos podem oferecer esse apoio em que as representações passam a ter um caráter dinâmico, oportunizando assim aprendizagens mais significativas, principalmente nas consolidações mentais obtidas pelos mesmos. Isso por que, um mesmo objeto matemático pode passar a ter representações mutáveis diferentemente da representação estática fornecida pelo lápis e papel.

#### 1.4.1. CONSIDERAÇÕES ACERCA DOS AMBIENTES DE GEOMETRIA DINÂMICA

Conforme Menegotto e Lara (2011), o termo geometria dinâmica foi utilizado para indicar *softwares* interativos que permitissem ao sujeito/usuário a criação e a manipulação das figuras geométricas, respeitando as propriedades com que foram criadas. Para Pereira (2012), os *softwares* de GD são aqueles que oferecem a possibilidade de construir e manejar objetos geométricos na tela de um computador. O diferencial de um *software* de GD é a possibilidade de arrastar e transformar a figura inicial construída usando o mouse em tempo real, mas mantendo as propriedades com que a figura fora criada. Neste sentido, de acordo com Alves e Soares (2003):

[...] a geometria é o que tem experimentado as maiores e mais profundas transformações com a utilização da tecnologia informática; devido, principalmente, ao desenvolvimento de *softwares* específicos voltados para o seu processo de ensino-aprendizagem. (ALVES E SOARES, 2003, p. 277).

A utilização dos ambientes de GD e as *interfaces* de trabalho por eles disponibilizados propiciam a manipulação dos objetos geométricos na tela do computador. Esta manipulação é considerada por Sella e Pereira (2008) como algo potente e valioso, na qual os alunos têm a possibilidade de buscar novas informações e trabalharem de diversas formas.

Os *softwares* de GD não oferecem apenas a possibilidade de efetuar qualquer construção geométrica de modo mais rápido e preciso do que com lápis e papel, mas também a possibilidade de movimentar e modificar os desenhos, mantendo-se as características da

construção, e desta forma, permitem uma melhor visualização e identificação de propriedades geométricas.

Existem diversos recursos tecnológicos que podem ser utilizados em sala de aula, entre eles, citam-se: jogos digitais, objetos de aprendizagem, calculadoras gráficas, vídeos, *softwares* e aparelhos celulares. Rodrigues (2008, p. 5) afirma que:

(...) diante da variedade de *softwares* educativos disponíveis hoje no mercado, é imprescindível um bom conhecimento destes, pois seu conteúdo deve visar uma aprendizagem significativa, aliando interatividade e informações a quem vai utilizá-los. (RODRIGUES, 2008, p.5).

Esse cuidado na escolha da ferramenta é muito importante, pois será a partir da ação do aluno no ambiente informatizado que será possível o ajuste entre o conceito matemático e sua concretização mental. Assim, saber qual o melhor recurso a ser utilizado e qual o procedimento que se pretende seguir é de suma importância. Para isso, então acredita-se que deve-se buscar recursos que:

- Propiciem a construção de objetos matemáticos;
- Possibilitem múltiplas representações;
- Façam registros no próprio recurso;
- Possibilitem atualizar dados com a dinâmica da situação;
- Realizem o traçado de lugares geométricos;
- Permitam cálculos automáticos; entre outros.

Dentre os diversos *softwares* de GD escolheu-se o GeoGebra como recurso didático neste trabalho de pesquisa. A escolha do mesmo, deve-se ao fato de que este é um *software* de domínio público e pode ser instalado gratuitamente em qualquer computador. Outro fator importante é que este recurso se caracteriza como um “ambiente de exploração e expressão”.

Além disso, será por meio das representações dinâmicas oferecidas pelo GeoGebra que os objetos geométricos a serem construídos nas atividades, deverão ter uma representação mutável. Isso é possível, pois este *software* reúne ferramentas tradicionais de geometria, com outras ligadas a álgebra e ao cálculo. Como complementa Dantas (2016): “é um programa que permite construir objetos com parâmetros numéricos, algébricos e geométricos e que podem ser descritos a partir de sentenças matemáticas”. (DANTAS, 2016, p. 101).

Além disso, mais especificamente, pelo assunto abordado a determinação de lugares geométricos via papel, lápis, régua e compasso se torna uma tarefa trabalhosa sendo que, com o uso de um recurso tecnológico pode minimizar este obstáculo. Pois, no caso do objeto matemático construído não satisfizer a condição dada, este poderá ser apagado de forma rápida,

e logo em seguida, uma nova tentativa poderá ser feita. Ainda, objetos podem ser ocultados quando forem auxiliares na construção realizada, deixando somente o resultado final para análise e manipulação.

## 2. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Esse capítulo destina-se a discorrer a respeito das fundamentações teóricas que serviram de suporte para o desenvolvimento da presente pesquisa. Inicialmente, apresenta-se uma breve descrição da teoria de registros de representação semiótica. Em seguida, são realizadas algumas reflexões sobre o ensino da geometria e os ambientes informatizados aliados a esta teoria.

### 2.1. TEORIA DE REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA

A Educação Matemática é um campo de conhecimento que possui como objetos de estudo os processos de ensino e aprendizagem em matemática. Compreender o porquê das dificuldades em seu ensino e como superá-las são questões fundamentais que embasam essa área de pesquisa. O que vem ao encontro com a teoria apresentada por Raymond Duval, filósofo e psicólogo, que trata principalmente do funcionamento cognitivo na atividade matemática e, em problemas de ensino e aprendizagem da mesma.

Conforme Damm (1999), toda comunicação matemática é baseada em representações. Assim, a matemática necessita de diversos sistemas de representação, além da linguagem natural e das imagens que são comuns em outras áreas do conhecimento. A necessidade dessas representações para um objeto matemático deve-se ao fato de que eles não possuem existência física e isso pode comprometer a compreensão de certos conteúdos. Dessa forma, são necessários diferentes sistemas de numeração, notações algébricas e geométricas, gráficos, símbolos, diagramas, esquemas, que possam mobilizar diferentes funções cognitivas.

Ainda cabe mencionar que, para que o aluno possa compreender a matemática é fundamental que este consiga estabelecer uma distinção entre um objeto e sua representação, visto que um mesmo objeto pode apresentar diferentes representações. Este aspecto é ressaltado por Duval (2012b):

O ponto comum à grande maioria dos bloqueios dos alunos, quaisquer que sejam os domínios de atividade matemática e qualquer que seja o nível do currículo, é a incapacidade de converter a representação de um objeto em uma outra representação do mesmo objeto. (DUVAL, 2012b, p. 53).

Nessa perspectiva, a transformação de um sistema de representação em outro, pode ser de três tipos: formação, tratamento e conversão. Sendo que:

A *formação* de uma representação compatível como uma representação de um registro dado, em que se garantem condições de identificação e reconhecimento da mesma e a possibilidade de sua utilização para tratamentos.

O *tratamento*, segundo Duval (2009), consiste de uma transformação de representação interna a um registro de representação ou, a um sistema, isto é, a transformação desta representação no mesmo registro onde ela foi formada.

Já, a *conversão*, pode ser entendida como uma transformação externa em relação ao registro da representação de partida, ou seja, muda-se o registro conservando o conteúdo em sua totalidade.

Mudar de um registro em outro não significa apenas mudar o tratamento de um objeto, significa também, explicar suas propriedades ou seus distintos aspectos. O acesso aos diferentes registros de representação semiótica em uma atividade matemática geralmente não ocorre naturalmente e o professor deve incentivar esse acesso. Diante disso, nota-se que o tratamento é a transformação que mais se prioriza no ensino, privilegiando a forma mais que o conteúdo.

Partindo disso, para caracterizar-se um objeto matemático, em especial conteúdos de geometria, faz-se uso de quatro tipos de registros: o figural (RF), o algébrico (RAI), simbólico (RSb) e o da língua natural (RLN). Assim, destacam-se as figuras geométricas, os enunciados em linguagem natural, as representações visuais e as notações simbólicas. Na atividade matemática, é frequente a passagem de um sistema de representação para outro. Como, por exemplo, de um enunciado em língua natural para o figural, ou ainda, a mobilização simultânea de diferentes sistemas de representação durante a resolução de uma atividade.

Também pensando no potencial das múltiplas representações que um objeto pode possuir, acredita-se que uma atividade investigativa que transite entre os diferentes sistemas de representação torna-se significativa no processo de construção conceitual desse objeto em questão.

No ensino de conteúdos matemáticos é a articulação desses diversos registros que conduzirão à compreensão matemática e, para isso, é necessária a composição de pelo menos dois registros de representação semiótica.

## 2.2. A GEOMETRIA ALIADA AOS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA

Para Duval (2009), é por intermédio do registro de representação que o indivíduo descreve de forma consciente o que está sendo observado a respeito de um objeto. No caso da

geometria pode-se ter a representação, por exemplo, de uma circunferência na forma: simbólica, língua natural ou forma figural. É importante ressaltar que a única mudança nestes registros foi a forma de sua representação e não o conteúdo que se queria representar.

Duval (2003) aponta que a compreensão da geometria envolve três aspectos cognitivos com funções epistemológicas específicas, são elas: visualização, construção e raciocínio.

*A visualização* para a exploração heurística de uma situação complexa.

*A construção* de configurações, que pode ser trabalhada como um modelo, em que as ações realizadas e os resultados observados são ligados aos objetos matemáticos representados.

*O raciocínio* corresponde ao processo que conduz para a prova e a explicação.

Ver uma figura em geometria é uma atividade cognitiva mais complexa do que o simples reconhecimento daquilo que uma imagem mostra. Isto depende do papel que a figura tem na atividade matemática. Assim, destacam-se quatro maneiras diferentes de ver as figuras, segundo o seu papel: a apreensão perceptiva, operatória, sequencial e a discursiva. Elas são totalmente independentes umas das outras.

*A apreensão perceptiva* é o reconhecimento visual imediato da forma. A utilização de figuras para encontrar a solução de um problema exige que se possa transformar uma figura em outra, ou seja, interpretar as formas que as compõem.

*A apreensão sequencial* é explicitamente solicitada em atividades de construção ou, em atividades de descrição, tendo por objetivo a reprodução de uma figura dada.

*A apreensão discursiva* depende das hipóteses que a figura representa, ou seja, interpretação dos elementos da figura geométrica.

*A apreensão operatória* visa as possíveis modificações na figura inicial e as reorganizações que estas mudanças podem possibilitar. Para cada tipo de modificação, são diversas as operações possíveis. Podemos distinguir três casos possíveis, como segue:

*Modificação mereológica:* Podemos dividir uma figura em partes, nas quais passam a representar subfiguras. Esta modificação se baseia na relação parte e todo.

*Modificação ótica:* Pode-se aumentar, diminuir uma figura, ou ainda, deformá-la para transformá-la em outra, que será vista como a sua imagem.

*Modificação posicional:* Pode-se deslocar ou rotacionar uma figura em relação às referências do campo onde ela se destaca.

Essas modificações podem ser realizadas graficamente e/ou mentalmente.

A separação destas quatro apreensões é fundamental para analisar a atividade geométrica e as dificuldades dos alunos. Cabe ressaltar ainda que, na construção de figuras

geométricas, tanto manualmente ou com auxílio de instrumentos físicos, as quatro apreensões aparecem e exigem que os alunos possam passar de um tipo a outro.

Assim pensando-se nos conteúdos de geometria, Duval (2012a) coloca que os objetos que se apresentam podem ser diferentes dos tipos de objetos que a situação problema exige observar. Deste modo, fica evidenciada a relevância que está em transitar entre os vários registros de representação, auxiliando na interpretação do que se pretende ensinar.

### 2.2.1. O REGISTRO EM LÍNGUA NATURAL E SUAS OPERAÇÕES DISCURSIVAS NO ENSINO DE GEOMETRIA

A língua natural, segundo Duval (2011), é considerada como um registro de representação semiótica e não como um código. Pois, o discurso é entendido como o emprego de uma língua, seja para dizer alguma coisa, seja objetos físicos, ideais ou imaginários. Ainda, “uma língua é o que permite produzir, a partir de um número finito de palavras, um número potencialmente infinito de frases diferentes umas das outras”. (DUVAL, 2011, p. 76).

Neste aspecto, duas ideias são essenciais para compreender e para analisar o tipo de atividade de pensamento que requer a utilização da língua natural. A primeira é metodológica. Todo discurso, oral ou escrito se decompõe em unidade de sentido. Assim, as operações discursivas que determinam as unidades de sentido. A segunda é ao mesmo tempo cognitiva e lógica. A unidade fundamental de sentido para todo discurso é a frase, tratando-se de narração, descrição e explicação, entre outros.

Ainda, Duval (2011), distingue três tipos de operações discursivas e as funções cognitivas das línguas naturais: referencial, apofântica e expansão discursiva.

A *função referencial* está ligada a operação de designação de objetos que irão explicitar algo. Neste as correspondentes de designação dos objetos, não serão palavras, mas sim, os esclarecimentos que vão combinar ao menos duas palavras. Assim, pode-se considerar essa operação um pouco complexa, pelo fato da falta de palavras relacionadas aos objetos que se está buscando uma designação.

A segunda, a *função apofântica*, implica na operação de constituição de um enunciado completo. Ou seja, busca descrever algo a respeito do objeto na forma de uma proposição. Essa unidade de sentido é constituída por seu valor epistêmico (absurdo, possível, provável, ...), seu valor lógico (verdadeiro, falso ou indefinível), pragmático (ordem) ou por seu status (hipótese, definição ou conclusão).

Por fim, a *função de expansão discursiva* implica na organização de uma sequência de frases em unidade com um mesmo propósito e, que lhe dão uma coerência. Elas podem ser: lógicas ou natural.

Entre essas funções designadas por Duval (2011), ele destaca a expansão discursiva pelo fato de articular diversos enunciados completos na unidade coerente. Seja por meio de uma narração, descrição, explicação ou passos de um raciocínio.

Dessa forma, para classificar as diferentes funções discursivas requeridas irá depender do tipo de atividade proposta, levando-se em conta a escolaridade dos alunos, a forma de produção e de interlocução própria do meio no qual se produz esses discursos.

### 2.3. AMBIENTES INFORMATIZADOS E A PRODUÇÃO DE REPRESENTAÇÕES

Como já mencionado anteriormente, no contexto atual tem-se os recursos tecnológicos à disposição como possibilidades de ampliação diante de recursos que apenas dão suporte com representações estáticas. Ou seja, as tecnologias presentes apresentam ferramentas que servem de suporte para a exteriorização, diversificação e ampliação do pensamento.

Diante disso, Duval (2011) coloca que os computadores não constituem um novo registro de representação, pois as representações que eles trazem não diferem das que são produzidas graficamente no papel para uma apreensão visual. Ressalta que eles constituem um novo modo fenomenológico de produção, fundamentado na aceleração dos tratamentos. Duval (2011, p.137) diz que “eles exibem no monitor tão rapidamente quanto à produção mental, mas com uma potência de tratamento ilimitada em comparação com as possibilidades da modalidade gráfico-visual”. Dessa forma, o uso desses recursos propicia uma visualização muito mais rápida do que se obteria fazendo-se manualmente.

Outra característica salientada por Duval (2011) se deve ao fato de que, para as representações semióticas não discursivas, existe a possibilidade de sua manipulação como objetos reais. Esse caráter dinâmico permite desempenhar a função de simulação, auxiliando na exploração heurística de problemas matemáticos.

Duval (2013) ainda coloca que, do ponto de vista cognitivo, os *softwares* trazem três grandes inovações, sendo por ele, citadas:

A mais fascinante é o poder de visualização que eles oferecem em todas as áreas. A segunda é que eles constituem um meio de transformações de todas as representações produzidas na tela. Em outras palavras, eles não são somente um instrumento de cálculo cuja potência cresce de modo ilimitado, mas eles

cumprem uma função de simulação e de modelagem que ultrapassa tudo o que podemos imaginar “mentalmente” ou realizar de modo gráfico-manual. Enfim, a produção pelos computadores é quase imediata: um clique, e isto é obtido sobre a tela! (DUVAL, 2013, p. 24).

Hoje os *softwares* permitem além da construção de figuras, a exploração e a manipulação destas, por meio do simples deslocamento de um “objeto” (ponto, segmento, etc.). Conforme afirma Duval (2009), no caso da construção de figuras geométricas, esta exige processos cognitivos que visam a diferenciação do objeto e de sua representação. Se a atividade for realizada com o auxílio do computador, o domínio das ferramentas disponíveis pelo *software* (na forma discursiva e figural) estarão relacionadas à capacidade de formação, tratamento e conversão dos registros de representação semiótica. Destacando assim os processos chamados por Duval (2009) de reconfiguração e de desconstrução – caracterizados pela identificação das partes de uma figura, e que devem estar presentes em uma atividade que utilize um recurso tecnológico.

No entanto, deve-se estar atento ao olhar do aluno que observa o que aparece na *interface* da tela, e se deixa espontaneamente guiar pelo reconhecimento perceptivo das formas produzidas na tela. Diante disso, ao propor atividades que utilizam *softwares* como ferramenta didática é necessário propiciar situações que possibilitem a visualização de uma figura.

### 3. CAMINHO METODOLÓGICO E EXPERIÊNCIA DIDÁTICA

Neste capítulo explicita-se o percurso metodológico desta pesquisa, apresentando o seu contexto e os procedimentos de coleta, organização e análise dos dados, juntamente com uma descrição detalhada de todas as atividades que compuseram a sequência. Por fim, relata-se a experiência com a exposição de cada uma das seis atividades e os resultados encontrados.

#### 3.1. CAMINHO METODOLÓGICO

Este trabalho é caracterizado por uma abordagem qualitativa em que, de acordo com Bortoni-Ricardo (2008), o pesquisador está interessado em um processo que ocorre em determinado ambiente e quer saber como os atores sociais envolvidos nesse processo o recebem, ou seja, o interpretam. Cabe, ainda, salientar que em uma pesquisa qualitativa, o processo de estudo é tão importante quanto o produto.

O foco da pesquisa está no estudo de lugares geométricos, sendo explorado com o auxílio de dois ambientes de aprendizagem: com o uso de instrumentos físicos, régua e compasso e, em um ambiente informatizado, utilizando-se o GeoGebra. Assim, inicialmente buscou-se identificar o objeto matemático, o público alvo e a teoria que embasaria o trabalho. Dessa maneira, a investigação se caracterizou como sendo uma pesquisa qualitativa na forma de estudo de caso.

Para Lüdke e André (1986), em um estudo de caso o pesquisador procura revelar as múltiplas dimensões de uma determinada situação problema, vendo o processo como um todo. Assim, ao realizar um estudo de caso, procura-se conhecer um público em específico, neste caso, alunos do curso de matemática da UFSM. Além disso, quer-se analisar a manipulação dos diferentes registros de representação semiótica em construções geométricas. Esta investigação teve como objetivo principal analisar os registros de uma situação específica, considerando os aspectos particulares desse conjunto, como por exemplo, o conhecimento prévio do objeto matemático e o domínio do *software* GeoGebra.

Assim, inicialmente, fez-se uma revisão bibliográfica no ensino e aprendizagem de lugares geométricos nos últimos anos, juntamente com um estudo do objeto matemático nos PCN, livros didáticos e no currículo do curso de matemática da UFSM. Neste levantamento pode-se observar que este assunto, muitas vezes, aparecia de forma teórica sem evidenciar as

construções geométricas, ou, em outras situações de forma oculta, sem a devida importância que o assunto possuía.

A respeito da teoria de aprendizagem realizou-se um estudo de como são abordados os registros de representação semióticas no ensino e aprendizagem de geometria e suas contribuições. Também se buscou refletir a respeito do uso das TIC como ferramenta mediadora no processo de ensino e aprendizagem em nível superior. Além de observar como se dá a mobilização dos registros seguindo os pressupostos de Duval.

Após desenvolveu-se uma sequência de 06 (seis) atividades, que foram aplicadas em 02 (dois) encontros de 2 horas/aula cada. As atividades propostas abordaram os lugares geométricos: circunferência, reta mediatriz e bissetriz. Todas as atividades foram elaboradas em forma de roteiro, onde o aluno, a cada item, buscava identificar uma característica ou propriedade do conceito envolvido. Neste roteiro algumas etapas foram desenvolvidas manualmente com o auxílio de régua e compasso e outras situações desenvolvidas no GeoGebra.

Partindo dos roteiros, fez-se uma análise prévia dos possíveis registros a serem mobilizados pelos alunos em cada item das atividades, juntamente com as apreensões que estavam presentes. Após a aplicação da sequência de atividades foi realizada a interpretação dos dados coletados por meio da observação participante, pelos registros dos alunos no GeoGebra e no papel. Nesta análise, buscou-se evidenciar a mobilização dos registros de representação semiótica envolvendo os lugares geométricos nesses dois ambientes de aprendizagem.

### 3.1.1. DESCRIÇÃO DAS ATIVIDADES

A construção da presente sequência didática teve como ponto de partida o objetivo geral da dissertação de mestrado. Para a criação destas atividades levou-se em consideração que o público alvo já possuía domínio do *software* GeoGebra e que os conceitos matemáticos explorados já haviam sido vistos e discutidos durante a sua formação, na disciplina de geometria plana. Também se buscou criar atividades que contemplassem as quatro apreensões distinguidas por Duval, e que propiciassem aos alunos a manipulação de diferentes registros de representação semiótica. O quadro 2 ilustra para cada atividade proposta, qual o conteúdo matemático referente a lugares geométricos abordado, e quais possíveis registros foram apreciados.

Quadro 2 – Apreensões e registros contemplados em cada atividade proposta.

<b>Atividade</b>	<b>Conteúdo matemático</b>	<b>TRRS – Duval</b>
Atividade 01	Elemento que compõe o LG reta mediatriz	Registros: RLN, RF e RSb
		Apreensões: perceptiva, discursiva, sequencial, operatória
Atividade 02	LG reta mediatriz	Registros: RLN, RF e RSb
		Apreensões: perceptiva, discursiva, sequencial
Atividade 03	LG circunferência concêntrica	Registros: RLN, RF, RAI e RSb
		Apreensões: perceptiva, discursiva, sequencial
Atividade 04	Elementos geométricos pertencentes ao LG circunferência concêntrica	Registros: RLN, RF, RAI e RSb
		Apreensões: perceptiva, discursiva, sequencial
Atividade 05	Elementos do LG bissetriz	Registros: RLN, RF e RSb
		Apreensões: perceptiva, discursiva, sequencial
Atividade 06	LG reta mediatriz	Registros: RLN, RF, RSb e RAI
		Apreensões: perceptiva, discursiva, sequencial

Fonte: Elaborado pela autora.

As atividades foram exploradas em dois ambientes de aprendizagem: manualmente em uma folha de papel, podendo ser utilizada régua não graduada e compasso, e em um ambiente informatizado com o auxílio do *software* GeoGebra. Nesta segunda situação, sendo disponibilizadas todas as ferramentas que o recurso possuía, permitindo assim que o aluno não fosse direcionado em sua construção.

Quanto à dinâmica, para a realização das atividades, todos os alunos receberam o mesmo roteiro impresso e desenvolveram as mesmas atividades. O roteiro de cada atividade foi entregue em partes para que os resultados não fossem prejudicados. Visto que, assim os alunos

ao fazerem uma determinada descoberta não poderiam retornar nos itens anteriores e alterar as suas respostas.

As atividades foram realizadas durante a disciplina de geometria espacial, em uma turma formada por oito alunos, sendo três do bacharelado em matemática e cinco licenciandos em matemática. Cabe salientar que a participação dos alunos nas atividades ocorreu de forma voluntária.

As atividades desenvolvidas no GeoGebra foram enviadas via *moodle*, onde a professora regente da turma e os alunos participantes tinham acesso. Ao iniciar as atividades propriamente ditas, todos os alunos receberam as seguintes orientações:

- Todas as atividades realizadas no papel deveriam ser entregues com a identificação do aluno. (Ex.: Roberta)
- As atividades realizadas no recurso computacional deveriam ser salvas com a seguinte denominação: AtividadeNumero\_NomedoAluno. (Ex.: Atividade01\_Roberta).
- As atividades salvas deveriam ser enviadas, via *moodle*, no espaço da disciplina, em tarefa criada para este fim. O arquivo com os *links* das atividades disponíveis no GeoGebra tube encontra-se no Apêndice A.
- No momento da análise das atividades os arquivos serão renomeados para Aluno A, Aluno B, Aluno C, e assim por diante, a fim de manter a sua confidencialidade. Confidencialidade esta que foi mencionada aos alunos, em um encontro anterior a aplicação da sequência de atividades, com a assinatura do Termo de Consentimento Livre e Esclarecido, que se encontra no Apêndice B.

Também foi tomado os devidos cuidados para que não ocorresse qualquer troca de informações entre os participantes, a fim de que os registros dos alunos (resultados) não fossem prejudicados.

A seguir descreve-se com maior detalhe cada uma das 06 (seis) atividades que compõem a sequência, especificando-se as mesmas, bem como apresentando os resultados obtidos.

## ATIVIDADE 01

### Proposta:

Nesta atividade buscou-se identificar um elemento que pertencesse ao lugar geométrico: reta mediatriz. Também se utilizou RLN, RF e RSb presentes no enunciado dos itens, pois há necessidade do aluno realizar sua leitura e interpretação. E, a partir disso, realizar os tratamentos e conversões solicitadas. No quadro 3, apresenta-se de forma sintetizada o roteiro que foi entregue aos alunos.

### Quadro 3 - Roteiro da atividade 01.

(a) Inicialmente, abra o arquivo Atividade 01 – A, e realize o que se pede.

Após, responda:

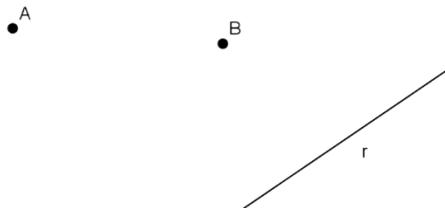
(b) Como você justifica a determinação do ponto  $P$ ?

(c) Retorne à atividade no GeoGebra desabilitando a propriedade de fixar os pontos  $A$  e  $B$ .

Após, movimente estes pontos. O que você observou?

(d) Porque aconteceu isso?

(e) Na figura a seguir, podendo utilizar régua não graduada e compasso, determine o ponto  $P \in r$ , tal que  $\overline{AP} \equiv \overline{BP}$ .



(f) Nesta construção, como você justifica a determinação do ponto  $P$ ?

(g) Agora, abra o arquivo Atividade 01 – B e realize o que se pede.

Após, movimente os pontos  $A$  e  $B$ .

(h) O que você observou?

A partir das construções indicadas, responda:

(i) Para a determinação do ponto  $P$ , a posição dos pontos  $A$  e  $B$  independe de estarem no mesmo semiplano definido pela reta dada, ou não? Justifique.

Fonte: Elaborado pela autora.

## **Análise da atividade**

A partir do processo de visualização de algumas construções, propõem-se uma análise visual do lugar geométrico reta mediatriz e, ainda, a identificação de um elemento pertencente a este lugar que satisfaça a proposta do problema. Também por meio da apreensão discursiva espera-se que o aluno seja capaz de usar RLN e RSb para descrever a sua construção e identificar a propriedade envolvida.

Um fator que poderá influenciar no item (e), onde o aluno pode fazer uso de régua e compasso, é o fato da necessidade de se prolongar a reta  $r$  para que ocorra a interseção com a reta mediatriz. Como aponta Duval (2003) este aspecto epistemológico está ligado a visualização, pois esta é conduzida pela apreensão perceptiva, que influencia na compreensão da situação. Ou ainda, basear-se na representação da reta como sendo um segmento, onde o indivíduo prende-se a imagem e não ao que ela representa.

Espera-se que nos itens (a), (e) e (g) onde ocorreu a modificação posicional dos pontos  $A$  e  $B$  em relação à reta dada  $r$ , possam despertar no aluno a apreensão operatória, que para Duval (2003), tende a ajudar a entender o problema proposto. Ainda, leva-se em consideração o aspecto cognitivo e o raciocinar que a atividade envolve.

Também se espera que no uso do recurso tecnológico os alunos possam ter uma melhor articulação dos entes geométricos envolvidos, pois como é colocado por Duval (2011) o recurso acelera os tratamentos, proporcionando uma visualização mais rápida do que se obtém fazendo manualmente. Ainda, tratando-se da geometria, “os objetos que aparecem podem, deste modo, ser diferentes dos tipos de objetos que a situação exige ver”. (DUVAL, 2012a). Ou seja, ao se visualizar somente um desenho (representação estática) de um objeto matemático pode não ser fácil de observar todas as características e propriedades deste.

Ao analisar os protocolos, bem como, as resoluções dos alunos, observou-se que dentre os 07 alunos, 06 apresentaram a mobilização dos registros esperados, chegando a uma conclusão correta para a atividade. Sendo que, um único aluno apresentou uma solução equivocada para a proposta da atividade. No quadro 04 encontram-se de forma sintetizada os registros e apreensões mobilizadas pelos alunos.

Quadro 4 - Registros e apreensões mobilizados na atividade 01.

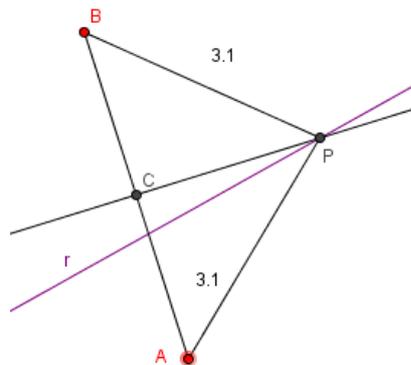
Item	Ambiente	Registros possíveis de serem mobilizados	Nº de alunos	Observações	Apreensões mobilizadas			
					P	D	S	O
(a)	GeoGebra	RLN, RSb, RF → RF	07		X	X		
(b)	Papel	RLN → RLN, RSb	06		X			
		RLN → RLN	01					
		RLN → RSb, RF	00					
(c)	GeoGebra	RLN → RLN	05		X	X		X
			02					
(d)	Papel	RLN → RLN, RSb, RF	01		X			
		RLN → RLN	06					
		RLN → RSb, RF	00					
(e)	Papel	RLN, RSb, RF → RF	07		X	X		X
(f)	Papel	RLN → RLN, RSb	06		X			
		RLN → RLN	01					
(g)	GeoGebra	RLN, RSb, RF → RF	07		X	X		
(h)	Papel	RLN → RLN	07		X			
(i)	Papel	RLN → RLN, RSb, RF	00		X	X		
		RLN → RLN	00					
			07					

Fonte: Elaborado pela autora.

No item (a), os 07 alunos mobilizaram os registros RLN, RSb, RF→ RF para obtenção da solução. Destes, 02 resolveram a atividade utilizando o conceito de lugar geométrico da reta mediatriz para determinar o ponto  $P$ , onde o aluno B utilizou a ferramenta “mediatriz” disponível no recurso, e o aluno E realizou a construção geométrica da reta mediatriz. Os outros 03 alunos utilizaram o conceito de triângulo isósceles para determinar a sua construção, como se pode observar na descrição apresentada pelo Aluno A, no item (b), e a sua construção em (a) (Figura 4).

“Construí os triângulos  $BCP$  e  $ACP$  de modo que eles fossem congruentes. A construção foi determinar o segmento  $\overline{AB}$  e marcar  $C$  o ponto médio. Traçar uma perpendicular a  $\overline{AB}$  passando por  $C$ . Marcar  $P$  como sendo a interseção dessa perpendicular com a reta dada. Assim,  $P \in$  reta dada e  $\overline{AP} \equiv \overline{BP}$  já que os triângulos  $BCP$  e  $ACP$  são congruentes” (Aluno A – item (b)).

Figura 4 – Resolução da atividade 01 (a) - Aluno A.



Fonte: Protocolo do Aluno A.

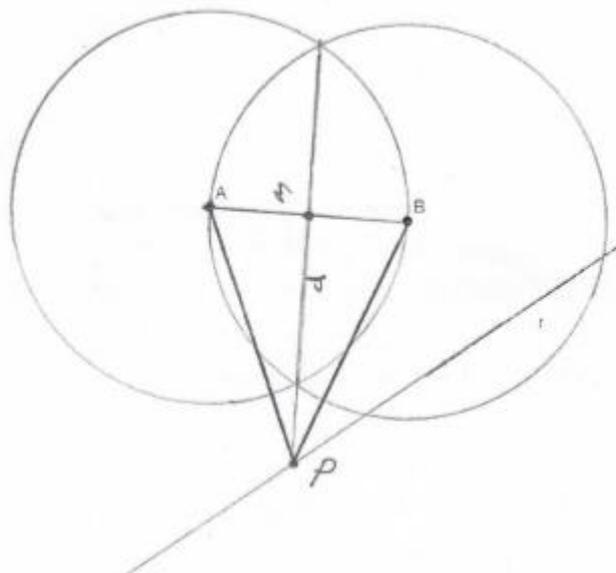
Ainda, teve o aluno G que desenvolveu uma estratégia diferenciada, sem o uso do lugar geométrico, utilizando as ferramentas disponíveis pelo *software*. Classifica-se esta solução como uma estratégia de “tentativa e erro” até obter a solução procurada. Este aluno justifica/descreve no item (b) a sua construção transitando entre os registros: RLN → RLN, RSb, como ilustra o seu protocolo.

“Coloquei um ponto sobre a reta  $r$  e utilizei o comando “distância, comprimento ou perímetro” para medir os segmentos  $\overline{AP}$  e  $\overline{BP}$ . Depois fui mexendo no ponto  $P$  até que a medida de  $\overline{AP}$  ficasse igual a medida de  $\overline{BP}$ ” (Aluno G – item (b)).

No entanto, no item (c), ao modificar a posição dos pontos  $A$  e  $B$ , o aluno G encontra  $\overline{AP} \neq \overline{BP}$ , mas não constata que a sua construção deixa de ser válida, apenas registra em seu protocolo o que aconteceu. Assim, as ferramentas disponíveis pelo recurso auxiliaram na resolução para uma determinada posição dos pontos  $A$  e  $B$  em relação a reta dada  $r$ , mas não serviram para evidenciar todos os possíveis casos (posições dos pontos).

No item (e), onde a construção envolvia o uso de instrumentos físicos, 02 alunos construíram a reta mediatriz de  $\overline{AB}$  e marcaram o ponto  $P$ , da interseção com ao prolongamento da reta  $r$ , mobilizando registros: RLN, RSb, RF $\rightarrow$  RF. Os outros 03, utilizaram o conceito de lugar geométrico reta mediatriz, identificando um elemento que o compõe, mas sem mencioná-lo. Pela simplicidade dos traçados e conceitos envolvidos não houve dificuldade pelos alunos em realizar a construção manualmente utilizando apenas régua não graduada e compasso, como ilustra a figura 5.

Figura 5 - Resolução da atividade 01 (e) - Aluno B.



Fonte: Protocolo do Aluno B.

No item (f) os alunos não apresentaram dificuldades em justificar a sua construção. Estas partiram, de acordo com Duval (2003), da apreensão discursiva, que diz respeito a interpretação das unidades figurais envolvidas dando importância a articulação do enunciado e das propriedades que o objeto possuía. Para isso, mobilizaram registros  $RLN \rightarrow RLN$ ,  $RSb$  como pode-se observar em uma das respostas, do aluno A:

*“Traçando 2 circunferências de raio  $\overline{AB}$ , uma com centro em A e outra em B e marcando a interseção de ambas, obtemos uma reta perpendicular a  $\overline{AB}$  em seu ponto médio C. Assim, qualquer ponto que pertencer a esta reta será equidistante de A e de B. O ponto P foi obtido pela interseção desta reta perpendicular com a reta r. Isso se dá devido o caso de congruência LAL, uma vez que,*

$$A\hat{C}P \equiv B\hat{C}P \text{ (por construção);}$$

$$\overline{AC} \equiv \overline{BC} \text{ (por construção);}$$

$$\overline{CP} \equiv \overline{CP}.$$

*Assim, os triângulos ACP e BCP são congruentes e  $\overline{AP} \equiv \overline{BP}$ .”*(Aluno A – item (f)).

Neste item, novamente o aluno G não fez o uso do lugar geométrico reta mediatriz para determinar o ponto P, e utilizou uma estratégia diferenciada mobilizando apenas RLN. Pode-se perceber que a sua construção, novamente, foi realizada por “tentativa e erro”, buscando adaptar o ponto P ao que se pedia no problema proposto, como ilustra a sua justificativa apresentada em (f):

*“Primeiro, abri o compasso de tal forma que A abraçasse a reta r. Tracei um pedaço da circunferência. Depois, utilizando a mesma abertura do compasso, fixei a ponta seca em B. assim, prolonguei a reta r e obtive a interseção das duas circunferências que é o ponto P.”*  
(Aluno G – item (f)).

No item (g) os alunos voltam a utilizar o GeoGebra, mobilizando os registros RLN,  $RSb$ ,  $RF \rightarrow RF$ . Nesta fase o recurso tem o objetivo de auxiliar na aceleração dos tratamentos, visto que os alunos já realizaram a construção manualmente, onde se fez necessário o domínio do lugar geométrico envolvido. Dessa forma, chegam a conclusão, apresentando RLN, que para a determinação do ponto P, a posição dos pontos A e B independem de estarem no mesmo semiplano ou, não, em relação à reta r dada, tendo como aporte a apreensão operatória com

modificação posicional dos pontos dados. Também, observou-se em todos os protocolos a presença do RLN, ou seja, a predominância da função de expansão discursiva por meio da organização das frases com um mesmo propósito e coerência.

Ainda no item (g), o Aluno G realiza a mesma construção que apresentou no item (a) mobilizando os mesmos registros. Em (i), o aluno conclui que para  $\overline{AP} \equiv \overline{BP}$ , a posição dos pontos dados é independente do semiplano que se encontram em relação a reta  $r$ . No entanto, a sua construção em (a) e (g) é inválida ao movimentar os pontos  $A$  e  $B$ , mudando as suas posições em relação a reta  $r$ .

Desse modo, acredita-se que a forma como a atividade foi constituída, tendo momentos no GeoGebra e outros com instrumentos físicos, tenha proporcionado uma potencialidade na forma de interpretar a atividade, auxiliando os alunos a refletirem e a criarem estratégias para resolver o problema proposto, mobilizando RLN, RSb e RF.

Também foi possível observar que os alunos foram apresentando a mesma percepção nas suas resoluções e no decorrer das etapas, que foram necessárias para a resolução desta atividade, foram utilizando as descobertas dos itens anteriores.

## ATIVIDADE 02

### Proposta:

O objetivo desta atividade é identificar o lugar geométrico reta mediatriz, por meio de um sequência de construções e questionamentos. No enunciado é apresentado os registros do tipo: RLN, RF e RSb, propiciando realizar os tratamentos e conversões necessárias. No quadro 5 apresenta-se de forma sintetizada o roteiro da atividade 02.

### Quadro 5 - Roteiro da atividade 02.

- (a) Considere dois pontos quaisquer,  $A$  e  $B$  distintos, determine o conjunto de pontos formado pelos centros das circunferências que passam simultaneamente por  $A$  e  $B$ . Para isso, podendo utilizar régua não graduada e compasso, construa:
- Um segmento  $\overline{AB}$ .
  - Uma circunferência em que  $A$  e  $B$  pertençam simultaneamente.
- (b) É possível construir outras circunferências passando simultaneamente por  $A$  e  $B$ ?
- (c) Em caso afirmativo, o que elas devem satisfazer?
- (d) Retorne a construção acima e construa:
- Outras circunferências distintas, em que  $A$  e  $B$  pertençam simultaneamente.
- (e) A partir da construção realizada, o que você observa em relação aos centros das circunferências construídas?
- (f) O que você observou é válido para qualquer circunferência construída passando simultaneamente por  $A$  e  $B$ ?
- (g) Se for válido, justifique simbolicamente?
- (h) Neste momento, utilizando o GeoGebra, abra o arquivo Atividade 02 – A.  
Primeiramente, somente aperte o botão “reproduzir” observando a construção que surge.  
Após, movimente os pontos  $A$  e  $B$  e verifique o que acontece.  
O que você observou?
- (i) Porque isso aconteceu?
- (j) Agora, abra o arquivo Atividade 02 – B e realize a construção indicada.
- (k) Após, responda:  
O conjunto de pontos que compõe os centros das circunferências construídas apresenta alguma denominação especial? Se sim, qual?

Fonte: Elaborado pela autora.

## **Análise da atividade**

Nesta atividade espera-se que possam ser mobilizados três tipos de registros: RF, RSb e RLN. O RF faz-se presente nas construções apresentadas e ao justificar a sua construção, acredita-se que os alunos possam mobilizar RLN, RSb e RF.

De acordo com os pressupostos de Duval (2003), três tipos de apreensões figurais estão presentes. A apreensão perceptiva, a partir da interpretação da figura disponibilizada. A apreensão sequencial, pois para se chegar a solução, uma sequência de passos deve ser executada. Além da apreensão discursiva no momento em que o aluno analisa os entes geométricos e justifica matematicamente sua construção.

O uso do recurso computacional visa acelerar alguns tratamentos e aumentar as possibilidades de construções que, no papel, seriam mais complicadas de se visualizar. Também se pode contar com a ferramenta “Esconder/Mostrar” onde é possível obter uma construção “limpa”, deixando somente os pontos pertencentes ao lugar geométrico, propiciando uma visualização mais clara do que no papel.

Nesta atividade o uso do GeoGebra também visa propiciar aos alunos a identificação se a sua construção no papel permaneceu válida quando foi modificada a posição dos pontos dados.

A partir da análise dos registros apresentados nos protocolos dos alunos, observou-se que 03 alunos entenderam a proposta da atividade articulando com o lugar geométrico reta mediatriz e identificando as suas propriedades no decorrer da atividade. As outras 04 respostas estavam incorretas. No quadro 06 encontram-se de forma sintetizada os registros e apreensões distinguidas por Duval que foram mobilizadas pelos alunos em suas respostas.

Quadro 6 - Registros e apreensões mobilizadas na atividade 02.

(Continua)

Item	Ambiente	Registros possíveis de serem mobilizados	Nº de alunos	Observações	Apreensões mobilizadas			
					P	D	S	O
(a)	Papel	RLN → RF	07		X	X	X	
(b)	Papel	RLN → RLN	04	RLN → RLN e RSb	X			
			03					
(c)	Papel	RLN → RLN, RSb, RF	00		X			
		RLN → RLN, RSb	06					
		RLN → RLN	01					
(d)	Papel	RLN → RF	03	Resultados incorretos	X	X	X	
			04					
(e)	Papel	RLN → RLN, RSb	03		X			
		RLN → RLN	04					
(f)	Papel	RLN → RLN	07		X	X		
(g)	Papel	RLN → RSb	00	RLN → RSb, RLN	X			
			04					
			03					
(h)	GeoGebra	RLN, RF → RLN	06	RLN, RF → RLN, RSb	X		X	
			01					

Quadro 6 – Registros e apreensões mobilizadas na atividade 02.

(Conclusão)

(i)	Papel	RLN $\rightarrow$ RLN	06		X			
			01					
(j)	GeoGebra	RLN $\rightarrow$ RF	07		X		X	
(k)	Papel	RLN $\rightarrow$ RLN	04		X	X		
			03	Resultados incorretos				

Fonte: Elaborado pela autora.

Analisando os protocolos observou-se que dos 03 alunos que concluíram a atividade corretamente, apenas 01 deles citou que o lugar geométrico envolvido era reta mediatriz, outros 02 alunos somente descreveram o seu conceito. No item (a) os registros mobilizados foram:  $RLN \rightarrow RF$  e, em (b) e (c), houve a predominância do RLN. Sendo que, em algumas soluções o RSb fez-se presente, como pode-se observar no protocolo dos Alunos A, C e E:

*“Todos os centros pertencem a reta  $r$ , sendo que  $r$  é a reta perpendicular a  $\overline{AB}$  passando no ponto médio de  $\overline{AB}$ .”* (Aluno A – item (c)).

*“Seus centros devem pertencer a reta  $r$ , perpendicular a  $\overline{AB}$  que passa por  $M$  (ponto médio de  $\overline{AB}$ .”* (Aluno C – item (b)).

*“É possível desde que o centro esteja sobre a mediatriz do segmento  $\overline{AB}$  e tenha como raio a medida até  $A$  ou até  $B$ .”* (Aluno E – item (b)).

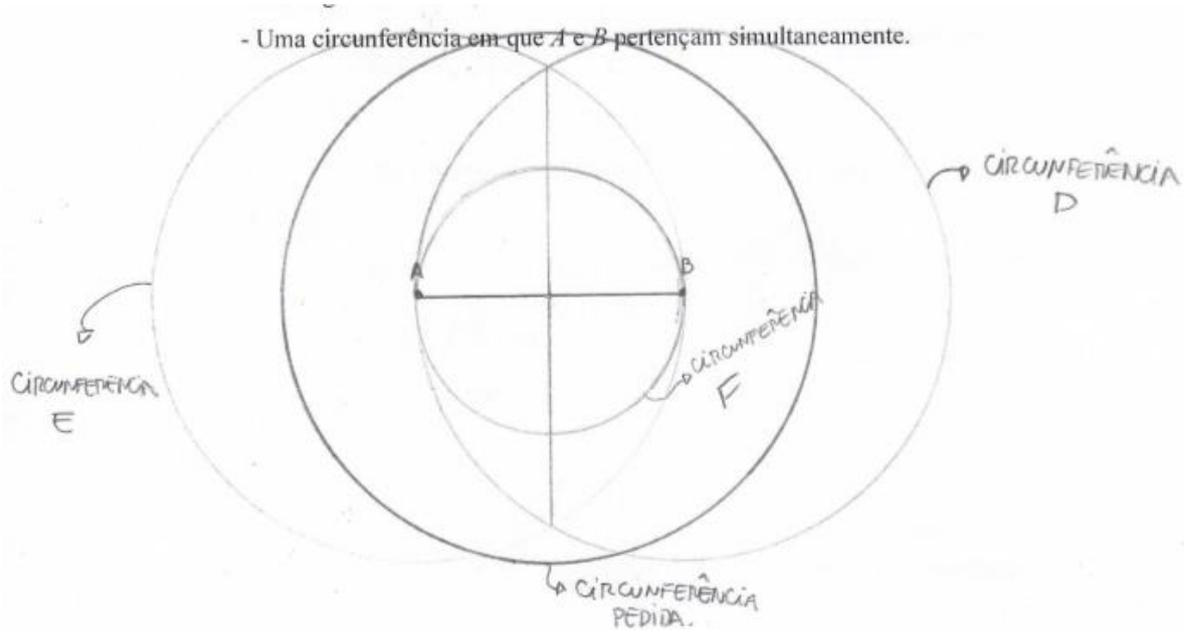
Quanto ao registro escrito solicitado aos alunos após a exploração do RF, no qual deveriam justificar as suas construções, nota-se a predominância da função apofântica, onde os alunos buscaram descrever em forma de frase algumas características a respeito do objeto envolvido. Essa descrição apresentou-se de forma completa, enunciando o que se queria sobre o objeto.

Em relação às 04 resoluções incorretas do item (d), todas construíram as circunferências pedidas sem passar simultaneamente pelos pontos  $A$  e  $B$ , como se pode observar pelos protocolos dos alunos B e D e pela construção do aluno B, na figura 6.

*“Temos a circunferência de centro o ponto médio do segmento  $\overline{AB}$ . Outras circunferências não possuíram simultaneamente os pontos  $A$  e  $B$ , somente se o ponto  $A$  ou o ponto  $B$  forem os centros das circunferências.”* (Aluno D – item (b)).

*“O raio das circunferências tem que ser igual ou maior que o segmento  $\overline{AB}$ .”* (Aluno B – item (c)).

Figura 6 - Resolução da atividade 02 (d) - Aluno B.



Fonte: Protocolo do Aluno B.

Ao analisar o item (h) utilizando o *software* GeoGebra, onde era dada a construção dos centros das circunferências que passavam simultaneamente por  $A$  e  $B$ , e solicitado que movimentassem os pontos  $A$  e  $B$ , 03 alunos conseguiram identificar que os centros não estavam apoiados sobre a reta mediatriz de  $\overline{AB}$ , e conseqüentemente, as circunferências não passavam simultaneamente pelos pontos dados. Esse fato deve-se porque, em um ambiente dinâmico, a propriedade que esses centros possuem não foi considerada, o que é possível ser evidenciada no protocolo do Aluno A.

*“Na medida em que movimenta os pontos  $A$  e  $B$  apenas a circunferência de centro  $M$  permanece passando por  $A$  e  $B$  simultaneamente.”* (Aluno A - item (h)).

*“Por que os pontos  $M_1$  e  $M_2$  não pertencem a reta perpendicular a  $\overline{AB}$  passando pelo ponto médio de  $\overline{AB}$ .”* (Aluno A – item (i)).

Ainda, 04 alunos também evidenciaram o fato dos centros não continuarem alinhados quando os pontos  $A$  e  $B$  fossem movimentados. No entanto, não identificaram a propriedade que estava envolvida, como mostra o protocolo do aluno D.

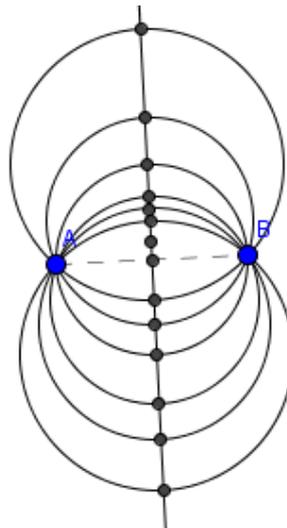
“Que modificando o segmento as duas circunferências não possuíram os pontos  $A$  e  $B$  simultaneamente.” (Aluno D – item (h)).

“Porque os centros não estão mais alinhados.” (Aluno D – item (i)).

Nestes itens nota-se a predominância de RLN, sendo que, na elaboração de suas frases os alunos utilizaram a operação discursiva apofântica, pois conseguiram expressar em uma frase o que observaram.

No item (j) foi solicitado que realizassem a construção apresentada na Atividade 02 – (a), de maneira correta. Neste espaço então, o aluno B que anteriormente não havia construído corretamente pode perceber a propriedade que os centros das circunferências criadas deveriam satisfazer e acabou com isso, realizando a construção corretamente, como mostra a figura 7.

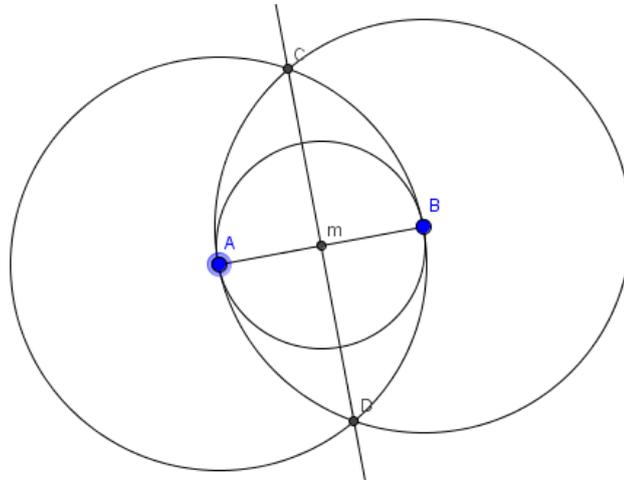
Figura 7 - Resolução da atividade 02 (j) - Aluno B.



Fonte: Protocolo do aluno B.

O aluno B respondeu o item (k) de forma correta evidenciando ser a mediatriz de  $\overline{AB}$ . Os outros 03 alunos continuaram realizando a construção equivocada onde as circunferências criadas não passavam simultaneamente por  $A$  e  $B$ . Em consequência no item (k) não identificaram o lugar geométrico envolvido (Figura 8).

Figura 8 - Resolução da atividade 02 (k) - Aluno F.



Fonte: Protocolo do Aluno F.

Em relação ao uso do recurso dinâmico nesta atividade acredita-se que teve um papel importante de simulação no item (h), evidenciado por Duval (2011), pois os alunos puderam movimentar os pontos dados na tela do computador, propiciando assim a mobilização RLN, RF  $\rightarrow$  RLN.

Esse apoio que o *software* oportunizou no decorrer da atividade é evidenciado por Duval (2011): “confere as figuras uma confiabilidade e uma objetividade que permitem efetuar verificações e observações” (Duval, 2011, p.84). Desta forma acredita-se que a atividade proporcionou aos alunos a oportunidade de analisarem e perceberem o lugar geométrico e a propriedade envolvida em cada uma das situações. E, ainda, se relata as inúmeras possibilidades de tratamentos e conversões que o uso de *softwares* oferecem nas atividades de geometria.

Quanto ao registro escrito solicitado sempre após uma construção, em cada item, no qual deveriam justificar ou identificar alguma propriedade envolvida, percebeu-se certa resistência, quanto a utilização de diferentes registros, predominando RLN. Ainda, Duval (2003) coloca a importância da apreensão discursiva, que consiste na interpretação em RLN dos elementos e suas propriedades definidas.

### ATIVIDADE 03

#### Proposta:

Com esta atividade espera-se que o aluno articule com o lugar geométrico circunferência concêntrica a uma circunferência dada. Para isso, utilizou-se registros RLN, RF e RSb presentes nos enunciados dos itens, onde a partir da interpretação dos dados o aluno pode realizar os tratamentos e conversões solicitadas. No quadro 7 é descrito o roteiro da atividade proposta.

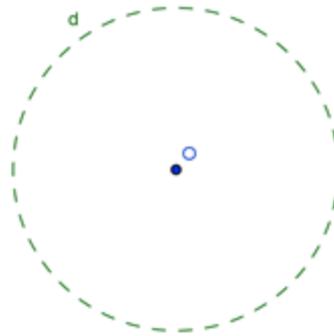
Quadro 7 - Roteiro da atividade 03.

(Continua)

- (a) Abra o arquivo Atividade 03 – A no GeoGebra e realize os seguintes passos:
- Construa uma circunferência  $c$  com centro e raio fixos.
  - Construa uma corda qualquer,  $s$ , com medida fixa.
  - Habilite o rastro dessa corda.
  - Movimente a corda sobre a circunferência  $c$ .
- Após, responda:
- (b) O que você pode afirmar em relação a corda construída? Descreva o que aconteceu.
- (c) Retorne a construção no GeoGebra e realize o que se pede:
- Desabilite o rastro da corda e apague as cordas construídas (Ctrl F).
  - Determine o ponto médio,  $M$ , da corda  $s$ .
  - Habilite o rastro do ponto  $M$ .
  - Movimente a corda  $s$  sobre a circunferência  $c$ .
- (d) O que você observou?
- (e) Os pontos que compõe a figura que surge a partir do rastro de  $M$  atendem alguma propriedade em relação a circunferência inicial  $c$ ?
- (f) Em caso afirmativo qual?
- (g) Na figura a seguir, seja  $d(O,r)$  a circunferência gerada pelos pontos médios das cordas de mesmo comprimento, pertencentes a uma circunferência  $c$ .
- Determine a circunferência  $c$ , e descreva como se determina uma corda pertencente a  $c$  que satisfaça essa propriedade.

## Quadro 7 – Roteiro da atividade 03.

(Conclusão)



(h) Agora abra o arquivo Atividade 03 – B e realize o que se pede:

- Modifique a medida da corda.

Após, responda:

Se aumentar o comprimento da corda  $s$ , a circunferência que vai ser obtida a partir do ponto médio, apresenta qual característica em relação ao centro da circunferência  $c$ ?

(i) E se diminuir o comprimento da corda  $s$ ?

Fonte: Elaborado pela autora.

### Análise da atividade

De acordo com Almeida (2007) a propriedade envolvida nesta atividade é considerada de natureza simples, pois o lugar geométrico que gerado é facilmente concebido. Assim, acredita-se que os alunos sejam capazes de realizar a construção necessária para a obtenção da solução. Quanto às apreensões visuais, esta atividade apoia-se na perceptiva e discursiva, que juntas visam a articulação do lugar geométrico partindo do que é dito em conjunto com as formas que se destacam. A apreensão sequencial também se faz presente, pois uma sequência de passos deverá ser executada no desenvolvimento da atividade.

As justificativas apresentadas apoiam-se na apreensão discursiva que, para Duval (2003), visa a interpretação dos elementos que a figura geométrica apresenta. Neste caso, espera-se que os alunos sejam capazes de visualizar que o lugar geométrico procurado é uma circunferência concêntrica a circunferência dada. Assim busca-se na apreensão discursiva a mobilização de RLN, RSb e RAI, ao apresentarem as justificativas para a construção realizada.

No quadro 08 se encontra de forma sintetizada os registros e apreensões extraídas dos protocolos dos alunos.

Quadro 8 - Registros e apreensões mobilizadas na atividade 03.

Item	Ambiente	Registros possíveis de serem mobilizados	Nº de alunos	Observações	Apreensões			
					P	D	S	O
(a)	GeoGebra	RLN → RF	07		X	X	X	X
(b)	Papel	RLN → RLN	07	Resultado incorreto	X			
(c)	GeoGebra	RLN → RF	07		X	X	X	X
(d)	Papel	RLN → RLN	07		X			
(e)	Papel	RLN → RLN	05		X	X		
			02	RLN → RLN e RF				
(f)	Papel	RLN → RLN	05		X			
		RLN → RLN, RF e RSb	00	Não apresentaram registros				
(g)	Papel	RLN e RF → RF	00		X	X		
			05	RLN e RF → RF, RLN e RSb				
			02	Não apresentaram registros				
(h)	GeoGebra	RLN e RF → RLN	07		X	X	X	X
		RLN e RF → RLN e RSb	00					
		RLN e RF → RLN e RAI	00					
(i)	GeoGebra	RLN e RF → RLN	07		X			
		RLN e RF → RLN e RSb	00					
		RLN e RF → RLN e RAI	00					

Fonte: Elaborado pela autora.

Dentre os 07 protocolos analisados todos demonstraram entender a proposta da atividade. No entanto, constam soluções incompletas ou com resultados errôneos em alguns itens. Quanto aos registros mobilizados observou-se predominância em RLN e RF. O RAI não fez-se presente em nenhuma resolução analisada.

No item (a) onde é explorada a apreensão sequencial todos os alunos, com o apoio do *software* GeoGebra, realizaram a construção correta, mobilizando RLN  $\rightarrow$  RF. No entanto, no item (b), nenhum aluno identificou o movimento da corda sobre a circunferência  $c$ , possibilitando o surgimento de novas cordas com medida fixa, como ficou evidenciado em alguns protocolos:

*“O rastro da corda determina uma circunferência menor.”* (Aluno A – item (a)).

*“A medida da corda nunca muda.”* (Aluno F – item (b)).

*“A corda “caminha” sobre a circunferência e formou-se uma outra circunferência preenchida.”* (Aluno G – item (b)).

*“Habilitando o rastro surge uma “nova” circunferência, interior a circunferência  $c$ .”* (Aluno D – item (b)).

A partir da construção do item (c) os alunos conseguiram identificar qual o lugar geométrico que estava envolvido na atividade, mobilizando RLN  $\rightarrow$  RLN como pode ser observado através da resposta dada pelo aluno F. Ainda, no item (d) se pode encontrar outras observações referentes ao lugar geométrico circunferência, como por exemplo, nos registros dos Alunos B e D, onde afirmaram:

*“O lugar geométrico dos pontos médios também é uma circunferência.”* (Aluno F – item (c)).

*“Ela criou outra circunferência dentro da circunferência  $c$ .”* (Aluno B – item (d)).

*“Que a corda sempre vai tangencia a “nova” circunferência exatamente no ponto médio.”* (Aluno D – item (d)).

A partir da análise desses protocolos se pode notar que a função cognitiva do RLN é a referencial onde, em poucas palavras, buscou-se descrever o que foi visualizado em suas construções. Nota-se também que nenhum aluno descreveu o que visualizou como sendo o “conjunto de pontos que satisfazem uma propriedade”, ou seja, a ideia de lugar geométrico ficou oculta em suas respostas. No item (e), 05 alunos identificaram que a circunferência criada

é concêntrica em relação à circunferência dada inicialmente, apresentando o RLN, como é evidenciado nos seguintes protocolos:

*“Ambas as circunferências são concêntricas, ou seja, possuem o mesmo centro, porém raios distintos.”* (Aluno E – item (f)).

*“Essa nova circunferência possui o mesmo centro que  $c$ .”* (Aluno D – item (e)).

*“É uma figura semelhante a  $c$  e possui o mesmo centro de  $c$ .”* (Aluno G – item (e)).

*“São pontos internos a circunferência cuja corda  $s$  tangencia os pontos da nova circunferência.”* (Aluno A – item (f)).

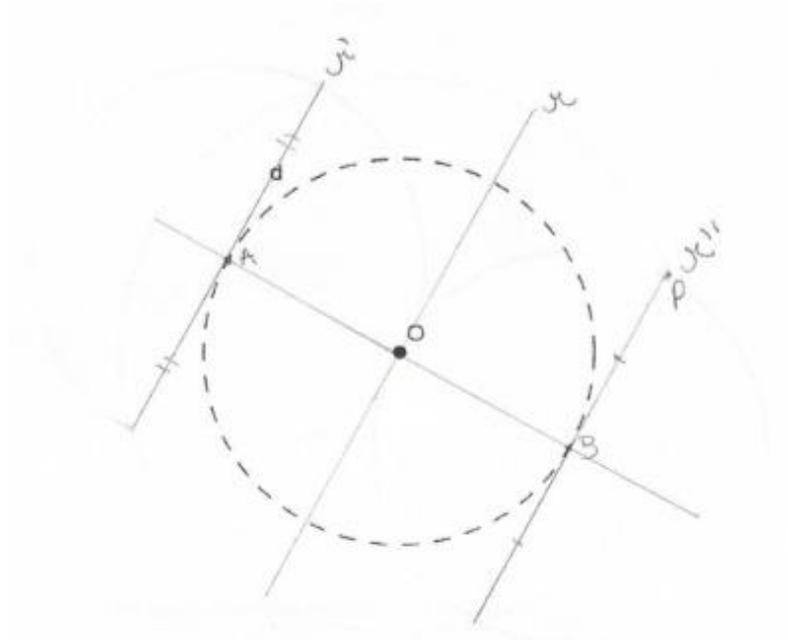
No item (g), onde a partir do lugar geométrico pede-se para determinar as cordas de uma circunferência qualquer que está apoiada na propriedade descoberta no item interior, notou-se que 02 alunos não conseguiram realizar a atividade, pontuando que não sabiam como fazer. Os demais, conseguiram resolver o problema, apresentando os RF, RLN e RSb em suas descrições, e que também pode ser evidenciado nas figuras 9 e 10.

Nos seus protocolos indicaram:

*“Para encontrar  $c$  traçamos um raio  $\overline{OP}$  qualquer de  $d$ . Em seguida prolongamos  $\overline{OP}$  até um ponto  $Q$ , tal que  $P$  seja ponto médio de  $\overline{OQ}$ . Traçamos a mediatriz  $r$  de  $\overline{OQ}$  passando por  $P$  e a circunferência  $c$  de centro  $O$  e raio  $\overline{OP}$ . A interseção entre  $r$  e  $d$  será o ponto  $R$  tal que  $\overline{OR}$  é o raio da circunferência  $c$ . A corda é determinada de modo que o raio de  $c$  seja a sua mediatriz.”* (Aluno A – item (g)).

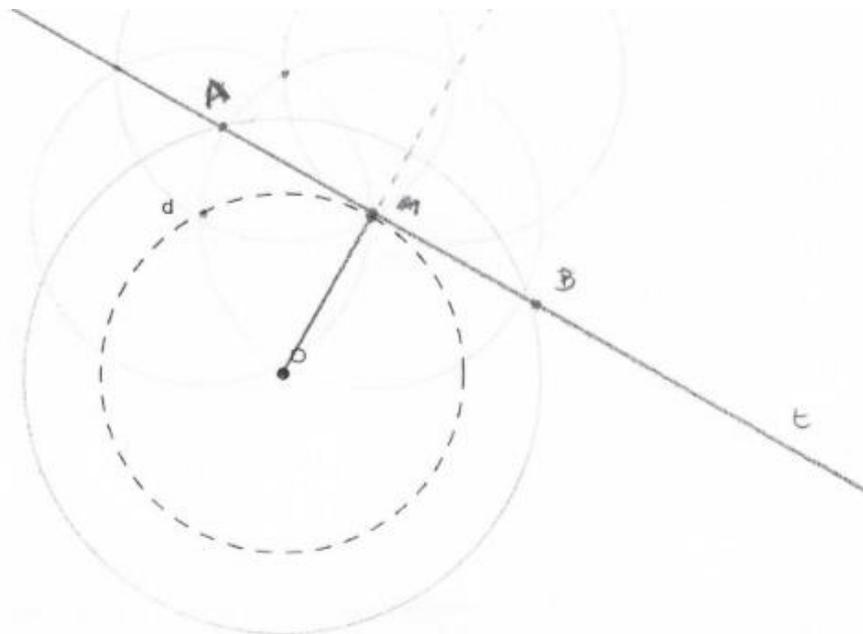
*“Defina um ponto  $M$  em  $d$ . Passamos uma reta  $t$ , tangente a  $d$  em  $M$ . Em  $t$ , tomemos um ponto  $A \neq M$ . Passamos uma circunferência  $c$  com raio  $\overline{OA}$ . Marcamos  $B = t \cap c$ . A corda  $\overline{AB}$  fica então determinada.”* (Aluno C – item (g)).

Figura 9 - Resolução da atividade 03 (g) - Aluno A.



Fonte: Protocolo do Aluno A.

Figura 10 - Resolução da atividade 03 (g) - Aluno C.



Fonte: Protocolo do Aluno C.

Nos itens (h) e (i), agora com o auxílio do GeoGebra, todos os alunos puderam visualizar o que acontecia, ao modificar a medida do comprimento da corda em relação ao lugar

geométrico obtido. Para isso, mobilizaram RLN com predominância da função aponfântica, como se observa nos seguintes protocolos:

*“Se aumentar a corda  $s$  a circunferência se aproxima cada vez mais ao ponto  $O$  que é o centro da circunferência.”* (Aluno B – item (h)).

*“Se diminuir o tamanho da corda a circunferência obtida pelo ponto  $M$ , acaba tornando-se a própria circunferência  $c$ .”* (Aluno B – item (i)).

*“O raio da nova circunferência vai ser cada vez menor que o raio de  $c$ .”* (Aluno C – item (h)).

*“O raio desta nova circunferência gerada vai se aproximar do raio de  $c$ .”* (Aluno C – item (i)).

Com base nos dados obtidos por meio dos protocolos dos alunos, constatou-se o predomínio do RLN e, em algumas vezes, este vinha acompanhado do RF e do RSb. Notou-se também que os resultados obtidos nos itens anteriores foram sendo utilizados no desenvolver da sequência do roteiro. Além disso, concluiu-se que algumas etapas possam ter ocorrido visualmente ou mentalmente. No entanto, isso não acarretou dificuldades na hora de exporem sua resposta de forma escrita. Ainda, cabe salientar que no ambiente onde as atividades foram desenvolvidas o nível de concentração foi alto para não perder a sequência de entendimento que a mesma demandava.

É bom lembrar que, a apresentação de uma figura nem sempre facilita a visualização das propriedades correspondentes a ela. No entanto, poderá auxiliar de forma satisfatória se for agregado a ela a possibilidade de sua manipulação, conforme a estratégia explorada na atividade. Desse modo, acredita-se que a atividade proporcionou aos alunos interpretar e buscarem estratégias para a resolução do problema, seja com instrumentos físicos, ou com o GeoGebra, mobilizando dessa forma os RLN, RSb e RF.

## ATIVIDADE 04

### Proposta:

Esta atividade visa articular entes geométricos pertencentes ao lugar geométrico circunferência concêntrica. Apresenta-se RLN, RF e RSb no enunciado dos itens, propiciando a interpretação e realização dos tratamentos e conversões ao desenvolver a atividade. Ainda, dentre os registros que podem ser mobilizados, espera-se que se possa ser articulado com RAI quando é solicitada uma justificativa algébrica. No quadro 9 apresenta-se o roteiro da atividade.

Quadro 9 - Roteiro da atividade 04.

Traçar a partir do ponto  $P$  retas secantes a circunferência dada de modo que as cordas definidas pelas retas secantes tenham mesma medida. Para isso:

(a) Abra o arquivo Atividade 04 no GeoGebra e construa:

- Um ponto  $P$  exterior a circunferência  $c$  (azul).
- Por  $P$ , as retas tangentes a circunferência  $d$  (verde).

(b) O que você pode afirmar a respeito das retas construídas em relação a circunferência  $c$  (azul)?

(c) Retorne a construção no GeoGebra, e construa (marque) as cordas que as retas tangentes construídas definem em  $c$ .

(d) Existe alguma relação entre as medidas destas cordas?

(e) Se sim, qual? Justifique algebricamente.

Fonte: Elaborado pela autora.

### Análise da atividade

Nesta atividade, acredita-se que três das apreensões distinguidas por Duval (2012a) estão contempladas. A apreensão perceptiva encontra-se subordinada a apreensão discursiva, uma vez que, para resolver a atividade tem-se a necessidade de através dos enunciados articular a figura inicial, para então obter a solução proposta. A apreensão sequencial está evidenciada no roteiro disponibilizado.

No quadro 10 se encontram os registros e as apreensões mobilizadas pelos alunos em cada item do roteiro proposto.

Quadro 10 - Registros e apreensões mobilizadas na atividade 04.

Item	Ambiente	Registros possíveis de serem mobilizados	Nº de alunos	Observações	Apreensões mobilizadas			
					P	D	S	O
(a)	GeoGebra	RLN e RF → RF	07		X	X	X	
(b)	Papel	RLN → RLN e RSb	00	Resultados incompletos	X			
		RLN → RLN	03 04					
(c)	GeoGebra	RLN e RF → RF	07		X	X	X	
(d)	Papel	RLN → RLN	03	Resultados incompletos	X	X		
			04					
(e)	Papel	RLN → RLN, RSb e RAI	00 00	Resultados incompletos	X			
		RLN → RLN RLN → RLN e RSb	03 04					

Fonte: Elaborado pela autora.

Nesse tipo de atividade o foco inicial não está no ponto  $P$ , pois a percepção do lugar geométrico das cordas, com medida estabelecida traçadas na circunferência dada não levam em consideração o ponto  $P$ . Poderia ocorrer do aluno buscar uma estratégia inicialmente utilizando o ponto  $P$ . Assim, buscou-se fornecer subsídios para que eles conseguissem visualizar a propriedade e o lugar geométrico envolvidos.

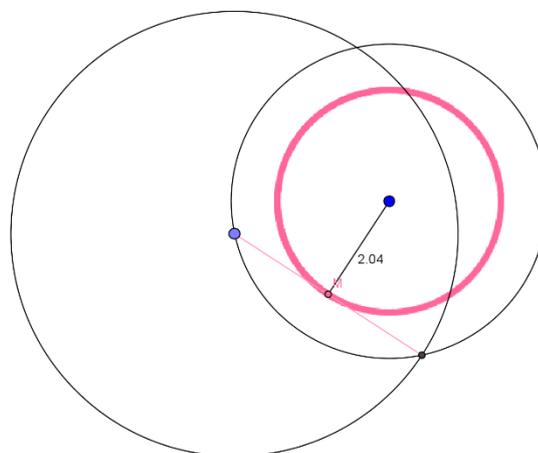
Este tipo de situação visa a dificuldade em des(construir) uma figura e está ligada a visualização que se faz em relação ao objeto a ser construído. Segundo Duval (2003), a visualização mental que se faz do objeto a ser construído vai se constituir em um modelo de referência. Neste caso, deve-se levar em consideração inicialmente o fato das cordas terem a medida fixa, o que vem de encontro com o que foi abordado na atividade anterior. Assim, espera-se que os alunos possam conseguir identificar essa relação no decorrer da atividade.

Como abordado por Duval (2012b) o uso do recurso tecnológico visa acelerar os tratamentos necessários para a construção. Neste caso, com o uso do recurso essa construção é facilitada e permite uma melhor visualização geométrica e manipulação dos objetos envolvidos. Além de propiciar aos alunos seguirem outras estratégias para a solução do problema.

Ao analisar os registros da atividade 04, encontra-se 03 alunos que fizeram ligação com a atividade 03 e evidenciaram essa relação. Os demais apresentaram ideias incompletas em alguns itens, não chegando a uma identificação da propriedade envolvida. Quanto aos registros, a maioria utilizou o RLN, e em alguns protocolos, o RSb se fez presente.

No item (a) todos os alunos conseguiram realizar a construção dada pela sequência de passos, mobilizando RLN e  $RF \rightarrow RF$ , como ilustrado na figura 11.

Figura 11 - Resolução da atividade 04 (a) - Aluno A.



Fonte: Protocolo do Aluno A.

A partir dessa construção, no item (b), apenas 03 alunos concluíram que a reta construída tangente a circunferência  $d$  é secante a circunferência  $c$ , mobilizando apenas RLN. Assim, a função cognitiva presente é a apofântica, pois eles descreveram em uma frase o que foi observado na construção do item (a). Esse fato pode ser evidenciado nos protocolos dos alunos D e E, onde afirmaram que:

*“As retas tangentes são secantes a circunferência  $c$ .”* (Aluno D – item (b)).

*“As retas tangentes a circunferência verde são secantes em relação a circunferência azul.”* (Aluno E – item (b)).

No item (c) onde os alunos retornam ao GeoGebra, todos interpretaram o enunciado corretamente e fizeram a marcação correta dos segmentos de retas solicitadas. No entanto, no item (d), apenas 03 alunos conseguiram visualizar a relação existente entre as medidas das cordas. Também observou-se que no item (e), onde era explorada uma justificativa algébrica para as medidas das cordas na construção em (c), estes mesmos alunos usaram o RLN e o RSb. Nota-se que nenhum aluno, usou o RAI em suas justificativas. Isso pode ser observado no protocolo dos alunos A, C e G:

*“ $\overline{GH} \equiv \overline{IJ}$ , isto é, a medida de ambas as cordas, é a mesma.”* (Aluno A – item (e)).

*“(...) Por resultado já trabalhado (atividade da aula anterior) segue que  $M$  e  $N$  são pontos médios de  $\overline{AB}$  e  $\overline{CD}$  pois pertencem a  $d$  que está inscrita em  $c$  e possui o mesmo centro. Logo,  $\overline{AB} \equiv \overline{CD}$  (possuem mesma medida).”* (Aluno C – item (e)).

*“O ponto médio das cordas é o ponto de tangencia com a circunferência. Por isso, possuem mesma medida.”* (Aluno G – item (e)).

Diante dos resultados, observa-se às apreensões apontadas por Duval (2012a). A apreensão perceptiva onde através do reconhecimento visual imediato da forma e sua interpretação, os alunos já podem tirar algumas considerações a respeito do problema. A apreensão discursiva surge por meio de alguns questionamentos/hipóteses que são colocados e a partir disso, os alunos podem realizar a sua interpretação dos elementos. Ainda, tem-se a apreensão sequencial que é explicitamente solicitada em atividades de construção, tendo por objetivo, neste caso, o desenvolvimento do roteiro proposto.

Da mesma forma que a atividade anterior, este tipo de atividade, o uso do recurso computacional propicia uma visualização muito mais rápida do que se obteria utilizando

instrumentos físicos, como régua e compasso. Esse caráter dinâmico permite desempenhar a função de simulação, auxiliando na exploração heurística de problemas matemáticos.

## ATIVIDADE 05

### Proposta:

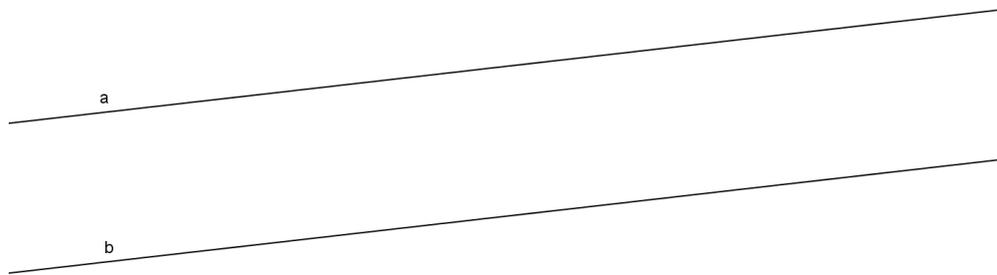
Nesta atividade busca-se articular com o lugar geométrico bissetriz, mobilizado os RF, RLN e RSb. No quadro 11 apresenta-se o roteiro da presente atividade.

Quadro 11 - Roteiro da atividade 05.

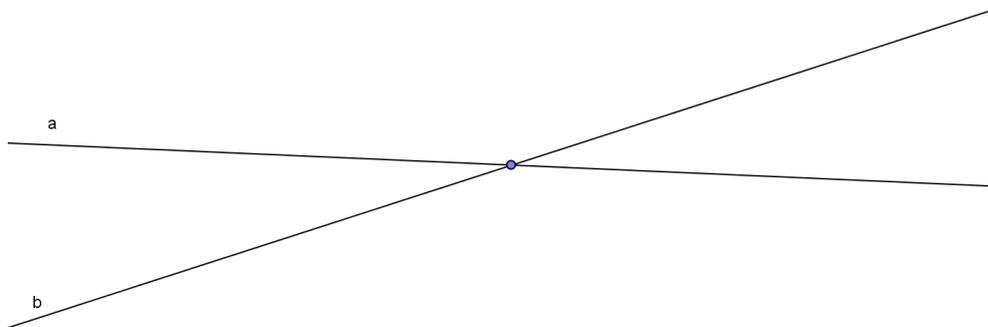
(Continua)

(a) A partir de duas retas  $a$  e  $b$  quaisquer, construa um ponto  $P$  que equidiste simultaneamente de  $a$  e  $b$ . Para isto, considere:

$a // b$



(b)  $a$  e  $b$  concorrentes



(c) A partir das construções acima, o que você pode afirmar a respeito da determinação ponto  $P$ ?

(d) Você identifica alguma propriedade para o ponto  $P$ ?

(e) Utilizando o recurso de geometria dinâmica, realize as construções que se pede.

Arquivos: - Atividade 05 – A. - Atividade 05 – B - Atividade 05 – C - Atividade 05 - D

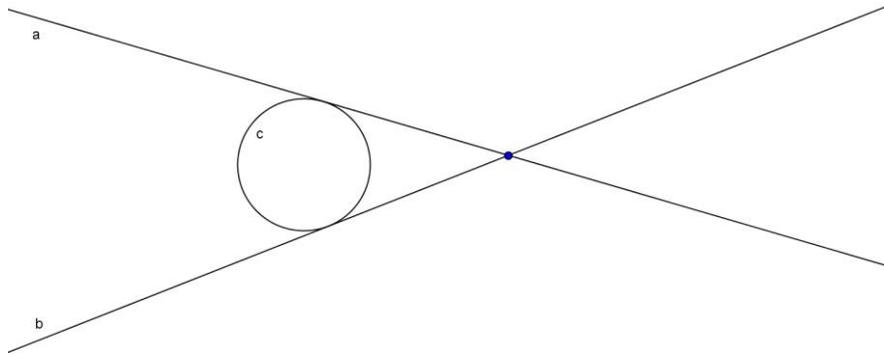
(f) A partir das construções realizadas, o que se pode afirmar sobre o ponto  $P$  (possíveis soluções) em relação as posições relativas de  $a$ ,  $b$  e  $c$ ?

## Quadro 11 – Roteiro da atividade 05.

(Conclusão)

(g) O ponto P satisfaz alguma propriedade?

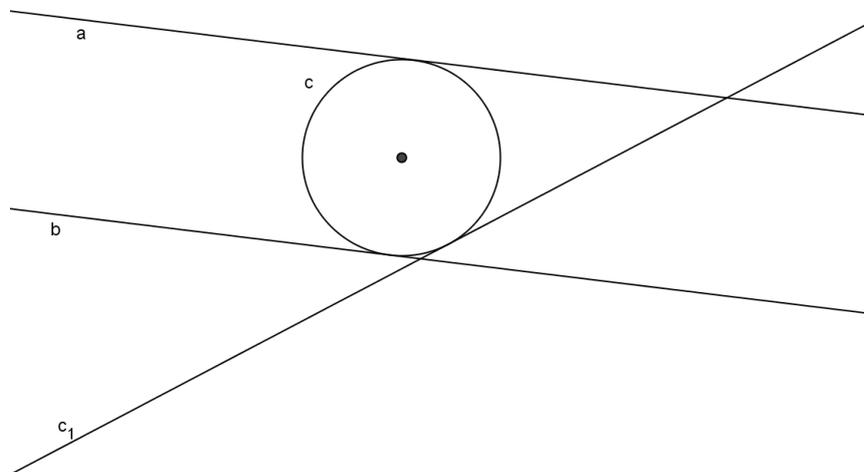
(h) A partir da figura abaixo, onde  $c$  é uma circunferência tangente simultaneamente as retas  $a$  e  $b$ , como se determina o centro de  $c$ ?



(i) É possível determinar outras circunferências que tangenciem simultaneamente as retas  $a$  e  $b$ ?

(j) Se sim, como elas podem ser definidas?

(k) Considerando a figura abaixo, onde  $c$  é uma circunferência tangente simultaneamente as retas  $a/b$  e  $c$  transversal, como se determina o centro de  $c$ ?



(l) É possível determinar outras circunferências que tangenciem simultaneamente as retas  $a$ ,  $b$  e  $c$ ?

(m) Se sim, como elas podem ser definidas?

(n) Agora utilizando o recurso Geogebra, abra o arquivo Atividade 05 – E, e realize a construção.

(o) Que características a(s) circunferência(s) construída(s) obedecem?

Fonte: Elaborado pela autora.

## **Análise da atividade**

Nesta atividade seguindo os pressupostos de Duval (2012a) espera-se que possam ser mobilizados três tipos de registros: RF, RSb e RLN. Em relação às apreensões, estão contempladas: perceptiva, sequencial e discursiva. Segundo Duval (2003) as atividades precisam mobilizar simultaneamente, ao menos, dois registros de representação, ou possibilitar a passagem de um registro em outro. Espera-se também que os alunos consigam identificar o lugar geométrico envolvido e suas propriedades.

Para isso, inicialmente, se propõe uma exploração com apenas duas retas, juntamente com as possíveis soluções levando-se em consideração as posições relativas dessas retas. Após, busca-se fazer essa exploração com três retas e suas posições relativas. Espera-se que os alunos consigam, em cada caso, identificar as possíveis soluções e o lugar geométrico envolvido.

Como mencionado na atividade anterior, de acordo com Duval (2003) o uso do recurso possibilita uma melhor visualização de todas as possíveis soluções, enquanto que no ambiente papel, o aluno poderá ficar restrito a algumas soluções.

Dentre os protocolos analisados, observou-se que no desenvolver da atividade os alunos foram identificando as propriedades do lugar geométrico bissetriz e que as possíveis soluções estavam em identificar um ponto pertence a este ente geométrico. Também que alguns alunos não conseguiram realizar todos os itens propostos, deixando alguns em aberto ou sem apresentar registros. Também ocorreram situações com os resultados encontrados estavam incompletos. Quanto aos registros, novamente houve predominância dos RLN e RF, como evidenciado no quadro 12, onde destacam-se também as apreensões que foram mobilizadas pelos alunos na atividade 04.

Quadro 12 - Registros e apreensões mobilizadas na atividade 05.

(Continua)

Item	Ambiente	Registros possíveis de serem mobilizados	Nº de alunos	Observações	Apreensões mobilizadas			
					P	D	S	O
(a)	Papel	RLN, RSb e RF → RF	07	Resultado incompleto	X	X	X	
(b)	Papel	RLN, RSb e RF → RF	05					
			02	RLN, RSb e RF → RF e RSb	X	X	X	
(c)	Papel	RLN → RLN	07		X			
(d)	Papel	RLN → RLN	05		X			
			02	RLN → RLN e RSb				
(e)	GeoGebra	RLN, RSb e RF → RF	04		X	X	X	X
			03	Não apresentaram registros				
(f)	Papel	RLN → RLN	01		X	X		
			06	Não apresentaram registros				
(g)	Papel	RLN → RLN	01					
		RLN → RLN e RSb	00		X			
			06	Resultados incompletos				
(h)	Papel	RLN e RF → RF	07		X	X	X	X
(i)	Papel	RLN → RLN	05		X	X		
			02	Não apresentaram registros				X

Quadro 12 – Registros e apreensões mobilizadas na atividade 05.

(Conclusão)

(j)	Papel	RLN $\rightarrow$ RLN e RSb	05		X			
			02	Não apresentaram registros				
(k)	Papel	RLN, RSb e RF $\rightarrow$ RF RLN, RSb e RF $\rightarrow$ RLN	04		X	X	X	X
			00					
			03	Não apresentaram registros				
(l)	Papel	RLN $\rightarrow$ RLN	07	03 resultados incompletos	X			
(m)	Papel	RLN $\rightarrow$ RLN RLN $\rightarrow$ RLN e RF	07		X			
			00					
(n)	GeoGebra	RLN e RF $\rightarrow$ RF	07		X	X	X	X
(o)	Papel	RLN $\rightarrow$ RLN RLN $\rightarrow$ RLN e RSb	07		X			
			00					

Fonte: Elaborado pela autora.

No item (a) onde as retas apresentadas eram paralelas, todos os alunos realizaram a construção identificando o ponto  $P$  como sendo o ponto médio entre a distância das duas retas dadas. No entanto, nenhum aluno mencionou que existem outros pontos que satisfazem o problema, ou seja, não identificaram o lugar geométrico envolvido, como se pode notar na descrição do Aluno F:

*“Seja  $c$  a reta perpendicular entre as retas  $a$  e  $b$ ,  $R$  e  $S$  os pontos de interseção entre  $c$  e  $a$ ,  $c$  e  $b$ , respectivamente. O ponto médio  $P$  de  $\overline{AB}$  equidista de  $a$  e  $b$ .”* (Aluno F – item (a)).

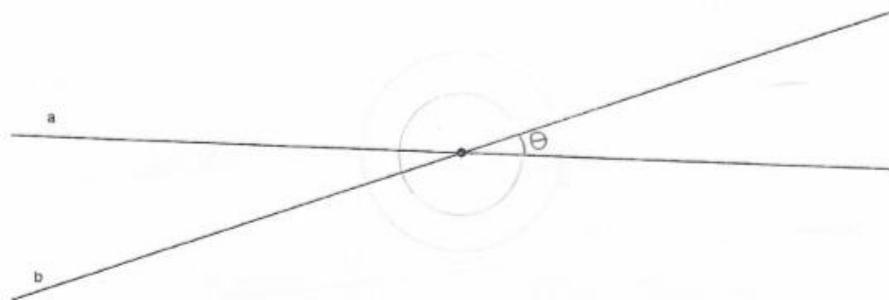
No item (b) onde as retas dadas eram concorrentes, observou-se que apenas 02 alunos identificaram o lugar geométrico bissetriz em suas construções. Destes, o Aluno A, colocou que não conseguiu realizar a construção, mas que o ponto deveria pertencer a bissetriz, mobilizando apenas RLN. Enquanto, o aluno D realizou a construção e ainda mencionou em sua descrição que, inicialmente, usou o GeoGebra para poder visualizar a sua resolução, e depois construiu utilizando instrumentos físicos, como solicitado. Além disso, os registros do Aluno D basearam-se apenas no RSb a fim de descrever e justificar a sua construção, como fica evidenciado na figura 12 e nos protocolos:

*“Não consegui construir, mas os pontos pertencentes a bissetriz do ângulo  $\theta$  equidistam de  $a$  e  $b$ .”* (Aluno A – item (b)).

*“ $r$  bissetriz  $\widehat{ABC}$ ;  $P \in r$ ;  $s \perp r$ ;  $P = s \cap r$ ;  $\overline{A'P} = \overline{B'P}$  .*

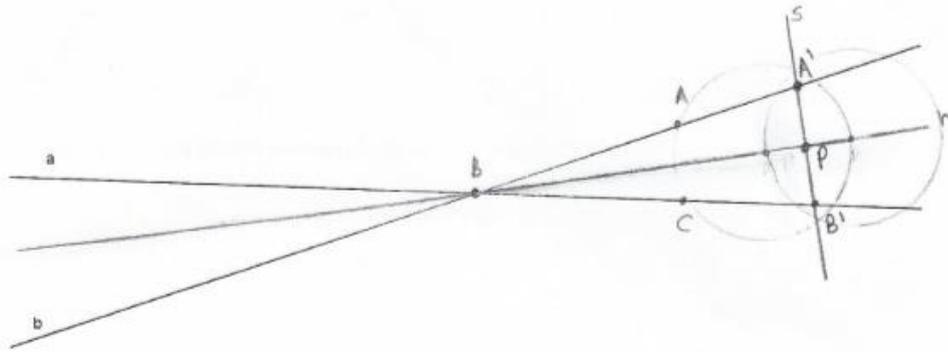
*Obs: Utilizei o GeoGebra para a construção inicial. ”* (Aluno D – item (b)).

Figura 12 - Resolução da atividade 05 (b) - Aluno A.



Fonte: Protocolo do Aluno A.

Figura 13 - Resolução da atividade 05 (b) - Aluno D.



Fonte: Protocolo do Aluno D.

No item (d) quando solicitado se identificavam alguma propriedade envolvida, apenas 03 alunos responderam que identificaram. Destes, 02 alunos mencionaram o lugar geométrico bissetriz, mobilizando RSb e RLN. Dentre os RLN, destaca-se a função apofântica nos registros dos alunos C e D. No registro do Aluno A nota-se a função cognitiva referencial, visto que esse aluno colocou apenas algumas palavras juntamente com RSb, a fim de formar a sua frase, como evidencia-se nos seguintes protocolos:

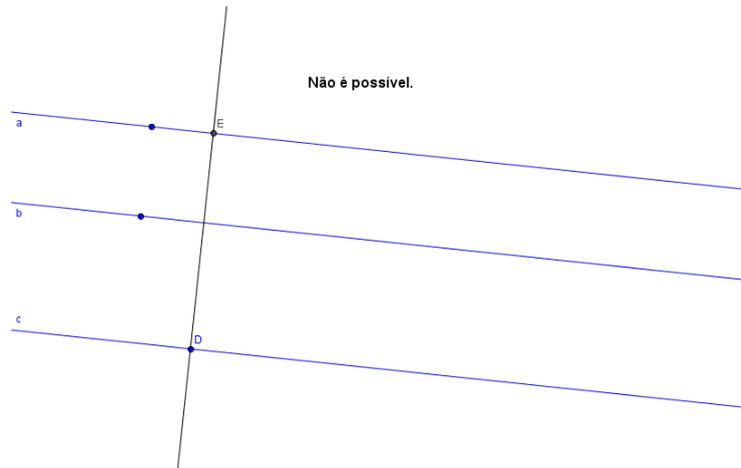
*“Na questão b) define uma reta bissetriz com o ponto de interseção entre a e b.”* (Aluno C – item (d)).

*“No item b)  $P \in$  bissetriz de  $\theta$ .”* (Aluno A – item (d)).

*“O ponto P sempre será o ponto médio dos segmentos que indicam a distância das duas retas.”* (Aluno D – item (d)).

No item (e) foi proposto aos alunos determinarem o ponto  $P$  obedecendo a condição colocada no início, tendo para isso três retas e suas posições relativas. Este item foi explorado com o auxílio do *software* GeoGebra. Na primeira situação onde as três retas eram paralelas, apenas 04 alunos postaram seus arquivos, os demais não apresentaram nenhum registro. Destes encontra-se 01 aluno que não concluiu a sua construção e 03 alunos que mencionaram não ser possível a determinação do ponto  $P$ , como se pode observar nos registros de um deles, a partir da figura 14.

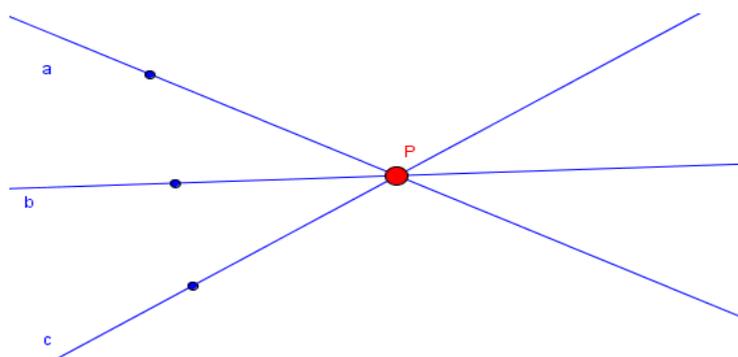
Figura 14 - Resolução da atividade 05 (e) - Aluno D.



Fonte: Protocolo do Aluno D.

Ainda, neste item, na segunda situação onde a posição relativa das três retas eram concorrentes entre si, observou-se que 04 alunos apresentaram seus registros. Destes, apenas o aluno C conseguiu identificar o ponto P que satisfaz o problema (Figura 15). O aluno D registrou que não era possível determinar o ponto P e os demais relataram que não conseguiram visualizar a resolução.

Figura 15 - Resolução da atividade 05 (e) - Aluno C.



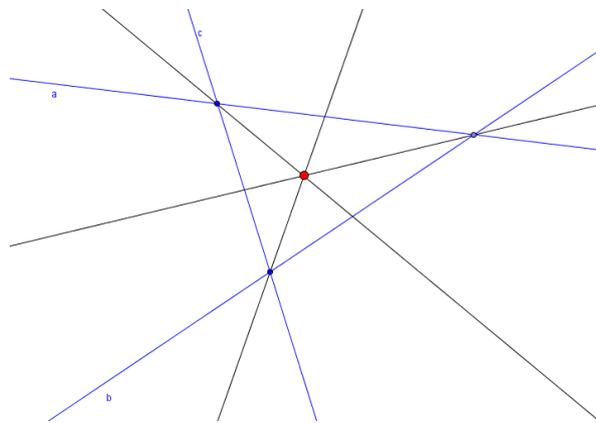
Fonte: Protocolo do Aluno C.

Na terceira situação onde se encontravam duas retas paralelas cortadas por uma transversal, 05 alunos apresentaram seus RF. Destes, o Aluno D novamente, colocou ser

impossível determinar o ponto  $P$ . Os demais alunos apresentaram registros inconclusivos, não conseguindo determinar o que a atividade propunha.

E, por último, na quarta situação proposta onde as três retas eram concorrentes duas a duas, 06 alunos apresentaram o RF. Destes, 02 alunos não concluíram suas construções. Os demais alunos conseguiram identificar o ponto procurado. No entanto, concluíram nesta situação, que este ponto é único, como ilustra a figura 16.

Figura 16 - Resolução da atividade 05 (e) - Aluno C.



Fonte: Protocolo do Aluno C.

No item (f) apenas o Aluno E fez uma observação referente às construções realizadas no GeoGebra, identificado em (g) a propriedade envolvida. Em seus registros esse aluno conseguiu identificar o lugar geométrico envolvido. Nota-se em seus RLN o destaque da função cognitiva apofântica, como evidenciado em seu protocolo:

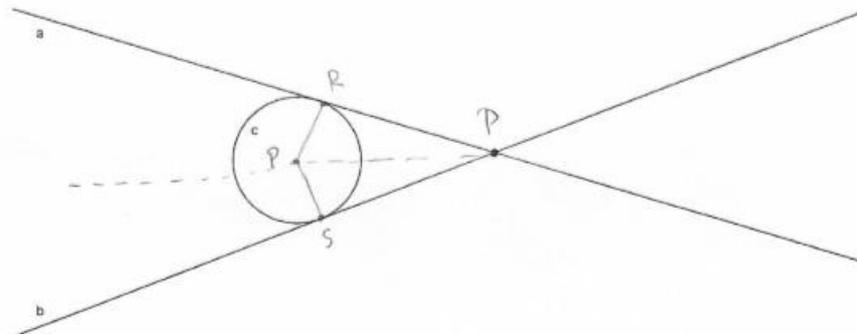
*“Foi determinado a partir das bissetrizes dos ângulos.”* (Aluno E – item (f)).

*“O ponto  $P$  foi determinado a partir do ponto de encontro das bissetrizes.”* (Aluno E – item (g)).

No item (h) onde foi proposto a determinação do centro de uma circunferência tangente, simultaneamente a duas retas concorrentes, todos os alunos apresentam seus RF. Apenas o Aluno F acrescentou uma descrição a sua construção em RLN, como evidenciado na figura 17 e no protocolo descrito a seguir.

”Bom, o centro é um ponto que equidiste dos pontos de tangencia, pois são os raios da circunferência. Sendo  $P$  o ponto de interseção, a bissetriz do ângulo  $R\hat{P}S$ , é o lugar geométrico dos pontos que equidistam dos lados dos ângulos, a bissetriz do ângulo passa no centro da circunferência. O centro vai ser a interseção da bissetriz com seus raios nos pontos de interseção.” (Aluno F – item (h)).

Figura 17 – Resolução da atividade 05 (h) - Aluno F.



Fonte: Protocolo do Aluno F.

No item (i), 04 alunos responderam que seria possível determinar outras circunferências que tangenciassem simultaneamente as retas  $a$  e  $b$ . Esses alunos justificaram em (j) considerando o lugar geométrico bissetriz, como mostra os registros dos alunos E e F:

“Os seus centros estarão sobre a bissetriz do ângulo formado pelas retas  $a$  e  $b$  com raio sendo a distância do centro até  $a$  ou  $b$ .” (Aluno E – item (j)).

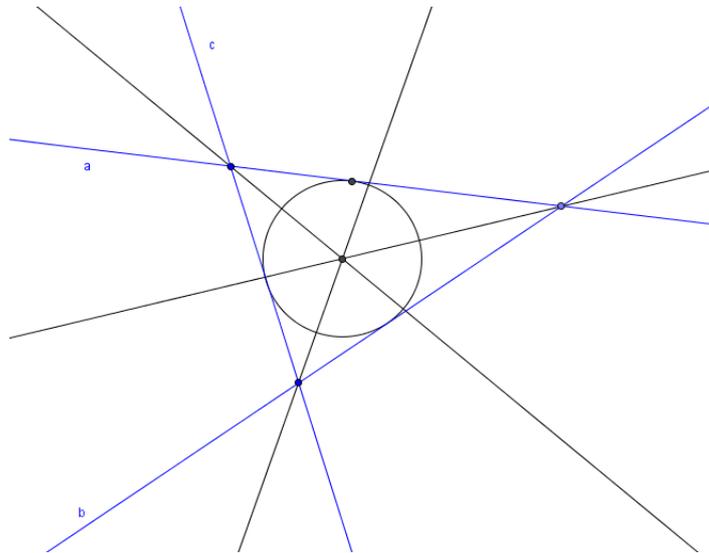
“Basta pegar circunferências com centros na bissetriz e determinar o raio a partir de uma reta perpendicular.” (Aluno F – item (j)).

No item (k) os mesmos 04 alunos utilizaram o conceito de bissetriz em suas construções e os demais novamente não apresentaram registros. Em (i) quando solicitado se existiam outras circunferências que tangenciavam simultaneamente as três retas dadas, apenas o aluno D respondeu positivo. No entanto, sem mencionar que o centro poderia ser qualquer ponto pertencente a bissetriz, como pode-se observar em seu RLN:

“São definidas modificando apenas o centro.” (Aluno D – item (k)).

No item (n) os alunos retornaram para o *software* GeoGebra. Por meio da análise dos protocolos observou-se que todos os alunos apresentaram seus RF, e estes conseguiram construir o que o enunciado solicitava. Sendo que, em todas as construções realizadas estava envolvido o lugar geométrico bissetriz para determinação do centro das circunferências procuradas. No entanto, as soluções ficaram restritas a uma única solução (circunferência) determinada pelas bissetrizes internas dos ângulos formados pelas retas  $a$ ,  $b$  e  $c$ . As demais circunferências cujos centros estão sobre as bissetrizes externas não foi observado/mencionado pelos alunos. Na figura 18 encontra-se o RF do aluno E.

Figura 18 - Resolução da atividade 05 (n) - Aluno E.



Fonte: protocolo do Aluno E.

Por fim, no item (o), os alunos conseguiram identificar algumas condições que a circunferência construída deveria obedecer. Para isso, mobilizaram RLN, como é evidenciado nos protocolos dos alunos A e E:

*“A circunferência tem centro no ponto de encontro das três bissetrizes.”* (Aluno A – item (o)).

*“O centro da circunferência será o encontro das bissetrizes dos três ângulos e o raio é a distância do centro até qualquer uma das retas.”* (Aluno E – item (o)).

Diante destes registros e levando em consideração as apreensões apontadas por Duval (2012a), observa-se a predominância da apreensão perceptiva onde por meio da interpretação visual imediata da forma apresentada, o aluno já pode extrair algumas considerações importantes presentes na atividade.

Nota-se a importância dos RLN apresentadas pelos alunos, onde por meio desses registros se podem evidenciar os caminhos e estratégias que estes seguiram no desenvolvimento da atividade. Ainda, tem-se a apreensão sequencial que é explicitamente solicitada em atividades de construção, tendo por objetivo, neste caso, uma exploração de diferentes situações, tanto em relação às retas dadas, quanto as suas possíveis posições relativas. Esse é o fato que influencia na quantidade de soluções encontradas em cada situação.

Ainda neste tipo de atividade, o uso do recurso computacional propicia uma visualização muito mais rápida e clara. Esperava-se que com o uso do recurso os alunos sejam capazes de visualizar todas as possíveis soluções para todos os casos específicos. Infelizmente, percebeu-se que os alunos ficaram restritos, indicando que seria apenas uma única solução como, por exemplo, no item (n).

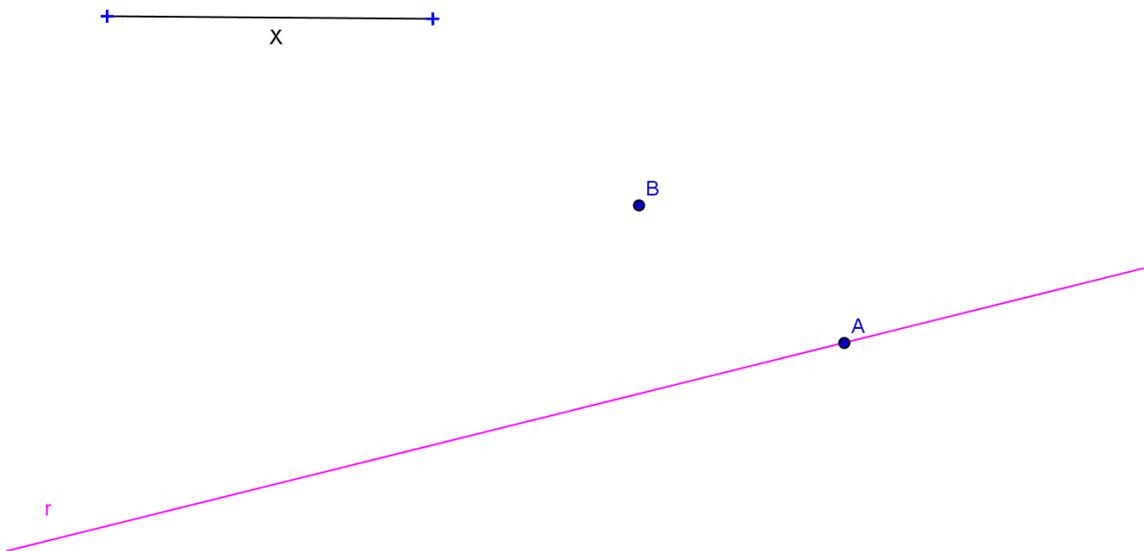
## ATIVIDADE 06

### Proposta:

O objetivo desta atividade era que o aluno articulasse com o lugar geométrico reta mediatriz e pudesse determinar um elemento que o compõe. Para isso, encontram-se nos enunciados os RLN, RSb, RAl e RF. Apresenta-se o roteiro que foi entregue aos alunos no quadro 13.

Quadro 13- Roteiro da atividade 06.

(a) A partir da figura dada, determine um ponto  $P \in r$  tal que  $\overline{PA} + \overline{PB} = X$ .



(b) O que justifica a determinação do ponto P?

(c) Agora, abra o arquivo Atividade 06 e realize a construção no GeoGebra.

(d) A partir da construção realizada, modifique a medida de X. O que você observou?

(e) E quando modifica-se a posição dos pontos A e B, o que acontece?

Fonte: Elaborado pela autora.

### Análise da atividade

Diferente das demais atividades, esse no item (a) é apresentado um RAl como registro de partida. Para a sua resolução os alunos, inicialmente teriam que interpretar o que se pede e, a partir disso, identificarem algumas características do que é proposto. No quadro 14 se encontram os registros e apreensões mobilizadas.

Quadro 14 - Registros e apreensões mobilizadas na atividade 06.

Item	Ambiente	Registros que podem ser mobilizados	Nº de alunos	Observações	Apreensões mobilizadas				
					P	D	S	O	
(a)	Papel	RLN, RSb, RA1 e RF → RF	05						
			02	RLN, RSb, RA1 e RF → RF, RSb	X	X	X		
(b)	Papel	RLN → RLN RLN → RLN, RF RLN → RLN, RF e RSb	05						
			00						
			00			X			
			02	Não apresentaram registros					
(c)	GeoGebra	RLN, RSb e RF → RF	05						
			02	Não apresentaram registros	X	X	X		
(d)	GeoGebra	RLN e RF → RLN	00						
			01	RLN e RF → RLN, RSb					
			01	Não apresentaram registros	X	X		X	
			05	Não lembravam como fazer					
(e)	GeoGebra	RLN e RF → RLN	04						
			03	Não apresentaram registros	X				

Fonte: Elaborado pela autora.

Para Duval (2012a), apesar dos computadores não apresentarem um novo registro eles constituem outro modo fenomenológico de produção, como já foi exposto anteriormente. Neste caso, o uso do *software* de GD faz com que as representações figurais produzidas pelo aluno possam ser manipuladas como se fossem objetos reais. Isso vem a contribuir, por exemplo, nos itens (c) e (d), quando é proposta a modificação posicional de alguns objetos matemáticos. Através da possibilidade de manipulação os alunos podem verificar se suas construções permanecem válidas, além de facilitar a identificação de propriedades envolvidas, bem como, identificação do LG.

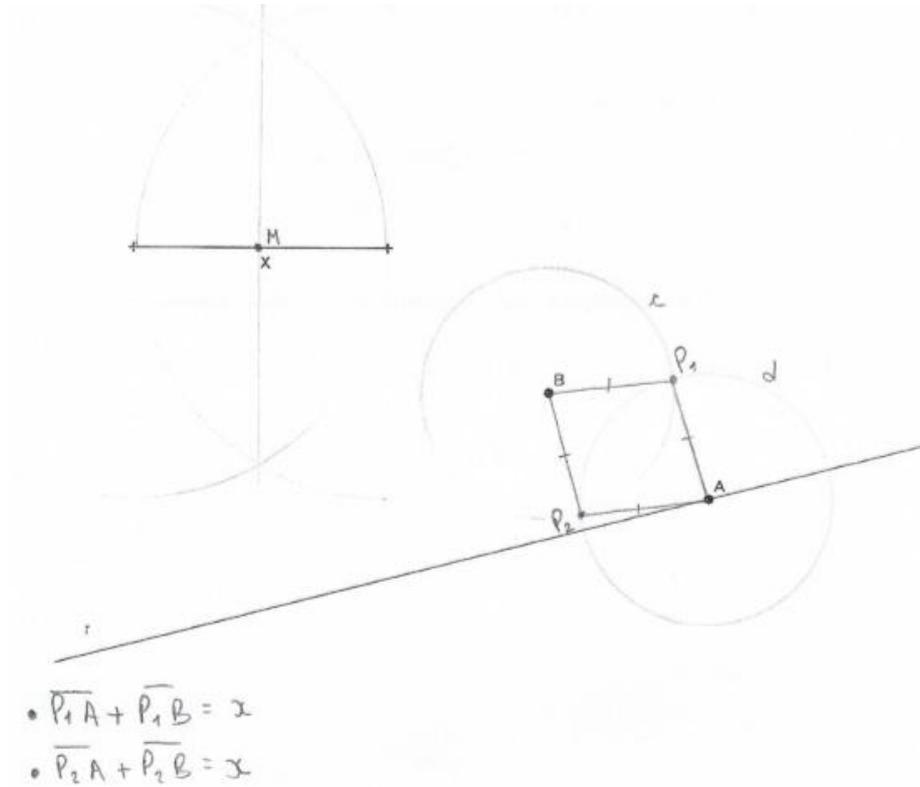
A partir da análise dos protocolos dos alunos encontrou-se 02 soluções onde o ponto  $P$  não pertence à reta  $r$ . Ainda, tem-se 04 alunos que não conseguiram determinar o ponto  $P$ , e 01 aluno que conseguiu interpretar o problema e realizar a construção correta. No entanto, nenhum deles mencionou o uso do lugar geométrico reta mediatriz.

Quanto aos registros mobilizados, observou-se que novamente não ocorre a articulação com o RAI. Cabe ressaltar que, embora alguns alunos tenham realizado uma construção equivocada, nota-se que todos entenderam a proposta da atividade, mesmo não apresentando nenhum RAI. Ainda, observou-se o predomínio de RLN e RSb, e quando solicitado, o RF se fez presente. Quanto ao RLN, a função cognitiva que se destaca é apofântica, pois através da elaboração das frases os alunos conseguiram descrever as suas observações através de uma análise visual feita dos objetos matemáticos envolvidos.

Dentre as 02 soluções encontradas onde o ponto  $P$  não satisfaz o enunciado, observa-se que os alunos buscaram uma estratégia que satisfazia a condição algébrica corretamente,  $\overline{PA} + \overline{PB}$ . No entanto, o ponto  $P$  não pertence à reta dada. Ainda, cabe salientar que este aluno encontrou dois pontos  $P_1$  e  $P_2$ , e nenhum deles pertencente à reta  $r$ , como pode ser observado na figura 19 e no protocolo do Aluno D:

*“Como o raio de  $c$  e  $d$  são iguais e os segmentos selecionados são exatamente os raios temos que estes segmentos serão congruentes. Assim, somando 2 destes segmentos temos o valor  $x$ , que seria o diâmetro de  $c$  e  $d$ .”* (Aluno D – item (b)).

Figura 19 - Resolução da atividade 06 (a) - Aluno D.

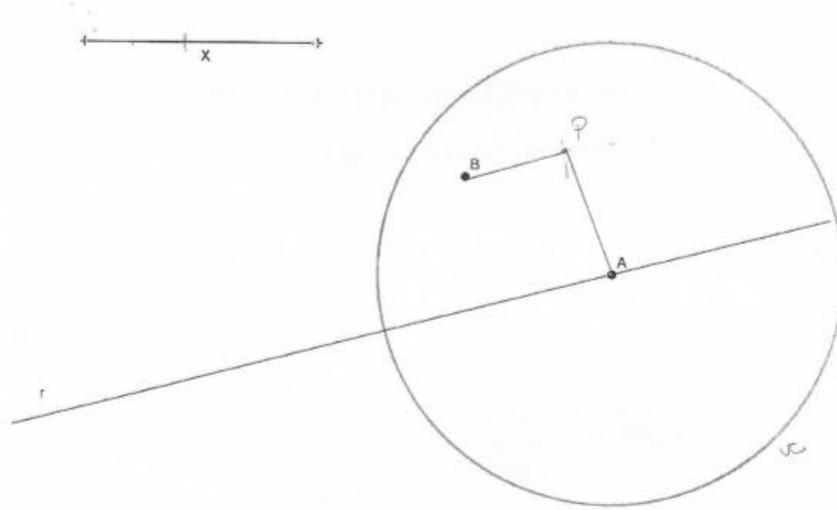


Fonte: Protocolo do Aluno D.

Ainda, observou-se por meio do protocolo do Aluno G, que este, novamente, buscou uma estratégia de tentativa e erro. Nota-se que ele procurou, com o uso de instrumentos físicos, adequar o ponto  $P$  até que a condição fosse satisfeita. Percebe-se também que não foi levado em consideração que o ponto procurado deveria pertencer a reta  $r$ , como se se pode ver na figura 20 e na sua descrição:

*“Utilizei a medida corda como raio da circunferência  $c$  e centro  $A$ . A partir daí fui medindo segmento com o compasso até que deu certo.”* (Aluno G – item (b)).

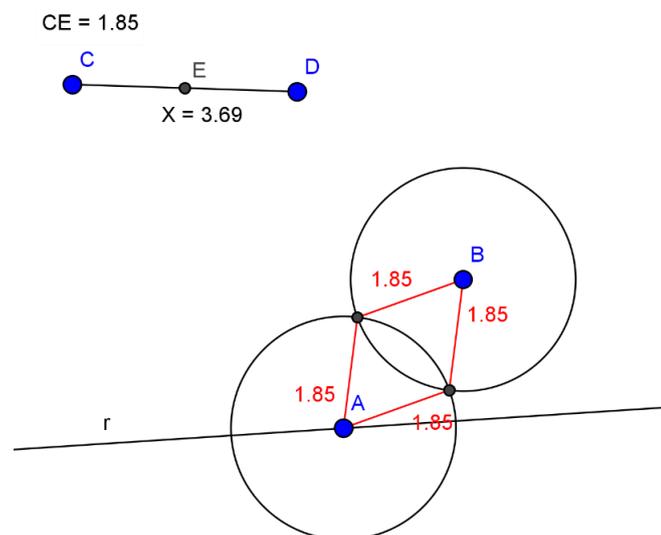
Figura 20 - Resolução da atividade 06 (a) - Aluno G.



Fonte: Protocolo do Aluno G.

Nota-se ainda, neste item que, onde a construção foi proposta utilizando o *software* GeoGebra, o Aluno D continuou a desenvolver a atividade 06 da mesma forma como em um ambiente estático, desconsiderando o fato de que o ponto  $P$  continuava fora da reta dada. Esse aluno ainda usou as possibilidades do recurso com a ferramenta “medida” para evidenciar que a condição algébrica proposta estava correta, como ilustra a figura 21.

Figura 21 - Resolução da atividade 06 (c) - Aluno D.



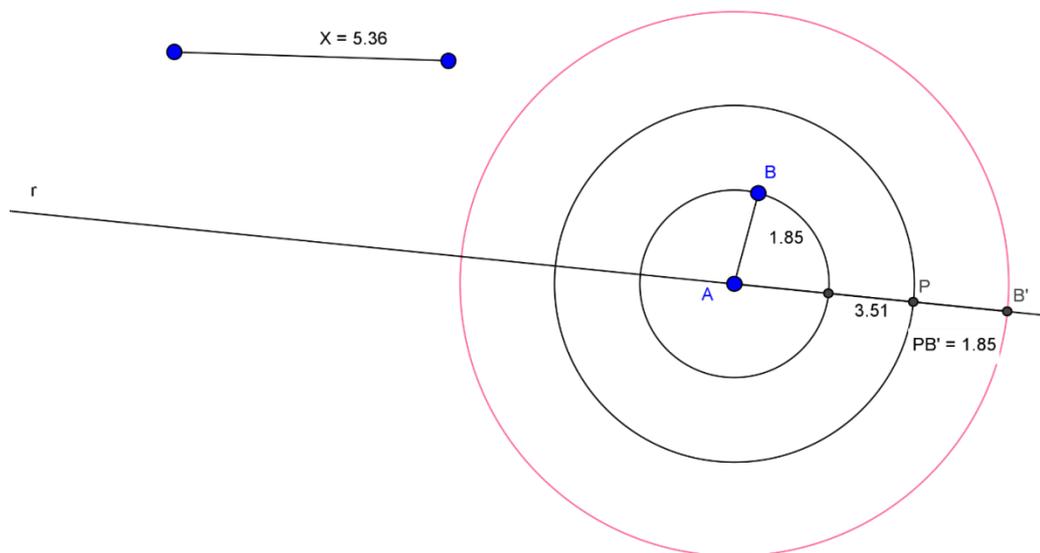
Fonte: Protocolo do Aluno D.

Dessa forma, o aluno D ainda conseguiu algumas considerações verdadeiras no item (d), por meio da manipulação da medida  $x$ , como se evidencia nos registros em seu protocolo:

*“Que mesmo aumentando o valor de  $x$  a relação continua. Entretanto, se diminuimos muito o valor de  $x$  então as circunferências não terão pontos de interseção, não determinando a relação de soma.”* (Aluno D – item (d)).

Partindo disso, a única solução que de fato obedeceu a proposta da atividade, foi desenvolvida pelo Aluno A. Este apresentou uma estratégia diferenciada, sem o envolvimento do lugar geométrico reta mediatriz. Por meio da análise de seus registros não se encontra uma descrição dos passos de sua construção, tendo apenas o RF. Esse mesmo aluno A, no item (c), com o auxílio do *software* GeoGebra, também realizou a construção com uso de instrumentos físicos. Ainda, utilizando a ferramenta “medida” pode certificar-se da validade de sua construção, como mostra a figura 22.

Figura 22 - Resolução da atividade 06 (c) - Aluno A.



Fonte: Protocolo do Aluno A.

Os demais alunos que não realizaram a construção no papel (item (a)) acabaram não realizando o item (c) e também não apresentaram registros conclusivos nos itens seguintes.

Nessa atividade, esperava-se que a partir do processo de visualização, por meio da apreensão perceptiva, os alunos visualizassem as características envolvidas e buscassem resoluções para o que se pedia. Também, esperava-se que a maneira como a atividade foi proposta pudesse auxiliar na elaboração de uma resposta, o que foi observado em apenas um dos protocolos analisados.

Outro aspecto esperado era que, com o uso do recurso computacional, os alunos pudessem apresentar uma resolução para a atividade, o que não foi observado. Neste caso, a utilização deste *software* está na manipulação interativa dos objetos, facilitando assim essa construção e permitindo uma melhor visualização geométrica despertando as apreensões destacadas por Duval (2003): perceptiva, sequencial, operatória e discursiva.

#### 4. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Esta pesquisa objetivou investigar a mobilização dos registros de representação semiótica por meio de atividades didáticas, envolvendo lugares geométricos, em dois ambientes de aprendizagem: quando se faz uso de papel, lápis, régua e compasso, e do *software* GeoGebra. Para isso, buscou-se como aporte teórico a teoria dos registros de representação semiótica de Duval, reforçando a importância da mobilização de diferentes registros para a aprendizagem em Matemática, em especial em conteúdos de geometria.

Na busca de subsídios que fossem capazes de atender a este objetivo criou-se uma sequência composta por seis atividades, onde foram exploradas construções geométricas envolvendo três lugares geométricos: circunferência, reta mediatriz e bissetriz. Durante a elaboração das atividades percebeu-se a importância do uso de construções geométricas a fim de discutir alguns conceitos e propriedades. Dentre as atividades propostas mobilizou-se nos registros de partidas, de acordo com Duval (2012a), RLN, RSb, RF e RAI. Dessa forma, buscou-se constituir atividades que possibilitassem aos alunos transitar entre os diferentes tratamentos que pudessem emergir envolvendo lugares geométricos.

Neste trabalho buscou-se, por meio de um roteiro, propiciar aos alunos que transitassem entre os dois ambientes de aprendizagem. Nesse sentido, percebeu-se as diferenças que emergem quando do uso de diferentes recursos tecnológicos em práticas de ensino. Em particular por meio da análise dos protocolos deles, que o uso do *software* GeoGebra possibilitou uma melhor visualização das propriedades envolvidas. Houve também situações em que um aluno primeiro usou o GeoGebra para visualizar o que a atividade propunha e qual lugar geométrico estava envolvido, e depois realizou a construção com instrumentos físicos.

Verificou-se ainda que os indivíduos não se limitaram a repetir métodos e a grande maioria considerou as propriedades envolvidas e suas respectivas representações inerentes a atividade proposta. Ocorreram também algumas estratégias diferenciadas, onde o uso do recurso computacional auxiliou para se chegar até a solução de um caso particular. No entanto, quando solicitado que modificassem, em sua construção, a posição de algum elemento matemático essa construção deixava de ser válida. Esse fato pode ser percebido em alguns protocolos analisados.

Ao analisar os registros seguindo os pressupostos de Duval (2003), observou-se que os alunos buscaram transitar entre os possíveis registros que foram mencionados na análise preliminar das atividades. Ressalta-se ainda o enorme interesse, por parte dos alunos, em resolver as atividades, sempre buscando deixar os seus registros o mais claro possível. Uma vez

que, foi possível observar registros em que era esperado somente RF e mesmo assim fazia-se presente os RLN e RSb, afim de tentarem fornecer uma justificativa para as suas soluções.

A partir das análises envolvendo os itens que mobilizaram RF, constatou-se que os maiores índices com respostas corretas foram obtidos em enunciados que tinham como registros de partidas RLN e RF. Percebe-se também a predominância do RF em atividades realizadas com o auxílio do GeoGebra, em comparação com as que foram desenvolvidas com o uso de instrumentos físicos. Corroborando com Duval (2013), que coloca o uso do recurso computacional com uma importante ferramenta aliada as possibilidades de levantar hipóteses, testá-las e então analisar os resultados. Acredita-se que este foi um fator que objetivou a compreensão pelos alunos dos enunciados e conceitos relativos aos objetos matemáticos que estavam envolvidos.

Em relação ao RSb, este se fez presente em situações que buscavam justificar uma construção em RF. Sua maior mobilização encontra-se quando os registros de partida eram RLN, tendo como registros de chegada RF e RSb.

Seguindo na análise dos protocolos, constatou-se que o RAI não se fez presente em nenhum momento nas resoluções dos alunos. Mesmo em atividades que solicitavam uma justificativa algébrica os alunos não fizeram o uso. Neste sentido, cabe salientar que em atividades que tinham o RAI como registro de partida, os alunos fizeram a interpretação correta do enunciado, sem mobilizar o RAI.

Ainda, por meio das análises notou-se a presença dos RLN, em atividades que tinham como registros de partida o RLN, ou RLN e RF, com predominância da função cognitiva apofântica. Pois a maioria dos alunos sempre buscou argumentar sobre as suas construções, procurando descrever os passos seguidos ou, em algumas situações, justificando as propriedades e características sobre o objeto matemático. Também se obteve respostas onde a função cognitiva presente é a expansão discursiva. Nesse sentido, Duval (2009) destaca a expansão discursiva, pelo fato de se ter diversos enunciados completos de uma forma coerente, em forma de descrição, explicação de passos ou de algum raciocínio seguido.

Em síntese, as atividades propostas, apoiaram-se na mobilização dos registros e no reconhecimento das apreensões: perceptiva, operatória, sequencial e discursiva. Cabe ressaltar o destaque para a apreensão perceptiva. Esta esteve presente em todas as etapas das seis atividades sendo essencial para que os alunos pudessem realizar o que era solicitado. A apreensão sequencial também se fez em alguns itens das seis atividades, onde observou-se que a maioria dos alunos conseguiu realizar os passos propostos.

Quanto à apreensão discursiva pode-se notar que ocorreu alguns erros de interpretação dos enunciados pelos alunos em alguns itens, chegando a uma solução equivocada. Também nota-se que os alunos sempre buscaram justificar ou apresentar por meio de RLN as etapas de suas construções, a fim de trazerem sempre o máximo de informações em cada item.

A apreensão operatória, em alguns itens, foi essencial para que se pudesse visualizar qual a propriedade que estava sendo abordada na atividade. Com destaque para a modificação posicional de pontos e retas, o que possibilitou aos alunos uma visualização, em algumas situações, de todas as soluções que satisfaziam o enunciado. Essa apreensão operatória fica mais evidente no ambiente GeoGebra em comparação com o ambiente estático, onde algumas respostas ficaram restritas a apenas uma solução.

Na sequência de atividades propostas quando se alia o uso do *software* GeoGebra, com a TRRS percebeu-se uma maior mobilização de alguns registros pois como já mencionado anteriormente este recurso possibilitou uma melhor visualização nas construções. Também constatou-se uma maior quantidade de informações obtidas, que possibilitaram aos alunos identificar características e propriedades dos lugares geométricos envolvidos. Ainda ressalta-se a possibilidade de manipulação dos entes geométricos, trazendo formas diferentes de se visualizar as figuras e maneiras diferentes de se realizar o que estava sendo pedido. De acordo com os estudos de Duval (2003), as representações semióticas além de serem necessárias para fins de comunicação são essenciais para as atividades cognitivas do pensamento.

Destaca-se a importância profissional e acadêmica desta pesquisa, em relação aos conhecimentos metodológicos que se fizeram presentes na elaboração das atividades nos dois ambientes de aprendizagem utilizados. Ressalta-se que neste período de pesquisa foi possível adquirir novos conhecimentos referentes às potencialidades do uso do recurso computacional na prática docente. Assim como também, conhecimentos relativos a construções geométricas, referentes a lugares geométricos, tendo como aporte teórico a TRRS.

Embora na pesquisa apresentada tenha sido abordado um conteúdo específico, no caso lugares geométricos, espera-se que este trabalho possa contribuir para pesquisas na área da Educação Matemática, relacionadas a este tema. Em vista de pesquisas futuras, acredita-se que possam ser desenvolvidas outras sequências de atividades relacionadas a outros lugares geométricos não contemplados neste trabalho, ou ainda com outros conteúdos de geometria, aliando a TRRS com o uso do recurso tecnológico.

## REFERÊNCIAS

- ALMEIDA, I. A. C. **Identificando rupturas entre significados e significantes nas construções geométricas:** um estudo em traçados de lugares geométricos bidimensionais, envolvendo pontos, retas e circunferências. 2007. 336f. Tese (Doutorado em Educação) - Universidade Federal de Pernambuco, Recife, PE, 2007.
- ALVES, G.S.; SOARES, A. B. **Geometria Dinâmica:** um estudo de seus recursos, potencialidades e limitações através do Software Tabulae. In: XXIII CONGRESSO DA SOCIEDADE BRASILEIRA DE COMPUTAÇÃO – IX WORKSHOP DE INFORMÁTICA NA ESCOLA. Anais. Campinas: Unicamp. 2003, p. 275-286.
- ARAÚJO, A. A. **Abordagem de alguns lugares geométricos planos em um ambiente de geometria dinâmica.** 2011. 201f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Bandeirante de São Paulo, São Paulo, 2011.
- ASSUMPÇÃO, P. G. S. **Perímetro e área: Uma engenharia didática utilizando o GeoGebra sob o olhar das representações semióticas.** 2015. 233f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Ensino de Física) – Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria, 2015.
- BOEMO, M. S. **Registros de representação semiótica mobilizados no estudo de sistemas lineares no 2º ano do ensino médio em um colégio de São Sepé/RS.** 2015. 163f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Ensino de Física) – Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria, 2015.
- BORTONI-RICARDO, S. M. O professor pesquisador: introdução à pesquisa qualitativa. São Paulo: Parábola Editorial, 2008.
- BRASIL. Ministério da Educação e do Desporto. **Parâmetros curriculares nacionais,** Brasília: MEC/SEC, 1998.
- BURATTO, I. C. F. **Representação semiótica no ensino de geometria:** Uma alternativa metodológica na formação de professores. 2006. 143f. Dissertação (Mestrado em Educação Científica e Tecnológica) – Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2006.
- CALFA, H. G. et al. **Desenho geométrico plano.** Coleção Marechal Trompowsky. Rio de Janeiro: Biblioteca do exército; v. 2; Tomo 2, 1997.
- CARDOSO, F. C. **O ensino da geometria analítica em um curso de licenciatura em matemática:** Uma análise da organização do processo educativo sob a ótica dos registros de representação semiótica. 2014. 143f. Dissertação (Mestrado em Educação nas Ciências) - Universidade Regional do Noroeste do Estado do Rio Grande do Sul, Ijuí, 2014.
- CRESCENTI, E. P. **Os professores de matemática e a geometria:** Opiniões sobre a área e seu ensino. 2005. 242f. Tese (Doutorado em Metodologia de Ensino) – Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, 2005.
- DAMM, R. F. Registros de representação. In: MACHADO, S. D. A. (Org.). **Educação Matemática:** uma introdução. São Paulo: EDUC, 1999.

DANTAS, S. C. **Design, implementação e estudo de uma rede sócio profissional online de professores de Matemática.** 2016. 229f. Tese (Doutorado em Educação Matemática). Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2016.

DUVAL, R. Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática. In: MACHADO, S. D. A. (Org.). **Aprendizagem em matemática:** registros de representação semiótica. p.11- 33, São Paulo: Papirus, 2003.

DUVAL, R. **Semiósis e pensamento humano:** registros semióticos e aprendizagens intelectuais. São Paulo: Livraria da Física, 2009.

DUVAL, R. **Ver e ensinar a matemática de outra forma:** Entrar no modo matemático de pensar os registros de representação semiótica. Tradução de Marlene Alves Dias. São Paulo: PROEM, 2011.

DUVAL, R. **Abordagem cognitiva de problemas de geometria em termos de congruência.** Tradução Mércles Tese. Moretti. REVEMAT, v.7, n.1. Florianópolis: UFSC/MTM/PPGECT, 2012a. p.118-138. Disponível em: <<http://www.periodicos.ufsc.br/index.php/revemat>>. Acesso em: 20 jun. 2016.

DUVAL, R. **Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento.** Trad. Mércles T. Moretti. REVEMAT, v.7, n.2. Florianópolis: UFSC/MTM/PPGECT, 2012b. p. 266-297. Disponível em: <<https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/1981-1322.2012v7n2p266/23465>>. Acesso em: 20 jun. 2016.

DUVAL, R. [Entrevista disponibilizada em jul–dez, 2013, a Revista Paraense de Educação Matemática, v.2, n.3]. 2013. Disponível em: <[http://www.fecilcam.br/revista/index.php/rpem/article/viewFile/963/pdf\\_122](http://www.fecilcam.br/revista/index.php/rpem/article/viewFile/963/pdf_122)>. Acesso em: 20 jun. 2016.

FACCO, S. R. **Conceito de área:** Uma proposta de ensino-aprendizagem. 2003. 185f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2003.

GRAVINA, M. A. **Tecnologia na aula de matemática:** A importância do potencial semiótico. Novas Tecnologias na Educação. v. 11, n. 3, dez 2013.

JOUBERT, M. **Using digital technologies in mathematics teaching:** Developing an understanding of the landscape using three “grand challenge” themes. Educational Studies in Mathematics, v. 82, n. 3, p. 341-359, 2013.

KENSKI, V. M. **Educação e tecnologias:** o novo ritmo da informação. 5. ed. Campinas: Papirus, 2009.

LORENZATO, S. **Porque não ensinar geometria?** Educação em Revista, Rio de Janeiro, n. 4, p. 3-13, 1995.

LÜDKE, M.; ANDRÉ, M. **A pesquisa em educação: Abordagens qualitativas.** São Paulo: EPU, 1986.

MENEGOTTO, G.; LARA, I. C. A. **Contribuições do *software* Geoalgebra para o estudo de paralelogramos.** Alexandria, v.4, n.2, p.31-55, 2011.

PEREIRA, T. de L. M. **O uso do *Software* GeoGebra em uma escola pública:** Interações entre alunos e professor em atividades e tarefas de geometria para o ensino fundamental e médio. 2012. 122f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora, 2012.

RODRIGUES, S. V. de O. **Professores de matemática e uso do computador.** 2008. Disponível em: <<http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/pde/arquivos/330-4.pdf>>. Acesso em: 15 de jun. 2016.

SELLA, A. E.; PEREIRA, P. S. **PDE:** Relatos de uma experiência em andamento. Cascável, n. 48, nov. 2008. Disponível em: <<http://www.unioeste.br/cursos/cascavel/pedagogia/eventos/2008/1/Artigo%2048.pdf>>. Acesso em: 15 de jun. 2016.

## APÊNDICE A – LISTA DOS LINKS DAS ATIVIDADES REALIZADAS NO GEOGEBRA

Lista de *links* disponíveis na *internet* dos *applets* relativos às atividades elaboradas. Estes recursos estão disponíveis no GeoGebra Tube referente a sequência desenvolvida na presente pesquisa.

Quadro 15 - Links das atividades no GeoGebra.

Atividade	<i>Link</i>
Atividade 01 – A	<a href="https://www.geogebra.org/m/ybfDXXBf">https://www.geogebra.org/m/ybfDXXBf</a>
Atividade 01 – B	<a href="https://www.geogebra.org/m/WpcHGcNb">https://www.geogebra.org/m/WpcHGcNb</a>
Atividade 02 – A	<a href="https://www.geogebra.org/m/n6YyMg2e">https://www.geogebra.org/m/n6YyMg2e</a>
Atividade 02 – B	<a href="https://www.geogebra.org/m/zhbHDweb">https://www.geogebra.org/m/zhbHDweb</a>
Atividade 03 – A	<a href="https://www.geogebra.org/m/vpvPvx5g">https://www.geogebra.org/m/vpvPvx5g</a>
Atividade 03 – B	<a href="https://www.geogebra.org/m/v97a6Cxe">https://www.geogebra.org/m/v97a6Cxe</a>
Atividade 04	<a href="https://www.geogebra.org/m/Utkd2AJZ">https://www.geogebra.org/m/Utkd2AJZ</a>
Atividade 05 – A	<a href="https://www.geogebra.org/m/bmA4Dpdx">https://www.geogebra.org/m/bmA4Dpdx</a>
Atividade 05 – B	<a href="https://www.geogebra.org/m/AhRcDHzt">https://www.geogebra.org/m/AhRcDHzt</a>
Atividade 05 – C	<a href="https://www.geogebra.org/m/pxcs45Hj">https://www.geogebra.org/m/pxcs45Hj</a>
Atividade 05 – D	<a href="https://www.geogebra.org/m/x423AAFK">https://www.geogebra.org/m/x423AAFK</a>
Atividade 05 – E	<a href="https://www.geogebra.org/m/WjZ4BMUA">https://www.geogebra.org/m/WjZ4BMUA</a>
Atividade 06	<a href="https://www.geogebra.org/m/TYpna5SC">https://www.geogebra.org/m/TYpna5SC</a>

Fonte: Elaborado pela autora.

## APÊNDICE B – TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

**Universidade Federal de Santa Maria**  
**Centro de Ciências Naturais e Exatas**  
**Departamento de Matemática**  
**Mestrado em Educação Matemática e Ensino de Física**

### TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

**Título do projeto:** Construções com Régua e Compasso Envolvendo Lugares Geométricos: Uma proposta dinâmica aliada a Teoria de Registros de Representações Semióticas

**Pesquisadoras Responsáveis:**

- Prof<sup>a</sup> Dr<sup>a</sup> Inês Farias Ferreira (Orientadora) – Telefone: (55) 9983-1993
- Roberta Lied (Pós-graduanda) – Telefone: (55) 9953-5876

**Instituição/Departamento:** UFSM / Departamento de Matemática

Você está sendo convidado(a) para participar, como voluntário(a), nesta pesquisa. Leia cuidadosamente o que segue e em caso de dúvidas, solicite esclarecimentos aos pesquisadores.

Esta pesquisa tem por objetivo desenvolver e aplicar uma proposta de atividades dinâmicas de Geometria Plana, envolvendo lugares geométricos, com o uso do *software* GeoGebra, articulada com a teoria de registros de representações semióticas, como parte da dissertação de mestrado no Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Ensino de Física.

Para que a pesquisa possa ser realizada é necessário um trabalho de campo que consistirá em:

- Fazer anotações durante a aplicação da sequência didática;
- Guardar cópias e analisar as atividades realizadas de forma presencial;
- Fotografar e/ou filmar alguns momentos para registro da realização das atividades;
- Aplicar questionários e/ou entrevistas semiestruturadas (individualmente ou em grupos), sempre que necessário ao longo da pesquisa.

Esclarecemos que a sua participação é voluntária. Caso não queira assinar o termo de consentimento para participar dessa pesquisa, você não será fotografado/filmado e nenhuma atividade sua será utilizada na pesquisa. Você poderá deixar de participar da pesquisa a qualquer momento, sem penalização alguma e sem prejuízo na continuidade da disciplina.

Não identificamos qualquer risco potencial na sua participação na pesquisa.

Não haverá pagamento de qualquer espécie pela sua participação na pesquisa.

Espera-se que os benefícios desta pesquisa se reflitam na melhoria do processo de ensino e aprendizagem dos conteúdos explorados na disciplina de Geometria Plana.

A sua participação na pesquisa em nada prejudicará o andamento regular das atividades desta disciplina, ou interferir de forma indesejada na sua vida privada.

Os resultados desta pesquisa serão divulgados em uma dissertação de mestrado no Programa de Pós-graduação em Educação Matemática e Ensino de Física e em revistas especializadas, congressos e simpósios.

Para realizar esse trabalho de campo queremos solicitar o seu consentimento, garantindo, através desse termo, que:

- Em hipótese alguma, o seu nome, sua imagem ou as informações coletadas nos questionários, nas entrevistas e na realização das atividades propostas serão divulgados sem sua prévia autorização. Somente as pesquisadoras terão acesso a as informações coletadas, a menos que requeridas por lei ou por sua solicitação;

- Em qualquer etapa do estudo, você terá acesso aos profissionais responsáveis pela pesquisa para esclarecimento de eventuais dúvidas.

### Consentimento da participação da pessoa como sujeito

Eu, \_\_\_\_\_, abaixo assinado, concordo em participar do estudo: Construções com Régua e Compasso envolvendo Lugares Geométricos: Uma proposta dinâmica aliada a Teoria de Registros de Representações Semióticas, como sujeito. Fui suficientemente esclarecido a respeito das informações que li ou que foram lidas para mim, descrevendo o estudo.

Ficaram claros para mim quais são os propósitos do estudo, os procedimentos a serem realizados e seus possíveis desconfortos, as garantias de confidencialidade e de esclarecimentos permanentes. Concordo voluntariamente em participar deste estudo e poderei retirar o meu consentimento a qualquer momento, sem penalidades.

Os registros escritos e digitais feitos por mim durante as aulas da disciplina de Geometria Espacial podem ser coletados e utilizados para a pesquisa acima descrita?

( ) Sim. ( ) Não.

As imagens, falas e conversas minhas com os colegas e as pesquisadoras podem ser utilizadas para a pesquisa acima descrita?

( ) Sim. ( ) Não.

Meu nome pode ser mencionado na análise e descrição desta pesquisa?

( ) Sim. ( ) Não.

Eu, voluntariamente, aceito participar desta pesquisa. Portanto, concordo com tudo que está escrito acima e dou meu consentimento.

Santa Maria \_\_\_\_\_, de \_\_\_\_\_ de 2016.

\_\_\_\_\_  
Assinatura do aluno

Declaro que obtivemos de forma apropriada e voluntária o Consentimento Livre e Esclarecido deste sujeito de pesquisa para a participação neste estudo.

\_\_\_\_\_  
Assinatura do orientador da pesquisa  
Prof. Dra. Inês Farias Ferreira  
e-mail: [inesfferreira10@gmail.com](mailto:inesfferreira10@gmail.com)  
Universidade Federal de Santa Maria  
Santa Maria – RS

\_\_\_\_\_  
Assinatura da orientanda da pesquisa  
Roberta Lied  
e-mail: [robertinhalied@hotmail.com](mailto:robertinhalied@hotmail.com)  
Universidade Federal de Santa Maria  
Santa Maria – RS

