

Universidade Federal de Santa Maria  
Centro de Ciências Naturais e Exatas  
Programa de Pós-Graduação

**CONSISTÊNCIA NO CÁLCULO PERTURBATIVO:  
A ELETRODINÂMICA QUÂNTICA  
E A ANOMALIA  $AVV$**

**DISSERTAÇÃO DE MESTRADO**

Ediana Gambin

Santa Maria, RS, Brasil.

2004

**CONSISTÊNCIA NO CÁLCULO PERTURBATIVO:  
A ELETRODINÂMICA QUÂNTICA  
E A ANOMALIA AVV**

por

Ediana Gambin

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado do Programa de Pós-graduação em Física, Área de Concentração em Partículas e Campos, da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM, RS), como requisito parcial para obtenção do grau de **Mestre em Física**.

Santa Maria, RS, Brasil.

2004

Universidade Federal de Santa Maria  
Centro de Ciências Naturais e Exatas  
Programa de Pós-Graduação

A Comissão Examinadora, abaixo assinada,  
aprova a Dissertação de Mestrado

**CONSISTÊNCIA NO CÁLCULO PERTURBATIVO:  
A ELETRODINÂMICA QUÂNTICA  
E A ANOMALIA AVV**

elaborada por  
**Ediana Gambin**

como requisito para a obtenção do grau de  
**Mestre em Física**

**COMISSÃO EXAMINADORA:**

---

Orimar Antônio Battistel, Dr.

---

José Abdalla Helayel Neto, Dr. (CBPF)

---

Gilson Dallabona, Dr. (IFT)

Santa Maria, 13 de dezembro de 2004.

Aos meus queridos pais, à minha irmã, à memória de todos os grandes pesquisadores que nos legaram a física que conhecemos hoje e a todos os bem-aventurados.

## Agradecimentos

- À minha mãe Odete, ao meu pai Leonides e à minha irmã Gisele, pelo carinho e amor , pela paciência e apoio financeiro
- Ao meu orientador Orimar, pelo apoio, paciência e ensinamentos, pela amizade e dedicação. Minha gratidão eterna.
- Aos meus amigos, em especial à Bruna, pela constante presença.
- À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível superior, CAPES, pelo apoio financeiro.

Se existe uma escolha, que é um atributo exclusivo daquele que utiliza o aparato teórico ou lei física, então o resultado final deve ser independente de tal escolha.

(Orimar Antônio Battistel)

**RESUMO**  
Dissertação de Mestrado  
Programa de Pós-Graduação em Física  
Universidade Federal de Santa Maria  
**CONSISTÊNCIA NO CÁLCULO PERTURBATIVO:  
A ELETRODINÂMICA QUÂNTICA  
E A ANOMALIA AVV**  
AUTORA: EDIANA GAMBIN  
ORIENTADOR: ORIMAR ANTÔNIO BATTISTEL  
CO-ORIENTADOR: VILSON TONIN ZANCHIN  
Data e Local da Defesa: Santa Maria, 13 de dezembro de 2004.

Nós usamos um método muito geral de cálculo, concernente a manipulação e cálculo de divergências a fim de tratar a solução perturbativa da Eletrodinâmica quântica (EDQ), a nível um "loop", bem como estudar a origem perturbativa da anomalia triangular axial relacionada ao decaimento do Píon neutro. No contexto do método mencionado, todas as amplitudes divergentes a um "loop" são calculadas assumindo as escolhas mais gerais para os rótulos dos momentos das linhas internas e sem assumir uma forma de regularização explícita em etapas intermediárias. As expressões para as funções de Green são escritas em termos de um pequeno conjunto de objetos divergentes básicos e de conjunto de funções de estruturas finitas padrão de um "loop". As relações entre funções de Green são todas verificadas sem qualquer hipótese para as arbitrariedades envolvidas. Um conjunto de condições, para a consistência nos cálculos perturbativos, é identificado pela exigência que as amplitudes calculadas tornam-se livres de ambigüidades e que a simetria deve ser preservada. A renormalização ao nível um "loop" é discutida. Adotando então um ponto de vista consistente obtido a partir da análise da EDQ, nós consideramos o tratamento da amplitude triangular axial-vector-vetor (AVV). Como uma consequência de nossas investigações, concluímos que o modo tradicional de olhar para as anomalias triangulares, baseada nas arbitrariedades intrínsecas, poderia ser questionável em seu papel de justificar a origem perturbativa das violações de simetria associadas. Nós mostramos então, efetuando cálculos exatos, analíticos e fora da camada de massa para as amplitudes envolvidas que a anomalia emerge de uma maneira natural e com o valor correto para as violações, na aproximação adotada, apesar do caráter não ambíguo. A vantagem da estratégia usada, relativa àquelas tradicionais, reside no fato que somente uma prescrição é necessária para tratar todas as amplitudes em todas as teorias e modelos. Adicionalmente, os resultados da estratégia adotada podem sempre ser mapeados naqueles correspondentes a técnicas de regularização tradicionais, incluindo a Regularização Dimensional (RD) e a aproximação de cálculo de termos de superfície, provendo as interpretações específicas de cada tratamento são adotados valores diferentes para as quantidades indefinidas envolvidas. Isto significa que os resultados consistentes para a EDQ produzidos pela RD, assim como os resultados produzidos pelo cálculo de termos de superfície para a anomalia AVV, podem ser recuperados a partir daqueles obtidos dentro do contexto do método adotado mas isto implica assumir valores diferentes para objetos matemáticos idênticos. Somente a estratégia alternativa adotada no presente trabalho, para manipular e calcular as divergências de soluções perturbativas de TQC's podem dar um tratamento consistente de ambos os problemas em modo simultâneo. Perspectivas para investigações adicionais são apontadas.

Palavras chave: Regularização, Renormalização, Anomalia, Ambigüidades.

## ABSTRACT

Dissertation of Master's degree  
Program of Masters degree in Physics  
Federal University of Santa Maria

### CONSISTENCY IN THE PERTURBATIVE CALCULATION: THE QUANTUM ELECTRODYNAMIC AND THE AVV ANOMALY

AUTHOR: EDIANA GAMBIN  
SUPERVISOR: ORIMAR ANTÔNIO BATTISTEL  
CO-SUPERVISOR: VILSON TONIN ZANCHIN

Date and Place of the Defense: Santa Maria, December 13, 2004.

We use a very general calculational method, concerning the divergences manipulations and calculations, in order to treat the perturbative solution of quantum electrodynamics (QED), at the one loop level, as well as to study the perturbative origin of the axial triangle anomaly related with the electromagnetic decay of the neutral pion. Within the context of the referred method, all one-loop divergent amplitudes are evaluated by taking the most general choices for the routing of internal lines momentum and without assuming an explicit form of regularization in intermediary steps. The expressions for the evaluated Green functions are written in terms of a small set of basic divergent objects and standard one-loop finite structure functions. The relations among Green functions are all verified without any assumption for the involved arbitrariness. A set of conditions, for the consistency in perturbative calculations, is identified by requiring that the evaluated amplitudes become free from ambiguities and symmetry preserving. The renormalization, at the one loop level, is discussed. Adopting then the consistent point of view emerged from the QED analysis we consider the treatment of the axial-vector-vector (AVV) triangle amplitude. As a consequence of our investigations, we can conclude that the traditional way to look at triangle anomalies, based on intrinsic arbitrariness, could be questionable in its role of justifying the perturbative origin of the associated symmetry violations. We show then, by performing exact, analytical and off the mass shell calculations for the involved amplitudes that the anomaly emerges in a natural way and with the correct value for the violations, in the adopted approach, in spite of its nonambiguous character. The advantage of the used strategy, relative to traditional ones, resides in the fact that only one prescription is needed to treat all amplitudes in all theories and models. In addition, the results thus obtained can always be mapped into those corresponding to traditional regularization techniques including the Dimensional Regularization and the surface's terms evaluation approach, providing the specific interpretations of each treatment are adopted for the undefined quantities involved. This means that the consistent QED results of DR as well as the usual surface's term evaluation for the AVV anomaly can be recovered from those obtained within the context of the adopted method but this implies to assume different values for identical mathematical object. Only the alternative strategy adopted in the present work, to manipulate and calculate the divergences of perturbative solutions of QFT's can give a consistent treatment of both problems in a simultaneous way. Perspectives for additional investigations are pointed out.

Key words: Regularization, Renormalization, Anomaly, and Ambiguities.



# Conteúdo

<b>1</b>	<b>Introdução Geral</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>A Eletrodinâmica Quântica em Solução Perturbativa</b>	<b>5</b>
2.1	Introdução . . . . .	5
2.2	A Eletrodinâmica Quântica como uma teoria de “gauge” . . . . .	6
2.3	Processos Físicos . . . . .	10
2.3.1	Auto-Energia do Elétron . . . . .	11
2.3.2	Auto-Energia do Fóton . . . . .	12
2.3.3	Interação elétron-fóton . . . . .	12
2.3.4	Decaimento fotônico do fóton . . . . .	13
2.3.5	Espalhamento fóton-fóton . . . . .	14
2.4	Outros processos físicos . . . . .	15
2.5	Cálculo perturbativo e parâmetros físicos . . . . .	16
<b>3</b>	<b>Funções de Green divergentes e vínculos de consistência</b>	<b>20</b>
3.1	Introdução . . . . .	20
3.2	Desenvolvimento das funções de Green . . . . .	21
3.2.1	Função de um ponto vetorial . . . . .	21
3.2.2	Auto-energia do elétron por excitação de um fóton . . . . .	22
3.2.3	Função de Green de dois pontos Bi-Vetorial . . . . .	24
3.2.4	Decaimento fotônico do fóton . . . . .	25
3.2.5	Correção de Vértice . . . . .	30
3.2.6	Espalhamento fóton-fóton . . . . .	34
3.3	Relações entre funções de Green . . . . .	42
3.4	Relações de simetria . . . . .	45
<b>4</b>	<b>Sistematização para as partes finitas das amplitudes</b>	<b>51</b>
4.1	Introdução . . . . .	51
4.2	As Funções $Z'_k$ s . . . . .	51
4.2.1	$\lim \lambda_1^2 \rightarrow 0$ em $Z_k(\lambda_1^2, \lambda_2^2, q^2; \lambda_2^2)$ . . . . .	53
4.2.2	As Funções $Z_k(\lambda_1^2, \lambda_2^2, q^2; \lambda_2^2)$ para $\lambda_1^2 = \lambda_2^2$ . . . . .	54
4.3	As Funções $Y'_k$ s . . . . .	55
4.3.1	$\lim \lambda_1^2 \rightarrow 0$ em $Y_k(\lambda_1^2, \lambda_2^2, q^2; \lambda_2^2)$ . . . . .	56
4.3.2	As Funções $Y_k(\lambda_1^2, \lambda_2^2, q^2; \lambda_2^2)$ para $\lambda_1^2 = \lambda_2^2$ . . . . .	57
4.4	As Funções $\xi_{nm}$ e $\eta_{nm}$ . . . . .	58
4.5	As Funções $\sigma_{nm}$ . . . . .	61
4.6	As Funções $\zeta_{nml}$ , $\xi_{nml}$ e $\eta_{nml}$ . . . . .	63
<b>5</b>	<b>Divergências Ultravioletas</b>	<b>68</b>
5.1	Introdução . . . . .	68
5.2	Estratégia para manipulações e cálculos de integrais divergentes . . . . .	69
5.2.1	Integral $I_1^\mu$ . . . . .	71
5.2.2	Integral $I_1$ . . . . .	71
5.2.3	Integral $I_2$ . . . . .	72
5.2.4	Integral $I_2^\mu$ . . . . .	73
5.2.5	Integral $I_2^{\mu\nu}$ . . . . .	73
5.2.6	Integral $I_3$ . . . . .	74
5.2.7	Integral $I_3^\mu$ . . . . .	74
5.2.8	Integral $I_3^{\mu\nu}$ . . . . .	75
5.2.9	Integral $I_3^{\lambda\mu\nu}$ . . . . .	75

5.2.10	Integral $I_4$	77
5.2.11	Integral $I_4^\mu$	77
5.2.12	Integral $I_4^{\mu\nu}$	77
5.2.13	Integral $I_4^{\mu\nu\lambda}$	78
5.2.14	Integral $I_4^{\mu\nu\alpha\beta}$	79
<b>6</b>	<b>Divergências Infravermelhas</b>	<b>83</b>
6.1	Introdução	83
6.2	Estratégia para manipulações e cálculos envolvendo divergências infravermelhas	84
6.2.1	Integral $J_2$	86
6.2.2	Integral $J_2^\mu$	87
6.2.3	Integral $J_3$	88
6.2.4	Integral $J_3^\mu$	88
6.2.5	Integral $J_3^{\mu\nu}$	89
6.2.6	Integral $L_2$	90
6.2.7	Integral $L_2^\mu$	92
6.2.8	Integral $L_3$	94
6.2.9	Integral $L_3^\mu$	95
6.2.10	Integral $L_4$	96
6.2.11	Integral $L_4^\mu$	97
6.2.12	Integral $L_4^{\mu\nu}$	98
<b>7</b>	<b>Forma explícita e propriedades das funções de Green divergentes</b>	<b>100</b>
7.1	Introdução	100
7.1.1	A Função de um ponto vetorial	101
7.1.2	Auto-energia do elétron por excitação de um fóton	101
7.1.3	A Função de dois pontos Bi-vetorial	102
7.1.4	Correção de Vértice	104
7.1.5	A Função de três pontos Tri-vetorial	106
7.1.6	A Função de quatro pontos Tetra-vetorial	111
7.2	Relações entre funções de Green	112
7.2.1	Relação entre funções de Green para a função Bi-vetorial	112
7.2.2	Relação entre funções de Green para o Processo de três fótons	112
7.2.3	Correção de vértice e auto-energia	120
<b>8</b>	<b>Ambigüidades, relações de simetria e renormalização</b>	<b>124</b>
8.1	Introdução	124
8.2	Ambigüidades	125
8.2.1	Relações de simetria	127
8.3	Objetos divergentes básicos e regularizações	130
8.3.1	Regularização Dimensional	130
8.3.2	A regularização covariante de Pauli-Villars	131
8.4	Consistência no cálculo perturbativo para a EDQ	133
8.5	Renormalização	134
<b>9</b>	<b>Regularizações: diferentes receitas para situações idênticas</b>	<b>139</b>
9.1	Introdução	139
9.1.1	O Campo Escalar complexo	141
9.1.2	Processo $S \rightarrow VV$	144
9.1.3	Processo $A \rightarrow VV$	146
9.2	Divergências, ambigüidades e identidades de Ward	150
9.3	conclusões	155
<b>10</b>	<b>Anomalia AVV</b>	<b>157</b>
10.1	Cálculo explícito das funções de três pontos	158
10.2	Verificação das identidades de Ward para as funções de três-pontos	161
10.3	Considerações finais e conclusões	164
<b>11</b>	<b>Conclusões e perspectivas</b>	<b>170</b>
<b>A</b>	<b>Álgebra das Matrizes de Dirac</b>	<b>173</b>
<b>B</b>	<b>Parametrização de Feynman</b>	<b>176</b>
<b>C</b>	<b>Integração Dimensional</b>	<b>179</b>
<b>D</b>	<b>Cálculo da função <math>Z_0</math></b>	<b>185</b>

<b>E</b>	<b>Cálculo da função <math>Y_0</math></b>	<b>190</b>
<b>F</b>	<b>Redução da função <math>\xi_{01}</math></b>	<b>192</b>

# Capítulo 1

## Introdução Geral

A descrição de todos os fenômenos naturais a partir dos constituintes fundamentais e suas interações sempre foi, e ainda é, o grande objetivo da Física como ciência. Ao longo dos anos, e particularmente no século passado, o acúmulo de informações resultantes das investigações de inúmeros cientistas teóricos e experimentais, permitiu a construção de um considerável conhecimento a respeito dos constituintes fundamentais da natureza e dos mecanismos e simetrias que governam suas interações. Passos importantes para isto foram os desenvolvimentos da Mecânica Quântica e a Teoria da Relatividade. A reunião destas idéias permitiu o surgimento da Mecânica Quântica Relativística que num momento seguinte gerou a Teoria Quântica de Campos (TQC) [1]. Esta última se constituiu no mais importante formalismo teórico para o estudo e descrição da dinâmica das partículas elementares. Para que esta ferramenta adquirisse tal “status” e credibilidade foram cruciais os sucessos colecionados pela teoria quântica de campos das interações eletromagnéticas, a Eletrodinâmica Quântica (EDQ), na descrição de observáveis físicos pertinentes à sua fenomenologia [2]. A incrível concordância entre predições teóricas e medidas experimentais, a melhor da história das ciências exatas, deixou poucas dúvidas a respeito da validade da TQC como formalismo adequado para o estudo da natureza a partir de seus constituintes e mecanismos fundamentais de interações. O sucesso da EDQ, entretanto, não emergiu de imediato à sua concepção. Foi necessário a construção de uma adequada interpretação das soluções da teoria no contexto perturbativo devido ao aparecimento de infinitos ou divergências que se tornariam típicas de tais soluções da quase totalidade das TQC's [3]. A construção de tais teorias segue-se de uma receita bem estabelecida [4]. Constrói-se a lagrangiana, que é um funcional dos campos e de suas derivadas espaço-temporais, de modo que, após a imposição do princípio variacional de Hamilton, equações de movimento para cada um dos campos participantes da teoria são obtidas. Estas são equações diferenciais acopladas, devido aos termos de interações. Soluções exatas para tais sistemas de equações são raras e métodos perturbativos se tornam necessários. O parâmetro de tal expansão perturbativa é usualmente tomado como sendo a constante de acoplamento dos campos interagentes. A estrutura da lagrangiana envolve os campos e suas derivadas e os parâmetros físicos, que são os “inputs” da teoria, são coeficientes de tais termos. Com isso a cada ordem perturbativa são geradas contribuições em todas as ordens nos momentos e é necessário uma reparametrização ordem

a ordem. Tal procedimento não seria em todo problemático se as contribuições perturbativas para as amplitudes envolvessem apenas quantidades matemáticas definidas e finitas. As complicações surgem devido ao fato de tais contribuições serem frequentemente contaminadas por indefinições associadas à presença de integrais divergentes. Assim, antes de estabelecer o poder de predição das TQC's é preciso manipular e calcular quantidades divergentes de modo consistente e apropriado à reparametrização a cada ordem perturbativa. Deste modo necessitamos invariavelmente de uma prescrição matemática, para manusear esses “infinitos” de modo consistente com os princípios gerais de TQC e com as simetrias específicas de cada teoria. A fim de tratar deste problema, ao longo do tempo muitas técnicas de regularização ou filosofias equivalentes foram propostas. Estas de um modo geral fundamentam-se na introdução de alguma modificação, em princípio removível, das amplitudes perturbativas de modo a torná-las finitas. Num passo posterior algum tipo de limite é tomado a fim de que as expressões modificadas possam ser novamente identificadas com aquelas correspondentes às originais das amplitudes. Este processo, devido às indefinições matemáticas associadas às divergências, não é bem definido e, as amplitudes físicas regularizadas podem emergir dos cálculos com ambigüidades e, terem suas propriedades ditadas pelos princípios gerais da TQC, assim como, as determinações vindas das simetrias específicas da teoria em questão, violadas [5]. A questão crucial, no que diz respeito ao processo de regularização, é efetuar todas as manipulações e cálculos necessários para a efetivação da reparametrização sem destruir as propriedades necessárias às amplitudes perturbativas. Ao longo do tempo, desde a formulação da EDQ no início dos anos trinta do século passado, muitos procedimentos de regularização foram propostos. Dentre estas a mais importante, do ponto de vista histórico, foi a Regularização Covariante de Pauli-Villars (RPV) [6]. Esta é construída através de uma superposição de distribuições de modo a permitir a regularizabilidade e simultaneamente manter válidas as relações de simetria ou Identidades de Ward, que no caso da EDQ se resumem essencialmente na manutenção da invariância de “gauge”, cuja implicação é a conservação da corrente vetorial. Nesta prescrição um parâmetro (pelo menos) é introduzido nos integrandos sobre o qual é tomado um “limite de conexão” com a situação original ao final dos cálculos. As divergências das integrais originais reemergem então em termos do parâmetro de regularização. A identificação da estrutura das divergências permite-nos então efetuar a reparametrização da teoria na ordem perturbativa considerada. A RPV, apesar de bem sucedida no tratamento da EDQ, mostrou-se inadequada para o tratamento de divergências em teorias de “gauge” com simetrias não-abelianas. Em razão disto novas técnicas foram propostas o que culminou com o surgimento da mais importante filosofia para manusear divergências em TQC dos dias atuais, que é a chamada Regularização Dimensional (RD) [7]. Nesta prescrição as teorias (regras de Feynman) são formuladas em dimensão espaço-temporal  $2\omega$  [8], sendo  $\omega$  uma variável contínua e complexa. Os infinitos são então evitados e as amplitudes são manuseadas livremente. Nestas manipulações podem ser incluídos “shifts” na variável de integração, os quais seriam proibidos na dimensão física  $\omega = 2$  em integrais divergentes cujo grau de divergência supere o logarítmico [9]. Depois de feitas todas as manipulações necessárias, as amplitudes na dimensão física são obtidas através de uma expansão em torno de  $\omega = 2$  seguido do limite  $\omega \rightarrow 2^+$ . As divergências originais emergem como pólos em  $\omega = 2$ . Pode-se assim promover a renormalização na ordem desejada e tornar a teoria “finita”. O método

da RD é atualmente o mais popular e conveniente e é largamente utilizado no tratamento de teorias renormalizáveis em situações onde pode ser aplicado. O método, entretanto, não pode ser aplicado em situações onde a matriz  $\gamma_5$  de Dirac é necessária, já que esta não possui generalizações fora da dimensão física [10] a menos que regras particulares para cada dimensão sejam introduzidas [11]. Isto representa uma restrição importante já que densidades pseudo-escalares e axiais são relevantes na formulação de teorias fundamentais como o Modelo Padrão [12]. Portanto, é ainda necessário, a busca de procedimentos consistentes de regularização que possam ser aplicados de modo universal, ou seja, em todas as teorias e modelos de modo idêntico. É neste contexto que residem as principais motivações do presente trabalho. Utilizamos uma estratégia alternativa [13] aos procedimentos tradicionais de regularização para o tratamento das amplitudes divergentes da EDQ e para a descrição da anomalia triangular AVV [14].

A referida estratégia, que assume uma distribuição regularizadora apenas de modo implícito, é capaz de evitar o cálculo de fato de integrais divergentes, para os propósitos da reparametrização. As arbitriedades são preservadas e fixadas pelos próprios ingredientes intrínsecos ao cálculo perturbativo na forma de relações entre integrais divergentes com o mesmo grau de divergência, denominadas de relações de consistência. Devido ao caráter geral do método é possível reobter a partir dos resultados por ele produzidos aqueles correspondentes a quaisquer dos métodos tradicionais de regularização, incluindo a RD. Além disto, o método não tem restrições de aplicabilidade e é aplicado de modo igual para qualquer teoria ou modelo em qualquer dimensão espaço-temporal previamente escolhida. Ao longo do trabalho promoveremos uma discussão bastante detalhada no contexto da EDQ ao nível um “loop”, e, de posse de um tratamento consistente da EDQ, mostraremos ao tratar a anomalia AVV do modo tradicional que este não é compatível com os procedimentos exigidos para a consistência da EDQ, diferentemente do método que utilizaremos onde ambos os problemas são tratados de modo idêntico e consistente.

A fim de cumprir nossos objetivos, organizamos o trabalho de modo a enfatizar cada aspecto relevante. No capítulo 2 introduzimos algumas idéias básicas a respeito da formulação de TQC's, estabelecemos a EDQ como uma teoria de “gauge” e consideraremos suas regras de Feynman. A partir destas, construímos as amplitudes elementares ao nível um “loop” de aproximação, estabelecemos a existência das divergências e definimos um conjunto de funções de Green associadas às amplitudes divergentes. Alguns aspectos associados à reparametrização são também considerados.

No capítulo 3 tomamos auxílio na álgebra das matrizes de Dirac e desenvolvemos as amplitudes de modo a escrevê-las como uma combinação de integrais de Feynman. Fazemos isto a fim de identificar a variedade total de integrais divergentes que necessitarão ser tratadas para a efetivação dos cálculos. Ainda no capítulo 2 estabelecemos um conjunto de relações entre as funções de Green, bem como, relações de simetria e identidades de Ward, que serão utilizadas como vínculos de consistência para as manipulações e cálculos que faremos.

No capítulo 4 definimos e estudamos um conjunto de funções em termos das quais os resultados dos cálculos de todas as amplitudes que consideramos, ao nível um “loop”, podem ser escritas. Estas estruturas, e a sistematização que elas permitem, desempenham um papel importante no tratamento das amplitudes perturbativas no contexto do método que adotamos.

No capítulo 5 consideramos um conjunto de integrais de Feynman surgidas no cálculo das funções de Green, aquelas contendo apenas divergências associadas à região de grandes valores dos momentos do “loop”, denominadas divergências ultravioletas. Introduzimos a estratégia a ser utilizada para o tratamento das integrais contendo este tipo de divergência e desenvolvemos as integrais consideradas.

No capítulo 6 tomamos as integrais de Feynman para as quais podemos ter a presença de divergências vindas da região de baixos valores para os momentos do “loop”, denominadas divergências infravermelhas, simultaneamente àquelas ultravioletas. A estratégia a ser utilizada para o tratamento de tais estruturas é introduzida e as integrais são então manipuladas e calculadas.

No capítulo 7, de posse das integrais de Feynman devidamente tratadas, o cálculo das funções de Green é completado e as relações entre funções de Green, identificadas no capítulo 3, são explicitamente verificadas.

No capítulo 8 as arbitrariedades existentes são fixadas através da consideração das relações de simetria exigidas para as amplitudes físicas da EDQ. A renormalização da EDQ ao nível um “loop” é então discutida no contexto do método utilizado.

No capítulo 9 consideramos a questão da universalidade no tratamento das divergências ao incluir numa mesma discussão problemas típicos de TQC's que não podem ser tratados no contexto da RD. Mostramos que o tratamento tradicional dado às amplitudes triangulares anômalas é contraditório ao tratamento dado pela RD às amplitudes não anômalas. A fim de mostrar que o método adotado para manipulações e cálculos fornece um tratamento universal e consistente para as divergências do cálculo perturbativo, no capítulo 10 nós efetuamos o cálculo explícito das funções de três pontos envolvidas nas discussões efetuadas no capítulo 9. Mostramos então que um tratamento consistente das anomalias triangulares emerge naturalmente no contexto da estratégia adotada.

Finalmente, no capítulo 11 apresentamos nossas considerações finais e conclusões.

## Capítulo 2

# A Eletrodinâmica Quântica em Solução Perturbativa

### 2.1 Introdução

A teoria quântica das interações eletromagnéticas, a Eletrodinâmica Quântica (EDQ), assim como qualquer teoria quântica de campos (TQC), pode ser representada por um funcional dos campos participantes e de suas derivadas espaço-temporais, a Lagrangiana  $\mathcal{L}$  [15]. A construção deste funcional segue-se de uma receita geral e bem estabelecida. Os campos, são combinados nos termos de interações de modo invariante, frente ao grupo total de simetrias supostas relevantes, e, simultaneamente, invariantes frente à simetria de Lorentz. Tais termos, serão acrescentados àqueles que determinam a dinâmica dos campos livres presentes na teoria. Estes, por sua vez, são bem conhecidos pois devem fornecer, após a aplicação do princípio variacional de Hamilton, as corretas equações de onda relativística para as partículas presentes na teoria. De modo esquemático, construímos o funcional

$$\mathcal{L}(\phi_a, \partial_\mu \phi_a) = \mathcal{L}_a^F + \mathcal{L}^I, \quad (2.1)$$

onde  $\phi_a$  é o conjunto de campos presentes na teoria. O termo  $\mathcal{L}_a^F$  representa a parte livre de cada campo participante e  $\mathcal{L}^I$  representa os termos de interações. Com a lagrangiana construída, nós definimos a ação

$$S = \int d^4x \mathcal{L}(\phi_a, \partial_\mu \phi_a). \quad (2.2)$$

As equações de movimento para os campos vêm da imposição de que estas correspondam às condições que extremizam  $S$ , ou seja,

$$\delta S = 0, \quad (2.3)$$

que nos fornecerá :

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial x_\mu} \left( \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta(\partial_\mu \phi_a)} \right) - \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \phi_a} \right\} = 0, \quad (2.4)$$

que são as equações de Euler-Lagrange. Deste modo cada campo participante da teoria obedecerá a uma equação diferencial cuja parte livre é a adequada equação de onda relativística. A parte que vem das



interações envolverá os outros campos da teoria. Resumindo, teremos um sistema de equações diferenciais acopladas. O passo seguinte é a quantização dos campos e a solução das equações de movimento. Se tal solução pudesse ser obtida, uma descrição completa da fenomenologia pertinente seria alcançada, dentro da validade das hipóteses consideradas na construção da teoria, ou seja, o conjunto total de simetrias supostas relevantes. Diante da dificuldade de solução exata das equações de movimento obtidas, nós recorreremos aos métodos perturbativos. Nós não consideraremos, neste trabalho, os procedimentos envolvidos neste tratamento, para o quê a literatura disponível é vastíssima [1]. Admitiremos, como ponto de partida, que é possível construir uma interpretação adequada das séries perturbativas em termos das regras de Feynman. Com estas podemos construir as amplitudes físicas correspondentes a quaisquer processos físicos pertinentes a EDQ, em qualquer ordem perturbativa previamente escolhida. Nossa abordagem, neste capítulo, será de construir a lagrangiana da EDQ através da invariância de “gauge”, considerar as regras de Feynman relevantes e então construir as amplitudes divergentes básicas da teoria. Passaremos a nos ocupar do tratamento adequado e consistente destas divergências, que é o ponto central do presente trabalho, para então considerar a renormalização.

## 2.2 A Eletrodinâmica Quântica como uma teoria de “gauge”

A fim de construir uma teoria, através de uma lagrangiana, o primeiro passo é a especificação dos campos participantes e das simetrias. Com a identificação dos campos, seus números quânticos relativos ao espaço-tempo, a parte livre fica estabelecida. As simetrias especificam o modo pelo qual os campos interagem. Isto, por outro lado, manifesta-se matematicamente através da maneira pela qual os campos sofrem transformações que deixam a lagrangiana invariante. A tais invariâncias, é bem sabido, estão associadas correntes conservadas e a estas observáveis físicos [16]. As simetrias podem ser classificadas em duas classes básicas; as simetrias globais e as simetrias locais ou simetrias de “gauge”. A mais simples das teorias de “gauge” é a Eletrodinâmica Quântica, que serve de protótipo para as demais. Através da implementação da invariância de “gauge” é possível gerar dinâmica entre os campos transformados. Pode-se dizer que as teorias fundamentais são vistas atualmente como teorias de “gauge” [17]. Tendo isto em mente, nós iniciaremos a discussão da EDQ considerando aspectos relacionados a sua construção em sendo ela uma teoria com simetria local abeliana  $U(1)$ . Em seguida consideraremos as regras de Feynman da teoria e construiremos amplitudes associadas a processos básicos no contexto das soluções perturbativas. Neste ponto, identificaremos a presença de divergências do que nos ocuparemos ao longo de quase todo o presente trabalho. Discutiremos o tratamento consistente destas divergências culminando com a renormalização.

A fim de construir uma teoria quântica de campos, como já foi dito, o primeiro passo é especificar as partículas cuja dinâmica desejamos descrever e, conseqüentemente, os campos correspondentes aos seus observáveis físicos. Na EDQ estamos interessados em descrever a dinâmica de um campo fermiônico massivo que é o elétron. Este possui “spin”  $1/2$  e denominaremos sua massa por  $m$ . Deste modo a parte livre da lagrangiana é:

$$\mathcal{L}_F = \bar{\psi}(x) (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi(x), \quad (2.5)$$

uma vez que um campo destes deve obedecer à equação de onda relativística de Dirac [18].

A estrutura matemática do funcional acima, permite notar de imediato a invariância frente transformações globais  $U(1)$  [17]:

$$\begin{cases} \psi(x) \rightarrow \psi'(x) = e^{-i\alpha} \psi(x) \\ \bar{\psi}(x) \rightarrow \bar{\psi}'(x) = e^{i\alpha} \bar{\psi}(x), \end{cases} \quad (2.6)$$

onde  $\alpha$  é um parâmetro que não depende do espaço tempo, ou seja,  $\alpha \neq \alpha(x)$ . Se admitirmos que  $\alpha = \alpha(x)$  podemos construir uma teoria de “gauge” local com simetria abeliana  $U(1)$ . Então as transformações ficam:

$$\begin{cases} \psi(x) \rightarrow \psi'(x) = e^{-i\alpha(x)} \psi(x) \\ \bar{\psi}(x) \rightarrow \bar{\psi}'(x) = e^{i\alpha(x)} \bar{\psi}(x). \end{cases} \quad (2.7)$$

O termo que possui a derivada sofrerá uma transformação muito diferente daquela do caso global. Tere-mos:

$$\begin{aligned} \bar{\psi}(x) \partial_\mu \psi(x) &\rightarrow \bar{\psi}'(x) \partial_\mu \psi(x) = \bar{\psi}'(x) e^{i\alpha(x)} \partial_\mu \left[ e^{-i\alpha(x)} \psi(x) \right] \\ &= \bar{\psi}(x) [\partial_\mu \psi(x)] - i\bar{\psi}(x) [\partial_\mu \alpha(x)] \psi(x). \end{aligned} \quad (2.8)$$

O funcional (2.5) não mais será invariante. A fim de torná-lo, necessitamos construir a Derivada Co-variante [4], que é um termo derivativo porém com a propriedade adequada de transformação. Definindo

$$D_\mu \psi = (\partial_\mu + ieA_\mu) \psi, \quad (2.9)$$

onde  $A_\mu(x)$  é um campo vetorial e  $e$  é um parâmetro livre o qual poderá ser futuramente identificado como a constante de acoplamento elétron-fóton (carga elétrica  $e$ ). A derivada formada se transforma como

$$[D_\mu \psi(x)] \rightarrow [D_\mu \psi(x)]' = e^{-i\alpha(x)} [D_\mu \psi(x)]. \quad (2.10)$$

O campo  $A_\mu(x)$  será denominado campo de “gauge” e a transformação correspondente de transformação de “gauge”. Se  $A_\mu(x)$  tiver a propriedade de transformação:

$$A_\mu(x) \rightarrow A'_\mu(x) + \frac{1}{e} (\partial_\mu \alpha(x)), \quad (2.11)$$

a lagrangiana

$$\tilde{\mathcal{L}}_F = \bar{\psi}(x) [i\gamma_\mu (\partial_\mu + ieA_\mu) - m] \psi(x), \quad (2.12)$$

será dita invariante de “gauge” e de Lorentz, simultaneamente. Esta é a maneira pela qual implementamos derivadas dos campos e deixamos o funcional (2.5) invariante frente a transformações que dependem do espaço-tempo. Se introduzirmos na lagrangiana termos correspondentes à parte livre deste campo vetorial,

portanto, com derivadas de  $A_\mu(x)$ , teremos a teoria de “gauge” correspondente. O termo *mais simples* invariante de “gauge” é:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}, \quad (2.13)$$

onde

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu. \quad (2.14)$$

É fácil verificar que  $F_{\mu\nu}$  é invariante. Isto pode ser feito diretamente ou notando [19] que:

$$(ieF_{\mu\nu})\psi(x) = (D_\mu D_\nu - D_\nu D_\mu)\psi(x). \quad (2.15)$$

Deste modo para mostrar a invariância

$$F_{\mu\nu} = F'_{\mu\nu} \quad (2.16)$$

podemos verificar que

$$e^{-i\alpha(x)} [F_{\mu\nu}\psi(x)] = F'_{\mu\nu}\psi(x)', \quad (2.17)$$

o que pode ser feito notando que

$$[(D_\mu D_\nu - D_\nu D_\mu)\psi(x)]' = e^{-i\alpha} [(D_\mu D_\nu - D_\nu D_\mu)\psi(x)]. \quad (2.18)$$

Deste modo consideramos o funcional

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(x) [i\gamma^\mu(\partial_\mu + ieA_\mu)] \psi(x) - m\bar{\psi}(x)\psi(x) - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \quad (2.19)$$

como sendo a lagrangiana da EDQ, uma teoria de “gauge” com simetria abeliana  $U(1)$ . A vantagem deste tipo de formulação está na clara identificação dos invariantes do que decorrem de imediato aspectos gerais. Como tal, podemos notar que cada termo formado a partir de  $\bar{\psi}(x)$ ,  $\psi(x)$ ,  $F_{\mu\nu}$  e  $D_\mu$  que seja escalar de Lorentz será automaticamente invariante de “gauge”. O campo  $A_\mu$ , por outro lado, é um campo vetorial sem massa pois o termo bilinear  $A_\mu A^\mu$ , ainda que seja escalar de Lorentz, não é invariante de “gauge”. Outro aspecto importante é a propriedade denominada de universalidade do acoplamento do campo de “gauge” com os campos carregados. Na EDQ, o acoplamento de mais baixa dimensionalidade, está contido na derivada covariante  $D_\mu\psi$ , a qual é construída a partir da propriedade de transformação do próprio elétron. Isto quer dizer que o campo  $A_\mu$ , o campo do fóton, se acoplará com qualquer campo carregado de um modo que depende apenas da propriedade de transformação deste campo frente à simetria assumida. A constante de acoplamento será portanto universal. A simetria de “gauge” permite a construção de uma infinidade de termos de interação tais como:  $\bar{\psi}\sigma_{\mu\nu}\psi F^{\mu\nu}$ ,  $\bar{\psi}\gamma_\mu\psi D_\nu F^{\mu\nu}$  e assim por diante. Todos são descartados pela exigência de renormalizabilidade da teoria, que é também o argumento que orienta a escolha dos termos que contêm somente o campo  $A_\mu$  como sendo (2.13). Não há, portanto, na teoria o acoplamento do campo vetorial com ele próprio. Isto se interpreta como sendo devido ao fato do fóton não carregar o número quântico de “gauge”  $U(1)$  (a carga elétrica).

Com a teoria construída, e após estes importantes comentários, devemos nos ocupar da solução das equações de movimento, a fim de podermos apreciar as consequências dinâmicas das nossas hipóteses

(simetrias) implementadas na construção da lagrangiana. Para este propósito, deveremos resolver três equações diferenciais acopladas envolvendo os campos  $\bar{\psi}(x)$ ,  $\psi(x)$  e  $A_\mu(x)$  [20]. É bem sabido da inviabilidade desta tarefa o que justifica a adoção de métodos perturbativos. Neste contexto, após a quantização, a correspondente expansão perturbativa nos permite identificar um conjunto de elementos básicos a partir dos quais a série é construída; os vértices, os propagadores e os fatores de simetria. É possível enunciar um conjunto de regras que, se seguido, permite a construção das amplitudes correspondentes à solução perturbativa. Deste modo, qualquer processo físico pertinente à EDQ pode ser calculado pela aplicação destas regras diretamente, sem a necessidade de construir a expansão propriamente dita, em qualquer ordem do parâmetro perturbativo. Cada termo pode ser representado diagramaticamente e a correspondente expressão matemática obtida pela atribuição dos valores de cada uma das peças que compõem as “regras de Feynman”. Para a EDQ tais peças são as seguintes [21]:


i) Propagadores:

-Férmion de spin 1/2 (elétron);



Fig. 2.1: Representação diagramática para o propagador correspondente a um férmion de spin 1/2.

-Vetor sem massa (fóton);



$$iD(k)_{\mu\nu} = \frac{-i}{k^2 + i\epsilon} \left[ g_{\mu\nu} + (\xi - 1) \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right], \quad (2.20)$$

Fig. 2.2: Representação diagramática para o propagador correspondente a um vetor sem massa.

ii) Vértice:

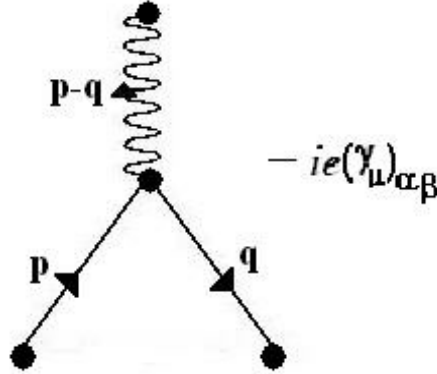


Fig. 2.3: Representação diagramática correspondente ao vértice de interação elétron-fóton.

Aqui  $\alpha$  e  $\beta$  são índices matriciais relativos ao espaço de Dirac-Lorentz (spinoriais),  $\mu$  e  $\nu$  são índices de Lorentz (espaço-tempo) e  $\xi$  é o parâmetro de “gauge”, necessário para a quantização da teoria com o campo vetorial sem massa (que não tem consequências dinâmicas).

Vamos então considerar os processos básicos da teoria.

## 2.3 Processos Físicos

Uma vez estabelecidas as regras de Feynman para a EDQ, torna-se possível o estudo de processos físicos pertinentes dentro do tratamento perturbativo. Um processo físico é caracterizado pela escolha dos campos externos, ou seja, as partículas iniciais e finais. A teoria tem o papel de estabelecer como e o que pode ocorrer enquanto as partículas iniciais participantes do processo interagem para gerar os estados finais. Na linguagem perturbativa, a descrição de um processo físico sempre se dará em uma ordem previamente escolhida. Após isto, a tarefa se transforma na construção de todos os diagramas, construídos com vértices e propagadores que são capazes de conectar as linhas externas. Em princípio, pode-se construir os diagramas para um processo físico caracterizado por um número arbitrário de linhas bosônicas externas e um número (par) qualquer de linhas fermiônicas externas. A seguir vamos considerar alguns processos elementares a fim de introduzir alguns aspectos do cálculo perturbativo de nosso interesse imediato, com os quais estaremos ocupados ao longo de todo o presente trabalho.

### 2.3.1 Auto-Energia do Elétron

Um dos processos físicos mais simples pertinentes à EDQ é o denominado auto-energia do elétron. Ele é caracterizado pela presença de duas linhas fermiônicas externas e portanto descreve a propagação do elétron na presença da interação. A descrição perturbativa implica em correções em ordem crescente na constante de acoplamento à propagação livre do elétron. A ordem perturbativa mais baixa é aquela contendo dois diagramas, como mostra a figura abaixo.

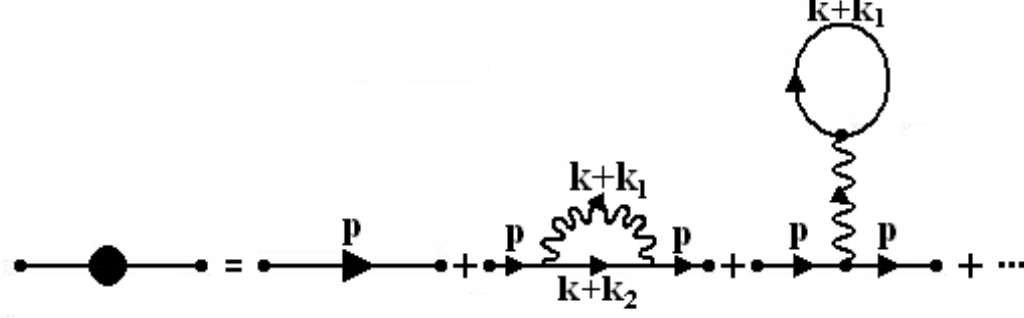


Fig. 2.4: Representação diagramática para a expansão perturbativa correspondente a auto-energia do elétron.

Ao último diagrama acima, que denominaremos diagrama “tadpole”, de acordo com as regras de Feynman, deve ser associada à expressão matemática

$$\Sigma^{tad}(p) = (-ie)^2 \gamma_\nu \frac{i}{p^2 + i\epsilon} \left[ g_{\mu\nu} + (\xi - 1) \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} \right] T_\mu^V(k_1, m), \quad (2.21)$$

onde definimos a função de Green

$$T_\mu^V(k_1, m) = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} Tr \left\{ \gamma_\mu \frac{1}{(\not{k} + \not{k}_1) - m} \right\}. \quad (2.22)$$

Note que adotamos uma rotulação arbitrária para o momento carregado pelo propagador fermiônico interno. Quanto ao segundo diagrama da *figura* (2.4), que denominaremos auto-energia do elétron por excitação de um fóton, o mesmo deve ser escrito como

$$\Sigma^{1\gamma}(p) = (-ie)^2 \Sigma(k_1, k_2, m), \quad (2.23)$$

onde definimos a função de Green

$$\Sigma(k_1, k_2, m) = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \left\{ \left[ \gamma_\mu \frac{1}{(\not{k} + \not{k}_2) - m} \right] \times \left[ g^{\mu\nu} + (\xi - 1) \frac{(k + k_1)^\mu (k + k_1)^\nu}{(k + k_1)^2} \right] \frac{1}{(k + k_1)^2} \right\}. \quad (2.24)$$

Na expressão acima os momentos arbitrários internos estão relacionados ao momento externo carregado pelo elétron devido à conservação de energia e momento por

$$k_2 - k_1 = p. \quad (2.25)$$

Uma simples inspeção das expressões matemáticas, correspondentes às amplitudes participantes do processo físico considerado, revela, pela contagem de potências do momento do “loop”, que as funções de Green

$T_\mu^V(k_1, m)$  e  $\Sigma(k_1, k_2, m)$  são quantidades indefinidas já que a integração, em princípio, diverge. Enquanto que para  $T_\mu^V(k_1, m)$  o grau de divergência é cúbico, para  $\Sigma(k_1, k_2, m)$  a divergência é de grau linear.

### 2.3.2 Auto-Energia do Fóton

Outro processo físico elementar pertinente à EDQ é aquele denominado auto-energia do fóton. Ele é caracterizado por duas linhas externas bosônicas. A contribuição perturbativa de mais baixa ordem vem do diagrama contendo um “loop” fermiônico, como mostra a figura abaixo. De acordo com as regras de Feynman, devemos escrever esta contribuição como:

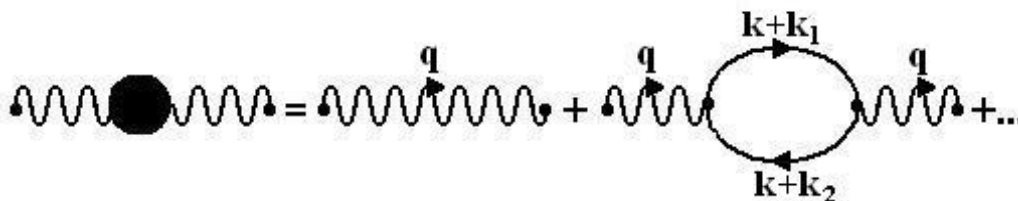


Fig. 2.5: Representação diagramática correspondente a expansão perturbativa para a auto-energia do fóton.

$$\Pi_{\mu\nu}(q) = (-)(-ie)^2 T_{\mu\nu}^{VV}(k_1, k_2, m) \quad (2.26)$$

onde definimos a função de Green fermiônica de dois pontos bi-vetorial como

$$T_{\mu\nu}^{VV}(k_1, k_2, m) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} Tr \left\{ \gamma_\mu \frac{1}{(\not{k} + \not{k}_1) - m} \gamma_\nu \frac{1}{(\not{k} + \not{k}_2) - m} \right\}. \quad (2.27)$$

Note que, para as linhas fermiônicas internas, a rotulação arbitrária adotada  $k_1$  e  $k_2$ , implica na relação  $k_1 - k_2 = q$ , onde  $q$  é o momento carregado pelo fóton devido à conservação de energia e momento em ambos os vértices. A expressão acima, que denominaremos também tensor de polarização, revela, em princípio, pela contagem de potências, uma divergência superficial quadrática.

### 2.3.3 Interação elétron-fóton

O processo físico contendo uma linha externa bosônica e duas fermiônicas representa a configuração básica da própria interação eletromagnética, já que corresponde à configuração do vértice da interação. Por isso os diagramas correspondentes a série perturbativa são denominados correções de vértice. A contribuição de mais baixa ordem destas é aquela correspondente ao diagrama árvore. Em seguida aparece aquela associada à excitação de um fóton, como mostrado na figura abaixo.

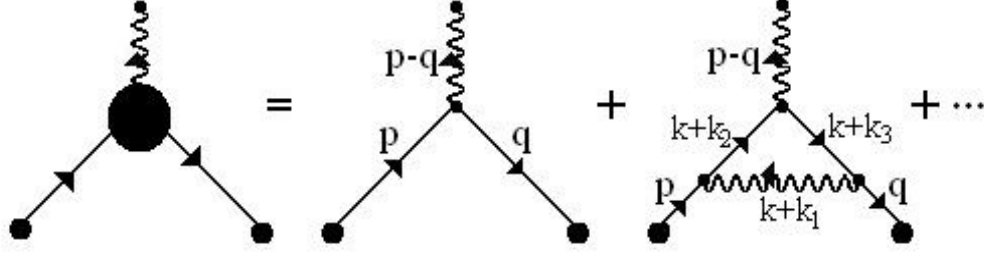


Fig. 2.6 :Representação diagramática correspondente a interação elétron-fóton em expansão perturbativa.

A expressão correspondente ao segundo dos diagramas da figura acima, pode ser escrita, a partir das regras de Feynman, como

$$V^\mu(p, q) = -e^3 \Lambda^\mu(k_1, k_2, k_3, m), \quad (2.28)$$

onde nós definimos a função de Green

$$\Lambda^\mu(k_1, k_2, k_3, m) = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \left\{ \left[ \gamma_\alpha \frac{1}{(\not{k} + \not{k}_2) - m} \gamma^\mu \frac{1}{(\not{k} + \not{k}_3) - m} \gamma_\nu \right] \times \left\{ g^{\alpha\nu} + (\xi - 1) \frac{(k + k_1)^\alpha (k + k_1)^\nu}{(k + k_1)^2} \right\} \frac{1}{(k + k_1)^2} \right\}. \quad (2.29)$$

Aos momentos internos foi também adotado uma rotulação arbitrária ainda que a contagem de potências nos revele um caráter logaritmicamente divergente. Eles estão relacionados àqueles externos, pelas restrições impostas pela conservação de energia e momento, por

$$\begin{cases} k_2 - k_1 = p \\ k_3 - k_1 = q \\ k_2 - k_3 = p - q. \end{cases} \quad (2.30)$$

### 2.3.4 Decaimento fotônico do fóton

O processo físico contendo três linhas bosônicas externas, que denominaremos decaimento fotônico do fóton é, um processo não elementar no sentido de que não há na teoria termo trilinear no campo do fóton. Apesar disso as linhas externas podem ser conectadas por um “loop” puramente fermiônico, como mostra a *figura* (2.7). Esta é uma característica do tratamento perturbativo, a aparente geração de interações entre campos via diagramas, em princípio possíveis, da expansão perturbativa, proibidos de ocorrerem diretamente (ao nível árvore) pelas simetrias fundamentais da teoria



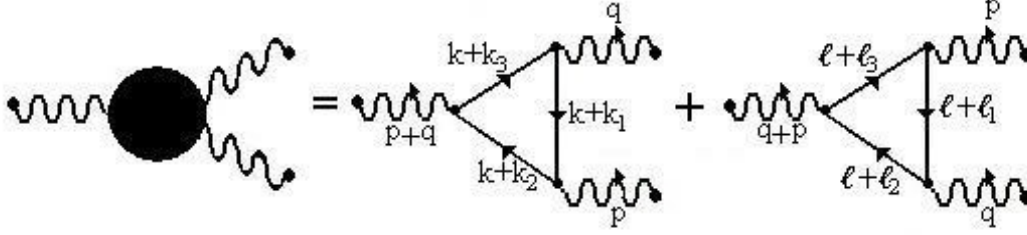


Fig. 2.7: Representação diagramática correspondente ao decaimento fotônico do fóton.

Como tal, na EDQ as correções ditas radiativas, como representada na figura acima, parecem induzir uma interação de três fótons. Como a invariância de “gauge” não permite esta interação, haverá apenas uma chance de mantermos a consistência das predições da teoria, em solução perturbativa, com a simetria de “gauge” implementada; o cálculo dos diagramas correspondentes deve fornecer um resultado identicamente nulo. Nós voltaremos a este assunto brevemente. Por ora, ressaltamos apenas que processos como este, proibidos por razões bastante gerais, são de extrema importância para a definição de esquemas consistentes para as manipulações e cálculos necessários nos cálculos perturbativos, tendo em vista as indefinições matemáticas representadas pelas divergências. O cancelamento idêntico da amplitude, correspondente a um processo físico proibido, deve ocorrer naturalmente dentro da estratégia de cálculo adotada, para que esta possa ser considerada consistente. Para o processo que estamos considerando as regras de Feynman determinam

$$T_{\beta\nu\alpha}^{\gamma\gamma\gamma} = -ie^3 T_{\beta\nu\alpha}^{VVV}(k_1, k_2, k_3, m), \quad (2.31)$$

onde definimos a função de Green de três pontos fermiônica triplamente vetorial como

$$T_{\beta\nu\alpha}^{VVV}(k_1, k_2, k_3, m) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left\{ \gamma_\beta \frac{1}{\not{k} + \not{k}_1 - m} \gamma_\nu \frac{1}{\not{k} + \not{k}_2 - m} \gamma_\alpha \frac{1}{\not{k} + \not{k}_3 - m} \right\}. \quad (2.32)$$

Os momentos internos arbitrários satisfazem as relações

$$\begin{cases} k_3 - k_1 = q, \\ k_1 - k_2 = p, \\ k_3 - k_2 = q + p, \end{cases} \quad (2.33)$$

com os momentos externos. A contagem de potências revela uma divergência de grau linear.

### 2.3.5 Espalhamento fóton-fóton

Outro processo físico importante para nossos propósitos é aquele contendo quatro linhas bosônicas externas, que denominaremos interação fóton-fóton. Também não é um processo físico elementar no sentido que não há na teoria um termo quadrilinear no campo do fóton. O processo é mediado em mais baixa ordem por um “loop” puramente fermiônico como mostra a figura abaixo.

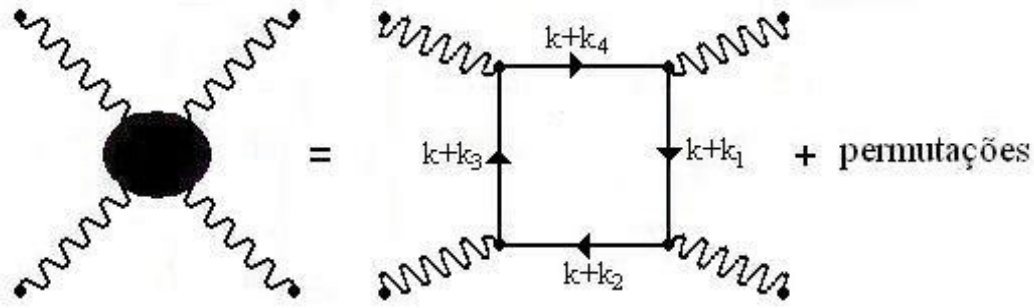


Fig. 2.8 : Representação diagramática correspondente ao espalhamento elástico de dois fótons.

A expressão matemática correspondente ao diagrama pode ser escrita como

$$T_{\mu\nu\alpha\beta}^{\gamma\gamma\gamma\gamma} = -e^4 T_{\mu\nu\lambda\xi}^{VVVV}(k_1, k_2, k_3, k_4, m), \quad (2.34)$$

onde definimos a função de Green de quatro pontos fermiônica como

$$T_{\mu\nu\alpha\beta}^{VVVV}(k_1, k_2, k_3, k_4, m) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left\{ \gamma_\mu \frac{1}{\not{k} + \not{k}_1 - m} \gamma_\nu \frac{1}{\not{k} + \not{k}_2 - m} \gamma_\alpha \frac{1}{\not{k} + \not{k}_3 - m} \gamma_\beta \frac{1}{\not{k} + \not{k}_4 - m} \right\}. \quad (2.35)$$

Uma simples inspeção revela o caráter logaritmicamente divergente para a função de Green  $T_{\mu\nu\alpha\beta}^{VVVV}$ .

## 2.4 Outros processos físicos

O procedimento adotado acima pode ser seguido para caracterizar uma infinidade de processos físicos. Nosso interesse naqueles que explicitamos acima ficará claro no que se segue. Ele está ligado ao caráter divergente das funções de Green envolvidas. Além disto, em outros processos físicos pertinentes à EDQ, as funções de Green divergentes que aparecem nos diagramas são as mesmas que aparecem nos processos considerados acima. Um exemplo interessante para esclarecer estes aspectos, pode ser fornecido pelo espalhamento elétron-elétron, caracterizado por quatro linhas fermiônicas externas. As correções perturbativas ao diagrama de mais baixa ordem virão de diagramas contendo “loops” onde as divergências residirão em funções de Green intermediárias que são as mesmas encontradas acima. Isto pode ser visto na *figura (2.9)*.

Os diagramas apresentados não representam todos os termos da série perturbativa até oitava ordem na constante de acoplamento. Eles servem para mostrar que as estruturas divergentes que aparecem em correções perturbativas de ordem mais elevada em quaisquer processos pertinentes à EDQ são sempre estruturas mais fundamentais.

A utilização da teoria na descrição de processos físicos, exige um adequado tratamento das divergências levando à redefinição das funções de Green elementares, de modo que as divergências, que contaminam correções de ordem superior, sejam consistentemente eliminadas, ou seja, devemos renormalizar a teoria. Todos os procedimentos que adotaremos daqui por diante têm o objetivo de construir esta reinterpretação

consistente. Num primeiro instante nos ocuparemos da estrutura matemática das amplitudes para num passo futuro, (capítulo 8) tratar da renormalização propriamente dita.

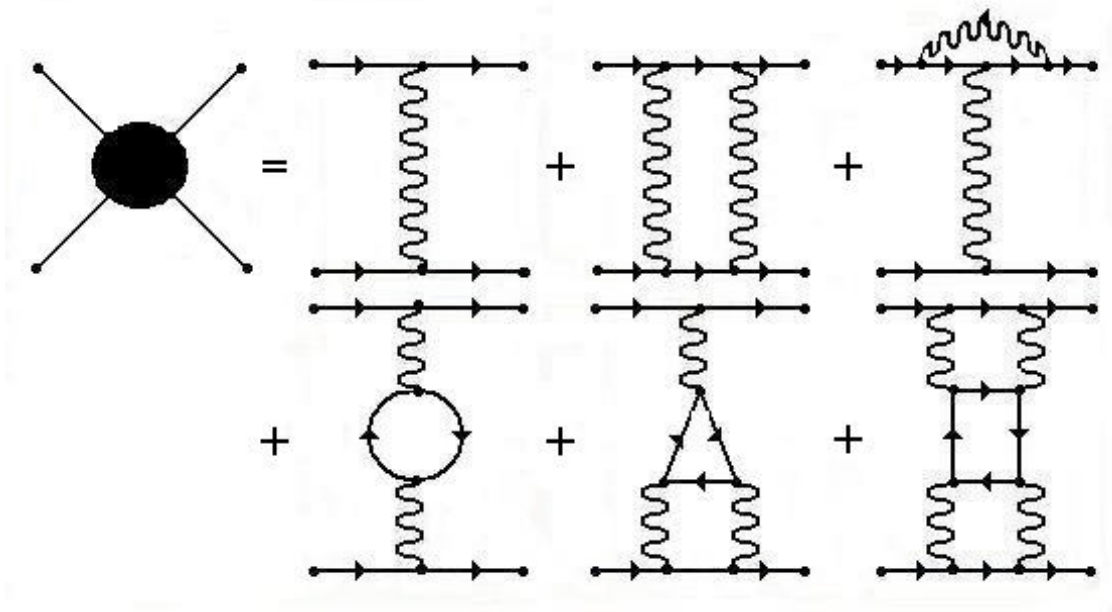


Fig. 2.9 : Diagrama correspondente a interação elétron-elétron em expansão perturbativa.

## 2.5 Cálculo perturbativo e parâmetros físicos

Tendo em vista o aparecimento de divergências nas amplitudes associadas aos processos físicos considerados, é oportuno que discutamos, neste ponto, uma questão importante relacionada ao cálculo perturbativo de um modo geral [22]. Toda vez que calculamos contribuições de ordem mais elevada no parâmetro perturbativo, os parâmetros (físicos) identificados na ordem anterior necessitam ser redefinidos. Isto será retomado com detalhes no capítulo 8 mas podemos entender este aspecto tomando inicialmente o propagador livre do elétron, dado por

$$iS(p) = \frac{i}{\not{p} - m + i\epsilon}. \quad (2.36)$$

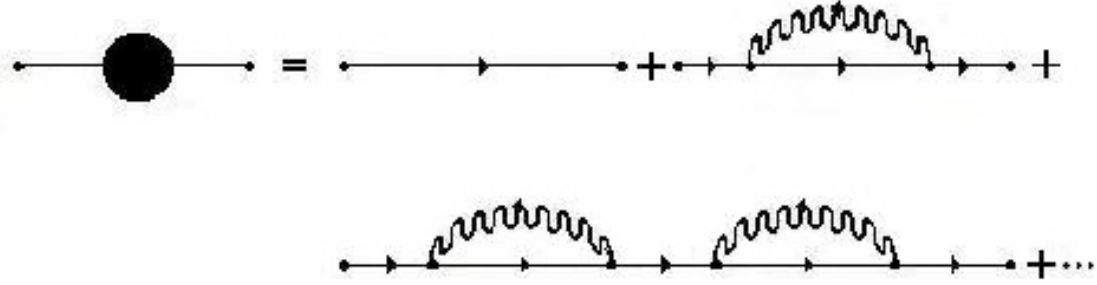
Duas informações importantes estão contidas na expressão acima que são na verdade “inputs” da teoria, isto é, são parâmetros necessários para que a teoria tenha poder de predição, que não podem ser determinados por ela. Isto significa que devem ser identificados com observáveis físicos ou fixados por escolha ou normalização. Este tipo de identificação ocorre para cada termo na lagrangiana da teoria. No propagador do elétron tais parâmetros são a massa e a constante de normalização do campo. A massa da partícula (o pólo) pode ser identificada pela propriedade:

$$- [iS(p)]^{-1} \Big|_{\not{p}=0} = m. \quad (2.37)$$

Por sua vez, o coeficiente de  $\not{p}$  (o resíduo), que está relacionado à normalização adotada para o campo livre, já que vem do termo derivativo, pode ser identificado como

$$\left. \frac{\partial}{\partial \not{p}} [iS(p)]^{-1} \right|_{\not{p}=0} = 1. \quad (2.38)$$

Conseqüentemente, estas escolhas, é importante ressaltar, são arbitrárias. Vamos agora considerar correções de auto-energia, representadas pela equação diagramática mostrada na *figura*. (2.10).



*Fig. 2.10: Representação diagramática para a série perturbativa correspondente a auto-energia do elétron.*

A bolha representa as contribuições para a auto-energia em uma certa ordem no parâmetro perturbativo. Denominando  $-i\Sigma(p)$  para estas contribuições, teremos a série

$$\begin{aligned} iS'(p) &= \frac{i}{\not{p} - m + i\epsilon} + \frac{i}{\not{p} - m + i\epsilon} [-i\Sigma(p)] \frac{i}{\not{p} - m + i\epsilon} \\ &+ \frac{i}{\not{p} - m + i\epsilon} [-i\Sigma(p)] \frac{i}{\not{p} - m + i\epsilon} [-i\Sigma(p)] \frac{i}{\not{p} - m + i\epsilon} + \dots \end{aligned} \quad (2.39)$$

Evidenciando o primeiro fator, que é comum a todos os termos, obtemos

$$\begin{aligned} iS'(p) &= \frac{i}{\not{p} - m + i\epsilon} \left\{ 1 + [-i\Sigma(p)] \frac{-i}{m - \not{p} - i\epsilon} + \right. \\ &\left. [-i\Sigma(p)] \frac{-i}{m - \not{p} - i\epsilon} [-i\Sigma(p)] \frac{-i}{m - \not{p} - i\epsilon} + \dots \right\}, \end{aligned} \quad (2.40)$$

ou ainda

$$iS'(p) = iS(p) \left\{ 1 + \Sigma(p)S(p) + [\Sigma(p)S(p)]^2 + \dots \right\}. \quad (2.41)$$

No espírito das perturbações, a série pode ser somada de modo que:

$$iS'(p) = \frac{i}{\not{p} - m - \Sigma(p) + i\epsilon}. \quad (2.42)$$

Neste ponto podemos nos questionar a respeito dos observáveis identificados acima no propagador livre. O pólo do propagador corrigido pela auto-energia ainda está em  $m$ ? E o coeficiente de  $\not{p}$  ainda é a

unidade? A fim de que o valor a momento nulo do inverso do propagador seja identificado com a massa  $m$  é necessário que:

$$\Sigma(\not{p})|_{\not{p}=0} = 0. \quad (2.43)$$

Do mesmo modo o resíduo permanecerá a unidade se:

$$\frac{\partial \Sigma(\not{p})}{\partial \not{p}} \Big|_{\not{p}=0} = 0. \quad (2.44)$$

Estas condições em geral não são preenchidas. Então, especificando alguma ordem no cálculo perturbativo, é necessário reparametrizar a teoria, o que significa reidentificar os parâmetros físicos. No caso do propagador podemos escrever a auto-energia na forma de uma expansão em Taylor, ou seja,

$$\Sigma(\not{p}) = \Sigma(0) + \not{p}\Sigma'(0) + \tilde{\Sigma}(\not{p}). \quad (2.45)$$

Então teremos

$$-iS'(p)|_{\not{p}=0}^{-1} = m + \Sigma(0). \quad (2.46)$$

Por sua vez

$$\frac{\partial}{\partial \not{p}} [iS'(p)]^{-1} \Big|_{\not{p}=0} = [1 - \Sigma'(0)]. \quad (2.47)$$

Assim escrevemos

$$iS'(p) = \frac{i}{[1 - \Sigma'(0)] \left\{ \not{p} - \frac{[m + \Sigma(p)]}{[1 - \Sigma'(0)]} + \frac{\tilde{\Sigma}(\not{p})}{[1 - \Sigma'(0)]} + i\epsilon \right\}}, \quad (2.48)$$

ou ainda

$$iS'(p) = \frac{iZ_\psi}{\left\{ \not{p} - Z_\psi [m + \Sigma(p)] + Z_\psi \tilde{\Sigma}(\not{p}) + i\epsilon \right\}}, \quad (2.49)$$

que podemos escrever como

$$iS'(p) = \frac{iZ_\psi}{\left\{ \not{p} - M + Z_\psi \tilde{\Sigma}(\not{p}) + i\epsilon \right\}}, \quad (2.50)$$

onde identificamos

$$\frac{m + \Sigma(0)}{[1 - \Sigma'(0)]} = M \quad (2.51)$$

e

$$Z_\psi^{-1} = [1 - \Sigma'(0)]. \quad (2.52)$$

Isto implica que devemos identificar  $M$  como a massa física da partícula e  $Z_\psi$  como a normalização do campo na ordem em que  $\Sigma(p)$  é especificada. É importante notar que esta identificação seria necessária

ainda que as contribuições para a auto-energia fossem todas finitas. A necessidade da reparametrização é uma característica do cálculo perturbativo. Isto se deve ao fato de que a expansão perturbativa é feita na constante de acoplamento, ao passo que, na lagrangiana, os observáveis físicos (parâmetros da teoria) são coeficientes de potências dos momentos e dos campos. O processo de reparametrização complica-se devido ao fato de as quantidades envolvidas serem divergentes. Esta é a questão central das soluções perturbativas de teorias quânticas de campos em geral; antes de efetuar qualquer predição é necessário renormalizar a teoria na ordem desejada. Para tal é necessário primeiro alguma manipulação e cálculo das amplitudes contendo divergências que sirva aos propósitos da reparametrização. E é disso que nos ocuparemos nos capítulos seguintes.

## Capítulo 3

# Funções de Green divergentes e vínculos de consistência

### 3.1 Introdução

No capítulo anterior, consideramos alguns processos físicos pertinentes à EDQ, no contexto das soluções perturbativas. Ao escrevermos as expressões correspondentes às amplitudes, identificamos um conjunto de funções de Green para as quais a contagem de potências do momento do “loop” revelou a possibilidade de divergências. Uma vez que os processos físicos envolvem quantidades finitas, tornou-se necessário buscar a construção de uma adequada interpretação das amplitudes no contexto da parametrização. Entretanto, isto implica em manipulações e cálculos envolvendo integrais de Feynman divergentes em passos intermediários. A fim de conhecermos com mais detalhes as estruturas divergentes que encontramos no capítulo anterior, neste consideraremos as operações necessárias envolvendo a álgebra das matrizes de Dirac para colocar as funções de Green obtidas na forma de combinações de integrais de Feynman, as quais nós trataremos nos capítulos posteriores. Discutiremos ainda aspectos cruciais envolvidos, que devem ser considerados antes de procedermos as manipulações e cálculos propriamente ditos, que desempenham papel de vínculos de consistência. O primeiro deles é o que denominamos relações entre funções de Green. Estas são baseadas em identidades que podem ser estabelecidas ao nível dos integrandos e que após operações de traço e integração se convertem em relações entre funções de Green com diferentes números de pontos e, conseqüentemente, com diferentes graus de divergências. O segundo de tais vínculos de consistência é fornecido pelas próprias relações de simetria. Estas últimas são imposições sobre amplitudes físicas vindas da invariância de “gauge” (conservação da corrente vetorial) [5], que é uma simetria específica da EDQ, ou vindas de teoremas baseados em argumentos bastante gerais por exemplo as simetrias de Lorentz e CPT, tal como o teorema de Furry [23]. Os vínculos de consistência, que estabeleceremos ao final deste capítulo, serão retomados no capítulo 7 após o tratamento das integrais divergentes que identificaremos neste e o correspondente cálculo das funções de Green. Naquela ocasião serão verificados de modo explícito os referidos vínculos, como propriedades importantes das amplitudes

calculadas.

## 3.2 Desenvolvimento das funções de Green

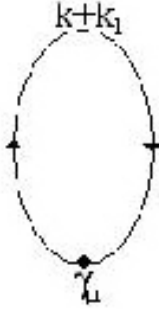
Nas próximas subseções, vamos retomar as funções de Green que definimos ao considerarmos os processos físicos básicos pertinentes à EDQ. Nossa tarefa será efetuar as operações envolvendo traços e álgebra das matrizes de Dirac, definir estruturas convenientes que venham a facilitar as manipulações futuras e introduzir uma adequada sistematização das operações envolvidas. A seguir consideraremos as funções de Green uma a uma.

### 3.2.1 Função de um ponto vetorial

No diagrama “tadpole” da auto-energia do elétron definimos a função de Green

$$T_\mu^V(k_1, m) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left\{ \gamma_\mu \frac{1}{(\not{k} + \not{k}_1) - m} \right\}, \quad (3.1)$$

representada graficamente na *figura* (3.1).



*Fig. 3.1: Diagrama correspondente à função de um ponto vetorial.*

Queremos colocá-la numa forma mais conveniente, em termos de integrais de Feynman. Para tal tomamos as operações de traços de Dirac indicadas, com o auxílio dos resultados (A.18) e (A.19) do Apêndice A. Teremos então

$$T_\mu^V(k_1, m) = 4 \left\{ \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k_\mu}{[(k + k_1)^2 - m^2]} + k_{1\mu} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{[(k + k_1)^2 - m^2]} \right\}, \quad (3.2)$$

que é a expressão pretendida. Neste ponto é interessante adotarmos uma notação que permitirá a compactação das expressões que encontraremos na reorganização que faremos em amplitudes mais complexas. Escreveremos os termos que aparecem nos denominadores das integrais de Feynman associados a propagadores de elétrons, os quais carregam momento interno  $k_i$  e massa  $m$ , de acordo com a notação

$$E_i = E(k_i, m) = [(k + k_i)^2 - m^2]. \quad (3.3)$$

Deste modo a expressão para  $T_\mu^V$  fica

$$T_\mu^V(k_1, m) = 4 \left\{ \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k_\mu}{E_1} + k_{1\mu} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{E_1} \right\}. \quad (3.4)$$



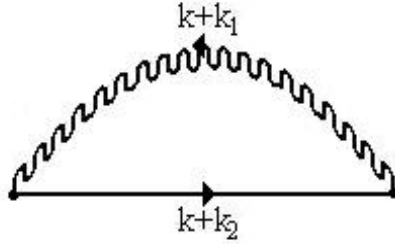
As integrais acima apresentam graus de divergência ultravioleta cúbico e quadrático, respectivamente, os maiores que encontraremos na EDQ.

### 3.2.2 Auto-energia do elétron por excitação de um fóton

No cálculo da auto-energia do elétron, encontramos a função de Green contendo um propagador fermiônico e um bosônico, definida como

$$\Sigma(k_1, k_2, m) = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \left[ \gamma_\mu [(\not{k} + \not{k}_2) - m] \gamma_\nu \right] \times \left\{ \left[ g^{\mu\nu} + (\xi - 1) \frac{(k + k_1)^\mu (k + k_1)^\nu}{(k + k_1)^2} \right] \frac{1}{(k + k_1)^2} \right\}, \quad (3.5)$$

representada diagramaticamente na *figura* (3.2).



*Fig. 3.2: Representação diagramática da função de Green associada a auto-energia do elétron por excitação de um fóton.*

Podemos promover a reorganização pretendida efetuando os produtos indicados, fazendo as contrações possíveis e separando os termos dependentes do parâmetro de “gauge” daqueles que independem deste. Assim escrevemos

$$\Sigma(k_1, k_2, m) = \Sigma_1(k_1, k_2, m) + (\xi - 1) \Sigma_2(k_1, k_2, m), \quad (3.6)$$

onde adotamos as definições

$$\Sigma_1(k_1, k_2, m) = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{\gamma_\mu [(\not{k} + \not{k}_2) + m] \gamma^\mu}{[(k + k_2)^2 - m^2][(k + k_1)^2]} \quad (3.7)$$

e

$$\Sigma_2(k_1, k_2, m) = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{(\not{k} + \not{k}_1)[(\not{k} + \not{k}_2) + m](\not{k} + \not{k}_1)}{[(k + k_1)^2]^2 [(k + k_2)^2 - m^2]}. \quad (3.8)$$

Nosso próximo passo consiste em desenvolver adicionalmente as relações que aparecem no numerador das expressões fazendo uso da álgebra das matrizes de Dirac (Apêndice A). Assim usando as relações (A.6) e (A.16) podemos obter os resultados

$$\gamma_\mu [(\not{k} + \not{k}_2) + m] \gamma^\mu = -2(\not{k} + \not{k}_2) + 4m \quad (3.9)$$

e

$$\begin{aligned} (\not{k} + \not{k}_1)[(\not{k} + \not{k}_2) + m](\not{k} + \not{k}_1) &= \left\{ (k + k_1)^2 [m - (\not{k}_2 - \not{k}_1)] \right. \\ &\quad (\not{k} + \not{k}_1)[(k + k_2)^2 - m^2] \\ &\quad \left. - (\not{k} + \not{k}_1)[(k_2 - k_1)^2 - m^2] \right\}. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Substituindo os resultados acima nas equações (3.7) e (3.8), respectivamente, as expressões para  $\Sigma_1$  e  $\Sigma_2$  ficam

$$\begin{aligned}\Sigma_1(k_1, k_2, m) &= -2\gamma^\alpha \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k_\alpha}{[(k+k_1)^2][(k+k_2)^2-m^2]} \\ &\quad -2(\not{k}_2 - 2m) \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{[(k+k_1)^2][(k+k_2)^2-m^2]}\end{aligned}\quad (3.11)$$

e

$$\begin{aligned}\Sigma_2(k_1, k_2, m) &= \gamma^\alpha \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k_\alpha}{[(k+k_1)^2]^2} \\ &\quad +\not{k}_1 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{[(k+k_1)^2]^2} \\ &\quad - [(k_2 - k_1)^2 - m^2] \gamma^\alpha \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k_\alpha}{[(k+k_1)^2]^2 [(k+k_2)^2 - m^2]} \\ &\quad -\not{k}_1 [(k_2 - k_1)^2 - m^2] \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{[(k+k_1)^2]^2 [(k+k_2)^2 - m^2]} \\ &\quad + [m - (\not{k}_2 - \not{k}_1)] \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{[(k+k_1)^2][(k+k_2)^2 - m^2]}.\end{aligned}\quad (3.12)$$

Seguindo o raciocínio utilizado, para a construção de uma notação que permita compactar os resultados, introduziremos também uma representação para os termos que aparecem no denominador das integrais de Feynman que estão associados a propagadores do fóton. Adotaremos

$$P_i = [(k+k_i)^2]. \quad (3.13)$$

Com isso ficaremos com as seguintes expressões:

$$\begin{aligned}\Sigma_1(k_1, k_2, m) &= -2\gamma^\alpha \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k_\alpha}{P_1 E_2} \\ &\quad -2(\not{k}_2 - 2m) \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{P_1 E_2}\end{aligned}\quad (3.14)$$

e

$$\begin{aligned}\Sigma_2(k_1, k_2, m) &= \gamma^\alpha \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k_\alpha}{[P_1]^2} \\ &\quad +\not{k}_1 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{[P_1]^2} \\ &\quad + [m - (\not{k}_2 - \not{k}_1)] \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{[P_1] E_2} \\ &\quad - [(k_2 - k_1)^2 - m^2] \gamma^\alpha \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k_\alpha}{[P_1]^2 E_2} \\ &\quad -\not{k}_1 [(k_2 - k_1)^2 - m^2] \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{[P_1]^2 E_2}.\end{aligned}\quad (3.15)$$

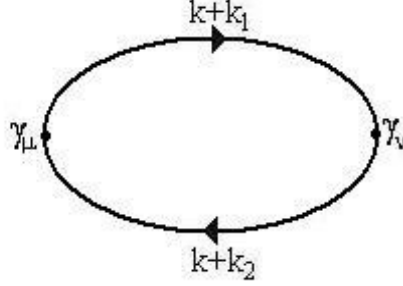
Novas integrais de Feynman apareceram e é fácil perceber o caráter divergente das mesmas. Entretanto, devemos notar que as integrais presentes nas expressões acima podem apresentar dois tipos de divergências: as ultravioletas e as infravermelhas, devido à presença do propagador do fóton o qual possui massa nula.

### 3.2.3 Função de Green de dois pontos Bi-Vetorial

No cálculo da auto-energia do fóton encontramos a função de Green de dois pontos fermiônica

$$T_{\mu\nu}^{VV}(k_1, k_2, m) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left\{ \gamma_\mu \frac{1}{(\not{k} + \not{k}_1) - m} \gamma_\nu \frac{1}{(\not{k} + \not{k}_2) - m} \right\}, \quad (3.16)$$

representada diagramaticamente na *figura* (3.3).



*Fig. 3.3: Representação diagramática para a função de Green de dois pontos Bi-vetorial.*

A fim de obter a expressão pretendida, tomamos auxílio da álgebra das matrizes de Dirac e efetuamos as operações de traços envolvidas, expressões (A.19), (A.20) e (A.21) do Apêndice A. Para o resultado adotamos a conveniente decomposição

$$T_{\mu\nu}^{VV}(k_1, k_2, m) = T_{\mu\nu} + g_{\mu\nu} T^{PP}. \quad (3.17)$$

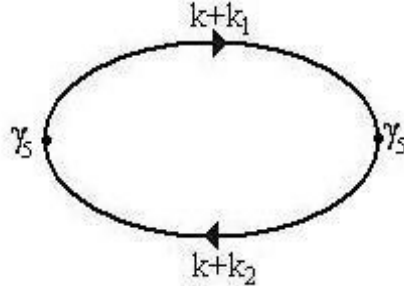
Aqui introduzimos as definições:

$$T_{\mu\nu} = 4 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{(k+k_1)_\mu (k+k_2)_\nu + (k+k_1)_\nu (k+k_2)_\mu}{[(k+k_1)^2 - m^2][(k+k_2)^2 - m^2]} \quad (3.18)$$

e

$$T^{PP} = -4 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{[(k+k_1) \cdot (k+k_2) - m^2]}{[(k+k_1)^2 - m^2][(k+k_2)^2 - m^2]}. \quad (3.19)$$

A denominação dada à estrutura acima, decorre da identificação desta com a função de Green de dois pontos duplamente pseudo-escalar (*figura* (3.4)). Apesar disto, não desempenha papel relevante no estudo das divergências da EDQ. Adotaremos esta notação aqui e para os resultados que ainda consideraremos, devido ao caráter universal permitido.



*Fig. 3.4: Representação diagramática para a função de Green de dois pontos duplamente pseudo-escalar.*

Desenvolvendo adicionalmente o termo  $T_{\mu\nu}$ , encontramos

$$\begin{aligned}
T_{\mu\nu} = & 4 \left\{ \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{2k_\mu k_\nu}{[(k+k_1)^2 - m^2][(k+k_2)^2 - m^2]} \right. \\
& + (k_1+k_2)_\nu \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k_\mu}{[(k+k_1)^2 - m^2][(k+k_2)^2 - m^2]} \\
& + (k_2+k_1)_\mu \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k_\nu}{[(k+k_1)^2 - m^2][(k+k_2)^2 - m^2]} \\
& \left. + (k_{2\mu}k_{1\nu} + k_{1\mu}k_{2\nu}) \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{[(k+k_1)^2 - m^2][(k+k_2)^2 - m^2]} \right\}. \quad (3.20)
\end{aligned}$$

Por sua vez, o termo  $T^{PP}$  pode ser colocado na forma

$$\begin{aligned}
T^{PP} = & -2 \left\{ \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{[(k+k_1)^2 - m^2]} + \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{[(k+k_2)^2 - m^2]} \right. \\
& \left. - (k_1 - k_2)^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{[(k+k_1)^2 - m^2][(k+k_2)^2 - m^2]} \right\}, \quad (3.21)
\end{aligned}$$

onde utilizamos a identidade

$$(k+k_i) \cdot (k+k_j) = \frac{1}{2} [(k+k_i)^2 - m^2] + \frac{1}{2} [(k+k_j)^2 - m^2] - \frac{1}{2} [(k_i - k_j)^2 - 2m^2]. \quad (3.22)$$

Podemos expressar os resultados acima na notação que estamos adotando. Ficaremos com as expressões

$$\begin{aligned}
T_{\mu\nu} = & 4 \left\{ \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{2k_\mu k_\nu}{E_{12}} \right. \\
& + (k_1+k_2)_\nu \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k_\mu}{E_{12}} \\
& + (k_2+k_1)_\mu \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k_\nu}{E_{12}} \\
& \left. + (k_{2\mu}k_{1\nu} + k_{1\mu}k_{2\nu}) \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{E_{12}} \right\} \quad (3.23)
\end{aligned}$$

e

$$T^{PP} = -2 \left\{ \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{E_1} + \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{E_2} - (k_1 - k_2)^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{E_{12}} \right\}. \quad (3.24)$$

Para escrever as expressões acima, compactamos ainda mais a notação adotando a representação

$$E_{ijl..} = E_i E_j E_l \dots = [(k+k_i)^2 - m^2] [(k+k_j)^2 - m^2] [(k+k_l)^2 - m^2] \dots \quad (3.25)$$

Com isso, a função de Green considerada foi colocada na forma desejada, ou seja, como uma combinação de integrais de Feynman.

### 3.2.4 Decaimento fotônico do fóton

Quando consideramos o processo físico envolvendo três linhas fotônicas externas, no capítulo anterior, definimos a função de Green  $T_{\lambda\mu\nu}^{VVV}$ , representada na *figura* (3.5), por

$$T_{\lambda\mu\nu}^{VVV}(k_3, k_1, k_2, m) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} Tr \left\{ \gamma_\mu \frac{1}{\not{k} + \not{k}_1 - m} \gamma_\nu \frac{1}{\not{k} + \not{k}_2 - m} \gamma_\lambda \frac{1}{\not{k} + \not{k}_3 - m} \right\}. \quad (3.26)$$

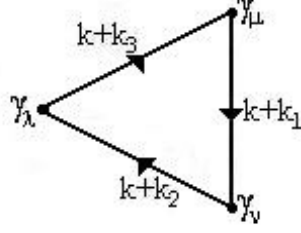


Fig. 3.5: Representação diagramática da função de Green de três pontos triplamente vetorial.

Podemos expressá-la numa forma mais conveniente para nossos propósitos futuros efetuando as operações de traços sobre as matrizes de Dirac. Após estas operações podemos escrever a amplitude em termos de outras estruturas de modo análogo ao caso que acabamos de considerar.

Assim, adotamos a seguinte decomposição para  $T_{\lambda\mu\nu}^{VVV}$ :

$$T_{\lambda\mu\nu}^{VVV}(k_3, k_1, k_2, m) = T_{\lambda\mu\nu} + g_{\mu\nu}T_{\lambda}^{VPP} + g_{\nu\lambda}T_{\mu}^{PPV} + g_{\mu\lambda}T_{\nu}^{PPV}, \quad (3.27)$$

onde definimos

$$\begin{aligned} T_{\lambda\mu\nu} = 4 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{E_{123}} \times \\ \{ (k+k_3)_{\mu}(k+k_1)_{\nu}(k+k_2)_{\lambda} + (k+k_3)_{\mu}(k+k_2)_{\nu}(k+k_1)_{\lambda} \\ + (k+k_1)_{\mu}(k+k_3)_{\nu}(k+k_2)_{\lambda} + (k+k_1)_{\mu}(k+k_2)_{\nu}(k+k_3)_{\lambda} \\ + (k+k_2)_{\mu}(k+k_1)_{\nu}(k+k_3)_{\lambda} - (k+k_2)_{\mu}(k+k_3)_{\nu}(k+k_1)_{\lambda} \}, \end{aligned} \quad (3.28)$$

$$\begin{aligned} T_{\lambda}^{VPP} = 4 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{E_{123}} \{ - [(k+k_3) \cdot (k+k_1) - m^2] (k+k_2)_{\lambda} \\ - [(k+k_2) \cdot (k+k_1) - m^2] (k+k_3)_{\lambda} \\ + [(k+k_3) \cdot (k+k_2) - m^2] (k+k_1)_{\lambda} \}, \end{aligned} \quad (3.29)$$

$$\begin{aligned} T_{\mu}^{PPV} = 4 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{E_{123}} \{ - [(k+k_3) \cdot (k+k_2) - m^2] (k+k_1)_{\mu} \\ - [(k+k_3) \cdot (k+k_1) - m^2] (k+k_2)_{\mu} \\ + [(k+k_2) \cdot (k+k_1) - m^2] (k+k_3)_{\mu} \} \end{aligned} \quad (3.30)$$

e

$$\begin{aligned} T_{\nu}^{PPV} = 4 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{E_{123}} \{ - [(k+k_3) \cdot (k+k_2) - m^2] (k+k_1)_{\nu} \\ - [(k+k_3) \cdot (k+k_1) - m^2] (k+k_2)_{\nu} \\ + [(k+k_2) \cdot (k+k_1) - m^2] (k+k_3)_{\nu} \}. \end{aligned} \quad (3.31)$$

As estruturas definidas acima, podem ser identificadas com as funções de Green correspondentes àquelas sugeridas pela notação onde os operadores dos vértices são quantidades pseudo-escalares e vetoriais na ordem indicada pelo rótulo superior (*figura* (3.6)). Devemos então desenvolver adicionalmente cada

um dos termos definidos acima a fim de escrevê-los como uma combinação de integrais, como fizemos até aqui.

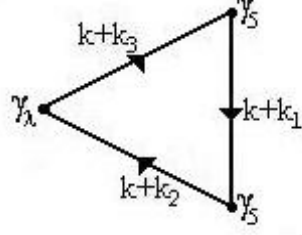


Fig. 3.6: Representação diagramática da função  $T_\lambda^{VPP}$ .

Começamos por  $T_{\lambda\mu\nu}$ . Após uma conveniente reorganização escrevemos o resultado na forma

$$T_{\lambda\mu\nu} = 4 [M_{\lambda\mu\nu} + J_{\lambda\mu\nu} + L_{\lambda\mu\nu} + K_{\lambda\mu\nu} + F_{\lambda\mu\nu}], \quad (3.32)$$

onde definimos as estruturas

$$M_{\lambda\mu\nu} = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{(k+k_1)_\mu [(k+k_2)_\nu (k+k_3)_\lambda - (k+k_2)_\lambda (k+k_3)_\nu]}{E_{123}}, \quad (3.33)$$

$$J_{\lambda\mu\nu} = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{(k+k_1)_\nu [(k+k_2)_\mu (k+k_3)_\lambda - (k+k_2)_\lambda (k+k_3)_\mu]}{E_{123}}, \quad (3.34)$$

$$L_{\lambda\mu\nu} = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{(k+k_1)_\lambda [(k+k_2)_\nu (k+k_3)_\mu - (k+k_2)_\mu (k+k_3)_\nu]}{E_{123}}, \quad (3.35)$$

$$K_{\lambda\mu\nu} = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{2(k+k_2)_\lambda [(k+k_1)_\mu (k+k_3)_\nu - (k+k_3)_\mu (k+k_1)_\nu]}{E_{123}} \quad (3.36)$$

$$F_{\lambda\mu\nu} = 4 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{(k+k_1)_\nu (k+k_2)_\lambda (k+k_3)_\mu}{E_{123}}. \quad (3.37)$$

Podemos agora desenvolver o numerador para obter expressões para as estruturas acima em termos de integrais de Feynman. Primeiramente teremos,

$$\begin{aligned} M_{\lambda\mu\nu} &= (k_3 - k_2)_\lambda \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k_\mu k_\nu}{E_{123}} \\ &+ (k_2 - k_3)_\nu \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k_\mu k_\lambda}{E_{123}} \\ &+ (k_{2\nu} k_{3\lambda} - k_{2\lambda} k_{3\nu}) \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k_\mu}{E_{123}} \\ &+ k_{1\mu} (k_{2\nu} - k_{3\nu})_\nu \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k_\lambda}{E_{123}} \\ &+ k_{1\mu} (k_{3\lambda} - k_{2\lambda}) \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k_\nu}{E_{123}} \\ &+ k_{1\mu} (k_{2\nu} k_{3\lambda} - k_{2\lambda} k_{3\nu}) \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{E_{123}}. \end{aligned} \quad (3.38)$$

Por sua vez,

$$\begin{aligned}
J_{\lambda\mu\nu} &= (k_3 - k_2)_\lambda \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k_\mu k_\nu}{E_{123}} \\
&+ (k_2 - k_3)_\mu \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k_\nu k_\lambda}{E_{123}} \\
&+ (k_{2\mu} k_{3\lambda} - k_{2\lambda} k_{3\mu}) \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k_\nu}{E_{123}} \\
&+ k_{1\nu} (k_{2\mu} - k_{3\mu}) \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k_\lambda}{E_{123}} \\
&+ k_{1\nu} (k_{3\lambda} - k_{2\lambda}) \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k_\mu}{E_{123}} \\
&+ k_{1\nu} (k_{2\mu} k_{3\lambda} - k_{2\mu} k_{3\nu}) \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{E_{123}}.
\end{aligned} \tag{3.39}$$

Este resultado pode ser relacionado a  $M_{\lambda\mu\nu}$ . Para tal basta permutar  $\mu \Leftrightarrow \nu$ . O mesmo ocorre com  $L_{\lambda\mu\nu}$ , cuja permutação  $\mu \Leftrightarrow \lambda$  resulta em  $M_{\lambda\mu\nu}$ . Então teremos

$$\begin{aligned}
L_{\lambda\mu\nu} &= (k_3 - k_2)_\mu \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k_\nu k_\lambda}{E_{123}} \\
&+ (k_2 - k_3)_\nu \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k_\mu k_\lambda}{E_{123}} \\
&+ (k_{2\mu} k_{3\lambda} - k_{2\mu} k_{3\nu}) \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k_\lambda}{E_{123}} \\
&+ k_{1\lambda} (k_{2\nu} - k_{3\nu}) \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k_\mu}{E_{123}} \\
&+ k_{1\lambda} (k_{3\mu} - k_{2\mu}) \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k_\nu}{E_{123}} \\
&+ k_{1\lambda} (k_{2\nu} k_{3\mu} - k_{2\mu} k_{3\nu}) \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{E_{123}}.
\end{aligned} \tag{3.40}$$

Agora, para o termo  $K_{\lambda\mu\nu}$  podemos escrever

$$\begin{aligned}
K_{\lambda\mu\nu} &= 2(k_3 - k_1)_\mu \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k_\nu k_\lambda}{E_{123}} \\
&- 2(k_3 - k_1)_\nu \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k_\mu k_\lambda}{E_{123}} \\
&+ 2(k_{1\nu} k_{3\mu} - k_{1\mu} k_{3\nu}) \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k_\lambda}{E_{123}} \\
&+ 2k_{2\lambda} (k_{3\mu} - k_{1\mu}) \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k_\nu}{E_{123}} \\
&+ 2k_{2\lambda} (k_{1\nu} - k_{3\mu}) \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k_\mu}{E_{123}} \\
&+ 2k_{2\lambda} (k_{1\nu} k_{3\mu} - k_{1\mu} k_{3\nu}) \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{E_{123}}.
\end{aligned} \tag{3.41}$$

Finalmente, escrevemos o termo que carregará a divergência de grau linear na forma

$$\begin{aligned}
F_{\lambda\mu\nu} &= 4 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k_\mu k_\nu k_\lambda}{E_{123}} \\
&+ 4(k_2)_\lambda \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k_\mu k_\nu}{E_{123}} \\
&+ 4(k_1)_\nu \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k_\mu k_\lambda}{E_{123}} \\
&+ 4(k_3)_\mu \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k_\nu k_\lambda}{E_{123}} \\
&+ 4k_{2\lambda} k_{3\mu} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k_\nu}{E_{123}} \\
&+ 4k_{1\nu} k_{2\lambda} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k_\mu}{E_{123}} \\
&+ 4k_{1\nu} k_{3\mu} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k_\lambda}{E_{123}} \\
&+ 4k_{1\nu} k_{2\lambda} k_{3\mu} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{E_{123}}.
\end{aligned} \tag{3.42}$$

A fim de completar a decomposição pretendida para  $T_{\lambda\mu\nu}^{VVV}$  precisamos ainda desenvolver  $T_\lambda^{VPP}$ ,  $T_\mu^{PPV}$  e  $T_\nu^{PPV}$ . Para tal, utilizamos a identidade (3.22). Obtemos então

$$\begin{aligned}
T_\lambda^{VPP} &= -4 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k_\lambda}{E_{23}} \\
&- 2(k_3 - k_1)_\lambda \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{E_{13}} \\
&- 2(k_2 - k_1)_\lambda \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{E_{12}} \\
&- 2(k_3 + k_2)_\lambda \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{E_{23}} \\
&+ 4[(k_3 - k_1) \cdot (k_2 - k_1)] \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k_\lambda}{E_{123}} \\
&+ [2(k_3 - k_1)_\lambda (k_2 - k_1)^2 \\
&- 2(k_1 - k_2)_\lambda (k_3 - k_1)^2 \\
&+ 4k_{1\lambda} (k_3 - k_1) \cdot (k_2 - k_1)] \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{E_{123}},
\end{aligned} \tag{3.43}$$



$$\begin{aligned}
T_\mu^{PVP} &= -4 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k_\mu}{E_{13}} \\
&\quad -2(k_3 + k_1)_\mu \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{E_{13}} \\
&\quad +2(k_2 - k_1)_\mu \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{E_{12}} \\
&\quad -2(k_3 - k_2)_\mu \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{E_{23}} \\
&\quad + \left[ 2(k_3 + k_1)_\mu (k_2 - k_1)^2 \right. \\
&\quad \left. + 2(k_1 - k_2)_\mu (k_3 - k_1)^2 + \right. \\
&\quad \left. - 4k_{1\mu} (k_3 - k_1) \cdot (k_2 - k_1) \right] \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{E_{123}} \\
&\quad -4 \left[ (k_3 - k_1) \cdot (k_2 - k_1) - (k_2 - k_1)^2 \right] \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k_\mu}{E_{123}}
\end{aligned} \tag{3.44}$$

e

$$\begin{aligned}
T_\nu^{PPV} &= -4 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k_\nu}{E_{23}} \\
&\quad 2(k_3 - k_1)_\nu \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{E_{13}} \\
&\quad -2(k_2 + k_1)_\nu \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{E_{12}} \\
&\quad +2(k_3 - k_2)_\nu \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{E_{23}} \\
&\quad + \left[ 2(k_1 + k_2)_\nu (k_3 - k_1)^2 \right. \\
&\quad \left. - 2(k_3 - k_1)_\nu (k_2 - k_1)^2 \right. \\
&\quad \left. - 4k_{1\nu} (k_3 - k_1) \cdot (k_2 - k_1) \right] \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{E_{123}} \\
&\quad -4 \left[ (k_3 - k_1) \cdot (k_2 - k_1) - (k_3 - k_1)^2 \right] \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k_\nu}{E_{123}}.
\end{aligned} \tag{3.45}$$

Isto completa o tratamento a que nos propomos para a função de Green triplamente vetorial.

### 3.2.5 Correção de Vértice

Quando consideramos a interação elétron-fóton definimos a função de Green

$$\begin{aligned}
\Lambda^\mu(k_1, k_2, k_3, m) &= \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \left\{ \left[ \gamma^\nu \frac{1}{[(\not{k} + \not{k}_2) - m]} \gamma^\mu \frac{1}{[(\not{k} + \not{k}_3) - m]} \gamma^\lambda \right] \times \right. \\
&\quad \left. \left[ \frac{g_{\nu\lambda}}{(k + k_1)^2} + \frac{(\xi - 1)(k + k_1)_\lambda (k + k_1)_\nu}{[(k + k_1)^2]^2} \right] \right\},
\end{aligned} \tag{3.46}$$

representada diagramaticamente na *figura* (3.7).

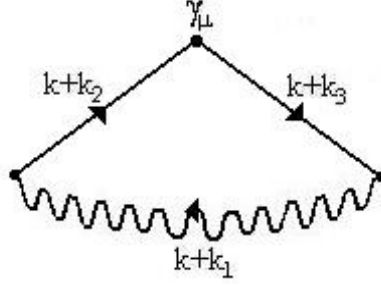


Fig. 3.7: Representação diagramática para a função de Green associada à correção de vértice da interação elétron-fóton.

Primeiramente introduzimos a decomposição

$$\Lambda^\mu(k_1, k_2, k_3, m) = \Lambda_1^\mu(k_1, k_2, k_3, m) + (\xi - 1) \Lambda_2^\mu(k_1, k_2, k_3, m), \quad (3.47)$$

onde definimos

$$\Lambda_1^\mu = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \left\{ \gamma_\nu \frac{1}{[(\not{k} + \not{k}_2) - m]} \gamma^\mu \frac{1}{[(\not{k} + \not{k}_3) - m]} \gamma^\nu \right\} \left\{ \frac{1}{(k + k_1)^2} \right\} \quad (3.48)$$

e

$$\Lambda_2^\mu = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \left\{ (\not{k} + \not{k}_1) \frac{1}{[(\not{k} + \not{k}_2) - m]} \gamma^\mu \frac{1}{[(\not{k} + \not{k}_3) - m]} (\not{k} + \not{k}_1) \right\} \left\{ \frac{1}{[(k + k_1)^2]^2} \right\}. \quad (3.49)$$

Os dois termos podem ser colocados em formas mais convenientes. Primeiro fazemos

$$\Lambda_1^\mu = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{\{\gamma_\nu [(\not{k} + \not{k}_2) + m] \gamma^\mu [(\not{k} + \not{k}_3) + m] \gamma^\nu\}}{[P_1] E_{23}} \quad (3.50)$$

e então

$$\Lambda_2^\mu = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{\{(\not{k} + \not{k}_1) [(\not{k} + \not{k}_2) + m] \gamma^\mu [(\not{k} + \not{k}_3) + m] (\not{k} + \not{k}_1)\}}{[P_1]^2 E_{23}}. \quad (3.51)$$

A fim de reduzi-los a uma soma de integrais de Feynman, devemos efetuar algumas operações envolvidas. Para este fim notemos que a utilização da álgebra das matrizes de Dirac permite-nos estabelecer

$$\begin{aligned} \gamma_\nu [(\not{k} + \not{k}_2) + m] \gamma^\mu [(\not{k} + \not{k}_3) + m] \gamma^\nu &= -4k^\mu \not{k} + 2k^2 \gamma^\mu \\ &\quad - 2\not{k} \gamma^\mu \not{k}_3 - 2\not{k}_2 \gamma^\mu \not{k} - 2\not{k}_2 \gamma^\mu \not{k}_3 \\ &\quad + 4m [(2k^\mu) + (k_3 + k_2)^\mu] \\ &\quad - 2m^2 [\gamma^\mu], \end{aligned} \quad (3.52)$$

o que é suficiente para o termo  $\Lambda_1^\mu$ . Assim teremos

$$\begin{aligned} \Lambda_1^\mu(k_1, k_2, k_3, m) &= 2\gamma^\mu \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{E_{23}} \\ &\quad + [4m(k_3 + k_2)^\mu - 2\not{k}_2 \gamma^\mu \not{k}_3 - 2m^2 \gamma^\mu - 2\gamma^\mu k_1^2] \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{P_1 E_{23}} \\ &\quad + [-2\gamma^\alpha \gamma^\mu \not{k}_3 - 2\not{k}_2 \gamma^\mu \gamma^\alpha - 4\gamma^\mu k_1^\alpha + 8mg^{\alpha\mu}] \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k_\alpha}{P_1 E_{23}} \\ &\quad - 4\gamma^\alpha \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k^\mu k_\alpha}{P_1 E_{23}}. \end{aligned} \quad (3.53)$$

A fim de obter reorganização semelhante em  $\Lambda_2^\mu$  primeiro desenvolvemos os produtos indicados no numerador da expressão (3.51) para obter

$$\begin{aligned}
& (\not{k} + \not{k}_1) [(\not{k} + \not{k}_2) + m] \gamma_\mu [(\not{k} + \not{k}_3) + m] (\not{k} + \not{k}_1) = \\
& (\not{k} + \not{k}_1)(\not{k} + \not{k}_2)\gamma_\mu(\not{k} + \not{k}_3)(\not{k} + \not{k}_1) \\
& + m(\not{k} + \not{k}_1)\gamma_\mu(\not{k} + \not{k}_3)(\not{k} + \not{k}_1) \\
& + m(\not{k} + \not{k}_1)(\not{k} + \not{k}_2)\gamma_\mu(\not{k} + \not{k}_1) \\
& + m^2(\not{k} + \not{k}_1)\gamma_\mu(\not{k} + \not{k}_1).
\end{aligned} \tag{3.54}$$

Em seguida reorganizamos cada termo convenientemente com o auxílio da álgebra das matrizes de Dirac. Assim procedendo teremos para o primeiro termo da expressão acima

$$\begin{aligned}
& (\not{k} + \not{k}_1)(\not{k} + \not{k}_2)\gamma_\mu(\not{k} + \not{k}_3)(\not{k} + \not{k}_1) = \\
& - (k + k_1)^4 \gamma_\mu \\
& - \left[ (k + k_1)^2 \right] \gamma_\mu (\not{k} + \not{k}_1) (\not{k}_3 - \not{k}_1) \\
& - (k + k_1)^2 \left[ (k + k_2)^2 - m^2 \right] \gamma_\mu \\
& - \left[ (k + k_2)^2 - m^2 \right] \gamma_\mu (\not{k} + \not{k}_1) (\not{k}_3 - \not{k}_1) \\
& + (k + k_1)^2 \left[ (k_1 - k_2)^2 - m^2 \right] \gamma_\mu \\
& + \left[ (k_1 - k_2)^2 - m^2 \right] \gamma_\mu (\not{k} + \not{k}_1) (\not{k}_3 - \not{k}_1) \\
& + (k + k_1)^4 \gamma_\mu \\
& - 2(k + k_1)^2 (k + k_1)_\mu (\not{k} + \not{k}_1) \\
& - (k + k_1)^2 (\not{k}_2 - \not{k}_1) \gamma_\mu (\not{k} + \not{k}_1) \\
& - (k + k_1)^2 (\not{k} + \not{k}_1) \gamma_\mu (\not{k}_3 - \not{k}_1) \\
& - (k + k_1)^2 (\not{k}_2 - \not{k}_1) \gamma_\mu (\not{k}_3 - \not{k}_1) \\
& + 2(k + k_1)_\mu (k + k_1)^2 (\not{k} + \not{k}_2) \\
& + 2(k + k_1)_\mu (k + k_1)^2 (\not{k}_3 - \not{k}_1) \\
& + 2(k + k_1)_\mu (\not{k}_2 - \not{k}_1) (\not{k} + \not{k}_1) (\not{k}_3 - \not{k}_1) \\
& + (k + k_1)^4 \gamma_\mu \\
& + (k + k_1)^2 (\not{k} + \not{k}_1) (\not{k}_2 - \not{k}_1) \gamma_\mu \\
& + (k + k_1)^2 \left[ (k + k_3)^2 - m^2 \right] \gamma_\mu \\
& + \left[ (k + k_3)^2 - m^2 \right] (\not{k} + \not{k}_1) (\not{k}_2 - \not{k}_1) \gamma_\mu \\
& - (k + k_1)^2 \left[ (k_1 - k_3)^2 - m^2 \right] \gamma_\mu \\
& - \left[ (k_1 - k_3)^2 - m^2 \right] (\not{k} + \not{k}_1) (\not{k}_2 - \not{k}_1) \gamma_\mu,
\end{aligned} \tag{3.55}$$

enquanto que para o segundo termo teremos

$$\begin{aligned}
(\not{k} + \not{k}_1)\gamma_\mu(\not{k} + \not{k}_3)(\not{k} + \not{k}_1) &= (k + k_1)^2 \gamma_\mu(\not{k} + \not{k}_3) \\
&\quad - 2(k + k_1)_\mu (k + k_1)^2 \\
&\quad - 2(k + k_1)_\mu (\not{k} + \not{k}_1)(\not{k}_3 - \not{k}_1) \\
&\quad + \left[ (k + k_1)^2 \right] (\not{k} + \not{k}_1)\gamma_\mu \\
&\quad + \left[ (k + k_3)^2 - m^2 \right] (\not{k} + \not{k}_1)\gamma_\mu \\
&\quad - \left[ (k_1 - k_3)^2 - m^2 \right] (\not{k} + \not{k}_1)\gamma_\mu.
\end{aligned} \tag{3.56}$$

O terceiro pode ser escrito como

$$\begin{aligned}
(\not{k} + \not{k}_1)(\not{k} + \not{k}_2)\gamma_\mu(\not{k} + \not{k}_1) &= (k + k_1)^2 \gamma_\mu(\not{k} + \not{k}_1) \\
&\quad + \left[ (k + k_2)^2 - m^2 \right] \gamma_\mu(\not{k} + \not{k}_1) \\
&\quad - \left[ (k_1 - k_2)^2 - m^2 \right] \gamma_\mu(\not{k} + \not{k}_1) \\
&\quad + (k + k_1)^2 (\not{k} + \not{k}_2)\gamma_\mu \\
&\quad - 2(k + k_1)_\mu (k + k_1)^2 \\
&\quad - 2(k + k_1)_\mu (\not{k}_2 - \not{k}_1)(\not{k} + \not{k}_1)
\end{aligned} \tag{3.57}$$

e, por fim, para o quarto termo adotamos a forma

$$(\not{k} + \not{k}_1)\gamma_\mu(\not{k} + \not{k}_1) = -(k + k_1)^2 \gamma_\mu + 2(k + k_1)_\mu (\not{k} + \not{k}_1). \tag{3.58}$$

Basta agora substituir as expressões (3.55), (3.56), (3.57) e (3.58) em (3.51) e a reorganização pretendida para  $\Lambda_2^\mu$  se tornará possível. Assim ficamos com

$$\begin{aligned}
\Lambda_2^\mu(k_1, k_2, k_3, m) = & \gamma^\mu \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{[P_1]^2} \\
& - [\gamma^\mu \not{k}_1 (\not{p} - m) + (p^2 - m^2) \gamma^\mu] \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{[P_1]^2 E_2} \\
& - [(q - m) \not{k}_1 \gamma^\mu + (q^2 - m^2) \gamma^\mu] \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{[P_1]^2 E_3} \\
& - [q - m] \gamma_\alpha \gamma^\mu \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k_\alpha}{[P_1]^2 E_3} \\
& - \gamma^\mu \gamma_\alpha [\not{p} - m] \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k_\alpha}{[P_1]^2 E_2} \\
& - (q - m) \gamma^\mu (\not{p} - m) \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{P_1 E_{23}} \\
& + [(q^2 - m^2) \gamma^\mu \not{k}_1 (\not{p} - m) \\
& + (p^2 - m^2) (q - m) \not{k}_1 \gamma^\mu \\
& + 2k_1^\mu (q - m) \not{k}_1 (\not{p} - m) \\
& + (p^2 - m^2) (q^2 - m^2) \gamma^\mu] \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{[P_1]^2 E_{23}} \\
& + [(q^2 - m^2) \gamma^\mu \gamma_\alpha (\not{p} - m) \\
& + 2k_1^\mu (q - m) \gamma^\alpha (\not{p} - m) \\
& + 2(q - m) \not{k}_1 (\not{p} - m) g^{\mu\alpha} \\
& + (p^2 - m^2) (q - m) \gamma^\alpha \gamma^\mu] \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k_\alpha}{[P_1]^2 E_{23}} \\
& + 2(q - m) \gamma_\alpha (\not{p} - m) \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k^\mu k^\alpha}{[P_1]^2 E_{23}}. \tag{3.59}
\end{aligned}$$

Isto completa nossos objetivos para esta etapa.

### 3.2.6 Espalhamento fóton-fóton

Finalmente vamos considerar a função de Green definida no estudo perturbativo do processo de quatro fótons, representada diagramaticamente na *figura* (3.8). Temos que

$$\begin{aligned}
T_{\mu\nu\alpha\beta}^{VVVV}(k_1, k_2, k_3, k_4, m) = & \\
\int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} Tr \left\{ \gamma_\mu \frac{1}{\not{k} + \not{k}_1 - m} \gamma_\nu \frac{1}{\not{k} + \not{k}_2 - m} \gamma_\alpha \frac{1}{\not{k} + \not{k}_3 - m} \gamma_\beta \frac{1}{\not{k} + \not{k}_4 - m} \right\}. & \tag{3.60}
\end{aligned}$$

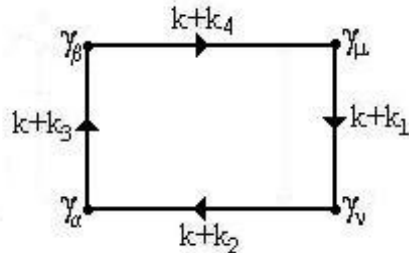


Fig. 3.8: *Diagrama correspondente à função de Green tetra-vetorial associada à interação de quatro fótons.*

O cálculo dos traços envolvendo as matrizes de Dirac nos fornece inicialmente a decomposição

$$\begin{aligned}
T_{\mu\nu\alpha\beta}^{VVVV} &= T_{\mu\nu\alpha\beta} \\
&+ g_{\alpha\beta} [T_{\mu\nu}^{VVPP}] + g_{\mu\nu} [T_{\alpha\beta}^{PPVV}] + g_{\nu\alpha} [T_{\mu\beta}^{VPPV}] \\
&+ g_{\nu\beta} [T_{\mu\alpha}^{VPPV}] + g_{\mu\alpha} [T_{\nu\beta}^{PPVV}] + g_{\mu\beta} [T_{\nu\alpha}^{VPPV}] \\
&- (g_{\mu\nu}g_{\alpha\beta} + g_{\mu\beta}g_{\nu\alpha} - g_{\mu\alpha}g_{\nu\beta}) [T^{PPPP}].
\end{aligned} \tag{3.61}$$

Para a estrutura  $T_{\mu\nu\alpha\beta}$  acima podemos escrever

$$\begin{aligned}
T_{\mu\nu\alpha\beta} &= 8I_{4\mu\nu\alpha\beta}^s \\
&+ 4p_\nu I_{4\mu\alpha\beta}^s \\
&+ 4r_\mu I_{4\nu\alpha\beta}^s \\
&+ 4(r+q)_\beta I_{4\mu\nu\alpha}^s \\
&+ 4(p+q)_\alpha I_{4\mu\nu\beta}^s \\
&+ 2[r_\beta q_\mu + r_\mu q_\beta] I_{4\nu\alpha}^s \\
&+ 2(p_\nu r_\mu - p_\mu r_\nu) I_{4\alpha\beta}^s \\
&+ 2(p_\nu q_\alpha + p_\alpha q_\nu) I_{4\mu\beta}^s \\
&+ 2[r_\alpha(p-q)_\mu + r_\mu(p+q)_\alpha] I_{4\nu\beta}^s \\
&+ 2[r_\beta p_\nu + r_\nu p_\beta + p_\nu q_\beta - q_\nu p_\beta] I_{4\mu\alpha}^s \\
&+ 2[r_\beta(p+q)_\alpha - r_\alpha(p-q)_\beta + q_\beta p_\alpha + q_\alpha p_\beta] I_{4\mu\nu}^s \\
&+ [p_\nu(q_\alpha r_\beta + r_\alpha q_\beta) + r_\nu(q_\beta p_\alpha + q_\alpha p_\beta) + q_\nu(r_\beta p_\alpha - r_\alpha p_\beta)] I_{4\mu}^s \\
&+ [p_\mu(r_\beta q_\alpha + r_\alpha q_\beta) + r_\mu(q_\beta p_\alpha + q_\alpha p_\beta) + q_\mu(r_\beta p_\alpha - r_\alpha p_\beta)] I_{4\nu}^s \\
&+ [r_\mu(q_\beta p_\nu - q_\nu p_\beta) - p_\mu(r_\nu q_\beta + r_\beta q_\nu) + q_\mu(r_\beta p_\nu + r_\nu p_\beta)] I_{4\alpha}^s \\
&+ [r_\mu(p_\nu q_\alpha + p_\alpha q_\nu) - q_\mu(p_\nu r_\alpha + p_\alpha r_\nu) + p_\mu(r_\alpha q_\nu - r_\nu q_\alpha)] I_{4\beta}^s,
\end{aligned} \tag{3.62}$$

onde definimos

$$\begin{aligned}
I_{4\mu\nu\alpha\beta}^s &= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k_\mu k_\nu k_\alpha k_\beta}{E_{1234}} \\
&+ k_{1\nu} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k_\mu k_\alpha k_\beta}{E_{1234}} + k_{1\beta} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k_\mu k_\nu k_\alpha}{E_{1234}} \\
&+ k_{1\mu} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k_\nu k_\alpha k_\beta}{E_{1234}} + k_{1\alpha} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k_\mu k_\nu k_\beta}{E_{1234}} \\
&+ k_{1\mu} k_{1\nu} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k_\alpha k_\beta}{E_{1234}} + k_{1\mu} k_{1\alpha} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k_\nu k_\beta}{E_{1234}} \\
&+ k_{1\nu} k_{1\beta} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k_\mu k_\alpha}{E_{1234}} + k_{1\alpha} k_{1\beta} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k_\mu k_\nu}{E_{1234}} \\
&+ k_{1\mu} k_{1\beta} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k_\nu k_\alpha}{E_{1234}} + k_{1\nu} k_{1\alpha} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k_\mu k_\beta}{E_{1234}} \\
&+ k_{1\mu} k_{1\nu} k_{1\beta} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k_\alpha}{E_{1234}} + k_{1\mu} k_{1\nu} k_{1\alpha} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k_\beta}{E_{1234}} \\
&+ k_{1\nu} k_{1\alpha} k_{1\beta} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k_\mu}{E_{1234}} + k_{1\mu} k_{1\alpha} k_{1\beta} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k_\nu}{E_{1234}} \\
&+ + k_{1\mu} k_{1\nu} k_{1\alpha} k_{1\beta} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{E_{1234}}, \tag{3.63}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_{4\mu\nu\alpha}^s &= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k_\mu k_\nu k_\alpha}{E_{1234}} \\
&+ k_{1\nu} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k_\mu k_\alpha}{E_{1234}} \\
&+ k_{1\mu} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k_\nu k_\alpha}{E_{1234}} \\
&+ k_{1\alpha} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k_\mu k_\nu}{E_{1234}} \\
&+ k_{1\mu} k_{1\nu} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k_\alpha}{E_{1234}} \\
&+ k_{1\nu} k_{1\alpha} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k_\mu}{E_{1234}} \\
&+ k_{1\mu} k_{1\alpha} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k_\nu}{E_{1234}} \\
&+ k_{1\mu} k_{1\nu} k_{1\alpha} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{E_{1234}}, \tag{3.64}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_{4\mu\nu}^s &= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k_\mu k_\nu}{E_{1234}} \\
&+ k_{1\nu} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k_\mu}{E_{1234}} \\
&+ k_{1\mu} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k_\nu}{E_{1234}} \\
&+ k_{1\mu} k_{1\nu} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{E_{1234}} \tag{3.65}
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
I_{4\mu}^s &= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k_\mu}{E_{1234}} \\
&\quad + k_{1\mu} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{E_{1234}},
\end{aligned} \tag{3.66}$$

onde simplificamos a notação fazendo  $I_{4\mu\nu\alpha\beta}^s = I_{4\mu\nu\alpha\beta}^s(p, q, r; m)$ ,  $I_{4\mu\nu\alpha}^s = I_{4\mu\nu\alpha}^s(p, q, r; m)$ ,  $I_{4\mu\nu}^s = I_{4\mu\nu}^s(p, q, r; m)$  e  $I_{4\mu}^s = I_{4\mu}^s(p, q, r; m)$ .

Por sua vez, podemos estabelecer

$$\begin{aligned}
T_{\nu\beta}^{PV} + g_{\nu\beta} T^{PPPP} &= 4r_\nu I_{3\beta}^s(r, q; m) \\
&\quad - 4r_\beta I_{3\nu}^s(r, p; m) \\
&\quad - 4(p - q)_\nu I_{3\beta}^s(u, t; m) \\
&\quad + 4(p - q)_\beta I_{3\nu}^s(p, q; m) \\
&\quad + 2(q_\nu r_\beta + q_\beta r_\nu) \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{E_{134}} \\
&\quad - 2(p_\nu r_\beta + p_\beta r_\nu) \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{E_{124}} \\
&\quad - 2(p_\nu q_\beta - p_\beta q_\nu) \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{E_{123}} \\
&\quad + 2[(q_\nu r_\beta + q_\beta r_\nu) - (p_\nu r_\beta + p_\beta r_\nu) - (p_\nu q_\beta - p_\beta q_\nu)] \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{E_{234}} \\
&\quad + 8[(r \cdot q) - (r \cdot p)] I_{4\nu\beta}^s \\
&\quad - 4[p^2 r_\nu - (p \cdot q) r_\nu - (r \cdot q) p_\nu + (p \cdot r) q_\nu] I_{4\beta\nu}^s \\
&\quad + 4[q^2 r_\beta - (p \cdot q) r_\beta + r^2 q_\beta - (p \cdot r) q_\beta - r^2 p_\beta + (r \cdot q) p_\beta] I_{4\nu}^s \\
&\quad + 2[r^2 (p_\nu q_\beta - p_\beta q_\nu) \\
&\quad \quad - p^2 (q_\nu r_\beta + q_\beta r_\nu) \\
&\quad \quad + q^2 (p_\nu r_\beta + p_\beta r_\nu)] \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{E_{1234}},
\end{aligned} \tag{3.67}$$



$$\begin{aligned}
T_{\alpha\beta}^{PPVV} - g_{\alpha\beta}T^{PPPP} &= -8I_{3\alpha\beta}^s(u, t; m) \\
&-4r_\alpha I_{3\beta}^s(r, q; m) \\
&-4p_\beta I_{3\alpha}^s(p, q; m) \\
&-4(r+q)_\beta I_{3\alpha}^s(u, t; m) \\
&-4(p+q)_\alpha I_{3\beta}^s(u, t; m) \\
&-2(p_\alpha q_\beta + p_\beta q_\alpha) \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{E_{123}} \\
&-2(q_\alpha r_\beta + q_\beta r_\alpha) \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{E_{134}} \\
&-2(p_\alpha r_\beta - p_\beta r_\alpha) \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{E_{124}} \\
&-2[q_\alpha r_\beta + q_\beta r_\alpha + p_\alpha q_\beta + p_\beta q_\alpha + p_\alpha r_\beta - p_\beta r_\alpha] \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{E_{234}} \\
&+8(r \cdot p) I_{4\alpha\beta}^s \\
&+4\{[r^2 - (r \cdot q)] p_\beta + (p \cdot q) r_\beta + (r \cdot p) q_\beta\} I_{4\alpha}^s \\
&+4\{[p^2 - (p \cdot q)] r_\alpha + (r \cdot q) p_\alpha + (r \cdot p) q_\alpha\} I_{4\beta}^s \\
&+2[p^2(q_\alpha r_\beta + q_\beta r_\alpha) \\
&\quad + q^2(p_\alpha r_\beta - p_\beta r_\alpha) \\
&\quad + r^2(p_\alpha q_\beta + p_\beta q_\alpha)] \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{E_{1234}}, \tag{3.68}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_{\nu\alpha}^{PVVP} - g_{\nu\alpha}T^{PPPP} &= -8I_{3\alpha\nu}^s(p, q; m) \\
&-4p_\nu I_{3\alpha}^s(p, q; m) \\
&+4r_\alpha I_{3\nu}^s(r, p; m) \\
&+4(r-q)_\nu I_{3\alpha}^s(u, t; m) \\
&-4(p+q)_\alpha I_{3\nu}^s(p, q; m) \\
&+2(q_\alpha r_\nu - q_\nu r_\alpha) \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{E_{134}} \\
&+2(p_\alpha r_\nu + p_\nu r_\alpha) \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{E_{124}} \\
&-2(p_\alpha q_\nu + p_\nu q_\alpha) \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{E_{123}} \\
&+2[(q_\alpha r_\nu - q_\nu r_\alpha) + (p_\alpha r_\nu + p_\nu r_\alpha) - (p_\alpha q_\nu + p_\nu q_\alpha)] \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{E_{234}} \\
&+8[r^2 - (r \cdot q)] I_{4\nu\alpha}^s \\
&+4\{[r^2 - (r \cdot q)] p_\nu + (r \cdot p) q_\nu - (p \cdot q) r_\nu\} I_{4\alpha}^s \\
&+4\{[r^2 - (r \cdot q)] p_\alpha + [r^2 - (r \cdot p)] q_\alpha - [q^2 - (p \cdot q)] r_\alpha\} I_{4\nu}^s \\
&+2[r^2(p_\alpha q_\nu + p_\nu q_\alpha) \\
&\quad - p^2(q_\alpha r_\nu - q_\nu r_\alpha) \\
&\quad - q^2(p_\alpha r_\nu + p_\nu r_\alpha)] \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{E_{1234}}, \tag{3.69}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_{\mu\beta}^{VPPV} - g_{\mu\beta} T^{PPPP} &= -8I_{3\mu\beta}^s(r, q; m) \\
&-4r_\mu I_{3\beta}^s(r, q; m) \\
&+4p_\beta I_{3\mu}^s(r, p; m) \\
&+4(p-q)_\mu I_{3\beta}^s(u, t; m) \\
&-4(r+q)_\beta I_{3\mu}^s(r, q; m) \\
&+2(p_\mu r_\beta + p_\beta r_\mu) \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{E_{124}} \\
&-2(p_\beta q_\mu - p_\mu q_\beta) \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{E_{123}} \\
&-2(q_\mu r_\beta + q_\beta r_\mu) \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{E_{134}} \\
&+2[(p_\mu r_\beta + p_\beta r_\mu) - (p_\beta q_\mu - p_\mu q_\beta) - (q_\mu r_\beta + q_\beta r_\mu)] \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{E_{234}} \\
&+8[p^2 - (p \cdot q)] I_{4\mu\beta}^s \\
&+4\{[p^2 - (p \cdot q)] r_\mu - (r \cdot q) p_\mu + (p \cdot r) q_\mu\} I_{4\beta}^s \\
&+4\{[p^2 - (p \cdot q)] r_\beta - [q^2 - (r \cdot q)] p_\beta + [p^2 - (p \cdot r)] q_\beta\} I_{4\mu}^s \\
&+2[r^2(p_\beta q_\mu - p_\mu q_\beta) \\
&\quad -q^2(p_\mu r_\beta + p_\beta r_\mu) \\
&\quad +p^2(q_\mu r_\beta + q_\beta r_\mu)] \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{E_{1234}}, \tag{3.70}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_{\mu\alpha}^{VPPV} + g_{\mu\alpha} (T^{PPPP}) &= 4p_\mu I_{3\alpha}^s(p, q; m) \\
&-4p_\alpha I_{3\mu}^s(r, p; m) \\
&+4(r-q)_\alpha I_{3\mu}^s(r, q; m) \\
&-4(r-q)_\mu I_{3\alpha}^s(u, t; m) \\
&+2(p_\mu q_\alpha + p_\alpha q_\mu) \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{E_{123}} \\
&-2(p_\mu r_\alpha + p_\alpha r_\mu) \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{E_{124}} \\
&+2(q_\mu r_\alpha - q_\alpha r_\mu) \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{E_{134}} \\
&+2[(q_\mu r_\alpha - q_\alpha r_\mu) - (p_\mu r_\alpha + p_\alpha r_\mu) + (p_\mu q_\alpha + p_\alpha q_\mu)] \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{E_{234}} \\
&+8[(p \cdot q) - (p \cdot r)] I_{4\mu\alpha}^s \\
&+4\{(p \cdot q) r_\mu - (r \cdot p) q_\mu - [r^2 - (r \cdot q)] p_\mu\} I_{4\alpha}^s \\
&+4\{[q^2 - (r \cdot q)] p_\alpha + [p^2 - (r \cdot p)] q_\alpha - [p^2 - (p \cdot q)] r_\alpha\} I_{4\mu}^s \\
&+2[q^2(p_\mu r_\alpha + p_\alpha r_\mu) \\
&\quad -r^2(p_\mu q_\alpha + p_\alpha q_\mu) \\
&\quad -p^2(q_\mu r_\alpha + q_\alpha r_\mu)] \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{E_{1234}}, \tag{3.71}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_{\mu\nu}^{VVPP} - g_{\mu\nu} (T^{PPPP}) &= -8I_{3\mu\nu}^s(r, p; m) \\
&-4(p-q)_\mu I_{3\nu}^s(p, q; m) \\
&-4p_\nu I_{3\mu}^s(r, p; m) \\
&-4(r-q)_\nu I_{3\mu}^s(r, q; m) \\
&-4r_\mu I_{3\nu}^s(r, p; m) \\
&+2(p_\nu q_\mu - p_\mu q_\nu) \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{E_{123}} \\
&+2(p_\mu r_\nu - p_\nu r_\mu) \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{E_{124}} \\
&+2(q_\nu r_\mu - q_\mu r_\nu) \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{E_{134}} \\
&+2[(p_\nu q_\mu - p_\mu q_\nu) + (p_\mu r_\nu - p_\nu r_\mu) + (q_\nu r_\mu - q_\mu r_\nu)] \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{E_{234}} \\
&+8[q^2 - (r \cdot q) + (r \cdot p) - (p \cdot q)] I_{4\mu\nu}^s \\
&+4\{[q^2 - (r \cdot q)] p_\nu - [p^2 - (r \cdot p)] q_\nu + [p^2 - (p \cdot q)] r_\nu\} I_{4\mu}^s \\
&+4\{[r^2 - (r \cdot q)] p_\mu - [r^2 - (r \cdot p)] q_\mu + [q^2 - (p \cdot q)] r_\mu\} I_{4\nu}^s \\
&-2[r^2(p_\nu q_\mu - p_\mu q_\nu) \\
&\quad + q^2(p_\mu r_\nu - p_\nu r_\mu) \\
&\quad + p^2(q_\nu r_\mu - q_\mu r_\nu)] \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{E_{1234}}
\end{aligned} \tag{3.72}$$

e

$$\begin{aligned}
T^{PPPP} &= 2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{E_{24}} + 2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{E_{13}} \\
&-2(r \cdot p) \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{E_{124}} \\
&-2[r^2 - (r \cdot q)] \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{E_{134}} \\
&-2[p^2 - (p \cdot q)] \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{E_{123}} \\
&-2[q^2 + (r \cdot p) - (r \cdot q) - (p \cdot q)] \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{E_{234}} \\
&+2\{r^2[p^2 - (p \cdot q)] \\
&\quad + q^2(p \cdot r) \\
&\quad - p^2(r \cdot q)\} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{E_{1234}},
\end{aligned} \tag{3.73}$$

onde definimos

$$\begin{aligned}
I_{3\alpha\nu}^s(p, q; m) &= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k_\alpha k_\nu}{E_{123}} \\
&+ k_{1\alpha} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k_\nu}{E_{123}} \\
&+ k_{1\nu} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k_\alpha}{E_{123}} \\
&- k_{1\nu} k_{1\alpha} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{E_{123}},
\end{aligned} \tag{3.74}$$

$$\begin{aligned}
I_{3\mu\nu}^s(r, p; m) &= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k_\mu k_\nu}{E_{124}} \\
&+ k_{1\mu} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k_\nu}{E_{124}} \\
&+ k_{1\nu} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k_\mu}{E_{124}} \\
&- k_{1\nu} k_{1\mu} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{E_{124}},
\end{aligned} \tag{3.75}$$

$$\begin{aligned}
I_{3\alpha\beta}^s(u, t; m) &= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k_\alpha k_\beta}{E_{234}} \\
&+ k_{4\alpha} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k_\beta}{E_{234}} \\
&+ k_{4\beta} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k_\alpha}{E_{234}} \\
&- k_{4\beta} k_{4\alpha} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{E_{234}},
\end{aligned} \tag{3.76}$$

$$\begin{aligned}
I_{3\mu\beta}^s(r, q; m) &= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k_\mu k_\beta}{E_{134}} \\
&+ k_{1\mu} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k_\beta}{E_{134}} \\
&+ k_{1\beta} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k_\mu}{E_{134}} \\
&- k_{1\beta} k_{1\mu} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{E_{134}},
\end{aligned} \tag{3.77}$$

$$\begin{aligned}
I_{3\beta}^s(r, q; m) &= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k_\beta}{E_{134}} \\
&+ k_{1\beta} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{E_{134}},
\end{aligned} \tag{3.78}$$

$$\begin{aligned}
I_{3\nu}^s(r, p; m) &= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k_\nu}{E_{124}} \\
&+ k_{1\nu} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{E_{124}},
\end{aligned} \tag{3.79}$$

$$\begin{aligned}
I_{3\beta}^s(u, t; m) &= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k_\beta}{E_{234}} \\
&\quad + k_{4\beta} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{E_{234}}
\end{aligned} \tag{3.80}$$

e

$$\begin{aligned}
I_{3\nu}^s(p, q; m) &= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k_\nu}{E_{123}} \\
&\quad + k_{1\nu} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{E_{123}}.
\end{aligned} \tag{3.81}$$

Isto completa o tratamento das funções de Green consideradas.

### 3.3 Relações entre funções de Green

Após os resultados obtidos na seção anterior fica claro que, para completar o cálculo das amplitudes teremos que considerar um conjunto de integrais de Feynman, algumas delas de caráter divergente. Isto implica em manipulações de quantidades matemáticas indefinidas. É interessante, antes de efetuarmos as manipulações propriamente ditas, que consideremos algumas exigências bastante razoáveis que possam desempenhar o papel de guias de consistência. Dito de outro modo, queremos saber quais os vínculos que podemos impor sobre as formas manipuladas e calculadas das integrais divergentes que possam ser verificados após os cálculos, para que estes possam ser considerados consistentes.

Uma maneira de estabelecer tais relações é notar a existência de identidades relacionando as funções de Green que definimos e que podem ser estabelecidas a partir de relações entre os integrandos, portanto válidas antes da introdução do sinal de integração. A primeira destas relações entre funções de Green pode ser construída com a observação da identidade

$$(k_1 - k_2)^\mu \left\{ \gamma_\nu \frac{1}{(\not{k} + \not{k}_1) - m} \gamma^\mu \frac{1}{(\not{k} + \not{k}_2) - m} \right\} = \gamma_\nu \frac{1}{[\not{k} + \not{k}_2 - m]} - \gamma_\nu \frac{1}{[\not{k} + \not{k}_1 - m]}. \tag{3.82}$$

Esta, depois da tomada dos traços de Dirac e integração sobre o momento  $k$ , em ambos os lados, nos permite identificar uma relação entre duas funções de Green que definimos anteriormente, Eq.(3.1) e Eq.(3.16), ou seja:

$$(k_1 - k_2)^\mu T_{\mu\nu}^{VV} = T_\nu^V(k_2, m) - T_\nu^V(k_1, m). \tag{3.83}$$

De um modo similar podemos também estabelecer que

$$(k_1 - k_2)^\nu T_{\mu\nu}^{VV} = T_\mu^V(k_2, m) - T_\mu^V(k_1, m). \tag{3.84}$$

As identidades (3.83) e (3.84), diagramaticamente representadas através da *figura* (3.9), são duas genuínas relações entre funções de Green do cálculo perturbativo. Relações deste tipo podem ser construídas através dos métodos da álgebra de correntes.

$$(k_i - k_j)_\mu \left[ \begin{array}{c} \text{diagram: a loop with vertices } \gamma_\mu \text{ and } \gamma_\nu, \text{ top arc } k+k_i, \text{ bottom arc } k+k_j \end{array} \right] = \begin{array}{c} \text{diagram: loop with } \gamma_\nu, \text{ top arc } k+k_j \end{array} - \begin{array}{c} \text{diagram: loop with } \gamma_\nu, \text{ top arc } k+k_i \end{array}$$

Fig. 3.9: Representação diagramática para as identidades (3.83) e (3.84).

Estas relações podem ser vistas como propriedades das funções de Green que carregam índices vetoriais de Lorentz. Como tal, a relação (3.84) nos diz que se calcularmos explicitamente a função de dois pontos  $T_{\mu\nu}^{VV}$  e depois disto contraírmos com o momento externo, nós devemos identificar no resultado obtido a diferença entre duas funções de um ponto  $T_\mu^V$  com linhas internas carregando momentos  $k_1$  e  $k_2$ , os quais são arbitrários. Seguindo o mesmo procedimento podemos construir relações envolvendo todas as funções de Green puramente fermiônicas diferindo no número de pontos em uma unidade através de uma contração com um momento externo, terminando sempre em uma relação com aquela de um ponto por contrações sucessivas. A fim de prosseguir na identificação de tais relações, consideraremos a amplitude triangular triplamente vetorial e suas relações com as funções de dois pontos  $VV$ . Primeiro notamos a identidade

$$(k_1 - k_2)^\nu \left\{ \gamma_\mu \frac{1}{(\not{k} + \not{k}_1) - m} \gamma_\nu \frac{1}{(\not{k} + \not{k}_2) - m} \gamma_\lambda \frac{1}{(\not{k} + \not{k}_3) - m} \right\} = \gamma_\mu \frac{1}{[\not{k} + \not{k}_2 - m]} \gamma_\lambda \frac{1}{(\not{k} + \not{k}_3) - m} - \gamma_\mu \frac{1}{[\not{k} + \not{k}_1 - m]} \gamma_\lambda \frac{1}{(\not{k} + \not{k}_3) - m}. \quad (3.85)$$

Novamente, depois de tomar os traços e integrar no momento  $k$ , em ambos os lados, uma relação entre a função de três pontos triplamente vetorial e a função de dois pontos Bi-vetorial pode ser identificada, a qual podemos escrever como

$$(k_1 - k_2)^\nu T_{\lambda\mu\nu}^{VVV} = T_{\lambda\mu}^{VV}(k_3, k_2, m) - T_{\lambda\mu}^{VV}(k_3, k_1, m). \quad (3.86)$$

$$(k_1 - k_2)^\nu \left[ \begin{array}{c} \text{diagram: triangle with vertices } \gamma_\lambda, \gamma_\mu, \gamma_\nu, \text{ top arc } k+k_3, \text{ left arc } k+k_2, \text{ right arc } k+k_1 \end{array} \right] = \gamma_\lambda \left[ \begin{array}{c} \text{diagram: loop with } \gamma_\mu, \text{ top arc } k+k_3, \text{ bottom arc } k+k_2 \end{array} \right] - \gamma_\lambda \left[ \begin{array}{c} \text{diagram: loop with } \gamma_\mu, \text{ top arc } k+k_3, \text{ bottom arc } k+k_1 \end{array} \right]$$

Fig. 3.10: Representação diagramática para a identidade (3.86).

Relações similares podem ser estabelecidas tomando a contração com os outros momentos externos. Elas ficam

$$(k_3 - k_1)^\mu T_{\lambda\mu\nu}^{VVV} = T_{\lambda\nu}^{VV}(k_1, k_2, m) - T_{\lambda\nu}^{VV}(k_3, k_2, m) \quad (3.87)$$

e

$$(k_3 - k_2)^\lambda T_{\lambda\mu\nu}^{VVV} = T_{\nu\mu}^{VV}(k_1, k_3, m) - T_{\nu\mu}^{VV}(k_1, k_2, m). \quad (3.88)$$

A relação (3.86), representada diagramaticamente na figura (3.10) e as relações (3.87) e (3.88), implicam que após o cálculo explícito da função  $T_{\lambda\mu\nu}^{VVV}$  e a correspondente contração com os momentos

externos, deveremos ser capazes de identificar as diferenças entre estruturas de dois pontos, conforme indicado pelas respectivas identidades.

O procedimento usado acima pode ser adotado para estabelecer quatro vínculos para a função de Green tetra-vetorial na forma de relações com as funções tri-vetoriais. Eles são:

$$(k_3 - k_2)^\mu T_{\mu\nu\alpha\beta}^{VVVV} = T_{\nu\alpha\beta}^{VVV}(k_1, k_3, k_4; m) - T_{\nu\alpha\beta}^{VVV}(k_1, k_2, k_4; m), \quad (3.89)$$

$$(k_4 - k_3)^\nu T_{\mu\nu\alpha\beta}^{VVVV} = T_{\mu\alpha\beta}^{VVV}(k_1, k_2, k_4; m) - T_{\beta\mu\alpha}^{VVV}(k_1, k_2, k_3; m),$$

$$(k_1 - k_4)^\alpha T_{\mu\nu\alpha\beta}^{VVVV} = T_{\mu\nu\beta}^{VVV}(k_1, k_2, k_3; m) - T_{\mu\nu\beta}^{VVV}(k_2, k_3, k_4; m) \quad (3.90)$$

e

$$(k_2 - k_1)^\beta T_{\mu\nu\alpha\beta}^{VVVV} = T_{\mu\nu\alpha}^{VVV}(k_2, k_3, k_4; m) - T_{\mu\nu\alpha}^{VVV}(k_1, k_3, k_4; m). \quad (3.91)$$

Uma classe análoga de relações entre funções de Green pode ser construída para aquelas possuindo ambos os propagadores do fóton e do elétron. Por contrações sucessivas todas terminam sendo relacionadas à auto-energia do elétron por excitação de um fóton que é a estrutura mais simples. Para as amplitudes que estamos considerando, apenas uma pertencente a esta classe de relações é relevante. Trata-se daquela envolvendo a correção de vértice. Para identificá-la primeiro notamos a identidade

$$\begin{aligned} & (k_3 - k_2)_\mu \left[ \gamma^\nu \frac{1}{[(\not{k} + \not{k}_2) - m]} \gamma^\mu \frac{1}{[(\not{k} + \not{k}_3) - m]} \gamma^\lambda \right] \\ &= \left[ \gamma^\nu \frac{1}{[(\not{k} + \not{k}_3) - m]} \gamma^\lambda - \gamma^\nu \frac{1}{[(\not{k} + \not{k}_2) - m]} \gamma^\lambda \right]. \end{aligned} \quad (3.92)$$

Podemos inserir um propagador fotônico, carregando momento  $k + k_1$ , em ambos os lados, uma vez que este não envolve matrizes de Dirac, e posteriormente tomar a integração em  $k$ , para ficar com

$$\begin{aligned} & (k_3 - k_2)_\mu \left\{ \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \left[ \gamma^\nu \frac{1}{[(\not{k} + \not{k}_2) - m]} \gamma^\mu \frac{1}{[(\not{k} + \not{k}_3) - m]} \gamma^\lambda \right] \times \right. \\ & \quad \left. \left[ \frac{g_{\nu\lambda}}{(k + k_1)^2} + (\xi - 1) \frac{(k + k_1)_\lambda (k + k_1)_\nu}{[(k + k_1)^2]^2} \right] \right\} = \\ & - \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \left[ \gamma^\nu \frac{1}{[(\not{k} + \not{k}_2) - m]} \gamma^\lambda \right] \left[ \frac{g_{\nu\lambda}}{(k + k_1)^2} + (\xi - 1) \frac{(k + k_1)_\lambda (k + k_1)_\nu}{[(k + k_1)^2]^2} \right] \\ & + \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \left[ \gamma^\nu \frac{1}{[(\not{k} + \not{k}_3) - m]} \gamma^\lambda \right] \left[ \frac{g_{\nu\lambda}}{(k + k_1)^2} + (\xi - 1) \frac{(k + k_1)_\lambda (k + k_1)_\nu}{[(k + k_1)^2]^2} \right]. \end{aligned} \quad (3.93)$$

Agora podemos identificar o termo entre chaves no lado esquerdo com a função de Green da correção de vértice e os dois termos no lado direito como sendo as funções de Green associadas a auto-energia do elétron por excitação de um fóton. Isto significa que

$$(k_3 - k_2)_\mu \Lambda^\mu(k_1, k_2, k_3, m) = \Sigma(k_1, k_2, m) - \Sigma(k_1, k_3, m). \quad (3.94)$$

O que completa as relações entre funções de Green relevantes para as discussões que pretendemos neste trabalho.

Neste ponto é importante notar que as relações que acabamos de construir envolvem sempre funções com um número diferente de pontos o que implica em diferentes graus superficiais de divergência. Uma vez que adotamos sempre rótulos arbitrários para os momentos carregados pelas linhas internas, sempre que um dos lados possuir grau de divergência superior ao logarítmico poderão estar envolvidas ambigüidades. É interessante perceber que ainda assim esperamos que estas relações sejam preservadas, isto é, as relações entre funções de Green devem ser preservadas independentemente das escolhas para as arbitrariedades envolvidas tais como: o método de regularização, os rótulos para os momentos das linhas internas e a escala comum às partes finitas e divergentes de uma amplitude do cálculo perturbativo. Por isso torna-se crucial verificarmos, após as manipulações e cálculos efetuados, no contexto de um procedimento qualquer, se estas relações permanecem válidas. Do contrário, é possível sempre estabelecermos que alguma simetria fundamental ou identidades de Ward serão violadas como consequência da quebra de alguma destas propriedades, que veremos a seguir.

### 3.4 Relações de simetria

As relações entre funções de Green, que acabamos de considerar, são propriedades primordiais. Elas, entretanto, não correspondem, em geral, às relações de simetria ou identidades de Ward, muito embora estejam profundamente relacionadas. As relações de simetria impõem vínculos sobre amplitudes físicas que são combinações de diferentes funções de Green, quando o número de pontos supera dois, ou, ainda, impõem vínculos sobre o próprio valor de algumas amplitudes ou limites cinemáticos. Para a EDQ, a invariância de “gauge” está associada a conservação da corrente vetorial, o que implica que cada vez que um momento externo de uma amplitude física for contraído com um índice vetorial correspondente, devemos obter um resultado identicamente nulo. Isto significa que, para a função de um ponto vetorial, devemos ter

$$k_1^\mu T_\mu^V = 0. \quad (3.95)$$

Por sua vez, para a função de dois pontos  $T_{\mu\nu}^{VV}$ , devemos ter

$$(k_1 - k_2)^\mu T_{\mu\nu}^{VV} = 0 \quad (3.96)$$

e

$$(k_1 - k_2)^\nu T_{\mu\nu}^{VV} = 0. \quad (3.97)$$

Para a função de três pontos triplamente vetorial, a amplitude física correspondente é obtida pela simetriação nos estados finais o que implica em somar dois diagramas, que denominamos canal direto e canal cruzado. Escrevemos isto na forma

$$(k_3 - k_2)^\lambda [T_{\lambda\mu\nu}^{VVV}(k_1, k_2, k_3; m)] + (l_3 - l_2)^\lambda [T_{\lambda\nu\mu}^{VVV}(l_1, l_2, l_3; m)] = 0, \quad (3.98)$$

$$(k_1 - k_3)^\mu [T_{\lambda\mu\nu}^{VVV}(k_1, k_2, k_3; m)] + (l_2 - l_1)^\mu [T_{\lambda\nu\mu}^{VVV}(l_1, l_2, l_3; m)] = 0 \quad (3.99)$$

e

$$(k_2 - k_1)^\nu [T_{\lambda\mu\nu}^{VVV}(k_1, k_2, k_3; m)] + (l_1 - l_3)^\nu [T_{\lambda\nu\mu}^{VVV}(l_1, l_2, l_3; m)] = 0. \quad (3.100)$$



É importante notar que adotamos rotulações arbitrárias para os momentos das linhas internas independentes para os diagramas correspondentes aos dois diferentes canais que contribuem para a amplitude física. Eles estão relacionados aos momentos externos de acordo com

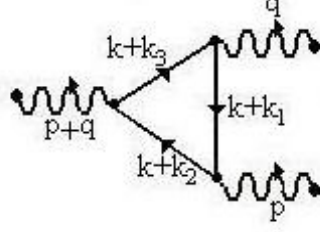


Fig. 3.11: Representação diagramática para o canal direto.

$$\begin{cases} k_3 - k_2 = p + q, \\ k_3 - k_1 = q, \\ k_1 - k_2 = p, \end{cases}$$

para o canal direto, *figura* (3.11), e

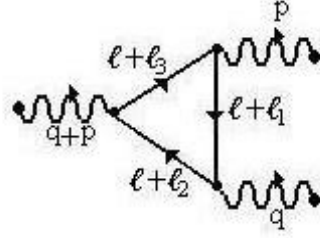


Fig. 3.12: Representação diagramática para o canal cruzado.

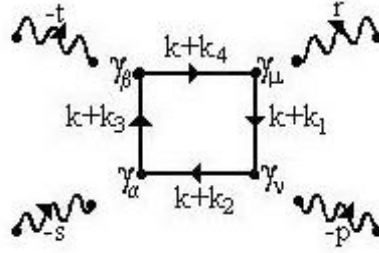
$$\begin{cases} l_3 - l_2 = p + q, \\ l_3 - l_1 = p, \\ l_1 - l_2 = q, \end{cases} \quad (3.101)$$

para o canal cruzado, *figura* (3.12). Isto deve ser feito pois as arbitrariedades são intrínsecas ao cálculo de cada diagrama e não há absolutamente nenhuma razão para supor que o significado das eventuais ambigüidades decorrentes do cálculo de um diagrama seja idêntico àquele daquelas de outro diagrama qualquer, ainda que topologicamente idênticos.

Finalmente, para o processo que denominamos espalhamento de dois fótons, teremos para a simetriação dos estados finais a contribuição de cinco diagramas  $VVVV$  para cada corrente vetorial envolvida. Tomando o índice vetorial  $\lambda$ , a conservação da corrente correspondente implica em

$$\begin{aligned} 0 = & (k_3 - k_2)^\lambda [T_{\xi\lambda\mu\nu}^{VVVV}(k_1, k_2, k_3, k_3; m)] + (l_3 - l_2)^\lambda [T_{\xi\lambda\mu\nu}^{VVVV}(l_1, l_2, l_3, l_4; m)] \\ & (r_3 - r_2)^\lambda [T_{\xi\lambda\mu\nu}^{VVVV}(r_1, r_2, r_3, r_4; m)] + (s_3 - s_2)^\lambda [T_{\xi\lambda\mu\nu}^{VVVV}(s_1, s_2, s_3, s_4; m)] \\ & (t_3 - t_2)^\lambda [T_{\xi\lambda\mu\nu}^{VVVV}(t_1, t_2, t_3, t_4; m)]. \end{aligned} \quad (3.102)$$

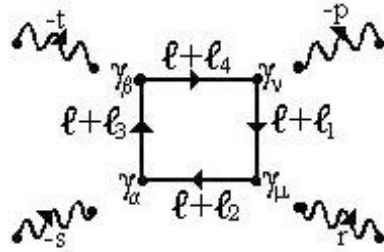
Aqui, adotamos também para cada diagrama um conjunto de rótulos arbitrários para os momentos das linhas internas. Os momentos externos estão relacionados àqueles internos na *figura (3.13)* por



*Fig. 3.13: Representação diagramática contribuindo para a função de Green correspondente a interação de quatro fótons.*

$$\left\{ \begin{array}{l} k_3 - k_2 = -s, \\ k_4 - k_3 = -t, \\ k_4 - k_1 = r, \\ k_1 - k_2 = -p, \end{array} \right. \quad (3.103)$$

na *figura (3.14)* por



*Fig. 3.14: Representação diagramática contribuindo para a função de Green correspondente a interação de quatro fótons com  $\mu$  e  $\nu$  permutados.*

$$\left\{ \begin{array}{l} l_3 - l_2 = -s, \\ l_1 - l_2 = r, \\ l_4 - l_3 = -t, \\ l_4 - l_1 = -p, \end{array} \right. \quad (3.104)$$

na figura (3.15) por

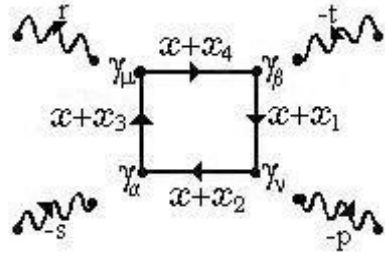


Fig. 3.15: Representação diagramática contribuindo para a função de Green correspondente a interação de quatro fótons com  $\mu$  e  $\beta$  permutados.

$$\begin{cases} x_3 - x_2 = -s, \\ x_3 - x_4 = r, \\ x_1 - x_2 = -p, \\ x_1 - x_4 = -t, \end{cases} \quad (3.105)$$

na figura (3.16) por

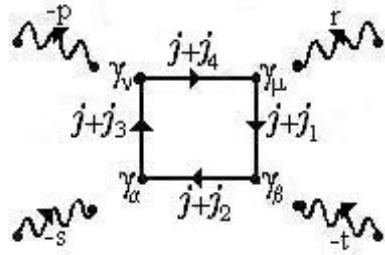


Fig. 3.16: Representação diagramática contribuindo para a função de Green correspondente a interação de quatro fótons com  $\mu \Leftrightarrow \nu$ ,  $\nu \Leftrightarrow \beta$  e  $\beta \Leftrightarrow \mu$  permutados.

$$\begin{cases} j_3 - j_2 = -s, \\ j_3 - j_4 = -p, \\ j_2 - j_1 = -t, \\ j_4 - j_1 = r, \end{cases} \quad (3.106)$$

e, finalmente, na figura (3.17) por

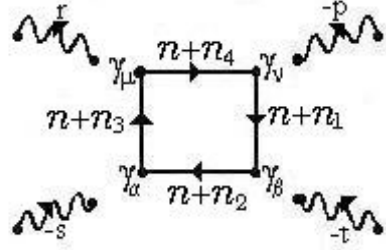


Fig. 3.17: Representação diagramática contribuindo para a função de Green correspondente a interação de quatro fótons com  $\mu \Leftrightarrow \beta$  e  $\beta \Leftrightarrow \nu$  permutados.

$$\begin{cases} n_3 - n_2 = -s, \\ n_3 - n_4 = r, \\ n_2 - n_1 = -t, \\ n_4 - n_1 = -p. \end{cases} \quad (3.107)$$

É evidente que as condições para que as relações de simetria sejam satisfeitas podem ser associadas às relações entre funções de Green uma vez que a cada contração efetuada sobre um diagrama existe uma relação entre funções de Green envolvida. Como tal podemos escrever a relação de simetria (3.104) na forma

$$\begin{aligned} 0 = & [T_{\nu\alpha\beta}^{VVV}(k_1, k_3, k_4; m) - T_{\nu\alpha\beta}^{VVV}(k_1, k_2, k_4; m)] \\ & + [T_{\nu\alpha\beta}^{VVV}(l_1, l_3, l_4; m) - T_{\nu\alpha\beta}^{VVV}(l_1, l_2, l_4; m)] \\ & + [T_{\nu\alpha\beta}^{VVV}(r_1, r_3, r_4; m) - T_{\nu\alpha\beta}^{VVV}(r_1, r_2, r_4; m)] \\ & + [T_{\nu\alpha\beta}^{VVV}(s_1, s_3, s_4; m) - T_{\nu\alpha\beta}^{VVV}(s_1, s_2, s_4; m)] \\ & + [T_{\nu\alpha\beta}^{VVV}(t_1, t_3, t_4; m) - T_{\nu\alpha\beta}^{VVV}(t_1, t_2, t_4; m)], \end{aligned} \quad (3.108)$$

onde utilizamos as relações (3.99)-(3.101). As identidades de Ward para o processo que denominamos decaimento fotônico do fóton, Eq.(3.101), podem ser reescritas como

$$\begin{aligned} 0 = & [T_{\lambda\mu}^{VV}(k_3, k_2; m) - T_{\lambda\mu}^{VV}(k_3, k_1; m)] \\ & + [T_{\lambda\mu}^{VV}(l_3, l_2; m) - T_{\lambda\mu}^{VV}(l_3, l_1; m)], \end{aligned} \quad (3.109)$$

onde utilizamos a relação (3.86), e expressões análogas para os demais índices vetoriais. Finalmente a identidade de Ward para a função de dois pontos, Eq.(3.83), pode ser escrita como

$$T_\nu^V(k_2) - T_\nu^V(k_1) = 0, \quad (3.110)$$

de forma análoga para o outro índice vetorial. As condições (3.110)-(3.112) nos mostram a importância do caráter não-ambíguo para as funções de Green. Uma vez que as contrações envolvem diferenças

entre funções com um número menor de pontos e, portanto com maior grau de divergência, e que os momentos arbitrários não são os mesmos nas diferentes funções envolvidas, se as funções de Green calculadas possuírem termos ambíguos, as identidades de Ward poderão ser violadas por estes termos já que as ambigüidades não podem se cancelar pois envolvem diferentes dependências com os momentos arbitrários.

Por fim, como vínculos de consistência relevantes para a EDQ temos ainda as importantes determinações do teorema de Furry. Este estabelece que toda vez que um processo físico envolver um número ímpar de fótons externos ele deve se anular identicamente. Para as amplitudes que consideramos isto implica que deveremos ter

$$T_{\mu}^V(k_1; m) = 0 \quad (3.111)$$

e

$$T_{\lambda\mu\nu}^{VVV}(k_1, k_2, k_3; m) + T_{\lambda\nu\mu}^{VVV}(l_1, l_2, l_3; m) = 0, \quad (3.112)$$

o que, como veremos será de grande utilidade na definição de um tratamento consistente das divergências do cálculo perturbativo.

Passemos então, ao tratamento das integrais de Feynman encontradas neste capítulo para posteriormente explicitarmos as funções de Green e então verificarmos sob que condições os vínculos de consistência considerados nas últimas seções serão satisfeitos.

## Capítulo 4

# Sistematização para as partes finitas das amplitudes

### 4.1 Introdução

No capítulo II selecionamos um conjunto de processos físicos pertinentes à EDQ e com a utilização das regras de Feynman escrevemos as expressões para as amplitudes correspondentes. No capítulo 3 desenvolvemos estas amplitudes a fim de colocá-las na forma de uma combinação de integrais de Feynman. Assim, o passo seguinte que devemos dar para obtermos as formas explícitas das amplitudes é a solução destas integrais. Algumas destas são estruturas matemáticas indefinidas já que são quantidades divergentes. Isto nos obriga a adotar alguma estratégia para o tratamento destas estruturas divergentes a fim de que possamos colocá-las numa forma adequada para a reparametrização, isto é, devemos separar as partes divergentes e finitas. Isto quer dizer que em cada integral de Feynman, ainda que divergente, encontraremos partes finitas que serão funções dependentes dos momentos e das massas carregadas pelas partículas. Tais funções devem possuir propriedades determinadas por princípios gerais de TQC como, por exemplo, a unitariedade. As restrições são tais que a estrutura analítica destas funções é completamente determinada. Deste modo esperamos que as partes finitas das integrais de Feynman admitam alguma sistematização que permita organizar os cálculos das amplitudes e estudar suas propriedades [24]. Seguindo este raciocínio, neste capítulo nós introduzimos um conjunto de funções em termos das quais escreveremos os resultados das integrais que consideraremos nos capítulos posteriores. Algumas propriedades e limites específicos também serão estudados para propósitos futuros. Este é portanto um capítulo subsidiário aos seguintes.

### 4.2 As Funções $Z'_k$ 's

Ao calcularmos integrais de Feynman presentes em funções de Green do cálculo perturbativo, associadas a funções de dois pontos, encontraremos naturalmente um conjunto de funções que carregarão as

informações e propriedades fundamentais dos processos físicos associados. Nós a definimos como

$$Z_k(\lambda_1^2, \lambda_2^2, q^2; \lambda^2) = \int_0^1 dz z^k \ln \left( \frac{q^2 z(1-z) + (\lambda_1^2 - \lambda_2^2)z - \lambda_1^2}{-\lambda^2} \right). \quad (4.1)$$

Na expressão acima  $q^2$  é o momento externo do “loop” quando se tratar de uma função de dois pontos ou, uma combinação invariante destes quando em funções com maior número de pontos. Quanto a  $\lambda_1^2$  e  $\lambda_2^2$ , eles serão em geral massas da teoria. O parâmetro  $z$  é o último parâmetro de Feynman utilizado na parametrização a ser integrado (ver Apêndice B). O parâmetro  $\lambda^2$  desempenha um papel de escala para os momentos, para  $\lambda_1^2$  e para  $\lambda_2^2$ . É muito conveniente a utilização de um dos parâmetros  $\lambda_1^2$  ou  $\lambda_2^2$  como escala para a construção de formas explícitas. A mudança da escala é facilmente obtida. Basta notar que:

$$Z_k(\lambda_1^2, \lambda_2^2, q^2; \lambda^2) = Z_k(\lambda_1^2, \lambda_2^2, q^2; \lambda_2^2) + \frac{1}{k+1} \ln \left( \frac{\lambda_2^2}{\lambda^2} \right). \quad (4.2)$$

Relações deste tipo se mostrarão importantes para o cálculo das integrais divergentes contendo ambos os propagadores do elétron e do fóton. Para obtermos formas explícitas para os primeiros valores de  $k$  podemos seguir o procedimento do Apêndice D. Teremos então as expressões:

$$Z_0(\lambda_1^2, \lambda_2^2, q^2; \lambda_2^2) = (-) \left\{ \frac{(q^2 + \lambda_1^2 - \lambda_2^2)}{2q^2} \ln \left( \frac{\lambda_2^2}{\lambda_1^2} \right) + 2 + \frac{h(\lambda_1^2, \lambda_2^2, q^2)}{2q^2} \right\}, \quad (4.3)$$

$$\begin{aligned} Z_1(\lambda_1^2, \lambda_2^2, q^2; \lambda_2^2) = (-) & \left\{ \frac{(q^2 + \lambda_1^2 - \lambda_2^2)}{2q^2} + \frac{1}{2} + \right. \\ & + \frac{[(q^2 + \lambda_1^2 - \lambda_2^2) - 2\lambda_1^2 q^2]}{4q^4} \ln \left( \frac{\lambda_2^2}{\lambda_1^2} \right) \\ & \left. + \frac{(q^2 + \lambda_1^2 - \lambda_2^2)}{4q^4} h(\lambda_1^2, \lambda_2^2, q^2) \right\} \end{aligned} \quad (4.4)$$

e

$$\begin{aligned} Z_2(\lambda_1^2, \lambda_2^2, q^2; \lambda_2^2) = (-) & \left\{ \frac{(q^2 + \lambda_1^2 - \lambda_2^2)}{6q^2} + \frac{2}{9} + \right. \\ & + \frac{[(q^2 + \lambda_1^2 - \lambda_2^2)^2 - 2\lambda_1^2 q^2]}{3q^4} \\ & + \frac{(q^2 + \lambda_1^2 - \lambda_2^2)}{2q^2} \frac{[(q^2 + \lambda_1^2 - \lambda_2^2)^2 - 3\lambda_1^2 q^2]}{3q^4} \ln \left( \frac{\lambda_2^2}{\lambda_1^2} \right) \\ & \left. + \frac{[(q^2 + \lambda_1^2 - \lambda_2^2)^2 - \lambda_1^2 q^2]}{6q^6} h(\lambda_1^2, \lambda_2^2, q^2) \right\}. \end{aligned} \quad (4.5)$$

A função  $h(\lambda_1^2, \lambda_2^2, q^2)$  possui três representações:

i) Para  $q^2 < (\lambda_1 - \lambda_2)^2$ .

Nesta região de valores de  $q^2$  temos:

$$\begin{aligned} h(\lambda_1^2, \lambda_2^2, q^2) = & 2\sqrt{(\lambda_1 - \lambda_2)^2 - q^2} \sqrt{(\lambda_1 + \lambda_2)^2 - q^2} \times \\ & \times \ln \left\{ \frac{\sqrt{(\lambda_1 + \lambda_2)^2 - q^2} + \sqrt{(\lambda_1 - \lambda_2)^2 - q^2}}{\sqrt{(\lambda_1 + \lambda_2)^2 - q^2} - \sqrt{(\lambda_1 - \lambda_2)^2 - q^2}} \right\}. \end{aligned} \quad (4.6)$$

ii) Para  $(\lambda_1 - \lambda_2)^2 < q^2 < (\lambda_1 + \lambda_2)^2$ .

Neste caso temos a representação:

$$h(\lambda_1^2, \lambda_2^2, q^2) = (-)4\sqrt{(\lambda_1 + \lambda_2)^2 - q^2}\sqrt{q^2 - (\lambda_1 - \lambda_2)^2} \arctan \left\{ \frac{\sqrt{q^2 - (\lambda_1 - \lambda_2)^2}}{\sqrt{(\lambda_1 + \lambda_2)^2 - q^2}} \right\}. \quad (4.7)$$

iii) Para  $q^2 > (\lambda_1 + \lambda_2)^2$ .

Nesta região de valores para  $q^2$  a função  $h(\lambda_1^2, \lambda_2^2, q^2)$  desenvolve uma parte imaginária. Ela fica

$$\begin{aligned} h(\lambda_1^2, \lambda_2^2, q^2) &= 2\sqrt{q^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)^2}\sqrt{q^2 - (\lambda_1 - \lambda_2)^2} \times \\ &\quad \times \ln \left\{ \frac{\sqrt{q^2 - (\lambda_1 - \lambda_2)^2} + \sqrt{q^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)^2}}{\sqrt{q^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)^2} - \sqrt{q^2 - (\lambda_1 - \lambda_2)^2}} \right\} \\ &\quad + 2i\pi\sqrt{q^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)^2}\sqrt{q^2 - (\lambda_1 - \lambda_2)^2}. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Das formas explícitas, ou por integração por partes, é possível estabelecer relações entre as funções correspondentes a diferentes valores de  $k$ . Como tal

$$\begin{aligned} Z_1(\lambda_1^2, \lambda_2^2, q^2; \lambda_2^2) &= \left[ 1 + \frac{(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)}{q^2} \right] \frac{Z_0(\lambda_1^2, \lambda_2^2, q^2; \lambda_2^2)}{2} \\ &\quad + \frac{1}{2q^2} \left[ (\lambda_1^2 - \lambda_2^2) + \lambda_1^2 \ln \left( \frac{\lambda_2^2}{\lambda_1^2} \right) \right]. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Estas relações permitem que, ao final, todas as funções  $Z'_k$ s possam ser reduzidas a apenas  $Z_0$ .

#### 4.2.1 $\lim \lambda_1^2 \rightarrow 0$ em $Z_k(\lambda_1^2, \lambda_2^2, q^2; \lambda_2^2)$

As situações que necessitaremos para o tratamento das amplitudes da EDQ, podem ser obtidas como casos particulares do caso geral considerado acima. Uma destas situações é aquela associada à presença do fóton nas amplitudes. Neste caso é podemos retirar das expressões acima aquelas desejadas tomando uma das massas nula. É possível colocar as expressões tal que a situação pretendida corresponda a  $\lambda_1^2 = 0$  (massa do fóton) e  $\lambda_2^2 = m^2$  (massa do elétron). É fácil tomar este limite nas expressões (4.3), (4.4) e (4.5). Assim teremos, por exemplo, para  $q^2 > \lambda_2^2$ ,

$$Z_0(0, \lambda_2^2, q^2; \lambda_2^2) = \left\{ \frac{(q^2 - \lambda_2^2)}{q^2} \ln \left( \frac{q^2 - \lambda_2^2}{\lambda_2^2} \right) - 2 \right\}, \quad (4.10)$$

$$Z_1(0, \lambda_2^2, q^2; \lambda_2^2) = \left\{ \frac{(q^2 - \lambda_2^2)^2}{2q^4} \ln \left( \frac{q^2 - \lambda_2^2}{\lambda_2^2} \right) - \frac{(q^2 - \lambda_2^2)}{2q^2} - \frac{1}{2} \right\} \quad (4.11)$$

e

$$Z_2(0, \lambda_2^2, q^2; \lambda_2^2) = \left\{ \frac{(q^2 - \lambda_2^2)^3}{3q^6} \ln \left( \frac{q^2 - \lambda_2^2}{\lambda_2^2} \right) - \frac{(q^2 - \lambda_2^2)^2}{3q^4} - \frac{(q^2 - \lambda_2^2)}{6q^2} - \frac{2}{9} \right\}. \quad (4.12)$$

Algumas propriedades destas funções serão úteis para propósitos futuros. Uma destas é o comportamento destas funções próximo a  $q^2 = 0$  que é dado por:

$$Z_0(0, \lambda_2^2, q^2; \lambda_2^2) = - \left[ 1 + \frac{q^2}{2\lambda_2^2} + \frac{q^4}{6\lambda_2^4} + \dots \right], \quad (4.13)$$

$$Z_1(0, \lambda_2^2, q^2; \lambda_2^2) = - \left[ \frac{1}{4} + \frac{q^2}{6\lambda_2^2} + \frac{q^4}{24\lambda_2^4} + \dots \right] \quad (4.14)$$



e

$$Z_2(0, \lambda_2^2, q^2; \lambda_2^2) = - \left[ \frac{1}{9} + \frac{q^2}{12\lambda_2^2} + \frac{q^4}{60\lambda_2^4} + \dots \right]. \quad (4.15)$$

#### 4.2.2 As Funções $Z_k(\lambda_1^2, \lambda_2^2, q^2; \lambda^2)$ para $\lambda_1^2 = \lambda_2^2$

Outra situação que encontraremos ao tratar as amplitudes da EDQ será aquela onde apenas o propagador do elétron estará presente numa amplitude. Do caso geral considerado acima podemos obter esta situação de interesse fazendo  $\lambda_1^2 = \lambda_2^2 = m^2$ , onde  $m$  é a massa do elétron. Teremos então

$$Z_k(m^2, q^2; \lambda^2) = \int_0^1 dz z^k \ln \left( \frac{q^2 z(1-z) - m^2}{-\lambda^2} \right), \quad (4.16)$$

onde simplificamos a notação tal que  $Z_k(m^2, m^2, q^2; \lambda^2) = Z_k(m^2, q^2; \lambda^2)$ . As funções correspondentes aos primeiros valores de  $k$  ficarão então:

$$Z_0(q^2; m^2) = (-) \left\{ 2 + \frac{h(m^2, q^2)}{2p^2} \right\}, \quad (4.17)$$

$$Z_1(q^2; m^2) = (-) \left\{ 1 + \frac{h(m^2, q^2)}{4q^2} \right\} \quad (4.18)$$

e

$$Z_2(q^2; m^2) = (-) \left\{ \frac{1}{18} + \frac{2(q^2 - m^2)}{3q^2} + \frac{(q^2 - m^2)}{6q^4} h(m^2, q^2) \right\}, \quad (4.19)$$

onde fizemos  $h(m^2, m^2, q^2) = h(m^2, q^2)$ . Para este caso  $h(m^2, q^2)$  possui três representações:

i) Para  $q^2 < 0$ ,

$$h(m^2, q^2) = 2\sqrt{-q^2}\sqrt{4m^2 - q^2} \ln \left\{ \frac{\sqrt{4m^2 - q^2} - \sqrt{-q^2}}{\sqrt{4m^2 - q^2} + \sqrt{-q^2}} \right\}. \quad (4.20)$$

ii) Para  $0 < q^2 < 4m^2$ ,

$$h(m^2, q^2) = (-)4\sqrt{p^2}\sqrt{4m^2 - q^2} \arctan \left\{ \frac{\sqrt{q^2}}{\sqrt{4m^2 - q^2}} \right\}. \quad (4.21)$$

iii) Para  $q^2 > 4m^2$ .

$$\begin{aligned} h(m^2, q^2) &= 2\sqrt{q^2}\sqrt{q^2 - 4m^2} \ln \left\{ \frac{\sqrt{q^2} - \sqrt{q^2 - 4m^2}}{\sqrt{q^2} + \sqrt{q^2 - 4m^2}} \right\} \\ &\quad + 2i\pi\sqrt{q^2}\sqrt{q^2 - 4m^2}. \end{aligned} \quad (4.22)$$

Das expressões obtidas observamos de imediato as relações:

$$Z_1(q^2; m^2) = \frac{Z_0(q^2; m^2)}{2} \quad (4.23)$$

e

$$Z_2(q^2; m^2) = -\frac{1}{18} - \frac{m^2}{3q^2} Z_0(q^2; m^2) + \frac{Z_0(q^2; m^2)}{3}. \quad (4.24)$$

As situações ou limites de interesse podem ser estabelecidos de imediato. Como tal o comportamento para  $q^2 \ll 1$  fica:

$$Z_0(q^2; m^2) = - \left[ \frac{q^2}{6m^2} + \frac{q^4}{60m^4} + \dots \right], \quad (4.25)$$

$$Z_1(q^2; m^2) = - \left[ \frac{q^2}{12m^2} + \frac{q^4}{120m^4} + \dots \right], \quad (4.26)$$

$$Z_2(q^2; m^2) = - \left[ \frac{q^2}{20m^2} + \frac{q^4}{210m^4} + \dots \right]. \quad (4.27)$$

### 4.3 As Funções $Y'_k$ s

Outro tipo importante e útil de estrutura que surge em cálculos de integrais de Feynman, especialmente quando consideramos o tratamento das integrais geradas pelo termo dependente do parâmetro de “gauge” do propagador do fóton. Nós as definimos como

$$Y_k(\lambda_1^2, \lambda_2^2, q^2; \lambda^2) = (-\lambda^2) \int_0^1 \frac{dz z^k (1-z)}{[q^2 z(1-z) + (\lambda_1^2 - \lambda_2^2)z - \lambda_1^2]}. \quad (4.28)$$

Com esta definição nós observamos de imediato que:

$$\lambda^2 \frac{\partial Z_k(\lambda_1^2, \lambda_2^2, q^2; \lambda^2)}{\partial \lambda_1^2} = Y_k(\lambda_1^2, \lambda_2^2, q^2; \lambda^2). \quad (4.29)$$

As propriedades de escala das funções  $Y_k$  são imediatas

$$Y_k(\lambda_1^2, \lambda_2^2, q^2; \lambda^2) = \left( \frac{\lambda^2}{\lambda_2^2} \right) Y_k(\lambda_1^2, \lambda_2^2, q^2; \lambda_2^2). \quad (4.30)$$

As formas explícitas das primeiras componentes do conjunto podem ser facilmente obtidas seguindo, por exemplo, o procedimento do Apêndice E. Teremos então

$$Y_0(\lambda_1^2, \lambda_2^2, q^2; \lambda_2^2) = \frac{\lambda_2^2}{q^2} \left\{ \ln \left( \frac{\lambda_1^2}{\lambda_2^2} \right) + (q^2 - \lambda_1^2 + \lambda_2^2) \frac{g(\lambda_1^2, \lambda_2^2, q^2)}{f(\lambda_1^2, \lambda_2^2, q^2)} \right\}, \quad (4.31)$$

$$Y_1(\lambda_1^2, \lambda_2^2, q^2; \lambda_2^2) = \frac{\lambda_2^2}{q^2} \left\{ -1 + \frac{(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)}{2q^2} \ln \left( \frac{\lambda_1^2}{\lambda_2^2} \right) + \frac{(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)(q^2 - \lambda_2^2 + \lambda_1^2) + 2\lambda_1^2 q^2}{2q^2} \frac{g(\lambda_1^2, \lambda_2^2, q^2)}{f(\lambda_1^2, \lambda_2^2, q^2)} \right\} \quad (4.32)$$

e

$$Y_2(\lambda_1^2, \lambda_2^2, q^2; \lambda_2^2) = \frac{\lambda_2^2}{q^2} \left\{ \frac{1}{2} - \frac{(q^2 + \lambda_1^2 - \lambda_2^2)}{q^2} + \left[ \frac{(q^2 + \lambda_1^2 - \lambda_2^2)}{2q^2} - \frac{(q^2 + \lambda_1^2 - \lambda_2^2)^2}{2q^4} + \frac{\lambda_1^2}{2q^2} \right] \ln \left( \frac{\lambda_2^2}{\lambda_1^2} \right) + \left[ \frac{(q^2 + \lambda_1^2 - \lambda_2^2)^2}{2q^2} - \lambda_1^2 - \frac{(q^2 + \lambda_1^2 - \lambda_2^2)^3}{2q^4} + \frac{3(q^2 + \lambda_1^2 - \lambda_2^2)\lambda_1^2}{2q^2} \right] \frac{g(\lambda_1^2, \lambda_2^2, q^2)}{f(\lambda_1^2, \lambda_2^2, q^2)} \right\}. \quad (4.33)$$

onde a função  $f(\lambda_1^2, \lambda_2^2, q^2)$  possui as representações:

i) Região  $q^2 < (\lambda_1 - \lambda_2)^2$

$$f(\lambda_1^2, \lambda_2^2, q^2) = \sqrt{(\lambda_1 - \lambda_2)^2 - q^2} \sqrt{(\lambda_1 + \lambda_2)^2 - q^2}. \quad (4.34)$$

ii) Região  $(\lambda_1 - \lambda_2)^2 < q^2 < (\lambda_1 + \lambda_2)^2$

$$f(\lambda_1^2, \lambda_2^2, q^2) = i \sqrt{(\lambda_1 + \lambda_2)^2 - q^2} \sqrt{q^2 - (\lambda_1 - \lambda_2)^2}. \quad (4.35)$$

iii) Região  $q^2 > (\lambda_1 + \lambda_2)^2$

$$f(\lambda_1^2, \lambda_2^2, q^2) = \sqrt{q^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)^2} \sqrt{q^2 - (\lambda_1 - \lambda_2)^2}. \quad (4.36)$$

Por sua vez a função  $g(\lambda_1^2, \lambda_2^2, q^2)$  possui as representações:

i) Região  $q^2 < (\lambda_1 - \lambda_2)^2$ :

$$g(\lambda_1^2, \lambda_2^2, q^2) = 2 \ln \left\{ \frac{\sqrt{(\lambda_1 + \lambda_2)^2 - q^2} - \sqrt{(\lambda_1 - \lambda_2)^2 - q^2}}{\sqrt{(\lambda_1 + \lambda_2)^2 - q^2} + \sqrt{(\lambda_1 - \lambda_2)^2 - q^2}} \right\}. \quad (4.37)$$

ii) Região  $(\lambda_1 - \lambda_2)^2 < q^2 < (\lambda_1 + \lambda_2)^2$ :

$$g(\lambda_1^2, \lambda_2^2, q^2) = 2 \ln \left\{ \frac{\sqrt{(\lambda_1 + \lambda_2)^2 - q^2} - \sqrt{q^2 - (\lambda_1 - \lambda_2)^2}}{\sqrt{(\lambda_1 + \lambda_2)^2 - q^2} + \sqrt{q^2 - (\lambda_1 - \lambda_2)^2}} \right\}, \quad (4.38)$$

que pode ser também identificada com:

$$g(\lambda_1^2, \lambda_2^2, q^2) = 4i \arctan \left\{ \frac{\sqrt{q^2 - (\lambda_1 - \lambda_2)^2}}{\sqrt{(\lambda_1 + \lambda_2)^2 - q^2}} \right\}. \quad (4.39)$$

iii) Região  $q^2 > (\lambda_1 + \lambda_2)^2$ :

$$g(\lambda_1^2, \lambda_2^2, q^2) = 2 \ln \left\{ \frac{\sqrt{q^2 - (\lambda_1 - \lambda_2)^2} - \sqrt{q^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)^2}}{\sqrt{q^2 - (\lambda_1 - \lambda_2)^2} + \sqrt{q^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)^2}} \right\}. \quad (4.40)$$

Note que a função  $h(\lambda_1^2, \lambda_2^2, q^2)$  definida em (4.6)-(4.8) está relacionada com as funções definidas acima por

$$h(\lambda_1^2, \lambda_2^2, q^2) = f(\lambda_1^2, \lambda_2^2, q^2) g(\lambda_1^2, \lambda_2^2, q^2). \quad (4.41)$$

Das expressões obtidas, ou por integração por partes, podem ser estabelecidas relações envolvendo as funções  $Y'_k$ s com outras de valores menores de  $k$  e com as funções  $Z'_k$ s. Como tal teremos

$$Y_1(\lambda_1^2, \lambda_2^2, q^2; \lambda^2) = \frac{(q^2 + \lambda_1^2 - \lambda_2^2)}{2q^2} [Y_0(\lambda_1^2, \lambda_2^2, q^2; \lambda^2)] + \frac{\lambda^2}{2q^2} [Z_0(\lambda_1^2, \lambda_2^2, q^2; \lambda^2)]. \quad (4.42)$$

Algumas situações particulares destas funções serão de nosso interesse futuro. Vamos então considerá-las em separado.

### 4.3.1 $\lim \lambda_1^2 \rightarrow 0$ em $Y_k(\lambda_1^2, \lambda_2^2, q^2; \lambda^2)$

Nós consideramos esta situação limite escrevendo, a partir da definição:

$$Y_k(0, \lambda_2^2, q^2; \lambda^2) = \left\{ \left( - \right) \frac{\lambda_2^2}{q^2} \int_0^1 dz z^{k-1} + \left( \frac{\lambda_2^2}{q^2} \right) \int_0^1 \frac{dz z^{k-1}}{\left[ z - \frac{(q^2 - \lambda_2^2)}{q^2} \right]} \right\}, \quad (4.43)$$

tal que é fácil perceber o mau comportamento da função correspondente ao valor  $k = 0$  que fica

$$Y_0(0, \lambda_2^2, q^2; \lambda_2^2) = \frac{\lambda_2^2}{\lambda_2^2 - q^2} \left\{ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [\ln(\varepsilon)] + \ln \left( \frac{\lambda_2^2 - q^2}{\lambda_2^2} \right) \right\}, \quad (4.44)$$

que será crucial na análise das divergências infravermelhas.

Já para os casos  $k = 1$  e  $k = 2$ , teremos:

$$Y_1(0, \lambda_2^2, q^2; \lambda_2^2) = (-) \frac{\lambda_2^2}{q^2} \left\{ 1 + \frac{\lambda_2^2}{q^2} \ln \left( \frac{\lambda_2^2 - q^2}{\lambda_2^2} \right) \right\} \quad (4.45)$$

e

$$Y_2(0, \lambda_2^2, q^2; \lambda_2^2) = (-) \frac{\lambda_2^2}{q^2} \left\{ \frac{1}{2} - \frac{\lambda_2^2}{q^2} \left[ 1 - \frac{\lambda_2^2}{q^2} \ln \left( \frac{\lambda_2^2 - q^2}{\lambda_2^2} \right) \right] \right\}. \quad (4.46)$$

Estas mesmas funções para pequenos valores de  $q^2$  ficam

$$Y_1(0, \lambda_2^2, q^2; \lambda_2^2) = \left[ \frac{1}{2} + \frac{q^2}{3\lambda_2^2} + \dots \right] \quad (4.47)$$

e

$$Y_2(0, \lambda_2^2, q^2; \lambda_2^2) = \left[ \frac{1}{6} + \frac{q^2}{12\lambda_2^2} + \dots \right]. \quad (4.48)$$

### 4.3.2 As Funções $Y_k(\lambda_1^2, \lambda_2^2, q^2, \lambda^2)$ para $\lambda_1^2 = \lambda_2^2$

A situação envolvendo  $\lambda_1^2 = \lambda_2^2 = m^2$ , que ocorre naturalmente na EDQ nas amplitudes onde apenas o propagador do elétron está presente, é de grande interesse e utilidade. Nós então definimos

$$Y_k(m^2, q^2; \lambda^2) = -\lambda^2 \int_0^1 \frac{dz z^k (1-z)}{[q^2 z(1-z) - m^2]}, \quad (4.49)$$

onde simplificamos a notação  $Y_k(m^2, m^2, q^2; \lambda^2) = Y_k(m^2, q^2; \lambda^2)$ .

Facilmente podemos escrever as formas explícitas das primeiras destas funções. São elas:

$$Y_0(m^2, q^2; \lambda^2) = \frac{\lambda^2}{2} \left\{ \frac{g(m^2, q^2)}{f(m^2, q^2)} \right\}, \quad (4.50)$$

$$Y_1(m^2, q^2; \lambda^2) = \frac{\lambda^2}{2} \left\{ -1 + \frac{m^2 g(m^2, q^2)}{q^2 f(m^2, q^2)} \right\} \quad (4.51)$$

e

$$Y_2(m^2, q^2; \lambda^2) = \frac{\lambda^2}{2} \left\{ -1 + \frac{m^2 g(m^2, q^2)}{q^2 f(m^2, q^2)} \right\}. \quad (4.52)$$

Nas expressões acima usamos  $f(m^2, m^2, q^2)$  e  $g(m^2, m^2, q^2)$  iguais a  $f(m^2, q^2)$  e  $g(m^2, q^2)$  respectivamente. As expressões para  $f(m^2, q^2)$  e  $g(m^2, q^2)$  são obtidas daquelas (4.34)-(4.36) e (4.37)-(4.40) tomando  $\lambda_1^2 = \lambda_2^2 = m^2$ . Dos resultados obtidos podemos notar relações entre as funções com diferentes valores de  $k$ . Como tal:

$$Y_1(m^2, q^2; \lambda^2) = \frac{Y_0(m^2, q^2; \lambda^2)}{2}. \quad (4.53)$$

$q^2 \ll 1$  em  $Y_k(m^2, q^2; \lambda^2)$

Sendo o comportamento para pequenos valores de  $q^2$  de grande interesse nós podemos obtê-lo escrevendo, a partir da definição:

$$Y_k(m^2, q^2; \lambda^2) = \frac{\lambda^2}{m^2} \left\{ \int_0^1 dz z^k (1-z) + \left( \frac{q^2}{m^2} \right) \int_0^1 dz z^{k+1} (1-z)^2 + \left( \frac{q^2}{m^2} \right)^2 \int_0^1 dz z^{k+2} (1-z)^3 + \dots \right\}. \quad (4.54)$$

Portanto, para  $k=0, 1$  e  $2$  ficamos com:

$$Y_0(m^2, q^2; \lambda^2) \simeq \frac{\lambda^2}{m^2} \left\{ \frac{1}{2} + \frac{q^2}{12m^2} + \dots \right\}, \quad (4.55)$$

$$Y_1(m^2, q^2; \lambda^2) \simeq \frac{\lambda^2}{m^2} \left\{ \frac{1}{6} + \frac{1}{30} \frac{q^2}{m^2} + \dots \right\} \quad (4.56)$$

e

$$Y_2(m^2, q^2; \lambda^2) \simeq \frac{\lambda^2}{m^2} \left\{ \frac{1}{12} + \frac{1}{60} \frac{q^2}{m^2} + \dots \right\}. \quad (4.57)$$

#### 4.4 As Funções $\xi_{nm}$ e $\eta_{nm}$

Quando consideramos integrais de Feynman a um “loop” associadas a funções de três pontos, portanto com dois momentos externos e até três massas diferentes, torna-se bastante conveniente a introdução de um novo conjunto de funções de estrutura, definidas em termos dos parâmetros físicos, dos momentos externos e de dois parâmetros de Feynman. Através delas podemos sistematizar as soluções analíticas, as propriedades físicas, a verificação de relações de simetria e assim por diante. Nós as definimos por:

$$\xi_{nm}(\lambda_1^2, p^2, \lambda_2^2, q^2, \lambda_3^2) = \int_0^1 dz \int_0^{1-z} \frac{dy z^n y^m}{Q(y, z)}, \quad (4.58)$$

onde:

$$Q(y, z) = p^2 y(1-y) + (\lambda_1^2 - \lambda_2^2)y + q^2 z(1-z) + (\lambda_1^2 - \lambda_3^2)z - \lambda_1^2 - (2p \cdot q)yz. \quad (4.59)$$

Na expressão acima  $\lambda_1^2, \lambda_2^2$  e  $\lambda_3^2$  são as massas carregadas pelos propagadores das linhas internas e  $p$  e  $q$  são dois momentos externos (ou uma combinação destes).

Antes de explicitar algumas destas funções e enfatizar suas propriedades úteis, nós definiremos outro conjunto de funções que estão relacionadas às funções  $\xi'_{nm}$ s as quais denominamos  $\eta_{nm}$  e definimos por:

$$\eta_{nm}(\lambda_1^2, p^2, \lambda_2^2, q^2, \lambda_3^2; \lambda^2) = \int_0^1 dz \int_0^{1-z} dy z^n y^m \ln \left( \frac{Q(y, z)}{-\lambda^2} \right). \quad (4.60)$$

As funções  $\xi'_{nm}$ s podem ser sempre reduzidas a  $\xi_{00}$  mais funções  $Z'_k$ s. Nós então explicitamos tais reduções principiando por aquelas para  $n + m = 1$ . A função  $\xi_{10}$  seguindo o procedimento utilizado no

Apêndice F, pode ser escrita como

$$\begin{aligned} \xi_{10} = & \left( \frac{p^2 q^2}{p^2 q^2 - (p \cdot q)^2} \right) \left\{ \frac{(p^2 - p \cdot q)}{2p^2 q^2} [(-)Z_0(\lambda_2^2, \lambda_3^2, (p - q)^2; \lambda^2)] \right. \\ & + \frac{1}{2q^2} [Z_0(\lambda_1^2, \lambda_2^2, p^2; \lambda^2)] \\ & - \frac{(p \cdot q)}{2p^2 q^2} [Z_0(\lambda_1^2, \lambda_3^2, q^2; \lambda^2)] \\ & \left. + \left[ \frac{(q^2 + \lambda_1^2 - \lambda_3^2)}{2q^2} - \frac{(p \cdot q)(p^2 + \lambda_1^2 - \lambda_2^2)}{2p^2 q^2} \right] \xi_{00} \right\}. \end{aligned} \quad (4.61)$$

Por sua vez,  $\xi_{01}$  pode ser colocada na forma:

$$\begin{aligned} \xi_{01} = & \left( \frac{p^2 q^2}{p^2 q^2 - (p \cdot q)^2} \right) \left\{ \frac{(q^2 - p \cdot q)}{2p^2 q^2} [(-)Z_0(\lambda_2^2, \lambda_3^2, (p - q)^2; \lambda^2)] \right. \\ & + \frac{1}{2p^2} [Z_0(\lambda_1^2, \lambda_3^2, q^2; \lambda^2)] \\ & - \frac{(p \cdot q)}{2p^2 q^2} [Z_0(\lambda_1^2, \lambda_2^2, p^2; \lambda^2)] \\ & \left. + \left[ \frac{(p^2 + \lambda_1^2 - \lambda_2^2)}{2p^2} - \frac{(p \cdot q)(q^2 + \lambda_1^2 - \lambda_3^2)}{2p^2 q^2} \right] \xi_{00} \right\}. \end{aligned} \quad (4.62)$$

Aqui notemos que, como deveria ser, uma expressão pode ser levado na outra fazendo as trocas simultâneas:

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_2 \leftrightarrow \lambda_3 \\ p \leftrightarrow q, \end{array} \right. \quad (4.63)$$

o que vale para todas as funções  $\xi'_{nm}$ s. A escala  $\lambda^2$ , por outro lado, como pode ser facilmente notado, é arbitrária.

Para explicitarmos as reduções correspondentes às funções para as quais  $n + m = 2$  é interessante primeiro desenvolvermos  $\eta_{00}$  em termos de funções  $\xi'_{nm}$ s e  $Z'_k$ s. Ela fica:

$$\begin{aligned} \eta_{00} = & \frac{1}{2} Z_0(\lambda_2^2, \lambda_3^2, (p - q)^2; \lambda^2) - \left[ \frac{1}{2} + \lambda_1^2 \xi_{00} \right] \\ & + \frac{(p^2 + \lambda_1^2 - \lambda_2^2)}{2} \xi_{01} + \frac{(q^2 + \lambda_1^2 - \lambda_3^2)}{2} \xi_{10}. \end{aligned} \quad (4.64)$$

Nesta expressão é possível perceber o porquê da definição de  $\eta_{nm}$  em termos de uma escala  $\lambda^2$ . As funções  $\xi'_{nm}$ s são independentes de  $\lambda^2$ , mas as funções  $\eta'_{nm}$ s não.

A forma reduzida de  $\xi_{20}$  pode ser dada por:

$$\begin{aligned} \xi_{20} = & \left( \frac{p^2 q^2}{p^2 q^2 - (p - q)^2} \right) \left\{ \frac{(p^2 - p \cdot q)}{2p^2 q^2} [(-)Z_1(\lambda_2^2, \lambda_3^2, (p \cdot q)^2; \lambda^2)] \right. \\ & - \frac{(p \cdot q)}{2p^2 q^2} [Z_1(\lambda_1^2, \lambda_3^2, q^2; \lambda^2)] + \frac{1}{2q^2} [\eta_{00}] \\ & \left. + \left[ \frac{(q^2 + \lambda_1^2 - \lambda_3^2)}{2q^2} - \frac{(p \cdot q)(q^2 + \lambda_1^2 - \lambda_2^2)}{2p^2 q^2} \right] \xi_{10} \right\}. \end{aligned} \quad (4.65)$$

Por sua vez função  $\xi_{11}$  pode ser escrita na forma:

$$\begin{aligned} \xi_{11} = & \left( \frac{p^2 q^2}{p^2 q^2 - (p \cdot q)^2} \right) \left\{ \frac{(q^2 - p \cdot q)}{2p^2 q^2} [(-)Z_1(\lambda_2^2, \lambda_3^2, (p - q)^2; \lambda^2)] \right. \\ & + \frac{1}{2p^2} [Z_1(\lambda_1^2, \lambda_3^2, q^2; \lambda^2)] - \frac{p \cdot q}{2q^2 p^2} [\eta_{00}] \\ & \left. + \left[ \frac{(p^2 + \lambda_1^2 - \lambda_2^2)}{2p^2} - \frac{(p \cdot q)(q^2 + \lambda_1^2 - \lambda_3^2)}{2p^2 q^2} \right] \xi_{10} \right\}. \end{aligned} \quad (4.66)$$

A expressão correspondente à função  $\xi_{02}$  e outra forma alternativa para  $\xi_{11}$  podem ser obtidas pelas trocas indicadas na Eq.(4.63).

Prosseguindo, podemos explicitar as reduções para os casos  $n + m = 3$ . Para tal é interessante primeiro estabelecer a decomposição para as funções  $\eta'_{nm}$ s correspondentes a  $n + m = 1$ . Assim teremos:

$$\begin{aligned} \eta_{10} = & \frac{1}{3} [Z_1(\lambda_2^2, \lambda_3^2, (p - q)^2; \lambda^2)] - \frac{2}{3} \left[ \frac{1}{6} + \lambda_1^2 \xi_{10} \right] \\ & + \frac{(q^2 + \lambda_1^2 - \lambda_2^2)}{3} \xi_{20} + \frac{(p^2 + \lambda_1^2 - \lambda_2^2)}{3} \xi_{11} \end{aligned} \quad (4.67)$$

e também:

$$\begin{aligned} \eta_{01} = & \frac{1}{3} [Z_0(\lambda_2^2, \lambda_3^2, (p - q)^2; \lambda^2) - Z_1(\lambda_2^2, \lambda_3^2, (p - q)^2; \lambda^2)] - \frac{2}{3} \left[ \frac{1}{6} + \lambda_1^2 \xi_{01} \right] \\ & + \frac{(p^2 + \lambda_1^2 - \lambda_2^2)}{3} \xi_{02} + \frac{(q^2 + \lambda_1^2 - \lambda_3^2)}{3} \xi_{11}. \end{aligned} \quad (4.68)$$

De posse destas subestruturas fica fácil escrever  $\xi_{30}$ :

$$\begin{aligned} \xi_{30} = & \left( \frac{p^2 q^2}{p^2 q^2 - (p \cdot q)^2} \right) \left\{ \frac{(q^2 - p \cdot q)}{2p^2 q^2} [(-)Z_2(\lambda_2^2, \lambda_3^2, (p - q)^2; \lambda^2)] \right. \\ & + \frac{(p \cdot q)}{2p^2 q^2} [-Z_2(\lambda_1^2, \lambda_3^2, q^2; \lambda^2)] \\ & + \frac{1}{q^2} [\eta_{10}] \\ & \left. + \left[ \frac{(q^2 + \lambda_1^2 - \lambda_3^2)}{2q^2} - \frac{(p \cdot q)(p^2 + \lambda_1^2 - \lambda_2^2)}{2p^2 q^2} \right] \xi_{20} \right\} \end{aligned} \quad (4.69)$$

e também para  $\xi_{21}$ :

$$\begin{aligned} \xi_{21} = & \left( \frac{p^2 q^2}{p^2 q^2 - (p \cdot q)^2} \right) \left\{ \frac{(q^2 - p \cdot q)}{2p^2 q^2} [(-)Z_2(\lambda_2^2, \lambda_3^2, (p - q)^2; \lambda^2)] \right. \\ & + \frac{1}{2p^2} [Z_2(\lambda_1^2, \lambda_3^2, q^2; \lambda^2)] \\ & - \frac{(p \cdot q)}{p^2 q^2} [\eta_{10}] \\ & \left. + \left[ \frac{(p^2 + \lambda_1^2 - \lambda_2^2)}{2p^2} - \frac{(p \cdot q)(q^2 + \lambda_1^2 - \lambda_3^2)}{2p^2 q^2} \right] \xi_{20} \right\}. \end{aligned} \quad (4.70)$$

Destas decorrem aquelas  $\xi_{12}$  e  $\xi_{03}$  pelas transformações indicadas em (4.63).

É interessante perceber que as funções  $\xi'_{nm}$ s para  $n + m$  fixo, são escritas em termos daquelas  $n + m - 1$ . Estas, por sua vez, em termos daquelas  $n + m - 2$  e assim por diante, de tal forma que, ao final, todas, na prática, são combinações de funções  $Z'_k$ s (para  $k$  positivo) mais a função  $\xi_{00}$ .

Ao calcularmos as amplitudes que consideramos no capítulo 3 encontraremos naturalmente situações que podem ser vistas como casos particulares das funções apresentadas acima. A primeira delas é aquela onde teremos em uma função de três pontos a presença do propagador do fóton e do elétron. Teremos que considerar as funções  $\xi_{nm}(\lambda_1^2, p^2, \lambda_2^2, q^2, \lambda_3^2)$  e  $\eta_{nm}(\lambda_1^2, p^2, \lambda_2^2, q^2, \lambda_3^2)$  para  $\lambda_1^2 = 0$  e  $\lambda_2^2 = \lambda_3^2 = m^2$ . Do mesmo modo quando calcularmos funções de três pontos purmente fermiônicas teremos que considerar as funções  $\xi_{nm}(\lambda_1^2, p^2, \lambda_2^2, q^2, \lambda_3^2)$  e  $\eta_{nm}(\lambda_1^2, p^2, \lambda_2^2, q^2, \lambda_3^2)$  para  $\lambda_1^2 = \lambda_2^2 = \lambda_3^2 = m^2$ . Para tal basta tomar nas funções apresentadas acima estas situações de interesse. As funções correspondentes a valores nulos para  $n$  ou  $m$  ou ambos terão problemas neste limite. Teremos situações semelhante àquela encontrada para a função  $Y_0$  o que será importante para o estudo das divergências infravermelhas.

Uma das situações de interesse físico associadas às funções  $\xi'_{nm}$ s é aquela correspondente ao comportamento de baixa energia ou seja  $p^2$  e  $q^2$  pequenos. Estas expansões podem ser feitas com auxílio daquelas correspondentes às funções  $Z'_k$ s desenvolvidas na seção 2 deste capítulo. Como tal teremos, por exemplo,

$$\begin{cases} m^2 \xi_{00}(m^2, 0, m^2, 0, m^2; m^2) = -\frac{1}{2} \\ m^2 \xi_{10}(m^2, 0, m^2, 0, m^2; m^2) = -\frac{1}{6}. \end{cases} \quad (4.71)$$

## 4.5 As Funções $\sigma_{nm}$

Ao considerarmos a função de Green associada à correção de vértice, definida no capítulo 3, no termo dependente do parâmetro de “gauge” encontraremos integrais de Feynman para as quais será conveniente escrever a solução correspondente em termos de um conjunto específico de funções. Nós as definimos como

$$\sigma_{nm}(\lambda_1^2, p^2, \lambda_2^2, q^2, \lambda_3^2) = \int_0^1 dz \int_0^{1-z} \frac{dy z^n y^m (1-y-z)}{[Q(y, z)]^2}, \quad (4.72)$$

onde  $Q(y, z)$  foi definido na Eq.(4.59). Estas funções estão relacionadas às funções  $\xi'_{nm}$ s de modo simples

$$\sigma_{nm}(\lambda_1^2, p^2, \lambda_2^2, q^2, \lambda_3^2) = \frac{\partial}{\partial \lambda_1^2} [\xi_{nm}(\lambda_1^2, p^2, \lambda_2^2, q^2, \lambda_3^2)]. \quad (4.73)$$

As funções  $\sigma'_{nm}$ s podem ser sempre reduzidas a  $\sigma_{00}$  mais combinações de funções  $Y'_k$ s e  $\xi_{00}$ . Podemos ver isto facilmente tomando a derivada de ambos os lados, por exemplo, da Eq.(4.61):

$$\begin{aligned} \sigma_{10} = & \left( \frac{p^2 q^2}{p^2 q^2 - (p \cdot q)^2} \right) \left\{ \frac{(p^2 - p \cdot q)}{2p^2 q^2} \left[ -\frac{\partial Z_0(\lambda_2^2, \lambda_3^2, (p-q)^2; \lambda^2)}{\partial \lambda_1^2} \right] \right. \\ & + \frac{1}{2q^2} \left[ \frac{\partial Z_0(\lambda_1^2, \lambda_3^2, p^2; \lambda^2)}{\partial \lambda_1^2} \right] \\ & - \frac{(p \cdot q)}{2p^2 q^2} \left[ \frac{\partial Z_0(\lambda_1^2, \lambda_2^2, q^2; \lambda^2)}{\partial \lambda_1^2} \right] \\ & + \left[ \frac{p^2 - (p \cdot q)}{2p^2 q^2} \right] \xi_{00} \\ & \left. + \left[ \frac{(q^2 + \lambda_1^2 - \lambda_3^2)}{2q^2} - \frac{(p \cdot q)(p^2 + \lambda_1^2 - \lambda_2^2)}{2p^2 q^2} \right] \frac{\partial \xi_{00}}{\partial \lambda_1^2} \right\}. \quad (4.74) \end{aligned}$$



Dada a relação (4.29) e a definição (4.73), ficamos com

$$\begin{aligned} \sigma_{10} = & \left( \frac{p^2 q^2}{p^2 q^2 - (p \cdot q)^2} \right) \left\{ \frac{1}{2q^2} \left[ \frac{Y_0(\lambda_1^2, \lambda_2^2, p^2; \lambda^2)}{\lambda^2} \right] \right. \\ & - \frac{(p \cdot q)}{2p^2 q^2} \left[ \frac{Y_0(\lambda_1^2, \lambda_3^2, q^2; \lambda^2)}{\lambda^2} \right] \\ & + \left[ \frac{p^2 - (p \cdot q)}{2p^2 q^2} \right] \xi_{00} \\ & \left. + \left[ \frac{(q^2 + \lambda_1^2 - \lambda_3^2)}{2q^2} - \frac{(p \cdot q)(p^2 + \lambda_1^2 - \lambda_2^2)}{2p^2 q^2} \right] \sigma_{00} \right\}. \end{aligned} \quad (4.75)$$

Assim teremos também

$$\begin{aligned} \sigma_{01} = & \left( \frac{p^2 q^2}{p^2 q^2 - (p \cdot q)^2} \right) \left\{ \frac{1}{2p^2} \left[ \frac{Y_0(\lambda_1^2, \lambda_3^2, q^2; \lambda^2)}{\lambda^2} \right] \right. \\ & - \frac{(p \cdot q)}{2p^2 q^2} \left[ \frac{Y_0(\lambda_1^2, \lambda_2^2, p^2; \lambda^2)}{\lambda^2} \right] \\ & + \left[ \frac{q^2 - (p \cdot q)}{2p^2 q^2} \right] \xi_{00} \\ & \left. + \left[ \frac{(p^2 + \lambda_1^2 - \lambda_2^2)}{2p^2} - \frac{(p \cdot q)(q^2 + \lambda_1^2 - \lambda_3^2)}{2p^2 q^2} \right] \sigma_{00} \right\}. \end{aligned} \quad (4.76)$$

Para desenvolvermos os outros elementos do conjunto, correspondentes a  $n + m = 2$ , teremos que considerar a derivada das funções  $\eta'_{nm}$ s, definidas em (4.60),

$$\frac{\partial [\eta_{nm}(\lambda_1^2, p^2, \lambda_2^2, q^2, \lambda_3^2; \lambda^2)]}{\partial \lambda_1^2} = - \int_0^1 dz \int_0^{1-z} dy \frac{z^n y^m (1-y-z)}{Q(y, z)} \quad (4.77)$$

ou seja,

$$\frac{\partial [\eta_{nm}(\lambda_1^2, p^2, \lambda_2^2, q^2, \lambda_3^2; \lambda^2)]}{\partial \lambda_1^2} = -\xi_{nm} + \xi_{n+1m} + \xi_{nm+1}. \quad (4.78)$$

Assim

$$\frac{\partial [\eta_{00}]}{\partial \lambda_1^2} = [-\xi_{00} + \xi_{10} + \xi_{01}]. \quad (4.79)$$

Agora podemos determinar

$$\begin{aligned} \sigma_{20} = & \left( \frac{p^2 q^2}{p^2 q^2 - (p \cdot q)^2} \right) \left\{ - \frac{(p \cdot q)}{2p^2 q^2} \left[ \frac{Y_1(\lambda_1^2, \lambda_3^2, q^2; \lambda^2)}{\lambda^2} \right] \right. \\ & - \frac{1}{2q^2} [-\xi_{00} + \xi_{10} + \xi_{01}] \\ & + \left[ \frac{p^2 - (p \cdot q)}{2p^2 q^2} \right] \xi_{10} \\ & \left. + \left[ \frac{(q^2 + \lambda_1^2 - \lambda_3^2)}{2q^2} - \frac{(p \cdot q)(q^2 + \lambda_1^2 - \lambda_2^2)}{2p^2 q^2} \right] \sigma_{10} \right\}. \end{aligned} \quad (4.80)$$

Por sua vez:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} = & \left( \frac{p^2 q^2}{p^2 q^2 - (p \cdot q)^2} \right) \left\{ \frac{1}{2p^2} \left[ \frac{Y_1(\lambda_1^2, \lambda_3^2, q^2; \lambda^2)}{\lambda^2} \right] \right. \\ & - \frac{p \cdot q}{2q^2 p^2} [-\xi_{00} + \xi_{10} + \xi_{01}] \\ & + \left[ \frac{q^2 - (p \cdot q)}{2p^2 q^2} \right] \xi_{10} \\ & \left. + \left[ \frac{(p^2 + \lambda_1^2 - \lambda_2^2)}{2p^2} - \frac{(p \cdot q)(q^2 + \lambda_1^2 - \lambda_3^2)}{2p^2 q^2} \right] \sigma_{10} \right\}. \end{aligned} \quad (4.81)$$

Agora, desenvolvendo

$$\frac{\partial[\eta_{10}]}{\partial\lambda_1^2} = [-\xi_{10} + \xi_{11} + \xi_{20}] \quad (4.82)$$

e

$$\frac{\partial[\eta_{01}]}{\partial\lambda_1^2} = [-\xi_{01} + \xi_{02} + \xi_{11}], \quad (4.83)$$

podemos escrever as componentes correspondentes a  $n + m = 3$ . Teremos

$$\begin{aligned} \sigma_{30} = & \left( \frac{p^2 q^2}{p^2 q^2 - (p \cdot q)^2} \right) \left\{ \frac{(p \cdot q)}{2p^2 q^2} \left[ -\frac{Y_2(\lambda_1^2, \lambda_3^2, q^2; \lambda^2)}{\lambda^2} \right] \right. \\ & + \frac{1}{q^2} [-\xi_{10} + \xi_{11} + \xi_{20}] \\ & + \left[ \frac{p^2 - (p \cdot q)}{2p^2 q^2} \right] \xi_{20} \\ & \left. + \left[ \frac{(q^2 + \lambda_1^2 - \lambda_3^2)}{2q^2} - \frac{(p \cdot q)(p^2 + \lambda_1^2 - \lambda_2^2)}{2p^2 q^2} \right] \sigma_{20} \right\} \quad (4.84) \end{aligned}$$

e também

$$\begin{aligned} \sigma_{21} = & \left( \frac{p^2 q^2}{p^2 q^2 - (p \cdot q)^2} \right) \left\{ \frac{1}{2p^2} \left[ \frac{Y_2(\lambda_1^2, \lambda_3^2, q^2; \lambda^2)}{\lambda^2} \right] \right. \\ & - \frac{(p \cdot q)}{p^2 q^2} [-\xi_{01} + \xi_{02} + \xi_{11}] \\ & + \left[ \frac{q^2 - (p \cdot q)}{2p^2 q^2} \right] \xi_{20} \\ & \left. + \left[ \frac{(p^2 + \lambda_1^2 - \lambda_2^2)}{2p^2} - \frac{(p \cdot q)(q^2 + \lambda_1^2 - \lambda_3^2)}{2p^2 q^2} \right] \sigma_{20} \right\}. \quad (4.85) \end{aligned}$$

As funções  $\sigma_{02}$ ,  $\sigma_{12}$ ,  $\sigma_{03}$  e uma forma alternativa para  $\sigma_{11}$ , podem ser obtidas daquelas acima pela troca indicada em (4.63), do mesmo modo que foi feito para as funções  $\xi'_{nm}$ s. É importante notar que as funções  $\sigma_{nm}$  possuem problemas sérios no limite infravermelho ( $\lambda_1^2 \rightarrow 0$ ) que se manifestarão no termo dependente de gauge da correção de vértice.

## 4.6 As Funções $\zeta_{nml}$ , $\xi_{nml}$ e $\eta_{nml}$

Do mesmo modo que o cálculo explícito de funções de três pontos tem nas funções  $\xi_{nm}$  e  $\eta_{nm}$  uma sistematização útil, nós podemos definir um conjunto análogo, as funções  $\xi'_{nml}$ s, para o caso de cálculos envolvendo funções de quatro pontos. Estas para um valor de  $n + m + l$  fixo, poderão ser escritas primeiramente em termos de funções  $\xi'_{nml}$ s para  $n + m + l - 1$ , funções  $\xi_{nm}$  e  $Z_k$ . Ao final por sucessivas “reduções” poderão restar apenas funções básicas  $Z'_k$ s. Deste modo as principais propriedades físicas das amplitudes associadas a funções de quatro pontos poderão ser facilmente visualizadas. Entre estas, suas partes imaginárias, pontos indefinidos, limites de baixa energia, etc... A sistematização oferecida por esta

linguagem facilita enormemente os cálculos inclusive computacionais. Definimos

$$\zeta_{nml}(p, q, r; m^2) = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} dz \frac{x^n y^m z^l}{[Q(x, y, z)]^2}, \quad (4.86)$$

$$\xi_{nml}(p, q, r; m^2) = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} dz \frac{x^n y^m z^l}{Q(x, y, z)}, \quad (4.87)$$

$$\eta_{nml}(p, q, r; m^2) = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} dz x^n y^m z^l \ln \left( \frac{Q(x, y, z)}{-m^2} \right), \quad (4.88)$$

onde

$$\begin{aligned} Q(x, y, z) &= l^2 x(1-x) + (\lambda_1^2 - \lambda_4^2)x \\ &\quad + p^2 y(1-y) + (\lambda_1^2 - \lambda_2^2)y \\ &\quad + q^2 z(1-z) + (\lambda_1^2 - \lambda_3^2)z \\ &\quad - 2p \cdot lxy - 2p \cdot qyz - 2q \cdot lxz - \lambda_1^2. \end{aligned} \quad (4.89)$$

Aqui os  $\lambda_i^2$  são as massas carregadas pelos propagadores internos ao “loop” e  $l, p$  e  $q$  são momentos externos onde

$$\begin{aligned} Q(x, y, z) &= p^2 x(1-x) + q^2 y(1-y) + r^2 z(1-z) \\ &\quad - 2(p \cdot q)xy - 2(p \cdot r)xz - 2(q \cdot r)yz - m^2. \end{aligned} \quad (4.90)$$

Todas as funções do conjunto  $\zeta_{nml}$  podem ser, no final, reduzidas a funções mais simples  $\zeta_{000}$  e  $\xi_{00}$ . As funções  $\xi_{nml}$ s, por outro lado, podem ser reduzidas a  $\xi_{000}$  e  $\eta_{00}$ . Como exemplo de tais reduções, vamos considerar aquelas correspondentes a  $n + m + l = 1$ . Elas podem ser escritas como

i) Funções  $\zeta_{nml}$ :

$$\begin{aligned} \zeta_{100} &= A(p, q, r) \left\{ - \left[ q^2 r^2 - (q \cdot r)^2 \right] [\xi_{00}(q, r; m) - \xi_{00}(s, u; m)] \right. \\ &\quad + [(p \cdot r)(q \cdot r) - r^2(p \cdot q)] [\xi_{00}(s, -t; m) - \xi_{00}(p, r; m)] \\ &\quad + [(p \cdot q)(q \cdot r) - q^2(p \cdot r)] [\xi_{00}(u, t; m) - \xi_{00}(p, q; m)] \\ &\quad + \left\{ p^2 \left[ q^2 r^2 - (q \cdot r)^2 \right] \right. \\ &\quad \quad + q^2 [(p \cdot r)(q \cdot r) - r^2(p \cdot q)] \\ &\quad \quad \left. \left. + r^2 [(p \cdot q)(q \cdot r) - q^2(p \cdot r)] \right\} \zeta_{000} \right\}, \end{aligned} \quad (4.91)$$

$$\begin{aligned} \zeta_{010} &= A(p, q, r) \left\{ - [(p \cdot r)(q \cdot r) - r^2(p \cdot q)] [\xi_{00}(q, r; m) - \xi_{00}(s, u; m)] \right. \\ &\quad + [p^2 r^2 - (p \cdot r)^2] [\xi_{00}(s, -t; m) - \xi_{00}(p, r; m)] \\ &\quad + [(p \cdot q)(p \cdot r) - p^2(q \cdot r)] [\xi_{00}(u, t; m) - \xi_{00}(p, q; m)] \\ &\quad + \left\{ p^2 [(p \cdot r)(q \cdot r) - r^2(p \cdot q)] \right. \\ &\quad \quad + q^2 [p^2 r^2 - (p \cdot r)^2] \\ &\quad \quad \left. \left. + r^2 [(p \cdot q)(p \cdot r) - p^2(q \cdot r)] \right\} \zeta_{000} \right\} \end{aligned} \quad (4.92)$$

e

$$\begin{aligned}
\zeta_{001} = & A(p, q, r) \left\{ - [(p \cdot q)(q \cdot r) - q^2(p \cdot r)] [\xi_{00}(q, r; m) - \xi_{00}(s, u; m)] \right. \\
& + [(p \cdot q)(p \cdot r) - p^2(q \cdot r)] [\xi_{00}(s, -t; m) - \xi_{00}(p, r; m)] \\
& + [p^2q^2 - (p \cdot q)^2] [\xi_{00}(u, t; m) - \xi_{00}(p, q; m)] \\
& + \left\{ p^2 [(p \cdot q)(q \cdot r) - q^2(p \cdot r)] \right. \\
& \quad + q^2 [(p \cdot q)(p \cdot r) - p^2(q \cdot r)] \\
& \quad \left. + r^2 [p^2q^2 - (p \cdot q)^2] \right\} \zeta_{000} \left. \right\}, \tag{4.93}
\end{aligned}$$

onde definimos

$$A(p, q, r) = \frac{1}{2} \frac{p^2}{[p^2r^2 - (p \cdot r)^2] [p^2q^2 - (p \cdot q)^2] - [(p \cdot q)(p \cdot r) - p^2(q \cdot r)]^2}. \tag{4.94}$$

ii) Funções  $\xi_{nml}$ :

$$\begin{aligned}
\xi_{100} = & A(p, q, r) \left\{ - [q^2r^2 - (q \cdot r)^2] [\eta_{00}(s, u; m) - \eta_{00}(q, r; m)] \right. \\
& + [(p \cdot r)(q \cdot r) - r^2(p \cdot q)] [\eta_{00}(p, r; m) - \eta_{00}(s, -t; m)] \\
& + [(p \cdot q)(q \cdot r) - q^2(p \cdot r)] [\eta_{00}(p, q; m) - \eta_{00}(u, t; m)] \\
& + \left\{ p^2 [q^2r^2 - (q \cdot r)^2] \right. \\
& \quad + q^2 [(p \cdot r)(q \cdot r) - r^2(p \cdot q)] \\
& \quad \left. + r^2 [(p \cdot q)(q \cdot r) - q^2(p \cdot r)] \right\} (\xi_{000}) \left. \right\}, \tag{4.95}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\xi_{010} = & A(p, q, r) \left\{ - [(p \cdot r)(q \cdot r) - r^2(p \cdot q)] [\eta_{00}(s, u; m) - \eta_{00}(q, r; m)] \right. \\
& + [p^2r^2 - (p \cdot r)^2] [\eta_{00}(p, r; m) - \eta_{00}(s, -t; m)] \\
& + [(p \cdot q)(p \cdot r) - p^2(q \cdot r)] [\eta_{00}(p, q; m) - \eta_{00}(u, t; m)] \\
& + \left\{ p^2 [(p \cdot r)(q \cdot r) - r^2(p \cdot q)] \right. \\
& \quad + q^2 [p^2r^2 - (p \cdot r)^2] \\
& \quad \left. + r^2 [(p \cdot q)(p \cdot r) - p^2(q \cdot r)] \right\} (\xi_{000}) \left. \right\} \tag{4.96}
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\xi_{001} = & A(p, q, r) \left\{ - [(p \cdot q)(q \cdot r) - q^2(p \cdot r)] [\eta_{00}(s, u; m) - \eta_{00}(q, r; m)] \right. \\
& + [(p \cdot q)(p \cdot r) - p^2(q \cdot r)] [\eta_{00}(p, r; m) - \eta_{00}(s, -t; m)] \\
& + [p^2q^2 - (p \cdot q)^2] [\eta_{00}(p, q; m) - \eta_{00}(u, t; m)] \\
& + \left\{ p^2 [(p \cdot q)(q \cdot r) - q^2(p \cdot r)] \right. \\
& \quad + q^2 [(p \cdot q)(p \cdot r) - p^2(q \cdot r)] \\
& \quad \left. + r^2 [p^2q^2 - (p \cdot q)^2] \right\} (\xi_{000}) \left. \right\}. \tag{4.97}
\end{aligned}$$

iii) Funções  $\eta_{nml}$ :

$$\begin{aligned} \eta_{000} = & \frac{1}{3} \{ [\eta_{10}(s, -t; m) + \eta_{01}(s, -t; m) + \eta_{10}(s, u; m)] \\ & - 2 \left[ \frac{1}{6} + m^2 (\xi_{000}) \right] \\ & + p^2 (\xi_{100}) + q^2 (\xi_{010}) + r^2 (\xi_{001}) \}, \end{aligned} \quad (4.98)$$

$$\begin{aligned} \eta_{100} = & \frac{1}{4} [-\eta_{20}(u, t; m) - \eta_{11}(s, -t; m) - \eta_{11}(u, t; m) \\ & + \eta_{10}(u, t; m) + \eta_{10}(s, -t; m)] \\ & - \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{24} + m^2 (\xi_{100}) \right] \\ & + \frac{1}{4} p^2 (\xi_{200}) + \frac{1}{4} q^2 (\xi_{110}) + \frac{1}{4} r^2 (\xi_{101}), \end{aligned} \quad (4.99)$$

$$\begin{aligned} \eta_{010} = & \frac{1}{4} [-\eta_{02}(u, t; m) - \eta_{11}(u, t; m) - \eta_{11}(s, u; m) \\ & + \eta_{01}(u, t; m) + \eta_{10}(s, u; m)] \\ & - \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{24} + m^2 (\xi_{010}) \right] \\ & + \frac{1}{4} p^2 (\xi_{110}) + \frac{1}{4} q^2 (\xi_{020}) + \frac{1}{4} r^2 (\xi_{011}) \end{aligned} \quad (4.100)$$

e

$$\begin{aligned}
\eta_{001} = & \frac{1}{4} [-\eta_{02}(s, u; m) - \eta_{11}(s, u; m) - \eta_{11}(s, -t; m) \\
& + \eta_{01}(s, u; m) + \eta_{01}(s, -t; m)] \\
& - \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{24} + m^2 (\xi_{001}) \right] \\
& + \frac{1}{4} p^2 (\xi_{101}) + \frac{1}{4} q^2 (\xi_{011}) + \frac{1}{4} r^2 (\xi_{002}).
\end{aligned} \tag{4.101}$$

onde

$$p = k_2 - k_1 \tag{4.102}$$

$$q = k_3 - k_1 \tag{4.103}$$

$$r = k_4 - k_1 \tag{4.104}$$

e

$$s = p - q = k_2 - k_3 \tag{4.105}$$

$$u = p - r = k_2 - k_4 \tag{4.106}$$

$$t = q - r = k_3 - k_4. \tag{4.107}$$

A sistematização obtida através das funções  $\xi'_{nml}$  é suficiente para escrever qualquer amplitude associada a funções de quatro pontos.

Depois dos desenvolvimentos feitos neste capítulo estamos prontos para o tratamento das integrais de Feynman identificadas no capítulo 3.

# Capítulo 5

## Divergências Ultravioletas

### 5.1 Introdução

No capítulo 3 escrevemos as amplitudes perturbativas, ao nível um “loop” para a EDQ em termos de integrais de Feynman. Claramente, do ponto de vista matemático podemos separar estas integrais em três classes distintas. Numa primeira classe podemos colocar aquelas finitas, para as quais não há necessidade da adoção de procedimentos de regularização ou equivalente, isto é, podem ser diretamente calculadas por métodos usuais de integração. Em uma segunda classe podemos colocar aquelas integrais que possuem apenas divergências vindas da região de grandes valores para os momentos, ou seja, divergências ultravioletas, classe que conterà as integrais associadas a funções de Green puramente fermiônicas. Por fim, na terceira das classes estarão aquelas integrais de Feynman onde é possível a presença de divergências em baixos valores para os momentos de integração, isto é divergências infravermelhas, simultaneamente àquelas vindas da região de grandes valores para o momento do “loop”. Estas últimas integrais estão associadas à presença na teoria de um bóson de massa nula, o fóton na EDQ. As dificuldades para o tratamento simultâneo dos dois tipos de divergências em métodos tradicionais são bem conhecidas. Tendo isto em mente separaremos o tratamento das integrais que possuem apenas divergências ultravioletas daquelas onde aparece o propagador do fóton. As primeiras trataremos neste capítulo e as outras no próximo.

As integrais de Feynman que estão livres da presença do propagador do fóton são aquelas que aparecem em funções de Green puramente fermiônicas, ainda que estas possam aparecer em outras em virtude de reorganizações e cancelamentos. Uma rápida observação das amplitudes puramente fermiônicas, introduzidas no capítulo anterior, nos permite identificar um conjunto de integrais as quais definiremos do seguinte modo:

a) Integrais de Feynman associadas a funções de um ponto:

$$(I_1; I_1^\mu) = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{(1; k^\mu)}{E_1}, \quad (5.1)$$

b) Integrais de Feynman associadas a funções de dois pontos:

$$(I_2; I_2^\mu; I_2^{\mu\nu}) = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{(1; k^\mu; k^\mu k^\nu)}{E_{12}}, \quad (5.2)$$

c) Integrais de Feynman associadas a funções de três pontos:

$$\left( I_3; I_3^\mu; I_3^{\mu\nu}; I_3^{\mu\nu\lambda} \right) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{(1; k^\mu; k^\mu k^\nu; k^\mu k^\nu k^\lambda)}{E_{123}}, \quad (5.3)$$

e

d) Integrais de Feynman associadas a funções de quatro pontos:

$$\left( I_4; I_4^\mu; I_4^{\mu\nu}; I_4^{\mu\nu\lambda}; I_4^{\mu\nu\alpha\beta} \right) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{(1; k^\mu; k^\mu k^\nu; k^\mu k^\nu k^\lambda; k^\mu k^\nu k^\alpha k^\beta)}{E_{1234}}. \quad (5.4)$$

O conjunto acima definido de integrais é suficiente para a determinação das funções de Green puramente fermiônicas da EDQ. O grau de divergência varia desde o cúbico até o logarítmico, das estruturas de um ponto àquelas de quatro pontos, respectivamente. Algumas das estruturas obtidas são finitas. A fim de tratar as integrais divergentes identificadas consideraremos a seguir a estratégia a ser utilizada para tal.

## 5.2 Estratégia para manipulações e cálculos de integrais divergentes

A fim de atribuir algum significado para as integrais de Feynman divergentes listadas acima, o método usual é a adoção de uma técnica de regularização. Tal procedimento [13] implica em algum tipo de modificação na integral ou no integrando de modo a tornar a integral definida e permitir assim as manipulações e cálculos necessários. Após isto, algum tipo de limite, que denominamos limite de conexão, é tomado sobre o resultado de modo a separar as partes que divergem neste limite daquelas que são finitas. Ao invés de adotar um procedimento destes, nós vamos seguir um procedimento alternativo. A fim de justificar as manipulações e cálculos necessários nós assumiremos a presença de uma distribuição regularizadora genérica apenas de modo implícito. Este passo representamos esquematicamente por

$$\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} f(k) \rightarrow \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} f(k) \left\{ \lim_{\Lambda_i^2 \rightarrow \infty} G_{\Lambda_i}(k, \Lambda_i^2) \right\} = \int_{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} f(k). \quad (5.5)$$

Na expressão acima, os  $\Lambda_i$ 's representam o conjunto de parâmetros que caracterizam a distribuição genérica  $G(\Lambda_i^2, k)$ . Esta, além de garantir o caráter finito de cada integral modificada deve possuir duas outras propriedades bastante gerais. Ela deve ser par no momento de integração  $k$ ;

$$G(\Lambda_i^2, k) = G(\Lambda_i^2, k^2), \quad (5.6)$$

a fim de garantir a invariância de Lorentz, e deve possuir um limite de conexão bem definido, i.e.,

$$\lim_{\Lambda_i^2 \rightarrow \infty} G_{\Lambda_i}(k^2, \Lambda_i^2) = 1, \quad (5.7)$$

o que garante, em particular, que uma integral finita não é modificada. É importante notar que estas duas exigências são de caráter muito geral e estão de acordo com quaisquer regularizações razoáveis. Depois destas suposições torna-se possível manipulações ao nível do integrando, através de identidades,



a fim de que a integral possa ser colocada numa forma mais conveniente. Para os nossos propósitos isto significa utilizar identidades a fim de gerar expressões matemáticas onde a dependência nos momentos internos esteja totalmente colocada em integrais finitas. Tendo em vista que em amplitudes físicas do cálculo perturbativo nós sempre encontraremos propagadores, e que estes carregam a dependência nos momentos internos, uma identidade útil para tais propósitos é a seguinte

$$\frac{1}{[(k+k_i)^2-m^2]} = \sum_{j=0}^N \frac{(-1)^j (k_i^2 + 2k_i \cdot k)^j}{(k^2 - m^2)^{j+1}} + \frac{(-1)^N (k_i^2 + 2k_i \cdot k)^N}{(k^2 - m^2)^N [(k+k_i)^2 - m^2]}, \quad (5.8)$$

aqui  $k_i$  é (em princípio) um momento arbitrário utilizado para rotular uma linha interna. A expressão acima pode ser vista como uma representação alternativa para os propagadores. A identidade vale evidentemente para qualquer  $N$  mas o mais adequado é aquele menor possível capaz de garantir que o último termo da expressão, onde se encontra a dependência nos momentos internos, esteja numa integral finita. Quanto aos termos divergentes eles podem ser organizados em combinações dos seguintes objetos

$$\begin{aligned} \bullet \square_{\alpha\beta\mu\nu}(m^2) &= \int_{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{24k_{\mu}k_{\nu}k_{\alpha}k_{\beta}}{(k^2 - m^2)^4} - g_{\alpha\beta} \int_{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{4k_{\mu}k_{\nu}}{(k^2 - m^2)^3} \\ &\quad - g_{\alpha\nu} \int_{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{4k_{\beta}k_{\mu}}{(k^2 - m^2)^3} - g_{\alpha\mu} \int_{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{4k_{\beta}k_{\nu}}{(k^2 - m^2)^3}, \end{aligned} \quad (5.9)$$

$$\bullet \Delta_{\mu\nu}(m^2) = \int_{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{4k_{\mu}k_{\nu}}{(k^2 - m^2)^3} - \int_{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{g_{\mu\nu}}{(k^2 - m^2)^2}, \quad (5.10)$$

$$\bullet \nabla_{\mu\nu}(m^2) = \int_{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{2k_{\nu}k_{\mu}}{(k^2 - m^2)^2} - \int_{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{g_{\mu\nu}}{(k^2 - m^2)}, \quad (5.11)$$

$$\bullet I_{log}(m^2) = \int_{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - m^2)^2}, \quad (5.12)$$

$$\bullet I_{quad}(m^2) = \int_{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - m^2)}. \quad (5.13)$$

Um aspecto importante deste procedimento é que, devido ao fato de todos os passos intermediários serem válidos em regularizações razoáveis, os resultados produzidos até a reorganização proposta acima não estão comprometidos com suposições específicas e podem ser convertidos para qualquer regularização particular. Tudo que é necessário é o cálculo dos objetos acima definidos no contexto da regularização escolhida. Outro aspecto importante refere-se ao fato de terem sido utilizadas escolhas arbitrárias para os momentos das linhas internas e nenhum “shift” ter sido efetuado em passos intermediários o que permite também um contato dos resultados produzidos pela estratégia descrita acima com aqueles resultados produzidos pela determinação de termos de superfície para a avaliação de possíveis ambigüidades relacionadas às arbitrariedades envolvidas nas escolhas para os rótulos dos momentos das linhas internas. O ponto mais importante, entretanto, refere-se ao fato de integrais divergentes não serem de fato calculadas em momento algum. Elas são isoladas das partes finitas e nenhuma modificação adicional é promovida. Podemos dizer que este procedimento preserva para consideração posterior, todos os tipos de arbitrariedades inerentes a este tipo de cálculo. Voltaremos a estes aspectos no futuro. Vamos então aplicar o procedimento para o tratamento das integrais de Feynman fermiônicas definidas nas equações (5.1)-(5.4).

### 5.2.1 Integral $I_1^\mu$

Consideremos inicialmente a integral com maior grau de divergência, definida em (5.1) como

$$I_1^\mu = \int_\Lambda \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k^\mu}{E_1}. \quad (5.14)$$

Tomando  $N = 3$  na expressão (5.8) podemos reescrever o integrando de tal modo que

$$\begin{aligned} I_1^\mu = & - \int_\Lambda \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{2k^\mu (k_1 \cdot k)}{(k^2 - m^2)^2} \\ & + k_1^\nu k_1^\alpha k_1^\beta \left\{ \int_\Lambda \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{4g_{\alpha\beta} k_\nu k^\mu}{(k^2 - m^2)^3} - \int_\Lambda \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{8k_\alpha k_\beta k_\nu k^\mu}{(k^2 - m^2)^4} \right\} \\ & - \left\{ \int_\Lambda \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{6k_1^4 (k_1 \cdot k) k^\mu}{(k^2 - m^2)^4} - \int_\Lambda \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{(k_1^2 + 2k_1 \cdot k)^4 k^\mu}{(k^2 - m^2)^4 E_1} \right\}. \end{aligned} \quad (5.15)$$

Para obtermos a forma acima, apenas as integrais com integrandos ímpares foram retiradas, em consequência do caráter par da distribuição regularizadora e o subscrito  $\Lambda$  foi suprimido das integrais finitas em consequência da existência do limite de conexão. As integrais finitas obtidas podem então ser diretamente calculadas e o resultado é um cancelamento exato entre elas. As partes divergentes podem ser escritas em termos dos objetos definidos em (5.9)-(5.13). Nós escrevemos então

$$\begin{aligned} I_1^\mu = & -k_1^\mu [I_{quad}(m^2)] - k_{1\beta} [\nabla^{\beta\mu}(m^2)] \\ & - \frac{1}{3} k_1^\mu k_{1\alpha} k_{1\beta} [\Delta^{\alpha\beta}(m^2)] + \frac{1}{3} k_1^2 k_{1\nu} [\Delta^{\mu\nu}(m^2)] \\ & - \frac{1}{3} k_{1\beta} k_{1\alpha} k_{1\nu} [\square^{\alpha\beta\mu\nu}(m^2)]. \end{aligned} \quad (5.16)$$

Mais uma vez é importante notar que a forma acima pode ser convertida no resultado correspondente a qualquer regularização específica desejada. Se todas as integrações remanescentes acima forem efetuadas em  $2\omega$  dimensões teremos o resultado correspondente a RD. Se métodos quadridimensionais como “Pauli-Villars” ou “Sharp-Cutoff” forem de interesse, tudo que necessitamos é calcular as integrais acima na presença da regularização correspondente. Os termos retirados da expressão acima seriam igualmente nulos nestes métodos após a tomada do limite de conexão correspondente. Deve ser ressaltado que no estágio do resultado acima nenhuma escolha para as arbitrariedades envolvidas foi tomada. Isto será eventualmente feito somente ao final quando as amplitudes físicas forem calculadas e suas correspondentes relações de simetria verificadas.

### 5.2.2 Integral $I_1$

Para a integral quadraticamente divergente, definida como

$$I_1 = \int_\Lambda \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{E_1}, \quad (5.17)$$

aplicamos o mesmo procedimento. Escolhemos o valor  $N = 2$  na expressão (8) e obtemos a expressão

$$\begin{aligned}
I_1 = & \int_{\Lambda} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - m^2)} \\
& + k_1^\mu k_1^\nu \left\{ \int_{\Lambda} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{4k_\mu k_\nu}{(k^2 - m^2)^3} - \int_{\Lambda} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{g_{\mu\nu}}{(k^2 - m^2)^2} \right\} \\
& + \left\{ \int_{\Lambda} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k_1^4}{(k^2 - m^2)^3} - \int_{\Lambda} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{(k_1^2 + 2k_1 \cdot k)^3}{(k^2 - m^2)^3 E_1} \right\}. \tag{5.18}
\end{aligned}$$

Novamente as integrais finitas obtidas acima, ao serem calculadas diretamente, revelam um cancelamento mútuo. O resultado fica então

$$I_1 = I_{quad}(m^2) + k_1^\mu k_1^\nu [\Delta_{\mu\nu}(m^2)]. \tag{5.19}$$

### 5.2.3 Integral $I_2$

Vamos agora, considerar integrais contendo dois propagadores. Primeiramente a mais simples, a integral definida como

$$I_2 = \int_{\Lambda} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{E_{12}}, \tag{5.20}$$

que seguindo nossa estratégia de cálculo escrevemos como

$$\begin{aligned}
I_2 = & \int_{\Lambda} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - m^2)^2} \\
& - \int_{\Lambda} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{(k_1^2 + 2k_1 \cdot k)}{[(k^2 - m^2)^2] E_1} \\
& - \int_{\Lambda} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{(k_2^2 + 2k_2 \cdot k)}{[(k^2 - m^2)^2] E_2} \\
& + \int_{\Lambda} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{(k_1^2 + 2k_1 \cdot k)(k_2^2 + 2k_2 \cdot k)}{[(k^2 - m^2)^2] E_{12}}, \tag{5.21}
\end{aligned}$$

onde escolhemos na Eq.(8),  $N = 1$  para os dois denominadores envolvidos, o que é muito conveniente pois mantém a simetria em  $k_1$  e  $k_2$ . O conteúdo divergente desta integral está presente no objeto divergente básico  $I_{log}(m^2)$ . As integrais remanescentes são finitas e produzem

$$\int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{(k_i^2 + 2k_1 \cdot k)}{(k^2 - m^2)^2 E_i} = i(4\pi)^{-2} [Z_0(k_i^2; m^2)] \tag{5.22}$$

e

$$\begin{aligned}
\int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{(k_1^2 + 2k_1 \cdot k)(k_2^2 + 2k_2 \cdot k)}{[(k^2 - m^2)^2] E_{12}} = & i(4\pi)^{-2} [ Z_0(k_1^2; m^2) \\
& + Z_0(k_2^2; m^2) \\
& - Z_0(p^2; m^2) ], \tag{5.23}
\end{aligned}$$

onde nós adotamos uma notação simplificada para as funções básicas para as estruturas de dois pontos definidas na Eq. (4.10) do capítulo 4, ou seja, adotamos  $Z_0(m^2, m^2, p^2; m^2) = Z_0(p^2; m^2)$  e definimos o momento externo  $p = k_2 - k_1$ . Reunindo os resultados, a integral logicamente divergente pode ser escrita como

$$I_2 = I_{log}(m^2) - i(4\pi)^{-2} [Z_0(p^2; m^2)]. \tag{5.24}$$

### 5.2.4 Integral $I_2^\mu$

A fim de calcular  $I_2^\mu$ , que definimos como

$$I_2^\mu = \int_{\Lambda} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k_\mu}{E_{12}}, \quad (5.25)$$

usamos primeiramente a identidade (5.8) tomando  $N = 1$  para ambos os denominadores na integral, para obter

$$\begin{aligned} I_2^\mu &= -\frac{1}{2}(k_1 + k_2)^\alpha \int_{\Lambda} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{4k_\alpha k^\mu}{(k^2 - m^2)^3} \\ &+ \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{(k_1^2 + 2k_1 \cdot k)^2 k^\mu}{(k^2 - m^2)^3 E_1} \\ &+ \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{(k_2^2 + 2k_2 \cdot k)^2 k^\mu}{(k^2 - m^2)^3 E_2} \\ &+ \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{(k_1^2 + 2k_1 \cdot k)(k_2^2 + 2k_2 \cdot k)k^\mu}{(k^2 - m^2)^2 E_{12}}. \end{aligned} \quad (5.26)$$

Somente uma integral tendo integrando ímpar foi removida no lado direito da equação acima, em adição ao subscrito  $\Lambda$  nas últimas três integrais finitas, as quais, depois da integração, produzem os resultados

$$\int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{(k_i^2 + 2k_1 \cdot k)^2 k^\mu}{[(k^2 - m^2)^3] E_i} = i(4\pi)^{-2} [k_i^\mu Z_1(k_i^2; m^2)] \quad (5.27)$$

e

$$\begin{aligned} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{(k_1^2 + 2k_1 \cdot k)(k_2^2 + 2k_2 \cdot k)k^\mu}{[(k^2 - m^2)^2] E_{12}} &= i(4\pi)^{-2} [-k_1^\mu Z_1(k_1^2; m^2) \\ &- k_2^\mu Z_1(k_2^2; m^2) \\ &+ (k_1 + k_2)^\mu Z_1(p^2; m^2)]. \end{aligned} \quad (5.28)$$

Se considerarmos também a propriedade  $Z_1(p^2; m^2) = \frac{1}{2}Z_0(p^2; m^2)$ , podemos escrever

$$\begin{aligned} I_2^\mu &= -\frac{1}{2}(k_2 + k_1)_\nu [\Delta^{\mu\nu}] - \frac{1}{2}(k_2 + k_1)^\mu [I_{\log}(m^2)] \\ &+ i(4\pi)^{-2} \left[ \frac{(k_1 + k_2)^\mu}{2} \right] Z_0(p^2; m^2). \end{aligned} \quad (5.29)$$

### 5.2.5 Integral $I_2^{\mu\nu}$

Seguindo estritamente o mesmo procedimento adotado no cálculo dos casos logaritmicamente e linearmente divergentes, calculamos a integral quadraticamente divergente definida como

$$I_2^{\mu\nu} = \int_{\Lambda} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k^\mu k^\nu}{E_{12}}. \quad (5.30)$$

Escolhendo valores adequados para  $N$  na identidade (5.8), depois de um longo e tedioso cálculo, nós

obtemos

$$\begin{aligned}
I_2^{\mu\nu} = & \frac{1}{2} [\nabla^{\mu\nu} (m^2)] \\
& + \frac{1}{6} (k_{2\alpha} k_{2\beta} + k_{1\alpha} k_{2\beta} + k_{1\alpha} k_{1\beta}) [\square^{\alpha\beta\mu\nu} (m^2)] \\
& - \frac{1}{12} p^2 [\Delta^{\mu\nu} (m^2)] \\
& + \frac{1}{6} (k_2^\nu k_{2\beta} + k_1^\nu k_{2\beta} + k_1^\nu k_{1\beta}) [\Delta^{\mu\beta} (m^2)] \\
& + \frac{1}{6} (k_2^\mu k_{2\beta} + k_1^\mu k_{2\beta} + k_1^\mu k_{1\beta}) [\Delta^{\beta\nu} (m^2)] \\
& + \frac{1}{2} g^{\mu\nu} [I_{quad} (m^2)] \\
& - \frac{1}{12} g^{\mu\nu} p^2 [I_{\log} (m^2)] \\
& + \frac{1}{6} (2k_2^\nu k_2^\mu + k_1^\nu k_2^\mu + k_1^\mu k_2^\nu + 2k_1^\nu k_1^\mu) [I_{\log} (m^2)] \\
& + i(4\pi)^{-2} \left\{ -\frac{1}{4} (k_1 + k_2)^\mu (k_1 + k_2)^\nu [Z_0 (p^2; m^2)] \right. \\
& \quad \left. + [p^\mu p^\nu - g^{\mu\nu} p^2] \left[ -Z_2 (p^2; m^2) + \frac{1}{4} Z_0 (p^2; m^2) \right] \right\}. \tag{5.31}
\end{aligned}$$

Com isso completamos o tratamento daquelas integrais associadas a funções de dois pontos. Consideremos agora aquelas correspondentes a três pontos.

### 5.2.6 Integral $I_3$

Agora calcularemos as integrais com três propagadores. A primeira delas, definida por

$$I_3 = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{E_{123}}, \tag{5.32}$$

é finita e deve ser calculada diretamente. Escrevemos o resultado como

$$I_3 = i(4\pi)^{-2} [\xi_{00} (p, q; m^2)], \tag{5.33}$$

onde a definição das funções  $\xi_{nm}$ , dadas no capítulo 4, foi usada com a adoção de uma notação simplificada, ou seja,  $\xi_{nm} (m^2, m^2, p, m^2, q) = \xi_{nm} (p, q; m^2)$  e foram adotadas as definições para os momentos externos  $p = k_2 - k_1$  e  $q = k_3 - k_1$ .

### 5.2.7 Integral $I_3^\mu$

A segunda integral, contendo três denominadores, definida como

$$I_3^\mu = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k^\mu}{E_{123}}, \tag{5.34}$$

é finita também, de modo que pode ser integrada diretamente. O resultado pode ser escrito como

$$I_3^\mu = -i(4\pi)^{-2} [-p^\mu \xi_{01} (p, q; m^2) - q^\mu \xi_{10} (p, q; m^2) + k_1^\mu \xi_{00} (p, q; m^2)]. \tag{5.35}$$

### 5.2.8 Integral $I_3^{\mu\nu}$

A próxima integral do conjunto (5.3), definida como

$$I_3^{\mu\nu} = \int_{\Lambda} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k^\mu k^\nu}{E_{123}}, \quad (5.36)$$

é logaritmicamente divergente e nós precisamos reescrever o integrando na primeira etapa do cálculo, dentro da estratégia que adotamos. Inicialmente nós temos

$$\begin{aligned} I_3^{\mu\nu} &= \int_{\Lambda} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k^\mu k^\nu}{(k^2 - m^2)^3} \\ &\quad - \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{(k_3^2 + 2k \cdot k_3) k^\mu k^\nu}{(k^2 - m^2)^3 E_3} \\ &\quad - \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{(k_2^2 + 2k \cdot k_2) k^\mu k^\nu}{(k^2 - m^2)^2 E_{23}} \\ &\quad - \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{(k_1^2 + 2k \cdot k_1) k^\mu k^\nu}{(k^2 - m^2) E_{123}}. \end{aligned} \quad (5.37)$$

Resolvendo as integrais finitas nós colocamos o resultado na forma

$$\begin{aligned} I_3^{\mu\nu} &= \frac{1}{4} [\Delta^{\mu\nu} (m^2)] + \frac{1}{4} g^{\mu\nu} [I_{\log} (m^2)] \\ &\quad + i (4\pi)^{-2} \left\{ -\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \eta_{00} (p, q, m^2; m^2) \right. \\ &\quad \quad + p^\mu p^\nu \xi_{02} (p, q; m^2) \\ &\quad \quad + q^\mu q^\nu \xi_{20} (p, q; m^2) \\ &\quad \quad \left. + [p^\mu q^\nu + q^\mu p^\nu] \xi_{11} (p, q; m^2) \right\} \\ &\quad - k_1^\mu (I_3^s)^\nu - k_1^\nu (I_3^s)^\mu + k_1^\mu k_1^\nu I_3, \end{aligned} \quad (5.38)$$

onde definimos

$$(I_3^s)^\mu = -i (4\pi)^{-2} [p^\mu \xi_{01} (p, q; m^2) + q^\mu \xi_{10} (p, q; m^2)] \quad (5.39)$$

e temos que

$$\begin{aligned} \eta_{00} (p, q; m^2) &= \frac{1}{2} Z_0((p - q)^2; m^2) \\ &\quad - \left[ \frac{1}{2} + m^2 \xi_{00} (p, q; m^2) \right] \\ &\quad + \frac{p^2}{2} \xi_{01} (p, q; m^2) + \frac{q^2}{2} \xi_{10} (p, q; m^2). \end{aligned} \quad (5.40)$$

Aqui simplificamos a notação para a função  $\eta_{nm} (m^2, m^2, p, m^2, q; m^2) = \eta_{nm} (p, q; m^2)$ .

### 5.2.9 Integral $I_3^{\lambda\mu\nu}$

Agora vamos considerar a estrutura linearmente divergente, definida por

$$I_3^{\lambda\mu\nu} = \int_{\Lambda} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k^\lambda k^\mu k^\nu}{E_{123}}. \quad (5.41)$$

O primeiro passo é reescrevê-la como segue:

$$\begin{aligned}
I_3^{\lambda\mu\nu} &= -2(k_1 + k_2 + k_3)^\xi \int_\Lambda \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k^\lambda k^\mu k^\nu k_\xi}{(k^2 - m^2)^4} \\
&+ \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{(k_3^2 + 2k \cdot k_3)^2 k^\lambda k^\mu k^\nu}{(k^2 - m^2)^4 E_3} \\
&+ \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{(k_2^2 + 2k \cdot k_2)(k_3^2 + 2k \cdot k_3) k^\lambda k^\mu k^\nu}{(k^2 - m^2)^4 E_3} \\
&+ \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{(k_1^2 + 2k \cdot k_1)(k_3^2 + 2k \cdot k_3) k^\lambda k^\mu k^\nu}{(k^2 - m^2)^4 E_3} \\
&+ \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{(k_2^2 + 2k \cdot k_2)^2 k^\lambda k^\mu k^\nu}{(k^2 - m^2)^3 E_{23}} \\
&+ \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{(k_1^2 + 2k \cdot k_1)(k_2^2 + 2k \cdot k_2) k^\lambda k^\mu k^\nu}{(k^2 - m^2)^3 E_{23}} \\
&+ \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{(k_1^2 + 2k \cdot k_1)^2 k^\lambda k^\mu k^\nu}{(k^2 - m^2)^2 E_{123}}. \tag{5.42}
\end{aligned}$$

Em seguida resolvemos as integrais finitas e usamos as definições (5.9), (5.10) e (5.12) para escrever o resultado na forma

$$\begin{aligned}
I_3^{\lambda\mu\nu} &= -\frac{1}{12}(k_1 + k_2 + k_3)_\alpha [\square^{\alpha\lambda\mu\nu}(m^2)] \\
&- \frac{1}{12}(k_1 + k_2 + k_3)^\lambda [\Delta^{\mu\nu}(m^2)] \\
&- \frac{1}{12}(k_1 + k_2 + k_3)^\nu [\Delta^{\mu\lambda}(m^2)] \\
&- \frac{1}{12}(k_1 + k_2 + k_3)^\mu [\Delta^{\lambda\nu}(m^2)] \\
&- \frac{1}{12}(k_1 + k_2 + k_3)^\lambda g^{\mu\nu} [I_{\log}(m^2)] \\
&- \frac{1}{12}(k_1 + k_2 + k_3)^\nu g^{\mu\lambda} [I_{\log}(m^2)] \\
&- \frac{1}{12}(k_1 + k_2 + k_3)^\mu g^{\lambda\nu} [I_{\log}(m^2)] \\
&+ i(4\pi)^{-2} \left\{ \frac{1}{2} [g^{\mu\lambda} p^\nu + g^{\lambda\nu} p^\mu + g^{\mu\nu} p^\lambda] \eta_{01}(p, q; m^2) \right. \\
&\quad + \frac{1}{2} [g^{\mu\lambda} q^\nu + g^{\lambda\nu} q^\mu + g^{\mu\nu} q^\lambda] \eta_{10}(p, q; m^2) \\
&\quad - p^\lambda p^\mu p^\nu \xi_{03}(p, q; m^2) - q^\lambda q^\mu q^\nu \xi_{30}(p, q; m^2) \\
&\quad - (p^\lambda p^\mu q^\nu + p^\lambda q^\mu p^\nu + q^\lambda p^\mu p^\nu) \xi_{12}(p, q; m^2) \\
&\quad \left. - (p^\lambda q^\mu q^\nu + q^\lambda p^\mu q^\nu + q^\lambda q^\mu p^\nu) \xi_{21}(p, q; m^2) \right\} \\
&- k_1^\nu (I_3^s)^{\mu\lambda} - k_1^\mu (I_3^s)^{\nu\lambda} - k_1^\lambda (I_3^s)^{\mu\nu} \\
&+ k_1^\mu k_1^\nu (I_3^s)^\lambda + k_1^\lambda k_1^\nu (I_3^s)^\mu + k_1^\mu k_1^\lambda (I_3^s)^\nu \\
&- k_1^\lambda k_1^\mu k_1^\nu (I_3). \tag{5.43}
\end{aligned}$$

onde definimos

$$\begin{aligned}
(I_3^s)^{\mu\nu} &= \frac{1}{4} [\Delta^{\mu\nu} (m^2)] + \frac{1}{4} g^{\mu\nu} [I_{\log} (m^2)] \\
&+ i (4\pi)^{-2} \left\{ -\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \eta_{00} (p, q; m^2) \right. \\
&\quad + p^\mu p^\nu \xi_{02} (p, q; m^2) + q^\mu q^\nu \xi_{20} (p, q; m^2) \\
&\quad \left. + [p^\mu q^\nu + p^\nu q^\mu] \xi_{11} (p, q; m^2) \right\}. \tag{5.44}
\end{aligned}$$

As integrais de Feynman consideradas são suficientes para calcular as funções de três pontos puramente fermiônicas ao nível um “loop”.

### 5.2.10 Integral $I_4$

Finalmente vamos considerar as integrais associadas às funções de quatro pontos. Somente uma delas é uma estrutura divergente o que torna fácil o trabalho. A primeira, escalar, definida como

$$I_4 = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{E_{1234}}, \tag{5.45}$$

pode ser escrita, após a integração nos momentos, como

$$I_4 = i (4\pi)^{-2} [\zeta_{000} (p, q, r; m^2)], \tag{5.46}$$

onde nós identificamos as funções de estruturas de quatro pontos previamente definidas no capítulo 4, porém adotamos uma notação simplificada, isto é,  $\zeta_{nml} (m^2, m^2, p, m^2, q, m^2, r) = \zeta_{nml} (p, q, r; m^2)$  e também utilizamos as definições dos momentos externos  $p = k_2 - k_1$ ,  $q = k_3 - k_1$  e  $r = k_4 - k_1$ .

### 5.2.11 Integral $I_4^\mu$

A integral definida por

$$I_4^\mu = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k^\mu}{E_{1234}}, \tag{5.47}$$

pode ser resolvida de imediato e colocada na forma

$$\begin{aligned}
I_4^\mu &= i (4\pi)^{-2} \left\{ -q^\mu \zeta_{010} (p, q, r; m^2) - r^\mu \zeta_{001} (p, q, r; m^2) \right. \\
&\quad \left. - p^\mu \zeta_{100} (p, q, r; m^2) \right\} \\
&- k_1^\mu (I_4). \tag{5.48}
\end{aligned}$$

### 5.2.12 Integral $I_4^{\mu\nu}$

A integral definida como

$$I_4^{\mu\nu} = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k^\mu k^\nu}{E_{1234}}, \tag{5.49}$$



por sua vez, após a integração nos momentos, torna-se

$$\begin{aligned}
I_4^{\mu\nu} = i(4\pi)^{-2} & \left\{ \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \xi_{000}(p, q, r; m^2) \right. \\
& + p^\mu p^\nu \zeta_{200}(p, q, r; m^2) \\
& + q^\mu q^\nu \zeta_{020}(p, q, r; m^2) \\
& + r^\mu r^\nu \zeta_{002}(p, q, r; m^2) \\
& + (p^\mu q^\nu + p^\nu q^\mu) \zeta_{110}(p, q, r; m^2) \\
& + (r^\mu q^\nu + r^\nu q^\mu) \zeta_{011}(p, q, r; m^2) \\
& \left. + (p^\mu r^\nu + p^\nu r^\mu) \zeta_{101}(p, q, r; m^2) \right\} \\
& - k_1^\mu (I_4^s)^\nu - k_1^\nu (I_4^s)^\mu + k_1^\mu k_1^\nu I_4,
\end{aligned} \tag{5.50}$$

onde definimos

$$\begin{aligned}
(I_4^s)^\mu = i(4\pi)^{-2} & \left[ -p^\mu \zeta_{100}(p, q, r; m^2) - q^\mu \zeta_{010}(p, q, r; m^2) \right. \\
& \left. - r^\mu \zeta_{001}(p, q, r; m^2) \right].
\end{aligned} \tag{5.51}$$

### 5.2.13 Integral $I_4^{\mu\nu\lambda}$

A última das integrais finitas do conjunto (4), definida por

$$I_4^{\mu\nu\lambda} = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k^\mu k^\nu k^\lambda}{E_{1234}}, \tag{5.52}$$

ao ser resolvida, admite a forma

$$\begin{aligned}
I_4^{\mu\nu\lambda} = & i(4\pi)^{-2} \left\{ -\frac{1}{2} [g^{\mu\lambda}p^\nu + g^{\lambda\nu}p^\mu + g^{\mu\nu}p^\lambda] \xi_{100}(p, q, r; m^2) \right. \\
& -\frac{1}{2} [g^{\mu\lambda}q^\nu + g^{\lambda\nu}q^\mu + g^{\mu\nu}q^\lambda] \xi_{010}(p, q, r; m^2) \\
& -\frac{1}{2} [g^{\mu\lambda}r^\nu + g^{\lambda\nu}r^\mu + g^{\mu\nu}r^\lambda] \xi_{001}(p, q, r; m^2) \\
& + (p^\mu q^\nu + q^\mu p^\nu) \zeta_{110}(p, q, r; m^2) \\
& + (q^\mu r^\nu + r^\mu q^\nu) \zeta_{011}(p, q, r; m^2) \\
& - p^\mu p^\nu p^\lambda \zeta_{300}(p, q, r; m^2) \\
& - q^\mu q^\nu q^\lambda \zeta_{030}(p, q, r; m^2) \\
& - r^\mu r^\nu r^\lambda \zeta_{003}(p, q, r; m^2) \\
& - [p^\mu p^\nu q^\lambda + p^\mu q^\nu p^\lambda + q^\mu p^\nu p^\lambda] \zeta_{210}(p, q, r; m^2) \\
& - [p^\mu p^\nu r^\lambda + p^\mu r^\nu p^\lambda + r^\mu p^\nu p^\lambda] \zeta_{201}(p, q, r; m^2) \\
& - [p^\mu q^\nu q^\lambda + q^\mu p^\nu q^\lambda + q^\mu q^\nu p^\lambda] \zeta_{120}(p, q, r; m^2) \\
& - [p^\mu q^\nu r^\lambda + p^\mu r^\nu q^\lambda + q^\mu p^\nu r^\lambda \\
& \quad + q^\mu r^\nu p^\lambda + r^\mu p^\nu q^\lambda + r^\mu q^\nu p^\lambda] \zeta_{111}(p, q, r; m^2) \\
& - [p^\mu r^\nu r^\lambda + r^\mu r^\nu p^\lambda + r^\mu p^\nu r^\lambda] \zeta_{102}(p, q, r; m^2) \\
& - [r^\mu q^\nu q^\lambda + q^\mu r^\nu q^\lambda + q^\mu q^\nu r^\lambda] \zeta_{021}(p, q, r; m^2) \\
& - [q^\mu r^\nu r^\lambda + r^\mu r^\nu q^\lambda + r^\mu q^\nu r^\lambda] \zeta_{012}(p, q, r; m^2) \left. \right\} \\
& - k_1^\lambda (I_4^s)^{\mu\nu} - k_1^\mu (I_4^s)^{\nu\lambda} - k_1^\nu (I_4^s)^{\mu\lambda} \\
& + k_1^\mu k_1^\nu (I_4^s)^\lambda + k_1^\mu k_1^\lambda (I_4^s)^\nu + k_1^\nu k_1^\lambda (I_4^s)^\mu \\
& - k_1^\mu k_1^\nu k_1^\lambda I_4, \tag{5.53}
\end{aligned}$$

onde definimos

$$\begin{aligned}
(I_4^s)^{\mu\nu} = & i(4\pi)^{-2} \left\{ \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \xi_{000}(p, q, r; m^2) \right. \\
& + p^\mu p^\nu \zeta_{200}(p, q, r; m^2) \\
& + q^\mu q^\nu \zeta_{020}(p, q, r; m^2) \\
& + r^\mu r^\nu \zeta_{002}(p, q, r; m^2) \\
& + (p^\mu q^\nu + q^\mu p^\nu) \zeta_{110}(p, q, r; m^2) \\
& + (q^\mu r^\nu + r^\mu q^\nu) \zeta_{011}(p, q, r; m^2) \\
& \left. + (r^\mu p^\nu + p^\mu r^\nu) \zeta_{101}(p, q, r; m^2) \right\}. \tag{5.54}
\end{aligned}$$

### 5.2.14 Integral $I_4^{\mu\nu\alpha\beta}$

Por fim, a última integral do conjunto (4), definida como

$$I_4^{\mu\nu\alpha\beta} = \int_{\Lambda} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k^\mu k^\nu k^\alpha k^\beta}{E_{1234}}, \tag{5.55}$$

que necessitamos considerar, é logaritmicamente divergente. O tratamento que adotamos nos exige que inicialmente escrevamos esta na forma

$$\begin{aligned}
I_4^{\mu\nu\alpha\beta} = & \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k^\mu k^\nu k^\alpha k^\beta}{(k^2 - m^2)^4} \\
& - \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k^\mu k^\nu k^\alpha k^\beta (k_4^2 + 2k_4 \cdot k)}{(k^2 - m^2)^4 E_4} \\
& - \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k^\mu k^\nu k^\alpha k^\beta (k_3^2 + 2k_3 \cdot k)}{(k^2 - m^2)^3 E_{34}} \\
& - \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k^\mu k^\nu k^\alpha k^\beta (k_2^2 + 2k_2 \cdot k)}{(k^2 - m^2)^2 E_{234}} \\
& - \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k^\mu k^\nu k^\alpha k^\beta (k_1^2 + 2k_1 \cdot k)}{(k^2 - m^2) E_{1234}}.
\end{aligned} \tag{5.56}$$

Após a solução das integrais finitas envolvidas e uma conveniente reorganização podemos colocar a solução na forma

$$\begin{aligned}
I_4^{\mu\nu\alpha\beta} = & \frac{1}{24} [\square^{\alpha\beta\mu\nu}(m^2) + g^{\alpha\beta} \Delta^{\mu\nu}(m^2) + g^{\alpha\nu} \Delta^{\mu\beta}(m^2) + g^{\alpha\mu} \Delta^{\beta\nu}(m^2)] \\
& + \frac{1}{24} (g^{\alpha\beta} g^{\mu\nu} + g^{\alpha\mu} g^{\beta\nu} + g^{\alpha\nu} g^{\mu\beta}) I_{\log}(m^2) \\
& + i(4\pi)^{-2} \left\{ -\frac{1}{4} [g^{\alpha\beta} g^{\mu\nu} + g^{\alpha\mu} g^{\beta\nu} + g^{\alpha\nu} g^{\mu\beta}] \eta_{000}(p, q, r; m^2) \right. \\
& \quad + \frac{1}{2} [g^{\mu\nu} p^\alpha p^\beta + g^{\alpha\mu} p^\nu p^\beta + g^{\mu\beta} p^\nu p^\alpha \\
& \quad \quad + g^{\alpha\nu} p^\mu p^\beta + g^{\beta\nu} p^\mu p^\alpha + g^{\alpha\beta} p^\mu p^\nu] \xi_{200}(p, q, r; m^2) \\
& \quad + \frac{1}{2} [g^{\mu\nu} q^\alpha q^\beta + g^{\alpha\mu} q^\nu q^\beta + g^{\mu\beta} q^\nu q^\alpha \\
& \quad \quad + g^{\alpha\nu} q^\mu q^\beta + g^{\beta\nu} q^\mu q^\alpha + g^{\alpha\beta} q^\mu q^\nu] \xi_{020}(p, q, r; m^2) \\
& \quad + \frac{1}{2} [g^{\mu\nu} r^\alpha r^\beta + g^{\alpha\mu} r^\nu r^\beta + g^{\mu\beta} r^\nu r^\alpha \\
& \quad \quad + g^{\alpha\nu} r^\mu r^\beta + g^{\beta\nu} r^\mu r^\alpha + g^{\alpha\beta} r^\mu r^\nu] \xi_{002}(p, q, r; m^2) \\
& \quad + \frac{1}{2} [g^{\mu\nu} (p^\alpha r^\beta + r^\alpha p^\beta) + g^{\alpha\mu} (p^\nu r^\beta + r^\nu p^\beta) \\
& \quad \quad + g^{\mu\beta} (p^\nu r^\alpha + r^\nu p^\alpha) + g^{\nu\beta} (p^\mu r^\alpha + r^\mu p^\alpha) \\
& \quad \quad + g^{\alpha\beta} (p^\mu r^\nu + r^\mu p^\nu) + g^{\alpha\nu} (p^\mu r^\beta + r^\mu p^\beta)] \xi_{101}(p, q, r; m^2) \\
& \quad + \frac{1}{2} [g^{\mu\nu} (q^\alpha p^\beta + p^\alpha q^\beta) + g^{\alpha\mu} (p^\beta q^\nu + q^\beta p^\nu) \\
& \quad \quad + g^{\mu\beta} (p^\alpha q^\nu + q^\alpha p^\nu) + g^{\nu\beta} (p^\mu q^\alpha + q^\mu p^\alpha) \\
& \quad \quad + g^{\alpha\beta} (p^\mu q^\nu + q^\mu p^\nu) + g^{\nu\alpha} (p^\mu q^\beta + q^\mu p^\beta)] \xi_{110}(p, q, r; m^2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2} [ g^{\mu\nu} (q^\alpha r^\beta + r^\alpha q^\beta) + g^{\alpha\mu} (r^\beta q^\nu + q^\beta r^\nu) \\
& \quad + g^{\mu\beta} (r^\alpha q^\nu + q^\alpha r^\nu) + g^{\nu\beta} (r^\mu q^\alpha + q^\mu r^\alpha) \\
& \quad + g^{\alpha\beta} (r^\mu q^\nu + q^\mu r^\nu) + g^{\nu\alpha} (r^\mu q^\beta + q^\mu r^\beta) ] \zeta_{011} (p, q, r; m^2) \\
& + p^\mu p^\nu p^\alpha p^\beta \zeta_{400} (p, q, r; m^2) \\
& + q^\mu q^\nu q^\alpha q^\beta \zeta_{040} (p, q, r; m^2) \\
& + r^\mu r^\nu r^\alpha r^\beta \zeta_{004} (p, q, r; m^2) \\
& + (p^\mu p^\nu p^\alpha q^\beta + p^\mu p^\nu q^\alpha p^\beta + p^\mu q^\nu p^\alpha p^\beta + q^\mu p^\nu p^\alpha p^\beta) \zeta_{310} (p, q, r; m^2) \\
& + (p^\mu p^\nu p^\alpha r^\beta + p^\mu p^\nu r^\alpha p^\beta + p^\mu r^\nu p^\alpha p^\beta + r^\mu p^\nu p^\alpha p^\beta) \zeta_{301} (p, q, r; m^2) \\
& + (p^\mu q^\nu q^\alpha q^\beta + q^\mu p^\nu q^\alpha q^\beta + q^\mu q^\nu p^\alpha q^\beta + q^\mu q^\nu q^\alpha p^\beta) \zeta_{130} (p, q, r; m^2) \\
& + (p^\mu r^\nu r^\alpha r^\beta + r^\mu p^\nu r^\alpha r^\beta + r^\mu r^\nu p^\alpha r^\beta + r^\mu r^\nu r^\alpha p^\beta) \zeta_{103} (p, q, r; m^2) \\
& + (r^\mu q^\nu q^\alpha q^\beta + q^\mu r^\nu q^\alpha q^\beta + q^\mu q^\nu r^\alpha q^\beta + q^\mu q^\nu q^\alpha r^\beta) \zeta_{031} (p, q, r; m^2) \\
& + (q^\mu r^\nu r^\alpha r^\beta + r^\mu q^\nu r^\alpha r^\beta + r^\mu r^\nu q^\alpha r^\beta + r^\mu r^\nu r^\alpha q^\beta) \zeta_{013} (p, q, r; m^2) \\
& + [ p^\mu p^\nu q^\alpha q^\beta + p^\mu q^\nu p^\alpha q^\beta + p^\mu q^\nu q^\alpha p^\beta \\
& \quad + q^\mu p^\nu p^\alpha q^\beta + q^\mu q^\nu p^\alpha p^\beta + q^\mu p^\nu q^\alpha p^\beta ] \zeta_{220} (p, q, r; m^2) \\
& + [ p^\mu p^\nu r^\alpha r^\beta + p^\mu r^\nu p^\alpha r^\beta + p^\mu r^\nu r^\alpha p^\beta \\
& \quad + r^\mu p^\nu r^\alpha p^\beta + r^\mu r^\nu p^\alpha p^\beta + r^\mu p^\nu p^\alpha r^\beta ] \zeta_{202} (p, q, r; m^2) \\
& + [ q^\mu q^\nu r^\alpha r^\beta + q^\mu r^\nu r^\alpha q^\beta + q^\mu r^\nu q^\alpha r^\beta \\
& \quad + r^\mu q^\nu r^\alpha q^\beta + r^\mu r^\nu q^\alpha q^\beta + r^\mu q^\nu q^\alpha r^\beta ] \zeta_{022} (p, q, r; m^2) \\
& + [ p^\mu p^\nu q^\alpha r^\beta + p^\mu p^\nu r^\alpha q^\beta + p^\mu q^\nu p^\alpha r^\beta \\
& \quad + p^\mu r^\nu p^\alpha q^\beta + p^\mu r^\nu q^\alpha p^\beta + q^\mu p^\nu p^\alpha r^\beta \\
& \quad + q^\mu p^\nu r^\alpha p^\beta + q^\mu r^\nu p^\alpha p^\beta + p^\mu q^\nu r^\alpha p^\beta \\
& \quad + r^\mu p^\nu p^\alpha q^\beta + r^\mu p^\nu q^\alpha p^\beta + r^\mu q^\nu p^\alpha p^\beta ] \zeta_{211} (p, q, r; m^2) \\
& + [ p^\mu q^\nu r^\alpha r^\beta + p^\mu r^\nu q^\alpha r^\beta + p^\mu r^\nu r^\alpha q^\beta \\
& \quad + q^\mu r^\nu p^\alpha r^\beta + q^\mu r^\nu r^\alpha p^\beta + r^\mu p^\nu q^\alpha r^\beta \\
& \quad + r^\mu p^\nu r^\alpha q^\beta + r^\mu q^\nu p^\alpha r^\beta + q^\mu p^\nu r^\alpha r^\beta \\
& \quad + r^\mu q^\nu r^\alpha p^\beta + r^\mu r^\nu p^\alpha q^\beta + r^\mu r^\nu q^\alpha p^\beta ] \zeta_{112} (p, q, r; m^2) \\
& + [ p^\mu q^\nu r^\alpha q^\beta + p^\mu q^\nu q^\alpha r^\beta + p^\mu r^\nu q^\alpha q^\beta \\
& \quad + q^\mu p^\nu q^\alpha r^\beta + q^\mu p^\nu r^\alpha q^\beta + q^\mu q^\nu p^\alpha r^\beta \\
& \quad + q^\mu q^\nu r^\alpha p^\beta + q^\mu r^\nu p^\alpha q^\beta + q^\mu r^\nu q^\alpha p^\beta \\
& \quad + r^\mu p^\nu q^\alpha q^\beta + r^\mu q^\nu p^\alpha q^\beta + r^\mu q^\nu q^\alpha p^\beta ] \zeta_{121} (p, q, r; m^2) \} \tag{5.57}
\end{aligned}$$

$$+ (I_4^L)^{\mu\nu\alpha\beta},$$

onde introduzimos a definição

$$\begin{aligned}
(I_4^L)^{\mu\nu\alpha\beta} &= -k_1^\alpha (I_4^s)^{\mu\nu\beta} - k_1^\nu (I_4^s)^{\mu\alpha\beta} - k_1^\mu (I_4^s)^{\nu\alpha\beta} - k_1^\beta (I_4^s)^{\mu\nu\alpha} \\
&+ k_1^\mu k_1^\nu (I_4^s)^{\alpha\beta} + k_1^\mu k_1^\alpha (I_4^s)^{\nu\beta} + k_1^\nu k_1^\beta (I_4^s)^{\mu\alpha} \\
&+ k_1^\alpha k_1^\beta (I_4^s)^{\mu\nu} + k_1^\mu k_1^\beta (I_4^s)^{\nu\alpha} + k_1^\nu k_1^\alpha (I_4^s)^{\mu\beta} \\
&- k_1^\nu k_1^\alpha k_1^\beta (I_4^s)^\mu - k_1^\mu k_1^\nu k_1^\alpha (I_4^s)^\beta \\
&- k_1^\mu k_1^\nu k_1^\beta (I_4^s)_\alpha - k_1^\mu k_1^\alpha k_1^\beta (I_4^s)_\nu \\
&+ k_1^\mu k_1^\nu k_1^\alpha k_1^\beta (I_4)
\end{aligned} \tag{5.58}$$

e também

$$\begin{aligned}
(I_4^s)^{\mu\nu\lambda} &= i(4\pi)^{-2} \left\{ -\frac{1}{2} [g^{\mu\nu} p^\lambda + g^{\mu\lambda} p^\nu + g^{\nu\lambda} p^\mu] \xi_{100}(p, q, r; m^2) \right. \\
&\quad -\frac{1}{2} [g^{\mu\nu} q^\lambda + g^{\mu\lambda} q^\nu + g^{\nu\lambda} q^\mu] \xi_{010}(p, q, r; m^2) \\
&\quad -\frac{1}{2} [g^{\mu\nu} r^\lambda + g^{\mu\lambda} r^\nu + g^{\nu\lambda} r^\mu] \xi_{001}(p, q, r; m^2) \\
&\quad -p^\mu p^\nu p^\lambda \zeta_{300}(p, q, r; m^2) \\
&\quad -q^\mu q^\nu q^\lambda \zeta_{030}(p, q, r; m^2) \\
&\quad -r^\mu r^\nu r^\lambda \zeta_{003}(p, q, r; m^2) \\
&\quad + (p^\mu r^\nu + q^\mu r^\nu) \zeta_{011}(p, q, r; m^2) \\
&\quad + (p^\mu q^\nu + q^\mu p^\nu) \zeta_{110}(p, q, r; m^2) \\
&\quad - [p^\mu p^\nu q^\lambda + p^\mu q^\nu p^\lambda + q^\mu p^\nu p^\lambda] \zeta_{210}(p, q, r; m^2) \\
&\quad - [p^\mu p^\nu r^\lambda + p^\mu r^\nu p^\lambda + r^\mu p^\nu p^\lambda] \zeta_{201}(p, q, r; m^2) \\
&\quad - [p^\mu q^\nu q^\lambda + q^\mu p^\nu q^\lambda + q^\mu q^\nu p^\lambda] \zeta_{120}(p, q, r; m^2) \\
&\quad - [p^\mu q^\nu r^\lambda + p^\mu r^\nu q^\lambda + q^\mu p^\nu r^\lambda \\
&\quad \quad + q^\mu r^\nu p^\lambda + r^\mu p^\nu q^\lambda + r^\mu q^\nu p^\lambda] \zeta_{111}(p, q, r; m^2) \\
&\quad - [p^\mu r^\nu r^\lambda + r^\mu r^\nu p^\lambda + r^\mu p^\nu r^\lambda] \zeta_{102}(p, q, r; m^2) \\
&\quad - [q^\mu q^\nu r^\lambda + q^\mu r^\nu q^\lambda + r^\mu q^\nu q^\lambda] \zeta_{021}(p, q, r; m^2) \\
&\quad \left. - [q^\mu r^\nu r^\lambda + r^\mu q^\nu r^\lambda + r^\mu r^\nu q^\lambda] \zeta_{012}(p, q, r; m^2) \right\}. \tag{5.59}
\end{aligned}$$

De posse dos resultados que obtivemos neste capítulo, é possível completar o cálculo de todas as amplitudes divergentes, contendo apenas o propagador do férmion em linhas internas, que encontramos na expansão perturbativa de EDQ ao nível um “loop”. Vamos então considerar agora, no próximo capítulo, aquelas integrais de Feynman que apareceram nas amplitudes onde ambos os propagadores, do férmion e do bóson, estão presentes. Cuidados adicionais serão necessários devido à massa nula do fóton, pois isto implica na possibilidade de divergências infravermelhas simultaneamente àquelas ultravioletas.

## Capítulo 6

# Divergências Infravermelhas

### 6.1 Introdução

Do mesmo modo que procedemos no capítulo anterior, começamos por listar as integrais que necessitamos considerar a fim de que o cálculo das funções de Green divergentes introduzidas no capítulo 3 que envolvem simultaneamente a presença dos propagadores do fóton e do elétron, possam ser completados. Primeiramente definimos um conjunto de integrais correspondentes ao termo independente de “gauge” do propagador do fóton, ou seja, aquele com um pólo simples. Estas integrais conterão pelo menos um termo no denominador associado ao férmion e aparecem nos diagramas da auto-energia do elétron por excitação de um fóton e no diagrama de correção de vértice. A fim de organizar as discussões nós definimos inicialmente as estruturas contendo um único denominador associado ao propagador do fóton. Primeiramente aquelas integrais de Feynman com dois denominadores

$$(J_2; J_2^\mu) = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{(1; k^\mu)}{P_1 E_2}. \quad (6.1)$$

Em seguida aquelas integrais de Feynman com três denominadores

$$(J_3; J_3^\mu; J_3^{\mu\nu}) = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{(1; k^\mu; k^\mu k^\nu)}{P_1 E_{23}}. \quad (6.2)$$

O conjunto acima definido de integrais é suficiente para a determinação da parte independente do parâmetro de “gauge” das funções de Green correspondentes aos diagramas de auto-energia do fóton e de correção de vértice. O maior grau de divergência envolvido é o linear e algumas das estruturas obtidas são finitas.

O segundo conjunto de integrais de Feynman a ser considerado é aquele associado ao termo de “gauge” do propagador do fóton. Este termo introduz um pólo duplo nas integrais o que piora o comportamento a momentos baixos. As integrais a serem resolvidas são as seguintes

$$(L_2; L_2^\mu) = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{(1; k^\mu)}{[P_1]^2}. \quad (6.3)$$

As integrais acima, que aparecem no termo de “gauge” da auto-energia do elétron, apresentam grau de divergência logarítmico e linear, respectivamente, para valores grandes do momento  $k$ . Por outro lado

podemos ter divergência logarítmica infravermelha. Definimos também as estruturas

$$(L_3; L_3^\mu) = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{(1; k^\mu)}{[P_1]^2 E_2}, \quad (6.4)$$

que aparecem no termo dependente de gauge da amplitude correspondente à correção de vértice. A presença do propagador do elétron melhora o comportamento da integral para baixos valores dos momentos.

Por fim, temos as seguintes estruturas de quatro pontos para considerar

$$(L_4; L_4^\mu, L_4^{\mu\nu}) = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{(1; k^\mu; k^\mu k^\nu)}{[P_1]^2 E_{23}}, \quad (6.5)$$

que são todas finitas. Vamos então tratar destas integrais para, no próximo capítulo, explicitar as amplitudes.

## 6.2 Estratégia para manipulações e cálculos envolvendo divergências infravermelhas

A fim de completar os cálculos das amplitudes encontradas na solução perturbativa da EDQ, ao nível um “loop”, necessitamos considerar as integrais definidas na seção anterior. A presença de integrais divergentes contendo o propagador do fóton nos obriga a introduzir modificações no procedimento adotado no capítulo anterior, para tratar as integrais de Feynman puramente fermiônicas. De início é interessante notar que a sistematização adotada para a parte divergente, escrevê-las em termos dos objetos (5.9)-(5.13) daquele capítulo, não decorre automaticamente para as integrais que devemos considerar agora, particularmente para as integrais definidas em (6.3), já que a massa do férmion não está presente no integrando. Isto implica que, em princípio, teríamos após os cálculos, expressões diferentes para as quantidades divergentes nas amplitudes da EDQ. Um vez que propomos uma estratégia para manipulações e cálculos envolvendo integrais de Feynman divergentes, com o intuito de evitar efetuar de fato o cálculo de integrais divergentes, teremos que pelo menos construir relações entre objetos básicos divergentes com diferentes massas no integrando. Isto porque se em algum momento futuro pretendemos verificar relações entre funções de Green ou determinar parâmetros de renormalização, teremos que comparar objetos básicos divergentes contendo massas diferentes no integrando. Para encaminhar esta discussão, nós primeiro notamos que, ao efetuarmos a separação das quantidades divergentes das integrais de Feynman originais, utilizamos a expressão (5.8) do capítulo 5. Neste passo a quantidade com dimensão de massa que aparece nos objetos básicos divergentes é, na verdade, uma escolha arbitrária [25]. Esta quantidade, que desempenhará o papel de escala para os objetos divergentes e para as partes finitas, pode ser escolhida convenientemente ou mantida arbitrária. Em um momento futuro esta escolha pode ser convertida em outra através de relações de escala envolvendo objetos básicos divergentes. Podemos ver isto se ao invés de utilizarmos a identidade (5.8) do capítulo 5 tomarmos uma mais geral como

$$\frac{1}{[(k + k_i)^2 - m_i^2]} = \frac{1}{(k^2 - \lambda_1^2)} - \frac{(k_i^2 + 2k_i \cdot k + \lambda_1^2 - m_i^2)}{(k^2 - \lambda_1^2) [(k + k_i)^2 - m_i^2]}. \quad (6.6)$$

Esta expressão pode ser considerada aquela correspondente a escolha  $N=1$  da expressão (5.8) do capítulo 5. Ela permite o efeito desejado que é o de diminuir no segundo termo a potência do momento  $k$  no numerador relativa ao denominador. O parâmetro  $\lambda_1^2$  introduzido na identidade acima é arbitrário e estabelece uma ligação entre os dois termos do lado direito. Se o segundo termo do lado direito da equação ainda estiver presente em uma integral divergente a identidade pode ser utilizada novamente. Teremos então

$$\frac{1}{[(k+k_i)^2-m^2]} = \frac{1}{(k^2-\lambda_1^2)} - \frac{(k_i^2+2k_i \cdot k + \lambda_1^2 - m^2)}{(k^2-\lambda_1^2)(k^2-\lambda_2^2)} + \frac{(k_i^2+2k_i \cdot k + \lambda_1^2 - m^2)(k_i^2+2k_i \cdot k + \lambda_2^2 - m^2)}{(k^2-\lambda_1^2)(k^2-\lambda_2^2)[(k+k_i)^2-m^2]}, \quad (6.7)$$

que pode ser vista como a operação similar àquela indicada na Eq.(5.8) do capítulo 5 quando é escolhido  $N=2$ . Seguindo este procedimento um número indefinido de vezes, a expressão correspondente a uma integral de Feynman qualquer, e por conseguinte as amplitudes, tornar-se-ão, em princípio, dependentes de um número arbitrário de parâmetros. É evidente que quando dois termos sucessivos da expressão acima pertencem a integrais finitas nós esperamos o cancelamento automático desta dependência artificial. Quando alguns dos termos da identidade estiverem presentes em integrais divergentes básicas, que, de fato, na nossa estratégia não serão jamais integradas, nós esperamos que a exigência de independência dos resultados com os parâmetros arbitrários nos forneça restrições sobre as propriedades dos objetos divergentes básicos ou propriedades matemáticas que estes devem obedecer com vistas a consistência no cálculo perturbativo. Estas propriedades incluem relações precisas entre objetos básicos divergentes com diferentes escalas adotadas. Isto permite que a qualquer momento dos cálculos possamos converter uma escolha prévia noutra mais conveniente, o que pode ser visto facilmente tomando um caso particular da expressão (5.8) do capítulo 5

$$\frac{1}{(k^2-\lambda_1^2)} = \frac{1}{(k^2-\lambda_2^2)} - \frac{(\lambda_1^2-\lambda_2^2)}{(k^2-\lambda_2^2)^2} + \frac{(\lambda_1^2-\lambda_2^2)^2}{(k^2-\lambda_1^2)^2(k^2-\lambda_2^2)}. \quad (6.8)$$

A integração de ambos os lados em  $k$ , nos fornece

$$I_{quad}(\lambda_1^2) = I_{quad}(\lambda_2^2) + (\lambda_1^2 - \lambda_2^2) I_{log}(\lambda_2^2) + i(4\pi)^{-2} \left[ \lambda_1^2 - \lambda_2^2 + \lambda_1^2 \ln \left( \frac{\lambda_2^2}{\lambda_1^2} \right) \right], \quad (6.9)$$

que permite a conversão de uma escolha noutra para o objeto básico quadraticamente divergente. De modo similar podemos construir a identidade

$$\frac{1}{(k^2-\lambda_1^2)^2} = \frac{1}{(k^2-\lambda_2^2)^2} - \frac{(\lambda_1^2-\lambda_2^2)}{(k^2-\lambda_1^2)^2(k^2-\lambda_2^2)} - \frac{(\lambda_1^2-\lambda_2^2)}{(k^2-\lambda_2^2)^2(k^2-\lambda_1^2)}, \quad (6.10)$$

cujas integrais nos fornece a relação

$$I_{log}(\lambda_1^2) = I_{log}(\lambda_2^2) - i(4\pi)^{-2} \left[ \ln \left( \frac{\lambda_1^2}{\lambda_2^2} \right) \right]. \quad (6.11)$$

A discussão que acabamos de promover serve para nos mostrar que apenas um parâmetro arbitrário é suficiente e relevante para as manipulações necessárias e pretendidas. Podemos então extrair uma



importante conclusão desta breve discussão que será muito útil para nossos propósitos neste capítulo. Podemos separar a parte divergente ultravioleta escolhendo para tal um parâmetro arbitrário para caracterizar os objetos básicos divergentes. Em qualquer instante podemos converter esta escolha, efetuando uma transformação de escala, permitida pelas relações (6.9) e (6.11). A relação direta desta conclusão com nossos problemas imediatos está na possibilidade de separar as divergências infravermelhas daquelas ultravioletas para estudá-las separadamente.

Adotaremos o seguinte procedimento:

a) Antes de efetuar as separações das partes finitas e divergentes (ultravioletas) introduziremos uma massa fictícia  $\mu^2$  onde aparecer o propagador do fóton.

b) Separamos as partes divergentes ultravioletas em objetos básicos  $I_{\log}$  e  $I_{quad}$  utilizando como escala a massa do elétron.

c) Resolvemos as integrais finitas obtidas e estudamos o comportamento no limite  $\mu^2 \rightarrow 0$ . A presença de termos divergentes neste limite implicará em divergências infravermelhas nas amplitudes correspondentes.

Tendo em mente a discussão acima vamos então considerar as integrais de nosso interesse.

### 6.2.1 Integral $J_2$

Consideremos inicialmente o cálculo da integral  $J_2$ , a qual, em sua forma explícita, foi definida por

$$J_2 = \int_{\Lambda} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{[(k+k_1)^2][(k+k_2)^2-m^2]}. \quad (6.12)$$

Seguindo o procedimento que adotamos, primeiro escrevemos

$$J_2 = \lim_{\mu^2 \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Lambda} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{[(k+k_1)^2 - \mu^2][(k+k_2)^2 - m^2]} \right\}. \quad (6.13)$$

Neste ponto, para manter a notação compacta, nós introduzimos a seguinte definição:

$$U_i = U(k_i, \mu^2) = [(k+k_i)^2 - \mu^2], \quad (6.14)$$

tal que o limite de conexão infravermelho fica

$$P_i = \lim_{\mu^2 \rightarrow 0} \{U_i\} = U(k_i, 0). \quad (6.15)$$

Assim,

$$J_2 = \lim_{\mu^2 \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Lambda} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{U_1 U_2} \right\}. \quad (6.16)$$

Esta integral é logaritmicamente divergente. Deste modo devemos utilizar a identidade (6.6) tomando como escala a massa do elétron, para ficar com

$$J_2 = \lim_{\mu^2 \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Lambda} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - m^2)^2} - \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{(k_1^2 + 2k_1 \cdot k + m^2 - \mu^2)}{(k^2 - m^2)^2 E_2} - \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{(k_2^2 + 2k_2 \cdot k)}{(k^2 - m^2) U_1 E_2} \right\}. \quad (6.17)$$

Seguindo a estratégia que adotamos, integramos diretamente as integrais finitas e obtemos

$$J_2 = I_{\log}(m^2) - i(4\pi)^{-2} \left[ \lim_{\mu^2 \rightarrow 0} Z_0(\mu^2, m^2, p^2; m^2) \right]. \quad (6.18)$$

Aqui fica claro o papel de escala comum desempenhado pela massa  $m$ . Na expressão acima adotamos  $p = k_2 - k_1$ . Para obtermos o resultado desejado necessitamos estudar o comportamento da função  $Z_0(\mu^2, m^2, p^2; m^2)$  no limite indicado. Isto foi feito no capítulo 4 onde percebemos que esta função tem bom comportamento para este limite. Podemos então escrever a expressão correspondente para a integral de Feynman considerada como

$$J_2 = I_{\log}(m^2) - i(4\pi)^{-2} [Z_0(0, m^2, p^2; m^2)], \quad (6.19)$$

onde utilizamos a definição (4.10) do capítulo 4.

### 6.2.2 Integral $J_2^\mu$

Consideremos agora a integral linearmente divergente definida por

$$J_2^\mu = \int_{\Lambda} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k^\mu}{[(k+k_1)^2][(k+k_2)^2 - m^2]}. \quad (6.20)$$

Seguindo o mesmo procedimento adotado acima, primeiro escrevemos

$$J_2^\mu = \lim_{\mu^2 \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Lambda} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k^\mu}{U_1 E_2} \right\}, \quad (6.21)$$

que pode ser escrita na forma

$$\begin{aligned} J_2^\mu = \lim_{\mu^2 \rightarrow 0} \left\{ & - \int_{\Lambda} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{(2k_2 \cdot k) k^\mu}{(k^2 - m^2)^3} \right. \\ & - \int_{\Lambda} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{(2k_1 \cdot k) k^\mu}{(k^2 - m^2)^3} \\ & + \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{(k_2^2 + 2k_2 \cdot k)^2 k^\mu}{(k^2 - m^2)^3 E_2} \\ & + \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{(k_2^2 + 2k_2 \cdot k) (k_1^2 + 2k_1 \cdot k + m^2 - \mu^2) k^\mu}{(k^2 - m^2)^3 E_2} \\ & \left. + \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{(k_1^2 + 2k_1 \cdot k + m^2 - \mu^2)^2 k^\mu}{(k^2 - m^2)^2 U_1 E_2} \right\}, \quad (6.22) \end{aligned}$$

que fica:

$$\begin{aligned} J_2^\mu = & - \frac{(k_2 + k_1)_\alpha}{2} [\Delta^{\alpha\mu}(m^2)] - \frac{(k_2 + k_1)^\mu}{2} I_{\log}(m^2) \\ & + i(4\pi)^{-2} \left\{ \lim_{\mu^2 \rightarrow 0} [ (k_2 - k_1)^\mu Z_1(\mu^2, m^2, p^2; m^2) \right. \\ & \left. + k_1^\mu Z_0(\mu^2, m^2, p^2; m^2) \right\}. \quad (6.23) \end{aligned}$$

Utilizando o conhecimento que temos do comportamento da função  $Z_k(\mu^2, m^2, p^2; m^2)$  no limite indicado, expressões (4.10) e (4.11) do capítulo 4, podemos obter o resultado desejado

$$\begin{aligned}
J_2^\mu &= -\frac{(k_2 + k_1)_\alpha}{2} [\Delta^{\alpha\mu}(m^2)] - \frac{(k_2 + k_1)^\mu}{2} I_{\log}(m^2) \\
&\quad + i(4\pi)^{-2} [p^\mu Z_1(0, m^2, p^2; m^2) + k_1^\mu Z_0(0, m^2, p^2; m^2)].
\end{aligned} \tag{6.24}$$

### 6.2.3 Integral $J_3$

Consideremos então as integrais definidas em (6.2). Primeiramente consideramos

$$J_3 = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{[(k + k_1)^2][(k + k_2)^2 - m^2](k + k_3)^2 - m^2].} \tag{6.25}$$

Seguindo o procedimento que adotamos, escrevemos inicialmente

$$J_3 = \lim_{\mu^2 \rightarrow 0} \left\{ \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{U_1 E_{23}} \right\}, \tag{6.26}$$

ou seja

$$J_3 = \lim_{\mu^2 \rightarrow 0} \{ I_3(k_1, \mu^2; k_2, m^2; k_3, m^2) \}. \tag{6.27}$$

Por contagem de potências é fácil constatar que a integral  $I_3$  é finita. Podemos integrá-la diretamente para obter

$$J_3 = i(4\pi)^{-2} \left\{ \lim_{\mu^2 \rightarrow 0} \xi_{00}(\mu^2, m^2, p^2, m^2, q^2) \right\}, \tag{6.28}$$

onde assumimos  $(k_2 - k_1) = p$  e  $(k_3 - k_1) = q$ . Após a tomada do limite indicado, representamos por

$$J_3 = i(4\pi)^{-2} \{ \xi_{00}(0, m^2, p^2, m^2, q^2) \}. \tag{6.29}$$

### 6.2.4 Integral $J_3^\mu$

A próxima a ser considerada, definida por

$$J_3^\mu = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k^\mu}{[(k + k_1)^2][(k + k_2)^2 - m^2](k + k_3)^2 - m^2],} \tag{6.30}$$

que escrevemos como

$$J_3^\mu = \lim_{\mu^2 \rightarrow 0} \left\{ \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k^\mu}{U_1 E_{23}} \right\}, \tag{6.31}$$

ou seja

$$J_3^\mu = \lim_{\mu^2 \rightarrow 0} \{ I_3^\mu(k_1, \mu^2; k_2, m^2; k_3, m^2) \}. \tag{6.32}$$

A integral  $I_3^\mu(k_1, \mu^2; k_2, m^2; k_3, m^2)$  é finita e ao ser integrada fornece

$$\begin{aligned}
J_3^\mu &= -i(4\pi)^{-2} \left\{ \lim_{\mu^2 \rightarrow 0} \left[ p^\mu \xi_{01}(\mu^2, m^2, p^2, m^2, q^2) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + q^\mu \xi_{10}(\mu^2, m^2, p^2, m^2, q^2) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - k_1^\mu \xi_{00}(\mu^2, m^2, p^2, m^2, q^2) \right] \right\}, \tag{6.33}
\end{aligned}$$

o que representamos como

$$\begin{aligned}
J_3^\mu &= -i(4\pi)^{-2} \left\{ \left[ p^\mu \xi_{01}(0, m^2, p^2, m^2, q^2) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + q^\mu \xi_{10}(0, m^2, p^2, m^2, q^2) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - k_1^\mu \xi_{00}(0, m^2, p^2, m^2, q^2) \right] \right\}. \tag{6.34}
\end{aligned}$$

### 6.2.5 Integral $J_3^{\mu\nu}$

Agora podemos considerar a última do conjunto (6.2), definida por

$$J_3^{\mu\nu} = \int_\Lambda \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k^\mu k^\nu}{[(k+k_1)^2][(k+k_2)^2-m^2](k+k_3)^2-m^2].} \tag{6.35}$$

Seguindo nossa estratégia, escrevemos isto na forma

$$J_3^{\mu\nu} = \lim_{\mu^2 \rightarrow 0} \left\{ \int_\Lambda \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k^\mu k^\nu}{U_1 E_{23}} \right\}, \tag{6.36}$$

ou seja

$$J_3^{\mu\nu} = \lim_{\mu^2 \rightarrow 0} \{ I_3^{\mu\nu}(k_1, \mu; k_2, m; k_3, m) \}. \tag{6.37}$$

Agora, devido ao caráter logaritmicamente divergente, primeiro necessitamos reorganizar o integrando.

Utilizamos a identidade (6.6) convenientemente e escrevemos

$$\begin{aligned}
J_3^{\mu\nu} &= \lim_{\mu^2 \rightarrow 0} \left\{ \int_\Lambda \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k^\mu k^\nu}{(k^2 - m^2)^3} \right. \\
&\quad - \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{(k_3^2 + 2k_3 \cdot k) k^\mu k^\nu}{(k^2 - m^2)^3 E_3} \\
&\quad - \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{(k_2^2 + 2k_2 \cdot k) k^\mu k^\nu}{(k^2 - m^2)^2 E_{23}} \\
&\quad \left. - \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{(k_1^2 + 2k_1 \cdot k + m^2 - \mu^2) k^\mu k^\nu}{(k^2 - m^2) U_1 E_{23}} \right\}. \tag{6.38}
\end{aligned}$$

Procedendo a integração dos termos finitos ficamos com

$$\begin{aligned}
J_3^{\mu\nu} &= \frac{1}{4} [\Delta^{\mu\nu} (m^2)] + \frac{1}{4} g^{\mu\nu} I_{\log} (m^2) \\
&+ i(4\pi)^{-2} \left\{ \lim_{\mu^2 \rightarrow 0} \left[ -\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \eta_{00} (\mu^2, m^2, p^2, m^2, q^2) \right. \right. \\
&\quad + q^\mu q^\nu \xi_{20} (\mu^2, m^2, p^2, m^2, q^2) \\
&\quad + p^\mu p^\nu \xi_{02} (\mu^2, m^2, p^2, m^2, q^2) \\
&\quad + [q^\mu p^\nu + p^\mu q^\nu] \xi_{11} (\mu^2, m^2, p^2, m^2, q^2) \\
&\quad + [k_1^\mu p^\nu + k_1^\nu p^\mu] \xi_{01} (\mu^2, m^2, p^2, m^2, q^2) \\
&\quad + [k_1^\mu q^\nu + k_1^\nu q^\mu] \xi_{10} (\mu^2, m^2, p^2, m^2, q^2) \\
&\quad \left. \left. + k_1^\mu k_1^\nu \xi_{00} (\mu^2, m^2, p^2, m^2, q^2) \right] \right\}, \tag{6.39}
\end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}
\eta_{00} (\mu^2, m^2, p^2, m^2, q^2; m^2) &= \frac{1}{2} Z_0(m^2, m^2, (p-q)^2; m^2) \\
&+ \frac{(p^2 + \mu^2 - m^2)}{2} \xi_{01} (\mu^2, m^2, p^2, m^2, q^2) \\
&+ \frac{(q^2 + \mu^2 - m^2)}{2} \xi_{10} (\mu^2, m^2, p^2, m^2, q^2) \\
&- \left[ \frac{1}{2} + \mu^2 \xi_{00} (\mu^2, m^2, p^2, m^2, q^2) \right]. \tag{6.40}
\end{aligned}$$

Basta agora tomar o limite  $\mu^2 \rightarrow 0$  para obter o resultado desejado. Para isso tomamos as funções  $\xi'_{nm}$ s na expressão acima a valor nulo para a massa correspondente ao propagador do fóton. Representaremos isto por

$$\begin{aligned}
J_3^{\mu\nu} &= \frac{1}{4} [\Delta^{\mu\nu} (m^2)] + \frac{1}{4} g^{\mu\nu} I_{\log} (m^2) \\
&+ i(4\pi)^{-2} \left\{ \left[ -\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \eta_{00} (0, m^2, p^2, m^2, q^2) \right. \right. \\
&\quad + q^\mu q^\nu \xi_{20} (0, m^2, p^2, m^2, q^2) \\
&\quad + p^\mu p^\nu \xi_{02} (0, m^2, p^2, m^2, q^2) \\
&\quad + [q^\mu p^\nu + p^\mu q^\nu] \xi_{11} (0, m^2, p^2, m^2, q^2) \\
&\quad + [k_1^\mu p^\nu + k_1^\nu p^\mu] \xi_{01} (0, m^2, p^2, m^2, q^2) \\
&\quad + [k_1^\mu q^\nu + k_1^\nu q^\mu] \xi_{10} (0, m^2, p^2, m^2, q^2) \\
&\quad \left. \left. + k_1^\mu k_1^\nu \xi_{00} (0, m^2, p^2, m^2, q^2) \right] \right\}. \tag{6.41}
\end{aligned}$$

### 6.2.6 Integral $L_2$

Consideremos agora as integrais contendo pólo duplo no propagador do fóton. Neste caso temos várias opções equivalentes de procedimentos. Vamos mostrar isto tratando a integral

$$L_2 = \int_{\Lambda} \frac{d^4 k}{(2\pi)} \frac{1}{[(k + k_1)^2]^2}, \quad (6.42)$$

a qual primeiramente escrevemos na forma

$$L_2 = \lim_{\mu^2 \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Lambda} \frac{d^4 k}{(2\pi)} \frac{1}{[U_1]^2} \right\}. \quad (6.43)$$

Notemos que a expressão acima pode ser reescrita na forma

$$L_2 = \lim_{\mu^2 \rightarrow 0} \left\{ \frac{\partial}{\partial \mu^2} \left[ \int_{\Lambda} \frac{d^4 k}{(2\pi)} \frac{1}{U_1} \right] \right\}, \quad (6.44)$$

ou seja,

$$L_2 = \lim_{\mu^2 \rightarrow 0} \left\{ \frac{\partial}{\partial \mu^2} [I_1(k_1, \mu^2)] \right\}. \quad (6.45)$$

Onde utilizamos a definição (5.1) do capítulo 5. Este procedimento, que pode ser seguido em todas as integrais pertencentes a esta classe, permite relacionarmos estas integrais com outras onde não teremos o pólo duplo associado ao propagador do fóton. Assim devemos tratar a integral obtida tomando como escala a massa do elétron

$$\begin{aligned} I_1(k_1, \mu^2) &= \int_{\Lambda} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - m^2)} \\ &\quad - \int_{\Lambda} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{(k_1^2 + m^2 - \mu^2)}{(k^2 - m^2)^2} \\ &\quad + \int_{\Lambda} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{(k_1^2 + 2k_1 \cdot k + m^2 - \mu^2)^2}{(k^2 - m^2)^3} \\ &\quad - \int_{\Lambda} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{(k_1^2 + 2k_1 \cdot k + m^2 - \mu^2)^3}{(k^2 - m^2)^3 U_1}. \end{aligned} \quad (6.46)$$

Procedendo a integração dos termos finitos teremos:

$$\begin{aligned} I_1(k_1, \mu^2) &= +k_1^\alpha k_1^\beta \Delta_{\alpha\beta}(m^2) \\ &\quad + I_{quad}(m^2) + (\mu^2 - m^2) I_{log}(m^2) \\ &\quad + i(4\pi)^{-2} \left[ \mu^2 - m^2 + \mu^2 \ln \left( \frac{m^2}{\mu^2} \right) \right]. \end{aligned} \quad (6.47)$$

Assim,

$$\begin{aligned} L_2 &= \lim_{\mu^2 \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial \mu^2} \left\{ k_1^\alpha k_1^\beta \Delta_{\alpha\beta}(m^2) \right. \\ &\quad + I_{quad}(m^2) + (\mu^2 - m^2) I_{log}(m^2) \\ &\quad \left. + i(4\pi)^{-2} \left[ \mu^2 - m^2 + \mu^2 \ln \left( \frac{m^2}{\mu^2} \right) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (6.48)$$

Portanto ficamos com

$$L_2 = I_{log}(m^2) - i(4\pi)^{-2} \left[ \lim_{\mu^2 \rightarrow 0} \ln \left( \frac{\mu^2}{m^2} \right) \right], \quad (6.49)$$

o que indica claramente a presença de uma divergência infravermelha. Note que em virtude de (6.11) teremos

$$L_2 = \lim_{\mu^2 \rightarrow 0} [I_{log}(\mu^2)]. \quad (6.50)$$

A mesma integral poderia ser calculada de outro modo. Tomamos inicialmente a integral geral

$$I_2(k_1, \mu_1^2; k_2, \mu_2^2) = \int_{\Lambda} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{[(k+k_1)^2 - \mu_1^2][(k+k_2)^2 - \mu_2^2]}, \quad (6.51)$$

da qual podemos num passo futuro retirar o resultado desejado com um caso particular. Com a utilização de identidade (6.6), tomando como escala a massa do elétron, podemos escrever

$$\begin{aligned} I_2(k_1, \mu_1^2; k_2, \mu_2^2) &= \int_{\Lambda} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - m^2)^2} \\ &\quad - \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{(k_2^2 + 2k_2 \cdot k + m^2 - \mu_2^2)}{(k^2 - m^2)^2 U_2} \\ &\quad - \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{(k_1^2 + 2k_1 \cdot k + m^2 - \mu_1^2)}{(k^2 - m^2) U_{12}}. \end{aligned} \quad (6.52)$$

Integrando diretamente as integrais finitas obtemos

$$I_2(k_1, \mu_1^2; k_2, \mu_2^2) = I_{log}(m^2) - i(4\pi)^{-2} \left[ Z_0(\mu_1^2, \mu_2^2, (k_1 - k_2)^2; m^2) \right]. \quad (6.53)$$

Então tomamos  $k_1 = k_2$  já que a função  $Z_0$  é bem comportada neste limite, para ficar com

$$I_2(k_1, \mu_1^2; k_1, \mu_2^2) = I_{log}(m^2) - i(4\pi)^{-2} \left[ Z_0(\mu_1^2, \mu_2^2, 0; m^2) \right]. \quad (6.54)$$

Tomando então, sem problemas,  $\mu_1^2 = \mu_2^2 = \mu^2$ , teremos

$$I_2(k_1, \mu^2; k_1, \mu^2) = I_{log}(m^2) - i(4\pi)^{-2} \int_0^1 dz \left[ \ln \left( \frac{\mu^2}{m^2} \right) \right]. \quad (6.55)$$

Após a tomada do limite para valor nulo da massa fictícia  $\mu^2$  obteremos o resultado correspondente a  $L_2$  que coincide com aquele que obtivemos anteriormente, Eq. (6.49).

### 6.2.7 Integral $L_2^\mu$

Consideremos agora a integral

$$L_2^\mu = \int_{\Lambda} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k^\mu}{[(k+k_1)^2]^2}, \quad (6.56)$$

a qual primeiramente escrevemos na forma

$$L_2^\mu = \lim_{\mu^2 \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Lambda} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k^\mu}{[U_1]^2} \right\}. \quad (6.57)$$

Notemos que a expressão acima pode ser reescrita na forma

$$L_2^\mu = \lim_{\mu^2 \rightarrow 0} \left\{ \frac{\partial}{\partial \mu^2} \left[ \int_\Lambda \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k^\mu}{U_1} \right] \right\}, \quad (6.58)$$

ou seja,

$$L_2^\mu = \lim_{\mu^2 \rightarrow 0} \left\{ \frac{\partial}{\partial \mu^2} [I_1^\mu(k_1, \mu)] \right\}. \quad (6.59)$$

Onde utilizamos a definição (5.1) do capítulo 5. Agora devemos tratar a integral obtida. Fazemos inicialmente

$$\begin{aligned} I_1^\mu &= - \int_\Lambda \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{(2k_1 \cdot k) k^\mu}{(k^2 - m^2)^2} \\ &+ \int_\Lambda \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{2(k_1^2 + m^2 - \mu^2)(2k_1 \cdot k) k^\mu}{(k^2 - m^2)^3} \\ &- \int_\Lambda \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{(2k_1 \cdot k)^3 k^\mu}{(k^2 - m^2)^4} \\ &- \int_\Lambda \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{3(k_1^2 + m^2 - \mu^2)^2 (2k_1 \cdot k) k^\mu}{(k^2 - m^2)^4} \\ &+ \int_\Lambda \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{(k_1^2 + 2k_1 \cdot k + m^2 - \mu^2)^4 k^\mu}{(k^2 - m^2)^4 U_1}. \end{aligned} \quad (6.60)$$

Em seguida procedendo a integração dos termos finitos teremos:

$$\begin{aligned} I_1^\mu &= -k_1^\mu \left\{ I_{quad}(m^2) - (m^2 - \mu^2) I_{\log}(m^2) - i(4\pi)^{-2} \left[ m^2 - \mu^2 + \mu^2 \ln\left(\frac{\mu^2}{m^2}\right) \right] \right\} \\ &- k_{1\beta} \left[ \nabla^{\mu\beta}(m^2) \right] - \frac{1}{3} k_{1\beta} k_{1\alpha} k_{1\nu} \left[ \square^{\alpha\beta\mu\nu}(m^2) \right] \\ &- \frac{2k_1^2 k_{1\beta}}{3} \left[ \Delta^{\mu\beta}(m^2) \right] - \frac{k_1^\mu k_{1\beta} k_{1\xi}}{3} \left[ \Delta^{\beta\xi}(m^2) \right] \\ &+ k_{1\alpha} (k_1^2 + m^2 - \mu^2) \left[ \Delta^{\mu\alpha}(m^2) \right] \end{aligned} \quad (6.61)$$

Assim, derivando em relação a  $\mu^2$  teremos

$$L_2^\mu = -k_{1\alpha} \left[ \Delta^{\mu\alpha}(m^2) \right] - k_1^\mu \left\{ I_{\log}(m^2) - i(4\pi)^{-2} \left[ \lim_{\mu^2 \rightarrow 0} \ln\left(\frac{\mu^2}{m^2}\right) \right] \right\}, \quad (6.62)$$

o que indica também aqui a presença de divergência infravermelha. Note que isto é igual a

$$L_2^\mu = -k_1^\mu L_2 - k_{1\alpha} \left[ \Delta^{\mu\alpha}(m^2) \right]. \quad (6.63)$$

A mesma integral poderia ser calculada de outro modo. Tomamos inicialmente a integral geral

$$I_2^\mu(k_1, \mu_1^2; k_2, \mu_2^2) = \left\{ \int_\Lambda \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k^\mu}{[(k + k_1)^2 - \mu_1^2][(k + k_2)^2 - \mu_2^2]} \right\}. \quad (6.64)$$

Com a utilização da identidade (6.6), tomando como escala a massa do elétron, podemos escrever



$$\begin{aligned}
I_2^\mu(k_1, \mu_1^2; k_2, \mu_2^2) &= - \int_\Lambda \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{(2k_2 \cdot k) k^\mu}{(k^2 - m^2)^3} \\
&\quad - \int_\Lambda \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{(2k_1 \cdot k) k^\mu}{(k^2 - m^2)^3} \\
&\quad + \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{(k_2^2 + 2k_2 \cdot k + m^2 - \mu_2^2)^2 k^\mu}{(k^2 - m^2)^3 E_2} \\
&\quad + \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{(k_1^2 + 2k_1 \cdot k + m^2 - \mu_1^2)^2 k^\mu}{(k^2 - m^2)^3 E_2} \\
&\quad + \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{(k_1^2 + 2k_1 \cdot k + m^2 - \mu_1^2)^2 k^\mu}{(k^2 - m^2)^2 E_{12}}.
\end{aligned} \tag{6.65}$$

Integrando diretamente as integrais finitas obtemos

$$\begin{aligned}
I_2^\mu(k_1, \mu_1^2; k_1, \mu_2^2) &= - \frac{(k_2 + k_1)_\alpha}{2} [\Delta^{\alpha\mu}(m^2)] - \frac{(k_2 + k_1)^\mu}{2} [I_{\log}(m^2)] \\
&\quad + i(4\pi)^{-2} \left[ (k_1 - k_2)^\mu Z_1(\mu_1^2, \mu_2^2, (k_1 - k_2)^2; m^2) \right. \\
&\quad \quad \left. - k_1^\mu Z_0(\mu_1^2, \mu_2^2, (k_1 - k_2)^2; m^2) \right].
\end{aligned} \tag{6.66}$$

Então tomamos  $k_1 = k_2$  para ficar com

$$\begin{aligned}
I_2^\mu(k_1, \mu_1^2; k_1, \mu_2^2) &= -k_{1\alpha} [\Delta^{\alpha\mu}(m^2)] - k_1^\mu [I_{\log}(m^2)] \\
&\quad - i(4\pi)^{-2} [k_1^\mu Z_0(\mu_1^2, \mu_2^2, 0; m^2)].
\end{aligned} \tag{6.67}$$

Finalmente, tomando  $\mu_1^2 = \mu_2^2 = \mu^2$ , teremos

$$I_2^\mu(k_1, \mu^2; k_1, \mu^2) = -k_{1\alpha} [\Delta^{\alpha\mu}(m^2)] - k_1^\mu \left\{ I_{\log}(m^2) - i(4\pi)^{-2} \left[ \ln\left(\frac{\mu^2}{m^2}\right) \right] \right\}. \tag{6.68}$$

A última etapa é a tomada do limite de valor nulo para a massa fictícia  $\mu^2$ . O valor obtido é idêntico àquele que obtivemos anteriormente, Eq.(6.62).

É importante notar, para propósitos futuros que

$$I_2^\mu(k_1, \mu^2; k_1, \mu^2) + k_1^\mu I_2(k_1, \mu^2; k_1, \mu^2) = -k_{1\alpha} [\Delta^{\alpha\mu}(m^2)] \tag{6.69}$$

o que significa que esta combinação é livre de divergências infravermelhas.

### 6.2.8 Integral $L_3$

Consideremos as integrais definidas em (6.4). Primeiramente consideramos aquela definida por

$$L_3 = \left\{ \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{[(k + k_1)^2]^2 [(k + k_2)^2 - m^2]} \right\}. \tag{6.70}$$

Seguiremos os procedimentos utilizados acima para o tratamento da integral. Primeiro escrevemos

$$\begin{aligned}
L_3 &= \lim_{\mu^2 \rightarrow 0} \left\{ \int \frac{d^4 k}{(2\pi)} \frac{1}{[U_1]^2 E_2} \right\} \\
&= \lim_{\mu^2 \rightarrow 0} \left\{ \frac{\partial}{\partial \mu^2} \int_{\Lambda} \frac{d^4 k}{(2\pi)} \frac{1}{U_1 E_2} \right\} \\
&= \lim_{\mu^2 \rightarrow 0} \left\{ \frac{\partial}{\partial \mu^2} [I_2(k_1, \mu; k_2, m)] \right\}.
\end{aligned} \tag{6.71}$$

Tratamos então a integral  $I_2(k_1, \mu^2; k_2, m^2)$  de acordo com a prescrição que adotamos. Escrevemos primeiro

$$\begin{aligned}
I_2(k_1, \mu^2; k_2, m^2) &= \int_{\Lambda} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - m^2)^2} \\
&\quad - \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{(k_2^2 + 2k_2 \cdot k)}{(k^2 - m^2)^2 E_2} \\
&\quad - \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{(k_1^2 + 2k_1 \cdot k + m^2 - \mu^2)}{(k^2 - m^2) E_{12}}.
\end{aligned} \tag{6.72}$$

Resolvendo as integrais finitas teremos

$$I_2(k_1, \mu^2; k_2, m^2) = I_{log}(m^2) - i(4\pi)^{-2} [Z_0(\mu^2, m^2, p^2; m^2)]. \tag{6.73}$$

Assim

$$L_3 = \lim_{\mu^2 \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial \mu^2} \{ I_{log}(m^2) - i(4\pi)^{-2} [Z_0(\mu^2, m^2, p^2; m^2)] \}. \tag{6.74}$$

utilizando a relação

$$Y_k(\mu^2, m^2, q^2; \lambda^2) = \lambda^2 \frac{\partial}{\partial \mu^2} [Z_k(\mu^2, m^2, q^2; \lambda^2)], \tag{6.75}$$

introduzida no capítulo 4, ficamos com

$$L_3 = -i(4\pi)^{-2} \left\{ \lim_{\mu^2 \rightarrow 0} \left[ \frac{Y_0(\mu^2, m^2, p^2; m^2)}{m^2} \right] \right\}, \tag{6.76}$$

resultado que representaremos como

$$L_3 = -i(4\pi)^{-2} \left\{ \frac{Y_0(0, m^2, p^2; m^2)}{m^2} \right\}. \tag{6.77}$$

### 6.2.9 Integral $L_3^\mu$

Consideremos a integral definida em (6.4) como

$$L_3^\mu = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)} \frac{k^\mu}{[(k+k_1)^2]^2 [(k+k_2)^2 - m^2]}. \tag{6.78}$$

Seguindo o mesmo procedimento escrevemos primeiro

$$\begin{aligned}
L_3^\mu &= \lim_{\mu^2 \rightarrow 0} \left\{ \int \frac{d^4 k}{(2\pi)} \frac{k^\mu}{[U_1]^2 E_1} \right\} \\
&= \lim_{\mu^2 \rightarrow 0} \left\{ \frac{\partial}{\partial \mu^2} [I_2^\mu(k_1, \mu^2; k_2, m^2)] \right\}.
\end{aligned} \tag{6.79}$$

Agora desenvolvemos a integral  $I_2^\mu(k_1, \mu; k_2, m)$  de acordo com a estratégia que adotamos. Para tal primeiro escrevemos

$$\begin{aligned}
I_2^\mu(k_1, \mu; k_2, m) &= - \int_\Lambda \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{(2k_2 \cdot k) k^\mu}{(k^2 - m^2)^3} \\
&\quad - \int_\Lambda \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{(2k_1 \cdot k) k^\mu}{(k^2 - m^2)^3} \\
&\quad + \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{(k_2^2 + 2k_2 \cdot k)^2 k^\mu}{(k^2 - m^2)^3 E_2} \\
&\quad + \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{(k_2^2 + 2k_2 \cdot k) (k_1^2 + 2k_1 \cdot k + m^2 - \mu^2) k^\mu}{(k^2 - m^2)^3 E_2} \\
&\quad + \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{(k_1^2 + 2k_1 \cdot k + m^2 - \mu^2)^2 k^\mu}{(k^2 - m^2)^2 U_1 E_2}.
\end{aligned} \tag{6.80}$$

Resolvendo as integrais finitas teremos

$$\begin{aligned}
I_2^\mu(k_1, \mu; k_2, m) &= -\frac{(k_2 + k_1)_\alpha \Delta^{\alpha\mu}(m^2)}{2} - \frac{(k_2 + k_1)^\mu}{2} [I_{\log}(m^2)] \\
&\quad + i(4\pi)^{-2} [p^\mu Z_1(\mu^2, m^2, p^2; m^2) \\
&\quad \quad + k_1^\mu Z_0(\mu^2, m^2, p^2; m^2)].
\end{aligned} \tag{6.81}$$

Assim ficamos com

$$L_3^\mu = i(4\pi)^{-2} \left\{ \lim_{\mu^2 \rightarrow 0} \left[ p^\mu \frac{Y_1(\mu^2, m^2, p^2; m^2)}{m^2} + k_1^\mu \frac{Y_0(\mu^2, m^2, p^2; m^2)}{m^2} \right] \right\}. \tag{6.82}$$

### 6.2.10 Integral $L_4$

Por fim, consideramos então as integrais do conjunto (6.5). Primeiro tomemos

$$L_4 = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{[(k + k_1)^2]^2 [(k + k_2)^2 - m^2] [(k + k_3)^2 - m^2]}, \tag{6.83}$$

que escrevemos na forma

$$\begin{aligned}
L_4 &= \lim_{\mu^2 \rightarrow 0} \left\{ \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{[U_1]^2 E_{23}} \right\} \\
&= \lim_{\mu^2 \rightarrow 0} \left\{ \frac{\partial}{\partial \mu^2} [I_3(k_1, \mu^2; k_2, m^2; k_3, m^2)] \right\}.
\end{aligned} \tag{6.84}$$

Agora utilizamos o resultado

$$I_3(k_1, \mu^2; k_2, m^2; k_3, m^2) = i(4\pi)^{-2} [\xi_{00}(\mu^2, m^2, p^2, m^2, q^2)]. \tag{6.85}$$

Com isso teremos

$$L_4 = i(4\pi)^{-2} \left\{ \lim_{\mu^2 \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial \mu^2} [\xi_{00}(\mu^2, m^2, p^2, m^2, q^2)] \right\}. \tag{6.86}$$

e assim

$$L_4 = i(4\pi)^{-2} \left\{ \lim_{\mu^2 \rightarrow 0} [\sigma_{00}(\mu^2, m^2, p^2, m^2, q^2)] \right\}, \quad (6.87)$$

onde utilizamos a relação, introduzida no capítulo 4,

$$\frac{\partial}{\partial \mu^2} (\xi_{nm}) = \sigma_{nm}. \quad (6.88)$$

e também  $p = k_2 - k_1$  e  $q = k_3 - k_1$ . Representaremos o resultado obtido por

$$L_4 = i(4\pi)^{-2} [\sigma_{00}(0, m^2, p^2, m^2, q^2)]. \quad (6.89)$$

### 6.2.11 Integral $L_4^\mu$

Agora consideramos a integral.

$$L_4^\mu = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)} \frac{k^\mu}{[(k+k_1)^2]^2 [(k+k_2)^2 - m^2] [(k+k_3)^2 - m^2]}. \quad (6.90)$$

Primeiro reescrevemos como

$$\begin{aligned} L_4^\mu &= \lim_{\mu^2 \rightarrow 0} \left\{ \int \frac{d^4 k}{(2\pi)} \frac{k^\mu}{[U_1]^2 E_{23}} \right\} \\ &= \lim_{\mu^2 \rightarrow 0} \left\{ \frac{\partial}{\partial \mu^2} [I_3^\mu(k_1, \mu^2; k_2, m^2; k_3, m^2)] \right\}. \end{aligned} \quad (6.91)$$

Então substituímos o resultado para  $I_3^\mu(k_1, \mu^2; k_2, m^2; k_3, m^2)$ , expressão acima para ficar com

$$\begin{aligned} L_4^\mu &= -i(4\pi)^{-2} \left\{ \lim_{\mu^2 \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial \mu^2} [ p^\mu \xi_{01}(\mu^2, m^2, p^2, m^2, q^2) \right. \\ &\quad + q^\mu \xi_{10}(\mu^2, m^2, p^2, m^2, q^2) \\ &\quad \left. - k_1^\mu \xi_{00}(\mu^2, m^2, p^2, m^2, q^2) \right\}. \end{aligned} \quad (6.92)$$

Portanto teremos

$$\begin{aligned} L_4^\mu &= -i(4\pi)^{-2} \left\{ \lim_{\mu^2 \rightarrow 0} [ p^\mu \sigma_{01}(\mu^2, m^2, p^2, m^2, q^2) \right. \\ &\quad + q^\mu \sigma_{10}(\mu^2, m^2, p^2, m^2, q^2) \\ &\quad \left. - k_1^\mu \sigma_{00}(\mu^2, m^2, p^2, m^2, q^2) \right\}, \end{aligned} \quad (6.93)$$

o que representaremos como

$$\begin{aligned} L_4^\mu &= -i(4\pi)^{-2} [ p^\mu \sigma_{01}(0, m^2, p^2, m^2, q^2) \\ &\quad + q^\mu \sigma_{10}(0, m^2, p^2, m^2, q^2) \\ &\quad - k_1^\mu \sigma_{00}(0, m^2, p^2, m^2, q^2) ]. \end{aligned} \quad (6.94)$$

### 6.2.12 Integral $L_4^{\mu\nu}$

Finalmente consideramos a integral

$$L_4^{\mu\nu} = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)} \frac{k^\mu k^\nu}{[(k+k_1)^2][(k+k_2)^2-m^2][(k+k_3)^2-m^2]}. \quad (6.95)$$

Por primeiro escrevemos

$$\begin{aligned} L_4^{\mu\nu} &= \lim_{\mu^2 \rightarrow 0} \left\{ \int \frac{d^4 k}{(2\pi)} \frac{k^\mu k^\nu}{[U_1]^2 E_{23}} \right\} \\ &= \lim_{\mu^2 \rightarrow 0} \left\{ \frac{\partial}{\partial \mu^2} [I_3^{\mu\nu}(k_1, \mu^2; k_2, m^2; k_3, m^2)] \right\}. \end{aligned} \quad (6.96)$$

Para completar calculamos  $I_3^{\mu\nu}(k_1, \mu^2; k_2, m^2; k_3, m^2)$ , de acordo com a prescrião que adotamos. Primeiro escrevemos

$$\begin{aligned} I_3^{\mu\nu} &= \int_{\Lambda} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k^\mu k^\nu}{(k^2 - m^2)^3} \\ &\quad - \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{(k_3^2 + 2k_3 \cdot k) k^\mu k^\nu}{(k^2 - m^2)^3 E_3} \\ &\quad - \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{(k_2^2 + 2k_2 \cdot k) k^\mu k^\nu}{(k^2 - m^2)^2 E_{23}} \\ &\quad - \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{(k_1^2 + 2k_1 \cdot k + m^2 - \mu^2) k^\mu k^\nu}{(k^2 - m^2) U_1 E_{23}}. \end{aligned} \quad (6.97)$$

Então resolvemos as integrais finitas para ficar com

$$\begin{aligned} L_4^{\mu\nu} &= \lim_{\mu^2 \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial \mu^2} \left\{ \frac{1}{4} [\Delta^{\mu\nu}(m^2)] + \frac{1}{4} g^{\mu\nu} I_{\log}(m^2) \right\} \\ &\quad + i(4\pi)^{-2} \left\{ \lim_{\mu^2 \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial \mu^2} \left[ q^\mu q^\nu \xi_{20}(\mu^2, m^2, p^2, m^2, q^2) \right. \right. \\ &\quad \quad \left. \left. + p^\mu p^\nu \xi_{02}(\mu^2, m^2, p^2, m^2, q^2) \right. \right. \\ &\quad \quad \left. \left. + [q^\mu p^\nu + p^\mu q^\nu] \xi_{11}(\mu^2, m^2, p^2, m^2, q^2) \right. \right. \\ &\quad \quad \left. \left. - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \eta_{00}(\mu^2, m^2, p^2, m^2, q^2; m^2) \right] \right\} \\ &\quad - k_1^\mu i (4\pi)^{-2} \left\{ \lim_{\mu^2 \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial \mu^2} [p^\nu \xi_{01}(\mu^2, m^2, p^2, m^2, q^2) + q^\nu \xi_{10}(\mu^2, m^2, p^2, m^2, q^2)] \right\} \\ &\quad - k_1^\nu i (4\pi)^{-2} \left\{ \lim_{\mu^2 \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial \mu^2} [p^\mu \xi_{01}(\mu^2, m^2, p^2, m^2, q^2) + q^\mu \xi_{10}(\mu^2, m^2, p^2, m^2, q^2)] \right\} \\ &\quad + k_1^\mu k_1^\nu i (4\pi)^{-2} \left\{ \lim_{\mu^2 \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial \mu^2} [\xi_{00}(\mu^2, m^2, p^2, m^2, q^2)] \right\}. \end{aligned} \quad (6.98)$$

A derivada indicada fornece

$$\begin{aligned}
L_4^{\mu\nu} = i(4\pi)^{-2} \left\{ \lim_{\mu^2 \rightarrow 0} [q^\mu q^\nu \sigma_{20}(\mu^2, m^2, p^2, m^2, q^2) \right. \\
+ p^\mu p^\nu \sigma_{02}(\mu^2, m^2, p^2, m^2, q^2) \\
+ [q^\mu p^\nu + p^\mu q^\nu] \sigma_{11}(\mu^2, m^2, p^2, m^2, q^2) \\
- \frac{1}{2} g^{\mu\nu} [-\xi_{00}(\mu^2, m^2, p^2, m^2, q^2) \\
+ \xi_{10}(\mu^2, m^2, p^2, m^2, q^2) \\
+ \xi_{01}(\mu^2, m^2, p^2, m^2, q^2)] \\
- [k_1^\mu p^\nu + k_1^\nu p^\mu] \sigma_{01}(\mu^2, m^2, p^2, m^2, q^2) \\
- [k_1^\mu q^\nu + k_1^\nu q^\mu] \sigma_{10}(\mu^2, m^2, p^2, m^2, q^2) \\
\left. + k_1^\mu k_1^\nu \sigma_{00}(\mu^2, m^2, p^2, m^2, q^2) \right\}, \tag{6.99}
\end{aligned}$$

e adotaremos a representação

$$\begin{aligned}
L_4^{\mu\nu} = i(4\pi)^{-2} \left\{ [q^\mu q^\nu \sigma_{20}(0, m^2, p^2, m^2, q^2) \right. \\
+ p^\mu p^\nu \sigma_{02}(0, m^2, p^2, m^2, q^2) \\
+ [q^\mu p^\nu + p^\mu q^\nu] \sigma_{11}(0, m^2, p^2, m^2, q^2) \\
- \frac{1}{2} g^{\mu\nu} [-\xi_{00}(0, m^2, p^2, m^2, q^2) \\
+ \xi_{10}(0, m^2, p^2, m^2, q^2) \\
+ \xi_{01}(0, m^2, p^2, m^2, q^2)] \\
- [k_1^\mu p^\nu + k_1^\nu p^\mu] \sigma_{01}(0, m^2, p^2, m^2, q^2) \\
- [k_1^\mu q^\nu + k_1^\nu q^\mu] \sigma_{10}(0, m^2, p^2, m^2, q^2) \\
\left. + k_1^\mu k_1^\nu \sigma_{00}(0, m^2, p^2, m^2, q^2) \right\}. \tag{6.100}
\end{aligned}$$

Com isso concluímos os cálculos de todas integrais de Feynman necessárias para que possamos explicitar as amplitudes correspondentes aos processos selecionados no capítulo II pertinentes à QED, para a solução perturbativa ao nível um “loop”. De posse dos resultados das integrais de Feynman, torna-se possível então o cálculo propriamente dito das amplitudes divergentes da QED. Este será portanto, o assunto do próximo capítulo.

## Capítulo 7

# Forma explícita e propriedades das funções de Green divergentes

### 7.1 Introdução

No capítulo 3 estabelecemos as amplitudes relevantes para o estudo perturbativo da EDQ ao nível um “loop” e também consideramos alguns vínculos de consistência pertinentes. Em virtude da presença de divergências nas amplitudes físicas, apresentamos nos capítulos 5 e 6 uma estratégia de cálculo, para o tratamento das integrais de Feynman que apareceram nas expressões para as amplitudes fundamentais da EDQ, alternativa às regularizações usuais. No contexto da referida estratégia, os integrandos são manipulados através do uso de identidades de tal forma que os momentos internos não mais estejam presentes em estruturas divergentes. Estas últimas, por sua vez, não são de fato calculadas mas apenas reorganizadas nos objetos básicos divergentes  $\square_{\alpha\beta\mu\nu}(m^2)$ ,  $\Delta_{\mu\nu}(m^2)$ ,  $\nabla_{\mu\nu}(m^2)$ ,  $I_{log}(m^2)$  e  $I_{quad}(m^2)$ , definidos nas equações (5.9)-(5.13) do capítulo 5. Isto nos possibilita manter todas as arbitrariedades intrínsecas aos cálculos ainda presentes no resultado final. Além disso, todas as partes integradas (finitas) das integrais foram escritas em termos das funções  $Z_k$ ,  $\xi_{nm}$  e  $\zeta_{nml}$ , para funções de dois, três e quatro pontos respectivamente. Tais funções foram definidas e estudadas no capítulo 4. As propriedades destas funções permitem que todas as amplitudes consideradas possam ser escritas como uma combinação de somente três peças básicas:  $Z_0$ ,  $\xi_{00}$ , e  $\zeta_{000}$ . Neste capítulo vamos dar continuidade ao estudo das amplitudes da EDQ, utilizando para tal os resultados obtidos para as integrais de Feynman. Escreveremos formas explícitas para as amplitudes com seus termos potencialmente ambíguos, quando for o caso, e verificaremos se as expressões obtidas satisfazem as relações entre funções de Green que estabelecemos no capítulo 3 para as formas não calculadas. Com isso teremos condições de identificar, no próximo capítulo, os papéis desempenhados pelas arbitrariedades intrínsecas aos cálculos perturbativos na manutenção das relações de simetria.

### 7.1.1 A Função de um ponto vetorial

Começamos considerando o cálculo da função de Green contendo somente um propagador fermiônico, para a qual obtivemos

$$T_\mu^V(k_1, m) = 4 \left\{ (I_1)_\mu + k_{1\mu} I_1 \right\}. \quad (7.1)$$

A partir da equação acima vemos que obtemos duas integrais divergentes, tendo graus de divergência cúbica e quadrática, as quais foram consideradas na seção 2 capítulo 5, expressões (5.16) e (5.19). Substituindo os resultados obtidos na expressão acima teremos:

$$\begin{aligned} T_\mu^V(k_1, m) &= 4 \left\{ -k_{1\mu} I_{quad}(m^2) \right. \\ &\quad - k_1^\beta [\nabla_{\beta\mu}(m^2)] - \frac{1}{3} k_1^\beta k_1^\alpha k_1^\nu [\square_{\alpha\beta\mu\nu}(m^2)] \\ &\quad \left. + \frac{k_1^2 k_{1\beta}}{3} [\Delta_{\mu\beta}(m^2)] - \frac{k_{1\mu} k_{1\beta} k_{1\xi}}{3} [\Delta_{\beta\xi}(m^2)] \right\} \\ &\quad + 4k_{1\mu} \left\{ I_{quad}(m^2) + k_{1\alpha} k_{1\beta} \Delta_{\alpha\beta}(m^2) \right\}, \end{aligned} \quad (7.2)$$

que fica então

$$\begin{aligned} T_\mu^V(k_1, m) &= 4 \left\{ -k_1^\beta [\nabla_{\beta\mu}(m^2)] - \frac{1}{3} k_1^\beta k_1^\alpha k_1^\nu [\square_{\alpha\beta\mu\nu}(m^2)] \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{3} k_1^2 k_1^\nu [\Delta_{\nu\mu}(m^2)] + \frac{2}{3} k_{1\mu} k_{1\alpha} k_{1\beta} [\Delta^{\alpha\beta}(m^2)] \right\}. \end{aligned} \quad (7.3)$$

### 7.1.2 Auto-energia do elétron por excitação de um fóton

No cálculo da auto-energia do elétron, encontramos também a função de Green contendo um propagador fermiônico e um bosônico, que escrevemos como

$$\Sigma(k_1, k_2, m) = \Sigma_1(k_1, k_2, m) + (\xi - 1) \Sigma_2(k_1, k_2, m), \quad (7.4)$$

onde  $\Sigma_1$  foi definido em termos das integrais de Feynman na Eq.(3.11) e  $\Sigma_2$  na Eq.(3.12) do capítulo 3. A substituição dos resultados (6.19), (6.24), (6.49), (6.62), (6.76) e (6.82) do capítulo 6 nos permite escrever

$$\begin{aligned} \Sigma_1 &= \gamma_\alpha P_\mu \Delta_{\alpha\mu}(m^2) \\ &\quad - [\not{p}' - 4m] I_{log}(m^2) \\ &\quad + i(4\pi)^{-2} \lim_{\mu^2 \rightarrow 0} \{ (\not{p}' - 4m) Z_0(\mu^2, m^2, p^2; m^2) \} \end{aligned} \quad (7.5)$$

e

$$\begin{aligned} \Sigma_2 &= (m - \not{p}') I_{log}(m^2) \\ &\quad - \gamma_\alpha \left\{ \frac{P_\mu}{2} - \frac{p_\mu}{2} \right\} \Delta_{\mu\alpha}(m^2) \\ &\quad - i(4\pi)^{-2} \lim_{\mu^2 \rightarrow 0} \left\{ (m - \not{p}') Z_0(\mu^2, m^2, p^2; m^2) \right. \\ &\quad \left. + \not{p}'(p^2 - m^2) \left( \frac{Y_1(\mu^2, m^2, p^2; m^2)}{m^2} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (7.6)$$



Nas expressões acima adotamos  $P = (k_1 + k_2)$  e  $p = (k_1 - k_2)$ . A fim de completar o cálculo é ainda necessário tomar o limite infrevermelho. É fácil perceber que não teremos nenhum problema ao efetuar este limite pois as funções que aparecem são bem comportadas neste limite individualmente (ver capítulo 4). Com isso podemos representar os resultados acima na forma

$$\begin{aligned}\Sigma_1 &= \gamma_\alpha P_\mu \Delta_{\alpha\mu}(m^2) \\ &\quad - [y' - 4m] I_{\log}(m^2) \\ &\quad + i(4\pi)^{-2} [(y' - 4m) Z_0(0, m^2, p^2; m^2)]\end{aligned}\tag{7.7}$$

e

$$\begin{aligned}\Sigma_2 &= (m - y') I_{\log}(m^2) \\ &\quad - \gamma_\alpha \left\{ \frac{P_\mu}{2} - \frac{p_\mu}{2} \right\} \Delta_{\mu\alpha}(m^2) \\ &\quad - i(4\pi)^{-2} \left\{ (m - y') Z_0(0, m^2, p^2; m^2) \right. \\ &\quad \left. + y'(p^2 - m^2) \left( \frac{Y_1(0, m^2, p^2; m^2)}{m^2} \right) \right\}.\end{aligned}\tag{7.8}$$

### 7.1.3 A Função de dois pontos Bi-vetorial

Consideremos agora a função de dois pontos vetorial-vetorial relacionada ao tensor de polarização do vácuo, a qual no capítulo 3 escrevemos como

$$T_{\mu\nu}^{VV}(k_1, k_2, m) = T_{\mu\nu}(k_1, k_2, m) + g_{\mu\nu} T^{PP}(k_1, k_2, m),\tag{7.9}$$

a fim de sistematizar nossos procedimentos matemáticos. Após o cálculo das integrais envolvidas, resultados (5.19), (5.24), (5.29) e (5.31), do capítulo 5, e a substituição destes nas expressões (3.23) e (3.24) do capítulo 3 para  $T_{\mu\nu}$  e  $T^{PP}$ , respectivamente, teremos

$$\begin{aligned}T_{\mu\nu}(k_1, m; k_2, m) &= 4\nabla_{\mu\nu}(m^2) - \frac{1}{4} [q^2 + Q^2] \Delta_{\mu\nu}(m^2) \\ &\quad - 2 [Q_\mu \Delta_{\alpha\nu}(m^2) + Q_\nu \Delta_{\mu\alpha}(m^2)] Q^\alpha \\ &\quad + \frac{1}{24} [3Q^\alpha Q^\beta + q^\alpha q^\beta - Q^\alpha q^\beta + q^\alpha Q^\beta] \{ \square_{\alpha\beta\mu\nu}(m^2) \\ &\quad \quad \quad + g_{\mu\alpha} \Delta_{\nu\beta}(m^2) \\ &\quad \quad \quad + g_{\mu\nu} \Delta_{\alpha\beta}(m^2) \\ &\quad \quad \quad + g_{\mu\beta} \Delta_{\alpha\nu}(m^2) \} \\ &\quad + 4g_{\mu\nu} I_{quad}(m^2) - 2q_\mu q_\nu I_{\log}(m^2) \\ &\quad + \frac{2}{3} [q_\mu q_\nu - g_{\mu\nu} q^2] I_{\log}(m^2) \\ &\quad - 8i(4\pi)^{-2} \left\{ [q_\mu q_\nu - g_{\mu\nu} q^2] \left( Z_2(q^2; m^2) - \frac{Z_0(q^2; m^2)}{4} \right) \right. \\ &\quad \quad \left. - 2q_\mu q_\nu Z_0(q^2; m^2) \right\}\end{aligned}\tag{7.10}$$

e

$$\begin{aligned}
T^{PP}(k_1, m; k_2, m) &= -4I_{quad}(m^2) \\
&\quad -\frac{1}{2} [Q^\alpha Q^\beta + q^\alpha q^\beta - Q^\alpha q^\beta - q^\alpha Q^\beta] \Delta_{\alpha\beta}(m^2) \\
&\quad +2q^2 \left\{ I_{\log}(m^2) - i(4\pi)^{-2} Z_0(q^2; m^2) \right\}.
\end{aligned} \tag{7.11}$$

onde utilizamos  $q = k_2 - k_1$  e  $Q = k_2 + k_1$ . Reunindo  $T_{\mu\nu}$  e  $T^{PP}$  obteremos para função de Green associada à auto-energia do fóton

$$\begin{aligned}
T_{\mu\nu}^{VV} &= 4\nabla_{\mu\nu}(m^2) \\
&\quad -2[q^2 + Q^2] \Delta_{\mu\nu}(m^2) \\
&\quad +\frac{1}{24} [3Q^\alpha Q^\beta + q^\alpha q^\beta - Q^\alpha q^\beta + q^\alpha Q^\beta] \left\{ \square_{\alpha\beta\mu\nu}(m^2) + g_{\mu\nu} \Delta_{\alpha\beta}(m^2) \right. \\
&\quad \left. +g_{\mu\alpha} \Delta_{\nu\beta}(m^2) + g_{\mu\beta} \Delta_{\alpha\nu}(m^2) \right\} \\
&\quad -\frac{g_{\mu\nu}}{2} [Q^\alpha Q^\beta + q^\alpha q^\beta - Q^\alpha q^\beta - q^\alpha Q^\beta] \Delta_{\alpha\beta}(m^2) \\
&\quad -2[Q_\mu \Delta_{\alpha\nu}(m^2) + Q_\nu \Delta_{\mu\alpha}(m^2)] Q^\alpha \\
&\quad -\frac{4}{3} (q_\mu q_\nu - g_{\mu\nu} q^2) I_{\log}(m^2) \\
&\quad -8i(4\pi)^{-2} (q_\mu q_\nu - g_{\mu\nu} q^2) \left[ Z_2(q^2; m^2) - \frac{Z_0(q^2; m^2)}{2} \right].
\end{aligned} \tag{7.12}$$

Podemos ainda colocar a expressão acima numa forma mais conveniente se usarmos a identidade (introduzida no capítulo 4),

$$Z_2(q^2; m^2) = \frac{1}{3} \frac{(q^2 - m^2)}{q^2} Z_0(q^2; m^2) - \frac{1}{18}, \tag{7.13}$$

e, além disso, definirmos

$$\begin{aligned}
A_{\mu\nu} &= 4\nabla_{\mu\nu}(m^2) \\
&\quad -2[q^2 + Q^2] \Delta_{\mu\nu}(m^2) \\
&\quad +\frac{1}{24} [3Q^\alpha Q^\beta + q^\alpha q^\beta - Q^\alpha q^\beta + q^\alpha Q^\beta] \left\{ \square_{\alpha\beta\mu\nu}(m^2) + g_{\mu\nu} \Delta_{\alpha\beta}(m^2) \right. \\
&\quad \left. +g_{\mu\alpha} \Delta_{\nu\beta}(m^2) + g_{\mu\beta} \Delta_{\alpha\nu}(m^2) \right\} \\
&\quad -\frac{g_{\mu\nu}}{2} [Q^\alpha Q^\beta + q^\alpha q^\beta - Q^\alpha q^\beta - q^\alpha Q^\beta] \Delta_{\alpha\beta}(m^2) \\
&\quad -2[Q_\mu \Delta_{\alpha\nu}(m^2) + Q_\nu \Delta_{\mu\alpha}(m^2)] Q^\alpha.
\end{aligned} \tag{7.14}$$

Assim ficamos com

$$\begin{aligned}
T_{\mu\nu}^{VV} &= +\frac{4}{3} (q^2 g_{\mu\nu} - q_\mu q_\nu) \left\{ I_{\log}(m^2) - i(4\pi)^{-2} \left[ \frac{1}{3} + \frac{(2m^2 + q^2)}{q^2} Z_0(q^2; m^2) \right] \right\} \\
&\quad +A_{\mu\nu}.
\end{aligned} \tag{7.15}$$

### 7.1.4 Correção de Vértice

Quando consideramos a interação elétron-fóton definimos a função de Green associada à correção de vértice, a qual decomparamos na forma

$$\Lambda^\mu(k_1, k_2, m) = \Lambda_1^\mu(k_1, k_2, m) + (\xi - 1) \Lambda_2^\mu(k_1, k_2, m). \quad (7.16)$$

Escrevemos  $\Lambda_1^\mu$  e  $\Lambda_2^\mu$  em termos de integrais de Feynman nas equações.(3.53) e (3.59) do capítulo 3, respectivamente. Utilizando os resultados obtidos para as integrais presentes nas expressões destes termos, expressões (6.28), (6.33), (6.39), (6.49), (6.62), (6.76), (6.82), (6.87), (6.93) e (6.99) do capítulo 6 e (5.24) do capítulo 5, podemos escrever

$$\begin{aligned} \Lambda_1^\mu &= -\gamma_\alpha \nabla_{\mu\alpha}(m^2) + \gamma_\mu I_{\log}(m^2) \\ &\quad - 2i(4\pi)^{-2} \gamma_\mu Z_0((p-q)^2; m^2) \\ &\quad + 2i(4\pi)^{-2} \lim_{\mu^2 \rightarrow 0} \left\{ \gamma_\mu \eta_{00}(\mu^2, p^2, m^2, q^2, m^2; m^2) \right. \\ &\quad \quad - 2q_\mu q \xi_{20}(\mu^2, p^2, m^2, q^2, m^2) \\ &\quad \quad - 2p_\mu p \xi_{02}(\mu^2, p^2, m^2, q^2, m^2) \\ &\quad \quad - 2(p_\mu q + q_\mu p) \xi_{11}(\mu^2, p^2, m^2, q^2, m^2) \\ &\quad \quad + (p \not{\gamma}_\mu q + p \not{\gamma}_\mu p - 4mp_\mu) \xi_{01}(\mu^2, p^2, m^2, q^2, m^2) \\ &\quad \quad + (q \not{\gamma}_\mu q + p \not{\gamma}_\mu q - 4mq_\mu) \xi_{10}(\mu^2, p^2, m^2, q^2, m^2) \\ &\quad \quad \left. + \left[ 2m(p+q)_\mu - p \not{\gamma}_\mu q - m^2 \gamma_\mu \right] \xi_{00}(\mu^2, p^2, m^2, q^2, m^2) \right\} \end{aligned} \quad (7.17)$$

e

$$\begin{aligned} \Lambda_2^\mu &= \gamma_\mu \left\{ I_{\log}(m^2) - \left[ i(4\pi)^{-2} \right] \lim_{\mu^2 \rightarrow 0} \ln \left( \frac{\mu^2}{m^2} \right) \right\} \\ &\quad + i(4\pi)^{-2} \lim_{\mu^2 \rightarrow 0} \left\{ [(p^2 - m^2) \gamma_\mu] \frac{Y_0(\mu^2, m^2, p^2; m^2)}{m^2} \right. \\ &\quad \quad + [(q^2 - m^2) \gamma_\mu] \frac{Y_0(\mu^2, m^2, q^2; m^2)}{m^2} \\ &\quad \quad - [(q - m) q \not{\gamma}_\mu] \frac{Y_1(\mu^2, m^2, q^2; m^2)}{m^2} \\ &\quad \quad \left. - [\gamma_\mu p \not{\gamma} (p - m)] \frac{Y_1(\mu^2, m^2, p^2; m^2)}{m^2} \right\} \\ &\quad - (q^2 - m^2) \gamma_\mu \gamma_\alpha (p - m) \lim_{\mu^2 \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial \mu^2} [p_\alpha \xi_{01}(\mu^2, p^2, m^2, q^2, m^2)] \end{aligned} \quad (7.18)$$

$$\begin{aligned}
& + q_\alpha \xi_{10} (\mu^2, p^2, m^2, q^2, m^2)] \\
& - (p^2 - m^2) (q - m) \gamma_\alpha \gamma_\mu \lim_{\mu^2 \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial \mu^2} [p_\alpha \xi_{01} (\mu^2, p^2, m^2, q^2, m^2) \\
& \quad + q_\alpha \xi_{10} (\mu^2, p^2, m^2, q^2, m^2)] \\
& + \{ (q^2 - m^2) (p^2 - m^2) \gamma_\mu \\
& \quad - (q - m) \gamma_\mu (\not{p} - m) \} \lim_{\mu^2 \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial \mu^2} [\xi_{00} (\mu^2, p^2, m^2, q^2, m^2)] \\
& - (q - m) \gamma_\alpha (\not{p} - m) \lim_{\mu^2 \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial \mu^2} \left\{ \frac{1}{2} g_{\mu\alpha} \eta_{00} (\mu^2, p^2, m^2, q^2, m^2; m^2) \right. \\
& \quad - q_\mu q_\alpha \xi_{20} (\mu^2, p^2, m^2, q^2, m^2) \\
& \quad - p_\mu p_\alpha \xi_{02} (\mu^2, p^2, m^2, q^2, m^2) \\
& \quad \left. - (p_\mu q_\alpha + q_\mu p_\alpha) \xi_{11} (\mu^2, p^2, m^2, q^2, m^2) \right\} \quad (7.19)
\end{aligned}$$

onde adotamos  $q = k_3 - k_1$  e  $p = k_2 - k_1$ . A última etapa é a tomada do limite infravermelho. Para tal é necessário um estudo detalhado das estruturas que aparecem nas expressões acima no limite indicado. Para as funções  $Z_k$  e  $Y_k$  este estudo pode ser feito diretamente já que a integração no parâmetro de Feynman pode ser completada (ver capítulo 4). Quanto às funções  $\xi_{nm}$ ,  $\eta_{nm}$  e  $\sigma_{nm}$  este estudo é mais complicado devido ao fato de as integrações nos parâmetros de Feynman não poderem ser completadas. Este limite, entretanto, é bem comportado no conjunto dos termos ainda que não o seja termo a termo. Na expressão para  $\Lambda_1^\mu$  todas as funções com  $n$  ou  $m$  ou ambos nulos têm problemas neste limite mas a simetria do resultado em  $p$  e  $q$ , que é visível por inspeção, cria a conspiração necessária para os cancelamentos. Já para o termo  $\Lambda_2^\mu$  a situação é consideravelmente mais complicada e o bom comportamento no limite infravermelho envolve conspirações vindas de funções  $Y_0$  e  $\sigma_{00}$  com o termo  $\ln(\mu^2)$  além de outros envolvendo as funções  $\sigma_{nm}$  e a simetria de em  $p$  e  $q$ . Nós não apresentaremos estes desenvolvimentos explícitos devido à densidade de cálculos que seriam necessários e porque este aspecto apesar de interessante e importante não está nos principais objetivos do presente trabalho. Um estudo detalhado deste aspecto será apresentado em outra oportunidade. Após estes importantes comentários adotaremos como resultados para  $\Lambda_1^\mu$  e  $\Lambda_2^\mu$  as representações

$$\begin{aligned}
\Lambda_1^\mu &= -\gamma_\alpha \nabla_{\mu\alpha} (m^2) + \gamma_\mu I_{\log} (m^2) \\
& - 2i (4\pi)^{-2} \gamma_\mu Z_0 \left( (p - q)^2; m^2 \right) \\
& + 2i (4\pi)^{-2} \lim_{\mu^2 \rightarrow 0} \left\{ \gamma_\mu \eta_{00} (\mu^2, p^2, m^2, q^2, m^2; m^2) \right. \\
& \quad - 2q_\mu q_\alpha \xi_{20} (\mu^2, p^2, m^2, q^2, m^2) \\
& \quad - 2p_\mu p_\alpha \xi_{02} (\mu^2, p^2, m^2, q^2, m^2) \\
& \quad - 2(p_\mu q_\alpha + q_\mu p_\alpha) \xi_{11} (\mu^2, p^2, m^2, q^2, m^2) \\
& \quad + (\not{p} \gamma_\mu \not{q} + \not{p} \gamma_\mu \not{p} - 4mp_\mu) \xi_{01} (\mu^2, p^2, m^2, q^2, m^2) \\
& \quad + (\not{q} \gamma_\mu \not{q} + \not{p} \gamma_\mu \not{q} - 4mq_\mu) \xi_{10} (\mu^2, p^2, m^2, q^2, m^2) \\
& \quad \left. + \left[ 2m(p + q)_\mu - \not{p} \gamma_\mu \not{q} - m^2 \gamma_\mu \right] \xi_{00} (\mu^2, p^2, m^2, q^2, m^2) \right\} \quad (7.20)
\end{aligned}$$

e

$$\Lambda_2^\mu = \gamma_\mu [I_{\log}(m^2)] \quad (7.21)$$

$$+ i(4\pi)^{-2} \left\{ [(p^2 - m^2) \gamma_\mu] \frac{Y_0(0, m^2, p^2; m^2)}{m^2} \right. \quad (7.22)$$

$$\left. + [(q^2 - m^2) \gamma_\mu] \frac{Y_0(0, m^2, q^2; m^2)}{m^2} \right. \quad (7.23)$$

$$\left. - [(q - m) \not{q} \gamma_\mu] \frac{Y_1(0, m^2, q^2; m^2)}{m^2} \right. \quad (7.24)$$

$$\left. - [\gamma_\mu \not{p} (\not{p} - m)] \frac{Y_1(0, m^2, p^2; m^2)}{m^2} \right\} \quad (7.25)$$

$$- (q^2 - m^2) \gamma_\mu \gamma_\alpha (\not{p} - m) [p_\alpha \sigma_{01}(0, p^2, m^2, q^2, m^2) \quad (7.26)$$

$$+ q_\alpha \sigma_{10}(0, p^2, m^2, q^2, m^2)]$$

$$- (p^2 - m^2) (q - m) \gamma_\alpha \gamma_\mu [p_\alpha \sigma_{01}(0, p^2, m^2, q^2, m^2)$$

$$+ q_\alpha \sigma_{10}(0, p^2, m^2, q^2, m^2)]$$

$$+ \{ (q^2 - m^2) (p^2 - m^2) \gamma_\mu$$

$$- (q - m) \gamma_\mu (\not{p} - m) \} [\sigma_{00}(0, p^2, m^2, q^2, m^2)]$$

$$- (q - m) \gamma_\alpha (\not{p} - m) \left\{ -\frac{1}{2} g_{\mu\alpha} \xi_{00}(0, p^2, m^2, q^2, m^2; m^2) \right.$$

$$+ \frac{1}{2} g_{\mu\alpha} \xi_{10}(0, p^2, m^2, q^2, m^2; m^2)$$

$$+ \frac{1}{2} g_{\mu\alpha} \xi_{01}(0, p^2, m^2, q^2, m^2; m^2)$$

$$- q_\mu q_\alpha \sigma_{20}(0, p^2, m^2, q^2, m^2)$$

$$- p_\mu p_\alpha \sigma_{02}(0, p^2, m^2, q^2, m^2)$$

$$\left. - (p_\mu q_\alpha + q_\mu p_\alpha) \sigma_{11}(0, p^2, m^2, q^2, m^2) \right\} \quad (7.27)$$

### 7.1.5 A Função de três pontos Tri-vetorial

Consideremos agora a função de três pontos triplamente vetorial com três propagadores fermiônicos que, convenientemente, escrevemos usando a decomposição

$$T_{\beta\nu\alpha}^{VVV} = 4T_{\beta\nu\alpha} + g_{\nu\alpha} [T_\beta^{VPP}] + g_{\beta\nu} [T_\alpha^{PPV}] + g_{\beta\alpha} [T_\nu^{PVP}]. \quad (7.28)$$

Cada um dos termos que aparecem na expressão acima foram escritos em termos de integrais de Feynman. A fim de completar o cálculo substituímos, nas equações (7.43), (7.44) e (7.45), os resultados (5.24), (5.29), (5.33) e (5.35) do capítulo 5, teremos então

$$\begin{aligned} \frac{T_\lambda^{VPP}}{2} &= - (p_\lambda + q_\lambda) I_{\log}(m^2) \\ &- i(4\pi)^{-2} q_\lambda \left\{ -Z_0(q^2; m^2) - p^2 \xi_{00}(p^2, q^2; m^2) \right. \\ &\quad \left. - [(p - q)^2 - p^2 - q^2] \xi_{10}(p^2, q^2; m^2) \right\} \\ &- i(4\pi)^{-2} p_\lambda \left\{ -Z_0(p^2; m^2) - q^2 \xi_{00}(p^2, q^2; m^2) \right. \\ &\quad \left. - [(p - q)^2 - p^2 - q^2] \xi_{01}(p^2, q^2; m^2) \right\}, \end{aligned} \quad (7.29)$$

$$\begin{aligned}
\frac{T_\nu^{FPV}}{2} &= (2q_\nu - p_\nu) I_{\log}(m^2) \\
&\quad - 2i(4\pi)^{-2} q_\nu \{ Z_0((p-q)^2; m^2) + Z_0(q^2; m^2) + p^2 \xi_{00}(p^2, q^2; m^2) \\
&\quad \quad + [(p-q)^2 + q^2 - p^2] \xi_{10}(p^2, q^2; m^2) \} \\
&\quad + i(4\pi)^{-2} p_\nu \{ Z_0(p^2, q^2; m^2) + q^2 \xi_{00}(p^2, q^2; m^2) \\
&\quad \quad + [(p-q)^2 + p^2 - q^2] \xi_{01}(p^2, q^2; m^2) \}, \tag{7.30}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{T^\mu_{PVP}}{2} &= \{-q_\mu + 2p_\mu\} I_{\log}(m^2) \\
&\quad + i(4\pi)^{-2} q_\mu \{ Z_0((p-q)^2; m^2) + p^2 \xi_{00}(p^2, q^2; m^2) \\
&\quad \quad + [q^2 - p^2 - (p-q)^2] \xi_{10}(p^2, q^2; m^2) \} \\
&\quad - i(4\pi)^{-2} p_\mu \{ Z_0((p-q)^2; m^2) + Z_0(p^2; m^2) + q^2 \xi_{00}(p^2, q^2; m^2) \\
&\quad \quad + [(p-q)^2 + p^2 - q^2] \xi_{01}(p^2, q^2; m^2) \}, \tag{7.31}
\end{aligned}$$

Por sua vez  $T_{\lambda\mu\nu}$ , foi escrito em termos das estruturas  $M_{\lambda\mu\nu}$ ,  $J_{\lambda\mu\nu}$ ,  $L_{\lambda\mu\nu}$ ,  $K_{\lambda\mu\nu}$  e  $F_{\lambda\mu\nu}$ , Eq.(3.32) do capítulo 3, e estas escrevemos em termos de integrais de Feynman, equações (3.38)-(3.42), respectivamente. Agora, depois de calculadas as integrais, vamos substituir os resultados (5.33), (5.35), (5.38) e (5.43) do capítulo 5, em cada um dos subtermos. Assim teremos:

$$\begin{aligned}
M_{\lambda\mu\nu} &= \frac{(p+q)_\lambda}{4} [\nabla_{\mu\nu}(m^2) + g_{\mu\nu} I_{\log}(m^2)] \\
&\quad - \frac{(p+q)_\nu}{4} [\nabla_{\mu\lambda}(m^2) + g_{\mu\lambda} I_{\log}(m^2)] \\
&\quad + i(4\pi)^{-2} \left\{ -\frac{g_{\mu\nu}}{2} [q_\lambda - p_\lambda] \eta_{00}(p^2, q^2, m^2; m^2) \right. \\
&\quad \quad + \frac{g_{\mu\lambda}}{2} [q_\nu - p_\nu] \eta_{00}(p^2, q^2, m^2; m^2) \\
&\quad \quad + q_\lambda p_\mu p_\nu [\xi_{02}(p^2, q^2; m^2) + \xi_{11}(p^2, q^2; m^2) - \xi_{01}(p^2, q^2; m^2)] \\
&\quad \quad + q_\lambda q_\mu p_\nu [\xi_{11}(p^2, q^2; m^2) + \xi_{20}(p^2, q^2; m^2) - \xi_{10}(p^2, q^2; m^2)] \\
&\quad \quad + p_\lambda q_\mu q_\nu [-\xi_{20}(p^2, q^2; m^2) - \xi_{11}(p^2, q^2; m^2) + \xi_{10}(p^2, q^2; m^2)] \\
&\quad \quad \left. + p_\lambda p_\mu q_\nu [\xi_{01}(p^2, q^2; m^2) - \xi_{02}(p^2, q^2; m^2) - \xi_{11}(p^2, q^2; m^2)] \right\}, \tag{7.32}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
J_{\lambda\mu\nu} &= \frac{(p+q)_\lambda}{4} [\nabla_{\mu\nu}(m^2) + g_{\mu\nu}I_{\log}(m^2)] \\
&\quad - \frac{(p+q)_\mu}{4} [\nabla_{\mu\lambda}(m^2) + g_{\mu\lambda}I_{\log}(m^2)] \\
&\quad + i(4\pi)^{-2} \left\{ -\frac{g_{\mu\nu}}{2} [q_\lambda - p_\lambda] \eta_{00}(p^2, q^2, m^2; m^2) \right. \\
&\quad\quad + \frac{g_{\nu\lambda}}{2} [q_\mu - p_\mu] \eta_{00}(p^2, q^2, m^2; m^2) \\
&\quad\quad + q_\lambda q_\mu p_\nu [\xi_{02}(p^2, q^2; m^2) + \xi_{11}(p^2, q^2; m^2) - \xi_{01}(p^2, q^2; m^2)] \\
&\quad\quad + q_\lambda p_\mu q_\nu [\xi_{11}(p^2, q^2; m^2) + \xi_{20}(p^2, q^2; m^2) - \xi_{10}(p^2, q^2; m^2)] \\
&\quad\quad + p_\lambda q_\mu q_\nu [-\xi_{20}(p^2, q^2; m^2) - \xi_{11}(p^2, q^2; m^2) - \xi_{10}(p^2, q^2; m^2)] \\
&\quad\quad \left. + p_\lambda q_\mu q_\nu [-\xi_{02}(p^2, q^2; m^2) - \xi_{11}(p^2, q^2; m^2) + \xi_{01}(p^2, q^2; m^2)] \right\}, \tag{7.33}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
L_{\lambda\mu\nu} &= \frac{(p+q)_\mu}{4} [\nabla_{\mu\lambda}(m^2) + g_{\mu\lambda}I_{\log}(m^2)] \\
&\quad - \frac{(p+q)_\nu}{4} [\nabla_{\mu\lambda}(m^2) + g_{\mu\lambda}I_{\log}(m^2)] \\
&\quad + i(4\pi)^{-2} \left\{ -\frac{g_{\lambda\nu}}{2} [q_\mu - p_\mu] \eta_{00}(p^2, q^2, m^2; m^2) \right. \\
&\quad\quad + \frac{g_{\mu\lambda}}{2} [q_\nu - p_\nu] \eta_{00}(p^2, q^2, m^2; m^2) \\
&\quad\quad + q_\lambda q_\mu p_\nu [\xi_{02}(p^2, q^2; m^2) + \xi_{11}(p^2, q^2; m^2) - \xi_{01}(p^2, q^2; m^2)] \\
&\quad\quad + p_\lambda p_\mu q_\nu [\xi_{01}(p^2, q^2; m^2) - \xi_{20}(p^2, q^2; m^2) - \xi_{11}(p^2, q^2; m^2)] \\
&\quad\quad + q_\lambda q_\mu p_\nu [\xi_{11}(p^2, q^2; m^2) + \xi_{20}(p^2, q^2; m^2) - \xi_{10}(p^2, q^2; m^2)] \\
&\quad\quad \left. + q_\lambda p_\mu q_\nu [\xi_{10}(p^2, q^2; m^2) - \xi_{20}(p^2, q^2; m^2) - \xi_{11}(p^2, q^2; m^2)] \right\}, \tag{7.34}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K_{\lambda\mu\nu} &= \frac{q_\mu}{2} [\nabla_{\nu\lambda}(m^2) + g_{\nu\lambda}I_{\log}(m^2)] \\
&\quad - \frac{q_\nu}{2} [\nabla_{\mu\lambda}(m^2) + g_{\mu\lambda}I_{\log}(m^2)] \\
&\quad + 2i(4\pi)^{-2} \left\{ \frac{q_\mu g_{\nu\lambda}}{2} \eta_{00}(p^2, q^2, m^2; m^2) \right. \\
&\quad\quad - \frac{q_\nu g_{\mu\lambda}}{2} \eta_{00}(p^2, q^2, m^2; m^2) \\
&\quad\quad + p_\lambda q_\mu p_\nu [\xi_{01}(p^2, q^2; m^2) - \xi_{02}(p^2, q^2; m^2)] \\
&\quad\quad + p_\lambda p_\mu q_\nu [\xi_{02}(p^2, q^2; m^2) - \xi_{01}(p^2, q^2; m^2)] \\
&\quad\quad + q_\lambda p_\mu q_\nu [\xi_{11}(p^2, q^2; m^2)] \\
&\quad\quad \left. + q_\lambda q_\mu p_\nu [-\xi_{11}(p^2, q^2; m^2)] \right\} \tag{7.35}
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
F_{\lambda\mu\nu} &= 4I'_{\lambda\mu\nu} \\
&+ k_{2\lambda} [\nabla_{\mu\nu} (m^2) + g_{\mu\nu} I_{\log} (m^2)] \\
&+ k_{3\mu} [\nabla_{\nu\lambda} (m^2) + g_{\nu\lambda} I_{\log} (m^2)] \\
&+ k_{1\nu} [\nabla_{\mu\lambda} (m^2) + g_{\mu\lambda} I_{\log} (m^2)] \\
&+ 4i(4\pi)^{-2} \left\{ -\frac{1}{2} [p_\lambda g_{\mu\nu} + q_\mu g_{\lambda\nu}] \eta_{00} (p^2, q^2, m^2; m^2) \right. \\
&\quad + p_\lambda p_\mu p_\nu [\xi_{02} (p^2, q^2; m^2)] \\
&\quad + p_\lambda q_\mu q_\nu [\xi_{20} (p^2, q^2; m^2) + \xi_{11} (p^2, q^2; m^2) - \xi_{10} (p^2, q^2; m^2)] \\
&\quad + p_\lambda p_\mu q_\nu [\xi_{11} (p^2, q^2; m^2)] \\
&\quad + p_\lambda q_\mu p_\nu [\xi_{11} (p^2, q^2; m^2) + \xi_{02} (p^2, q^2; m^2) - \xi_{01} (p^2, q^2; m^2)] \\
&\quad + q_\lambda q_\mu q_\nu [\xi_{20} (p^2, q^2; m^2)] \\
&\quad \left. + q_\lambda q_\mu p_\nu [\xi_{11} (p^2, q^2; m^2)] \right\}, \tag{7.36}
\end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}
I'_{\lambda\mu\nu} &= -\frac{1}{12} (k_1 + k_2 + k_3)_\alpha [\square^{\alpha\lambda\mu\nu} (m^2)] \\
&- \frac{1}{12} (k_1 + k_2 + k_3)^\lambda [\Delta^{\mu\nu} (m^2)] \\
&- \frac{1}{12} (k_1 + k_2 + k_3)^\nu [\Delta^{\mu\lambda} (m^2)] \\
&- \frac{1}{12} (k_1 + k_2 + k_3)^\mu [\Delta^{\lambda\nu} (m^2)] \\
&- \frac{1}{12} (k_1 + k_2 + k_3)^\lambda g^{\mu\nu} [I_{\log} (m^2)] \\
&- \frac{1}{12} (k_1 + k_2 + k_3)^\nu g^{\mu\lambda} [I_{\log} (m^2)] \\
&- \frac{1}{12} (k_1 + k_2 + k_3)^\mu g^{\lambda\nu} [I_{\log} (m^2)] \\
&+ i(4\pi)^{-2} \left\{ \frac{1}{2} [g_{\nu\lambda} p_\mu + g_{\mu\lambda} p_\nu + g_{\mu\nu} p_\lambda] \eta_{01} (p^2, q^2; m^2) \right. \\
&\quad + \frac{1}{2} [g_{\nu\lambda} q_\mu + g_{\mu\lambda} q_\nu + g_{\mu\nu} q_\lambda] \eta_{10} (p^2, q^2; m^2) \\
&\quad - p_\mu p_\nu p_\lambda \xi_{03} - q_\lambda q_\nu q_\mu \xi_{30} \\
&\quad - [p_\nu q p_\mu + p_\mu q_\nu p_\lambda + q_\mu p_\nu p_\lambda] \xi_{12} \\
&\quad \left. - [q_\mu q_\nu p_\lambda + q_\mu p_\nu q_\lambda + p_\mu q_\nu q_\lambda] \xi_{21} \right\} \tag{7.37}
\end{aligned}$$



Agora reunindo todos os resultados temos

$$\begin{aligned}
T_{\lambda\mu\nu} = & -\frac{1}{12} (k_1 + k_2 + k_3)_\alpha [\square^{\alpha\lambda\mu\nu}] \\
& -\frac{1}{12} \left[ (k_1 + k_2 + k_3)^\lambda \Delta^{\mu\nu} + (k_1 + k_2 + k_3)^\nu \Delta^{\mu\lambda} + (k_1 + k_2 + k_3)^\mu \Delta^{\lambda\nu} \right] \\
& + k_{2\lambda} \nabla_{\mu\nu} + k_{3\mu} \nabla_{\nu\lambda} + k_{1\nu} \nabla_{\mu\lambda} \\
& -\frac{1}{12} \left[ (k_1 + k_2 + k_3)^\lambda g^{\mu\nu} + (k_1 + k_2 + k_3)^\nu g^{\mu\lambda} + (k_1 + k_2 + k_3)^\mu g^{\lambda\nu} \right] I_{\log} \\
& + [k_{2\lambda} g_{\mu\nu} + k_{3\mu} g_{\nu\lambda} + k_{1\nu} g_{\mu\lambda}] I_{\log} (m^2) \\
& + \frac{1}{2} [q_\mu \nabla_{\nu\lambda} - q_\nu \nabla_{\mu\lambda}] \\
& + \frac{1}{4} \left[ (p+q)_\mu \nabla_{\nu\lambda} - (p+q)_\nu \nabla_{\mu\lambda} + (p+q)_\lambda \nabla_{\mu\nu} \right] \\
& + \frac{1}{4} \left[ (p+q)_\lambda \nabla_{\mu\nu} - (p+q)_\nu \nabla_{\mu\lambda} - (p+q)_\mu \nabla_{\nu\lambda} \right] \\
& + \frac{1}{4} \left[ (p+q)_\mu g_{\nu\lambda} - (p+q)_\nu g_{\mu\lambda} + (p+q)_\lambda g_{\mu\nu} \right. \\
& \left. + (p+q)_\lambda g_{\mu\nu} - (p+q)_\nu g_{\mu\lambda} - (p+q)_\mu g_{\nu\lambda} \right] I_{\log} \\
& + \frac{1}{2} [q_\mu g_{\nu\lambda} - q_\nu g_{\mu\lambda}] I_{\log} \\
& + 16i (4\pi)^{-2} \left\{ \frac{1}{2} [p_\lambda g_{\mu\nu} + p_\mu g_{\lambda\nu} + p_\nu g_{\lambda\mu}] \eta_{01} (p^2, q^2; m^2) \right. \\
& \quad + \frac{1}{2} [q_\lambda g_{\mu\nu} + q_\mu g_{\lambda\nu} + q_\nu g_{\lambda\mu}] \eta_{10} (p^2, q^2; m^2) \\
& \quad - q_\lambda q_\mu q_\nu \xi_{30} (p^2, q^2; m^2) - p_\lambda p_\mu p_\nu \xi_{03} (p^2, q^2; m^2) \\
& \quad - [p_\lambda p_\mu q_\nu + p_\lambda q_\mu p_\nu + q_\lambda p_\mu p_\nu] \xi_{12} (p^2, q^2; m^2) \\
& \quad \left. + [q_\lambda q_\mu p_\nu + q_\lambda p_\mu q_\nu p_\lambda q_\mu q_\nu] \xi_{21} (p^2, q^2; m^2) \right\} \\
& + 8i (4\pi)^{-2} \left\{ -\frac{g_{\mu\nu}}{2} [q_\lambda + p_\lambda] \eta_{00} (p^2, q^2; m^2) \right. \\
& \quad - \frac{1}{2} (g_{\lambda\mu} p_\nu + g_{\lambda\nu} q_\mu) \eta_{00} (p^2, q^2; m^2) \\
& \quad + p_\lambda p_\mu p_\nu [2\xi_{02} (p^2, q^2; m^2)] \\
& \quad + q_\lambda p_\mu p_\nu [\xi_{02} (p^2, q^2; m^2) + \xi_{11} (p^2, q^2; m^2) - \xi_{01} (p^2, q^2; m^2)] \\
& \quad + p_\lambda q_\mu p_\nu [2\xi_{11} (p^2, q^2; m^2) - \xi_{01} (p^2, q^2; m^2) + \xi_{02} (p^2, q^2; m^2)] \\
& \quad + p_\lambda p_\mu q_\nu [\xi_{11} (p^2, q^2; m^2)] \\
& \quad + p_\lambda q_\mu q_\nu [\xi_{20} (p^2, q^2; m^2) + \xi_{11} (p^2, q^2; m^2) - \xi_{10} (p^2, q^2; m^2)] \\
& \quad + q_\lambda p_\mu q_\nu [\xi_{11} (p^2, q^2; m^2)] \\
& \quad + q_\lambda q_\mu p_\nu [2\xi_{11} (p^2, q^2; m^2) - \xi_{10} (p^2, q^2; m^2) + \xi_{20} (p^2, q^2; m^2)] \\
& \quad \left. + q_\lambda q_\mu q_\nu [2\xi_{20} (p^2, q^2; m^2)] \right\}, \tag{7.38}
\end{aligned}$$

o que completa o cálculo desejado.

### 7.1.6 A Função de quatro pontos Tetra-vetorial

Finalmente vamos considerar a função de quatro pontos tetra-vetorial. No capítulo 3, nós escrevemos esta função em termos das estruturas  $T_{\mu\nu\alpha\beta}$ ,  $T_{\mu\nu}^{VVPP}$ ,  $T_{\alpha\beta}^{PPVV}$ ,  $T_{\mu\beta}^{VPPV}$ ,  $T_{\mu\alpha}^{VPVP}$ ,  $T_{\nu\beta}^{PVVP}$ ,  $T_{\nu\alpha}^{PVVP}$  e  $T^{PPPP}$ . Estas foram então decompostas em combinações de integrais de Feynman. Agora devemos substituir os resultados obtidos para as integrais no capítulo V para ter a forma explícita. Procedendo assim, teremos, por exemplo,

$$\begin{aligned}
T_{\nu\beta}^{PVVP} = & 4r_\beta r_\nu \{ \xi_{01}(r, p) - \xi_{01}(r, q) \} \\
& + 4p_\nu p_\beta \{ \xi_{01}(u, t) - \xi_{01}(p, q) \} \\
& + 4q_\beta q_\nu \{ \xi_{10}(p, q) - \xi_{10}(u, t) \} \\
& + 4p_\nu q_\beta \left\{ \xi_{10}(u, t) + \xi_{01}(p, q) - \frac{\xi_{00}(p, q)}{2} - \frac{\xi_{00}(u, t)}{2} \right\} \\
& - 4p_\beta q_\nu \left\{ \xi_{10}(p, q) + \xi_{01}(u, t) - \frac{\xi_{00}(p, q)}{2} - \frac{\xi_{00}(u, t)}{2} \right\} \\
& + 4r_\beta p_\nu \left\{ \xi_{10}(r, p) - \xi_{10}(u, t) - \xi_{01}(u, t) - \frac{\xi_{00}(r, p)}{2} + \frac{\xi_{00}(u, t)}{2} \right\} \\
& + 2r_\beta q_\nu \{ 2\xi_{01}(u, t) + 2\xi_{10}(u, t) + \xi_{00}(r, q) - \xi_{00}(u, t) \} \\
& - 2r_\nu q_\beta \{ 2\xi_{10}(r, q) - \xi_{00}(r, q) - \xi_{00}(u, t) \} \\
& - 2r_\nu p_\beta \{ \xi_{00}(r, p) + \xi_{00}(u, t) \} \\
& + 4g_{\beta\nu} [(r \cdot q) - (r \cdot p)] \xi_{000} \\
& + 8p_\beta p_\nu \{ [(r \cdot q) - (r \cdot p)] \zeta_{200} + [r^2 - 2(r \cdot q)] \zeta_{100} \} \\
& + 8q_\beta q_\nu \{ [(r \cdot q) - (r \cdot p)] \zeta_{020} - [r^2 - 2(p \cdot r)] \zeta_{010} \} \\
& + 8r_\beta r_\nu \{ [(r \cdot q) - (r \cdot p)] \zeta_{002} + (p^2 - q^2) \zeta_{001} \} \\
& + 8p_\beta q_\nu \left\{ [(r \cdot q) - (r \cdot p)] \zeta_{110} + (p \cdot r) (\zeta_{100}) + [r^2 - (r \cdot q)] \zeta_{010} - \frac{r^2}{2} \zeta_{000} \right\} \\
& + 8q_\beta p_\nu \left\{ [(r \cdot q) - (r \cdot p)] \zeta_{110} - [r^2 - (p \cdot r)] \zeta_{100} - (r \cdot q) \zeta_{010} + \frac{r^2}{2} \zeta_{000} \right\} \\
& + 8r_\nu q_\beta \left\{ [(r \cdot q) - (r \cdot p)] \zeta_{011} + [p^2 - (p \cdot q)] \zeta_{010} - [r^2 - (p \cdot r)] \zeta_{001} - \frac{p^2}{2} \zeta_{000} \right\} \\
& + 8r_\beta q_\nu \left\{ [(r \cdot q) - (r \cdot p)] \zeta_{011} - [q^2 - (p \cdot q)] \zeta_{010} + (p \cdot r) \zeta_{001} - \frac{p^2}{2} \zeta_{000} \right\} \\
& + 8r_\beta p_\nu \left\{ [(r \cdot q) - (r \cdot p)] \zeta_{101} - [q^2 - (p \cdot q)] \zeta_{100} - (r \cdot q) \zeta_{001} + \frac{q^2}{2} \zeta_{000} \right\} \\
& + 8r_\nu p_\beta \left\{ [(r \cdot q) - (r \cdot p)] \zeta_{101} + [p^2 - (p \cdot q)] \zeta_{100} + [r^2 - (r \cdot q)] \zeta_{001} + \frac{q^2}{2} \zeta_{000} \right\} \\
& - g_{\nu\beta} [T^{PPPP}].
\end{aligned} \tag{7.39}$$

## 7.2 Relações entre funções de Green

De posse das formas calculadas das funções de Green em termos das quais escrevemos as amplitudes da EDQ, é o momento de verificar se as manipulações e cálculos efetuados preservam os vínculos de consistência que introduzimos no capítulo 3. É importante notar que nos resultados obtidos até este estágio, não foram feitas escolhas para as arbitrariedades intrínsecas envolvidas. Nós esperamos que as relações entre funções de Green estabelecidas no capítulo 3 tenham sido preservadas nas operações efetuadas. Verificaremos isto a seguir.

### 7.2.1 Relação entre funções de Green para a função Bi-vetorial

Primeiramente consideremos a relação (3.83) do capítulo 3, envolvendo as funções  $T_\nu^V$  e  $T_{\mu\nu}^{VV}$ . Tomando a forma explícita de  $T_{\mu\nu}^{VV}$ , Eq.(7.12), e contraindo com o momento externo  $k_1 - k_2 = q$ , vem que

$$q^\mu T_{\mu\nu}^{VV} = (k_1 - k_2)^\mu A_{\mu\nu}(m^2) + \frac{4}{3} q^\mu [q_\mu q_\nu - g_{\mu\nu} q^2] \left\{ I_{\log}(m^2) - i(4\pi)^{-2} \left[ \frac{1}{3} + \frac{(q^2 + 2m^2)}{q^2} Z_0(q^2; m^2) \right] \right\}, \quad (7.40)$$

e então

$$q^\mu T_{\mu\nu}^{VV}(k_1, m; k_2, m) = (k_1 - k_2)^\mu A_{\mu\nu}(m^2). \quad (7.41)$$

Devemos identificar no resultado obtido a diferença entre duas funções de um ponto vetoriais, com linhas carregando momentos  $k_1$  e  $k_2$ . Considerando a forma explícita de  $T_\nu^V$ , Eq.(7.3), é fácil perceber, que podemos reorganizar os termos do lado direito da equação acima para ficar com

$$(k_1 - k_2)^\mu A_{\mu\nu} = T_\nu^V(k_2, m) - T_\nu^V(k_1, m). \quad (7.42)$$

É também simples verificar que

$$q^\nu A_{\mu\nu} = T_\mu^V(k_2, m) - T_\mu^V(k_1, m), \quad (7.43)$$

o que implica que as relações entre as funções de dois pontos  $T_{\mu\nu}^{VV}$  e de um ponto  $T_\mu^V$ , equações (3.83) e (3.84) do capítulo 3, foram preservadas pelas manipulações feitas. Note que as relações são preservadas sem que tenhamos assumido qualquer escolha sobre as quantidades indefinidas, de modo que estas relações podem ser preservadas por qualquer método de regularização razoável. Os vínculos impostos por implicações de simetria serão considerados posteriormente.

### 7.2.2 Relação entre funções de Green para o Processo de três fótons

Agora vamos considerar a amplitude triangular tri-vetorial e suas relações com as funções de dois pontos  $VV$ , estabelecidas por nós no capítulo 3, equações (3.86), (3.87) e (3.88). Consideremos a forma explícita obtida e tomemos a contração com o momento externo  $(k_3 - k_2)_\lambda$ , ou seja,

$$(p + q)^\lambda T_{\lambda\mu\nu}^{VVV} = (k_3 - k_2)^\lambda [T_{\lambda\mu\nu} + g_{\mu\nu} T_\lambda^{VPP} + g_{\nu\lambda} T_\mu^{PVP} + g_{\mu\lambda} T_\nu^{PPV}]. \quad (7.44)$$

Vamos contrair separadamente cada um dos termos que aparecem na expressão acima. Primeiramente tomamos  $(k_3 - k_2)^\lambda T_{\lambda\mu\nu}$  para ficar com

$$\begin{aligned}
(p+q)^\lambda T_{\lambda\mu\nu} = & (p+q)^\lambda \left\{ -\frac{1}{12} (k_1 + k_2 + k_3)_\alpha [\square^{\alpha\lambda\mu\nu}] \right. \\
& + \frac{1}{2} [q_\mu \nabla_{\nu\lambda} - q_\nu \nabla_{\mu\lambda}] \\
& - \frac{1}{12} \left[ (k_1 + k_2 + k_3)^\lambda \Delta^{\mu\nu} + (k_1 + k_2 + k_3)^\nu \Delta^{\mu\lambda} \right. \\
& \quad \left. + (k_1 + k_2 + k_3)^\mu \Delta^{\lambda\nu} \right] \\
& - \frac{1}{12} \left[ (k_1 + k_2 + k_3)^\lambda g^{\mu\nu} + (k_1 + k_2 + k_3)^\nu g^{\mu\lambda} \right. \\
& \quad \left. + (k_1 + k_2 + k_3)^\mu g^{\lambda\nu} \right] I_{\log} \\
& + k_{2\lambda} \nabla_{\mu\nu} + k_{3\mu} \nabla_{\nu\lambda} + k_{1\nu} \nabla_{\mu\lambda} \\
& + [k_{2\lambda} g_{\mu\nu} + k_{3\mu} g_{\nu\lambda} + k_{1\nu} g_{\mu\lambda}] I_{\log} (m^2) \\
& + \frac{1}{4} \left[ (p+q)_\mu \nabla_{\nu\lambda} - (p+q)_\nu \nabla_{\mu\lambda} + (p+q)_\lambda \nabla_{\mu\nu} \right] \\
& + \frac{1}{4} \left[ (p+q)_\lambda \nabla_{\mu\nu} - (p+q)_\nu \nabla_{\mu\lambda} - (p+q)_\mu \nabla_{\nu\lambda} \right] \\
& + \frac{1}{4} \left[ (p+q)_\mu g_{\nu\lambda} - (p+q)_\nu g_{\mu\lambda} + (p+q)_\lambda g_{\mu\nu} \right. \\
& \quad \left. + (p+q)_\lambda g_{\mu\nu} - (p+q)_\nu g_{\mu\lambda} - (p+q)_\mu g_{\nu\lambda} \right] I_{\log} \\
& \left. + \frac{1}{2} [q_\mu g_{\nu\lambda} - q_\nu g_{\mu\lambda}] I_{\log} \right\} \\
& + 4g_{\mu\nu} [(p^2 - q^2)\eta_{00}] \\
& + 8g_{\mu\nu} \{ [q^2\eta_{10} + (p \cdot q)\eta_{01}] + [p^2\eta_{01} + (p \cdot q)\eta_{10}] \} \\
& + 4q_\mu q_\nu \left\{ 2\eta_{10} - p^2\xi_{20} + p^2\xi_{10} + q^2\xi_{20} - (p \cdot q)\xi_{10} - \frac{\eta_{00}}{2} \right. \\
& \quad - 4[q^2\xi_{30} + (p \cdot q)\xi_{21}] \\
& \quad + 4[p^2\xi_{21} + (p \cdot q)\xi_{30}] \\
& \quad + 2[q^2\xi_{20} + (p \cdot q)\xi_{11}] \\
& \quad \left. - 2[p^2\xi_{11} + (p \cdot q)\xi_{20}] \right\} \\
& - 4p_\mu p_\nu \left\{ 2\eta_{01} - q^2\xi_{02} + q^2\xi_{01} + p^2\xi_{02} - (p \cdot q)\xi_{01} - \frac{\eta_{00}}{2} \right. \\
& \quad - 4[q^2\xi_{12} + (p \cdot q)\xi_{03}] \\
& \quad + 4[p^2\xi_{03} + (p \cdot q)\xi_{12}] \\
& \quad + 2[q^2\xi_{11} + (p \cdot q)\xi_{02}] \\
& \quad \left. - 2[p^2\xi_{02} + (p \cdot q)\xi_{11}] \right\} \\
& + 8q_\mu p_\nu \{ \eta_{01} - \eta_{10} + (q^2 - p^2)\xi_{11} \\
& \quad - 2[q^2\xi_{21} + (p \cdot q)\xi_{12}] \\
& \quad + 2[p^2\xi_{12} + (p \cdot q)\xi_{21}] \\
& \quad + [q^2\xi_{11} + (p \cdot q)\xi_{02}] \\
& \quad + [q^2\xi_{20} + (p \cdot q)\xi_{11}] \}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - [p^2 \xi_{11} + (p \cdot q) \xi_{20}] \\
& - [p^2 \xi_{02} + (p \cdot q) \xi_{11}] \\
& - [q^2 \xi_{10} + (p \cdot q) \xi_{01}] \\
& + [p^2 \xi_{01} + (p \cdot q) \xi_{10}] \} \\
& + 16 p_\mu q_\nu \{ (q^2 - p^2) \xi_{11} - \eta_{10} + \eta_{01} \\
& - [q^2 \xi_{21} + (p \cdot q) \xi_{12}] \\
& + [p^2 \xi_{12} + (p \cdot q) \xi_{21}] \}. \tag{7.45}
\end{aligned}$$

Na equação acima organizamos os termos de modo a enfatizar que combinações específicas envolvendo as funções  $\xi_{nm}$  e  $\eta_{nm}$  aparecem. É fácil obter expressões para estas combinações tomando as formas reduzidas que apresentamos no capítulo 4. Isto significa construir as identidades:

$$p^2 \xi_{01} + (p \cdot q) \xi_{10} = \frac{1}{2} \left[ -Z_0 \left( (p-q)^2; m^2 \right) + Z_0 (q^2; m^2) + p^2 \xi_{00} \right], \tag{7.46}$$

$$q^2 \xi_{10} + (p \cdot q) \xi_{01} = \frac{1}{2} \left[ -Z_0 \left( (p-q)^2; m^2 \right) + Z_0 (p^2; m^2) + q^2 \xi_{00} \right], \tag{7.47}$$

$$p^2 \xi_{02} + (p \cdot q) \xi_{11} = \frac{1}{2} \left[ -\frac{1}{2} Z_0 \left( (p-q)^2; m^2 \right) + \eta_{00} + p^2 \xi_{01} \right], \tag{7.48}$$

$$q^2 \xi_{20} + (p \cdot q) \xi_{11} = \frac{1}{2} \left[ -\frac{1}{2} Z_0 \left( (p-q)^2; m^2 \right) + \eta_{00} + q^2 \xi_{10} \right], \tag{7.49}$$

$$p^2 \xi_{11} + (p \cdot q) \xi_{20} = \frac{1}{2} \left[ -Z_1 \left( (p-q)^2; m^2 \right) + Z_1 (q^2; m^2) + p^2 \xi_{10} \right], \tag{7.50}$$

$$q^2 \xi_{11} + (p \cdot q) \xi_{02} = \frac{1}{2} \left[ -Z_1 \left( (p-q)^2; m^2 \right) + Z_1 (p^2; m^2) + q^2 \xi_{01} \right]. \tag{7.51}$$

$$q^2 \xi_{12} + (p \cdot q) \xi_{03} = \frac{1}{2} \left[ Z_2 (p^2; m^2) - Z_2 \left( (p-q)^2; m^2 \right) + q^2 \xi_{02} \right], \tag{7.52}$$

$$p^2 \xi_{21} + (p \cdot q) \xi_{30} = \frac{1}{2} \left[ Z_2 (q^2; m^2) - Z_2 \left( (p-q)^2; m^2 \right) + p^2 \xi_{20} \right], \tag{7.53}$$

$$p^2 \xi_{03} + (p \cdot q) \xi_{12} = \frac{1}{2} \left[ -Z_2 \left( (p-q)^2; m^2 \right) + 2\eta_{01} + p^2 \xi_{02} \right], \tag{7.54}$$

$$q^2 \xi_{30} + (p \cdot q) \xi_{21} = \frac{1}{2} \left[ -Z_2 \left( (p-q)^2; m^2 \right) + 2\eta_{10} + q^2 \xi_{20} \right], \tag{7.55}$$

$$p^2 \xi_{12} + (p \cdot q) \xi_{21} = \frac{1}{2} \left[ Z_2 \left( (p-q)^2; m^2 \right) - \frac{Z_0 \left( (p-q)^2; m^2 \right)}{2} + \eta_{10} + p^2 \xi_{11} \right], \tag{7.56}$$

$$q^2 \xi_{21} + (p \cdot q) \xi_{12} = \frac{1}{2} \left[ Z_2 \left( (p-q)^2; m^2 \right) - \frac{Z_0 \left( (p-q)^2; m^2 \right)}{2} + \eta_{01} + q^2 \xi_{11} \right]. \tag{7.57}$$

e

$$\begin{aligned}
p^2 \eta_{01} + (p \cdot q) \eta_{10} &= \left\{ (p-q)^2 \left[ \frac{1}{4} Z_0 \left( (p-q)^2; m^2 \right) - Z_2 \left( (p-q)^2; m^2 \right) \right] \right. \\
&\quad \left. - q^2 \left[ \frac{1}{4} Z_0 (q^2; m^2) - Z_2 (q^2; m^2) \right] + \frac{1}{2} p^2 \eta_{00} \right\}, \tag{7.58}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
q^2 \eta_{10} + (p \cdot q) \eta_{01} &= \left\{ (p-q)^2 \left[ \frac{1}{4} Z_0 \left( (p-q)^2; m^2 \right) - Z_2 \left( (p-q)^2; m^2 \right) \right] \right. \\
&\quad \left. - q^2 \left[ \frac{1}{4} Z_0 (p^2; m^2) - Z_2 (p^2; m^2) \right] + \frac{1}{2} q^2 \eta_{00} \right\}. \tag{7.59}
\end{aligned}$$

Utilizando estas relações podemos colocar a expressão (7.38) na forma

$$\begin{aligned}
(k_3 - k_2)^\lambda T_{\lambda\mu\nu} = & (p + q)^\lambda \left\{ -\frac{1}{12} (k_1 + k_2 + k_3)_\alpha [\square^{\alpha\lambda\mu\nu}] \right. \\
& + \frac{1}{2} [q_\mu \nabla_{\nu\lambda} - q_\nu \nabla_{\mu\lambda}] \\
& - \frac{1}{12} \left[ (k_1 + k_2 + k_3)^\lambda \Delta^{\mu\nu} + (k_1 + k_2 + k_3)^\nu \Delta^{\mu\lambda} \right. \\
& \quad \left. + (k_1 + k_2 + k_3)^\mu \Delta^{\lambda\nu} \right] \\
& - \frac{1}{12} \left[ (k_1 + k_2 + k_3)^\lambda g^{\mu\nu} + (k_1 + k_2 + k_3)^\nu g^{\mu\lambda} \right. \\
& \quad \left. + (k_1 + k_2 + k_3)^\mu g^{\lambda\nu} \right] I_{\log} \\
& + k_{2\lambda} \nabla_{\mu\nu} + k_{3\mu} \nabla_{\nu\lambda} + k_{1\nu} \nabla_{\mu\lambda} \\
& + [k_{2\lambda} g_{\mu\nu} + k_{3\mu} g_{\nu\lambda} + k_{1\nu} g_{\mu\lambda}] I_{\log} (m^2) \\
& + \frac{1}{4} \left[ (p + q)_\mu \nabla_{\mu\lambda} - (p + q)_\nu \nabla_{\mu\lambda} + (p + q)_\lambda \nabla_{\mu\nu} \right] \\
& + \frac{1}{4} \left[ (p + q)_\lambda \nabla_{\mu\nu} - (p + q)_\nu \nabla_{\mu\lambda} - (p + q)_\mu \nabla_{\mu\lambda} \right] \\
& + \frac{1}{4} \left[ (p + q)_\mu g_{\mu\lambda} - (p + q)_\nu g_{\mu\lambda} + (p + q)_\lambda g_{\mu\nu} \right. \\
& \quad \left. + (p + q)_\lambda g_{\mu\nu} - (p + q)_\nu g_{\mu\lambda} - (p + q)_\mu g_{\mu\lambda} \right] I_{\log} \\
& \left. + \frac{1}{2} [q_\mu g_{\nu\lambda} - q_\nu g_{\mu\lambda}] I_{\log} \right\} \\
& + 4i (4\pi)^{-2} g_{\mu\nu} p^2 [2Z_2(p^2; m^2) - Z_1(p^2; m^2)] \\
& - 4i (4\pi)^{-2} g_{\mu\nu} q^2 [2Z_2(q^2; m^2) - Z_1(q^2; m^2)] \\
& + 4i (4\pi)^{-2} q_\mu p_\nu [Z_1(p^2; m^2) - Z_0(p^2; m^2)] \\
& - 4i (4\pi)^{-2} q_\mu p_\nu [Z_1(q^2; m^2) - Z_0(q^2; m^2)] \\
& + 4i (4\pi)^{-2} q_\mu q_\nu [2Z_2(q^2; m^2) - Z_1(q^2; m^2)] \\
& + 4i (4\pi)^{-2} q_\mu q_\nu [(p - q)^2 \xi_{10}] \\
& - 4i (4\pi)^{-2} p_\mu p_\nu [2Z_2(p^2; m^2) - Z_1(p^2; m^2)] \\
& - 4i (4\pi)^{-2} p_\mu p_\nu [(p - q)^2 \xi_{01} + (q^2 - p^2) (\xi_{00} - \xi_{01} - \xi_{10})]. \tag{7.60}
\end{aligned}$$

Por sua vez

$$\begin{aligned}
(k_3 - k_2)^\lambda [T_\lambda^{VPP}] = & 2 [q_\lambda (k_2 + k_3)^\alpha \Delta_{\alpha\lambda}(m^2)] \\
& - 2 [(q^2 - p^2) I_{\log}(m^2)] \\
& + 2i (4\pi)^{-2} \{ 2 [q^2 Z_0(q^2; m^2) - (p \cdot q) Z_0(q^2; m^2)] \\
& \quad - 2 [p^2 Z_0(p^2; m^2) - (p \cdot q) Z_0(p^2; m^2)] \\
& \quad + (p \cdot q) (q^2 - 2p^2) \xi_{00} \\
& \quad - (p \cdot q) [q^2 \xi_{10} + (p \cdot q) \xi_{01}] \\
& \quad + (p \cdot q) [p^2 \xi_{01} + (p \cdot q) \xi_{10}] \}. \tag{7.61}
\end{aligned}$$

Utilizando as propriedades (7.39) e (7.40) teremos

$$\begin{aligned}
(k_3 - k_2)^\lambda [T_\lambda^{VPP}] &= 2 [q_\lambda (k_2 + k_3)^\alpha \Delta_{\alpha\lambda}(m^2)] \\
&\quad - 2 [(q^2 - p^2) I_{\log}(m^2)] \\
&\quad + 2i (4\pi)^{-2} [q^2 Z_0(q^2; m^2) - p^2 Z_0(p^2; m^2)]. \tag{7.62}
\end{aligned}$$

Também temos

$$\begin{aligned}
(k_3 - k_2)^\lambda [T_\mu^{PPV}] &= 2 [(q - p)_\nu (k_3 + k_1)_\alpha \Delta_{\alpha\mu}(m^2)] \\
&\quad 2 [p_\nu (q_\mu - 2p_\mu) - q_\nu (q_\mu - 2p_\mu)] I_{\log}(m^2) \\
&\quad + 2i (4\pi)^{-2} p_\mu q_\nu \left\{ -Z_0((q - p)^2; m^2) - Z_0(p^2; m^2) \right. \\
&\quad \quad \left. + 2(p \cdot q - p^2) \xi_{01} - q^2 \xi_{00} \right\} \\
&\quad - 2i (4\pi)^{-2} p_\mu p_\nu \left\{ -Z_0((q - p)^2; m^2) - Z_0(p^2; m^2) \right. \\
&\quad \quad \left. - 2(p \cdot q - p^2) \xi_{01} - q^2 \xi_{00} \right\} \\
&\quad - 2i (4\pi)^{-2} q_\mu p_\nu \left\{ Z_0((q - p)^2; m^2) \right. \\
&\quad \quad \left. + 2(p \cdot q - p^2) \xi_{10} + p^2 \xi_{00} \right\} \\
&\quad + 2i (4\pi)^{-2} q_\mu q_\nu \left\{ Z_0((q - p)^2; m^2) \right. \\
&\quad \quad \left. + 2(p \cdot q - p^2) \xi_{10} + p^2 \xi_{00} \right\}. \tag{7.63}
\end{aligned}$$

Finalmente, podemos obter

$$\begin{aligned}
(k_3 - k_2)^\lambda [T_\nu^{PPV}] &= 2 [(p - q)_\mu (k_2 + k_1)_\alpha \Delta_{\alpha\nu}(m^2)] \\
&\quad + 2 \left[ 2(q - p)_\mu q_\nu - (q - p)_\mu p_\nu \right] I_{\log}(m^2) \\
&\quad - 2i (4\pi)^{-2} q_\mu q_\nu \left\{ Z_0((q - p)^2; m^2) + Z_0(q^2; m^2) \right. \\
&\quad \quad \left. + 2(p \cdot q - q^2) \xi_{10} - p^2 \xi_{00} \right\} \\
&\quad + 2i (4\pi)^{-2} p_\mu q_\nu \left\{ Z_0((q - p)^2; m^2) + Z_0(q^2; m^2) \right. \\
&\quad \quad \left. + 2(p \cdot q - q^2) \xi_{10} - p^2 \xi_{00} \right\} \\
&\quad - 2i (4\pi)^{-2} p_\mu p_\nu \left\{ Z_0((q - p)^2; m^2) \right. \\
&\quad \quad \left. + 2(p \cdot q - q^2) \xi_{01} + q^2 \xi_{00} \right\} \\
&\quad + 2i (4\pi)^{-2} q_\mu p_\nu \left\{ Z_0((q - p)^2; m^2) \right. \\
&\quad \quad \left. + 2(p \cdot q - q^2) \xi_{01} + q^2 \xi_{00} \right\}. \tag{7.64}
\end{aligned}$$

Reunindo todas as contrações, expressões (7.53), (7.55), (7.56) e (7.57) ficamos com

$$\begin{aligned}
(k_3 - k_2)^\lambda T_{\lambda\mu\nu}^{VVV} &= -A_{\mu\nu}(k_1, k_2; m) \\
&\quad + A_{\mu\nu}(k_1, k_3; m) \\
&\quad - 8i (4\pi)^{-2} (p_\mu p_\nu - g_{\mu\nu} p^2) \left[ Z_2(p^2; m^2) - \frac{1}{2} Z_0(p^2; m^2) \right] \\
&\quad + 8i (4\pi)^{-2} (q_\mu q_\nu - g_{\mu\nu} q^2) \left[ Z_2(q^2; m^2) - \frac{1}{2} Z_0(q^2; m^2) \right]. \tag{7.65}
\end{aligned}$$

É fácil então perceber, observando a expressão (7.12), que isto significa que podemos completar adequadamente os termos para identificar o resultado acima com

$$(k_3 - k_2)^\lambda T_{\lambda\mu\nu}^{VVV} = T_{\mu\nu}^{VV}(k_1, k_3; m) - T_{\mu\nu}^{VV}(k_1, k_2; m). \quad (7.66)$$

As contrações com os outros momentos externos podem ser verificadas seguindo absolutamente os mesmos passos e ingredientes utilizados acima. Seguindo tais procedimentos, encontraremos que

$$(k_1 - k_2)^\nu T_{\lambda\mu\nu}^{VVV} = T_{\lambda\mu}^{VV}(k_3, k_2; m) - T_{\lambda\mu}^{VV}(k_3, k_1; m) \quad (7.67)$$

e

$$(k_3 - k_1)^\mu T_{\lambda\mu\nu}^{VVV} = T_{\lambda\nu}^{VV}(k_1, k_2; m) - T_{\lambda\nu}^{VV}(k_3, k_2; m). \quad (7.68)$$

Com isto, verificamos que a forma explícita de  $T_{\lambda\mu\nu}^{VVV}$  fornecida pela estratégia que adotamos, preserva todas as relações entre funções de Green pertinentes a despeito da presença de quantidades indefinidas e potencialmente ambíguas.

O procedimento usado acima também pode ser adotado para verificar os quatro vínculos de consistência na forma de relações entre funções de Green para a função tetra-vetorial. Entre estes

$$(k_4 - k_1)^\mu T_{\mu\nu\alpha\beta}^{VVVV} = T_{\nu\alpha\beta}^{VVV}(k_1, k_2, k_3; m) - T_{\nu\alpha\beta}^{VVV}(k_2, k_3, k_4; m). \quad (7.69)$$

A fim de verificar se a expressão obtida é compatível com as identidades estabelecidas acima, nós seguimos essencialmente os mesmos passos adotados no tratamento da função de três pontos tri-vetorial. Isto é, primeiramente contraímos a amplitude com o momento externo de um vértice específico. O próximo passo é identificar propriedades para as funções  $\zeta_{nml}$ ,  $\xi_{nml}$  e  $\eta_{nml}$  análogas àquelas (7.39)-(7.52) identificadas para as funções  $\xi_{nm}$  e  $\eta_{nm}$ . Explicitamente, denominando  $(k_4 - k_1) = r$ ,  $(k_2 - k_4) = u$ ,  $(k_3 - k_4) = t$ ,  $(k_3 - k_1) = q$ , e  $(k_2 - k_1) = p$ , devemos identificar as propriedades

i)  $n+m+l=1$ :

$$(r \cdot p) \zeta_{100} + (r \cdot q) \zeta_{010} + r^2 \zeta_{001} = \frac{1}{2} \{ \xi_{00}(u, t) - \xi_{00}(p, q) + r^2 \zeta_{000} \}, \quad (7.70)$$

$$(p \cdot r) \xi_{100} + (q \cdot r) \xi_{010} + r^2 \xi_{001} = \frac{1}{2} \{ -\eta_{00}(u, t) + \eta_{00}(p, q) + r^2 \xi_{000} \}. \quad (7.71)$$

ii)  $n+m+l=2$ :

$$(r \cdot p) \zeta_{200} + (r \cdot q) \zeta_{110} + r^2 \zeta_{101} = \frac{1}{2} \{ \xi_{10}(u, t) - \xi_{10}(p, q) + r^2 \zeta_{100} \}, \quad (7.72)$$

$$(r \cdot q) \zeta_{020} + (r \cdot p) \zeta_{110} + r^2 \zeta_{011} = \frac{1}{2} \{ \xi_{01}(u, t) - \xi_{01}(p, q) + r^2 \zeta_{010} \}, \quad (7.73)$$

$$r^2 \zeta_{002} + (r \cdot q) \zeta_{011} + (r \cdot p) \zeta_{101} = \frac{1}{2} \{ \xi_{00}(u, t) - \xi_{10}(u, t) - \xi_{01}(u, t) - \xi_{000} + r^2 \zeta_{001} \}, \quad (7.74)$$

$$r^2 \xi_{101} + (r \cdot q) \xi_{110} + (r \cdot p) \xi_{200} = \frac{1}{2} \{ \eta_{10}(p, q) - \eta_{10}(u, t) + r^2 \xi_{100} \}, \quad (7.75)$$

$$r^2 \xi_{002} + (r \cdot q) \xi_{011} + (r \cdot p) \xi_{101} = \frac{1}{2} \{ \eta_{10}(u, t) - \eta_{00}(u, t) + \eta_{01}(u, t) + \eta_{000} + r^2 \xi_{001} \} \quad (7.76)$$

$$r^2 \xi_{011} + (r \cdot q) \xi_{020} + (r \cdot p) \xi_{110} = \frac{1}{2} \{ \eta_{01}(p, q) - \eta_{01}(u, t) + r^2 \xi_{010} \} \quad (7.77)$$



iii)  $n+m+l=3$ :

$$(p \cdot r) \zeta_{300} + (q \cdot r) \zeta_{210} + r^2 \zeta_{201} = \frac{1}{2} \{ \xi_{20}(u, t) - \xi_{20}(p, q) + r^2 \zeta_{200} \}, \quad (7.78)$$

$$(q \cdot r) \zeta_{030} + (p \cdot r) \zeta_{120} + r^2 \zeta_{021} = \frac{1}{2} \{ \xi_{02}(u, t) - \xi_{02}(p, q) + r^2 \zeta_{020} \}, \quad (7.79)$$

$$\begin{aligned} r^2 \zeta_{003} + (p \cdot r) \zeta_{102} + (q \cdot r) \zeta_{012} &= \left\{ \frac{1}{2} \xi_{00}(u, t) - \xi_{10}(u, t) - \xi_{01}(u, t) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \xi_{20}(u, t) + \xi_{11}(u, t) + \frac{1}{2} \xi_{02}(u, t) \right. \\ &\quad \left. - \xi_{001} + \frac{1}{2} r^2 \zeta_{002} \right\}, \end{aligned} \quad (7.80)$$

$$(p \cdot r) \zeta_{210} + (q \cdot r) \zeta_{120} + r^2 \zeta_{111} = \frac{1}{2} \{ \xi_{11}(u, t) - \xi_{11}(p, q) + r^2 \zeta_{110} \}, \quad (7.81)$$

$$\begin{aligned} (p \cdot r) \zeta_{201} + (q \cdot r) \zeta_{111} + r^2 \zeta_{102} &= \frac{1}{2} \{ \xi_{10}(u, t) - \xi_{20}(u, t) - \xi_{11}(u, t) \\ &\quad - \xi_{100} + r^2 \zeta_{101} \}, \end{aligned} \quad (7.82)$$

$$\begin{aligned} (p \cdot r) \zeta_{111} + (q \cdot r) \zeta_{021} + r^2 \zeta_{012} &= \frac{1}{2} \{ \xi_{01}(u, t) - \xi_{11}(u, t) - \xi_{02}(u, t) \\ &\quad - \frac{1}{2} \xi_{010} + \frac{1}{2} r^2 \zeta_{011} \}. \end{aligned} \quad (7.83)$$

iv)  $n+m+l=4$ :

$$\begin{aligned} r^2 \zeta_{004} + (r \cdot p) \zeta_{103} + (r \cdot q) \zeta_{013} &= \left\{ \frac{1}{2} \xi_{00}(u, t) - \frac{3}{2} \xi_{10}(u, t) - \frac{3}{2} \xi_{01}(u, t) \right. \\ &\quad \left. + \frac{3}{2} \xi_{20}(u, t) + 3 \xi_{11}(u, t) + \frac{3}{2} \xi_{02}(u, t) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \xi_{30}(u, t) - \frac{3}{2} \xi_{21}(u, t) \right. \\ &\quad \left. - \frac{3}{2} \xi_{12}(u, t) - \frac{1}{2} \xi_{03}(u, t) \right. \\ &\quad \left. - \frac{3}{2} \xi_{002} + \frac{1}{2} r^2 \zeta_{003} \right\}, \end{aligned} \quad (7.84)$$

$$r^2 \zeta_{301} + (r \cdot q) \zeta_{310} + (r \cdot p) \zeta_{400} = \frac{1}{2} \{ \xi_{30}(u, t) - \xi_{30}(p, q) + r^2 \zeta_{300} \}, \quad (7.85)$$

$$r^2 \zeta_{031} + (r \cdot q) \zeta_{040} + (r \cdot p) \zeta_{130} = \frac{1}{2} \{ \xi_{03}(u, t) - \xi_{03}(p, q) + r^2 \zeta_{030} \}, \quad (7.86)$$

$$\begin{aligned} r^2 \zeta_{103} + (r \cdot q) \zeta_{112} + (r \cdot p) \zeta_{202} &= \left\{ \frac{1}{2} \xi_{10}(u, t) - \xi_{20}(u, t) - \xi_{11}(u, t) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \xi_{30}(u, t) + \xi_{21}(u, t) + \frac{1}{2} \xi_{12}(u, t) \right. \\ &\quad \left. - \xi_{101} + \frac{1}{2} r^2 \zeta_{102} \right\}, \end{aligned} \quad (7.87)$$

$$\begin{aligned}
r^2\zeta_{013} + (r \cdot q)\zeta_{022} + (r \cdot p)\zeta_{112} &= \left\{ \frac{1}{2}\xi_{01}(u, t) - \xi_{11}(u, t) - \xi_{02}(u, t) \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2}\xi_{21}(u, t) + \xi_{12}(u, t) + \frac{1}{2}\xi_{03}(u, t) \right. \\
&\quad \left. - \xi_{011} + \frac{1}{2}r^2\zeta_{012} \right\}, \tag{7.88}
\end{aligned}$$

$$r^2\zeta_{211} + (r \cdot q)\zeta_{220} + (r \cdot p)\zeta_{310} = \frac{1}{2}\{\xi_{21}(u, t) - \xi_{21}(p, q) + r^2\zeta_{210}\}, \tag{7.89}$$

$$\begin{aligned}
r^2\zeta_{202} + (r \cdot q)\zeta_{211} + (r \cdot p)\zeta_{301} &= \frac{1}{2}\{\xi_{20}(u, t) - \xi_{30}(u, t) - \xi_{21}(u, t) \\
&\quad - \xi_{200} + r^2\zeta_{201}\}, \tag{7.90}
\end{aligned}$$

$$r^2\zeta_{121} + (r \cdot q)\zeta_{130} + (r \cdot p)\zeta_{220} = \frac{1}{2}\{\xi_{12}(u, t) - \xi_{12}(p, q) + r^2\zeta_{120}\}, \tag{7.91}$$

$$\begin{aligned}
r^2\zeta_{022} + (r \cdot q)\zeta_{031} + (r \cdot p)\zeta_{121} &= \frac{1}{2}\{\xi_{02}(u, t) - \xi_{12}(u, t) - \xi_{03}(u, t) \\
&\quad - \xi_{020} + r^2\zeta_{021}\}, \tag{7.92}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
r^2\zeta_{112} + (r \cdot q)\zeta_{121} + (r \cdot p)\zeta_{211} &= \frac{1}{2}\{\xi_{11}(u, t) - \xi_{21}(u, t) - \xi_{12}(u, t) \\
&\quad - \xi_{110} + r^2\zeta_{111}\}, \tag{7.93}
\end{aligned}$$

onde fizemos a simplificação  $\xi_{nm}(m^2, p^2, m^2, q^2, m^2) = \xi_{nm}(p, q)$ ,  $\eta_{nm}(m^2, p^2, m^2, q^2, m^2) = \eta_{nm}(p, q)$ ,  $\zeta_{nml}(p, q, r; m^2) = \zeta_{nml}$ ,  $\xi_{nml}(p, q, r; m^2) = \xi_{nml}$  e  $\eta_{nml}(p, q, r; m^2) = \eta_{nml}$ . Assim teremos para a parte finita

$$\begin{aligned}
r_\mu (T_{\mu\nu\alpha\beta}^{VVVV})^{finita} &= \\
&-4 [g_{\alpha\nu}q_\beta + g_{\alpha\beta}p_\nu + g_{\beta\nu}(p+q)_\alpha] \eta_{00}(p, q) \\
&+8 (g_{\beta\alpha}p_\nu + g_{\nu\alpha}p_\beta + g_{\beta\nu}p_\alpha) \eta_{01}(p, q) \\
&+8 (g_{\beta\alpha}q_\nu + g_{\nu\alpha}q_\beta + g_{\beta\nu}q_\alpha) \eta_{10}(p, q) \\
&-16 p_\alpha p_\beta p_\nu \xi_{03}(p, q) - 16 q_\alpha q_\beta q_\nu \xi_{30}(p, q) \\
&-16 (p_\alpha p_\beta q_\nu + p_\alpha q_\beta p_\nu + q_\alpha p_\beta p_\nu) \xi_{12}(p, q) \\
&-16 (p_\alpha q_\beta q_\nu + q_\alpha p_\beta q_\nu + q_\alpha q_\beta p_\nu) \xi_{21}(p, q) \\
&+8 q_\beta [p_\alpha p_\nu \xi_{02}(p, q) + q_\alpha q_\nu \xi_{20}(p, q) + (p_\alpha q_\nu + q_\alpha p_\nu) \xi_{11}(p, q)] \\
&+8 p_\nu [p_\alpha p_\beta \xi_{02}(p, q) + q_\alpha q_\beta \xi_{20}(p, q) + (p_\alpha q_\beta + q_\alpha p_\beta) \xi_{11}(p, q)] \\
&+8 (p+q)_\alpha [p_\beta p_\nu \xi_{02}(p, q) + q_\beta q_\nu \xi_{20}(p, q) + (p_\beta q_\nu + q_\beta p_\nu) \xi_{11}(p, q)] \\
&-4 (p_\nu q_\beta - q_\nu p_\beta) [p_\alpha \xi_{01}(p, q) + q_\alpha \xi_{10}(p, q)] \\
&-4 (q_\alpha p_\nu + p_\alpha q_\nu) [p_\beta \xi_{01}(p, q) + q_\beta \xi_{10}(p, q)] \\
&-4 (p_\alpha q_\beta + q_\alpha p_\beta) [p_\nu \xi_{01}(p, q) + q_\nu \xi_{10}(p, q)]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +g_{\nu\alpha}T_{\beta}^{VPP} (p, q) + g_{\beta\nu}T_{\alpha}^{PPV} (p, q) + g_{\beta\alpha}T_{\nu}^{PPV} (p, q) \\
& -4 \left\{ g_{\alpha\nu} (r - q)_{\beta} + g_{\alpha\beta} (r - p)_{\nu} + g_{\beta\nu} [(r - p)_{\alpha} + (r - q)_{\alpha}] \right\} \eta_{00} (u, t) \\
& -8 (g_{\beta\alpha}p_{\nu} + g_{\nu\alpha}p_{\beta} + g_{\beta\nu}p_{\alpha}) \eta_{01} (u, t) \\
& -8 (g_{\beta\alpha}q_{\nu} + g_{\nu\alpha}q_{\beta} + g_{\beta\nu}q_{\alpha}) \eta_{10} (u, t) \\
& +16p_{\alpha}p_{\beta}p_{\nu}\xi_{03} + 16q_{\alpha}q_{\beta}q_{\nu}\xi_{30} (u, t) \\
& +16 (p_{\alpha}p_{\beta}q_{\nu} + p_{\alpha}q_{\beta}p_{\nu} + q_{\alpha}p_{\beta}p_{\nu}) \xi_{12} (u, t) \\
& +16 (p_{\alpha}q_{\beta}q_{\nu} + q_{\alpha}p_{\beta}q_{\nu} + q_{\alpha}q_{\beta}p_{\nu}) \xi_{21} (u, t) \\
& +8 (r - q)_{\beta} [p_{\alpha}p_{\nu}\xi_{02} (u, t) + q_{\alpha}q_{\nu}\xi_{20} (u, t) + (p_{\alpha}q_{\nu} + q_{\alpha}p_{\nu}) \xi_{11} (u, t)] \\
& +8 (r - p)_{\nu} [p_{\alpha}p_{\beta}\xi_{02} (u, t) + q_{\alpha}q_{\beta}\xi_{20} (u, t) + (p_{\alpha}q_{\beta} + q_{\alpha}p_{\beta}) \xi_{11} (u, t)] \\
& +8 [(r - p)_{\alpha} + (r - q)_{\alpha}] [p_{\beta}p_{\nu}\xi_{02} (u, t) + q_{\beta}q_{\nu}\xi_{20} (u, t) + (p_{\beta}q_{\nu} + q_{\beta}p_{\nu}) \xi_{11} (u, t)] \\
& +4 \left[ (p - q)_{\beta} r_{\nu} - (p - q)_{\nu} r_{\beta} + (p_{\nu}q_{\beta} - q_{\nu}p_{\beta}) \right] [p_{\alpha}\xi_{01} (u, t) + q_{\alpha}\xi_{10} (u, t)] \\
& +4 [2r_{\alpha}r_{\nu} - (p + q)_{\nu} r_{\alpha} - (p + q)_{\alpha} r_{\nu} + (q_{\alpha}p_{\nu} + p_{\alpha}q_{\nu})] [p_{\beta}\xi_{01} (u, t) + q_{\beta}\xi_{10} (u, t)] \\
& +4 [2r_{\beta}r_{\alpha} - (p + q)_{\beta} r_{\alpha} - (p + q)_{\alpha} r_{\beta} + (p_{\alpha}q_{\beta} + q_{\alpha}p_{\beta})] [p_{\nu}\xi_{01} (u, t) + q_{\nu}\xi_{10} (u, t)] \\
& -g_{\nu\alpha}T_{\beta}^{VPP} (u, t) - g_{\beta\nu}T_{\alpha}^{PPV} (u, t) - g_{\beta\alpha}T_{\nu}^{PPV} (u, t), \tag{7.94}
\end{aligned}$$

onde também utilizamos os resultados, estabelecidos de modo semelhante,

$$r^{\mu}T_{\mu\beta}^{VPPV} = T_{\beta}^{VPP} (p, q) - T_{\beta}^{VPP} (u, t), \tag{7.95}$$

$$r^{\mu}T_{\mu\nu}^{VVPP} = T_{\nu}^{PPV} (p, q) - T_{\nu}^{PPV} (u, t) \tag{7.96}$$

e

$$r^{\mu}T_{\mu\alpha}^{VPPV} = T_{\alpha}^{PPV} (p, q) - T_{\alpha}^{PPV} (u, t). \tag{7.97}$$

Comparando a expressão obtida (7.82), com a soma dos resultados obtidos em (7.22), (7.23), (7.24), e (7.31), tendo em mente a expressão (7.21), notamos que é possível identificar, após uma conveniente reorganização, que

$$(k_4 - k_1)^{\mu} T_{\mu\nu\alpha\beta}^{VVVV} = T_{\nu\alpha\beta}^{VVV} (p, q) - T_{\nu\alpha\beta}^{VVV} (u, t). \tag{7.98}$$

As demais propriedades, (2.89), (2.90) e (2.92) capítulo 2, podem ser estabelecidas de modo totalmente análogo. Assim concluímos que todas as relações entre funções de Green pertinentes à função tetra-vetorial são preservadas pelas manipulações e cálculos realizadas.

### 7.2.3 Correção de vértice e auto-energia

Na seção 3 do capítulo 3, estabelecemos uma relação entre as funções de Green associadas à correção de vértice e de auto-energia do elétron por excitação de um fóton, Eq.(3.95). Verifiquemos então, se esta relação foi preservada pelas expressões obtidas por nós para as funções de Green envolvidas.

Primeiro tomamos o termo independente do parâmetro de “gauge”. Contraindo com o momento externo vem que

$$\begin{aligned}
(k_3 - k_2)_\mu \Lambda_1^\mu &= -(q - p)_\mu \gamma_\alpha \nabla_{\mu\alpha} (m^2) \\
&+ (q - \not{p}) I_{\log} (m^2) \\
&- 2i (4\pi)^{-2} \left\{ (q - \not{p}) Z_0 \left( (p - q)^2; m^2 \right) \right. \\
&+ 2i (4\pi)^{-2} \lim_{\mu^2 \rightarrow 0} \left\{ (q - \not{p}) \eta_{00} \right. \\
&\quad - [2mp^2 + \not{p}q^2 - m^2 \not{p}] \xi_{00} \\
&\quad + [2mq^2 + \not{q}p^2 - m^2 \not{q}] \xi_{00} \\
&\quad + (p \cdot q) q \xi_{01} - \not{p} \not{q} q \xi_{01} \\
&\quad - (p \cdot q) \not{p} \xi_{10} + \not{p} \not{p} q \xi_{10} \\
&\quad + (p \cdot q) \not{p} \xi_{01} - \not{p} \not{q} \not{p} \xi_{01} \\
&\quad - (p \cdot q) q \xi_{10} + \not{q} \not{p} q \xi_{10} \\
&\quad - 2q [q^2 \xi_{20} + p \cdot q \xi_{11}] \\
&\quad - 2\not{p} [q^2 \xi_{11} + p \cdot q \xi_{02}] \\
&\quad + 2q [p^2 \xi_{11} + p \cdot q \xi_{20}] \\
&\quad + 2\not{p} [q^2 \xi_{02} + p \cdot q \xi_{11}] \\
&\quad + [(p \cdot q) \xi_{01} + q^2 \xi_{10}] q \\
&\quad - [(p \cdot q) \xi_{10} + p^2 \xi_{01}] q \\
&\quad + \not{p} [2(p \cdot q) \xi_{01} + q^2 \xi_{10}] \\
&\quad - \not{p} [p^2 \xi_{01} + 2(p \cdot q) \xi_{10}] \\
&\quad - 4m [q^2 \xi_{10} + p \cdot q \xi_{01}] \\
&\quad \left. + 4m [p^2 \xi_{01} + p \cdot q \xi_{10}] \right\}. \tag{7.99}
\end{aligned}$$

Note aqui a conveniência de tomar a derivada indicada e o limite infravermelho apenas após a utilização das propriedades (7.49)-(7.50). Obteremos então

$$\begin{aligned}
(k_3 - k_2)_\mu \Lambda_1^\mu &= [(k_2 + k_1)_\nu - (k_3 + k_1)_\nu] \gamma_\alpha \Delta_{\alpha\nu} (m^2) \\
&+ [(q - 4m) - (\not{p} - 4m)] I_{\log} (m^2) \\
&+ i (4\pi)^{-2} \left\{ -2\not{p} Z_1 (0, m^2, p^2; m^2) \right. \\
&\quad + 2q Z_1 (0, m^2, q^2; m^2) \\
&\quad - 2(\not{p} - 2m) Z_0 (0, m^2, p^2; m^2) \\
&\quad \left. - 2(q - 2m) Z_0 (0, m^2, q^2; m^2) \right\}. \tag{7.100}
\end{aligned}$$

Após uma reorganização ficamos claramente com

$$(k_3 - k_2)_\mu \Lambda_1^\mu (k_1, k_2, k_3, m) = \Sigma_1 (k_1, k_2, m) - \Sigma_1 (k_1, k_3, m). \tag{7.101}$$

De modo semelhante consideramos o termo dependente do parâmetro de “gauge”. Contraindo com o momento externo temos

$$\begin{aligned}
(p-q)_\mu \Lambda_2^\mu &= (q-\not{p}) \left[ I_{\log}(m^2) - i(4\pi)^{-2} \lim_{\mu^2 \rightarrow 0} \left\{ \ln \left( \frac{\mu^2}{m^2} \right) \right\} \right] \\
&\quad + i(4\pi)^{-2} \lim_{\mu^2 \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial \mu^2} \left\{ (p^2 - m^2) (q - \not{p}) Z_0(\mu^2, m^2, p^2; m^2) \right. \\
&\quad \quad + (q^2 - m^2) (q - \not{p}) Z_0(\mu^2, m^2, p^2; m^2) \\
&\quad \quad - (q - \not{p}) \not{p} (\not{p} - m) Z_1(\mu^2, m^2, p^2; m^2) \\
&\quad \quad - (q - m) q (q - \not{p}) Z_1(\mu^2, m^2, p^2; m^2) \\
&\quad \quad - (q^2 - m^2) (q - \not{p}) \not{p} (\not{p} - m) \xi_{01} \\
&\quad \quad - (q^2 - m^2) (q - \not{p}) q (\not{p} - m) \xi_{10} \\
&\quad \quad - (p^2 - m^2) (q - m) \not{p} (q - \not{p}) \xi_{01} \\
&\quad \quad - (p^2 - m^2) (q - m) q (q - \not{p}) \xi_{10} \\
&\quad \quad + (q^2 - m^2) (p^2 - m^2) (q - \not{p}) \xi_{00} \\
&\quad \quad - (q - m) (q - \not{p}) (\not{p} - m) \eta_{00} \\
&\quad \quad + 2(q - m) q (\not{p} - m) [q^2 \xi_{20} + (p \cdot q) \xi_{11}] \\
&\quad \quad + 2(q - m) \not{p} (\not{p} - m) [q^2 \xi_{11} + (p \cdot q) \xi_{02}] \\
&\quad \quad - 2(q - m) q (\not{p} - m) [p^2 \xi_{11} + (p \cdot q) \xi_{20}] \\
&\quad \quad \left. - 2(q - m) \not{p} (\not{p} - m) [p^2 \xi_{02} + (p \cdot q) \xi_{11}] \right\}. \quad (7.102)
\end{aligned}$$

Então utilizando as propriedades (7.39)-(7.50) e removendo o limite infravermelho ficaremos com

$$\begin{aligned}
(k_3 - k_2)_\mu \Lambda_2^\mu &= -[(m - q) - (m - \not{p})] I_{\log}(m^2) \\
&\quad - i(4\pi)^{-2} \left\{ (m - \not{p}) Z_0(0, m^2, p^2; m^2) \right. \\
&\quad \quad + (p^2 - m^2) \not{p} \frac{Y_1(0, m^2, p^2; m^2)}{m^2} \\
&\quad \quad - (m - q) Z_0(0, m^2, q^2; m^2) \\
&\quad \quad \left. - (q^2 - m^2) q \frac{Y_1(0, m^2, q^2; m^2)}{m^2} \right\}. \quad (7.103)
\end{aligned}$$

Após uma reorganização, poderemos identificar isto com

$$(k_3 - k_2)_\mu \Lambda_2^\mu(k_1, k_2, k_3, m) = \Sigma_2(k_1, k_2, m) - \Sigma_2(k_1, k_3, m), \quad (7.104)$$

o que implica que a relação entre as funções de Green envolvidas foi preservada.

Os resultados obtidos nesta seção indicam claramente que as relações que estabelecemos no capítulo 3 entre as funções de Green foram preservadas nas expressões que obtivemos no contexto da estratégia de cálculo que adotamos. É importante notar que as arbitrariedades intrínsecas aos cálculos são ainda mantidas nas expressões que utilizamos para todas as funções de Green envolvidas nas identidades assim como o limite infravermelho. Resta-nos então considerar as relações de simetria a serem obedecidas pelas

amplitudes a fim de verificarmos quais restrições estas propriedades impõem. Veremos se é possível uma escolha universal para as arbitrariedades existentes nos resultados a fim de que todas as características desejáveis estejam presentes nas amplitudes, ou seja, se poderemos ter amplitudes livres de ambigüidades e preservando as simetrias correspondentes.

## Capítulo 8

# Ambigüidades, relações de simetria e renormalização

### 8.1 Introdução

Nos capítulos precedentes consideramos o cálculo das amplitudes perturbativas ao nível um “loop” pertinentes à EDQ. Num primeiro instante aplicamos as regras de Feynman, identificamos um conjunto de funções de Green contendo divergências e as escrevemos em termos de integrais de Feynman. Neste ponto, ao invés de utilizarmos um método de regularização tradicional adotamos uma estratégia alternativa na qual assumimos a presença de uma distribuição regularizadora apenas implicitamente. No contexto desta estratégia somente propriedades muito gerais, indispensáveis para qualquer regularização, são utilizadas em passos intermediários. A rigor, integrais divergentes não são, de fato, calculadas. As divergências são organizadas em um conjunto de objetos básicos e mantidas do modo como surgem nos cálculos. Deste modo é possível preservar todas as arbitrariedades inerentes aos cálculos. Estas resultam das escolhas que um usuário de TQC deve fazer para completar um cálculo perturbativo. A primeira destas deve ser feita ao construir a rotulação para as linhas internas de um diagrama representando uma amplitude contendo pelo menos um “loop”. Todas as rotulações possíveis estão relacionadas por “shifts” no momento do “loop”. Entretanto devido ao caráter divergente das amplitudes tais “shifts” devem ser compensados pelos termos de superfície correspondentes cuja implicação é que dois usuários de TQC podem obter dois resultados para uma mesma amplitude do cálculo perturbativo e estes diferirão por um termo que depende essencialmente das escolhas para os rótulos das linhas internas. Neste caso não é possível saber qual dos resultados deve ser considerado correto pois ambos, apenas exercitaram o direito de escolha. Evidentemente que neste cenário não podemos levar a sério qualquer predição da teoria pois ela não possui a capacidade de determinar uma expressão bem definida para as amplitudes. Assim para que possamos “curar” este problema das soluções perturbativas devemos ser capazes de construir uma prescrição tal que estes termos ambíguos desapareçam sempre e automaticamente das amplitudes. O segundo tipo de arbitrariedade é a própria escolha da regularização. Esta tem implicação direta sobre as propriedades

assumidas para as integrais divergentes e para as relações entre elas. Uma vez assumida uma regularização explicitamente as integrais se tornam finitas e pode ser procedida a integração. Neste contexto torna-se difícil identificar as razões de uma eventual inconsistência como, por exemplo, uma violação em alguma relação de simetria da teoria. O terceiro tipo de arbitrariedade, a qual brevemente introduzimos no capítulo 6, é aquela associada à escolha da escala nos cálculos perturbativos e não aparece no contexto de métodos usuais de regularização.

No contexto do método que utilizamos, para manipular e calcular as integrais de Feynman divergentes, as arbitrariedades citadas acima são preservadas, isto é, na expressão que obtivemos para as amplitudes que calculamos qualquer rotulação específica pode ainda ser assumida assim como qualquer forma específica de regularização. É possível, portanto, efetuar uma análise muito geral dos resultados por nós obtidos pois estes contêm, em princípio, todos aqueles que podem ser obtidos no contexto dos métodos usuais de regularização. Neste procedimento é possível inverter o sentido usual da análise que é, ao invés de apenas testar os resultados para verificar a consistência destes, questionar a respeito das propriedades essenciais a um método de regularização para que este seja consistente. É importante ressaltar, mais uma vez, que todas as relações entre funções de Green identificadas foram obtidas preservadas pelas manipulações e cálculos efetuados ainda que as arbitrariedades inerentes estejam presentes nas expressões para as amplitudes. Isto quer dizer que as relações entre funções de Green não podem ser utilizadas para a identificação das condições que devem ser obedecidas pelas integrais divergentes regularizadas a fim de que a consistência desejada seja alcançada. Este papel deve ser desempenhado pelas relações de simetria ou identidades de Ward ou ainda por determinações mais gerais tipo o teorema de Furry. Tendo isto em mente vamos considerar cada uma das amplitudes calculadas anteriormente e tentar identificar as propriedades necessárias à consistência nos cálculos perturbativos através das exigências impostas pelas simetrias e pela necessidade de eliminação das ambigüidades. Veremos, de modo transparente, que ambos os aspectos estão profundamente relacionados.

## 8.2 Ambigüidades

No capítulo 7 completamos o cálculo das funções de Green que aparecem no contexto da EDQ. Em todas as funções de Green calculadas, com graus de divergência superiores aquele logarítmico, é possível notar a presença de termos onde existem dependências nos momentos internos que aparecem em combinações arbitrárias. Isto é esperado uma vez que, como já mencionamos, um “shift” no momento de integração gera termos de superfície que implicam que, escolhas diferentes para os rótulos dos momentos da linhas internas levam a amplitudes diferentes. Esta possível dependência caracteriza o que chamamos de ambigüidades relacionadas às escolhas para os rótulos dos momentos das linhas internas. Vamos então, para facilitar a análise, considerar tais termos para cada uma das amplitudes consideradas.

Tomando inicialmente a função de um ponto  $T_V^V(k_1, m)$ , dada na expressão (7.3) do capítulo 7, que é cubicamente divergente, é possível perceber que todos os termos são dependentes do momento arbitrário



$k_1$ , ou seja, a parte ambígua é dada por

$$(T_\mu^V)_{ambi} = 4 \left\{ -k_1^\beta [\nabla_{\beta\mu}] - \frac{1}{3} k_1^\beta k_1^\alpha k_1^\nu [\square_{\alpha\beta\mu\nu}] + \frac{1}{3} k_1^2 k_1^\nu [\Delta_{\nu\mu}] + \frac{2}{3} k_{1\mu} k_{1\alpha} k_{1\beta} [\Delta^{\alpha\beta}] \right\}. \quad (8.1)$$

Já para o caso da função de dois pontos Bi-vetorial  $T_{\mu\nu}^{VV}$ , dada na expressão (7.12) do capítulo 7, nós identificamos os termos ambíguos

$$(T_{\mu\nu}^{VV})_{ambig} = Q^\alpha Q^\beta [\square_{\alpha\beta\mu\nu} (m^2) - \Delta_{\nu\alpha} (m^2) g_{\mu\beta} - \Delta_{\beta\nu} (m^2) g_{\alpha\mu} - 3\Delta_{\alpha\beta} (m^2) g_{\mu\nu}] + \frac{1}{3} [q^\alpha Q^\beta - Q^\alpha q^\beta] [\square_{\alpha\beta\mu\nu} (m^2) \Delta_{\mu\beta} (m^2) g_{\nu\alpha} + \Delta_{\beta\nu} (m^2) g_{\alpha\mu}] \quad (8.2)$$

pois a soma  $Q = k_1 + k_2$  é uma quantidade arbitrária.

Por sua vez, para a função de Green relacionada à auto-energia do elétron por excitação de um fóton, que possui caráter linearmente divergente, identificamos

$$(\Sigma_1)_{ambig} = \gamma^\alpha P^\mu [\Delta_{\alpha\mu} (m^2)] \quad (8.3)$$

e

$$(\Sigma_2)_{ambig} = -\gamma_\alpha P_\mu [\Delta^{\alpha\mu} (m^2)] \quad (8.4)$$

como sendo os termos ambíguos pois a combinação  $P = k_1 + k_2$  é arbitrária. Finalmente, no cálculo da função de três pontos triplamente vetorial nós podemos identificar

$$\begin{aligned} \left( \frac{T_{\mu\nu\lambda}^{VVV}}{2} \right)_{ambig} &= (k_2 + k_1)_\alpha \left[ -\frac{1}{3} \square_{\alpha\lambda\mu\nu} (m^2) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{3} g_{\alpha\nu} \Delta_{\mu\lambda} (m^2) - \frac{1}{3} g_{\alpha\mu} \Delta_{\nu\lambda} (m^2) - \frac{1}{3} g_{\alpha\lambda} \Delta_{\mu\nu} (m^2) \right. \\ &\quad \left. + g_{\mu\lambda} \Delta_{\nu\alpha} (m^2) + g_{\alpha\nu} \Delta_{\lambda\mu} (m^2) \right] \\ &+ (k_1 + k_3)_\alpha \left[ -\frac{1}{3} \square_{\alpha\lambda\mu\nu} (m^2) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{3} g_{\alpha\nu} \Delta_{\mu\lambda} (m^2) - \frac{1}{3} g_{\alpha\mu} \Delta_{\nu\lambda} (m^2) - \frac{1}{3} g_{\alpha\lambda} \Delta_{\mu\nu} (m^2) \right. \\ &\quad \left. + g_{\nu\lambda} \Delta_{\mu\alpha} + g_{\alpha\mu} \Delta_{\lambda\nu} \right] \\ &+ (k_2 + k_3)_\alpha \left[ -\frac{1}{3} \square_{\alpha\lambda\mu\nu} (m^2) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{3} g_{\alpha\nu} \Delta_{\mu\lambda} (m^2) - \frac{1}{3} g_{\alpha\mu} \Delta_{\nu\lambda} (m^2) - \frac{1}{3} g_{\alpha\lambda} \Delta_{\mu\nu} (m^2) \right. \\ &\quad \left. + g_{\nu\mu} \Delta_{\lambda\alpha} (m^2) + g_{\alpha\lambda} \Delta_{\mu\nu} (m^2) \right] \} \quad (8.5) \end{aligned}$$

já que as combinações  $k_i + k_j$  são arbitrárias. As demais amplitudes calculadas não exibem termos ambíguos devido ao caráter logaritmicamente divergente.

É muito simples caracterizar os termos ambíguos de todas as amplitudes acima. Basta observar que todos as formas arbitrárias dos momentos internos aparecem multiplicadas pelos objetos divergentes  $\nabla_{\beta\mu} (m^2)$ ,  $\square_{\alpha\beta\mu\nu} (m^2)$  e  $\Delta_{\alpha\beta} (m^2)$ . Todos estes objetos estão envolvidos na expressão para  $T_\mu^V$ , apenas  $\square$  e  $\Delta$  aparecem nos termos ambíguos das amplitudes  $T_{\mu\nu}^{VV}$  e  $T_{\lambda\mu\nu}^{VVV}$  e, apenas o objeto  $\Delta$  participa da expressão para os termos ambíguos de  $\Sigma$ . Estes objetos são também quantidades indefinidas e, em princípio, arbitrárias pois dependem da escolha da regularização para serem especificados. Assim se

pretendemos eliminar as ambigüidades inerentes à escolha para os rótulos dos momentos das linhas internas dos “loops” de todas as amplitudes da EDQ ao nível um “loop” basta escolher uma regularização tal que

$$\nabla_{\beta\mu}^{Reg}(m^2) = 0 \quad (8.6)$$

$$\square_{\alpha\beta\mu\nu}^{Reg}(m^2) = 0 \quad (8.7)$$

$$\Delta_{\alpha\beta}^{Reg}(m^2) = 0. \quad (8.8)$$

Consideremos então as relações de simetria.

### 8.2.1 Relações de simetria

A fim de verificar as determinações das simetrias para as amplitudes consideremos inicialmente aquelas do teorema de Furry. Este, como já dissemos, estabelece que toda amplitude possuindo um número ímpar de vetores externos e somente uma espécie de férmion nas linhas internas deve se anular identicamente. Isto possui implicações diretas sobre duas funções de Green que consideramos:  $T_\nu^V$  e  $T_{\mu\lambda\nu}^{VVV}$ . Primeiramente é imediato perceber que, para  $T_\nu^V$  ser identicamente nula, as três condições (8.6)-(8.8) devem ser satisfeitas simultaneamente. Por sua vez, para a função de três pontos tri-vetorial, a qual decompos na forma

$$T_{\lambda\mu\nu}^{VVV}(k_3, k_1, k_2, m) = T_{\lambda\mu\nu} + g_{\mu\nu}T_\lambda^{VPP} + g_{\nu\lambda}T_\mu^{PPV} + g_{\mu\lambda}T_\nu^{PPV}, \quad (8.9)$$

após simetrizada nos estados finais, o que significa soma dos canais direto e cruzado, devemos obter um resultado nulo. Observando as expressões obtidas para os termos envolvidos, equações (7.22), (7.23), e (7.25) do capítulo 7, é fácil perceber as propriedades, frente a troca nos momentos externos

$$T_\lambda^{VPP}(q, p) = -T_\lambda^{VPP}(p, q) \quad (8.10)$$

$$T_\mu^{PPV}(q, p) = -T_\mu^{PPV}(p, q) \quad (8.11)$$

$$T_\nu^{PPV}(q, p) = -T_\nu^{PPV}(p, q). \quad (8.12)$$

Por sua vez para o termo  $T_{\lambda\mu\nu}$ , especificado em (7.31) do capítulo 7, podemos também perceber que, escrevendo,

$$T_{\lambda\mu\nu} = (T_{\lambda\mu\nu})_{na} + (T_{\lambda\mu\nu})_{ambi} \quad (8.13)$$

onde  $(T_{\lambda\mu\nu})_{ambi}$  é dado na Eq.(8.5), o termo não ambíguo  $(T_{\lambda\mu\nu})_{na}$  terá a propriedade

$$[T_{\lambda\mu\nu}(p, q)]_{na} = -[T_{\lambda\nu\mu}(q, p)]_{na}. \quad (8.14)$$

Para chegar às conclusões (8.10), (8.11), (8.12) e (8.14) é necessário apenas utilizar as propriedades das funções  $\xi_{nm}(q, p; m)$  frente à troca  $q \leftrightarrow p$ . Estas observações permitem estabelecer que a simetria nos estados finais necessária para caracterizar o processo envolvendo três vetores externos pode ser representado por

$$[T_{\lambda\mu\nu}^{VVV}(p, q; m) + T_{\lambda\nu\mu}^{VVV}(q, p; m)] = \textit{termos ambíguos} \quad (8.15)$$

onde os termos ambíguos são dados na expressão (8.5) para o canal direto e expressão equivalente para o canal cruzado envolvendo momentos internos arbitrários  $l$ 's. Assim para que as determinações do teorema de Furry sejam preenchidas é necessário que as condições (8.7) e (8.8) sejam satisfeitas.

Outro aspecto importante para a consistência da EDQ, neste caso crucial para a renormalizabilidade, é o caráter finito da função de Green tetra vetorial. Uma simples inspeção revela a presença dos objetos  $\square$  e  $\triangle$  de modo não ambíguo. Assim, não existe escolha possível para os rótulos dos momentos das linhas internas capazes de eliminar tais termos. Somente um cálculo que satisfaça às condições (8.7) e (8.8) eliminará a presença destes termos incômodos.

Agora consideremos as identidades de Ward. No contexto da EDQ, toda a corrente vetorial deve ser conservada. Isto significa que todas as contrações com momentos externos efetuadas em vértices vetoriais devem se anular identicamente. A implicação disto para a função de um ponto vetorial é

$$k_1^\mu T_\mu^V = 4k_1^\mu \left\{ -k_1^\beta [\nabla_{\beta\mu}] - \frac{1}{3}k_1^\beta k_1^\alpha k_1^\nu [\square_{\alpha\beta\mu\nu}] + \frac{1}{3}k_1^2 k_1^\nu [\triangle_{\nu\mu}] + \frac{2}{3}k_{1\mu} k_{1\alpha} k_{1\beta} [\triangle^{\alpha\beta}] \right\} = 0, \quad (8.16)$$

o que exige também a anulação de  $T_\mu^V$ . Já para a função de dois pontos Bi-vetorial devemos ter

$$\begin{aligned} (k_1 - k_2)^\mu T_{\nu\mu}^{VV}(q; m) &= q^\mu \{ 4[\nabla_{\mu\nu}] \\ &+ q^\alpha q^\beta \left[ \frac{1}{3}\square_{\alpha\beta\mu\nu} + \frac{1}{3}\triangle_{\mu\beta} g_{\alpha\nu} + g_{\alpha\mu} \triangle_{\beta\nu} - g_{\mu\nu} \triangle_{\alpha\beta} - \frac{2}{3}g_{\alpha\beta} \triangle_{\mu\nu} \right] \\ &+ [q^\alpha Q^\beta - Q^\alpha q^\beta] \left[ \frac{1}{3}\square_{\alpha\beta\mu\nu} + \frac{1}{3}\triangle_{\mu\beta} g_{\nu\alpha} + \frac{1}{3}\triangle_{\beta\nu} g_{\alpha\mu} \right] \\ &+ Q^\alpha Q^\beta [\square_{\alpha\beta\mu\nu} - \triangle_{\nu\alpha} g_{\mu\beta} - \triangle_{\beta\nu} g_{\alpha\mu} - 3\triangle_{\alpha\beta} g_{\mu\nu}] \} = 0. \end{aligned} \quad (8.17)$$

Nós já percebemos na seção 2 do capítulo 7, que este resultado pode ser colocado na forma

$$(k_1 - k_2)^\mu T_{\nu\mu}^{VV} = T_\nu^V(k_2, m) - T_\nu^V(k_1, m) = 0, \quad (8.18)$$

o que, mais uma vez, exige que as condições (8.6)-(8.8) sejam satisfeitas simultaneamente. Uma condição similar pode ser obtida para o outro índice de Lorentz. Por sua vez, para a função de três pontos triplamente vetorial, a fim de que a identidade de Ward seja satisfeita, devemos ter que

$$(k_3 - k_2)^\lambda T_{\lambda\mu\nu}^{VVV}(k_1, k_2, k_3; m) + (l_3 - l_2)^\lambda T_{\lambda\nu\mu}^{VVV}(l_1, l_2, l_3; m) = 0. \quad (8.19)$$

que é portanto equivalente à condição (8.15) já que isto pode ser escrito como

$$(p + q)^\lambda [T_{\lambda\mu\nu}^{VVV}(k_1, k_2, k_3; m) + T_{\lambda\nu\mu}^{VVV}(l_1, l_2, l_3; m)] = 0. \quad (8.20)$$

É interessante notar que isto está relacionado à função Bi-vetorial pois

$$\begin{aligned} &(k_3 - k_2)^\lambda T_{\lambda\mu\nu}^{VVV}(k_1, k_2, k_3; m) + (l_3 - l_2)^\lambda T_{\lambda\nu\mu}^{VVV}(l_1, l_2, l_3; m) \\ &= T_{\mu\nu}^{VV}(k_1, k_3; m) - T_{\mu\nu}^{VV}(k_1, k_2; m) \\ &+ T_{\mu\nu}^{VV}(l_1, l_3; m) - T_{\mu\nu}^{VV}(l_1, l_2; m) \end{aligned} \quad (8.21)$$

Agora, uma vez que, de acordo com o resultado (7.15) do capítulo 7, temos a estrutura

$$\begin{aligned}
T_{\mu\nu}^{VV}(k_i, k_j; m) &= A_{\mu\nu}(k_i, k_j; m) \\
&+ \frac{4}{3} \left( (k_i - k_j)^2 g_{\mu\nu} - (k_i - k_j)_\mu (k_i - k_j)_\nu \right) \{ I_{\log}(m^2) \\
&- i(4\pi)^{-2} \left[ \frac{1}{3} + \frac{(2m^2 + q^2)}{q^2} Z_0(q^2; m^2) \right] \}, \tag{8.22}
\end{aligned}$$

para a expressão (8.21) nós teremos

$$\begin{aligned}
&(k_3 - k_2)^\lambda T_{\lambda\mu\nu}^{VVV}(k_1, k_2, k_3; m) + (l_3 - l_2)^\lambda T_{\lambda\nu\mu}^{VVV}(l_1, l_2, l_3; m) \\
&= A_{\mu\nu}(k_1, k_3; m) - A_{\mu\nu}(k_1, k_2; m) \\
&+ A_{\mu\nu}(l_1, l_3; m) - A_{\mu\nu}(l_1, l_2; m) \tag{8.23}
\end{aligned}$$

e isto será igual à parte ambígua já que aqueles termos de  $A_{\mu\nu}$  independentes dos momentos internos, ou dependentes em combinações envolvendo momentos externos, se cancelam. Condições similares serão obtidas para as contrações restantes. A mesma condição é suficiente para que as identidades de Ward envolvendo a função de quatro pontos tetra-vetorial sejam preservadas pois, de acordo com as relações entre funções de Green estabelecidas no capítulo 3 e verificadas explicitamente no capítulo 7, a contração desta função com os momentos externos está relacionada com diferenças entre funções de três pontos triplamente vetoriais. Como tal teremos

$$\begin{aligned}
&(k_3 - k_2)_\lambda T_{\lambda\mu\nu\alpha}^{VVVV} + (l_3 - l_2)_\lambda T_{\lambda\nu\mu\alpha}^{VVVV} \\
&+ (r_3 - r_2)_\lambda T_{\lambda\nu\mu\alpha}^{VVVV} + (t_3 - t_2)_\lambda T_{\lambda\nu\mu\alpha}^{VVVV} \\
&+ (s_3 - s_2)_\lambda T_{\lambda\nu\mu\alpha}^{VVVV} \\
&= T_{\lambda\nu\mu}^{VVV}(k_2, k_1; m) - T_{\lambda\nu\mu}^{VVV}(k_1, k_3; m) \\
&+ T_{\lambda\nu\mu}^{VVV}(l_2, l_1; m) - T_{\lambda\nu\mu}^{VVV}(l_1, l_3; m) \\
&+ T_{\lambda\nu\mu}^{VVV}(r_2, r_1; m) - T_{\lambda\nu\mu}^{VVV}(r_1, r_3; m) \\
&+ T_{\lambda\nu\mu}^{VVV}(t_2, t_1; m) - T_{\lambda\nu\mu}^{VVV}(t_1, t_3; m) = 0. \tag{8.24}
\end{aligned}$$

A condição para que o lado direito se anule, é portanto, aquela que elimina os termos ambíguos das funções de três pontos.

Finalmente, para a identidade de Ward envolvendo a função de vértice e a auto-energia do elétron por excitação de um fóton, a eliminação dos termos ambíguos da auto energia garante a manutenção desta relação de simetria que fica na forma

$$(q - p)_\mu \Lambda_2^\mu(p, q, m) = \Sigma_2(p, m) - \Sigma_2(q, m). \tag{8.25}$$

Assim todas as amplitudes que têm suas propriedades de simetria preservadas serão também automaticamente livres de ambigüidades. É importante notar, entretanto, que todos os termos ambíguos são violadores de simetria mas nem todos os termos violadores são ambíguos no que diz respeito às escolhas para os rótulos dos momentos das linhas internas dos “loops”. Isto possui uma implicação muito importante relativa aos métodos de regularização. A possibilidade de efetuar “shifts” garante a produção de

amplitudes livres de ambigüidades mas não garante que estas estarão livres de termos violadores de suas simetrias. É portanto fácil estabelecer uma conclusão para a análise efetuada nesta seção: as condições (8.6)-(8.8), que denominaremos de Relações de Consistência (RC) daqui por diante, são necessárias e suficientes para a eliminação de todos os termos ambíguos e para a preservação das simetrias nas amplitudes da EDQ ao nível um “loop”. Sendo assim vejamos como dois métodos considerados consistentes quando aplicados à EDQ satisfazem às RC’s.

### 8.3 Objetos divergentes básicos e regularizações

Nas seções precedentes, levando em consideração as amplitudes da EDQ ao nível um “loop”, consideramos os aspectos ambigüidades e relações de simetria. Todas as condições foram colocadas em termos de três diferenças entre integrais divergentes de mesmo grau de divergência. A partir dos resultados obtidos pela nossa estratégia de cálculo podemos obter aqueles correspondentes aos fornecidos pelos métodos de regularização tradicionais ou filosofias equivalentes. Tudo o que precisamos é especificar o valor atribuído aos objetos (8.6)-(8.8) pelo método adotado. Nesta seção nós queremos analisar como tratamentos representativos de divergências especificam o valor destes objetos.

#### 8.3.1 Regularização Dimensional

Para o cálculo de integrais nos momentos no contexto da RD [26] assumimos como ponto inicial a validade da expressão

$$I(2\omega, \alpha, q) = \int \frac{d^{2\omega}k}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{1}{[k^2 + 2q \cdot k - H^2]^\alpha} = \left( \frac{i}{(4\pi)^\omega} \right) \frac{\Gamma(\alpha - \omega)}{\Gamma(\alpha) (-q^2 - H^2)^{\alpha - \omega}}. \quad (8.26)$$

Em situações onde a integral acima é divergentes, i.e. ( $\alpha \leq \omega$ ), admitimos que a integral  $I(2\omega, \alpha, q)$  é uma função analítica da variável  $\omega$ , a qual é contínua e complexa. Do lado direito da expressão a função Gama é trocada da função de Euler para a sua continuação analítica (na região  $\alpha \leq \omega$ ): a função de Weierstrass. As divergências emergirão como pólos em valores específicos de  $\omega$ . Um aspecto importante para nossa discussão é que, uma vez que o resultado (8.26) tenha sido estabelecido, nós podemos gerar relações entre integrais sem nos preocupar com as divergências. As relações específicas que estamos interessados aqui, podem ser obtidas pela diferenciação adequada de ambos os lados da Eq.(8.26) em relação ao momento  $q$ , e depois disto pela tomada de  $q$  como tendendo ao valor zero. Seguindo este procedimento nós encontraremos

$$\int \frac{d^{2\omega}k}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{1}{(k^2 - m^2)^\alpha} = \left( \frac{i}{(4\pi)^\omega} \right) \frac{\Gamma(\alpha - \omega)}{\Gamma(\alpha) (-m^2)^{\alpha - \omega}} \quad (8.27)$$

$$\int \frac{d^{2\omega}k}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{k_\mu k_\nu}{(k^2 - m^2)^\alpha} = \left( \frac{i}{(4\pi)^\omega} \right) \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \frac{\Gamma(\alpha - \omega - 1)}{\Gamma(\alpha) (-m^2)^{\alpha - \omega - 1}} \quad (8.28)$$

$$\int \frac{d^{2\omega}k}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{k_\mu k_\nu k_\xi k_\beta}{(k^2 - m^2)^\alpha} = \left( \frac{i}{(4\pi)^\omega} \right) \frac{1}{4} [ g_{\mu\nu} g_{\beta\xi} + g_{\mu\beta} g_{\nu\xi} + g_{\mu\xi} g_{\nu\beta} ] \frac{\Gamma(\alpha - \omega - 2)}{\Gamma(\alpha) (-m^2)^{\alpha - \omega - 2}}. \quad (8.29)$$

A comparação com os resultados nos permite identificar as seguintes relações

$$\int \frac{d^{2\omega} k}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{2k_\mu k_\nu}{(k^2 - m^2)^2} = \int \frac{d^{2\omega} k}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{g_{\mu\nu}}{(k^2 - m^2)^2} \quad (8.30)$$

$$\int \frac{d^{2\omega} k}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{4k_\mu k_\nu}{(k^2 - m^2)^3} = \int \frac{d^{2\omega} k}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{g_{\mu\nu}}{(k^2 - m^2)^2} \quad (8.31)$$

$$\begin{aligned} \int \frac{d^{2\omega} k}{(2\pi)^4} \frac{24k_\nu k_\mu k_\beta k_\xi}{(k^2 - m^2)^4} &= g_{\mu\nu} \int \frac{d^{2\omega} k}{(2\pi)^4} \frac{4k_\beta k_\xi}{(k^2 - m^2)^3} \\ &+ g_{\mu\beta} \int \frac{d^{2\omega} k}{(2\pi)^4} \frac{4k_\xi k_\nu}{(k^2 - m^2)^3} \\ &+ g_{\nu\beta} \int \frac{d^{2\omega} k}{(2\pi)^4} \frac{4k_\xi k_\mu}{(k^2 - m^2)^3}. \end{aligned} \quad (8.32)$$

Então as condições de consistência, que emergiram de nossa análise, são automaticamente satisfeitas na RD. É possível dizer que a consistência da RD reside precisamente neste fato, ou seja, os resultados produzidos pelo esquema de regularização estão automaticamente livres de ambigüidades e também preservam as simetrias. É permitido efetuar “shifts” no momento de integração, mas não é uma operação obrigatória. As propriedades (8.6)-(8.8) eliminam toda a possível dependência nas escolhas dos momentos das linhas internas. Devido a isto é fácil perceber que em todos os problemas onde a técnica RD pode ser aplicada se nós assumíssemos  $\square_{\alpha\beta\mu\nu} = \nabla_{\mu\nu} = \Delta_{\mu\nu} = 0$  e escrevêssemos os objetos  $I_{log}(m^2)$  e  $I_{quad}(m^2)$  (assumindo em seus coeficientes valores apropriados para os traços das matrizes  $\gamma$ ;  $tr(\gamma_\mu \gamma_\nu) = 2^\omega g_{\mu\nu}$ , e assim por diante) de acordo com as expressões ditadas diretamente pelas equações (8.6)-(8.8), um mapeamento perfeito pode ser obtido.

### 8.3.2 A regularização covariante de Pauli-Villars

Para calcular qualquer integral divergente sob o ponto de vista da prescrição de Pauli-Villars (PV) [6], inicialmente fazemos a substituição

$$I(m) \longrightarrow \sum_{i=0} a_i I(\Lambda_i), \quad (8.33)$$

onde  $a_0 = 1$  e  $\Lambda_0 = m$ . Todos os outros parâmetros  $a_i$ 's e  $\Lambda_i$ 's precisam ser escolhidos de modo a construir uma superposição que conduza a resultados desejáveis, guiados, por exemplo, pela manutenção das identidades de Ward. Em termos desta receita vamos considerar os valores das três diferenças relevantes. Primeiro,

$$\begin{aligned} &\left\{ \int_{\Lambda} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{4k_\mu k_\nu}{(k^2 - m^2)^3} - \int_{\Lambda} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{g_{\mu\nu}}{(k^2 - m^2)^2} \right\} \\ &= \sum_{i=0} a_i \left\{ \int_{\Lambda} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{4k_\mu k_\nu}{(k^2 - \Lambda_i^2)^3} - \int_{\Lambda} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{g_{\mu\nu}}{(k^2 - \Lambda_i^2)^2} \right\} \\ &= \sum_{i=0} a_i \left\{ \int_{\Lambda} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{\Lambda_i^2}{(k^2 - \Lambda_i^2)^3} \right\} = \sum_{i=0} a_i \left\{ \left( \frac{i}{(4\pi)^2} \right) \left( -\frac{1}{2} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (8.34)$$

Para satisfazer a condição de consistência acima tudo o que precisamos é escolher um conjunto de  $a_i$ 's tal que  $\sum_{i=0} a_i = 0$ . A próxima condição, relativa a  $\square_{\alpha\beta\mu\nu}$ , leva ao resultado

$$\square_{\alpha\beta\mu\nu} = [g_{\mu\nu}g_{\alpha\beta} + g_{\alpha\mu}g_{\nu\beta} + g_{\alpha\nu}g_{\beta\mu}] \sum_{i=0} a_i \left\{ \left( \frac{i}{(4\pi)^2} \right) \left( -\frac{5}{6} \right) \right\}, \quad (8.35)$$

que é então simultaneamente satisfeito com a mesma escolha de coeficientes como aquela considerada previamente. A relação envolvendo divergências quadráticas  $\nabla_{\mu\nu}$  pode ser calculada do mesmo modo

$$\begin{aligned} \nabla_{\mu\nu} &= \sum_{i=0} a_i \left\{ \int_{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{2k_{\mu}k_{\nu}}{(k^2 - \Lambda_i^2)^2} - \int_{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{g_{\mu\nu}}{(k^2 - \Lambda_i^2)} \right\} \\ &= -\frac{g_{\mu\nu}}{2} \sum_{i=0} a_i \int_{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - \Lambda_i^2)} + \frac{g_{\mu\nu}}{2} \sum_{i=0} a_i \Lambda_i^2 \int_{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - \Lambda_i^2)^2}. \end{aligned} \quad (8.36)$$

Então se escolhermos, em adição a escolha  $\sum_i a_i = 0$ , os valores para  $a_i$  e  $\Lambda_i^2$  tais que  $\sum_{i=0} a_i \Lambda_i^2 = 0$ , nós obtemos  $\nabla_{\mu\nu} = 0$ . Não existe nenhum fato novo nas condições acima derivadas. Na verdade, elas são as mesmas daquelas usadas no tratamento da EDQ, guiadas pela invariância de “gauge” no tensor de polarização do vácuo, no cancelamento do diagrama “tadpole” da auto-energia do elétron e assim por diante. Para completar esta subseção precisamos mostrar como os resultados de Pauli-Villars podem ser extraídos dos nossos. A primeira etapa é obviamente assumir  $\square_{\alpha\beta\mu\nu} = \nabla_{\mu\nu} = \Delta_{\mu\nu} = 0$ , e então calcular os objetos divergentes remanescentes de acordo com a prescrição PV submetida às condições  $\sum_i a_i = 0$ , e  $\sum_{i=0} a_i \Lambda_i^2 = 0$  ditadas pelas investigações acima.

Explicitamente, para o objeto quadraticamente divergente temos

$$\begin{aligned} \int_{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - m^2)} &= \sum_{i=0} a_i \int_{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - \Lambda_i^2)} \\ &= \int_{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \left\{ \frac{a_0}{k^2 - \Lambda_0^2} + \frac{a_1}{k^2 - \Lambda_1^2} + \frac{a_2}{k^2 - \Lambda_2^2} \right\} \\ &= \int_{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \left\{ \frac{1}{(k^2 - \Lambda_0^2)(k^2 - \Lambda_1^2)(k^2 - \Lambda_2^2)} [ +k^4(a_0 + a_1 + a_2) \right. \\ &\quad \left. - k^2[a_0(\Lambda_1^2 + \Lambda_2^2) + a_1(\Lambda_0^2 + \Lambda_2^2) + a_2(\Lambda_0^2 + \Lambda_1^2)] \right. \\ &\quad \left. + a_0\Lambda_1^2\Lambda_2^2 + a_1\Lambda_0^2\Lambda_2^2 + a_2\Lambda_1^2\Lambda_0^2 \right\}. \end{aligned} \quad (8.37)$$

A condição  $\sum_i a_i = 0$  aparece no coeficiente de  $k^4$ , que é a potência mais alta no momento de integração. A condição  $\sum_{i=0} a_i \Lambda_i^2 = 0$  está presente no coeficiente de  $k^2$ . Mesmo que as escolhas tenham sido ditadas pelas condições de consistência, é interessante notar que elas são ingredientes óbvios a fim de garantir a regularizabilidade da integral divergente correspondente. Com esta receita precisamos adicionar potências de  $k^2$  somente no denominador para modificar o comportamento na região de altos valores do momento de integração. Resolvendo as equações nós obtemos a expressão

$$\int_{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - m^2)} \longrightarrow \int_{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - m^2)} \frac{(m^2 - \Lambda_1^2)}{(k_2^2 - \Lambda_1^2)} \frac{(m^2 - \Lambda_2^2)}{(k_2^2 - \Lambda_2^2)}, \quad (8.38)$$

que, em virtude do caráter finito da integral modificada, tem solução imediata.

## 8.4 Consistência no cálculo perturbativo para a EDQ

Após as discussões efetuadas nas seções anteriores podemos dizer que dispomos de uma prescrição consistente para a determinação de amplitudes da EDQ no contexto do cálculo perturbativo. Basta para tal seguir o procedimento que utilizamos para o tratamento das integrais de Feynman e ao final impor as relações de consistência. É importante notar que esta imposição não determina uma regularização específica mas uma classe delas. Ou seja podemos separar, depois das análise que procedemos, as regularizações em duas classes relevantes: aquelas que satisfazem as RC's e aquelas que fornecem um resultado não nulo para o lado direito das equações (8.6)-(8.8), independente dos valores propriamente ditos. Assumindo uma regularização pertencente a uma certa classe estamos especificando os valores para as quantidades  $\nabla_{\beta\mu}(m^2)$ ,  $\square_{\alpha\beta\mu\nu}(m^2)$  e  $\Delta_{\alpha\beta}(m^2)$  mas não para as quantidades  $I_{\log}(m^2)$  e  $I_{quad}(m^2)$  as quais não necessitam ser especificadas para propósitos de reparametrização. O tratamento fornecido, pela estratégia que adotamos, pode ser considerado livre de regularização, no sentido que não é necessário o cálculo de integrais divergentes de fato mas apenas a imposição de propriedades muito gerais para as possíveis regularizações. Dito de outro modo, se uma regularização não satisfaz as RC's (segunda classe) ela deve ser descartada e se, por outro lado, ela satisfaz as RC's (primeira classe) ela não precisa ser explicitada para nenhum propósito. A fim de completar nosso tratamento da EDQ e apreciar as consequências deste ponto de vista, permitido pela estratégia que adotamos para o tratamento das divergências da EDQ, vamos então proceder a renormalização desta ao nível um "loop".

Primeiramente listemos as amplitudes relevantes relacionadas às funções de Green que calculamos após a adoção de uma regularização pertencente à primeira classe. Podemos tomar, sem qualquer prejuízo, a escolha do gauge de Feynman ( $\xi = 1$ ) para efetuar as discussões necessária para a renormalização. Os aspectos que queremos enfatizar estarão igualmente presentes em um cenário de menor complexidade. Assim as amplitudes ficam:

- a) Auto-energia do elétron por excitação de um fóton

$$\Sigma^{1\gamma}(p) = e^2 (\not{p} - 4m) \left\{ I_{\log}(m^2) - i(4\pi)^{-2} [Z_0(0, m^2, p^2; m^2)] \right\} \quad (8.39)$$

- b) Tensor de polarização do vácuo

$$\begin{aligned} \Pi_{\mu\nu}(q) = & -\frac{4e^2}{3} [q_\mu q_\nu - g_{\mu\nu} q^2] \left\{ I_{\log}(m^2) \right. \\ & \left. - i(4\pi)^{-2} \left[ \frac{1}{3} + \frac{(q^2 + 2m^2)}{q^2} Z_0(q^2; m^2) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (8.40)$$



c) Função de vértice

$$\begin{aligned}
\frac{V^\mu(p, q)}{(-e^3)} &= \gamma_\mu I_{\log}(m^2) \\
&\quad -2i(4\pi)^{-2} \left\{ \begin{aligned}
&\gamma_\mu Z_0((p-q)^2; m^2) \\
&+ \gamma_\mu \eta_{00}(0, p^2, m^2, q^2, m^2; m^2) \\
&- 2q_\mu q \xi_{20}(0, p^2, m^2, q^2, m^2) \\
&- 2p_\mu p \xi_{02}(0, p^2, m^2, q^2, m^2) \\
&- 2(p_\mu q + q_\mu p) \xi_{11}(0, p^2, m^2, q^2, m^2) \\
&+ (p \not{\gamma}_\mu q + p \not{\gamma}_\mu p - 4mp_\mu) \xi_{01}(0, p^2, m^2, q^2, m^2) \\
&+ (q \not{\gamma}_\mu q + p \not{\gamma}_\mu q - 4mq_\mu) \xi_{10}(0, p^2, m^2, q^2, m^2) \\
&+ \left[ 2m(p+q)_\mu - p \not{\gamma}_\mu q - m^2 \gamma_\mu \right] \xi_{00}(0, p^2, m^2, q^2, m^2) \end{aligned} \right\}
\end{aligned} \tag{8.41}$$

Além das expressões acima teremos como consequências relevantes e importantes para a consistência da EDQ em solução perturbativa que a função de um ponto vetorial  $T_\mu^V$  se anula identicamente, que o decaimento fotônico em dois fótons é proibido,  $(T_{\lambda\mu\nu}^{VVV} + T_{\lambda\nu\mu}^{VVV} = 0)$  e que o espalhamento elástico de dois fótons é finito ( $T_{\lambda\nu\mu\alpha}^{VVVV}$  é finita). Todas as identidades de Ward são satisfeitas. Portanto podemos proceder a renormalização.

## 8.5 Renormalização

A fim de considerar a renormalização de EDQ a nível um “loop” vamos identificar a a Lagrangiana de contratermos a uma certa ordem e absorvê-la redefinindo os campos e parâmetros da Lagrangiana original da teoria [27]. Para distinguir entre os campos e parâmetros da teoria originais nós os denotaremos como  $A_\mu^\circ, \psi^\circ, e_\circ, m_\circ,$  e  $\lambda_\circ$ . Então começamos a partir da Lagrangiana

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} (\partial_\mu A_\nu^\circ - \partial_\nu A_\mu^\circ)^2 - \bar{\psi}^\circ (\not{\partial} + m_\circ) \psi^\circ - ie_\circ A_\mu^\circ \bar{\psi}^\circ \gamma_\mu \psi^\circ - \frac{1}{2} (\lambda_\circ \partial_\mu A_\mu^\circ)^2. \tag{8.42}$$

Agora fazemos a parametrização.

$$A_\mu^\circ = \sqrt{Z_A} A_\mu \tag{8.43}$$

$$\psi^\circ = \sqrt{Z_\Psi} \psi \tag{8.44}$$

$$e_\circ = \sqrt{Z_e} e \tag{8.45}$$

$$m_\circ = Z_m m \tag{8.46}$$

$$\lambda_\circ = Z_\lambda \lambda \tag{8.47}$$

onde  $A_\mu$  e  $\psi$  são chamados campos renormalizados e  $e, m$  e  $\lambda$  são a constante de acoplamento, a massa e o parâmetro de “gauge” renormalizados. Em princípio estes novos campos e parâmetros não possuem

significado físico direto, obviamente nem os velhos parâmetros o tinham. Os fatores  $Z_A, Z_\psi, Z_m, Z_e$  e  $Z_\lambda$  são escritos em termos dos objetos divergentes os quais não são eliminados após imposição das RC's.

Fazendo a substituição direta da parametrização proposta e reorganizando, podemos reescrever a Lagrangiana no seguinte modo,

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & -\frac{1}{4}(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)^2 - \frac{1}{2}(\lambda\partial_\mu A_\mu)^2 - \bar{\psi}(\not{\partial} + m)\psi - ieA_\mu\bar{\psi}\gamma_\mu\psi \\ & -\frac{1}{4}(Z_A - 1)(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)^2 - \frac{1}{2}\lambda^2(Z_\lambda^2 Z_A - 1)(\partial_\mu A_\mu)^2 - (Z_\psi - 1)\bar{\psi}\not{\partial}\psi \\ & -m(Z_m Z_\psi - 1)\bar{\psi}\psi - ie\left(Z_e Z_\psi Z_A^{1/2} - 1\right)A_\mu\bar{\psi}\gamma_\mu\psi \end{aligned} \quad (8.48)$$

Nosso objetivo aqui é tentar absorver nos parâmetros da Lagrangiana os infinitos da teoria. Como uma primeira etapa em direção à renormalização, introduziremos novos termos na Lagrangiana com coeficientes infinitos escolhidos tais que eles cancelam os infinitos em  $T_{\mu\nu}^{VV}$ ,  $\Lambda_\mu(p, p')$  e  $\sigma(p)$ . Estes termos são chamados contratermos. Observando as estruturas encontradas para as amplitudes e a Lagrangiana abaixo

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)^2 - \bar{\psi}\not{\partial}\psi - m\bar{\psi}\psi - ieA_\mu\bar{\psi}\gamma_\mu\psi - \frac{1}{2}(\lambda\partial_\mu\psi)^2, \quad (8.49)$$

podemos imediatamente afirmar que precisamos adicionar à Lagrangiana quatro contratermos. Isto é :

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & -\frac{1}{4}(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)^2 - \bar{\psi}\not{\partial}\psi - m\bar{\psi}\psi - ieA_\mu\bar{\psi}\gamma_\mu\psi - \frac{1}{2}(\lambda\partial_\mu\psi)^2 \\ & + (a) \left[ -\frac{1}{4}(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)^2 \right] \\ & + (b) (-\bar{\psi}\not{\partial}\psi) \\ & + (c) (-\bar{\psi}m\psi) \\ & + (d) [-ieA_\mu\bar{\psi}\gamma_\mu\psi] \end{aligned} \quad (8.50)$$

Feito isso vamos agora calcular quem são estes contratermos. O primeiro termo deverá cancelar a divergência do diagrama da polarização do vácuo. Para esta amplitude, a partir da equação (8.40), escrevemos

$$\Pi_{\mu\nu}(q) = (q^2 g_{\mu\nu} - q_\mu q_\nu) \Pi(q^2) \quad (8.51)$$

onde:

$$\Pi(q^2) = -\frac{4}{3}e^2 [I_{\log}(m^2)] + \Pi^{fin}(q^2). \quad (8.52)$$

A parte finita definida acima possui a propriedade:

$$\Pi^{fin}(q^2) = 0. \quad (8.53)$$

Então,

$$-\frac{1}{4}(Z_A - 1)(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)^2 = (a) \left[ -\frac{1}{4}(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)^2 \right] \quad (8.54)$$

e olhando para a amplitude  $T_{\mu\nu}^{VV}$  temos que:

$$Z_A = 1 - \frac{4e^2}{3} [I_{\log}(m^2)]. \quad (8.55)$$

O segundo e o terceiro contratermos deverão cancelar as estruturas divergentes associadas a auto-energia do elétron. Para identificar o adequado contratermo primeiro reorganizamos o resultado (8.39) obtido para a forma

$$\begin{aligned} \Sigma^{1\gamma}(p) = e^2 (\not{p} - 4m) & \left\{ I_{\log}(m^2) - i(4\pi)^{-2} [Z_0(0, m^2, 0; m^2)] \right. \\ & \left. - i(4\pi)^{-2} [Z_0(0, m^2, p^2; m^2) - Z_0(0, m^2, 0; m^2)] \right\} \end{aligned} \quad (8.56)$$

Agora colocamos isto na forma:

$$\Sigma^{1\gamma}(p = A(p^2) + \not{p}B(p^2)), \quad (8.57)$$

onde então identificamos:

$$\begin{aligned} A(p^2) = -4me^2 & \left\{ \left[ I_{\log}(m^2) - i(4\pi)^{-2} Z_0(0, m^2, 0; m^2) \right] \right. \\ & \left. - i(4\pi)^{-2} [Z_0(0, m^2, p^2; m^2) - Z_0(0, m^2, 0; m^2)] \right\}. \end{aligned} \quad (8.58)$$

O primeiro termo contém a divergência ultravioleta. O segundo, que é finito, possui a propriedade  $A(p^2 = 0) = 0$ . Por sua vez:

$$\begin{aligned} B(p^2) = e^2 \not{p} & \left\{ \left[ I_{\log}(m^2) - i(4\pi)^{-2} Z_0(0, m^2, 0; m^2) \right] \right. \\ & \left. - i(4\pi)^{-2} [Z_0(0, m^2, p^2; m^2) - Z_0(0, m^2, 0; m^2)] \right\}. \end{aligned} \quad (8.59)$$

O segundo termo tem a propriedade  $B(p^2 = 0) = 0$ . Com a organização efetuada, a parte finita adquire a propriedade:

$$\begin{cases} \Sigma^{1\gamma}(p) |_{p=0} = 0 \\ \frac{\partial \Sigma^{1\gamma}(p)}{\partial \not{p}} |_{p=0} = 0. \end{cases} \quad (8.60)$$

Assim para o segundo contratermo temos:

$$-(b) (\bar{\psi} \not{p} \psi) = -(Z_\psi - 1) \bar{\psi} \not{p} \psi \quad (8.61)$$

e portanto

$$(b) = (Z_\psi - 1) = e^2 \left[ I_{\log}(m^2) - i(4\pi)^{-2} Z_0(0, m^2, 0; m^2) \right] \quad (8.62)$$

de modo que,

$$Z_\psi = 1 - e^2 \left[ I_{\log}(m^2) - i(4\pi)^{-2} Z_0(0, m^2, 0; m^2) \right]. \quad (8.63)$$

Para o terceiro contratermo identificamos:

$$-(c) (\bar{\psi} m \psi) = -m (Z_m Z_\psi - 1) \bar{\psi} \psi \quad (8.64)$$

ou seja

$$(c) = (Z_m Z_\psi - 1) = 4e^2 \left[ I_{\log}(m^2) - i(4\pi)^{-2} Z_0(0, m^2, 0; m^2) \right] \quad (8.65)$$

e então:

$$Z_m = 1 + 4e^2 \left[ I_{\log}(m^2) - i(4\pi)^{-2} Z_0(0, m^2, 0; m^2) \right]. \quad (8.66)$$

Finalmente o último contratermo leva ao diagrama que cancela a divergência da correção de vértice. Seguindo o mesmo procedimento escrevemos a expressão para a função de vértice na forma:

$$\begin{aligned}\Lambda_\mu(p, p') &= -e^3 \{ \gamma_\mu [I_{\log}(m^2) + \Lambda^{fin}(0, 0)] + \\ &\quad + [\Lambda_\mu^{fin}(p, p') - \gamma_\mu \Lambda^{fin}(0, 0)] \}\end{aligned}\quad (8.67)$$

onde  $\gamma_\mu \Lambda^{fin}(0, 0)$  é o valor de  $\Lambda_\mu(p, p')$  tomado a momentos  $p = p' = 0$ , excluído o termo  $I_{\log}(m^2)$ . Isto é:

$$-ie \left( Z_e Z_\psi Z_A^{1/2} - 1 \right) A_\mu \bar{\psi} \gamma_\mu \psi = (d) [-ie A_\mu \bar{\psi} \gamma_\mu \psi] \quad (8.68)$$

e portanto:

$$\left( Z_e Z_\psi Z_A^{1/2} - 1 \right) = -e^2 [I_{\log}(m^2) + \Lambda^{fin}(0, 0)] \quad (8.69)$$

com isso

$$Z_e = 1 + [I_{\log}(m^2) + \Lambda^{fin}(0, 0)] \quad (8.70)$$

Uma vez determinados os contratermos e os parâmetros de renormalização podemos escrever a nova expressão para a Lagrangiana.

Então:

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= -\frac{1}{4} (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)^2 - \frac{1}{2} (\lambda \partial_\mu A_\mu)^2 - \bar{\psi} (\not{\partial} + m) \psi - ie A_\mu \bar{\psi} \gamma_\mu \psi \\ &\quad + \frac{1}{3} I_{\log}(m^2) (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)^2 - \frac{1}{2} \lambda^2 (\partial_\mu A_\mu)^2 \\ &\quad - e^2 \left[ I_{\log}(m^2) - i(4\pi)^{-2} Z_0(0, m^2, 0; m^2) \right] \bar{\psi} \not{\partial} \psi \\ &\quad - 4me^2 \left[ I_{\log}(m^2) - i(4\pi)^{-2} Z_0(0, m^2, 0; m^2) \right] \bar{\psi} \psi \\ &\quad + ie^3 [I_{\log}(m^2) + \Lambda^{fin}(0, 0)] A_\mu \bar{\psi} \gamma_\mu \psi\end{aligned}\quad (8.71)$$

A utilização desta expressão para a obtenção das regras de Feynman acrescenta um novo conjunto de diagramas, mostrados nas figuras abaixo, o que torna o cálculo ao nível um “loop” livre de divergências. O aspecto mais importante a ser notado é que não foi necessário tornar explícito o cálculo da quantidade divergente remanescente  $I_{\log}(m^2)$  em cujo caso, algum tipo de expansão teria que ser feita e algum tipo de limite deveria ter que ser tomado. O procedimento é, neste sentido, exato o que tem importância crucial em cálculos com mais de um “loop”.

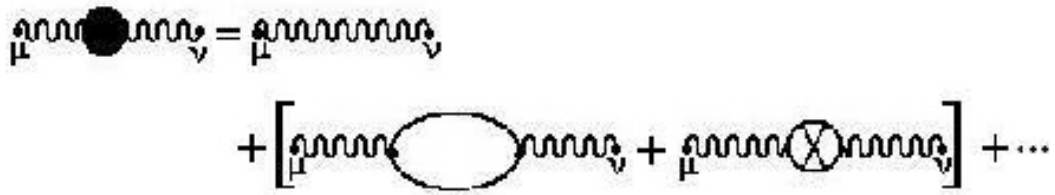


Fig. 8.1: Representação diagramática correspondente à inclusão de contratermos ao nível um “loop” na expansão perturbativa da auto-energia do fóton.

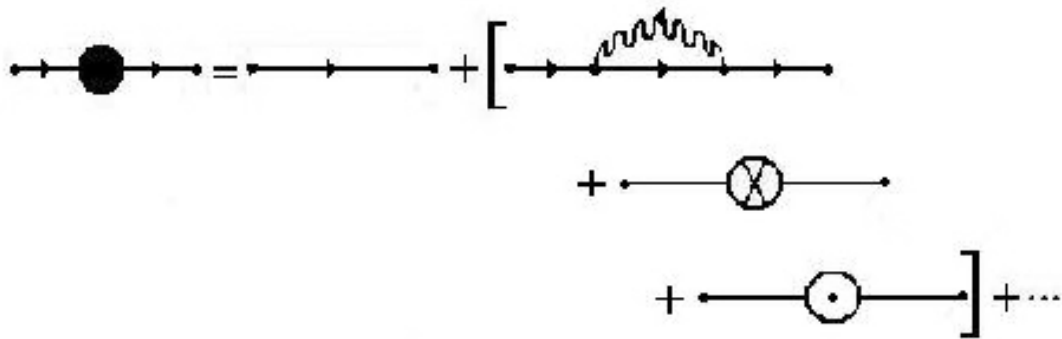


Fig. 8.2: Representação diagramática correspondente à inclusão de contratermos ao nível um “loop” na expansão perturbativa da auto energia do elétron por excitação de um fóton.

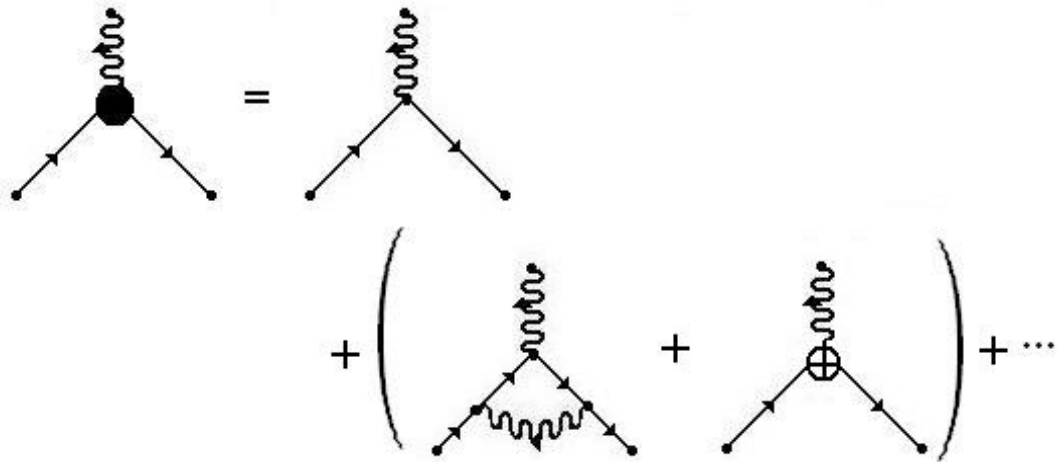


Fig. 8.3: Representação diagramática correspondente à inclusão de contratermos ao nível um “loop” na expansão perturbativa da interação elétron-fóton..

## Capítulo 9

# Regularizações: diferentes receitas para situações idênticas

### 9.1 Introdução

A Teoria Quântica de Campos (TQC) é, certamente, o formalismo matemático mais adequado para descrever as partículas elementares e suas interações nos dias atuais. No capítulo II, discutimos brevemente sobre a construção de tais teorias, isto é, a construção da Lagrangeana correspondente, que é um funcional dos campos que constituem a teoria. Esta deve ser invariante frente a um conjunto de transformações associadas ao conteúdo de simetria que se deseja para a teoria. Com isso nós podemos afirmar que existe uma receita bem definida para contruirmos uma TQC. Entretanto, as equações de movimento com que nos deparamos são equações diferenciais não lineares e acopladas. E, para resolvê-las precisamos apelar ao cálculo perturbativo. Uma interpretação consistente da expansão perturbativa via regras de Feynman pode ser construída tal que a expressão correspondente a uma amplitude pertinente à teoria pode ser obtida em qualquer ordem perturbativa previamente especificada. O cálculo destas amplitudes envolve funções de Green divergentes. A presença de infinitos obriga a adoção de um esquema de regularização ou filosofia equivalente para as manipulações e cálculos necessários o que, em princípio, implica em modificações nas funções de Green. Mas e as simetrias como ficam depois destas modificações terem sido feitas? Para verificar se as simetrias são mantidas estabelecemos relações entre as funções de Green da teoria. Estas devem ser válidas também para as amplitudes calculadas o que, a rigor, precisa ser verificado caso a caso. A preservação ou não de tais identidades envolve a consistência do método de regularização adotado. E isto por sua vez envolve uma questão a respeito da concepção que temos a respeito do que caracteriza um método consistente. Poderíamos ser tentados a definir um método consistente como aquele que preserva todas as relações de simetria de todas as teorias e modelos e, além disto, produz resultados livres de ambigüidades. Esta definição não seria aceitável pois sabemos que existem amplitudes ditas anômalas para as quais não é possível determinar uma amplitude satisfazendo todas as determinações das simetrias simultaneamente o que não pode ser evitado por método nenhum. Assim um

método dito consistente deveria ser capaz de eliminar automaticamente todas as ambigüidades intrínsecas aos cálculos perturbativos e, simultaneamente, dentro dos mesmos pressupostos, descrever corretamente as anomalias. Se, por um lado, dispomos de um método capaz de eliminar consistentemente todas as ambigüidades intrínsecas aos cálculos e preservar as simetrias automaticamente, como é o caso da RD [7], tal método possui limitações de aplicabilidade e não pode ser usado, com uma única prescrição, para todas as teorias e modelos pois algumas quantidades matemáticas, e suas álgebras, não podem ser estendidas para qualquer dimensão espaço-temporal. Para tais situações, as prescrições de regularização ou procedimentos equivalentes, que podem ser utilizados, não estão livres de ambigüidades e não preservam todas as simetrias nas teorias e modelos onde podem ser aplicados. Naquilo que apresentamos até este ponto do presente trabalho, mostramos como um método alternativo às regularizações usuais opera na EDQ. Vimos que a consistência do método pode ser alcançada com a imposição de algumas relações entre integrais divergentes com o mesmo grau de divergência, as quais denominamos de relações de consistência, as quais são automaticamente satisfeitas na RD e na RPV [6]. O método, entretanto, não tem restrições de aplicabilidade e pode ser empregado de modo idêntico em todas as teorias e modelos formulados em alguma dimensão espaço-temporal previamente escolhida. A questão que deve ser colocada neste momento é como opera então a referida estratégia no cálculo das amplitudes anômalas e na descrição de suas propriedades. A fim de verificar isto dedicaremos este e o próximo capítulos para o estudo da mais importante anomalia em amplitudes físicas que é a aquela existente na amplitude triangular AVV [14] diretamente associada ao decaimento eletromagnético do pión neutro  $\pi^0$ , portanto, às bases do Modelo Padrão [12].

Promoveremos uma discussão em duas etapas recentemente apresentada em [28]. Mostraremos como a atual descrição perturbativa da anomalia AVV não é compatível com os métodos consistentes como a RD. Para isto selecionamos três modelos simples e bem conhecidos onde podemos gerar identidades de Ward: A teoria para o campo escalar complexo e dois modelos simples onde os processos SVV e AVV são pertinentes. Vamos estabelecer suas respectivas identidades de Ward, seguindo os procedimentos usuais, encontrados em livros texto tradicionais de TQC, até identificar uma condição necessária para que as identidades de Ward estabelecidas possam ser satisfeitas. Para as manipulações e cálculos necessários, envolvendo as integrais de Feynman que aparecerem, vamos adotar a estratégia alternativa de cálculo que utilizamos nos capítulos precedentes e analisar a condição obtida segundo o ponto de vista dos diferentes métodos. Com essa atitude, poderemos ver que, dadas as indefinições, questões interessantes envolvendo a justificativa tradicional a respeito da origem perturbativa da anomalia AVV são levantadas. Mostraremos que diferentes tratamentos são dados a objetos matemáticos idênticos, pelas prescrições de regularização, quando estes aparecem em problemas diferentes. Numa etapa seguinte, no próximo capítulo, mostraremos como a anomalia existente na amplitude AVV aparece naturalmente no contexto da estratégia que adotamos dentro da mesma prescrição que permite um tratamento consistente da EDQ.

### 9.1.1 O Campo Escalar complexo

Talvez a mais simples TQC onde relações de simetria podem ser estabelecidas é a teoria  $\lambda\phi^4$ . A identidade de Ward para o campo escalar complexo pode ser facilmente construída devido a existência de uma corrente vetorial conservada. Nesta seção, seguiremos fielmente os procedimentos adotados na ref.[19] a fim de estabelecer a relação de simetria. A Lagrangiana correspondente pode ser escrita como

$$\mathcal{L} = (\partial_\mu \phi^*)(\partial^\mu \phi) - \mu^2(\phi\phi^*) - \lambda(\phi\phi^*)^2, \quad (9.1)$$

onde  $\mu$  é a massa do campo escalar e  $\lambda$  é a constante de acoplamento. A Lagrangiana acima é invariante sob transformações  $U(1)$

$$\phi \rightarrow \phi' = e^{i\alpha \cdot T} \phi, \quad (9.2)$$

onde  $\alpha \neq \alpha(x)$  é um parâmetro e  $T$  é um número usual. Tal invariância conduz a uma corrente vetorial conservada

$$J_\mu = i[(\partial_\mu \phi^*)\phi - (\partial_\mu \phi)\phi^*]. \quad (9.3)$$

O campo escalar complexo satisfaz as seguintes relações de comutação canônicas

$$[\partial_0 \phi^\dagger(\vec{x}, t), \phi(\vec{x}', t)] = -i\delta^3(\vec{x} - \vec{x}'), \quad (9.4)$$

que nos leva aos seguintes comutadores que envolvem os campos e as correntes

$$\begin{aligned} [J_0(\vec{x}, t), \phi(\vec{x}', t)] &= i[\partial_0 \phi^\dagger(\vec{x}, t), \phi(\vec{x}', t)]\phi(\vec{x}, t) \\ &= \delta^3(\vec{x} - \vec{x}')\phi(\vec{x}, t) \end{aligned} \quad (9.5)$$

$$[J_0(\vec{x}, t), \phi^\dagger(\vec{x}', t)] = -\delta^3(\vec{x} - \vec{x}')\phi^\dagger(\vec{x}, t). \quad (9.6)$$

Com estes ingredientes é possível considerar um processo que envolve uma corrente vetorial e dois campos escalares e as suas relações de simetria correspondentes. Para este propósito vamos considerar a função de Green

$$G_\mu(p, q) = \int d^4x d^4y e^{-iq \cdot x - ip \cdot y} \langle 0|T(J_\mu(x)\phi(y)\phi^\dagger(0))|0 \rangle. \quad (9.7)$$

A fim de obter uma relação de simetria tomamos a quadri-divergência em ambos os lados da equação acima e, no integrando, usamos manipulações padrão da álgebra de correntes

$$\partial_x^\mu [(T(J_\mu(x)O(y)))] = T(\partial^\mu J_\mu(x)O(y)) + [J_0(x), O(y)]\delta(x_0 - y_0). \quad (9.8)$$

Depois deste passo nós obtemos

$$\begin{aligned} q_\mu G^\mu(p, q) &= -i \int d^4x d^4y e^{-iq \cdot x - ip \cdot y} \partial_\mu \langle 0|T(J_\mu(x)\phi(y)\phi^\dagger(0))|0 \rangle \\ &= -i \int d^4x d^4y e^{-iq \cdot x - ip \cdot y} \left\{ \langle 0|T(\partial_\mu J_\mu(x)\phi(y)\phi^\dagger(0))|0 \rangle \right. \\ &\quad + \langle 0|T([J_0(x), \phi(y)]\delta(x_0 - y_0)\phi^\dagger(0))|0 \rangle \\ &\quad \left. + \langle 0|T([J_0(x), \phi^\dagger(0)]\delta(x_0)\phi(y))|0 \rangle \right\}. \end{aligned} \quad (9.9)$$



Dada a conservação da corrente vetorial, o primeiro termo na equação acima se anula. Usando então as relações de comutação (9.5) e (9.6) ficamos com

$$q_\mu G^\mu(p, q) = -i \int d^4x d^4y e^{-i(q+p)x} \langle 0|T(\phi(x)\phi^\dagger(0))|0 \rangle + i \int d^4x d^4y e^{-ipy} \langle 0|T(\phi(0)^\dagger\phi(y))|0 \rangle. \quad (9.10)$$

A seguir podemos identificar dois termos no lado direito como sendo os propagadores do campo escalar,

$$\Delta(p) = \int d^4x e^{-ipx} \langle 0|T(\phi(x)\phi^\dagger(0))|0 \rangle, \quad (9.11)$$

e então escrevemos

$$-iq_\mu G^\mu(p, q) = \Delta(p+q) - \Delta(p), \quad (9.12)$$

que é a identidade de Ward para a corrente vetorial. A equação acima é a mesma para quantidades renormalizadas devido ao fato que a corrente conservada  $J_\mu(x)$  não é renormalizada como um operador composto [4]. É fácil então estabelecer a versão correspondente a um “loop” para a Eq.(9.12). Com este objetivo definimos as funções de Green amputadas, em termos das quantidades renormalizadas presentes na Eq.(9.12) do seguinte modo [19]

$$\Gamma_\mu(p, q) = [i\Delta^R(p+q)]^{-1} G_\mu^R(p, q) [i\Delta^R(p)]^{-1}, \quad (9.13)$$

onde o propagador renormalizado a um “loop” é dado por

$$\Delta^R(p)^{-1} = p^2 - \mu^2 - \tilde{\Sigma}(p^2), \quad (9.14)$$

e onde  $\tilde{\Sigma}(p^2)$  é a auto energia correspondente ao diagrama irreduzível de uma partícula. Então a identidade de Ward (9.12) assume a forma simples

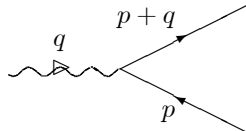
$$iq^\mu \Gamma_\mu(p, q) = [(p+q)^2 - \mu^2 - \tilde{\Sigma}(p+q)] - [p^2 - \mu^2 - \tilde{\Sigma}(p)]. \quad (9.15)$$

Vamos agora considerar o cálculo explícito a nível árvore e depois a nível um “loop”. Começamos considerando o acoplamento entre a corrente vetorial conservada com duas linhas escalares. O Vértice correspondente é dado por

$$\begin{aligned} \frac{i\delta^3 \mathcal{L}_{\mathcal{I}}}{\delta J_\mu \delta \phi \delta \phi^*} &= i^2 [i(p+q)_\mu + ip_\mu] \\ &= -i(2p+q)_\mu. \end{aligned} \quad (9.16)$$

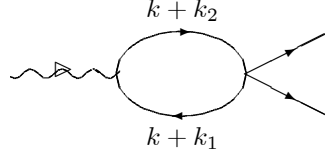
A contribuição a nível árvore, representada diagramaticamente na *figura* (9.1).1, pode ser facilmente calculada como segue

$$iq^\mu \Gamma_\mu^{tree}(p, q) = iq^\mu [-i(2p+q)_\mu] = 2p \cdot q + q^2 = (p+q)^2 - p^2. \quad (9.17)$$



*Fig.9.1: Representação diagramática para a contribuição a nível árvore*

A comparação com a expressão (9.15) revela que, a nível árvore, a identidade (9.12) é preservada. Vamos agora considerar a nível um “loop”, representado diagramaticamente nas *figuras* 9.2 e 9.3.

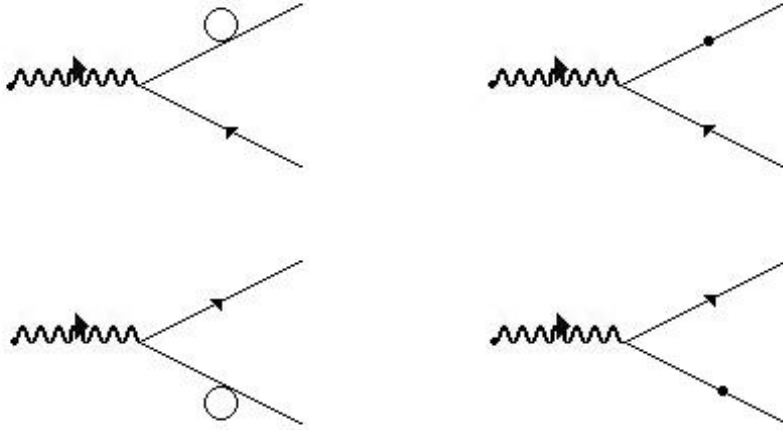


*Fig.9.2: Representação diagramática para a contribuição a nível um “loop” para a correção de vértice.*

Os dois diagramas na *figura* (9.3) exigem o cálculo da auto-energia a nível um “loop”, que é dada por

$$-i\Sigma(p) = -i\frac{\lambda}{2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{i}{(k+l)^2 - \mu^2}, \quad (9.18)$$

onde adotamos um rótulo arbitrário para os momentos das linhas internas do “loop”. A renormalização a um “loop” implica na adição dos diagramas de contratermos, representados na *figura* (9.3),



*Fig.9.3: Representação diagramática das correções a um “loop” e seus diagramas de contratermos.*

A contribuição dos dois primeiros diagramas para a função de vértice  $\Gamma_\mu(p, q)$  pode ser escrita como

$$iq^\mu \Gamma_\mu(p, q) = iq^\mu \left[ (-i)(2p+q)_\mu \frac{i}{(p+q)^2 - \mu^2} [\Sigma(p+q) - \Sigma(0)] \right], \quad (9.19)$$

que anula-se identicamente devido a independência do momento externo da auto-energia escalar a um “loop”. Então nós ficamos somente com a contribuição do diagrama da *figura*. (9.2). A contribuição para a relação de simetria é dada por

$$iq^\mu \Gamma_\mu^{1 \text{ “loop”}}(p, q) = iq^\mu \left[ \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} (i\lambda) \frac{i}{[(k+k_1)^2 - \mu^2]} (-i)(2k+k_1+k_2)_\mu \frac{i}{[(k+k_2)^2 - \mu^2]} \right], \quad (9.20)$$

que significa que

$$iq^\mu \Gamma_\mu^1 \text{ "loop"}(p, q) = i\lambda(k_1 - k_2)^\mu \left[ \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{2k_\mu + (k_1 + k_2)_\mu}{[(k + k_1)^2 - \mu^2][(k + k_2)^2 - \mu^2]} \right], \quad (9.21)$$

ou

$$iq^\mu \Gamma_\mu^1 \text{ "loop"}(p, q) = i\lambda(k_1 - k_2)^\mu (\Delta I_\mu). \quad (9.22)$$

Chegamos no ponto principal desta seção. Dado o fato que a auto-energia escalar, ao nível um “loop”, não tem parte finita a identidade de Ward é satisfeita pela contribuição do nível árvore. Isto implica que todas as contribuições ao nível um “loop” devem se cancelar. Uma vez que dois diagramas cancelam outros dois, somente permanece a contribuição de um diagrama que deve se anular identicamente. Na expressão correspondente, duas integrais divergentes estão envolvidas com graus de divergência linear e logarítmico. Independentemente dos detalhes envolvidos, os quais discutiremos mais tarde, está claro que se o valor para a combinação específica de integrais

$$\Delta I_\mu = 2(I_2)_\mu + (k_1 + k_2)_\mu (I_2), \quad (9.23)$$

onde nós introduzimos as definições

$$(I_2; I_2^\mu) = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{(1; k^\mu)}{[(k + k_1)^2 - m^2][(k + k_2)^2 - m^2]}, \quad (9.24)$$

não for nulo, a identidade de Ward que estabelecemos será violada. Devido as divergências, o cálculo da expressão (9.23) exige a adoção de uma técnica de regularização ou de uma filosofia equivalente. Antes de tais discussões vamos estabelecer outros tipos de identidades de Ward.

### 9.1.2 Processo $S \rightarrow VV$

Agora vamos considerar a teoria onde as densidades escalar e vetorial fermiônica estão acopladas a um campo escalar e a um campo vetorial respectivamente. Nesta seção procederemos em um modo similar a Ref [29]. A Lagrangiana de interação pode ser escrita como

$$\mathcal{L}_{\mathcal{I}} = iG_s(\bar{\Psi}\Psi)\phi - G_v(\bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi)A_\mu, \quad (9.25)$$

onde  $\Psi$  representa um férmion massivo de spin  $\frac{1}{2}$ ,  $\phi$  um campo escalar e  $A_\mu$  um campo vetorial. A corrente vetorial fermiônica obedece

$$\partial_\mu V^\mu = \partial_\mu (\bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi) = 0, \quad (9.26)$$

i.e., devido a presença de somente uma espécie de férmion massivo as correntes escalar e vetorial não estão conectadas. Então, se definirmos a função de Green  $S \rightarrow VV$

$$T_{\mu\nu}^{S \rightarrow VV}(p, p'; q) = i \int d^4 x_1 d^4 x_2 e^{ipx_1 + ip'x_2} \langle 0 | T(V_\mu(x_1)V_\nu(x_2)S_0(0)) | 0 \rangle, \quad (9.27)$$

seguindo o procedimento padrão da álgebra de correntes, devemos obter as identidades de Ward

$$\begin{cases} p^\mu T_{\mu\nu}^{S \rightarrow VV} = 0 \\ p'^\nu T_{\mu\nu}^{S \rightarrow VV} = 0. \end{cases} \quad (9.28)$$

A contribuição de mais baixa ordem perturbativa para o processo  $S \rightarrow VV$  é dado pelo diagrama triangular. A soma dos canais direto e cruzado é exigida pela simetrização do estado final. No cálculo destas contribuições, assumiremos a forma mais geral para o rótulo dos momentos das linhas internas. Para o canal direto, *figura.(9.4a)*, adotamos os momentos das linhas internas como estando associados aos externos por suas diferenças como segue

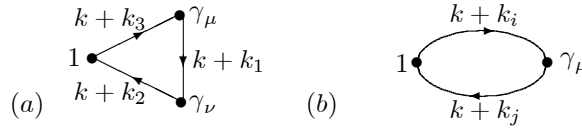
$$\begin{cases} k_3 - k_2 = q = p + p' \\ k_3 - k_1 = p \\ k_1 - k_2 = p'. \end{cases} \quad (9.29)$$

O diagrama cruzado pode ser construído permutando  $\mu$  e  $\nu$ , e ainda, adotando para as linhas internas o momento arbitrário como  $l_1, l_2$  e  $l_3$ , satisfazendo

$$\begin{cases} l_3 - l_2 = q = p + p' \\ l_3 - l_1 = p' \\ l_1 - l_2 = p. \end{cases} \quad (9.30)$$

A expressão para o diagrama direto pode ser escrito como

$$T_{\mu\nu}^{SVV}(k_1, k_2, k_3; m) = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} Tr \left\{ \hat{1} \frac{1}{(\not{k} + \not{k}_3) - m} \gamma_\mu \frac{1}{(\not{k} + \not{k}_1) - m} \gamma_\nu \frac{1}{(\not{k} + \not{k}_2) - m} \right\}. \quad (9.31)$$



*Fig. 9.4: Representação diagramática para a função de três pontos SVV para as funções de dois pontos SV, figuras . (a) e (b) respectivamente.*

Contraindo com os momentos dos vértices nós podemos obter uma condição para as identidades de Ward correspondentes

$$\begin{aligned} (k_3 - k_1)^\mu T_{\mu\nu}^{SVV} &= \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} Tr \left\{ \hat{1} \frac{1}{(\not{k} + \not{k}_1) - m} \gamma_\nu \frac{1}{(\not{k} + \not{k}_2) - m} \right\} \\ &\quad - \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} Tr \left\{ \hat{1} \frac{1}{(\not{k} + \not{k}_3) - m} \gamma_\nu \frac{1}{(\not{k} + \not{k}_2) - m} \right\}, \end{aligned} \quad (9.32)$$

onde usamos a nível dos traços a identidade

$$(\not{k}_3 - \not{k}_1) = [\not{k} + \not{k}_3 - m] - [\not{k} + \not{k}_1 - m]. \quad (9.33)$$

Vamos agora definir as funções de dois pontos que aparecem do lado direito (*figura (9.4b)*)

$$T_{\mu}^{VS}(k_1, k_2; m) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} Tr \left\{ \gamma_{\mu} \frac{1}{(\not{k} + \not{k}_1) - m} \hat{1} \frac{1}{(\not{k} + \not{k}_2) - m} \right\}, \quad (9.34)$$

e também

$$T_{\mu\nu}^{S \rightarrow VV} = T_{\mu\nu}^{SVV}(k_1, k_2, k_3; m) + T_{\nu\mu}^{SVV}(l_1, l_2, l_3; m), \quad (9.35)$$

a fim de escrever as identidades de Ward como seguem

$$\begin{aligned} p^{\mu} T_{\mu\nu}^{S \rightarrow VV} &= T_{\nu}^{VS}(k_1, k_2; m) - T_{\nu}^{VS}(k_3, k_2; m) \\ &\quad + T_{\nu}^{VS}(l_3, l_2; m) - T_{\nu}^{VS}(l_3, l_1; m), \end{aligned} \quad (9.36)$$

$$\begin{aligned} p^{\nu} T_{\mu\nu}^{S \rightarrow VV} &= T_{\mu}^{VS}(k_3, k_2; m) - T_{\mu}^{VS}(k_3, k_1; m) \\ &\quad + T_{\nu}^{VS}(l_1, l_2; m) - T_{\nu}^{VS}(l_3, l_2; m). \end{aligned} \quad (9.37)$$

As condições para a não violação das relações de simetria estão colocadas em termos do valor da estrutura de dois pontos  $SV$ . Se os traços envolvidos são executados nós obtemos

$$\begin{aligned} T_{\mu}^{VS} &= 4m \left\{ \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{2k_{\mu}}{[(k + k_1)^2 - m^2][(k + k_2)^2 - m^2]} \right. \\ &\quad \left. + (k_1 + k_2)_{\mu} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{[(k + k_1)^2 - m^2][(k + k_2)^2 - m^2]} \right\}, \end{aligned} \quad (9.38)$$

o que significa que

$$T_{\mu}^{VS} = 4m \left\{ (k_1 + k_2)_{\mu} I_2 + 2(I_2)_{\mu} \right\}, \quad (9.39)$$

ou, dada a definição (9.23),

$$T_{\mu}^{VS} = 4m (\Delta I_{\mu}). \quad (9.40)$$

Se olharmos a equação (9.22) da seção precedente, podemos ver que a condição que encontramos para as identidades de Ward envolvidas no processo  $S \rightarrow VV$  é a mesma que encontramos para a identidade de Ward da teoria do campo escalar complexo. Somente se a estrutura (9.40) é obtida identicamente nula, as relações de simetria são preservadas pelo cálculo perturbativo a um “loop”. Antes da análise vamos considerar agora um outro (e mais interessante) conjunto de relações de simetria.

### 9.1.3 Processo $A \rightarrow VV$

A mais interessante situação envolvendo identidades de Ward emerge quando queremos considerar o processo onde um Axial-Vetor está conectado com dois vetores. Um processo como tal pode ser construído acoplando as densidades fermiônicas apropriadas com os campos externos. Discussões similares podem

ser encontradas na Ref.[29] (veja também refs.[19] e [30]). A Lagrangiana de interação pode ser escrita como

$$\mathcal{L}_{\mathcal{I}} = iG_P(\bar{\Psi}\gamma_5\Psi)\pi - e_V(\bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi)A_\mu - e_A(\bar{\Psi}\gamma_5\gamma^\mu\Psi)W_\mu^A. \quad (9.41)$$

Aqui,  $\Psi$  representa um férmion massivo de spin  $\frac{1}{2}$ ,  $W_\mu^A$  um campo Axial-Vetor e  $\pi$  um campo pseudo-escalar. As correntes fermiônicas obedecem

$$\begin{cases} \partial_\mu V^\mu = \partial_\mu(\bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi) = 0, \\ \partial_\mu A^\mu = \partial_\mu(\bar{\Psi}\gamma_5\gamma^\mu\Psi) = 2mi(\bar{\Psi}\gamma_5\Psi) = 2miP. \end{cases} \quad (9.42)$$

Em tais teorias podemos definir as funções de Green

$$T_{\mu\nu\lambda}^{A\rightarrow VV}(p, p'; q) = i \int d^4x_1 d^4x_2 e^{ipx_1 + ip'x_2} \langle 0|T(V_\mu(x_1)V_\nu(x_2)A_\lambda(0))|0 \rangle, \quad (9.43)$$

$$T_{\mu\nu}^{P\rightarrow VV}(p, p'; q) = i \int d^4x_1 d^4x_2 e^{ipx_1 + ip'x_2} \langle 0|T(V_\mu(x_1)V_\nu(x_2)P_0(0))|0 \rangle. \quad (9.44)$$

O procedimento padrão da álgebra de correntes pode ser usado para estabelecer as identidades de Ward

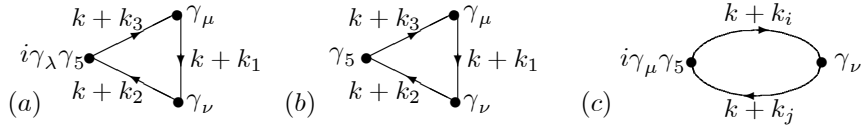
$$p'^\nu T_{\lambda\mu\nu}^{A\rightarrow VV} = 0, \quad (9.45)$$

$$p^\mu T_{\lambda\mu\nu}^{A\rightarrow VV} = 0, \quad (9.46)$$

$$q^\lambda T_{\lambda\mu\nu}^{A\rightarrow VV} = 2mT_{\mu\nu}^{P\rightarrow VV}. \quad (9.47)$$

O cálculo perturbativo de ordem mais baixa do processo  $AVV$  exige o cálculo dos diagramas triangulares a um “loop” *figuras* (9.5a) e (9.5b). As definições para as linhas internas e externas seguem as mesmas convenções da seção precedente. Por isso escrevemos para o canal direto (*figura* (9.5a))

$$T_{\lambda\mu\nu}^{AVV}(k_1, k_2, k_3; m) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} Tr \left\{ i\gamma_\lambda\gamma_5 \frac{1}{(\not{k} + \not{k}_3) - m} \gamma_\mu \frac{1}{(\not{k} + \not{k}_1) - m} \gamma_\nu \frac{1}{(\not{k} + \not{k}_2) - m} \right\}. \quad (9.48)$$



*Fig. 9.5: Representação diagramática para as funções de três pontos  $AVV$  e  $PVV$  e para a função de dois pontos  $AV$ , figuras . (a), (b) e (c), respectivamente.*

Contraindo com o momento externo nós podemos deduzir condições a serem preenchidas a fim de obter a respectiva identidade de Ward preservada. Primeiramente trabalhamos o interior do traços contraímos com o momento externo  $(k_3 - k_2)^\lambda$

$$\begin{aligned} & (k_3 - k_2)^\lambda \left\{ \gamma_\nu \frac{1}{(\not{k} + \not{k}_2) - m} i\gamma_\lambda\gamma_5 \frac{1}{(\not{k} + \not{k}_3) - m} \gamma_\mu \frac{1}{(\not{k} + \not{k}_1) - m} \right\} = \\ & - \left\{ i\gamma_\nu\gamma_5 \frac{1}{(\not{k} + \not{k}_3) - m} \gamma_\mu \frac{1}{(\not{k} + \not{k}_1) - m} \right\} \\ & - 2mi \left\{ \gamma_\nu \frac{1}{(\not{k} + \not{k}_2) - m} \gamma_5 \frac{1}{(\not{k} + \not{k}_3) - m} \gamma_\mu \frac{1}{(\not{k} + \not{k}_1) - m} \right\} \\ & + \left\{ \gamma_\nu \frac{1}{(\not{k} + \not{k}_2) - m} i\gamma_\mu\gamma_5 \frac{1}{(\not{k} + \not{k}_1) - m} \right\}. \end{aligned} \quad (9.49)$$

onde usamos a identidade

$$(\not{k}_2 - \not{k}_3)\gamma_5 = (\not{k} + \not{k}_2 - m)\gamma_5 + \gamma_5(\not{k} + \not{k}_3 - m) + 2m\gamma_5, \quad (9.50)$$

para obter

$$\begin{aligned} (k_3 - k_2)^\lambda T_{\lambda\mu\nu}^{AVV} &= -2mi \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} Tr \left\{ \gamma_5 \frac{1}{[\not{k} + \not{k}_3 - m]} \gamma_\mu \frac{1}{[\not{k} + \not{k}_1 - m]} \gamma_\nu \frac{1}{[\not{k} + \not{k}_2 - m]} \right\} \\ &\quad - \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} Tr \left\{ i\gamma_\nu \gamma_5 \frac{1}{[\not{k} + \not{k}_3 - m]} \gamma_\mu \frac{1}{[\not{k} + \not{k}_1 - m]} \right\} \\ &\quad + \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} Tr \left\{ i\gamma_\mu \gamma_5 \frac{1}{[\not{k} + \not{k}_1 - m]} \gamma_\nu \frac{1}{[\not{k} + \not{k}_2 - m]} \right\}. \end{aligned} \quad (9.51)$$

Se definirmos as funções de dois pontos no lado direito como (veja *figura (9.5c)*)

$$T_{\xi\rho}^{AV}(k_i, k_j; m) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} Tr \left\{ i\gamma_\xi \gamma_5 \frac{1}{(\not{k} + \not{k}_i) - m} \gamma_\rho \frac{1}{(\not{k} + \not{k}_j) - m} \right\}, \quad (9.52)$$

podemos escrever (*figura.(9.6)*)

$$(k_3 - k_2)^\lambda T_{\lambda\mu\nu}^{AVV} = -2im T_{\mu\nu}^{PVV} - T_{\nu\mu}^{AV}(k_3, k_1; m) + T_{\mu\nu}^{AV}(k_1, k_2; m), \quad (9.53)$$

onde definimos (*figura (9.5b)*)

$$T_{\mu\nu}^{PVV}(k_1, k_2, k_3; m) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} Tr \left\{ \gamma_5 \frac{1}{(\not{k} + \not{k}_3) - m} \gamma_\mu \frac{1}{(\not{k} + \not{k}_1) - m} \gamma_\nu \frac{1}{(\not{k} + \not{k}_2) - m} \right\}. \quad (9.54)$$

$$(k_3 - k_2)^\lambda \left[ \begin{array}{c} \text{Diagram 1: Triangle with vertices } \gamma_\mu, \gamma_\nu, \gamma_\lambda \text{ and momenta } k+k_3, k+k_1, k+k_2. \\ i\gamma_\lambda \gamma_5 \end{array} \right] = -2im \left[ \begin{array}{c} \text{Diagram 2: Triangle with vertices } \gamma_\mu, \gamma_\nu, \gamma_\lambda \text{ and momenta } k+k_3, k+k_1, k+k_2. \\ \gamma_5 \end{array} \right] + \begin{array}{c} \text{Diagram 3: Loop with vertices } \gamma_\nu, \gamma_\mu \text{ and momenta } k+k_1, k+k_2. \\ i\gamma_\mu \gamma_5 \end{array} - \begin{array}{c} \text{Diagram 4: Loop with vertices } \gamma_\nu, \gamma_\mu \text{ and momenta } k+k_3, k+k_1. \\ i\gamma_\nu \gamma_5 \end{array}$$

*Fig. 9.6: Representação diagramática para a identidade (9.53).*

Agora se tomarmos as contrações da função *AVV* com os momentos associados aos vértices vetoriais, imediatamente identificamos (*figura (9.7)*)

$$(k_3 - k_1)^\mu T_{\lambda\mu\nu}^{AVV} = T_{\lambda\nu}^{AV}(k_1, k_2; m) - T_{\lambda\nu}^{AV}(k_3, k_2; m). \quad (9.55)$$

Da mesma forma podemos estabelecer (*figura (9.8)*)

$$(k_1 - k_2)^\nu T_{\lambda\mu\nu}^{AVV} = T_{\lambda\mu}^{AV}(k_3, k_2; m) - T_{\lambda\mu}^{AV}(k_3, k_1; m). \quad (9.56)$$

$$(k_3 - k_1)^\mu \left[ i\gamma_\lambda \gamma_5 \begin{array}{c} \bullet \xrightarrow{k+k_3} \bullet \gamma_\mu \\ \bullet \xrightarrow{k+k_2} \bullet \gamma_\nu \\ \bullet \xrightarrow{k+k_1} \bullet \end{array} \right] = i\gamma_\lambda \gamma_5 \begin{array}{c} \bullet \xrightarrow{k+k_1} \bullet \gamma_\nu \\ \bullet \xrightarrow{k+k_2} \bullet \end{array} - i\gamma_\lambda \gamma_5 \begin{array}{c} \bullet \xrightarrow{k+k_3} \bullet \gamma_\nu \\ \bullet \xrightarrow{k+k_2} \bullet \end{array}$$

Fig. 9.7: Representação diagramática para a identidade (9.55).

$$(k_1 - k_2)^\nu \left[ i\gamma_\lambda \gamma_5 \begin{array}{c} \bullet \xrightarrow{k+k_3} \bullet \gamma_\mu \\ \bullet \xrightarrow{k+k_2} \bullet \gamma_\nu \\ \bullet \xrightarrow{k+k_1} \bullet \end{array} \right] = i\gamma_\lambda \gamma_5 \begin{array}{c} \bullet \xrightarrow{k+k_3} \bullet \gamma_\mu \\ \bullet \xrightarrow{k+k_2} \bullet \end{array} - i\gamma_\lambda \gamma_5 \begin{array}{c} \bullet \xrightarrow{k+k_3} \bullet \gamma_\mu \\ \bullet \xrightarrow{k+k_1} \bullet \end{array}$$

Fig. 9.8: Representação diagramática para a identidade (9.56).

A inclusão do canal cruzado nos permite escrever as seguintes expressões

$$\begin{aligned} q^\lambda T_{\lambda\mu\nu}^{A \rightarrow VV} &= -2im T_{\mu\nu}^{P \rightarrow VV} \\ &+ T_{\mu\nu}^{AV}(k_1, k_2; m) - T_{\nu\mu}^{AV}(k_3, k_1; m) \\ &+ T_{\nu\mu}^{AV}(l_1, l_2; m) - T_{\mu\nu}^{AV}(l_3, l_1; m), \end{aligned} \quad (9.57)$$

$$\begin{aligned} p^\mu T_{\lambda\mu\nu}^{A \rightarrow VV} &= T_{\lambda\nu}^{AV}(k_1, k_2; m) - T_{\lambda\nu}^{AV}(k_3, k_2; m) \\ &+ T_{\lambda\nu}^{AV}(l_3, l_2; m) - T_{\lambda\nu}^{AV}(l_3, l_1; m), \end{aligned} \quad (9.58)$$

$$\begin{aligned} p^\nu T_{\lambda\mu\nu}^{A \rightarrow VV} &= T_{\lambda\mu}^{AV}(k_3, k_2; m) - T_{\lambda\mu}^{AV}(k_3, k_1; m) \\ &+ T_{\lambda\mu}^{AV}(l_1, l_2; m) - T_{\lambda\mu}^{AV}(l_3, l_2; m). \end{aligned} \quad (9.59)$$

As condições para a preservação das identidades de Ward estão agora colocadas em termos de funções de dois pontos  $AV$ . Elas são as mesmas que aquelas que encontramos na ref. [19], [29] e [30]. O cálculo dos traços nos leva a expressão que segue

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu}^{AV}(k_1, k_2; m) &= -4\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \left\{ k_2^\beta \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k^\alpha}{[(k+k_1)^2 - m^2][(k+k_2)^2 - m^2]} \right. \\ &+ k_1^\alpha \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k^\beta}{[(k+k_1)^2 - m^2][(k+k_2)^2 - m^2]} \\ &\left. + k_1^\alpha k_2^\beta \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{[(k+k_1)^2 - m^2][(k+k_2)^2 - m^2]} \right\}. \end{aligned} \quad (9.60)$$

Nós podemos usar as propriedades do tensor totalmente anti-simétrico  $\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}$  a fim de colocar a equação acima na forma

$$T_{\mu\nu}^{AV}(k_1, k_2; m) = 2\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} (k_1 - k_2)^\beta \{ (k_1 + k_2)^\alpha I_2 + 2(I_2)^\alpha \}. \quad (9.61)$$

Isto significa que, dada a definição (9.23), nós temos

$$T_{\mu\nu}^{AV}(k_1, k_2; m) = 2\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} (k_1 - k_2)^\beta (\Delta I^\alpha), \quad (9.62)$$

a qual implica que a condição é a mesma já encontrada nas seções precedentes.



## 9.2 Divergências, ambigüidades e identidades de Ward

Dados os resultados obtidos em capítulos anteriores nós podemos calcular a combinação de integrais de Feynman que se revelaram cruciais para todas as identidades de Ward que estudamos. Substituindo os resultados obtidos para as integrais envolvidas na expressão (5.23), equações (5.24) e (5.29) do capítulo 5, nós obtemos

$$\Delta I_\mu = (k_1 + k_2)^\alpha (\Delta_{\alpha\mu}), \quad (9.63)$$

e conseqüentemente,

$$T_\mu^{VS}(k_1, k_2; m) = -4m(k_1 + k_2)^\alpha (\Delta_{\alpha\mu}), \quad (9.64)$$

$$T_{\mu\nu}^{AV}(k_1, k_2; m) = 2\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}(k_1 - k_2)^\alpha \left\{ (k_1 + k_2)^\xi \left( \Delta_\xi^\beta \right) \right\}. \quad (9.65)$$

As identidades de Ward que estudamos nas seções 2, 3 e 4 podemos escrever da seguinte forma

$$iq^\mu \Gamma_\mu^{1loop}(p, q) = i\lambda (k_1 - k_2)^\mu (k_1 + k_2)^\alpha (\Delta_{\alpha\mu}), \quad (9.66)$$

$$\begin{aligned} q^\lambda T_{\lambda\mu\nu}^{A \rightarrow VV} &= -2mi [T_{\mu\nu}^{P \rightarrow VV}] \\ &+ 2\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} [(k_1 - k_3)^\beta (k_1 + k_3)^\xi + (k_2 - k_1)^\beta (k_1 + k_2)^\xi] (\Delta_\xi^\alpha) \end{aligned} \quad (9.67)$$

$$\begin{aligned} p^\mu T_{\lambda\mu\nu}^{A \rightarrow VV} &= 2\varepsilon_{\lambda\nu\alpha\beta} [(k_2 - k_1)^\beta (k_1 + k_2)^\xi + (k_3 - k_2)^\beta (k_2 + k_3)^\xi] (\Delta_\xi^\alpha) \\ &+ 2\varepsilon_{\lambda\nu\alpha\beta} [(l_3 - l_1)^\beta (l_1 + l_3)^\xi + (l_2 - l_3)^\beta (l_2 + l_3)^\xi] (\Delta_\xi^\alpha), \end{aligned} \quad (9.68)$$

$$\begin{aligned} p'^\nu T_{\lambda\mu\nu}^{A \rightarrow VV} &= 2\varepsilon_{\lambda\mu\alpha\beta} [(k_3 - k_1)^\beta (k_1 + k_3)^\xi + (k_2 - k_3)^\beta (k_2 + k_3)^\xi] (\Delta_\xi^\alpha) \\ &+ 2\varepsilon_{\lambda\mu\alpha\beta} [(l_2 - l_1)^\beta (l_1 + l_2)^\xi + (l_3 - l_2)^\beta (l_2 + l_3)^\xi] (\Delta_\xi^\alpha), \end{aligned} \quad (9.69)$$

$$p^\mu T_{\mu\nu}^{S \rightarrow VV} = 4m(k_3 - k_1)^\xi (\Delta_{\xi\nu}) + 4m(l_1 - l_2)^\xi (\Delta_{\xi\nu}) = 8mp^\xi (\Delta_{\xi\nu}), \quad (9.70)$$

$$p'^\nu T_{\lambda\mu\nu}^{S \rightarrow VV} = 4m(k_1 - k_2)^\xi (\Delta_{\xi\mu}) + 4m(l_3 - l_1)^\xi (\Delta_{\xi\mu}) = 8mp'^\xi (\Delta_{\xi\mu}). \quad (9.71)$$

Existem dois tipos de quantidades indefinidas nas expressões acima. Isto significa que a fim de obter resultados definidos para as amplitudes envolvidas, torna-se necessário assumir algumas escolhas (arbitrárias) para elas. Tais escolhas devem ser obviamente guiadas pela consistência que queremos obter nos cálculos perturbativos, apesar do caráter divergente. Tendo isto em mente podemos nos questionar pela existência de eventuais vínculos físicos para serem usados com o objetivo de adequar as escolhas para as arbitrariedades presentes nos resultados acima. Claramente, existem dois tipos de vínculos que devem ser satisfeitos. O primeiro refere-se as próprias identidades de Ward, i.e., queremos fazer escolhas que levem, em princípio, a sua preservação. Para o segundo, não podemos esquecer que as condições (9.66)-(9.71) foram obtidas depois de calcularmos as funções de dois pontos  $AV$  and  $SV$ , por este motivo é que nossas escolhas não devem implicar em resultados não-físicos para essas amplitudes. Em adição, notemos que essas duas amplitudes estão relacionadas. Existe uma identidade a nível dos traços relacionando-as, a saber (*figura.* (9.9))

$$T_{\mu\nu}^{AV} = -\frac{1}{2m} \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} (k_1 - k_2)^\alpha (T^{VS})^\beta. \quad (9.72)$$

$$i\gamma_\mu \gamma_5 \begin{array}{c} \text{---} k + k_i \text{---} \\ \text{---} k + k_j \text{---} \end{array} \gamma_\nu = \frac{1}{2m} \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} (k_j - k_i)^\alpha \left[ 1 \begin{array}{c} \text{---} k + k_i \text{---} \\ \text{---} k + k_j \text{---} \end{array} \gamma^\beta \right]$$

Fig. 9.9: Representação diagramática para a identidade (9.72).

A identidade é válida antes mesmo que qualquer cálculo tenha sido feito, i.e., independentemente das divergências associadas aos aspectos envolvidos. Mas deve ser válida também após todos os cálculos terem sido executados não importando qual filosofia de regularização foi adotada. Dentro de nossa estratégia de cálculo, a identidade acima é preservada antes de quaisquer escolhas para as arbitrariedades envolvidas. Ambas as amplitudes são, em princípio, quantidades ambíguas. A identidade (9.72) não é ambígua e deve ser mantida depois das interpretações adotadas para as arbitrariedades envolvidas. Dada esta observação é natural começar pela análise das funções de dois pontos *SV* and *AV*. Primeiramente, por razões de unitariedade (regras de Cutkosky), ambas as funções de dois pontos deveriam ter uma parte imaginária que surge no ponto cinemático  $(k_1 - k_2)^2 = 4m^2$ . Se um valor não nulo para as amplitudes relacionadas é atribuído, independente das escolhas possíveis envolvidas, um limiar como tal não estará presente. Para a segunda, argumentos vindos das invariâncias de Lorentz e CPT também exigem o valor nulo. Caso contrário, as transições entre uma partícula escalar em uma vetorial e entre uma partícula axial em uma vetorial parecem ser possíveis por meio das funções de dois pontos *SV* e *AV* respectivamente.

Nós podemos também adicionar argumentos vindos de identidades de Ward. A amplitude *SV* carrega o índice vetorial de Lorentz de tal modo que a contração com o momento externo do vértice respectivo deve se anular, a fim de manter a corrente vetorial conservada. Dada a expressão (9.64), a contração com  $(k_1 - k_2)^\mu$  nos dá

$$(k_1 - k_2)^\mu T_\mu^{VS} = -4m(k_1 - k_2)^\mu (k_1 + k_2)^\xi [\Delta_{\xi\mu}], \quad (9.73)$$

que não é automaticamente zero. Por outro lado, a amplitude *AV* também deve exibir uma corrente conservada. A contração da expressão (9.65) com  $(k_1 - k_2)^\mu$ , devido as propriedades de simetria do tensor  $\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}$  nos dá

$$(k_1 - k_2)^\mu T_{\mu\nu}^{AV} = 0. \quad (9.74)$$

Esta é portanto uma boa propriedade. Entretanto, pelas mesmas razões colocadas acima nós obtemos

$$(k_1 - k_2)^\nu T_{\mu\nu}^{AV} = 0, \quad (9.75)$$

que significa que a corrente axial também é conservada, se um valor diferente de zero para a estrutura *AV* for assumido. Isto é ruim porque o resultado correto é uma proporcionalidade entre a corrente axial e a corrente pseudo-escalar, como é bem conhecido. Somente o valor zero para ambas as estruturas matemáticas nos permite o conteúdo de simetria correto para ambas as funções de dois pontos consideradas. Dada esta conclusão a questão imediatamente levantada é: como podemos usar as arbitrariedades remanescentes nas expressões (9.64) e (9.65) para que possamos obter os resultados desejáveis? Olhando para as estruturas dos resultados (9.64) e (9.65) vemos que existem duas possibilidades básicas. Primeiro,

devido ao fato que o valor para  $k_1 + k_2$  não está definido pela conservação de energia e momento, podemos escolher  $k_1 = q/2$  e  $k_2 = -q/2$  onde  $q$  é o momento externo. Dentro deste procedimento o valor do objeto  $\Delta_{\mu\nu}$  não é restrito. Segundo, desde que precisamos calcular o valor para  $\Delta_{\mu\nu}$ , i.e., adotar uma regularização, podemos selecionar uma filosofia de tal modo que  $\Delta_{\mu\nu}^{reg}=0$ . Ambas as escolhas impõem um preço a ser pago em outros cálculos se queremos construir um procedimento, i.e., se assumimos que todas as amplitudes em todas as teorias e modelos devem ser tratadas do mesmo modo. A primeira possibilidade mencionada acima implica em assumir que as amplitudes podem emergir ambíguas a partir dos cálculos, i.e., dependentes das escolhas dos rótulos para as linhas internas. Isto não é bom porque o poder preditivo da TQC na aproximação perturbativa é destruído e, como consequência, nós podemos usar a teoria somente para produzir ajustes a fenomenologias bem conhecidas. As previsões não podem ser estabelecidas em geral porque as amplitudes podem ter peças indefinidas. Em adição, adotando este modelo, estamos assumindo que a homogeneidade do espaço-tempo é quebrada em nossos desenvolvimentos. Se por outro lado, tomarmos a segunda opção, também existem algumas implicações. Propriedades específicas para as integrais divergentes são assumidas e elas precisam ser usadas em outros cálculos com o mesmo valor e exibindo a mesma consistência, o que, de fato deveria ser verificado. Depois destas observações importantes nós voltamos às identidades de Ward (9.66)-(9.71). Olhando para as identidades de Ward para o campo escalar complexo nós notamos que há dois tipos de arbitrariedade envolvidas; a presença de uma peça indefinida  $\Delta$ , e a combinação ambígua dos momentos das linhas externas  $k_1 + k_2$ . Nós temos ambas as opções descritas acima para obter um resultado que preserva a simetria. Uma situação diferente acontece nas relações de simetria envolvendo a amplitude  $SVV$ . Até mesmo se a condição para a preservação de simetria fosse posta em termos de quatro termos potencialmente ambíguos eles aparecem em combinações não-ambíguas. Assim todas as escolhas para os momentos arbitrários internos nos conduzem ao mesmo resultado. Só a escolha  $\Delta_{\mu\nu}^{reg} = 0$  nos dará o resultado desejável. Nós notamos que estes dois problemas, o campo de scalar e processo  $SVV$ , podem ser tratados dentro da RD. Na realidade, a estratégia por nós usada para a execução dos cálculos, com a escolha  $\Delta_{\mu\nu}^{reg} = 0$ , torna-se idêntica a RD em teorias com campos de bósons somente e mapeáveis um a um em teorias com férmions. A amplitude  $SVV$  é trivialmente obtida identicamente nula na RD. Então, parece óbvio que todas as exigências físicas são cumpridas pela escolha  $\Delta_{\mu\nu}^{reg} = 0$  que mapeia os resultados da RD. Quais são as razões para alguma hesitação em assumir esta opção? A resposta pode vir das consequências desta escolha para as identidades de Ward (9.66)-(9.71) eles se tornam

$$iq^\mu \Gamma_\mu^{1loop}(p, q) = 0, \quad (9.76)$$

$$p'^\nu T_{\mu\nu}^{S \rightarrow VV} = 0, \quad (9.77)$$

$$p^\mu T_{\mu\nu}^{S \rightarrow VV} = 0, \quad (9.78)$$

e

$$p'^{\nu} T_{\lambda\mu\nu}^{A\rightarrow VV} = 0, \quad (9.79)$$

$$p^{\mu} T_{\lambda\mu\nu}^{A\rightarrow VV} = 0, \quad (9.80)$$

$$q^{\lambda} T_{\lambda\mu\nu}^{A\rightarrow VV} = -2mi T_{\mu\nu}^{P\rightarrow VV}, \quad (9.81)$$

i.e., todas as identidades de Ward são preservadas e todas as ambigüidades são eliminadas automaticamente. A princípio este fato pode ser entendido como um problema porque, aparentemente, nós estamos proibindo qualquer violação de relações de simetria na amplitude triangular  $AVV$  que é bem conhecida e deveria apresentar uma anomalia para ser consistente com o decaimento eletromagnético do pion. Pelo menos esta é a linha de argumentação que podemos achar em muitos livros de TQC. É assumido, para justificar a anomalia, que os termos indefinidos à direita das equações (9.67)-(9.69), e que estão em última instância na amplitude física  $AV$ , são não-nulos e ambíguos. Para tornar claro a última frase vamos recuperar os resultados que correspondem ao que nós chamamos de tratamento tradicional, a partir daqueles obtidos pela estratégia de cálculo adotada. Os resultados aos quais nos referimos podem ser facilmente encontrados na literatura sobre o assunto ou em muitos livros TQC. É muito simples, passar de nossos resultados para aqueles que correspondem à cálculos de termos de superfície devido ao fato que nenhum “shift” foi realizado nos passos intermediários. Tudo o que nós precisamos é: primeiramente estabelecer as identidades (9.57)-(9.59), e calcular as funções de dois pontos então obtidas, com ajuda dos resultados (I2) e (I2mu), que nos conduzem a

$$(k_3 - k_2)^{\lambda} T_{\lambda\mu\nu}^{AVV} = -2mi [T_{\mu\nu}^{P\rightarrow VV}] + 2\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} [(k_1 - k_3)^{\beta} (k_1 + k_3)^{\xi} + (k_2 - k_1)^{\beta} (k_1 + k_2)^{\xi}] (\Delta_{\xi}^{\alpha}), \quad (9.82)$$

$$(k_3 - k_1)^{\mu} T_{\lambda\mu\nu}^{AVV} = 2\varepsilon_{\lambda\nu\alpha\beta} [(k_2 - k_1)^{\beta} (k_1 + k_2)^{\xi} + (k_3 - k_2)^{\beta} (k_2 + k_3)^{\xi}] (\Delta_{\xi}^{\alpha}), \quad (9.83)$$

$$(k_1 - k_2)^{\nu} T_{\lambda\mu\nu}^{AVV} = 2\varepsilon_{\lambda\mu\alpha\beta} [(k_3 - k_1)^{\beta} (k_1 + k_3)^{\xi} + (k_2 - k_3)^{\beta} (k_2 + k_3)^{\xi}] (\Delta_{\xi}^{\alpha}). \quad (9.84)$$

Agora nós observamos que para atribuir um valor definido ao lado direito das equações, dois tipos de arbitrariedades precisam ser removidas fazendo escolhas. Tais arbitrariedades são as combinações ambíguas dos momentos internos e o objeto matemático indefinido  $\Delta$ . A diferença entre duas integrais logaritmicamente divergentes porém, pode ser imediatamente identificada com um típico termo de superfície e facilmente calculado como segue

$$\begin{aligned} \Delta S_{\mu\nu} &= \int_{\Lambda} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{\partial}{\partial k_{\nu}} \left( \frac{k_{\mu}}{(k^2 - m^2)^2} \right) \\ &= \int_{\Lambda} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{-4k_{\mu}k_{\nu}}{(k^2 - m^2)^3} + \int_{\Lambda} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{g_{\mu\nu}}{(k^2 - m^2)^2} \\ &= \left( \frac{i}{(4\pi)^2} \right) \left( \frac{1}{2} \right) g_{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (9.85)$$

Note que o mesmo resultado poderia ser obtido alterando o momento de integração em uma das estruturas de funções de dois-pontos para produzir um cancelamento com a outra. O preço a ser pago, o que é bem-conhecido, é a adição do termo de superfície correspondente que assume exatamente o valor

obtido acima. A próxima etapa é a remoção da combinação indefinida de momentos externos. Adotamos então a seguinte parametrização para os momentos internos em termos dos externos

$$\begin{cases} k_1 = ap' + bp, \\ k_2 = bp + (a - 1)p', \\ k_3 = ap' + (b + 1)p, \end{cases} \quad (9.86)$$

onde  $a$  e  $b$  são constantes. Note que:  $k_1 - k_2 = p'$ ,  $k_3 - k_1 = p$  e  $k_3 - k_2 = p' + p = q$ , onde  $q$  é obviamente o momento do axial-vetor. Depois destas substituições nós obtemos

$$(k_3 - k_2)^\lambda T_{\lambda\mu\nu}^{AVV} = -2miT_{\mu\nu}^{PVV} - \frac{(a-b)}{8\pi^2} i\varepsilon_{\mu\nu\xi\eta} p'^\eta p^\xi, \quad (9.87)$$

$$(k_3 - k_1)^\mu T_{\lambda\mu\nu}^{AVV} = -\frac{(1-a)}{8\pi^2} i\varepsilon_{\lambda\nu\xi\eta} p'^\eta p^\xi, \quad (9.88)$$

$$(k_1 - k_2)^\nu T_{\lambda\mu\nu}^{AVV} = \frac{(1+b)}{8\pi^2} i\varepsilon_{\lambda\mu\xi\eta} p'^\eta p^\xi. \quad (9.89)$$

Nas expressões acima permanece a arbitrariedade relacionada ao rótulo das linhas internas agora presente nos parâmetros  $a$  e  $b$ . Além disso, nós notamos que não há nenhum valor para  $a$  e  $b$  de tal modo que todas as relações esperadas entre as funções de Green envolvidas são simultaneamente satisfeitas. Se nós seguimos esta linha de raciocínio e incluímos a contribuição do diagrama cruzado cuja parametrização para as linhas internas pode ser assumida como

$$\begin{cases} l_1 = cp + dp' \\ l_2 = dp' + (c - 1)p \\ l_3 = cp + (d + 1)p', \end{cases} \quad (9.90)$$

obteremos

$$(l_3 - l_2)^\lambda T_{\lambda\nu\mu}^{AVV} = -2miT_{\nu\mu}^{PVV} - \frac{(c-d)}{8\pi^2} i\varepsilon_{\mu\nu\xi\eta} p'^\eta p^\xi, \quad (9.91)$$

$$(l_1 - l_2)^\mu T_{\lambda\nu\mu}^{AVV} = -\frac{(d+1)}{8\pi^2} i\varepsilon_{\lambda\nu\xi\eta} p'^\eta p^\xi, \quad (9.92)$$

$$(l_3 - l_1)^\nu T_{\lambda\nu\mu}^{AVV} = -\frac{(c-1)}{8\pi^2} i\varepsilon_{\lambda\mu\xi\eta} p'^\eta p^\xi. \quad (9.93)$$

A adição das duas contribuições gera

$$q^\lambda T_{\lambda\mu\nu}^{A\rightarrow VV} = -2miT_{\mu\nu}^{P\rightarrow VV} - \frac{(a-b+c-d)}{8\pi^2} i\varepsilon_{\mu\nu\xi\eta} p'^\eta p^\xi, \quad (9.94)$$

$$p^\mu T_{\lambda\mu\nu}^{A\rightarrow VV} = -\frac{(d-a+2)}{8\pi^2} i\varepsilon_{\lambda\nu\xi\eta} p'^\eta p^\xi, \quad (9.95)$$

$$p'^\nu T_{\lambda\mu\nu}^{A\rightarrow VV} = -\frac{(c-b-2)}{8\pi^2} i\varepsilon_{\lambda\mu\xi\eta} p'^\eta p^\xi. \quad (9.96)$$

Uma proximidade maior com os resultados usuais pode ser obtido se é assumido a mesma interpretação para os momentos internos arbitrários, i.e.,  $a = c$  e  $b = d$  nas equações (9.57)-(9.59). Nós obtemos então

$$q^\lambda T_{\lambda\mu\nu}^{A\rightarrow VV} = -2miT_{\mu\nu}^{P\rightarrow VV} - \frac{(a-b)}{4\pi^2} i\varepsilon_{\mu\nu\xi\eta} p'^\eta p^\xi, \quad (9.97)$$

$$p^\mu T_{\lambda\mu\nu}^{A\rightarrow VV} = -\frac{(b-a+2)}{8\pi^2} i\varepsilon_{\lambda\nu\xi\eta} p'^\eta p^\xi, \quad (9.98)$$

$$p'^\nu T_{\lambda\mu\nu}^{A\rightarrow VV} = \frac{(b-a+2)}{8\pi^2} i\varepsilon_{\lambda\mu\xi\eta} p'^\eta p^\xi. \quad (9.99)$$

Finalmente, escolhemos  $a = 1$  na expressão acima para obter

$$q^\lambda T_{\lambda\mu\nu}^{A\rightarrow VV} = -2miT_{\mu\nu}^{P\rightarrow VV} - \frac{(1-b)}{4\pi^2} i\varepsilon_{\mu\nu\xi\eta} p'^\eta p^\xi, \quad (9.100)$$

$$p^\mu T_{\lambda\mu\nu}^{A\rightarrow VV} = -\frac{(1+b)}{8\pi^2} i\varepsilon_{\lambda\nu\xi\eta} p'^\eta p^\xi, \quad (9.101)$$

$$p'^\nu T_{\lambda\mu\nu}^{A\rightarrow VV} = \frac{(1+b)}{8\pi^2} i\varepsilon_{\lambda\mu\xi\eta} p'^\eta p^\xi. \quad (9.102)$$

O resultado obtido deste modo, pode ser imediatamente reconhecido como aquele correspondente ao tratamento tradicional dado, por exemplo, nas refs. [19], [29], [30]. É claro agora que não existe valores para o parâmetro  $b$  que preservem todas as identidades de Ward. Seguindo os argumentos usuais e escolhendo o valor  $b = -1$  a simetria de gauge  $U(1)$  é mantida, mas a axial é violada. O que ficou claro na discussão acima é que as fonte dos termos violadores bem como do termo anômalo são as funções de dois pontos  $AV$ .

### 9.3 conclusões

Levando em consideração o que foi tratado nas últimas duas seções nós, aparentemente, criamos uma situação problemática se quisermos olhar para todos os problemas da mesma maneira, mantendo todos os vínculos físicos simultaneamente. Os resultados produzidos por nosso tratamento preservam todas as arbitrariedades intrínsecas ao problema. Todas as identidades de Ward consideradas são colocadas em termos da mesma condição. Assim, a questão é o que escolher para o que precisamos escolher a fim de obter a consistência desejável. Porém, a arbitrariedade pode ser relacionada à função de dois pontos  $SV$  que é relacionada a amplitude  $AV$  de um modo não-ambíguo. Devido a razões físicas, e também na RD, a amplitude  $SV$  deve ser identicamente nula como também a amplitude  $AV$ . A identidade de Ward para o campo escalar complexo deve ser preservada, como também as duas correntes vetoriais devem ser conservadas no processo  $SVV$ . Indubitavelmente, só a escolha  $\Delta_{\mu\nu}^{reg} = 0$  pode cumprir todas estas exigências. Porém, esta escolha elimina todas as ambigüidades na amplitude  $AV$  que normalmente são os ingredientes usados para justificar a anomalia envolvida, e, aparentemente, proíbe qualquer violação de relações de simetria para esta amplitude. Como podemos reconciliar esta situação? Para responder esta pergunta é necessário assumir um ponto de vista conceitual e filosófico para o problema: o modo tradicional usado para justificar a anomalia triangular  $AVV$  não pode ser mantido se nós quisermos olhar da mesma maneira para todos os problemas e as ambigüidades não podem desempenhar um papel relevante em uma interpretação consistente das amplitudes perturbativas. Nesta linha de raciocínio primeiro precisamos quebrar simetrias fundamentais e princípios gerais da TQC, assumindo as estruturas  $SV$  e  $AV$  como não-nulas, para somente depois obter uma justificativa para a origem perturbativa das anomalias. Um argumento filosófico poderoso pode ser adicionado a este objetivo. O fenômeno de anomalia da  $AVV$  é predito para amplitudes exatas, i.e., ela é um fenômeno fundamental. Entretanto, em eventuais soluções exatas para as equações de movimento da TQC correspondente certamente os infinitos e as ambigüidades associadas devem estar ausentes. Então não podemos esperar que a justificativa da origem do fenômeno de anomalia, mesmo em soluções perturbativas, resida em ingredientes exclusivos do cálculo perturbativo

como os infinitos e as ambigüidades são. Dado este argumento, a resposta para a questão colocada acima está intrinsicamente contida no problema. Sendo um fenômeno fundamental e inevitável, a anomalia deveria estar presente em qualquer expressão explícita para a amplitude  $AVV$ . Isto significa que nenhuma escolha para as arbitrariedades pode eliminar a anomalia bem como nenhuma prescrição de regularização ou filosofia equivalente. Então podemos esperar que um ponto de vista para as anomalias possa ser construído em acordo com todos os outros cálculos perturbativos. Para este propósito é necessário calcular explicitamente as amplitudes  $AVV$  e  $PVV$  impondo as condições de consistência, e esperando que as violações apareçam de um modo natural. O que torna-se claro nas discussões apresentadas aqui é que no contexto dos procedimentos de regularização tradicionais diferentes receitas são usadas para o tratamento de estruturas matemáticas idênticas dependendo do contexto em que elas aparecem. A situação atual do problema pode ser resumida como segue. Em situações onde a RD pode ser usada eliminando ambigüidades, nós certamente a adotamos. Em situações onde as estruturas matemáticas envolvidas não podem ser extendidas a qualquer dimensão, que é o caso da anomalia triangular, adotamos o cálculo de termos de superfície atribuindo um significado ao caráter ambíguo das amplitudes perturbativas. Em um certo modo, em situações onde estes problemas não ocorrem simultaneamente esta opção representa uma escolha possível para as arbitrariedades envolvidas. Entretanto, admitindo a intenção de tratar todas as interações como partes de uma teoria mais geral e unificada, isto parece uma idéia absurda porque significa que em uma certa amplitude de uma teoria um valor é atribuído para o objeto  $\Delta_{\mu\nu}$ , tendo em mente razões de consistência, enquanto que em outras amplitudes da mesma teoria pode ser tomado um valor diferente para o mesmo objeto sem qualquer crise de consciência. Certamente deve ser muito frustrante para qualquer físico que tenha se interessado em estudar uma ciência exata aceitar esta situação como sendo definitiva. Isto é claramente inaceitável e esforços adicionais para alcançar interpretações consistentes e universais para indefinições matemáticas intrínsecas ao cálculo perturbativo são exigidos. A estratégia que adotamos para o tratamento das divergências parece pôr a análise na direção correta. Para mostrar isto, no capítulo seguinte, verificaremos nossas suposições explicitamente a fim de esclarecer esta importante questão.

# Capítulo 10

## Anomalia $AVV$

Está certamente na mente de todos os físicos da área, a idéia de descrever de um modo adequado a dinâmica das partículas fundamentais do ponto de vista de um aparato teórico simples que seja constituído por um conjunto mínimo de ingredientes e simetrias. Do ponto de vista de um formalismo como tal deve ser possível descrever de modo preciso toda a fenomenologia já estabelecida experimentalmente e também fazer predições adicionais sobre fenômenos novos ainda não observados. Para isto, o ferramental teórico construído precisa ser bem definido, de modo que, seguindo uma única prescrição, as predições a serem feitas através da teoria possam ser consideradas como uma consequência dos princípios assumidos, e ainda que tais predições possam ser estabelecidas livres de ambigüidades. No caminho a ser seguido em direção a este objetivo, alguns guias filosóficos são frequentemente levados em conta. O maior deles talvez seja o seguinte: “*Se existe uma escolha, que é um atributo exclusivo daquele que utiliza o aparato teórico ou lei física, então o resultado final deve ser independente de tal escolha*”<sup>1</sup>. Isto significa que os resultados finais não devem ser dependentes das arbitrariedades envolvidas na aplicação de leis físicas ou equivalentes, caso contrário as predições serão ambíguas.

Esta linha de raciocínio funciona como uma motivação importante para as investigações que iremos considerar neste capítulo. Existem arbitrariedades intrínsecas aos cálculos perturbativos tal que, no contexto dos métodos tradicionais, os resultados podem emergir ambíguos. Como já discutimos no capítulo anterior, isto não é aceitável, uma vez que queremos que o nosso aparato teórico seja capaz de produzir resultados consistentes e tenha poder de predição.

Para dar continuidade a análise e, obtermos respostas aos questionamentos levantados no capítulo anterior, a respeito do possível papel desempenhado pelas arbitrariedades intrínsecas e também sobre a não universalidade dos métodos tradicionais de regularização, nos propomos, neste capítulo, a calcular explicitamente as funções de Green envolvidas naquela discussão. Elas são as amplitudes triangulares  $SVV$  e  $AVV$ . Como já discutimos, para a primeira delas podemos aplicar a  $RD$  ao passo que para a segunda não. A fim de obtermos ingredientes que exibam a consistência desejada para os cálculos perturbativos, adotaremos a mesma estratégia de cálculo para ambas as amplitudes. Uma vez calculadas verificaremos

---

<sup>1</sup> *Battistel, O.A.*



as identidades de Ward associadas. Então, se todas as amplitudes são estudadas do mesmo modo, no que diz respeito às divergências, identificaremos claramente quais são as fontes dos termos violadores de simetria nas amplitudes anômalas e mostraremos que estes nada têm a ver com ambigüidades, isto é, ainda que sejam impostas as relações de consistência eliminando todos os termos ambíguos, a anomalia  $AVV$  será descrita corretamente dentro da mesma prescrição que permite um tratamento consistente da EDQ.

## 10.1 Cálculo explícito das funções de três pontos

Em virtude dos argumentos colocados no capítulo anterior e na introdução do capítulo, nós agora iremos calcular explicitamente as amplitudes triangulares  $SVV$  e  $AVV$  dentro de nossa estratégia [31]. Todos os cálculos serão executados do modo mais geral, adotando escolhas arbitrárias para os rótulos dos momentos das linhas internas e mantendo as linhas externas fora da camada de massa. Em uma etapa posterior as identidades de Ward serão verificadas em um modo exato e completamente algébrico. Nós começamos pela função de Green de três pontos  $SVV$  definida por,

$$T_{\mu\nu}^{SVV} = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} Tr \left\{ 1 \frac{1}{(\not{k} + \not{k}_3) - m} \gamma_\mu \frac{1}{(\not{k} + \not{k}_1) - m} \gamma_\nu \frac{1}{(\not{k} + \not{k}_2) - m} \right\}. \quad (10.1)$$

Depois de calcular os traços de Dirac o resultado pode ser escrito como

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu}^{SVV} = & 4m \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{E_{123}} \{ (k + k_1)_\mu (k + k_2)_\nu + (k + k_1)_\nu (k + k_2)_\mu \\ & + (k + k_1)_\mu (k + k_3)_\nu + (k + k_1)_\nu (k + k_3)_\mu \\ & + (k + k_2)_\nu (k + k_3)_\mu - (k + k_2)_\mu (k + k_3)_\nu \} \\ & + g_{\mu\nu} T^{SPP}, \end{aligned} \quad (10.2)$$

onde definimos

$$\begin{aligned} T^{SPP} = & -4m \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \left\{ \frac{(k + k_1) \cdot (k + k_2) + (k + k_1) \cdot (k + k_3)}{E_{123}} \right\} \\ & + 4m \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \left\{ \frac{(k + k_2) \cdot (k + k_3) + m^2}{E_{123}} \right\}. \end{aligned} \quad (10.3)$$

O rótulo  $SPP$  é uma menção direta a uma outra amplitude triangular que tem a mesma estrutura matemática que o termo proporcional a  $g_{\mu\nu}$  na amplitude triangular  $SVV$ . Na presente discussão, esta decomposição não desempenha nenhum papel relevante. Ela serve, entretanto, para mostrar, uma vez mais, que as funções de Green dos cálculos perturbativos estão sempre relacionadas. A próxima etapa é identificar o conjunto de integrais de Feynman que precisamos calcular a fim de completar o cálculo. O grau mais severo de divergência é o logaritmico, como deveria ser esperado. Inserindo os resultados para

as integrais, equações (5.24), (5.33), (5.35) e (3.38) do capítulo 5, nós obtemos

$$\begin{aligned}
T_{\mu\nu}^{SVV} &= 4mg_{\mu\nu} [I_{\log}(m^2)] + 4m\Delta_{\mu\nu} \\
&+ 4mi(4\pi)^{-2} \{ p_\mu p_\nu [4\xi_{02} - 2\xi_{01}] \\
&\quad + q_\mu q_\nu [4\xi_{20} - 2\xi_{10}] \\
&\quad + q_\nu p_\mu [-4\xi_{11} + \xi_{00}] \\
&\quad + q_\mu p_\nu [-4\xi_{11} - \xi_{00} + 2\xi_{01} + 2\xi_{10}] \\
&\quad - g_{\mu\nu} [2\eta_{00}] \} \\
&+ g_{\mu\nu} [T^{SPP}], \tag{10.4}
\end{aligned}$$

onde,

$$\begin{aligned}
T^{SPP} &= -4m \left\{ I_{\log}(m^2) - i(4\pi)^{-2} Z_0 \left( (p+q)^2; m^2 \right) \right. \\
&\quad \left. + i(4\pi)^{-2} \frac{[(p+q)^2 - q^2 - p^2]}{2} \xi_{00} \right\}. \tag{10.5}
\end{aligned}$$

Para chegarmos a este resultado a identidade

$$(k+k_i) \cdot (k+k_j) = \frac{1}{2} [(k+k_i)^2 - m^2] + \frac{1}{2} [(k+k_j)^2 - m^2] + \frac{1}{2} [2m^2 - (k_i - k_j)^2] \tag{10.6}$$

foi usada no termo  $T^{SPP}$ . Vamos agora considerar a amplitude triangular  $AVV$ , usando rigorosamente as mesmas etapas e resultados. Primeiramente nós calculamos a amplitude  $AVV$  definida na Eq.(9.49) capítulo 9 , a qual depois de efetuarmos os traços escrevemos

$$T_{\lambda\mu\nu}^{AVV} = -4 \{ -F_{\lambda\mu\nu} + N_{\lambda\mu\nu} + M_{\lambda\mu\nu} + P_{\lambda\mu\nu} \}, \tag{10.7}$$

onde introduzimos as definições

$$P_{\lambda\mu\nu} = g_{\mu\nu} \varepsilon_{\alpha\beta\lambda\xi} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{(k+k_1)_\alpha (k+k_2)_\beta (k+k_3)_\xi}{E_{123}}, \tag{10.8}$$

$$\begin{aligned}
F_{\lambda\mu\nu} &= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{E_{123}} \{ \varepsilon_{\nu\beta\lambda\xi} (k+k_1)_\mu (k+k_2)_\beta (k+k_3)_\xi \\
&\quad + \varepsilon_{\mu\beta\lambda\xi} (k+k_1)_\nu (k+k_2)_\beta (k+k_3)_\xi \\
&\quad + \varepsilon_{\mu\alpha\nu\beta} (k+k_1)_\alpha (k+k_2)_\beta (k+k_3)_\lambda \\
&\quad + \varepsilon_{\mu\alpha\nu\xi} (k+k_1)_\alpha (k+k_3)_\xi (k+k_2)_\lambda \}, \tag{10.9}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
N_{\lambda\mu\nu} &= \frac{\varepsilon_{\mu\alpha\nu\lambda}}{2} \left\{ \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{(k+k_1)_\alpha}{E_{12}} \right. \\
&\quad + \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{(k+k_1)_\alpha}{E_{13}} \\
&\quad \left. + [2m^2 - (k_2 - k_3)^2] \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{(k+k_1)_\alpha}{E_{123}} \right\} \tag{10.10}
\end{aligned}$$

e

$$M_{\lambda\mu\nu} = m^2 \varepsilon_{\mu\nu\alpha\lambda} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{\{(k+k_2)_\alpha - (k+k_1)_\alpha + (k+k_3)_\alpha\}}{E_{123}}. \tag{10.11}$$

O grau mais severo de divergência, o linear, está contido no termo  $N_{\lambda\mu\nu}$ . A reorganização foi efetuada a partir da identidade (10.6). Usando os resultados (5.24), (5.29), (5.31), (5.35) e (5.38) do capítulo 5, para as integrais envolvidas, nós obtemos

$$P_{\lambda\mu\nu} = 0, \quad (10.12)$$

$$\begin{aligned} F_{\lambda\mu\nu} = & \varepsilon_{\nu\beta\lambda\sigma} (k_2 - k_3)_\beta \frac{\Delta_{\mu\sigma}}{4} \\ & + \varepsilon_{\mu\beta\lambda\sigma} (k_2 - k_3)_\beta \frac{\Delta_{\nu\sigma}}{4} \\ & + \varepsilon_{\mu\sigma\nu\beta} \left[ (k_2 - k_1)_\beta + (k_3 - k_1)_\beta \right] \frac{\Delta_{\lambda\sigma}}{4} \\ & - \frac{\varepsilon_{\mu\nu\lambda\xi}}{4} \left\{ \left( (k_3 - k_1)_\xi - (k_2 - k_1)_\xi \right) \left[ I_{\text{log}}(m^2) - 2i(4\pi)^{-2} (\eta_{00}) \right] \right\} \\ & - i(4\pi)^{-2} (k_3 - k_1)_\xi (k_2 - k_1)_\beta \left\{ \varepsilon_{\nu\beta\lambda\xi} \left[ (k_2 - k_1)_\mu (-\xi_{02} - \xi_{11} + \xi_{01}) \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + (k_3 - k_1)_\mu (\xi_{20} + \xi_{11} - \xi_{10}) \right] \right. \\ & \quad \left. + \varepsilon_{\mu\beta\lambda\xi} \left[ (k_2 - k_1)_\nu (-\xi_{02} - \xi_{11} + \xi_{01}) \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + (k_3 - k_1)_\nu (\xi_{20} + \xi_{11} - \xi_{10}) \right] \right. \\ & \quad \left. + \varepsilon_{\mu\beta\nu\xi} \left[ (k_3 - k_1)_\lambda (\xi_{11} - \xi_{20} + \xi_{10}) \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + (k_2 - k_1)_\lambda (-\xi_{02} + \xi_{11} + \xi_{01}) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (10.13)$$

$$\begin{aligned} N_{\lambda\mu\nu} = & \frac{\varepsilon_{\mu\alpha\nu\lambda}}{4} (k_1 - k_2)_\alpha \left\{ \left[ I_{\text{log}}(m^2) - i(4\pi)^{-2} Z_0 \left( (k_1 - k_2)^2; m^2 \right) \right] \right. \\ & \quad \left. + i(4\pi)^{-2} \left[ 2m^2 - (k_3 - k_2)^2 \right] (2\xi_{01}) \right\} \\ & - \frac{\varepsilon_{\mu\alpha\nu\lambda}}{4} (k_3 - k_1)_\alpha \left\{ \left[ I_{\text{log}}(m^2) - i(4\pi)^{-2} Z_0 \left( (k_1 - k_3)^2; m^2 \right) \right] \right. \\ & \quad \left. + i(4\pi)^{-2} \left[ 2m^2 - (k_3 - k_2)^2 \right] (2\xi_{10}) \right\} \\ & - \frac{\varepsilon_{\mu\alpha\nu\lambda}}{4} \left[ (k_1 + k_2)_\beta + (k_3 + k_1)_\beta \right] \Delta_{\alpha\beta} \end{aligned} \quad (10.14)$$

e

$$M_{\lambda\mu\nu} = -i(4\pi)^{-2} \left\{ \varepsilon_{\mu\alpha\nu\lambda} m^2 \left[ (k_2 - k_1)_\alpha (\xi_{00} - \xi_{01}) + (k_3 - k_1)_\alpha (\xi_{00} - \xi_{10}) \right] \right\}. \quad (10.15)$$

A solução completa para  $AVV$  pode ser escrita na seguinte forma

$$\begin{aligned} \frac{T_{\lambda\mu\nu}^{AVV}}{(-4)} = & i(4\pi)^{-2} (k_3 - k_1)_\xi (k_2 - k_1)_\beta \left\{ \varepsilon_{\nu\lambda\beta\xi} \left[ (k_3 - k_1)_\mu (\xi_{20} + \xi_{11} - \xi_{10}) \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + (k_2 - k_1)_\mu (\xi_{11} + \xi_{02} - \xi_{01}) \right] \right. \\ & \quad \left. + \varepsilon_{\mu\lambda\beta\xi} \left[ (k_3 - k_1)_\nu (\xi_{11} + \xi_{20} - \xi_{10}) \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + (k_2 - k_1)_\nu (\xi_{02} + \xi_{11} - \xi_{01}) \right] \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +\varepsilon_{\mu\nu\beta\xi} [ (k_3 - k_1)_\lambda (\xi_{11} - \xi_{20} + \xi_{10}) \\
& \quad + (k_2 - k_1)_\lambda (\xi_{02} - \xi_{01} - \xi_{11}) ] \} \\
& +i(4\pi)^{-2} \frac{\varepsilon_{\mu\nu\lambda\beta}}{4} (k_3 - k_1)_\beta \left\{ -Z_0 \left( (k_2 - k_3)^2; m^2 \right) + Z_0 \left( (k_1 - k_3)^2; m^2 \right) \right. \\
& \quad + \left[ 2(k_3 - k_2)^2 - (k_1 - k_3)^2 \right] \xi_{10} \\
& \quad \left. - (k_1 - k_2)^2 \xi_{01} + [1 - 2m^2 \xi_{00}] \right\} \\
& +i(4\pi)^{-2} \frac{\varepsilon_{\mu\nu\lambda\beta}}{4} (k_2 - k_1)_\beta \left\{ -Z_0 \left( (k_2 - k_3)^2; m^2 \right) + Z_0 \left( (k_1 - k_2)^2; m^2 \right) \right. \\
& \quad + \left[ 2(k_3 - k_2)^2 - (k_1 - k_2)^2 \right] \xi_{01} \\
& \quad \left. - (k_3 - k_1)^2 \xi_{10} + [1 - 2m^2 \xi_{00}] \right\} \\
& - \frac{\varepsilon_{\mu\nu\beta\sigma}}{4} \left[ (k_2 - k_1)_\beta + (k_3 - k_1)_\beta \right] \Delta_{\lambda\sigma} \\
& - \frac{\varepsilon_{\mu\nu\lambda\alpha}}{4} \left[ (k_1 + k_2)_\beta + (k_3 + k_1)_\beta \right] \Delta_{\alpha\beta} \\
& + \frac{\varepsilon_{\nu\lambda\beta\sigma}}{4} (k_2 - k_3)_\beta \Delta_{\mu\sigma} + \frac{\varepsilon_{\mu\lambda\beta\sigma}}{4} (k_2 - k_3)_\beta \Delta_{\nu\sigma}. \tag{10.16}
\end{aligned}$$

Note a presença do termo potencialmente ambíguo, o último na expressão acima. O último ingrediente envolvido nas identidades de Ward que nós queremos verificar é a amplitude triangular PVV, definida por

$$T_{\mu\nu}^{PVV}(k_1, k_2, k_3; m) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} Tr \left\{ \gamma_5 \frac{1}{(\not{k} + \not{k}_3) - m} \gamma_\mu \frac{1}{(\not{k} + \not{k}_1) - m} \gamma_\nu \frac{1}{(\not{k} + \not{k}_2) - m} \right\}, \tag{10.17}$$

a qual, depois dos cálculos dos traços e usar os resultados (5.33) e (3.35) do capítulo 5 para completar o cálculo, nós obtemos

$$T_{\mu\nu}^{PVV} = -4i(4\pi)^{-2} m \varepsilon_{\mu\nu\lambda\beta} p_\beta q_\lambda \xi_{00}. \tag{10.18}$$

Com estes ingredientes nós chegamos ao estágio onde podem ser verificadas as identidades de Ward para as amplitudes AVV e SVV.

## 10.2 Verificação das identidades de Ward para as funções de três-pontos

No capítulo precedente nós deduzimos duas propriedades para a amplitude triangular SVV, equações (10.37) e (10.38). Agora é hora de questionar se os resultados obtidos para os cálculos explícitos é um resultado razoável relativo a tais propriedades. A fim de verificar tais relações nós precisamos calcular as contrações das amplitudes com os momentos externos. Tais verificações exigem um esforço algébrico razoável. Entretanto, uma simplificação considerável pode ser obtida se nós usarmos algumas das propriedades das funções  $\xi_{nm}(q, p; m)$  e  $Z_k(q; m)$  apresentadas no capítulo 4. Retomando-as, as necessárias,

elas são:

$$q^2 (\xi_{20}) - (p \cdot q) (\xi_{11}) = \frac{1}{2} \left\{ - \left[ \frac{1}{2} + m^2 \xi_{00} \right] + \frac{p^2}{2} (\xi_{01}) + \frac{3q^2}{2} (\xi_{10}) \right\} \quad (10.19)$$

$$p^2 (\xi_{02}) - (p \cdot q) (\xi_{11}) = \frac{1}{2} \left\{ - \left[ \frac{1}{2} + m^2 \xi_{00} \right] + \frac{q^2}{2} (\xi_{10}) + \frac{3p^2}{2} (\xi_{01}) \right\} \quad (10.20)$$

$$q^2 (\xi_{11}) - (p \cdot q) (\xi_{02}) = \frac{1}{2} \left\{ -\frac{1}{2} Z_0 ((p+q)^2; m^2) + \frac{1}{2} Z_0 (p^2; m^2) + q^2 \xi_{01} \right\} \quad (10.21)$$

$$p^2 (\xi_{11}) - (p \cdot q) (\xi_{20}) = \frac{1}{2} \left\{ -\frac{1}{2} Z_0 ((p+q)^2; m^2) + \frac{1}{2} Z_0 (q^2; m^2) + p^2 \xi_{10} \right\} \quad (10.22)$$

$$q^2 (\xi_{10}) - (p \cdot q) (\xi_{01}) = \frac{1}{2} \left\{ -Z_0 ((p+q)^2; m^2) + Z_0 (p^2; m^2) + q^2 (\xi_{00}) \right\} \quad (10.23)$$

$$p^2 (\xi_{01}) - (p \cdot q) (\xi_{10}) = \frac{1}{2} \left\{ -Z_0 ((p+q)^2; m^2) + Z_0 (q^2; m^2) + p^2 (\xi_{00}) \right\}. \quad (10.24)$$

Tendo estas propriedades em mente primeiramente contraímos a expressão explícita de  $SVV$ , Eq.(10.4), com  $(k_1 - k_2)_\nu$  para obter:

$$\begin{aligned} (k_1 - k_2)_\nu T_{\mu\nu}^{SVV} &= 4m (k_1 - k_2)_\mu [I_{\log}(m^2)] + 4m (k_1 - k_2)_\nu \Delta_{\mu\nu} \\ &+ 4mi (4\pi)^{-2} (k_3 - k_1)_\mu \left\{ -4 \left[ (k_2 - k_1)^2 \xi_{11} + (k_2 - k_1) \cdot (k_3 - k_1) \xi_{20} \right] \right. \\ &\quad \left. + 2 \left[ (k_2 - k_1)^2 \xi_{01} + (k_2 - k_1) \cdot (k_3 - k_1) \xi_{10} \right] \right. \\ &\quad \left. + (k_2 - k_1)^2 (-\xi_{00} + 2\xi_{10}) \right\} \\ &+ 4mi (4\pi)^{-2} (k_2 - k_1)_\mu \left\{ -4 \left[ (k_2 - k_1)^2 \xi_{02} + (k_2 - k_1) \cdot (k_3 - k_1) \xi_{11} \right] \right. \\ &\quad \left. + 2 \left[ (k_2 - k_1)^2 (\xi_{01}) - (k_1 - k_2)_\mu [\eta_{00}] \right] \right. \\ &\quad \left. + (k_2 - k_1) \cdot (k_3 - k_1) (\xi_{00}) \right\} \\ &+ (k_1 - k_2)_\nu [T^{SPP}], \end{aligned} \quad (10.25)$$

onde torna-se claro a utilidade das propriedades (10.19)-(10.24), que nos levam a

$$\begin{aligned} (k_1 - k_2)_\nu T_{\mu\nu}^{SVV} &= 4m (k_1 - k_2)_\nu \Delta_{\mu\nu} - 4m (k_2 - k_1)_\mu I_{\log}(m^2) \\ &+ 4mi (4\pi)^{-2} (k_2 - k_1)_\mu \left[ (k_2 - k_1) \cdot (k_3 - k_1) (\xi_{00}) \right. \\ &\quad \left. + Z_0 \left( (k_3 - k_2)^2; m^2 \right) \right] \\ &- (k_2 - k_1)_\mu [T^{SPP}]. \end{aligned} \quad (10.26)$$

Olhando a expressão explícita  $SPP$ , Eq.(10.5), significa que obtemos

$$(k_1 - k_2)_\nu T_{\mu\nu}^{SVV} (k_1, k_2, k_3; m) = 4m (k_1 - k_2)_\alpha \Delta_{\alpha\mu}, \quad (10.27)$$

o que implica na identificação

$$(k_1 - k_2)_\mu T_{\mu\nu}^{SVV} (k_1, k_2, k_3; m) = T_\nu^{VS} (k_2, k_3; m) - T_\nu^{VS} (k_1, k_3; m). \quad (10.28)$$

Seguindo essencialmente as mesmas etapas nós podemos verificar a contração com  $(k_3 - k_1)_\mu$

$$\begin{aligned}
(k_3 - k_1)_\mu T_{\mu\nu}^{SVV} &= 4m(k_3 - k_1)_\alpha \Delta_{\alpha\nu} + 4m(k_3 - k_1)_\nu [I_{\log}(m^2)] \\
&+ 4mi(4\pi)^{-2} (k_3 - k_1)_\nu \left\{ 2(k_3 - k_1)^2 [-\xi_{10} + 2\xi_{20}] \right. \\
&\quad + 4(k_2 - k_1) \cdot (k_3 - k_1) \xi_{11} \\
&\quad - (k_2 - k_1) \cdot (k_3 - k_1) (\xi_{00}) \\
&\quad \left. - 2(k_3 - k_1)_\nu [\eta_{00}] \right\} \\
&+ 4mi(4\pi)^{-2} (k_2 - k_1)_\nu \left\{ (k_3 - k_1)^2 (\xi_{00} - 2\xi_{01}) \right. \\
&\quad + 4 \left[ (k_3 - k_1)^2 \xi_{11} + (k_2 - k_1) \cdot (k_3 - k_1) \xi_{02} \right] \\
&\quad \left. - 2 \left[ (k_3 - k_1)^2 \xi_{10} + (k_2 - k_1) \cdot (k_3 - k_1) \xi_{01} \right] \right\} \\
&+ (k_3 - k_1)_\nu [T^{SPP}], \tag{10.29}
\end{aligned}$$

ou, em virtude do resultado (10.5):

$$(k_3 - k_1)_\mu T_{\mu\nu}^{SVV}(k_1, k_2, k_3; m) = 4m(k_3 - k_1)_\alpha \Delta_{\alpha\nu}. \tag{10.30}$$

Comparando com (9.64) capítulo 9, o resultado acima significa que

$$(k_3 - k_1)_\mu T_{\mu\nu}^{SVV}(k_1, k_2, k_3; m) = T_\mu^{VS}(k_1, k_2; m) - T_\mu^{VS}(k_2, k_3; m). \tag{10.31}$$

Se comparamos os termos do lado direito das equações (9.27) e (9.30) com o resultado previamente obtido para a função de dois pontos  $SV$  podemos identificar precisamente as equações (9.28) e (9.31). Portanto as identidades entre as funções de Green envolvidas são preservadas antes de qualquer assunção sobre as arbitrariedades. Neste ponto somente a correteza dos estágios intermediários foi testada. A fim de dar um significado definido para a amplitude  $SVV$ , uma definição para a peça  $\Delta_{\alpha\nu}$ , que é arbitrária, é exigida. Isto significa escolher um método de regularização ou filosofia equivalente. Uma escolha como tal deve ser tomada usando como guia as propriedades de simetria da amplitude. A exigência da conservação da corrente vetorial não nos deixa outra opção senão selecionar uma regularização tal que  $\Delta_{\mu\nu}^{\text{Reg}} = 0$ . Como já afirmamos anteriormente, a adoção da RD nos leva ao resultado desejável uma vez que a propriedade exigida é automaticamente preenchida pelo método. Vamos agora considerar o caso mais interessante das funções de três pontos relativo a conservação das propriedades de simetria. As contrações com os momentos externos, depois do uso das identidades (10.19)-(10.24), nos leva a

$$\begin{aligned}
(k_3 - k_1)_\mu T_{\lambda\mu\nu}^{AVV} &= (k_3 - k_1)_\mu \Gamma_{\lambda\mu\nu}^{AVV} \\
&\quad - \left( \frac{i}{8\pi^2} \right) \varepsilon_{\nu\beta\lambda\xi} (k_3 - k_1)_\xi (k_2 - k_1)_\beta \tag{10.32}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(k_1 - k_2)_\nu T_{\lambda\mu\nu}^{AVV} &= (k_1 - k_2)_\nu \Gamma_{\lambda\mu\nu}^{AVV} \\
&\quad + \left( \frac{i}{8\pi^2} \right) \varepsilon_{\mu\beta\lambda\xi} (k_1 - k_3)_\xi (k_3 - k_2)_\beta \tag{10.33}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(k_3 - k_2)_\lambda T_{\lambda\mu\nu}^{AVV} &= (k_3 - k_2)_\lambda \Gamma_{\lambda\mu\nu}^{AVV} \\
&\quad - \left( \frac{i}{4\pi^2} \right) \varepsilon_{\mu\xi\nu\beta} (k_3 - k_1)_\xi (k_2 - k_1)_\beta [2m^2 \xi_{00}] \tag{10.34}
\end{aligned}$$

onde definimos

$$\begin{aligned}
\frac{\Gamma_{\lambda\mu\nu}^{AVV}}{4} &= \frac{\varepsilon_{\mu\nu\beta\xi}}{4} \left[ (k_2 - k_1)_\beta + (k_3 - k_1)_\beta \right] \Delta_{\lambda\xi} \\
&\quad - \frac{\varepsilon_{\nu\lambda\beta\xi}}{4} (k_2 - k_3)_\beta \Delta_{\mu\xi} - \frac{\varepsilon_{\mu\lambda\beta\xi}}{4} (k_2 - k_3)_\beta \Delta_{\nu\xi} \\
&\quad + \frac{\varepsilon_{\mu\nu\lambda\alpha}}{4} \left[ (k_1 + k_2)_\beta + (k_3 + k_1)_\beta \right] \Delta_{\alpha\beta}.
\end{aligned} \tag{10.35}$$

As expressões acima podem ser reescritas em termos de outras estruturas se observarmos a Eq.(9.65) e a Eq.(9.67) do capítulo 9 . Como um exemplo, note que

$$(k_3 - k_2)_\lambda \Gamma_{\lambda\mu\nu}^{AVV} = 2\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} [(k_1 - k_3)_\beta (k_1 + k_3)_\xi + (k_2 - k_1)_\beta (k_1 + k_2)_\xi] \Delta_{\xi\alpha}, \tag{10.36}$$

o que significa que

$$(k_3 - k_2)_\lambda \Gamma_{\lambda\mu\nu}^{AVV} = T_{\mu\nu}^{AV}(k_1, k_2; m) - T_{\nu\mu}^{AV}(k_3, k_1; m). \tag{10.37}$$

Novamente, todas as arbitrariedades envolvidas ainda estão presentes. A expressão (10.16), e, conseqüentemente, as equações (10.32)-(10.37), são completamente independentes das assunções específicas para o caráter divergente da amplitude. A próxima etapa envolve escolhas arbitrárias para as quantidades indefinidas presentes nas expressões. O que torna-se evidente neste ponto é que as relações (10.55) e (10.56) do capítulo 9 , entre as funções de Green envolvidas não foram obtidas satisfeitas. A natureza dos termos que viola as identidades são oriundos das contribuições finitas. As violações não podem ser impedidas pela escolha de propriedades para as integrais divergentes. Isto significa que nenhuma técnica de regularização pode ser construída a fim de preservar as três identidades simultaneamente pela simples razão que os termos violadores não podem ser afetados por eventuais propriedades da distribuição reguladora. O ponto principal é que as arbitrariedades envolvidas, o valor para a peça  $\Delta_{\xi\alpha}$  e as combinações ambíguas das linhas dos momentos internos, não desempenham qualquer papel relevante no estabelecimento das violações. Com o objetivo de enfatizar os novos aspectos adicionados por nossa análise proposta, podemos relembrar os resultados obtidos na seção 2 do capítulo anterior, onde usamos nossos resultados através do cálculo de termos de superfície para recuperar o tratamento tradicional dado a questão das anomalias.

### 10.3 Considerações finais e conclusões

Aplicando um método de cálculo muito geral, concernente ao tratamento de divergências, nós consideramos os aspectos ambigüidades e relações de simetria usando para este objetivo duas amplitudes físicas bem conhecidas; as amplitudes triangulares  $SVV$  e  $AVV$ . Do ponto de vista das técnicas tradicionais, a primeira amplitude citada pode ser tratada dentro do alcance da RD e portanto manipulada consistentemente. A segunda é uma amplitude com um número ímpar de matrizes  $\gamma_5$  e o recurso da RD não está disponível. Entretanto, a partir do ponto de vista da estratégia adotada, ambas as amplitudes podem ser igualmente tratadas e exibem aspectos muito similares com relação ao caráter divergente. Isto é devido ao fato que na estratégia adotada é evitado o uso explícito de uma técnica de regularização

nos passos intermediários. O rótulo adotado para as linhas de momento interno é completamente arbitrário. Somente propriedades muito gerais para uma eventual distribuição reguladora são assumidas com o intuito de efetuar uma reorganização adequada para as integrais de Feynman divergentes. Os termos que apresentam uma dependência dos momentos das linhas internas são deixados somente em integrais finitas. As partes indefinidas das amplitudes estão organizadas em um pequeno número de objetos, mas de fato, eles não são calculados. Com este procedimento todas as arbitrariedades intrínsecas do cálculo perturbativo permanecem ainda presentes nos resultados finais. Devido a este fato torna-se possível mapear os resultados obtidos em outros correspondentes a qualquer filosofia de regularização tradicional. Dois de tais tratamentos são particularmente importantes para as investigações realizadas. A RD e o cálculo explícito dos termos de superfície. A RD é geralmente aplicada para o tratamento da  $SVV$  e os resultados correspondentes podem ser facilmente recuperados a partir dos nossos. O cálculo dos termos de superfície é tradicionalmente aplicado a amplitude  $AVV$  a fim de justificar a origem perturbativa da anomalia triangular, e os resultados correspondentes, podem igualmente ser recuperados a partir dos nossos. Entretanto, estes dois mapeamentos são obtidos através de interpretações diferentes para os objetos indefinidos. Precisamente este aspecto permite-nos obter conclusões muito interessantes sobre a natureza do fenômeno de anomalia. Com o objetivo de tornar as conclusões claras e sonoras vamos resumir as etapas principais. Primeiramente estabelecemos identidades relacionando as amplitudes  $SVV$  e  $AVV$  contraídas com os momentos externos com outras funções de dois e três pontos que são:

$$(k_3 - k_1)_\mu T_{\mu\nu}^{SVV}(k_1, k_2, k_3; m) = T_\nu^{VS}(k_2, k_1; m) - T_\nu^{VS}(k_2, k_3; m), \quad (10.38)$$

$$(k_1 - k_2)_\mu T_{\mu\nu}^{SVV}(k_1, k_2, k_3; m) = T_\mu^{VS}(k_2, k_3; m) - T_\mu^{VS}(k_1, k_3; m), \quad (10.39)$$

$$(k_3 - k_2)_\lambda T_{\lambda\mu\nu}^{AVV}(k_1, k_2, k_3; m) = -2miT_{\mu\nu}^{PVV}(k_1, k_2, k_3; m) \\ + T_{\mu\nu}^{AV}(k_1, k_2; m) - T_{\nu\mu}^{AV}(k_3, k_1; m), \quad (10.40)$$

$$(k_3 - k_1)_\mu T_{\lambda\mu\nu}^{AVV}(k_1, k_2, k_3; m) = T_{\lambda\nu}^{AV}(k_1, k_2; m) - T_{\lambda\nu}^{AV}(k_3, k_2; m) \quad (10.41)$$

e

$$(k_1 - k_2)_\nu T_{\lambda\mu\nu}^{AVV}(k_1, k_2, k_3; m) = T_{\lambda\mu}^{AV}(k_3, k_2; m) - T_{\lambda\mu}^{AV}(k_3, k_1; m). \quad (10.42)$$

As funções de dois pontos que apareceram do lado direito da equação acima foram calculadas no capítulo anterior, Eq.(10.64) e Eq.(10.65), a partir do ponto de vista da estratégia adotada, levando a

$$T_\mu^{VS}(k_1, k_2; m) = (-)4m(k_1 + k_2)_\beta [\Delta_{\beta\mu}] \quad (10.43)$$

e

$$T_{\mu\nu}^{AV}(k_1, k_2; m) = 2\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} [(k_1 - k_2)_\beta (k_1 + k_2)_\xi \Delta_{\xi\alpha}], \quad (10.44)$$

onde deve ser levada em consideração a relação entre elas, Eq.(9.72) capítulo 9,

$$T_{\mu\nu}^{AV}(k_1, k_2; m) = \frac{1}{2m} \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} (k_2 - k_1)_\beta T_\alpha^{VS}(k_1, k_2; m), \quad (10.45)$$

que é não ambígua apesar do caráter potencialmente ambíguo de ambas as amplitudes envolvidas. A relação acima é válida a nível dos traços, i.e., independente dos aspectos calculacionais. As expressões



(10.43) e (10.44) são as mais gerais para estas estruturas matemáticas. Elas preservam todas as arbitrariedades intrínsecas envolvidas, que estão presentes em combinações ambíguas dos momentos das linhas internas e na peça indefinida  $\Delta_{\beta\mu}$ . É claro que, a fim de dar um valor definido para as amplitudes alguma escolha (arbitrária) deve ser levada em conta. Então, quais são as melhores escolhas? Os únicos guias que nós temos são eventuais exigências físicas a serem impostas às amplitudes apesar dos aspectos divergentes. Dado que nenhum outro resultado é aceitável senão aquele idênticamente zero para a função de dois pontos  $SV$ , que pode ser obtida idênticamente nula na RD, não temos outra opção a nossa disposição a não ser a de selecionar uma regularização tal que  $\Delta_{\mu\nu}^{reg} = 0$ , e em consequência  $T_{\mu}^{VS} = T_{\mu\nu}^{AV} = 0$ . Dada esta escolha, as equações (10.38)-(10.42) tornam-se

$$\bullet p^{\nu} T_{\lambda\mu\nu}^{A \rightarrow VV} = 0, \quad (10.46)$$

$$\bullet p^{\mu} T_{\lambda\mu\nu}^{A \rightarrow VV} = 0, \quad (10.47)$$

$$\bullet q^{\lambda} T_{\lambda\mu\nu}^{A \rightarrow VV} = -2mi T_{\mu\nu}^{P \rightarrow VV} \quad (10.48)$$

e

$$\bullet p^{\nu} T_{\mu\nu}^{S \rightarrow VV} = 0 \quad (10.49)$$

$$\bullet p^{\mu} T_{\mu\nu}^{S \rightarrow VV} = 0. \quad (10.50)$$

Isto é certamente o que desejamos obter para as duas últimas equações mas no caso da amplitude triangular  $AVV$  a primeira vista parece ser um problema. Isto é devido ao fato que, com esta escolha, as equações (10.46)-(10.48) aparentemente implicam que nenhuma violação nas relações de simetria para a amplitude  $AVV$  poderá ocorrer. No mínimo isto é o que deveríamos concluir através das equações (10.46)-(10.48) se seguirmos a linha de raciocínio tradicional para a justificativa perturbativa da anomalia triangular  $AVV$  [14]. O que então, deveríamos nós fazer, a fim de reconciliar esta situação? Neste ponto podemos dizer que ambos os problemas considerados devem não necessariamente estar vinculados. Isto significa adotar escolhas diferentes para as indefinições, i.e., no tratamento do problema  $SVV$  adotamos  $\Delta_{\mu\nu}^{reg} = 0$ , obtendo o resultado desejável, enquanto que na amplitude  $AVV$  adotamos  $\Delta_{\mu\nu}^{reg} \neq 0$ . Isto é precisamente o “status” do problema: para a amplitude  $SVV$  adotamos o ponto de vista da RD ( $\Delta_{\mu\nu}^{reg} = 0$ ) e para justificar a amplitude anômala  $AVV$  adotamos a análise do cálculo de termos de superfície ( $\Delta_{\mu\nu}^{reg} \neq 0$ ). Em algum sentido esta opção respresenta uma situação muito frustrante porque ambos os problemas (e muitos outros) estão fortemente relacionados. Esta última frase pode ser claramente visualizada se observarmos as equações (10.40), (10.41), (10.42) e a Eq.(10.45). Elas indicam que os termos potencialmente ambíguos presentes na estrutura  $AVV$  são, de fato, funções de dois pontos  $SV$ . Isto é imediatamente verificado se tomarmos o termo entre parênteses no lado esquerdo da Eq.(10.34) e efetuarmos os traços. A resposta pode ser escrita em forma semelhante à decomposição (10.7)

$$t_{\lambda\mu\nu}^{AVV} = -4 \{ -f_{\lambda\mu\nu} + n_{\lambda\mu\nu} + m_{\lambda\mu\nu} + p_{\lambda\mu\nu} \}, \quad (10.51)$$

onde, depois da integração, somente  $n_{\lambda\mu\nu}$  irá exibir um grau de divergência linear. Este é dado explici-

tamente por

$$n_{\lambda\mu\nu} = \varepsilon_{\mu\alpha\nu\lambda} \frac{(k+k_2) \cdot (k+k_3)(k+k_1)_\alpha}{[(k+k_1)^2 - m^2][(k+k_2)^2 - m^2][(k+k_3)^2 - m^2]}, \quad (10.52)$$

que pode ser convenientemente reorganizado como

$$\begin{aligned} n_{\lambda\mu\nu} = & \frac{\varepsilon_{\mu\alpha\nu\lambda}}{4} \left\{ \frac{2k_\alpha + (k_1+k_2)_\alpha}{[(k+k_1)^2 - m^2][(k+k_2)^2 - m^2]} \right. \\ & \left. + \frac{2k_\alpha + (k_1+k_3)_\alpha}{[(k+k_1)^2 - m^2][(k+k_3)^2 - m^2]} \right\} \\ & + \frac{\varepsilon_{\mu\alpha\nu\lambda}}{4} \left\{ [2m^2 - (k_2 - k_3)^2] \frac{2(k+k_1)_\alpha}{[(k+k_1)^2 - m^2][(k+k_2)^2 - m^2][(k+k_3)^2 - m^2]} \right. \\ & + \frac{(k_1 - k_3)_\alpha}{[(k+k_1)^2 - m^2][(k+k_3)^2 - m^2]} \\ & \left. + \frac{(k_1 - k_2)_\alpha}{[(k+k_1)^2 - m^2][(k+k_2)^2 - m^2]} \right\}. \end{aligned} \quad (10.53)$$

Os primeiros dois termos contêm agora, toda a divergência linear e o caráter ambíguo dos momentos arbitrários das linhas internas. Dada a identidade (10.45) espera-se que tais termos estejam relacionados a funções de dois pontos  $SV$ . De fato é fácil verificar que

$$4m \frac{2k_\alpha + (k_i + k_j)_\alpha}{[(k+k_i)^2 - m^2][(k+k_j)^2 - m^2]} = tr \left[ \hat{1} \frac{1}{(\not{k} + \not{k}_i) - m} \gamma_\alpha \frac{1}{(\not{k} + \not{k}_j) - m} \right]. \quad (10.54)$$

Depois da integração no momento  $k$ , o lado direito pode ser identificado com a função de dois pontos definida em (10.35). O aspecto importante envolvido reside no fato que as peças indefinidas presentes na amplitude  $AVV$  estão ligadas ao valor da amplitude física  $SV$ . Conseqüentemente, podemos usar os eventuais vínculos físicos, a serem impostos a amplitude  $SV$  para nos guiar na tomada de escolhas consistentes para as arbitrariedades correspondentes presentes na amplitude  $AVV$ . Assim não parece razoável assumir o valor zero para a estrutura matemática  $SV$  quando estamos lidando com o problema  $SVV$  e, para estruturas matemáticas idênticas, atribuir um valor não-nulo quando estamos querendo justificar a anomalia  $AVV$ . Depois destas importantes considerações, torna-se muito claro que um ponto de vista alternativo para o problema deve ser procurado. A fim de construí-lo notamos primeiramente que as equações (10.46)-(10.48) não implicam na eliminação das anomalias pela escolha de  $\Delta_{\mu\nu}^{reg} = 0$ . De fato, a origem da anomalia triangular está ligada ao decaimento do pión neutro através do paradoxo de Sutherland-Veltman. Segundo o paradoxo, existem quatro propriedades a serem satisfeitas pela amplitude  $AVV$ . Três delas são precisamente as identidades de Ward que nós consideramos e a quarta propriedade é o limite cinemático :  $\lim_{q_\lambda \rightarrow 0} q_\lambda T_{\lambda\mu\nu}^{A \rightarrow VV} = 0$ , que está relacionado ao decaimento do pión. As manipulações efetuadas até as equações (10.46)-(10.48) nos permitem verificar simultaneamente todos os quatro ingredientes. Somente o cálculo explícito pode nos mostrar todas elas. Então, seguindo este ponto de vista, temos que primeiramente explicitar as funções de três pontos e a seguir, verificar as identidades de

Ward e o limite cinemático. Os resultados correspondentes são

$$(k_3 - k_1)_\mu T_{\lambda\mu\nu}^{AVV} = (k_3 - k_1)_\mu \Gamma_{\lambda\mu\nu}^{AVV} - \left(\frac{i}{8\pi^2}\right) \varepsilon_{\nu\beta\lambda\xi} (k_3 - k_1)_\xi (k_2 - k_1)_\beta, \quad (10.55)$$

$$(k_1 - k_2)_\nu T_{\lambda\mu\nu}^{AVV} = (k_1 - k_2)_\nu \Gamma_{\lambda\mu\nu}^{AVV} + \left(\frac{i}{8\pi^2}\right) \varepsilon_{\mu\beta\lambda\xi} (k_1 - k_3)_\xi (k_3 - k_2)_\beta, \quad (10.56)$$

$$(k_3 - k_2)_\lambda T_{\lambda\mu\nu}^{AVV} = (k_3 - k_2)_\lambda \Gamma_{\lambda\mu\nu}^{AVV} - \left(\frac{i}{4\pi^2}\right) \varepsilon_{\mu\xi\nu\beta} (k_3 - k_1)_\xi (k_2 - k_1)_\beta [2m^2 \xi_{00}], \quad (10.57)$$

$$(k_1 - k_2)_\mu T_{\mu\nu}^{SVV} = 4m(k_1 - k_2)_\alpha \Delta_{\alpha\mu} \quad (10.58)$$

e

$$(k_3 - k_1)_\mu T_{\mu\nu}^{SVV} = 4m(k_3 - k_1)_\alpha \Delta_{\alpha\nu}. \quad (10.59)$$

Agora, se adotamos o mesmo ponto de vista para ambos os problemas, i.e.,  $\Delta_{\mu\nu}^{reg} = 0$ , o que implica em assumir  $T_\mu^{SV} = T_{\mu\nu}^{AV} = 0$ , obtemos

$$(k_1 - k_2)_\mu T_{\mu\nu}^{SVV} = 0, \quad (10.60)$$

$$(k_3 - k_1)_\mu T_{\mu\nu}^{SVV} = 0, \quad (10.61)$$

$$(k_3 - k_1)_\mu T_{\lambda\mu\nu}^{AVV} = \left(\frac{i}{8\pi^2}\right) \varepsilon_{\nu\beta\lambda\xi} (k_3 - k_1)_\xi (k_2 - k_1)_\beta, \quad (10.62)$$

$$(k_1 - k_2)_\nu T_{\lambda\mu\nu}^{AVV} = \left(\frac{i}{8\pi^2}\right) \varepsilon_{\mu\beta\nu\xi} (k_3 - k_1)_\xi (k_2 - k_1)_\beta \quad (10.63)$$

e

$$(k_3 - k_2)_\lambda T_{\lambda\mu\nu}^{AVV} = -2mi \{T_{\mu\nu}^{P\bar{V}V}\}. \quad (10.64)$$

A inclusão do canal cruzado nos dá

$$p_\mu T_{\mu\nu}^{S\rightarrow VV} = 0 \quad (10.65)$$

$$p'_\mu T_{\mu\nu}^{S\rightarrow VV} = 0 \quad (10.66)$$

$$p_\mu T_{\lambda\mu\nu}^{A\rightarrow VV} = \left(\frac{i}{4\pi^2}\right) \varepsilon_{\nu\beta\lambda\xi} p_\xi p'_\beta \quad (10.67)$$

$$p'_\nu T_{\lambda\mu\nu}^{A\rightarrow VV} = -\left(\frac{i}{4\pi^2}\right) \varepsilon_{\mu\beta\lambda\xi} p_\xi p'_\beta \quad (10.68)$$

$$(p + p')_\lambda T_{\lambda\mu\nu}^{A\rightarrow VV} = -2mi \{T_{\mu\nu}^{P\rightarrow VV}\}. \quad (10.69)$$

Então torna-se claro o que nós queremos dizer sobre o problema. As identidades de Ward para a amplitude  $SVV$  são satisfeitas, como deveriam ser, e aquelas correspondentes a amplitude  $AVV$  apresentam-se violadas. Os termos violadores podem ser relacionados a situação cinemática da amplitude  $AVV$ . Nós

podemos escrever as identidades de Ward como

$$(k_3 - k_1)_\mu T_{\lambda\mu\nu}^{AVV} = (k_3 - k_1)_\mu T_{\lambda\mu\nu}^{AVV}(0) \quad (10.70)$$

$$(k_1 - k_2)_\nu T_{\lambda\mu\nu}^{AVV} = (k_1 - k_2)_{\nu\mu} T_{\lambda\mu\nu}^{AVV}(0) \quad (10.71)$$

$$(k_3 - k_2)_\lambda T_{\lambda\mu\nu}^{AVV} = -2mi \{T_{\mu\nu}^{PVV}\}. \quad (10.72)$$

onde

$$T_{\lambda\mu\nu}^{AVV}(0) = \left(\frac{i}{8\pi^2}\right) \varepsilon_{\mu\nu\lambda\xi} \left[ (k_3 - k_1)_\beta - (k_1 - k_2)_\beta \right], \quad (10.73)$$

que é o termo anômalo. As expressões acima refletem agora o que esperávamos para o fenômeno de anomalia. A amplitude  $AVV$  calculada viola três propriedades de simetria. O caráter fundamental do fenômeno reside no fato de que não existe nenhuma dependência na regularização específica que venhamos eventualmente a usar. A violação da simetria envolvida representa um tipo particular de arbitrariedade: uma vez que não é possível satisfazer simultaneamente todas as propriedades de simetria, é completamente justificável tomar a melhor escolha por razões físicas. É evidente que devemos escolher o que é exigido pela fenomenologia. Isto significa escolher a expressão para a amplitude triangular com um comportamento de baixa energia correto ou fazer a redefinição

$$(T_{\lambda\mu\nu}^{A \rightarrow VV}(p, p'))_{phys} = T_{\lambda\mu\nu}^{A \rightarrow VV}(p, p') - T_{\lambda\mu\nu}^{A \rightarrow VV}(0), \quad (10.74)$$

onde

$$T_{\lambda\mu\nu}^{A \rightarrow VV}(0) = \left(\frac{i}{4\pi^2}\right) \varepsilon_{\mu\nu\lambda\xi} [p_\beta - p'_\beta]. \quad (10.75)$$

Consequentemente, nós obtemos para a amplitude física  $AVV$

$$p'^\nu (T_{\lambda\mu\nu}^{A \rightarrow VV})_{phy} = 0 \quad (10.76)$$

$$p^\mu (T_{\lambda\mu\nu}^{A \rightarrow VV})_{phy} = 0 \quad (10.77)$$

$$(p + p')^\lambda (T_{\lambda\mu\nu}^{A \rightarrow VV})_{phy} = -2im \{T_{\mu\nu}^{P \rightarrow VV}\} - \left(\frac{i}{2\pi^2}\right) \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} [p^\alpha p'^\beta]. \quad (10.78)$$

Note que, com a redefinição imposta por razões fenomenológicas, as identidades vetoriais são agora preservadas na amplitude  $AVV$ . Isto é diferente da argumentação usual que é a redefinição da amplitude calculada a fim de recuperar a simetria de “Gauge”  $U(1)$ . A origem das violações não está nos ingredientes que são exclusivos da aproximação perturbativa como as divergências e ambigüidades são. Nenhuma regularização pode impedir a violação de no mínimo uma das quatro propriedades de simetria porque os termos violadores surgem da parte finita da amplitude. Os pontos mais importantes da conclusão são: a) *Relativo as ambigüidades*: elas não podem desempenhar qualquer papel relevante em uma interpretação consistente das amplitudes físicas perturbativas. Qualquer resultado para um cálculo perturbativo que exiba dependência nas arbitrariedades envolvidas não pode ser levado a sério. b) *Relativo as regularizações*: é possível resumir tudo o que nós temos a dizer sobre elas em uma única frase: se o método é consistente não é necessário explicitá-lo em nenhum lugar de modo que nenhum papel é deixado para ser desempenhado, também para tais ferramentas. Estas conclusões devem ser muito importantes para as discussões de muitos problemas e controvérsias estabelecidas recentemente na literatura onde as ambigüidades são chamadas a desempenhar papéis relevantes.

# Capítulo 11

## Conclusões e perspectivas

Ao longo do presente trabalho, desenvolvemos uma investigação extremamente detalhada a respeito do tratamento das divergências típicas das soluções perturbativas de TQC's, no contexto específico de dois problemas emblemáticos desta natureza: a QED ao nível um “loop” e a anomalia AVV. Para tal fizemos uso de uma estratégia, recentemente proposta, alternativa aos métodos de regularização. No contexto desta estratégia de cálculo as arbitrariedades intrínsecas aos cálculos perturbativos são preservadas no sentido que as escolhas para os rótulos para os momentos das linhas internas dos diagramas contendo “loops” são assumidas as mais gerais possíveis e nenhum passo intermediário é feito assumindo qualquer forma específica de regularização. Apenas é admitido a presença implícita de uma distribuição regularizadora e, propriedades muito gerais, indispensáveis a qualquer regularização, são assumidas. Com isso tornou-se possível investigar os aspectos essenciais e relevantes na construção de um método consistente para as necessárias manipulações e cálculos envolvidos. Este tipo investigação é, portanto, de modo inverso ao usualmente feito neste contexto onde é inicialmente proposto um método e investigado por exaustão a possível consistência. Nas investigações efetuadas as quantidades divergentes relevantes são mantidas do modo como surgem nos cálculos e, pode-se então, questionar sobre quais valores devem ser assumidos por tais quantidades a fim de que resultados consistentes possam ser obtidos. Devido a isso uma clara e transparente interpretação se tornou possível. A fim de que todas as amplitudes da EDQ sejam avaliadas de modo não ambíguo e preservando todas as simetrias pertinentes a elas ditadas por princípios gerais de TQC, ou pela invariância de gauge, específica da EDQ, não é necessário o cálculo propriamente dito de integrais divergentes mas apenas a adoção de uma regularização pertencente a uma classe geral de regularizações, dita de primeira classe, que por definição é aquela que satisfaz às denominadas RC. Estas condições implicam automaticamente na eliminação de todas as ambigüidades e na preservação de todas as simetrias da EDQ. O objeto divergente restante não necessita ser explicitado para os propósitos de renormalização e pode ser mantido exato o que é de crucial importância quando são envolvidos cálculos com mais de um “loop” onde devem ocorrer cancelamentos entre termos divergentes cujos coeficientes são funções dos momentos. Um aspecto importante neste contexto é a clara explicação das razões essenciais da consistência de dois métodos bem sucedidos na EDQ, a RD e a RCPV, o que

pode ser resumido de modo simples: ambos pertencem à mesma classe de regularizações, aquela que satisfaz às RC's. Neste estágio das investigações merece ainda destaque a sistematização introduzida para as partes finitas das integrais de Feynman que é parte integrante e importante do método utilizado. É possível efetuar todos os cálculos, investigar o comportamento de amplitudes físicas em limites específicos de interesse, verificar identidades de Ward e efetuar a renormalização, entre outras coisas, apenas com o conhecimento de tais funções e suas propriedades. Um dos aspectos importantes relacionados a isso, ao que foi dado um tratamento secundário neste trabalho e merece estudos mais detalhados, é a questão das divergências infravermelhas nas teorias de “gauge” em geral e particularmente na EDQ. O estudo cuidadoso das funções definidas no capítulo 4 no limite infravermelho pode esclarecer de modo definitivo os mecanismos através dos quais ocorrem os cancelamentos necessários para livrar as teorias de “gauge” destas divergências incômodas. Estudos neste sentido já se encontram em andamento. Por fim, para encerrar os comentários relativos a EDQ, ressaltamos a forma final obtida para a renormalização. Uma vez que não foi calculado o objeto divergente básico logarítmico, nenhuma expansão ou limite foi necessário ser efetuado. Com isso as propriedades das quantidades renormalizadas são mantidas exatas e intactas. É imediato perceber a independência da forma matemática das quantidades renormalizadas quanto à escolha do ponto de renormalização. Ainda mais transparência seria obtida se todos os cálculos tivessem sido feitos adotando-se uma escolha arbitrária para a escala comum às partes divergentes e finitas de acordo com a breve discussão feita no capítulo 6 por ocasião do tratamento das divergências infravermelhas. Poderíamos ter obtido expressões onde os objetos divergentes ( $I_{\log}$  no caso da EDQ) e as funções representando a parte finita das amplitudes estariam escritas em termos de uma escala comum e arbitrária permitindo a definição das quantidades renormalizadas em uma escala qualquer, como deveria ser. Os aspectos relacionados à questão da arbitrariedade e às possíveis ambigüidades de escala relacionadas, estão entre os mais importantes ingredientes implementados pela estratégia de cálculo que adotamos. Tais ingredientes não aparecem no contexto dos métodos usuais de regularização e podem ser de grande utilidade para conduzir investigações a respeito do comportamento assintótico das teorias ou em regimes específicos de teorias que envolvem partículas constituintes com massa diferindo em ordens de grandeza como é o caso da Cromodinâmica Quântica (QCD). Para o caso específico da QCD também pode ser de extrema utilidade a possibilidade de o método permitir o tratamento simultâneo das divergências ultravioletas e infravermelhas, o que, como é bem conhecido, é de difícil implementação em métodos tradicionais de regularização.

Após concluir o tratamento da EDQ nos voltamos para o um dos problemas mais sutis, intrigantes, interessantes e cruciais de TQC's, que é a questão das anomalias, aqui representado pela amplitude AVV. É sabido que não se conhece de modo razoável uma teoria se suas anomalias não forem completamente conhecidas. A questão relacionada a isso no que diz respeito à consistência no cálculo perturbativo é a universalidade. Nos dias atuais o método mais popular e conveniente de regularização é, sem dúvidas, a RD cujo ingrediente essencial é a continuação analítica, ou seja, a hipótese de que as amplitudes são funções analíticas da dimensão espaço-temporal. Isto implica que todos os ingredientes matemáticos e suas álgebras devem ser estendidos para dimensão contínua e complexa. Evidentemente que existem

objetos que são típicos de uma dimensão específica e a generalização destes e suas álgebras não é possível como é o caso da matriz  $\gamma_5$  em dimensão  $D=3+1$ . Tais objetos são essências na implementação de teorias com campos de férmions interagindo com a mediação de bósons de paridade negativa. Isto gera no cálculo perturbativo funções de Green fermiônicas com operadores axiais-vetores e pseudo-escalares precisamente aqueles envolvidos nas amplitudes anômalas. Devido a isto a RD não se aplica de modo natural e se torna necessário o desenvolvimento de regras particulares para cada dimensão espaço-temporal ou a utilização de outras prescrições para o tratamento de tais amplitudes. Com o propósito de questionar tais procedimentos, nos dois últimos capítulos relatamos uma investigação neste contexto envolvendo a amplitude anômala AVV cuja fenomenologia associada é bem conhecida e desempenha papel importante na formulação do modelo padrão. Primeiro, no capítulo 9, mostramos que a prescrição tradicional utilizada na literatura para o estabelecimento da anomalia AVV está fundamentada em interpretações inconsistentes para os objetos divergentes envolvidos. Se a referida interpretação fosse utilizada para o tratamento de outras amplitudes da teoria, para o que não existem restrições, os resultados obtidos seriam inconsistentes e incompatíveis com aqueles obtidos pela RD que é adotada para o tratamento das amplitudes da teoria que não envolvem um número ímpar de matrizes  $\gamma_5$ . Com esta conclusão clara e transparente nos propomos a mostrar, no capítulo 10, que a estratégia utilizada para o tratamento consistente da EDQ fornece automaticamente os resultados esperados para as amplitudes anômalas mesmo estas sendo automaticamente livres das ambigüidades que são os ingredientes utilizados pela prescrição tradicional. Com isso atribuímos credibilidade e estabelecemos o caráter universal do método. Isto implica que a estratégia de cálculo possui a propriedade de não apenas descrever anomalias conhecidas e tratar consistentemente amplitudes não anômalas com uma única prescrição mas também a capacidade de estabelecer a existência de anomalias não conhecidas ou não relacionadas a fenomenologias conhecidas. Este é o caso das anomalias associadas a densidades fermiônicas tensoriais onde os métodos da álgebra de correntes não são capazes de estabelecer as identidades de Ward que devem ser obedecidas ou violadas e o próprio método de cálculo tem de assumir as duas tarefas estabelecer e verificar as relações de simetria [32].

Por fim, podemos considerar os aspectos dimensionais do cálculo perturbativo tão importantes em diversos contextos fenomenológicos mas particularmente naquele das teorias supersimétricas. A estratégia que adotamos nas investigações efetuadas neste trabalho pode ser aplicada em teorias formuladas em qualquer dimensão espaço-temporal previamente escolhida de modo igual. Em dimensões pares temos a possibilidade de tratar todas as amplitudes com uma única prescrição e determinar quais amplitudes são de fato anômalas [33]. Em teorias com dimensões ímpares a geração dinâmica de massa para o bóson de “gauge” pode ser investigado sem o uso explícito de regularizações permitindo uma descrição clara destes mecanismos [34]. Por fim, entre outras possibilidades claras, está a determinação de formas universais para as amplitudes correspondentes a um processo físico qualquer com as extensões dimensionais das funções definidas para representar as partes finitas das integrais de Feynman. Ainda que as amplitudes pertençam a teorias não renormalizáveis elas terão suas simetrias preservadas e serão livres de ambigüidades.

## Apêndice A

# Álgebra das Matrizes de Dirac

Na formulação da mecânica quântica relativística para uma partícula de spin  $\frac{1}{2}$  surgem naturalmente as matrizes de Dirac. Estas obedecem a uma álgebra específica não comutativa e, desempenham um papel importante nas soluções perturbativas de TQC's, pois aparecem no desenvolvimento das amplitudes físicas. Por esta razão, se faz necessário o conhecimento da álgebra obedecida por tais matrizes, bem como, o desenvolvimento de algumas identidades úteis envolvendo estas a fim de proceder convenientes manipulações nas expressões para as amplitudes a partir das formas ditadas para elas a partir das regras de Feynman. Neste apêndice faremos uma apresentação das matrizes  $\gamma$  de Dirac e, estabeleceremos os resultados que serão necessários ao longo dos capítulos que decorrem das propriedades destas.

Inicialmente consideremos uma representação para as matrizes  $\gamma^\mu = (\gamma^0, \gamma^1, \gamma^2, \gamma^3)$ . Podemos adotar

$$\gamma^0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \gamma^1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{A.1}$$

$$\gamma^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \gamma^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

As matrizes definidas acima satisfazem à álgebra

$$\gamma_\rho \gamma_\mu + \gamma_\mu \gamma_\rho = 2\delta_{\mu\rho} I, \tag{A.2}$$

onde  $I$  é a matriz identidade. Definimos ainda a matriz  $\gamma_5$  como

$$\gamma_5 = i\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3, \tag{A.3}$$



que fica

$$\gamma^5 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.4})$$

e  $\sigma_{\mu\nu}$  como

$$\sigma_{\nu\mu} = \frac{i}{2} [\gamma_\nu \gamma_\mu - \gamma_\mu \gamma_\nu]. \quad (\text{A.5})$$

Assim teremos as propriedades

$$\gamma_\rho \gamma^\rho = 4, \quad (\text{A.6})$$

$$\gamma_\rho \gamma_\mu \gamma^\rho = -2\gamma_\mu, \quad (\text{A.7})$$

$$\gamma_\rho \sigma_{\mu\nu} \gamma^\rho = 0, \quad (\text{A.8})$$

$$\gamma_5 \gamma_5 = I, \quad (\text{A.9})$$

$$\gamma_\mu \gamma_5 = -\gamma_5 \gamma_\mu \quad (\text{A.10})$$

e

$$\gamma_\rho \sigma_{\mu\nu} = -i (\delta_{\mu\rho} \gamma_\nu - \delta_{\rho\nu} \gamma_\mu - \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \gamma_\sigma \gamma_5). \quad (\text{A.11})$$

A contração de *matrizes*  $\gamma$  com quadrivetores, representado por

$$\not{A} = A_\mu \gamma^\mu, \quad (\text{A.12})$$

leva a identidades tais como:

$$\not{A}\not{B} + \not{B}\not{A} = 2A \cdot B, \quad (\text{A.13})$$

$$\gamma_\mu \not{A} + \not{A} \gamma_\mu = 2A_\mu, \quad (\text{A.14})$$

$$\gamma_\mu \not{A}\not{B} \gamma_\mu = 4A \cdot B, \quad (\text{A.15})$$

$$\gamma_\mu \not{A} \gamma_\mu = 2\not{A} \quad (\text{A.16})$$

e

$$\gamma_\mu \not{A}\not{B}\not{C} \gamma_\mu = -2\not{C}\not{B}\not{A}. \quad (\text{A.17})$$

É interessante considerar também os traços envolvendo *matrizes*  $\gamma$ . Teremos

$$\text{Tr}(\gamma_\mu) = 0, \quad (\text{A.18})$$

$$\text{Tr}(\gamma_\mu \gamma_\nu) = \delta_{\mu\nu} \text{Tr}(I) = 4\delta_{\mu\nu}, \quad (\text{A.19})$$

$$\text{Tr}(\gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\rho) = 0, \quad (\text{A.20})$$

$$\text{Tr}(\gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\alpha \gamma_\beta) = 4(\delta_{\mu\beta} \delta_{\nu\alpha} - \delta_{\mu\alpha} \delta_{\nu\beta} + \delta_{\mu\nu} \delta_{\alpha\beta}), \quad (\text{A.21})$$

$$\text{Tr}(\gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\rho \gamma_\alpha \gamma_\beta) = 0, \quad (\text{A.22})$$

$$\begin{aligned}
Tr(\gamma_\lambda \gamma_\alpha \gamma_\mu \gamma_\beta \gamma_\nu \gamma_\rho) &= 4\{(\delta_{\alpha\nu}\delta_{\mu\beta} - \delta_{\alpha\beta}\delta_{\mu\nu} + \delta_{\alpha\mu}\delta_{\beta\nu})\delta_{\rho\lambda} \\
&\quad (\delta_{\lambda\nu}\delta_{\mu\beta} - \delta_{\lambda\beta}\delta_{\mu\nu} + \delta_{\lambda\mu}\delta_{\beta\nu})\delta_{\rho\alpha} \\
&\quad (\delta_{\lambda\nu}\delta_{\alpha\beta} - \delta_{\lambda\beta}\delta_{\alpha\nu} + \delta_{\lambda\alpha}\delta_{\beta\nu})\delta_{\rho\mu} \\
&\quad (\delta_{\lambda\nu}\delta_{\alpha\mu} - \delta_{\lambda\mu}\delta_{\alpha\nu} + \delta_{\lambda\alpha}\delta_{\mu\nu})\delta_{\rho\beta} \\
&\quad (\delta_{\lambda\beta}\delta_{\alpha\mu} - \delta_{\lambda\mu}\delta_{\alpha\beta} + \delta_{\lambda\alpha}\delta_{\mu\beta})\delta_{\rho\nu}\}, \tag{A.23}
\end{aligned}$$

$$Tr(\gamma_5) = 0, \tag{A.24}$$

$$Tr(\gamma_5 \gamma_\nu) = 0, \tag{A.25}$$

$$Tr(\gamma_5 \gamma_\nu \gamma_\alpha) = 0, \tag{A.26}$$

$$Tr(\gamma_5 \gamma_\nu \gamma_\alpha \gamma_\beta) = 0, \tag{A.27}$$

$$Tr(\gamma_5 \gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\alpha \gamma_\beta) = 4i\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}, \tag{A.28}$$

$$Tr(\gamma_5 \gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\alpha \gamma_\beta \gamma_\rho) = 0 \tag{A.29}$$

e

$$\begin{aligned}
Tr(\gamma_5 \gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\rho \gamma_\sigma \gamma_\lambda \gamma_\tau) &= 4\{\delta_{\mu\nu}\varepsilon_{\rho\sigma\lambda\tau} - \delta_{\mu\rho}\varepsilon_{\nu\sigma\lambda\tau} + \delta_{\nu\rho}\varepsilon_{\mu\sigma\lambda\tau} \\
&\quad + \delta_{\sigma\lambda}\varepsilon_{\mu\nu\rho\tau} - \delta_{\sigma\tau}\varepsilon_{\mu\nu\rho\lambda} + \delta_{\lambda\tau}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\}. \tag{A.30}
\end{aligned}$$

Podemos construir matrizes obedecendo à algebra indicada em (A.2) em qualquer dimensão previamente escolhida. Em dimensões pares os resultados obtidos acima são essencialmente idênticos exceto pelo fator vindo do traço da matriz unidade.

## Apêndice B

# Parametrização de Feynman

Ao fazermos uso do cálculo perturbativo para as amplitudes físicas nos deparamos com as chamadas integrais de Feynman. Tais integrais são em geral complicadas e trabalhosas. Uma técnica muito útil na solução de integrais de Feynman é o que chamamos de *Parametrização de Feynman*. Podemos afirmar que a técnica é a primeira etapa na solução de integrais de Feynman. A parametrização possibilita uma reorganização dos integrandos a fim de simplificar a integração permitindo colocar as integrais de Feynman em uma forma genérica, o que simplifica a integração nos momentos. A estratégia consiste em utilizar identidades para reescrever os integrandos. A mais simples destas identidades é a seguinte:

$$\frac{1}{ab} = \int_0^1 \frac{dz}{[(b-a)z + a]^2}. \quad (\text{B.1})$$

Entretanto todas as identidades estão contidas numa expressão geral. Todas as formas de interesse podem ser obtidas a partir da relação

$$\frac{1}{a_1 a_2 \dots a_n} = (n-1)! \int dx_1 \int dx_2 \dots \int dx_n \frac{\delta(1 - \sum_{i=1}^n x_i)}{[a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n]^n}. \quad (\text{B.2})$$

Os  $a_i$ 's que aparecem na expressão podem ser, e geralmente são, propagadores das partículas correspondentes às linhas internas do diagrama considerado, ao qual está associada a integral que se deseja calcular. Estes propagadores podem aparecer repetidos nas integrais. Quando isto acontecer, para obter a identidade necessária à parametrização basta que derivemos a expressão acima em relação ao parâmetro que aparece repetido. Com isto temos por exemplo,

$$\frac{1}{a_1^2 a_2 \dots a_n} = n! \int dx_1 \int dx_2 \dots \int dx_n \frac{\delta(1 - \sum_{i=1}^n x_i) x_1}{[a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n]^{n+1}}. \quad (\text{B.3})$$

Para o cálculo das integrais de Feynman necessárias para o estudo da Eletrodinâmica Quântica são

úteis as seguintes identidades

$$\frac{1}{ab} = \int_0^1 \frac{dz}{[(b-a)z+a]^2}, \quad (\text{B.4})$$

$$\frac{1}{a^2b} = 2 \int_0^1 \frac{(1-z)dz}{[(b-a)z+a]^3}, \quad (\text{B.5})$$

$$\frac{1}{a^3b} = 3 \int_0^1 \frac{(1-z)^2dz}{[(b-a)z+a]^4}, \quad (\text{B.6})$$

$$\frac{1}{a^4b} = 4 \int_0^1 \frac{(1-z)^3dz}{[(b-a)z+a]^5}, \quad (\text{B.7})$$

$$\frac{1}{abc} = 2 \int_0^1 dz \int_0^{1-z} \frac{dy}{[(c-a)z+(b-a)y+a]^3}, \quad (\text{B.8})$$

$$\frac{1}{a^2bc} = 6 \int_0^1 dz \int_0^{1-z} \frac{(1-y-z)dy}{[(c-a)z+(b-a)y+a]^4}, \quad (\text{B.9})$$

$$\frac{1}{a^3bc} = 12 \int_0^1 dz \int_0^{1-z} \frac{(1-y-z)^2dy}{[(c-a)z+(b-a)y+a]^5}, \quad (\text{B.10})$$

$$\frac{1}{abcd} = 6 \int_0^1 dz \int_0^{1-z} dy \int_0^{1-y-z} \frac{dx}{[(c-a)z+(b-a)y+(d-a)x+a]^4} \quad (\text{B.11})$$

e

$$\frac{1}{a^2bcd} = 24 \int_0^1 dz \int_0^{1-z} dy \int_0^{1-y-z} \frac{(1-y-z-x)dx}{[(c-a)z+(b-a)y+(d-a)x+a]^5}. \quad (\text{B.12})$$

Para ilustrar o uso da técnica consideremos uma típica integral de Feynman:

$$I_1^a = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{(k_2^2 + 2k \cdot k_2)^3}{(k^2 - m^2)^3 [(k+k_2)^2 - m^2]}. \quad (\text{B.13})$$

Observe que no denominador da integral  $I_1^a$ , temos um termo entre parenteses elevado ao cubo e outro termo entre colchetes elevado a potência um. Podemos identificar o primeiro termo como  $a^3$  e o segundo como  $b$ . Com isso vamos parametrizar por:

$$\frac{1}{a^3b} = 3 \int_0^1 \frac{(1-z)^2dz}{[(b-a)z+a]^4} \quad (\text{B.14})$$

isto é, adotamos

$$a = (k^2 - m^2) \quad (\text{B.15})$$

e

$$b = (k+k_2)^2 - m^2. \quad (\text{B.16})$$

Então,

$$[(b-a)z+a] = k^2 + 2(k_2z) \cdot k + (k_2^2z - m^2). \quad (\text{B.17})$$

Se voltarmos para  $I_1^a$  obtemos:

$$I_1^a = 3 \int_0^1 (1-z)^2 dz \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{(k_2^2 + 2k \cdot k_2)^3}{[k^2 + 2(k_2z) \cdot k + (k_2^2z - m^2)]^4}. \quad (\text{B.18})$$

Agora notamos que a estrutura que aparece no denominador do integrando,

$$\frac{1}{[k^2 + 2(k_2z) \cdot k + (k_2^2z - m^2)]}, \quad (\text{B.19})$$

que pode ser escrita na forma

$$\frac{1}{[k^2 + 2Q \cdot k + -H^2]}, \quad (\text{B.20})$$

é a forma genérica na qual os integrandos das integrais de Feynman podem ser colocados após a parametrização. Isto facilita e muito a integração nos momentos  $k$ .

# Apêndice C

## Integração Dimensional

No Apêndice B consideramos um recurso matemático para o tratamento de integrais de Feynman e ilustramos a aplicação deste ao considerar uma destas integrais. A forma genérica para o integrando, qualquer que seja a integral, sempre poderá ser a mesma. Assim, para calcular tais integrais, isto é, integrar nos momentos, basta considerar as formas genéricas oferecidas pela parametrização de Feynman

$$\int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{(1, k_\mu, k_\mu k_\nu, k^2, k_\mu k_\nu k_\alpha, \dots)}{[k^2 + 2Q \cdot k - H^2]^\alpha}. \quad (\text{C.1})$$

É possível entretanto evitar esta multiplicidade de integrais, deduzindo um resultado geral do qual podem ser extraídos todos os outros necessários. O cálculo de integrais de Feynman torna-se enormemente facilitado através desta sistemática. Trata-se da extensão  $n = m + 1$ -dimensional, da forma genérica das integrais nos momentos oferecida pela parametrização de Feynman. Tratando-se de um resultado de grande utilidade, justifica-se a discussão com uma certa riqueza de detalhes.

Nós tomamos como ponto de partida a mais simples das integrais na forma oferecida pela parametrização de Feynman e definimos;

$$I(Q) = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{[k^2 + 2Q \cdot k - H^2]^\alpha}. \quad (\text{C.2})$$

De início eliminamos o termo ímpar efetuando a mudança

$$\begin{aligned} (k^2 + 2Q \cdot k - H^2) &= [(k + Q)^2 - (Q^2 + H^2)] \\ &= k'^2 - M^2, \end{aligned} \quad (\text{C.3})$$

onde definimos:

$$K' = k + Q \quad (\text{C.4})$$

e

$$M^2 = Q^2 + H^2. \quad (\text{C.5})$$

Com isso a integral fica:

$$I(Q) = \int \frac{d^4 k'}{(2\pi)^4} \frac{1}{[k'^2 - M^2]^\alpha}. \quad (\text{C.6})$$

Agora, abandonando a linha em  $k$ , fazemos uma extensão para  $m + 1 = n$  dimensões do espaço dos momentos (tipo Minkowski);

$$I(Q, n) = \int \frac{d^n k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - M^2)^\alpha}. \quad (\text{C.7})$$

Então teremos:

$$\begin{cases} d^n k = dk_0 dk_1 dk_2 \dots dk_m = dk_0 d^m \mathbf{k} \\ k^2 = k_0^2 - \mathbf{k}^2 \\ \mathbf{k}^2 = k_1^2 + k_2^2 + \dots + k_m^2. \end{cases} \quad (\text{C.8})$$

Assim  $I(Q, n)$  ficará:

$$I(Q, n) = \int d^m \mathbf{k} \int dk_0 \left\{ \frac{1}{[k_0^2 - ((\mathbf{k}^2 + M^2)^{1/2} - i\epsilon)^2]^\alpha} \right\}. \quad (\text{C.9})$$

A integração em  $k_0$  pode ser facilmente efetuada se nós identificamos, no plano complexo  $k_0$ , os pólos do integrando (*figura. (C.1)*).

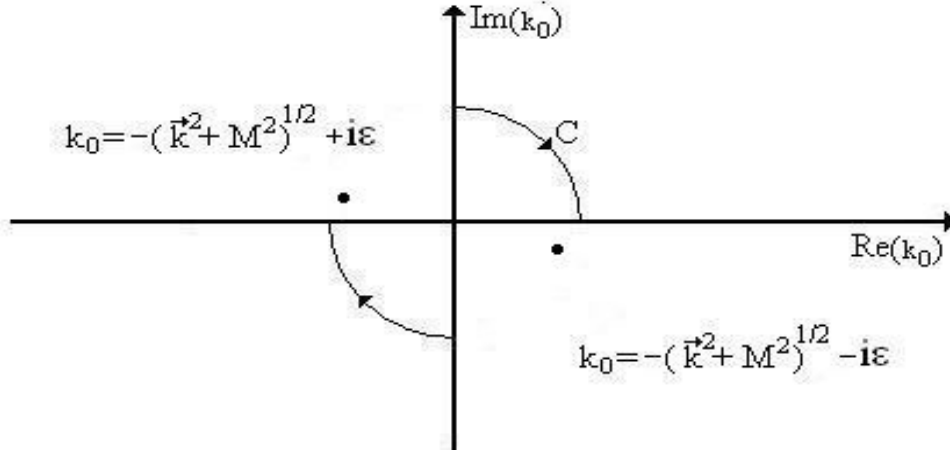


Fig. C.1.: Plano complexo  $k_0$ .

Com o contorno  $C$  escolhido, a integral de  $f(k_0)$ ;

$$f(k_0) = \frac{1}{\{k_0^2 - [(\mathbf{k}^2 + M^2)^{1/2} - i\epsilon]^2\}^\alpha}, \quad (\text{C.10})$$

se anula. Observemos ainda que  $f(k_0)$  cai abruptamente com  $k_0$  grande (tanto quanto  $\alpha > 1$ ). Isto é:

$$\lim_{k_0 \rightarrow \infty} [f(k_0)] \simeq \frac{1}{k_0^{2\alpha}}. \quad (\text{C.11})$$

Então a contribuição sobre o contorno circular  $C$  se anula e apenas restam as contribuições sobre os eixos. Fazemos a conveniente mudança de variável

$$k_0 \longrightarrow ik_{m+1}, \quad (\text{C.12})$$

com  $k_{m+1}$  real. Com isso a integral em  $k_0$  fica

$$\int_{-i\infty}^{+i\infty} dk_0 f(k_0) = i \int_{-\infty}^{+\infty} dk_{m+1} f(ik_{m+1}), \quad (\text{C.13})$$

$$\int_{-i\infty}^{+i\infty} dk_0 f(k_0) = i \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk_{m+1}}{\left[ (ik_{m+1})^2 - \left( (\mathbf{K}^2 + M^2)^{1/2} - i\epsilon \right)^2 \right]^\alpha}, \quad (\text{C.14})$$

$$\int_{-i\infty}^{+i\infty} dk_0 f(k_0) = i (-1)^\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk_{m+1}}{\left[ k_{m+1}^2 + \mathbf{K}^2 + i\epsilon \right]^\alpha}. \quad (\text{C.15})$$

Isto quer dizer que passamos, na prática, para um espaço euclideo n-dimensional

$$\begin{cases} k_\mu = (k_1, k_2, \dots, k_{m+1}) \\ k^2 = k_1^2 + k_2^2 + \dots + k_{m+1}^2 \\ d^n k = dk_1 dk_2 \dots dk_{m+1}. \end{cases} \quad (\text{C.16})$$

A relação entre as integrais nos dois espaços é dada por:

$$\int_{Mink.} \frac{d^n k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - M^2 + i\epsilon)^\alpha} = (-1)^{-\alpha} i \int_{Eucl.} \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \frac{1}{(k^2 + M^2 - i\epsilon)^\alpha}. \quad (\text{C.17})$$

Agora expressamos o espaço euclideo  $n$ -dimensional em coordenadas polares;

$$\begin{cases} k_1 = k \text{sen} \theta_m \text{sen} \theta_{m-1} \dots \text{sen} \theta_2 \text{sen} \theta_1 \\ k_2 = k \text{sen} \theta_m \text{sen} \theta_{m-1} \dots \text{sen} \theta_2 \cos \theta_1 \\ " \quad " \quad " \\ " \quad " \quad " \\ " \quad " \quad " \\ k_{m+1} = k \cos \theta_m. \end{cases} \quad (\text{C.18})$$

O elemento de volume será dado por:

$$\int d^n k = \int_0^\infty k^m dk \int_0^{2\pi} \theta_1 \int_0^\pi \text{sen} \theta_2 d\theta_2 \dots \int_0^\pi \text{sen}^{m-1} \theta_m d\theta_m. \quad (\text{C.19})$$

A integral nos momentos fica, com isso, na forma:

$$I(Q, n) = (-1)^\alpha i \int_0^{2\pi} \theta_1 \int_0^\pi \text{sen} \theta_2 d\theta_2 \dots \int_0^\pi \text{sen}^{m-1} \theta_m d\theta_m \int_0^\infty \frac{k^m dk}{(k^2 + M^2 - i\epsilon)^\alpha}. \quad (\text{C.20})$$

Já que o integrando somente depende de  $k^2$ , podemos integrar nos ângulos. Para tal tomamos auxílio nos resultados:

$$i) \int_0^\pi \text{sen}^m \theta d\theta = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)}{\Gamma\left(1 + \frac{m}{2}\right)}, \quad (\text{C.21})$$

$$ii) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}. \quad (\text{C.22})$$

Deste modo:

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} d\theta_1 \int_0^\pi \text{sen} \theta_2 d\theta_2 \int_0^\pi \text{sen}^2 \theta_3 d\theta_3 \dots \int_0^\pi \text{sen}^{m-1} \theta_m d\theta_m = \\ & = (2\pi) \left[ \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma(1)}{\Gamma\left(1 + \frac{1}{2}\right)} \right] \left[ \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(1 + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma(1+1)} \right] \left[ \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma(1+1)}{\Gamma\left(1 + \frac{1}{2}\right)} \right] \dots \\ & \dots \left[ \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{m-1+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{2+m-1}{2}\right)} \right] \end{aligned} \quad (\text{C.23})$$

$$= \frac{(2\pi)(\sqrt{\pi})^{m-1}}{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)}, \quad (\text{C.24})$$



ou seja, obtivemos:

$$\int d\Omega_m = \frac{2(\pi)^{\frac{m+1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)}. \quad (\text{C.25})$$

Voltando com este resultado para a integral:

$$I(Q, n) = \frac{(-1)^{-\alpha} i(\pi)^{\frac{m+1}{2}}}{(2\pi)^{m+1} \Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)} \int_0^1 \frac{(k^2)^{\frac{m-1}{2}} dk^2}{(k^2 + M^2)^\alpha}, \quad (\text{C.26})$$

a qual, usando a expressão para a função Beta de Euler, fornece:

$$I(Q, n) = \frac{(-1)^{-\alpha} i(\pi)^{\frac{m+1}{2}}}{(2\pi)^{m+1} \Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)} \frac{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right) \Gamma\left(\alpha - \left(\frac{m+1}{2}\right)\right)}{(M^2)^{\alpha - \left(\frac{m+1}{2}\right)} \Gamma(\alpha)}. \quad (\text{C.27})$$

Com  $m + 1 = n$ , fica:

$$I(Q, n) = \frac{(-1)^{-\alpha} i \Gamma\left(\alpha - \frac{n}{2}\right)}{(2)^n \Gamma(\alpha) (M^2)^{\alpha - \frac{n}{2}} (\pi)^{m+1 - \left(\frac{m+1}{2}\right)}}, \quad (\text{C.28})$$

ou ainda:

$$I(Q, n) = \frac{(-1)^{-\alpha} i \Gamma\left(\alpha - \frac{n}{2}\right)}{(4\pi)^{n/2} \Gamma(\alpha) (M^2)^{\alpha - \frac{n}{2}}}. \quad (\text{C.29})$$

A forma da expressão justifica a definição:

$$n \equiv 2\omega, \quad (\text{C.30})$$

que então nos fornecerá:

$$I(Q, \omega) = \frac{i \Gamma(\alpha - \omega)}{(4\pi)^\omega \Gamma(\alpha) (-Q^2 - H^2)^{\alpha - \omega}}, \quad (\text{C.31})$$

que é o resultado desejado. A presença da função  $\Gamma(\alpha - \omega)$  nos diz que o resultado obtido é válido para  $\alpha > \omega$ , ou seja, para integrais finitas. As demais formas genéricas que aparecem em (C.1) podem ser obtidas a partir desta. Por exemplo, se desejamos calcular:

$$I_\mu(Q, 2\omega) = \int \frac{d^{2\omega} k}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{k_\mu}{(k^2 + 2Q \cdot k - H^2)^\alpha}, \quad (\text{C.32})$$

primeiro derivamos o lado esquerdo  $I(Q, 2\omega)$  em relação ao momento externo  $Q_\mu$ ;

$$\frac{d}{dQ_\mu} \left\{ \int \frac{d^{2\omega} k}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{1}{(k^2 + 2Q \cdot k - H^2)^\alpha} \right\} = -2\alpha \int \frac{d^{2\omega} k}{(2\pi)^4} \frac{k_\mu}{(k^2 + 2Q \cdot k - H^2)^{\alpha+1}}. \quad (\text{C.33})$$

A seguir derivamos o lado direito de (C.29),

$$\frac{d}{dQ_\mu} \left\{ \left( \frac{i}{(4\pi)^\omega} \right) \frac{\Gamma(\alpha - \omega)}{\Gamma(\alpha) (-Q^2 - H^2)^{\alpha - \omega}} \right\} = \left( \frac{i}{(4\pi)^\omega} \right) \frac{(-) \Gamma(\alpha - \omega) (\alpha - \omega) (-2Q_\mu)}{\Gamma(\alpha) [-Q^2 - H^2]^{\alpha - \omega - 1}}. \quad (\text{C.34})$$

Deste modo, igualando ambos os lados, teremos:

$$\begin{aligned} \int \frac{d^{2\omega} k}{(2\pi)^4} \frac{k_\mu}{(k^2 + 2Q \cdot k - H^2)^{\alpha+1}} &= \left( \frac{i}{(4\pi)^\omega} \right) \frac{(-) \Gamma(\alpha - \omega) (\alpha - \omega) (Q_\mu)}{\alpha \Gamma(\alpha) [-Q^2 - H^2]^{\alpha - \omega - 1}} \\ &= \left( \frac{i}{(4\pi)^\omega} \right) \frac{(-) \Gamma(\alpha + 1 - \omega) Q_\mu}{\Gamma(\alpha + 1) [-Q^2 - H^2]^{\alpha - \omega + 1}}. \end{aligned} \quad (\text{C.35})$$

Definindo  $\alpha' = \alpha + 1$ , uma vez que  $\alpha$  é arbitrário, temos:

$$\int \frac{d^{2\omega} k}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{k_\mu}{(k^2 + 2Q \cdot k - H^2)^\alpha} = \left( \frac{i}{(4\pi)^\omega} \right) \frac{(-) \Gamma(\alpha - \omega) Q_\mu}{\Gamma(\alpha) [-Q^2 - H^2]^{\alpha - \omega}}. \quad (\text{C.36})$$

Repetindo este procedimento podemos obter todas as outras integrais necessárias para os cálculos de amplitudes. Uma vez que estamos tratando aqui de integrais finitas,  $\omega$  pode ser tomado na dimensão física  $\omega = 2$  nos resultados.

A seguir apresentamos os resultados para integrais comumente encontradas nos cálculos de amplitudes físicas consideradas neste trabalho.

$$\int \frac{d^{2\omega}k}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{1}{(k^2 + 2Q \cdot k - H^2)^\alpha} = \left( \frac{i}{(4\pi)^\omega} \right) \frac{\Gamma(\alpha - \omega)}{\Gamma(\alpha)[-Q^2 - H^2]^{\alpha - \omega}} \quad (\text{C.37})$$

$$\int \frac{d^{2\omega}k}{(2\pi)^4} \frac{k_\mu}{(k^2 + 2Q \cdot k - H^2)^\alpha} = \left( \frac{i}{(4\pi)^\omega} \right) \frac{(-)\Gamma(\alpha - \omega)Q_\mu}{\Gamma(\alpha)[-Q^2 - H^2]^{\alpha - \omega}} \quad (\text{C.38})$$

$$\begin{aligned} \int \frac{d^{2\omega}k}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{k_\mu k_\nu}{(k^2 + 2Q \cdot k - H^2)^\alpha} &= \left( \frac{i}{(4\pi)^\omega} \right) \left[ \frac{Q_\mu Q_\nu \Gamma(\alpha - \omega)}{\Gamma(\alpha)[-Q^2 - H^2]^{\alpha - \omega}} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \delta_{\mu\nu} \frac{\Gamma(\alpha - \omega - 1)}{\Gamma(\alpha)[-Q^2 - H^2]^{\alpha - \omega - 1}} \right] \end{aligned} \quad (\text{C.39})$$

$$\begin{aligned} \int \frac{d^{2\omega}k}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{k^2}{(k^2 + 2Q \cdot k - H^2)^\alpha} &= \left( \frac{i}{(4\pi)^\omega} \right) \left[ \frac{Q^2 \Gamma(\alpha - \omega)}{\Gamma(\alpha)[-Q^2 - H^2]^{\alpha - \omega}} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\omega \Gamma(\alpha - \omega - 1)}{\Gamma(\alpha)[-Q^2 - H^2]^{\alpha - \omega - 1}} \right] \end{aligned} \quad (\text{C.40})$$

$$\begin{aligned} \int \frac{d^{2\omega}k}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{k_\mu k_\nu k_\alpha}{(k^2 + 2Q \cdot k - H^2)^\alpha} &= \left( \frac{(-)i}{(4\pi)^\omega} \right) \left[ \frac{Q_\mu Q_\nu Q_\alpha \Gamma(\alpha - \omega)}{\Gamma(\alpha)[-Q^2 - H^2]^{\alpha - \omega}} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} (\delta_{\mu\nu} Q_\alpha + \delta_{\mu\alpha} Q_\nu + \delta_{\alpha\nu} Q_\mu) \frac{\Gamma(\alpha - \omega - 1)}{\Gamma(\alpha)[-Q^2 - H^2]^{\alpha - \omega - 1}} \right] \end{aligned} \quad (\text{C.41})$$

$$\begin{aligned} \int \frac{d^{2\omega}k}{(2\pi)^4} \frac{k^2 k_\alpha}{(k^2 + 2Q \cdot k - H^2)^\alpha} &= \left( \frac{(-)i}{(4\pi)^\omega} \right) \left[ \frac{Q^2 Q_\alpha \Gamma(\alpha - \omega)}{\Gamma(\alpha)[-Q^2 - H^2]^{\alpha - \omega}} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} (2\omega + 2) Q_\alpha \Gamma(\alpha - \omega - 1) \right] \end{aligned} \quad (\text{C.42})$$

$$\begin{aligned} \int \frac{d^{2\omega}k}{(2\pi)^4} \frac{k_\mu k_\nu k_\alpha k_\beta}{(k^2 + 2Q \cdot k - H^2)^\alpha} &= \left( \frac{i}{(4\pi)^\omega} \right) \left[ \frac{Q_\mu Q_\nu Q_\alpha Q_\beta \Gamma(\alpha - \omega)}{\Gamma(\alpha)[-Q^2 - H^2]^{\alpha - \omega}} + \right. \\ &\quad + \frac{1}{2} (\delta_{\mu\nu} Q_\alpha Q_\beta + \delta_{\mu\alpha} Q_\nu Q_\beta + \delta_{\mu\beta} Q_\nu Q_\alpha + \delta_{\nu\alpha} Q_\mu Q_\beta + \\ &\quad \left. + \delta_{\nu\beta} Q_\mu Q_\alpha + \delta_{\alpha\beta} Q_\mu Q_\nu) \frac{\Gamma(\alpha - \omega - 1)}{\Gamma(\alpha)[-Q^2 - H^2]^{\alpha - \omega - 1}} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{4} (\delta_{\alpha\mu} \delta_{\beta\nu} + \delta_{\alpha\beta} \delta_{\mu\nu} + \delta_{\alpha\nu} \delta_{\beta\mu}) \frac{\Gamma(\alpha - \omega - 2)}{\Gamma(\alpha)[-Q^2 - H^2]^{\alpha - \omega - 2}} \right] \end{aligned} \quad (\text{C.43})$$

$$\begin{aligned} \int \frac{d^{2\omega}k}{(2\pi)^4} \frac{k^2 k_\alpha k_\beta}{(k^2 + 2Q \cdot k - H^2)^\alpha} &= \left( \frac{i}{(4\pi)^\omega} \right) \left[ \frac{Q^2 Q_\alpha Q_\beta \Gamma(\alpha - \omega)}{\Gamma(\alpha)[-Q^2 - H^2]^{\alpha - \omega}} + \right. \\ &\quad + \frac{1}{2} \frac{((2\omega + 4) Q_\alpha Q_\beta + \delta_{\alpha\beta} Q^2) \Gamma(\alpha - \omega - 1)}{\Gamma(\alpha)[-Q^2 - H^2]^{\alpha - \omega - 1}} + \\ &\quad \left. + \frac{1}{4} \frac{(2\omega + 2) \delta_{\alpha\beta} \Gamma(\alpha - \omega - 2)}{\Gamma(\alpha)[-Q^2 - H^2]^{\alpha - \omega - 2}} \right] \end{aligned} \quad (\text{C.44})$$

$$\begin{aligned}
\int \frac{d^{2\omega}k}{(2\pi)^4} \frac{k^4}{(k^2 + 2Q \cdot k - H^2)^\alpha} &= \left( \frac{i}{(4\pi)^\omega} \right) \left[ \frac{Q^4 \Gamma(\alpha - \omega)}{\Gamma(\alpha) [-Q^2 - H^2]^{\alpha - \omega}} + \right. \\
&+ \frac{(2\omega + 2) Q^2 \Gamma(\alpha - \omega - 1)}{\Gamma(\alpha) [-Q^2 - H^2]^{\alpha - \omega - 1}} + \\
&\left. + \frac{\omega(\omega + 1) \Gamma(\alpha - \omega - 2)}{\Gamma(\alpha) [-Q^2 - H^2]^{\alpha - \omega - 2}} \right]. \tag{C.45}
\end{aligned}$$

É interessante notar que decorrem destes resultados as seguintes propriedades:

$$i) \int \frac{d^{2\omega}k}{(2\pi)^4} f(k^2) k_\mu = \text{zero} \tag{C.46}$$

$$ii) \int \frac{d^{2\omega}k}{(2\pi)^{2\omega}} k_\mu k_\nu f(k^2) = \frac{g_{\mu\nu}}{2\omega} \int \frac{d^{2\omega}k}{(2\pi)^{2\omega}} k^2 f(k^2) \tag{C.47}$$

$$iii) \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} k_\mu k_\nu k_\alpha k_\beta f(k^2) = \frac{1}{4\omega(\omega + 1)} (g_{\alpha\beta} g_{\mu\nu} + g_{\alpha\mu} g_{\beta\nu} + g_{\alpha\nu} g_{\beta\mu}) \int \frac{d^{2\omega}k}{(2\pi)^{2\omega}} k^4 f(k^2). \tag{C.48}$$

Os resultados deduzidos acima são suficientes para a solução de todas as integrais de Feynman consideradas no presente trabalho.

# Apêndice D

## Cálculo da função $Z_0$

Uma vez que todas as funções  $Z_k$  podem ser reduzidas a  $Z_0$ , consideramos neste apêndice o cálculo de forma explícita apenas da função  $Z_0$ , definida por

$$Z_0(\lambda_1^2, \lambda_2^2, p^2; \lambda^2) = \int_0^1 dz \ln \left( \frac{p^2 z(1-z) + (\lambda_1^2 - \lambda_2^2)z - \lambda_1^2}{-\lambda^2} \right). \quad (\text{D.1})$$

Um modo de efetuar a integração, e obter a forma explícita desta função, é através da introdução das raízes do polinômio de segundo grau que está no argumento do logaritmo. Fazemos

$$[p^2 z(1-z) + (\lambda_1^2 - \lambda_2^2)z - \lambda_1^2] = (-)p^2(z - \alpha)(z - \beta), \quad (\text{D.2})$$

onde:

$$\alpha = \frac{(p^2 + \lambda_1^2 - \lambda_2^2) + \sqrt{(p^2 + \lambda_1^2 - \lambda_2^2)^2 - 4\lambda_1^2 p^2}}{2p^2} \quad (\text{D.3})$$

e

$$\beta = \frac{(p^2 + \lambda_1^2 - \lambda_2^2) - \sqrt{(p^2 + \lambda_1^2 - \lambda_2^2)^2 - 4\lambda_1^2 p^2}}{2p^2}. \quad (\text{D.4})$$

As raízes  $\alpha$  e  $\beta$  satisfazem portanto as relações:

$$\alpha + \beta = \frac{(p^2 + \lambda_1^2 - \lambda_2^2)}{p^2}, \quad (\text{D.5})$$

$$\alpha - \beta = \frac{\sqrt{(p^2 + \lambda_1^2 - \lambda_2^2)^2 - 4\lambda_1^2 p^2}}{p^2} \quad (\text{D.6})$$

e

$$\alpha\beta = \frac{\lambda_1^2}{p^2}. \quad (\text{D.7})$$

Das expressões acima para as raízes  $\alpha$  e  $\beta$  podemos perceber que certas combinações dos parâmetros  $\lambda_1^2$  e  $\lambda_2^2$  com os valores de  $p^2$  resultarão em raízes  $\alpha$  e  $\beta$  complexas. Em termos das raízes  $\alpha$  e  $\beta$  escrevemos então:

$$\begin{aligned} Z_0(\lambda_1^2, \lambda_2^2, p^2; \lambda_2^2) &= \ln \left( \frac{p^2}{\lambda_2^2} \right) + \int_0^1 dz \ln ((z - \alpha)(z - \beta)) \\ &= \ln \left( \frac{p^2}{\lambda_2^2} \right) + \int_0^1 dz \ln (z - \alpha) + \int_0^1 dz \ln (z - \beta). \end{aligned} \quad (\text{D.8})$$

A partir do resultado simples

$$\int_0^1 dz \ln(z - \alpha) = \left[ \ln(1 - \alpha) - \alpha \ln\left(\frac{\alpha - 1}{\alpha}\right) - 1 \right], \quad (\text{D.9})$$

obtemos a forma

$$Z_0(\lambda_1^2, \lambda_2^2, p^2; \lambda_2^2) = \ln\left(\frac{p^2}{\lambda_2^2}\right) + \left\{ \ln(1 - \alpha)(1 - \beta) - 2 - \left[ \alpha \ln\left(\frac{\alpha - 1}{\alpha}\right) + \beta \ln\left(\frac{\beta - 1}{\beta}\right) \right] \right\}. \quad (\text{D.10})$$

Utilizando as propriedades das raízes  $\alpha$  e  $\beta$  temos:

$$\ln((1 - \alpha)(1 - \beta)) = \ln\left(\frac{\lambda_2^2}{p^2}\right) \quad (\text{D.11})$$

e também:

$$\begin{aligned} & \left[ \alpha \ln\left(\frac{\alpha - 1}{\alpha}\right) + \beta \ln\left(\frac{\beta - 1}{\beta}\right) \right] = \\ & = \left[ \frac{(\alpha + \beta)}{2} \ln\left(\frac{\alpha - 1}{\alpha} \frac{\beta - 1}{\beta}\right) + \frac{(\alpha - \beta)}{2} \ln\left(\frac{\alpha - 1}{\alpha} \frac{\beta}{\beta - 1}\right) \right] \quad (\text{D.12}) \\ & = \left\{ \frac{(p^2 + \lambda_1^2 - \lambda_2^2)}{2p^2} \ln\left(\frac{\lambda_2^2}{\lambda_1^2}\right) + \right. \\ & \left. + \frac{\sqrt{(p^2 + \lambda_1^2 - \lambda_2^2)^2 - 4\lambda_1^2 p^2}}{2p^2} \ln\left(\frac{(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 - p^2) + \sqrt{(p^2 + \lambda_1^2 - \lambda_2^2)^2 - 4\lambda_1^2 p^2}}{(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 - p^2) - \sqrt{(p^2 + \lambda_1^2 - \lambda_2^2)^2 - 4\lambda_1^2 p^2}}\right) \right\}. \quad (\text{D.13}) \end{aligned}$$

Com isso podemos escrever a forma explícita da função  $Z_0(\lambda_1^2, \lambda_2^2, p^2; \lambda_2^2)$ :

$$\begin{aligned} Z_0(\lambda_1^2, \lambda_2^2, p^2; \lambda_2^2) & = - \left\{ \frac{(p^2 + \lambda_1^2 - \lambda_2^2)}{2p^2} \ln\left(\frac{\lambda_2^2}{\lambda_1^2}\right) + 2 \right. \\ & \quad \left. + \frac{\sqrt{(p^2 + \lambda_1^2 - \lambda_2^2)^2 - 4\lambda_1^2 p^2}}{2p^2} \times \right. \\ & \quad \left. \times \ln\left(\frac{(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 - p^2) + \sqrt{(p^2 + \lambda_1^2 - \lambda_2^2)^2 - 4\lambda_1^2 p^2}}{(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 - p^2) - \sqrt{(p^2 + \lambda_1^2 - \lambda_2^2)^2 - 4\lambda_1^2 p^2}}\right) \right\}. \quad (\text{D.14}) \end{aligned}$$

A forma obtida para  $Z_0(\lambda_1^2, \lambda_2^2, p^2; \lambda_2^2)$  contém uma raiz quadrada de um polinômio de segundo grau em  $p^2$  em produto com um logaritmo. A parte imaginária da função deve vir da combinação deste produto em três situações distintas. A fim de verificar isto inicialmente consideremos a raiz. Inicialmente definimos

$$f(\lambda_1^2, \lambda_2^2, p^2) = \sqrt{(p^2 + \lambda_1^2 - \lambda_2^2)^2 - 4\lambda_1^2 p^2}. \quad (\text{D.15})$$

Notamos que

$$[(p^2 + \lambda_1^2 - \lambda_2^2)^2 - 4\lambda_1^2 p^2] = [p^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)^2] [p^2 - (\lambda_1 - \lambda_2)^2]. \quad (\text{D.16})$$

Portanto temos três representações para  $f(\lambda_1^2, \lambda_2^2, p^2)$  de acordo com a região de valores de  $p^2$ :

- i)  $p^2 < (\lambda_1 - \lambda_2)^2$ . Neste caso:

$$f(\lambda_1^2, \lambda_2^2, p^2) = \sqrt{(\lambda_1 - \lambda_2)^2 - p^2} \sqrt{(\lambda_1 + \lambda_2)^2 - p^2}. \quad (\text{D.17})$$

- ii)  $(\lambda_1 - \lambda_2)^2 < p^2 < (\lambda_1 + \lambda_2)^2$ . Aqui fica:

$$f(\lambda_1^2, \lambda_2^2, p^2) = i\sqrt{p^2 - (\lambda_1 - \lambda_2)^2}\sqrt{(\lambda_1 + \lambda_2)^2 - p^2}. \quad (\text{D.18})$$

- iii)  $p^2 > (\lambda_1 + \lambda_2)^2$ . Nesta região:

$$f(\lambda_1^2, \lambda_2^2, p^2) = \sqrt{p^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)^2}\sqrt{p^2 - (\lambda_1 - \lambda_2)^2}. \quad (\text{D.19})$$

Agora consideramos o logaritmo. Definindo,

$$g(\lambda_1^2, \lambda_2^2, p^2) = \ln \left\{ \frac{(\lambda_2^2 + \lambda_1^2 - p^2) + \sqrt{(p^2 + \lambda_1^2 - \lambda_2^2)^2 - 4\lambda_1^2 p^2}}{(\lambda_2^2 + \lambda_1^2 - p^2) - \sqrt{(p^2 + \lambda_1^2 - \lambda_2^2)^2 - 4\lambda_1^2 p^2}} \right\}, \quad (\text{D.20})$$

notamos que o argumento do logaritmo pode ser reescrito numa forma mais conveniente. Por exemplo:

$$(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 - p^2) - \sqrt{(p^2 - \lambda_2^2 + \lambda_1^2)^2 - 4\lambda_1^2 p^2} = \frac{1}{2} \left[ \sqrt{(\lambda_1 + \lambda_2)^2 - p^2} - \sqrt{(\lambda_1 - \lambda_2)^2 - p^2} \right]^2 \quad (\text{D.21})$$

e também:

$$(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 - p^2) + \sqrt{(p^2 - \lambda_2^2 + \lambda_1^2)^2 - 4\lambda_1^2 p^2} = \frac{1}{2} \left[ \sqrt{(\lambda_1 + \lambda_2)^2 - p^2} + \sqrt{(\lambda_1 - \lambda_2)^2 - p^2} \right]^2 \quad (\text{D.22})$$

tal que temos três representações para  $g(\lambda_1^2, \lambda_2^2, p^2)$ :

- i) Para  $p^2 < (\lambda_1 - \lambda_2)^2$ :

$$g(\lambda_1^2, \lambda_2^2, p^2) = 2 \ln \left\{ \frac{\sqrt{(\lambda_1 + \lambda_2)^2 - p^2} + \sqrt{(\lambda_1 - \lambda_2)^2 - p^2}}{\sqrt{(\lambda_1 + \lambda_2)^2 - p^2} - \sqrt{(\lambda_1 - \lambda_2)^2 - p^2}} \right\}. \quad (\text{D.23})$$

- ii) Para  $(\lambda_1 - \lambda_2)^2 < p^2 < (\lambda_1 + \lambda_2)^2$ :

$$g(\lambda_1^2, \lambda_2^2, p^2) = 2 \ln \left\{ \frac{\sqrt{(\lambda_1 + \lambda_2)^2 - p^2} + i\sqrt{p^2 - (\lambda_1 - \lambda_2)^2}}{\sqrt{(\lambda_1 + \lambda_2)^2 - p^2} - i\sqrt{p^2 - (\lambda_1 - \lambda_2)^2}} \right\}, \quad (\text{D.24})$$

que pode ser também identificada com:

$$g(\lambda_1^2, \lambda_2^2, p^2) = 4i \arctan \left\{ \frac{\sqrt{p^2 - (\lambda_1 - \lambda_2)^2}}{\sqrt{(\lambda_1 + \lambda_2)^2 - p^2}} \right\}. \quad (\text{D.25})$$

- iii) Para  $p^2 > (\lambda_1 + \lambda_2)^2$ :

$$g(\lambda_1^2, \lambda_2^2, p^2) = 2 \ln \left\{ \frac{\sqrt{p^2 - (\lambda_1 - \lambda_2)^2} + \sqrt{p^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)^2}}{\sqrt{p^2 - (\lambda_1 - \lambda_2)^2} - \sqrt{p^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)^2}} \right\}. \quad (\text{D.26})$$

Com os resultados obtidos para  $f(\lambda_1^2, \lambda_2^2, p^2)$  e  $g(\lambda_1^2, \lambda_2^2, p^2)$  nós podemos explicitar o produto de ambas nas três regiões consideradas. Definindo

$$h(\lambda_1^2, \lambda_2^2, p^2) = f(\lambda_1^2, \lambda_2^2, p^2)g(\lambda_1^2, \lambda_2^2, p^2), \quad (\text{D.27})$$

teremos as representações a seguir.

- i) Para  $p^2 < (\lambda_1 - \lambda_2)^2$ .

Nesta região de valores de  $p^2$  temos:

$$h(\lambda_1^2, \lambda_2^2, p^2) = 2\sqrt{(\lambda_1 - \lambda_2)^2 - p^2}\sqrt{(\lambda_1 + \lambda_2)^2 - p^2} \times \ln \left\{ \frac{\sqrt{(\lambda_1 + \lambda_2)^2 - p^2} + \sqrt{(\lambda_1 - \lambda_2)^2 - p^2}}{\sqrt{(\lambda_1 + \lambda_2)^2 - p^2} - \sqrt{(\lambda_1 - \lambda_2)^2 - p^2}} \right\}. \quad (\text{D.28})$$

ii) Para  $(\lambda_1 - \lambda_2)^2 < p^2 < (\lambda_1 + \lambda_2)^2$ .

Neste caso temos a representação:

$$h(\lambda_1^2, \lambda_2^2, p^2) = (-)4\sqrt{(\lambda_1 + \lambda_2)^2 - p^2}\sqrt{p^2 - (\lambda_1 - \lambda_2)^2} \arctan \left\{ \frac{\sqrt{p^2 - (\lambda_1 - \lambda_2)^2}}{\sqrt{(\lambda_1 + \lambda_2)^2 - p^2}} \right\}. \quad (\text{D.29})$$

iii) Para  $p^2 > (\lambda_1 + \lambda_2)^2$ :

Nesta região teremos

$$h(\lambda_1^2, \lambda_2^2, p^2) = 2\sqrt{p^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)^2}\sqrt{p^2 - (\lambda_1 - \lambda_2)^2} \times \ln \left\{ \frac{\sqrt{p^2 - (\lambda_1 - \lambda_2)^2} + \sqrt{p^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)^2}}{\sqrt{p^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)^2} - \sqrt{p^2 - (\lambda_1 - \lambda_2)^2}} \right\} + 2i\pi\sqrt{p^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)^2}\sqrt{p^2 - (\lambda_1 - \lambda_2)^2}. \quad (\text{D.30})$$

Em termos da função  $h(\lambda_1^2, \lambda_2^2, p^2)$  podemos escrever  $Z_0(\lambda_1^2, \lambda_2^2, p^2; \lambda_2^2)$  numa forma bastante simples e compacta:

$$Z_0(\lambda_1^2, \lambda_2^2, p^2; \lambda_2^2) = (-) \left\{ \frac{(p^2 + \lambda_1^2 - \lambda_2^2)}{2p^2} \ln \left( \frac{\lambda_2^2}{\lambda_1^2} \right) + 2 + \frac{h(\lambda_1^2, \lambda_2^2, p^2)}{2p^2} \right\}. \quad (\text{D.31})$$

Repetindo o procedimento podemos igualmente obter:

$$Z_1(\lambda_1^2, \lambda_2^2, p^2; \lambda_2^2) = (-) \left\{ \frac{(p^2 + \lambda_1^2 - \lambda_2^2)}{2p^2} + \frac{1}{2} + \frac{[(p^2 + \lambda_1^2 - \lambda_2^2) - 2\lambda_1^2 p^2]}{4p^4} \ln \left( \frac{\lambda_2^2}{\lambda_1^2} \right) + \frac{(p^2 + \lambda_1^2 - \lambda_2^2)}{4p^4} h(\lambda_1^2, \lambda_2^2, p^2) \right\} \quad (\text{D.32})$$

e também

$$Z_2(\lambda_1^2, \lambda_2^2, p^2; \lambda_2^2) = (-) \left\{ \frac{(p^2 + \lambda_1^2 - \lambda_2^2)}{6p^2} + \frac{2}{9} + \frac{[(p^2 + \lambda_1^2 - \lambda_2^2)^2 - 2\lambda_1^2 p^2]}{3p^4} + \frac{(p^2 + \lambda_1^2 - \lambda_2^2)}{2p^2} \frac{[(p^2 + \lambda_1^2 - \lambda_2^2)^2 - 3\lambda_1^2 p^2]}{3p^4} \ln \left( \frac{\lambda_2^2}{\lambda_1^2} \right) + \frac{[(p^2 + \lambda_1^2 - \lambda_2^2)^2 - \lambda_1^2 p^2]}{6p^6} h(\lambda_1^2, \lambda_2^2, p^2) \right\}. \quad (\text{D.33})$$

Podemos então perceber importantes características das funções  $Z_k(\lambda_1^2, \lambda_2^2, p^2; \lambda_2^2)$ :

- As funções desenvolvem uma parte complexa para  $p^2 > (\lambda_1 + \lambda_2)^2$ . Desta forma, para  $k = 0$ ,

$$Im[Z_0(\lambda_1^2, \lambda_2^2, p^2; \lambda_2^2)] = 2\pi\Theta(p^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)^2) \frac{\sqrt{p^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)^2}\sqrt{p^2 - (\lambda_1 - \lambda_2)^2}}{2p^2}. \quad (\text{D.34})$$

Para valores crescentes de  $k$  a forma acima aparecerá multiplicada por um polinômio, bem comportado, cuja ordem cresce com o valor de  $k$ .

- A parte imaginária das funções surge no ponto  $p^2 = (\lambda_1 + \lambda_2)^2$  a partir do valor zero.
- As funções  $Z_k(\lambda_1^2, \lambda_2^2, p^2; \lambda_2^2)$  são contínuas em ambos os pontos  $p^2 = (\lambda_1 - \lambda_2)^2$  e  $p^2 = (\lambda_1 + \lambda_2)^2$ .
- A derivada de  $Z_k(\lambda_1^2, \lambda_2^2, p^2; \lambda_2^2)$  é indefinida no ponto  $p^2 = (\lambda_1 + \lambda_2)^2$ .
- As funções são bem comportadas em  $p^2 = 0$ , ainda que não o sejam termo a termo. Isto recomenda cuidados na tomada de valores próximos a  $p^2 = 0$ .



# Apêndice E

## Cálculo da função $Y_0$

Ainda que existam relações entre as funções  $Z'_k$ s com as funções  $Y'_k$ s, é interessante considerarmos formas explícitas destas funções devido ao papel que desempenham na discussão de alguns aspectos importantes das amplitudes envolvendo o termo dependente do parâmetro de “gauge” do propagador do fóton na EDQ. Assim consideremos o cálculo

$$Y_0(\lambda_1^2, \lambda_2^2, p^2; \lambda^2) = (-\lambda^2) \int_0^1 \frac{dz(1-z)}{[p^2 z(1-z) + (\lambda_1^2 - \lambda_2^2)z - \lambda_1^2]}, \quad (\text{E.1})$$

que pode ser escrita como

$$Y_0(\lambda_1^2, \lambda_2^2, p^2; \lambda^2) = \frac{\lambda^2}{p^2} \int_0^1 \frac{dz(1-z)}{(z-\alpha)(z-\beta)}, \quad (\text{E.2})$$

onde  $\alpha$  e  $\beta$  são as já conhecidas raízes do polinômio. Colocando noutra forma

$$Y_0(\lambda_1^2, \lambda_2^2, p^2; \lambda^2) = \frac{\lambda^2}{p^2} \frac{1}{\alpha - \beta} \left\{ \int_0^1 \frac{dz(1-z)}{(z-\alpha)} - \int_0^1 \frac{dz(1-z)}{(z-\beta)} \right\}. \quad (\text{E.3})$$

Agora utilizando as relações:

$$\int_0^1 \frac{dz}{(z-\alpha)} = \left[ \ln \left( \frac{\alpha-1}{\alpha} \right) \right] \quad (\text{E.4})$$

e

$$\int_0^1 \frac{dz z}{(z-\alpha)} = \left[ 1 + \ln \left( \frac{\alpha-1}{\alpha} \right) \right] \quad (\text{E.5})$$

teremos:

$$\begin{aligned} Y_0(\lambda_1^2, \lambda_2^2, p^2; \lambda^2) &= \frac{\lambda^2}{p^2} \left\{ \frac{1}{\alpha - \beta} \left[ \ln \left( \frac{\alpha-1}{\alpha} \right) - \ln \left( \frac{\beta-1}{\beta} \right) \right] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\alpha - \beta} \left[ \alpha \ln \left( \frac{\alpha-1}{\alpha} \right) - \beta \ln \left( \frac{\beta-1}{\beta} \right) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (\text{E.6})$$

Repetindo o procedimento utilizado no caso da função  $Z_k$  (Apêndice D), obtemos

$$Y_0(\lambda_1^2, \lambda_2^2, p^2; \lambda^2) = \frac{\lambda^2}{p^2} \left\{ \ln \left( \frac{\lambda_1^2}{\lambda_2^2} \right) + (p^2 - \lambda_1^2 + \lambda_2^2) \frac{g(\lambda_1^2, \lambda_2^2, p^2)}{f(\lambda_1^2, \lambda_2^2, p^2)} \right\}. \quad (\text{E.7})$$

De modo semelhante

$$Y_1(\lambda_1^2, \lambda_2^2, p^2; \lambda^2) = \frac{\lambda^2}{p^2} \left\{ -1 + \frac{(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)}{2p^2} \ln \left( \frac{\lambda_1^2}{\lambda_2^2} \right) + \frac{(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)(p^2 - \lambda_2^2 + \lambda_1^2) + 2\lambda_1^2 p^2 g(\lambda_1^2, \lambda_2^2, p^2)}{2p^2 f(\lambda_1^2, \lambda_2^2, p^2)} \right\} \quad (\text{E.8})$$

e também

$$Y_2(\lambda_1^2, \lambda_2^2, p^2; \lambda^2) = \frac{\lambda^2}{p^2} \left\{ \frac{1}{2} - \frac{(p^2 + \lambda_1^2 - \lambda_2^2)}{p^2} + \left[ \frac{(p^2 + \lambda_1^2 - \lambda_2^2)}{2p^2} - \frac{(p^2 + \lambda_1^2 - \lambda_2^2)^2}{2p^4} + \frac{\lambda_1^2}{2p^2} \right] \ln \left( \frac{\lambda_2^2}{\lambda_1^2} \right) + \left[ \frac{(p^2 + \lambda_1^2 - \lambda_2^2)^2}{2p^2} - \lambda_1^2 - \frac{(p^2 + \lambda_1^2 - \lambda_2^2)^3}{2p^4} + \frac{3(p^2 + \lambda_1^2 - \lambda_2^2)\lambda_1^2}{2p^2} \right] \frac{g(\lambda_1^2, \lambda_2^2, p^2)}{f(\lambda_1^2, \lambda_2^2, p^2)} \right\}. \quad (\text{E.9})$$

Das formas acima podemos observar características importantes para as funções  $Y_k(\lambda_1^2, \lambda_2^2, p^2; \lambda^2)$ :

- As funções possuem uma parte imaginária. Para  $k = 0$ , por exemplo

$$\text{Im}[Y_0(\lambda_1^2, \lambda_2^2, p^2; \lambda^2)] = \frac{2\pi\lambda^2}{p^2} \frac{(p^2 - \lambda_2^2 + \lambda_2^2)\Theta(p^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)^2)}{\sqrt{p^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)^2} \sqrt{p^2 - (\lambda_1 - \lambda_2)^2}}, \quad (\text{E.10})$$

cujo coeficiente torna-se um polinômio de ordem crescente com o valor de  $k$ .

- As funções são contínuas no ponto  $p^2 = (\lambda_1 - \lambda_2)^2$ , mas são descontínuas no ponto  $p^2 = (\lambda_1 + \lambda_2)^2$ . O valor destas funções neste último ponto não está definido.
- A parte imaginária destas funções surge no ponto  $p^2 = (\lambda_1 + \lambda_2)^2$  a partir de um valor infinito (indefinido).
- As funções são bem comportadas em  $p^2 = 0$ , ainda que não o sejam termo a termo. A convergência torna-se dificultada a medida que  $k$  aumenta.

Das expressões obtidas podem ser estabelecidas relações envolvendo as funções  $Y_k$  com outras de valores menores de  $k$ . Como tal

$$Y_1(\lambda_1^2, \lambda_2^2, p^2; \lambda^2) = \frac{(p^2 + \lambda_1^2 - \lambda_2^2)}{2p^2} [Y_0(\lambda_1^2, \lambda_2^2, p^2; \lambda^2)] + \frac{\lambda^2}{2p^2} [Z_0(\lambda_1^2, \lambda_2^2, p^2; \lambda^2)] \quad (\text{E.11})$$

e

$$Y_2(\lambda_1^2, \lambda_2^2, p^2; \lambda^2) = \frac{(p^2 + \lambda_1^2 - \lambda_2^2)}{2p^2} [Y_1(\lambda_1^2, \lambda_2^2, p^2; \lambda^2)] - \frac{\lambda^2}{2p^2} [Z_0(\lambda_1^2, \lambda_2^2, p^2; \lambda^2) - 2Z_1(\lambda_1^2, \lambda_2^2, p^2; \lambda^2)] \quad (\text{E.12})$$

Esta última pode ser reescrita pela eliminação de  $Y_1$  em favor de  $Y_0$  e pela eliminação de  $Z_1$  em favor de  $Z_0$ .

# Apêndice F

## Redução da função $\xi_{01}$

No capítulo 4 apresentamos uma série de relações e propriedades entre as funções  $\xi_{nm}(q^2, p^2; m^2)$ . Tais relações são muito úteis, por exemplo, no estudo das relações entre funções de Green. Para chegarmos a tais propriedades é necessário que façamos a redução de  $\xi'$ s com  $m + n$  para  $m' + n'$  menores. Vamos considerar neste apêndice o desenvolvimento explícito de uma destas reduções.

Consideremos inicialmente a definição

$$\xi_{01}(q^2, p^2; m^2) = \int_0^1 dz \int_0^{1-z} dy \frac{y}{Q(y, z)} \quad (\text{F.1})$$

onde:

$$Q(y, z) = p^2 y(1 - y) + q^2 z(1 - z) + -2(p \cdot q) yz - m^2. \quad (\text{F.2})$$

Notamos inicialmente que

$$\frac{\partial}{\partial y} [Q(y, z)] = p^2(1 - 2y) - 2(p \cdot q) z \quad (\text{F.3})$$

e

$$\frac{\partial}{\partial z} [Q(y, z)] = q^2(1 - 2z) - 2(p \cdot q) y. \quad (\text{F.4})$$

Com base nestes resultados vamos completar a integral de modo a obter:

$$\begin{aligned} \xi_{01}(q^2, p^2; m^2) &= \frac{1}{(-2p^2)} \int_0^1 dz \int_0^{1-z} dy \frac{\partial}{\partial y} [\ln Q(y, z)] \\ &+ \frac{1}{2} \int_0^1 dz \int_0^{1-z} dy \frac{1}{Q(y, z)} \\ &- \frac{(p \cdot q)}{p^2} \int_0^1 dz \int_0^{1-z} dy \frac{z}{Q(y, z)}. \end{aligned} \quad (\text{F.5})$$

A primeira é uma diferencial total em  $y$ . Quanto à segunda, é possível identificar a função  $\xi_{00}(q^2, p^2; m^2)$ .

Para a terceira completamos novamente o integrando e então obtemos:

$$\begin{aligned}
\xi_{01}(q^2, p^2; m^2) &= \frac{1}{(-2p^2)} \int_0^1 dz [\ln Q(1-z, z) - \ln Q(0, z)] \\
&+ \frac{1}{2} \xi_{00}(q^2, p^2; m^2) \\
&+ \frac{(p \cdot q)}{2p^2 q^2} \int_0^1 dz \int_0^{1-z} dy \left[ \left( \frac{1}{Q(y, z)} \right) \frac{\partial}{\partial z} Q(y, z) \right] \\
&- \frac{(p \cdot q)}{2p^2} \int_0^1 dz \int_0^{1-z} dy \frac{1}{Q(y, z)} \\
&+ \frac{(p \cdot q)^2}{2p^2 q^2} \int_0^1 dz \int_0^{1-z} dy \frac{y}{Q(y, z)}. \tag{F.6}
\end{aligned}$$

Notando que,

$$Q(1-z, z) = (p-q)^2 z(1-z) - m^2 \tag{F.7}$$

$$Q(0, z) = q^2 z(1-z) - m^2. \tag{F.8}$$

e usando as definições das funções  $Z'_k$ s introduzidas no capítulo 4, chegamos a expressão.

$$\begin{aligned}
\xi_{01}(q^2, p^2; m^2) &= \frac{1}{(-2p^2)} \left[ Z_0 \left( (p-q)^2; m^2 \right) - Z_0 \left( q^2; m^2 \right) \right] \\
&+ \frac{1}{2} \xi_{00}(q^2, p^2; m^2) \\
&+ \frac{(p \cdot q)}{2p^2 q^2} \int_0^1 dz \int_0^{1-z} dy \frac{\partial}{\partial z} [\ln Q(y, z)] \\
&- \frac{(p \cdot q)}{2p^2} \xi_{00}(q^2, p^2; m^2) \\
&+ \frac{(p \cdot q)^2}{2p^2 q^2} \xi_{01}(q^2, p^2; m^2). \tag{F.9}
\end{aligned}$$

Para completar o cálculo devemos considerar a solução da integral

$$I^* = \int_0^1 dz \int_0^{1-z} dy \frac{\partial}{\partial z} [\ln Q(y, z)]. \tag{F.10}$$

Primeiro escrevemos

$$Q(y, z) = (-p^2)(y-\alpha)(y-\beta) \tag{F.11}$$

onde  $\alpha$  e  $\beta$  são raízes do polinômio

$$y^2 - y + \frac{2(p \cdot q)}{p^2} yz - \frac{[q^2 z(1-z) - m^2]}{p^2}. \tag{F.12}$$

Teremos então

$$I^* = \int_0^1 dz \int_0^{1-z} dy \frac{\partial}{\partial z} [\ln(-p^2) + \ln(y-\alpha) + \ln(y-\beta)]. \tag{F.13}$$

Em seguida escrevemos isto como

$$\begin{aligned}
I^* &= \int_0^1 dz \int_0^{1-z} dy \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \frac{\partial}{\partial y} [\ln(-p^2)y \right. \\
&+ (y-\alpha) \ln(y-\alpha) - (y-\alpha) \\
&+ (y-\beta) \ln(y-\beta) - (y-\beta)] \left. \right\}. \tag{F.14}
\end{aligned}$$

Então

$$\begin{aligned}
I^* &= \int_0^1 dz \int_0^{1-z} dy \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \frac{\partial}{\partial z} [\ln(-p^2)y \right. \\
&\quad \left. + (y - \alpha) \ln(y - \alpha) - (y - \alpha) \right. \\
&\quad \left. + (y - \beta) \ln(y - \beta) - (y - \beta) \right\}, \tag{F.15}
\end{aligned}$$

o que nos leva a

$$\begin{aligned}
I^* &= \int_0^1 dz \left\{ \left[ \frac{\partial}{\partial z} [\ln(-p^2)y] \right]_0^{1-z} \right. \\
&\quad \left. + \left[ \frac{\partial}{\partial z} ((y - \alpha) \ln(y - \alpha) - (y - \alpha)) \right]_0^{1-z} \right. \\
&\quad \left. + \left[ \frac{\partial}{\partial z} (y - \beta) \ln(y - \beta) - (y - \beta) \right]_0^{1-z} \right\} \tag{F.16}
\end{aligned}$$

e assim

$$\begin{aligned}
I^* &= \int_0^1 dz \left\{ [0] \right. \\
&\quad \left. + \frac{\partial}{\partial z} [-\alpha(z)] \ln[1 - z - \alpha(z)] + \frac{\partial}{\partial z} [\alpha(z)] \ln[-\alpha(z)] \right. \\
&\quad \left. + \frac{\partial}{\partial z} [-\beta(z)] \ln[1 - z - \beta(z)] + \frac{\partial}{\partial z} [\beta(z)] \ln[-\beta(z)] \right\}. \tag{F.17}
\end{aligned}$$

Tomando apenas o termo em  $\alpha(z)$  para facilitar, notamos que

$$\begin{aligned}
I^* [\alpha(z)] &= \int_0^1 dz \left\{ \frac{\partial}{\partial z} [-\alpha(z)] \ln[1 - z - \alpha(z)] \right\} \\
&\quad + \int_0^1 dz \left\{ \frac{\partial}{\partial z} [\alpha(z)] \ln[-\alpha(z)] \right\}. \tag{F.18}
\end{aligned}$$

Completando as derivadas e integrando podemos escrever

$$\begin{aligned}
I^* [\alpha(z)] &= \int_0^1 dz \frac{\partial}{\partial z} \{ [1 - z - \alpha(z)] \ln[1 - z - \alpha(z)] - [1 - z - \alpha(z)] \} \\
&\quad - \int_0^1 dz \left\{ \left( \frac{\partial}{\partial z} [1 - z] \right) \ln[1 - z - \alpha(z)] \right\} \\
&\quad + \int_0^1 dz \frac{\partial}{\partial z} \{ [\alpha(z)] \ln[-\alpha(z)] - [\alpha(z)] \}. \tag{F.19}
\end{aligned}$$

Com isso encontramos:

$$\begin{aligned}
I^* [\alpha(z)] &= \int_0^1 dz \frac{\partial}{\partial z} \{ [1 - z - \alpha(z)] \ln[1 - z - \alpha(z)] - [1 - z - \alpha(z)] \\
&\quad + [\alpha(z)] \ln[-\alpha(z)] - [\alpha(z)] \} \\
&\quad + \int_0^1 dz \{ \ln[1 - z - \alpha(z)] \} \tag{F.20}
\end{aligned}$$

e, por conseguinte,

$$\begin{aligned}
I^* [\beta(z)] &= \int_0^1 dz \frac{\partial}{\partial z} \{ [1 - z - \beta(z)] \ln[1 - z - \beta(z)] - [1 - z - \beta(z)] \\
&\quad + [\beta(z)] \ln[-\beta(z)] - [\beta(z)] \} \\
&\quad + \int_0^1 dz \{ \ln[1 - z - \beta(z)] \}. \tag{F.21}
\end{aligned}$$

Reunindo ambos os termos teremos:

$$\begin{aligned}
I^* &= \{[1 - z - \alpha(z)] \ln [1 - z - \alpha(z)] - [1 - z - \alpha(z)] + [\alpha(z)] \ln [-\alpha(z)] - [\alpha(z)]\}_0^1 \\
&\quad \{[1 - z - \beta(z)] \ln [1 - z - \beta(z)] - [1 - z - \beta(z)] + [\beta(z)] \ln [-\beta(z)] - [\beta(z)]\}_0^1 \\
&\quad + \int_0^1 dz \{\ln [1 - z - \alpha(z)]\} \\
&\quad + \int_0^1 dz \{\ln [1 - z - \beta(z)]\}. \tag{F.22}
\end{aligned}$$

Uma vez substituidos os limites superior e inferior, reorganizamos o resultado na forma:

$$\begin{aligned}
I^* &= -\ln [1 - \alpha(0)] - \ln [1 - \beta(0)] + 2 \\
&\quad + \alpha(0) \ln \left[ \frac{1 - \alpha(0)}{-\alpha(0)} \right] \\
&\quad + \beta(0) \ln \left[ \frac{1 - \beta(0)}{-\beta(0)} \right] \\
&\quad + \int_0^1 dz \{[\ln [1 - z - \alpha(z)]] [\ln [1 - z - \beta(z)]]\}. \tag{F.23}
\end{aligned}$$

Lembrando que  $\alpha(z)$  e  $\beta(z)$  são as raízes do polinômio (F.12), temos,

$$\alpha(z) = -\frac{[2(p \cdot q)z - p^2]}{2p^2} + \frac{1}{2p^2} \sqrt{[2(p \cdot q)z - p^2]^2 - 4Q(z)p^2} \tag{F.24}$$

$$\beta(z) = -\frac{[2(p \cdot q)z - p^2]}{2p^2} - \frac{1}{2p^2} \sqrt{[2(p \cdot q)z - p^2]^2 - 4Q(z)p^2} \tag{F.25}$$

onde

$$Q(z) = q^2 z(1 - z) - m^2. \tag{F.26}$$

Consequentemente

$$\alpha(0) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{1 - \frac{4m^2}{p^2}} \tag{F.27}$$

$$\beta(0) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{1 - \frac{4m^2}{p^2}}. \tag{F.28}$$

Também teremos

$$\alpha(1) = -\frac{[2(p \cdot q) - p^2]}{2p^2} + \frac{1}{2p^2} \sqrt{[2(p \cdot q) - p^2]^2 - 4m^2p^2} \tag{F.29}$$

$$\beta(1) = -\frac{[2(p \cdot q) - p^2]}{2p^2} - \frac{1}{2p^2} \sqrt{[2(p \cdot q) - p^2]^2 - 4m^2p^2}. \tag{F.30}$$

Além disso  $\alpha(z)$  e  $\beta(z)$  satisfazem as seguintes propriedades:

$$\alpha(z) + \beta(z) = -\frac{[2(p \cdot q) - p^2]}{p^2}, \tag{F.31}$$

$$\alpha(z) - \beta(z) = \frac{1}{p^2} \sqrt{[2(p \cdot q) - p^2]^2 - 4m^2p^2} \tag{F.32}$$

e

$$\alpha(z)\beta(z) = \frac{-Q(z)}{p^2}. \tag{F.33}$$

Por sua vez,  $\alpha(0)$  e  $\beta(0)$  satisfazem a

$$\alpha(0) + \beta(0) = 1, \quad (\text{F.34})$$

$$\alpha(0) - \beta(0) = \sqrt{1 - \frac{4m^2}{p^2}} \quad (\text{F.35})$$

e

$$\alpha(0)\beta(0) = \frac{-m^2}{p^2}. \quad (\text{F.36})$$

A partir desses resultados notamos que.

$$1 - \alpha(0) = \beta(0) \quad (\text{F.37})$$

e

$$1 - \beta(0) = \alpha(0). \quad (\text{F.38})$$

Com isso voltamos para a Eq.(F.23), para obter:

$$\begin{aligned} I^* &= \sqrt{\frac{p^2 - 4m^2}{p^2}} \ln \left[ -\frac{\beta(0)}{\alpha(0)} \right] + 2 \\ &+ \int_0^1 dz \{ \ln [[1 - z - \alpha(z)][1 - z - \beta(z)]] \} - \ln \left( \frac{m^2}{p^2} \right). \end{aligned} \quad (\text{F.39})$$

Usando a identidade

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{p^2 - 4m^2}{p^2}} \ln \left[ -\frac{\beta(0)}{\alpha(0)} \right] + 2 &= \int_0^1 dz \ln \left( \frac{p^2 z(1-z) - m^2}{-m^2} \right) \\ &= -Z_0(p^2; m^2), \end{aligned} \quad (\text{F.40})$$

e ainda

$$\ln \{ [1 - z - \alpha(z)][1 - z - \beta(z)] \} = \ln \left\{ \left[ \frac{(q-p)^2 z(1-z) - m^2}{-m^2} \right] \left[ \frac{m^2}{p^2} \right] \right\}, \quad (\text{F.41})$$

nós obtemos finalmente

$$I^* = -Z_0(p^2; m^2) + Z_0((q-p)^2; m^2). \quad (\text{F.42})$$

De posse deste resultado retornamos à expressão (F.9). Teremos portanto

$$\begin{aligned} \xi_{01}(q^2, p^2; m^2) &= \left[ \frac{p^2 q^2}{p^2 q^2 - (p \cdot q)^2} \right] \left\{ - \left[ \frac{1}{2p^2} - \frac{(p \cdot q)}{2p^2 q^2} \right] Z_0((p-q)^2; m^2) \right. \\ &+ \frac{1}{2p^2} Z_0(q^2; m^2) \\ &- \frac{(p \cdot q)}{2p^2 q^2} Z_0(p^2; m^2) \\ &\left. + \left[ \left( \frac{q^2}{2} \right) - \frac{(p \cdot q)}{p^2} \left( \frac{q^2}{2q^2} \right) \right] \xi_{00}(q^2, p^2; m^2) \right\}. \end{aligned} \quad (\text{F.43})$$

Que é o resultado desejado. As outras reduções das funções  $\xi_{nm}$  utilizadas neste trabalho podem ser obtidas de modo completamente análogo.

# Bibliografia

- [1] •S. Weinberg, “The Quantum Theory of Fields”, Cambridge University Press, (1996);
- P. Ramond; “Field Theory: A modern Primer” Addison-Wesley (1990);
  - C. Itzykson and J.B. Zuber; “Quantum Field Theory”, McGraw-Hill, New York (1980);
  - R.P. Feynman, “Quantum Electrodynamics”, Frontiers on Physics Lecture note Series, Addison-Wesley (1961)
  - F.Gross, “Relativistic Quantum Mechanics and Field Theory”, John Wiley and Sons, (1993);
  - P.H. Frampton, “Field Theories”, Benjamin Cummings Publishing Company (1987);
  - B. de Witt and J. Smith, Field Theory in Particle Physics, North-Holland Physics Publishing, Amsterdam (1986);
  - D.Lurié, “Particles and Fields”, Interscience, New York (1968);
  - F.Mandl and G.Shaw, “Quantum Field Theory”, Wiley, New York (1984);
- [2] •W.E.Lamb and R.C.Rutherford, Phys.Rev. **72**, 241(1947);
- B.E.Lautrup, A.Peterman and E.de Rafael, Phys. Rep. **3C**, 193 (1972);
  - J.Schwinger, Phys. Rev. **73**, 416 (1948);
  - P.Kusch and H. Foley, Phys. Rev. **72**, 1256 (1946);
  - P.Kusch and H. Foley, Phys. Rev. **73**, 412 (1948);
  - S.J.Brodsky, SLAC preprint SLAC-PUB-1699 (1975);
  - T.Kinoshita, “Quantum Electrodynamics”, World Scientific, Singapore (1990);
  - A.Akhiezer and V.B.Berestetskii, “Quantum Electrodynamics”, Interscience, New York (1965);
  - J.M. Jauch and F.Rohrlich, “The Theory of Photons and Electrons”, Springer Verlag Berlin (1976);
  - G.Kallen, “Quantum Electrodynamics”, Springer Verlag, Berlin (1972);
  - V.B.Berestetskii, E.M.Lifshitz and L.P.Pitaevskii, “Relativistic Quantum Theory”, Pergamon Press, Oxford (1971);
  - J.Schwinger, “Quantum Electrodynamics”, Dover, New York (1958);



- W.Greiner and J.Reinhardt: “Quantum Electrodynamics”, Springer Verlag, Heidelberg (1994);
  - N.N.Bogoliubov and D.V. Shirkov, “Introduction to the Theory of Quantized Fields”, Wiley-Interscience (1959);
- [3] •R.P. Feynman, Rev. Mod. Phys. **20**, 37 (1948);
- R.P. Feynman, Phys. Rev. **84**, 123 (1951);
  - R.P. Feynman, Phys. Rev. **76**, 749 (1949);
  - R.P. Feynman, Phys. Rev. **76**, 769 (1949);
  - R.P. Feynman, Phys. Rev. **74**, 939 (1948);
  - J.Schwinger, Phys. Rev. **73**, 416 (1948);
  - J.Schwinger, Phys. Rev. **75**, 898 (1949);
  - S.Tomonoga, Phys. Rev. **74**, 224 (1948);
  - F.J.Dyson, Phys. Rev. **75**, 486 (1949);
  - N.N.Bogolinbov and D.S.Parasiuk, Acta. Math. **97**, 227 (1957);
  - K.Hepp. Comm. Math. Phys. **2**, 301 (1966);
  - W.Zimmermann, “In Lectures on Elementary Particles and Quantum Field theory”, Proc. 1970 Brandeis Summer Institute (ed. S. Desser et al.) MIT Press, cambridge, Massachusetts (1970);
  - J.Collins, Renormalization, Cambridge University Press, New York (1992);
- [4] •R.Utiyama, Phys.Rev. **101**, 1597 (1956);
- E.Abers and B.W.Lee, “Gauge Theories”, Phys. Rep. **9C**, 1 (1973);
  - S.Weinberg, Phys.Rev. **166**, 1568 (1968);
  - S.Coleman, J.Wess and B.Zumino, Phys. Rev. **177**, 2239 (1969);
  - C.G.Callan Jr, S.Coleman, J.Wess and B.Zumino, Phys. Rev. **177**, 2247 (1969);
- [5] •J.C. Ward Phys. Rev. **78**, 1824 (1950);
- Y. Takahashi, Nuovo Cimento **6**, 370 (1957);
  - J.C. Ward, Proc. Phys. Soc. **64**, 54 (1951);
  - C. Becchi, A. Rouet and R. Stora, Comm. Math. Phys. **42**, 127 (1975);
  - J.C. Taylor, Nucl. Phys. **B33**, 436 (1971);
  - A.A. Slavnov, Theor. and Math. Phys. **10**, 99 (1972);
  - O.Piguet and S.P. Sorela, “Algebraic Renormalization”, Lecture Notes on Physics **28** Springer-Vetlag (1995);

- [6] •W.Pauli and F.Villars, Rev. Mod. Phys. **21**, 434 (1949);
- [7] •t'Hooft and Veltman, Nucl. Phys. **B44**, 189 (1972);
- C. G. Bollini and J.J. Giambiagi, Phys. Lett. **40B**, 566 (1972);
  - G.M. Cicuta and E. Montaldi, Nuovo Cimento Lett. **4**, 329 (1972);
  - J.F. Ashmore, Nuovo Cimento Lett. **4**, 289 (1972);
  - E.R. Speer and M.J. Westwater, Ann. Inst. Henri Poincaré **A14**, 1 (1971);
  - P.H. Frampton, “ Field Theories, Benjamin Cummings Publishing Company (1987),Capítulo XX;
  - B. de Witt and J. Smith, Field Theory in Particle Physics, North-Holland Physics Publishing, Amsterdam (1986), Capítulo XX;
  - M.E. Fisher and D.S. Gaunt, Phys. Rev. **133**, 224 (1964);
  - K.G. Wilson and M.E. Fisher Phys. Rev. Lett. **28**, 240 (1972);
  - K.G. Wilson, Phys. Rev. **07**, 2911 (1973);
  - K.G. Wilson and J. Kogut, Phys. Rep. **12**, 75 (1974);
- [8] •G.Leibrant Rev. Mod. Phys. **47** (849) 1975;
- B. de Witt and J. Smith, Field Theory in Particle Physics, North-Holland Physics Publishing, Amsterdam (1986), Capítulo XX;
  - P. Ramond; “Field Theory: A Modern Primer” Addison-Wesley (1990), Capítulo XX.
- [9] • Treiman, S.L., Jackiw, R. and Gross, D.J. “Lectures on Current Algebra and its Applications”, Princeton University Press, Princeton, New York (1972);
- S.Pokorski: “ Field Theory”, Cambridge University Press, Cambridge (1987)
  - T.P. Cheng and L.F. Li, “ Theory of Elementary Particle Physics” , Oxford University Press, New York (1984)
  - K. Huang, “Quarks, Leptons and Fields”, World Scientific (1992);
  - P.H. Frampton, “ Field Theories”, Benjamin Cummings Publishing Company (1987);
- [10] •t'Hooft and Veltman, Nucl. Phys. **B44**, 189 (1972);
- W.A. Bardeen, in Proceedings XVI International Conference on High Energy Physics (National Accelerator Lab., Battavia, IL)(1972);
  - M. Chanowitz, M. Furman and I. Hinchliffe, Nucl. Phys. **B159**, 225 (1979);
  - P. Breitenlohner and D. Maison, Comm. Math. Phys. **52**, 11 (1977);
  - P. Ramond; Field Theory: A modern Primer Addison-Wesley (1990);
  - P.H. Frampton, “ Field Theories, Benjamin Cummings Publishing Company (1987);

- [11] •G.Leibrant Rev. Mod. Phys. **47** (849) 1975;
- R. Gastmans and R. Mensdermans, Nucl. Phys. **B105**, 454 (1973);
  - R. Gastmans, J. Verwaest and R. Mensdermans, Nucl. Phys. **B105**, 454 (1976);
  - W. Marciano and A.Sirlin Nucl. Phys. **B88**, 86 (1975);
- [12] •S.L.Glashow, Nucl. Phys. **22**, 579 (1961);
- S. Weinberg, Phys. Rev. Lett. **19**, 1264 (1967);
  - A. Salam, Elementary Particle Theory, Stockholm (1968);
  - G.t'Hooft, Nucl. Phys. **B33**, 436 (1971);
  - G.t'Hooft, Nucl. Phys. **B35**, 167 (1971);
  - G.t'Hooft, Nucl. Phys. **B61**, 455 (1973);
  - G.t'Hooft and Veltman, Nucl. Phys. **B44**, 189 (1972);
  - G.t'Hooft and Veltman, Nucl. Phys. **B50**, 318 (1972);
  - S.L.Glashow, J.Iliopoulos and L.Maiani, Phys. Rev **D2**, 652 (1970);
  - A. Salam and J.C. Ward, phys.Lett. **19**,168 (1964);
  - D.J. Gross and F.Wilczek, Phys. Rev. **D8**, 3633 (1973);
  - H.D.Politzer, Phys. Rev. Lett. **26**, 1346(1973);
  - H.Georgi and S.L.Glashow, Phys.Rev. **D6**, 429 (1972);
  - H.Georgi and S.L.Glashow, Phys.Rev. Lett. **32**, 438 (1974);
  - K.G.Wilson and J.Kogut, Phys. Rep. **12C**, 75 (1974);
  - H.M.Georgi, H.R.Quinn and S.Weiberg, Phys. Rev. Lett. **33**, 451 (1974);
  - K.G.Wilson,Phys. Rev. **D10**, 2445 (1974);
  - S. Weinberg, “The Quantum Theory of Fields”, Cambridge University Press, (1996);
  - T.P. Cheng and L.F. Li, “ Theory of Elementary Particle Physics”, Oxford University Press, New York (1984)
  - P.H. Frampton, “Field Theories”, Benjamin Cummings Publishing Company (1987) ;
- [13] •O.A. Battistel, *PhD Thesis 1999*, Universidade Federal de Minas Gerais, Brazil.
- O.A. Battistel and M.C. Nemes, Phys. Rev. **D59** (1999), 055010.
  - O.A. Battistel and G. Dallabona, Nucl. Phys. **B610** 317 (2001).
  - O.A. Battistel and G. Dallabona, J. Phys. **G27** L53-L60 (2001).
  - O. A. Battistel and G. Dallabona, J. Phys. G: Nucl. Part. Phys. **28**, L1-L10 (2002).
  - O.A. Battistel and G. Dallabona, Phys. Rev. **D65** 1250 (2002).

- O.A. Battistel and O.L. Battistel, *Int. J. Mod. Phys. A***17**, 1979 (2002).
  - O.A. Battistel and G. Krein, *Mod. Phys. Lett A***18**: 2255-2264 (2003).
  - O.A. Battistel and G. Dallabona, *Eur. Phys. J. C* **1**, 001 (2003)
  - G. Dallabona and O.A. Battistel, *Phys. Rev. D***70**, 065017 (2004).
  - O.A. Battistel, *J. Phys. G: Nucl. Part. Phys.* **30**, 543 (2004).
- [14] • R.A. Bertlmann, “*Anomalies in Quantum Field Theory*”, Oxford University Press (1996);
- T.P. Cheng and L.F. Li, “*Theory of Elementary Particle Physics*”, Oxford University Press, New York (1984)
  - M. Kaku, “*Quantum Field Theory*”, Oxford University Press (1993);
  - O. A. Battistel and G. Dallabona, *J. Phys. G: Nucl. Part. Phys.* **28**, 1-22 (2002).
  - Adler, S. L. *Phys. Rev.* **177**, 2426 (1969);
  - Bell, J.S. and Jackiw, R. *Nuovo Cimento* **60A**, 47 (1973);
  - Fijikawa, K. *Phys. Rev. Lett.* **42**, 1195 (1979);
  - Treiman, Jackiw, Tamino and Witten, “*Current Algebra and Anomalies*”, Princeton University Press (1985);
  - Sutherland, D. G., *Nucl. Phys*, **B2**, 433 (1966);
  - Veltman, M. *Proc. R. Soc.* **A301**, 107 (1967);
  - Adler, S. L. and Bardeen, W. A. *Phys. Rev.* **182**, 1517 (1969);
  - Bardeen, W. A. *Phys. Rev.* **184**, 1848 (1969);
  - K. G. Wilson, *Phys. Rev.* **125**, 1067 (1962).
  - P. H. Frampton, “*Field Theories*”, Benjamin Cummings Publishing Company (1987) ;
  - I. S. Gerstein and R. Jackiw, *Phys. Rev.* **181** 1955 (1969);
- [15] •C.Nash, “*Relativistic Quantum Fields*”, Academic Press, New York (1978);
- P. H. Frampton, “*Field Theories*”, Benjamin Cummings Publishing Company (1987) ;
  - T.P. Cheng and L.F. Li, “*Theory of Elementary Particle Physics*”, Oxford University Press, New York (1984)
  - M. Kaku, “*Quantum Field Theory*”, Oxford University Press (1993);
  - D.Lurié, “*Particles and Fields*”, Interscience, New York (1968);
- [16] •de Alfaro, V., Fubini, S, Furlan, G. and Rossetti, C., “*Currents in Hadron Physics*”. North-Holland, Amsterdam (1973) ;
- F.Mandl and G.Shaw, “*Quantum Field Theory*”, Wiley, New York (1984);

- [17] ●E.Abers and B.W.Lee, “Gauge Theories”, Phys. Rep. 9C, 1 (1973);
- J.C.Taylor, “Gauge Theory of Weak Interactions”, Cambridge University Press, Cambridge (1976);
  - L.D.Fadeev and A.A.Slanov, “Gauge Fields, Introduction to Quantum Theory”, Benjamin Cummings, Ready, Massachusetts (1980);
  - I.J.R.Aitchison and A. J. G. Hey, “Gauge Theories in Particle Physics”, Hilger, Bristol (1982);
  - T.P. Cheng and L.F. Li, “Theory of Elementary Particle Physics”, Oxford University Press, New York (1984).
- [18] ●J.J.Sakurai, “Advanced Quantum Mechanics”, Addison\_Wesley, reading, Massachusetts (1967);
- W.Greiner and J.Reinhardt: “Quantum Electrodynamics”, Springer-Verlay, Heidelberg (1994);
  - F.Gross, “Relativistic Quantum Mechanics and Field Theory”, John Wiley and Sons, (1993);
- [19] ● T.P. Cheng and L.F. Li, “Theory of Elementary Particle Physics”, Oxford University Press, New York (1984).
- [20] ●F.Mandl and G.Shaw, “Quantum Field Theory”, Wiley, New York (1984);
- [21] ●F.Gross, “Relativistic Quantum Mechanics and Field Theory”, John Wiley and Sons, (1993);
- Y. Nambu and J. Jona-Lasinio, Phys. Rev. 122 (1961) 345;
  - A. Kocic, Phys. Rev. D33 (1985) 1785;
  - D. Kohana, Phys. Lett. B229 (1989) 9;
  - T. Hatsuda and T.Kuniskiro, Phys. Rep. 247 (1994) 221;
  - J. Bijnens, Phys. Rep. 265 (1996) 369;
  - S. P. Klevansky, Rev. Mod. Phys. 64, 649 (1992);
  - V.Bernard, A. Blin, B. Hiller, Y.P.Ivanov,A. A. Osipov and U. G. Meissner, Annals of Phys. 249, 499 (1996);
- [22] ●O.A. Battistel, *PhD Thesis 1999*, Universidade Federal de Minas Gerais, Brazil.
- [23]
- [24] O. A. Battistel and G. Dallabona, “*A systematization for one loop Feynman integrals*”, trabalho em preparação
- [25] O. A. Battistel, “*Scale ambiguities in perturbative calculations*”, trabalho em preparação
- [26] ●G.Leibrant Rev. Mod. Phys. 47 (849) 1975;
- [27] ●B. de Witt and J. Smith, “Field Theory in Particle Physics”, North-Holland Physics Publishing, Amsterdam (1986), Capítulo XX.

- [28] E. Gambim, C.O.Lobo, G. Dallabona and Battistel, “Regularizations: different recipes for identical situations”, Trabalho submetido para publicação.
- [29] •P. H. Frampton, “Field Theories”, Benjamin Cummings Publishing Company (1987).
- [30] •M. Kaku, “*Quantum Field Theory*”, Oxford University Press (1993).
- [31] •O.A. Battistel, *PhD Thesis 1999*, Universidade Federal de Minas Gerais, Brazil.
- O.A. Battistel and G. Dallabona, Nucl. Phys. **B610** 317 (2001).
  - O.A. Battistel and G. Dallabona, J. Phys. **G27** L53-L60 (2001).
  - O. A. Battistel and G. Dallabona, J. Phys. G: Nucl. Part. Phys. **28**, L1-L10 (2002).
  - O.A. Battistel and G. Dallabona, Eur. Phys. J. C **1**, 001 (2003)
- [32] •G. Dallabona and O.A. Battistel, Phys. Rev. **D70**, 065017 (2004).
- [33] •O.A. Battistel, J. Phys. G: Nucl. Part. Phys. **30**, 543 (2004).
- [34] E.Staudt, Dissertação de mestrado (em andamento).