

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA MARIA
CENTRO DE CIÊNCIAS NATURAIS E EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

A HIPÓTESE DE TURBULÊNCIA
LOCALMENTE ISOTRÓPICA E A
UNIVERSALIDADE DA CONSTANTE DE
KOLMOGOROV

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Guilherme Sausen Welter

Santa Maria, RS, Brasil

2006

**A HIPÓTESE DE TURBULÊNCIA
LOCALMENTE ISOTRÓPICA E A
UNIVERSALIDADE DA CONSTANTE DE
KOLMOGOROV**

por

Guilherme Sausen Welter

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado do Programa de Pós-Graduação em Física, Área de Concentração em Áreas Clássicas da Fenomenologia e suas Aplicações, da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM , RS), como requisito parcial para obtenção do grau de **Mestre em Física.**

Orientador: Prof. Dr. Gervásio Annes Degrazia
UFSM

Santa Maria, RS, Brasil

2006

**Universidade Federal de Santa Maria
Centro de Ciências Naturais e Exatas
Programa de Pós-Graduação em Física**

A Comissão Examinadora, abaixo assinada,
aprova a Dissertação de Mestrado

**A HIPÓTESE DE TURBULÊNCIA
LOCALMENTE ISOTRÓPICA E A
UNIVERSALIDADE DA CONSTANTE DE
KOLMOGOROV**

elaborada por
Guilherme Sausen Welter

como requisito parcial para obtenção do grau de
Mestre em Física.

COMISSÃO EXAMINADORA:

Prof. Dr. Gervásio Annes Degrazia
UFSM
(Orientador)

Prof. Dr. Fernando Manuel Ramos
LAC-INPE

Prof. Dr. Otávio Costa Acevedo
UFSM

Santa Maria, 3 de maio de 2006.

À minha mãe, meu pai, Fran, Maro e à Lu.

Agradecimentos

Ao professor Gervásio pela orientação, incentivo e confiança. Aos professores Osvaldo e Otávio que ao longo da realização desse trabalho sempre se mostraram dispostos a responder minhas perguntas, principalmente sobre experimentação e tratamento de dados. Ao Adrián por ter se disponibilizado na realização dos experimentos de túnel de vento, cujos dados foram essenciais na realização dessa dissertação. Aos meus amigos Hans e Vagner por toda a amizade, pelas conversas, tragos e companherismo. À Débora por ter me ajudado com minha iniciação científica. Ao caro amigo Franciano que sempre me deu uma baita ajuda aqui no lab. Aos chupetas do prédio azul e os inumeráveis churrasquinhos na garagem. Aos demais amigos do lab.

Lista de Figuras

2.1	Característica de uma variável turbulenta num túnel de vento com $Re \approx 10^5$ onde a velocidade do vento foi medida à uma taxa de 3 kHz.	31
3.1	Representação de correlação de velocidade longitudinal $R_{r,r}(r) = \langle u_1 u_1' \rangle$ e transversal $R_{t,t}(r) = \langle u_2 u_2' \rangle$ entre dois pontos separados por uma distância r .	40
4.1	Gráfico log-log da função estrutura $G_2^R(r)$ segundo Kolmogorov. A região <i>I</i> caracteriza o intervalo de dissipação onde as quantidades estatísticas dependem de $\langle \epsilon \rangle$ e ν com $r \ll \eta$, onde $G_2^R(r) \propto r^2$. A região <i>II</i> é conhecida como sub-intervalo inercial onde a quantidades estatísticas são apenas dependentes de $\langle \epsilon \rangle$ e encontra-se no intervalo $\eta \ll r \ll L$ e $G_2^R(r) \propto r^{2/3}$. A região <i>III</i> caracteriza os grandes turbilhões, com tamanho da ordem ou maior a L .	47
5.1	Exemplo de uma função intermitente.	53
6.1	Função estrutura longitudinal de segunda ordem $G_2^R(r)$ obtida em túnel de vento com taxa de amostragem de 3 kHz. A figura permite perceber o sub-intervalo inercial definido pela desigualdade $1 \ll r/\eta \ll L/\eta$, com $L/\eta \sim 2000$, $\lambda/\eta \sim 100$ e $\eta \sim 0,2\text{mm}$, onde $G_2^R(r) \propto r^{2/3}$.	64

6.2	Função estrutura de terceira ordem longitudinal $G_3^R(r)$ para a mesma série de dados da figura (6.1). Em contraste com $G_2^R(r)$ da figura (6.1), a relação $G_3^R(r) \propto r$ não é bem caracterizada para a mesma região da figura (6.1).	65
6.3	Funções estrutura longitudinais de segunda, terceira e quarta ordem para a mesma série de dados da figura (6.1) no intervalo $100 < r/\eta < 1000$	66
6.4	Razão entre a funções estrutura de segunda ordem transversais (lateral e vertical) $G_2^T(r)$ e a função estrutura longitudinal $G_2^R(r)$ com dados de camada limite atmosférica e o valor $4/3$ predito sob a hipótese de isotropia local. Nesta série temporal $L \sim 36 m$, $\lambda = 11,5 cm$, $\eta = 0,51 mm$ e $R_\lambda \approx 13005$	68
6.5	Funções estrutura temporal de segunda, terceira e quarta ordem para a concentração de hélio em um experimento de dispersão de tunel de vento com baixa velocidade.	69
6.6	Funções estrutura temporal de segunda, terceira e quarta a temperatura na camada limite atmosférica superficial.	70
6.7	Assimetria das diferenças de velocidade S em função do número de Reynolds da microescala de Taylor R_λ e a linha é o valor médio de todos os experimentos $S = -0,211$	76
6.8	Assimetria $S = G_3^R/(G_2^R)^{3/2}$ obtida nos três experimentos: a) Camada limite atmosférica superficial, onde $L \approx 30 m$, b) Túnel de vento grande, onde $L \approx 0,30 m$ e c) Túnel de vento pequeno, onde $L \approx 0,10 m$. As linhas e pontos mostram a assimetria em diferentes séries temporais para cada experimento pertencentes a cada sub-intervalo inercial. As linhas sólidas representam $S = -(4/5)C_k^{-3/2}L^{3\mu/2}r^{1-3\zeta_2/2}$, onde $\zeta_2 = 2/3 + \mu$ e $C_k = 2,13$. Na linha contínua descreve S com $\mu = 0,04$ no caso da existência de intermitência do sub-intervalo inercial e a linha tracejada descreve S com $\mu = 0,00$ de acordo com K41.	82

Lista de Tabelas

6.1	Sumário de alguns dos parâmetros do escoamento obtido por Mouri <i>et al.</i> (2006). A tabela apresenta algumas características de turbulência gerada por grade e em camada limite em três alturas distintas, $z = 0,05, 0,25$ e $0,70$ m. A taxa de dissipação foi obtida nas direções x_1 e x_2 , foi obtida com $\langle \epsilon_{u_1} \rangle = 15\nu \langle (\partial u_1 / \partial x_1)^2 \rangle$ e $\langle \epsilon_{u_2} \rangle = 7,5\nu \langle (\partial u_1 / \partial x_2)^2 \rangle$. As escalas integrais de comprimento foram determinadas por $L_{u_1} = \int_0^\infty R_{r,r}(r)dr / R_{r,r}(0)$ e $L_{u_2} = \int_0^\infty R_{t,t}(r)dr / R_{t,t}(0)$.	73
A.1	Principais características da turbulência no túnel de vento pequeno.	88
A.2	Principais características da turbulência no túnel de vento grande.	89
A.3	Principais características da turbulência da camada limite atmosférica superficial Parte I.	89
A.4	Principais características da turbulência da camada limite atmosférica superficial Parte II.	90

Sumário

Resumo	11
Abstract	13
1 Introdução	15
2 As equações de conservação e suas consequências	18
2.1 Equações de Conservação para Fluidos	18
2.1.1 Equação de estado (lei dos gases ideais)	19
2.1.2 Primeira lei da Termodinâmica	19
2.1.3 Equação da Continuidade	20
2.1.4 Equação de Navier-Stokes	20
2.2 Dissipação de energia	25
2.3 Escoamento de fluidos viscosos	27
2.4 O espectro de energia cinética turbulenta	31
2.5 Camadas limite	32
3 Teoria estatística da turbulência	33
3.1 Elementos da teoria estatística	33
3.2 Formulação geral do problema da descrição estatística da turbulência	35
3.3 Teorema ergódico	36
3.4 Hipótese de Taylor	37
3.5 Turbulência estatística no senso de Taylor	38
3.6 A equação de von Kármán-Howarth	41

	10
4 A teoria de turbulência de Kolmogorov	44
4.1 Hipóteses da estrutura local da turbulência	44
4.2 As leis de Kolmogorov	46
4.3 A objeção de Landau à universalidade de Kolmogorov	48
4.4 Refinamento das hipóteses da estrutura local de turbulência	49
5 Fenomenologia de intermitência	52
5.1 Intermitência	52
5.2 Fenômenos atribuídos à intermitência em turbulência completamente desenvolvida	55
5.3 Considerações sobre intermitência e a teoria de Kolmogorov	56
6 Simetrias e aspectos universais em turbulência bem desenvolvida	60
6.1 Dissipação da energia cinética turbulenta	61
6.2 Emprego de funções estrutura na caracterização de simetrias locais .	63
6.3 Anisotropia nas pequenas escalas	72
6.4 O sub-intervalo de equilíbrio universal	74
6.5 Universalidade no sub-intervalo inercial	75
6.6 Anomalia dos expoentes de escalas	78
7 Considerações finais	83
A Obtenção e tratamento dos dados	85
A.1 Dados de camada limite	85
A.1.1 Túnel de vento	85
A.1.2 Camada limite atmosférica	86
A.2 Determinação de parâmetros turbulentos	87
A.3 Sumário dos resultados	88

RESUMO

Dissertação de Mestrado
Programa de Pós-Graduação em Física
Universidade Federal de Santa Maria

A HIPÓTESE DE TURBULÊNCIA LOCALMENTE ISOTRÓPICA E A UNIVERSALIDADE DA CONSTANTE DE KOLMOGOROV

AUTOR: GUILHERME SAUSEN WELTER

ORIENTADOR: PROF. DR. GERVÁSIO ANNES DEGRAZIA
UFSM

Data e Local da Defesa: Santa Maria, 3 de maio de 2006.

A teoria de turbulência completamente desenvolvida de Kolmogorov, elaborada em 1941, prevê a existência de um intervalo de equilíbrio, onde leis de caráter universal descrevem as quantidades fenomenológicas associadas ao escoamento turbulento. Entretanto Landau criticou a universalidade destas leis alegando que um equilíbrio estatístico universal não seria alcançado, desde que há uma dependência na transferência de energia entre os turbilhões que pertencem ao intervalo de equilíbrio e os turbilhões externos a este intervalo.

Desta discussão entre Kolmogorov e Landau, surgiu em 1962 uma teoria de correção à de 1941. Esta teoria prevê a existência de uma cascata de energia intermitente entre os turbilhões pertencentes ao intervalo inercial de equilíbrio. Desde então intermitência tornou-se o centro das pesquisas em turbulência bem desenvolvida.

Outra questão que ainda é motivo de discussão é a universalidade da constante da função estrutura de segunda ordem prevista por Kolmogorov. Alguns teóricos argumentam que esta constante seria dependente do número de Reynolds do escoamento, entretanto as evidências experimentais são contraditórias.

Na presente análise, baseado em funções estrutura de diversas ordens de velocidade, temperatura e um escalar passivo, a anisotropia é relacionada à um estranho comportamento das funções estrutura de velocidade de ordem ímpar. Além do

mais, o estudo aponta que a constante de Kolmogorov, determinada em diferentes escoamentos, apresenta um comportamento universal com o número de Reynolds. Adicionalmente, o espalhamento desta constante em torno das médias e a dependência com o número de Reynolds obtidos nos trabalhos encontrados na literatura são explicados como um efeito devido à anisotropia no sub-intervalo inercial e a determinação imprecisa da taxa de dissipação. Por outro lado, a verificação experimental da intermitência no sub-intervalo inercial através da correlação da taxa de dissipação $R_{\epsilon,\epsilon}(r)$ é explicada ser um efeito indesejado de anisotropia nas equações baseadas na hipótese de isotropia. A existência de um valor significativo para o coeficiente de correção de intermitência μ da função estrutura de segunda ordem G_2^R é atribuído à uma escolha arbitrária do sub-intervalo inercial e a efeitos de número de Reynolds finito e outras singularidades. Desta forma conclui-se que a teoria clássica de 1941 está correta na sua forma original e as discrepâncias observadas originalmente são devido a não existência de um estado de turbulência completamente desenvolvida.

ABSTRACT

Dissertação de Mestrado
Programa de Pós-Graduação em Física
Universidade Federal de Santa Maria

LOCAL ISOTROPY ASSUMPTION AND THE UNIVERSALITY OF THE KOLMOGOROV CONSTANT

AUTOR: GUILHERME SAUSEN WELTER

ORIENTADOR: PROF. DR. GERVÁSIO ANNES DEGRAZIA
UFSM

Data e Local da Defesa: Santa Maria, 3 de maio de 2006.

According to the Kolmogorov's fully developed turbulence theory established in 1941, there is an equilibrium range in which phenomenological quantities associated to the turbulence flow are described by laws of universal character. The main objection to this theory was given by Landau, who criticized the universality of these laws arguing that an universal statistical equilibrium state would not be reached since there is a dependence on energy transference between the eddies belonging to the inertial range with the largest ones, which are external to this interval, thus non-universal.

From the discussion between Kolmogorov and Landau, emerged in 1962 a theory proposed to be a correction to the 1941's theory. Following the new ideas, an intermittent energy cascade should exist in the inertial range thus, as a consequence, corrections to the scaling laws predicted by 1941's theory should to be taken in account. Since that, intermittency has become the central problem in fully developed turbulence.

Another question which still remains from the discussion between Kolmogorov and Landau is that concerning to the universality of the second order structure constant, known as the Kolmogorov constant. Some theoreticians claim that this constant should be Reynolds' number dependent, however experimental evidences contradict themselves.

In this work, based on structure function of several orders of velocity, temperature and a passive scalar, anisotropy is related to a strange behavior of velocity odd-order structure functions. The Kolmogorov constant is determined in different flows and appear to be universal with the Reynolds' number. In addition, the scatter and the dependence with the Reynolds' number found in the literature are explained as a consequence of anisotropy in the inertial subrange and imprecise determination of the dissipation rate. On other hand, experimental verification of intermittency in inertial subrange through the correlation of the rate dissipation $R_{\epsilon,\epsilon}(r)$ is explained to be an undesired effect of anisotropy on the equations whose derivation is based on the isotropy assumption. The existence of intermittency correction coefficient μ of the second order structure function G_2^R is attributed to be a consequence of an arbitrary choice of the inertial subrange, finite Reynolds' number effect and another singularities. These conclusions lead to the idea that the classical theory of 1941 is correct in its original form and the discrepancies observed are due the nonexistence of a real fully developed turbulence state.

Capítulo 1

Introdução

A multitude de formas e estruturas em escoamentos na dinâmica de fluidos é realmente fascinante. É possível observar formas contínuas e suaves como uma bolha de sabão e a chama de uma vela, movimentos periódicos e regulares como ondas e também movimentos com estruturas aparentemente desordenadas e caóticas como são os gases expelidos numa explosão ou em uma turbina de avião.

Um importante conceito de física é o conceito de simetria. Acredita-se que a equação de Navier-Stokes e as demais equações de conservação contenham toda a informação física à respeito do comportamento hidrodinâmico do fluido. Por esta razão, também acredita-se que as simetrias e as quebras de simetria, apresentadas nos movimentos de fluidos, também estejam contidas na equação de Navier-Stokes.

À medida que um escoamento passa de um comportamento suave e determinístico para um comportamento mais complicado é fácil perceber que alguma simetria é sempre quebrada, seja ela espacial ou temporal. Quanto mais complicado este movimento se torna, ou seja, turbulento, mais e mais simetrias vão sendo quebradas. Neste limite, define-se turbulência completamente desenvolvida, onde se espera que todos os possíveis graus de excitação do sistema sejam alcançados. Da mesma forma, dentro deste limite, se espera que exista um domínio onde um equilíbrio estatístico universal seja atingido.

Turbulência Completamente Desenvolvida (TCD) é caracterizada por um comportamento espacial e temporal desordenado nas características dinâmicas e termodinâmicas que descrevem o campo de escoamento. Por esta razão, o emprego de

teorias estatísticas é um ingrediente fundamental na compreensão de um escoamento turbulento.

A teoria de Kolmogorov prevê a existência de um sub-intervalo inercial, onde leis exibindo um comportamento universal, aplicáveis a qualquer tipo de escoamento com número de Reynolds suficientemente grande, são suficientes para descrever quantidades fenomenológicas associadas ao escoamento turbulento.

Apesar do sucesso das leis de Kolmogorov em descrever o comportamento heurístico nas pequenas escalas de uma TCD, o caráter universal destas leis é ainda um motivo de discussão. Landau, baseado em argumentos físicos, afirmou que a dissipação de energia depende dos turbilhões de grande escala, que por sua vez são dependentes do tipo de escoamento. Desta forma, as leis obtidas por Kolmogorov não seriam universais e dependeriam do tipo de escoamento, e além disso, a cascata de energia entre os turbilhões de pequena escala ocorreria de maneira intermitente.

Todavia, para incluir os efeitos de intermitência na sua teoria, Kolmogorov em 1962 sugeriu um termo de correção à sua famosa lei. Desde então, intermitência tornou-se o problema central em TCD. A anomalia de escalas universais das funções estrutura de velocidade é geralmente atribuído à taxa de dissipação intermitente.

Embora existam fortes argumentos teóricos contra a universalidade das leis de Kolmogorov as observações experimentais não são conclusivas.

Particularmente, existe um interesse especial à respeito da constante da função estrutura de segunda ordem, conhecida como constante de Kolmogorov, cuja universalidade ainda é questionada. Há uma série de trabalhos na literatura cujos resultados sobre a universalidade da constante de Kolmogorov são conflitantes.

O objetivo inicial do presente estudo é determinar a partir de dados experimentais o valor da constante de Kolmogorov e sua dependência com o número de Reynolds. Adicionalmente, será discutido a grande variabilidade observada nos valores desta constante encontrados na literatura, assim como a validade das hipóteses fundamentais da teoria de Kolmogorov e as consequências da teoria de intermitência.

O trabalho utiliza dados experimentais obtidos em túneis de vento na Universidad Nacional del Nordeste na Argentina e na Universidade Federal do Rio Grande

do Sul e dados de camada limite atmosférica superficial obtidos pelo grupo de micrometeorologia da Universidade Federal de Santa Maria. O conjunto de dados reúne um amplo intervalo de número de Reynolds no estudo sobre a constante de Kolmogorov.

Capítulo 2

As equações de conservação e suas consequências

Turbulência é um fenômeno físico complexo, sua investigação teórica deve ser feita com base nas leis fundamentais da física expressas em equações da hidrodinâmica e da termodinâmica. Por esta razão, neste capítulo serão apresentadas as equações fundamentais, algumas de suas consequências diretas e as características gerais da turbulência com um teor didático¹.

2.1 Equações de Conservação para Fluidos

Mecânica dos fluidos é a área da física que estuda o comportamento de líquidos e gases. Desde que estes fenômenos são considerados macroscópicos, um fluido é então entendido como um meio contínuo. De tal modo que um elemento de fluido deve ser entendido como uma parte infinitamente pequena em relação ao meio, mas que ainda contenha um elevado número de moléculas. Ou seja, as interações de ordem eletromagnéticas intermoleculares podem ser bem descritas pelas grandezas termodinâmicas macroscópicas. Por esta razão, expressões como *partícula de fluido* e *ponto em um fluido* devem ser entendidas de maneira semelhante.

Uma descrição matemática completa do estado de um fluido ideal em movimento é feita por meio da distribuição da velocidade $u_i = u_i(x_1, x_2, x_3, t)$ e de duas

¹As leis de conservação para fluidos podem ser encontradas no livro clássico *Fluid Mechanics* de Landau e Lifshitz (1959).

quaisquer variáveis termodinâmicas, como por exemplo a pressão $p(x_1, x_2, x_3, t)$ e a densidade $\rho(x_1, x_2, x_3, t)$. Todas as quantidades termodinâmicas são determinadas pelo conhecimento de qualquer duas delas, junto com a equação de estado. No entanto, quando efeitos eletromagnéticos provocam fricção interna, a dissipação de energia mecânica em calor por efeitos viscosos e a condução térmica promovem um processo termodinâmico irreversível no estado do fluido. Faz-se então necessário a alteração de algumas equações para incluir estes efeitos dissipativos nos fluidos viscosos. Como veremos adiante, a viscosidade do fluido e a dissipação de energia mecânica em calor têm um papel central no que diz respeito à dinâmica e a termodinâmica de fluidos.

2.1.1 Equação de estado (lei dos gases ideais)

Felizmente em várias situações, a equação de estado para gás ideal descreve adequadamente o estado dos gases na atmosfera e em experimentos de laboratório. A lei dos gases ideais é escrita como

$$p\mathbb{V} = n\mathfrak{R}T. \quad (2.1)$$

Onde p é a pressão, \mathbb{V} é o volume, \mathfrak{R} é a constante universal dos gases ($\mathfrak{R} = 287 \text{ m}^2 \text{ s}^{-2} \text{ K}^{-1}$), e T é a temperatura do gás.

2.1.2 Primeira lei da Termodinâmica

A primeira lei da termodinâmica estabelece que o sistema possui uma energia interna \mathbb{U} , a qual é uma função das variáveis necessárias para especificar o estado do sistema.

Se o sistema é levemente perturbado e, entretanto, permanece muito próximo ao equilíbrio térmico, a quantidade de calor entrando através das paredes que limitam o volume \mathbb{V} é $d\mathbb{Q}$. O volume é então aumentado por $d\mathbb{V}$ contra uma pressão p . Assim pode se escrever a variação na energia interna $d\mathbb{U}$ como

$$d\mathbb{U} = d\mathbb{Q} - pd\mathbb{V}. \quad (2.2)$$

2.1.3 Equação da Continuidade

$$\oint \rho \vec{u} \cdot \vec{n} dA,$$

onde a integração é realizada sobre toda a superfície envolvendo o volume em questão. Por outro lado, o decréscimo de massa no interior do volume é escrito como

$$-\frac{\partial}{\partial t} \int \rho dV.$$

Igualando as duas expressões acima, têm-se

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \rho dV = - \oint \rho \vec{u} \cdot \vec{n} dA.$$

A integral de superfície pode ser transformada em uma integral de volume pela fórmula de Green, obtendo

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho \vec{u}) = 0,$$

ou

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot \vec{u} = 0. \quad (2.3)$$

Esta relação é conhecida como equação da continuidade e é válida tanto para fluidos ideais como viscosos. Porém, no caso de $d\rho/dt \ll 1$, temos a seguinte simplificação da equação da continuidade:

$$\nabla \cdot \vec{u} = 0. \quad (2.4)$$

Este campo solenoidal define um fluido incompressível.

2.1.4 Equação de Navier-Stokes

Primeiramente vamos considerar um fluido não viscoso. Se considerarmos algum volume de controle num fluido, a força total atuando no volume é igual à integral

$$- \oint p \vec{n} dA$$

da pressão p tomada sobre toda a superfície que engloba o volume. Transformando a relação anterior em uma integral de volume, temos

$$-\oint p\vec{n} dA = -\int \vec{\nabla}p dV$$

Desta forma, vemos que o volume em torno de qualquer elemento de área dA exerce naquele elemento uma força $-\vec{\nabla}p dV$. Ou seja, que uma força $-\vec{\nabla}p$ atua em cada elemento de fluido. Podemos assim obter a equação de movimento de um fluido igualando a força $-\vec{\nabla}p$ ao produto da massa por unidade de volume pela aceleração:

$$\rho d\vec{u}/dt = -\vec{\nabla}p \quad (2.5)$$

Aqui a derivada $d\vec{u}/dt$ não se refere à taxa de variação da velocidade do fluido em um ponto fixo no espaço, mas a taxa de variação da velocidade do fluido de uma dada partícula de fluido ao mover-se no espaço. Esta derivada deve ser expressa em termos de quantidades referentes a partes fixas no espaço. Assim, pela regra da cadeia do cálculo têm-se

$$d\vec{u} = (\partial\vec{u}/\partial t) + (d\vec{r} \cdot \vec{\nabla})\vec{u},$$

ou, dividindo ambos os lados por dt e substituindo em (2.5), teremos

$$\frac{d\vec{u}}{dt} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u} = -\frac{1}{\rho}\vec{\nabla}p. \quad (2.6)$$

Esta é conhecida como a equação de Euler e é válida para fluidos não viscosos.

Estamos interessados em saber como a energia do fluido contido no volume de controle varia no tempo. A partir de agora passaremos da notação vetorial para a notação tensorial e consideraremos a notação somatório de Einstein, onde i e $j = 1, 2, 3$.

Reescrevendo a equação da continuidade como

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} = -\rho\frac{\partial u_j}{\partial x_j},$$

e a equação de Euler na seguinte forma

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = -u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i}.$$

Obtemos

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u_i) = -\rho u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial p}{\partial x_j} - u_i \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho u_k) = -\frac{\partial p}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho u_i u_j).$$

Reescrevendo o primeiro termo da direita como

$$\frac{\partial p}{\partial x_i} = \delta_{ij} \frac{\partial p}{\partial x_j},$$

onde δ_{ij} é o tensor delta de Kronecker. Desta forma podemos expressar a equação de Euler como um fluxo de *momentum*

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u_i) = -\frac{\partial \Pi_{ij}}{\partial x_j}, \quad (2.7)$$

onde o tensor Π_{ij} é simétrico e é definido como

$$\Pi_{ij} = p\delta_{ij} + \rho u_i u_j.$$

Em fluidos não ideais, devido à viscosidade, ocorre a dissipação de energia. A dissipação ocorre devido à fricção interna e condução térmica. O processo dissipativo resulta da irreversibilidade termodinâmica do movimento.

Para obter equações de movimento que descrevem o movimento dos fluido viscosos, vamos incluir termos adicionais na equação de movimento derivadas para fluidos não viscosos, a equação de Euler, obtida anteriormente.

O tensor Π_{ij} representa a transferência de *momentum* completamente reversível (sem dissipação de energia) devido simplesmente ao transporte mecânico de diferentes partículas de fluido de um ponto a outro e às forças devidas ao gradiente de pressão atuando no fluido.

De outro lado, a viscosidade também atua como um mecanismo de transferência de *momentum* de pontos com maior velocidade a outros com velocidade menor. Porém, a viscosidade tem um papel dissipativo e, assim sendo, é termodinamicamente irreversível.

A equação de movimento para um fluido viscoso pode ser obtida adicionando-se um termo $-\sigma'_{ij}$ ao tensor fluxo de *momentum* “ideal”, um termo de transferência de momentum irreversível viscoso no fluido. Assim, o tensor densidade de fluxo de momentum num fluido viscoso é escrito como

$$\Pi_{ij} = p\delta_{ij} + \rho u_i u_j - \sigma'_{ij} = -\sigma_{ij} + \rho u_i u_j.$$

O tensor $\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \sigma'_{ij}$ é chamado tensor de estresse do fluido, e σ'_{ij} é o tensor de estresse viscoso. A forma geral do tensor σ'_{ij} obviamente irá depender de como ocorre o processo de fricção interna.

Contudo podemos estabelecer argumentos físicos para encontrar uma forma para o tensor σ'_{ij} .

É razoável imaginar que a fricção atua quando, em dois pontos próximos, diferentes partículas de fluido movem-se com diferentes velocidades. Com o movimento relativo, a fricção causará dissipação de energia cinética em energia térmica. Portanto, σ'_{ij} deverá depender das derivadas espaciais da velocidade. Além disso, se esperamos que a viscosidade atue em pontos próximos, espera-se também que o gradiente da velocidade não seja grande entre estes pontos. Por esta razão, podemos supor que σ'_{ij} pode ser expresso como função linear das primeiras derivadas $\partial u_i / \partial x_j$, uma vez que desprezamos as derivadas de ordem superior.

Desde que σ'_{ij} é um tensor nulo se u é constante em todos os pontos do fluido, então não deve haver termos de σ'_{ij} independentes de $\partial u_i / \partial x_j$. Da mesma forma, se o fluido estiver em rotação uniforme, o tensor σ'_{ij} deve ser nulo.

Na rotação uniforme com velocidade angular $\vec{\Omega}$, a velocidade \vec{u} é igual ao produto vetorial $\vec{\Omega} \times \vec{r}$. As somas $\partial u_i / \partial x_j + \partial u_j / \partial x_i$ são combinações lineares das derivadas $\partial u_i / \partial x_j$ e são nulas se $\vec{u} = \vec{\Omega} \times \vec{r}$. Portanto, σ'_{ij} deve apenas conter combinações simétricas das derivadas $\partial u_i / \partial x_k$.

A forma mais geral para um tensor de segunda ordem satisfazendo as condições acima é

$$\sigma'_{ij} = a \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + b \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \delta_{ij},$$

onde a e b são independentes da velocidade. Contudo, é mais conveniente escrever a expressão anterior na seguinte maneira:

$$\sigma'_{ij} = \eta \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right) + \zeta \delta_{ij} \frac{\partial u_k}{\partial x_k}. \quad (2.8)$$

A expressão entre parênteses tem a propriedade de se anular sob contração em relação a i e j . Os coeficientes η e ζ são chamados coeficientes de viscosidade e são positivos.

As equações de movimento para um fluido viscoso podem agora serem obtidas adicionando novos termos na equação de Euler (2.6).

Primeiramente, iremos reescrevê-la da seguinte forma

$$\rho \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) = \frac{\partial p}{\partial x_i}.$$

Adicionamos no lado direito da expressão acima, as expressões para $\partial \sigma'_{ij} / \partial x_j$:

$$\rho \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) = - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\eta \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\zeta \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right). \quad (2.9)$$

Esta expressão é a forma mais geral das equação de movimento de fluidos viscosos. As quantidades η e ζ são funções da temperatura e pressão. Na maioria das vezes η e ζ não variam consideravelmente, podendo assim serem consideradas constantes. Desta forma expressamos:

$$\frac{\partial \sigma'_{ij}}{\partial x_j} = \eta \left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} + \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{2}{3} \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_j} \right) + \zeta \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_j} = \eta \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} + \left(\zeta + \frac{1}{3} \eta \right) \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_j}.$$

Agora, se podemos considerar o fluido incompressível, ou seja, $\partial u_j / \partial x_j = 0$, o último termo da expressão anterior desaparece. Portanto, a equação de movimento para um fluido viscoso incompressível é:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \nabla^2 u_i. \quad (2.10)$$

Esta é conhecida como a equação de Navier-Stokes. O termo η é a viscosidade do fluido e $\nu = \eta/\rho$ é definido como a viscosidade cinemática. O tensor de estresse para um fluido incompressível toma a simples forma

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \eta \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right). \quad (2.11)$$

Um termo extra, representando os forçantes externos, pode ser incluído à equação de Navier-Stokes. Por fim a escrevemos como

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + f_i + \nu \nabla^2 u_i, \quad (2.12)$$

onde o termo f_i é o termo que representa os forçantes externos, como os forçantes térmicos, mecânicos e ou a aceleração de Coriolis. Na camada limite atmosférica, o termo f_i é expresso como

$$f_i = -g\delta_{i3} - 2\varepsilon_{ijk}\Omega_j u_k.$$

Onde δ_{ij} é o o tensor delta de Kronecker, g é aceleração da gravidade, ε_{ijk} é o tensor de Levi-Civita e Ω_j é o vetor velocidade angular da rotação da Terra.

2.2 Dissipação de energia

A presença da viscosidade promove uma dissipação na energia cinética do fluido em calor. A energia cinética de um fluido incompressível é

$$E_c = \frac{1}{2} \int \rho u^2 dV.$$

Tomando-se a derivada temporal desta energia, e fazendo $\partial(\frac{1}{2}\rho u^2)/\partial t = \rho u_i \partial u_i / \partial t$ e substituindo $\partial u_i / \partial t$ pela expressão dada pela equação de Navier-Stokes:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = -u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma'_{ij}}{\partial x_j}.$$

Resulta

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \rho u_i \right) &= \rho u_i \left(u_j \frac{\partial}{\partial x_j} \right) u_i - u_j \frac{\partial}{\partial x_j} p + u_i \frac{\partial \sigma'_{ij}}{\partial x_j} \\ &= \rho \left(u_j \frac{\partial}{\partial x_j} \right) \left(\frac{1}{2} u^2 + \frac{p}{\rho} \right) + \frac{\partial}{\partial x_i} (u_i \sigma'_{ij}) - \sigma'_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j}. \end{aligned}$$

Desde que $\partial u_i / \partial x_i = 0$ para um fluido incompressível, pode-se escrever o primeiro termo na direita da expressão anterior como uma divergência:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \rho u^2 \right) = - \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\rho u_i \left(\frac{1}{2} u^2 + \frac{p}{\rho} - u_i \sigma'_{ij} \right) \right] - \sigma'_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j}. \quad (2.13)$$

A expressão entre colchetes pode ser reconhecida como a densidade de fluxo de energia no fluido; sendo o termo $\rho u_i (\frac{1}{2} u^2 + p/\rho)$ o fluxo de energia devido à transferência de massa do fluido; o segundo termo, $u_i \sigma'_{ij}$, é o fluxo de energia devido aos processos de fricção interna. A presença da viscosidade resulta em um fluxo de momentum σ'_{ij} , entretanto a transferência de *momentum* sempre envolve uma transferência de energia, logo, o fluxo de energia é claramente igual ao produto escalar do fluxo de momentum e a velocidade.

Integrando a expressão (2.13) sobre um volume V_0 , obtemos

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \frac{1}{2} \rho u^2 dV = - \oint \left[\rho \vec{u} \left(\frac{1}{2} u^2 + \frac{p}{\rho} \right) - \vec{u} \cdot \vec{\sigma}' \right] \cdot \vec{n} dA - \int \sigma'_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} dV \quad (2.14)$$

O primeiro termo da direita nos dá a taxa de variação de energia cinética do fluido no volume V_0 pertencendo ao fluxo de energia através da superfície que engloba V_0 . Conseqüentemente, a integral no segundo termo é o decréscimo por unidade de tempo da energia cinética devido à dissipação.

Se a integração é estendida por todo o volume do fluido, digamos $V \rightarrow \infty$, a integral de superfície se anula. Isto é devido ao fato de que se considera que o fluido está em repouso no infinito. A variação de energia cinética por unidade de tempo é

$$\frac{\partial E_c}{\partial t} = - \int \sigma'_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} dV.$$

Porém, para fluidos incompressíveis, o tensor σ'_{ij} é dado por (2.11), assim

$$\sigma'_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \eta \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right).$$

Esta última expressão pode ser escrita como

$$\frac{1}{2} \eta \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)^2,$$

e definindo

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \rho \epsilon dV = \frac{\partial E_c}{\partial t},$$

onde ϵ é a taxa de dissipação de energia cinética por unidade de massa por unidade de tempo e $\nu = \eta/\rho$, obtemos

$$\epsilon = \frac{1}{2} \nu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)^2. \quad (2.15)$$

2.3 escoamento de fluidos viscosos

Acredita-se que a equação de Navier-Stokes (2.10) contém toda a informação sobre o escoamento de um fluido incompressível. Embora o problema físico possa ser completamente revelado pela solução da equação de Navier-Stokes, dada as condições iniciais, as condições de contorno e as demais equações de conservação, há uma grande dificuldade devida à natureza matemática da equação de Navier-Stokes. Stanišić (1988) aponta as seguintes dificuldades encontradas na solução dos sistemas de equações para fluidos viscosos:

- não-linearidade;
- acoplamento;
- o fato que estas equações não podem ser reagrupadas em grupos de equações classificadas como hiperbólicas, parabólicas e elípticas;
- a geometria e condições de fronteira dinâmicas para as quais o sistema é sujeito.

A dificuldade matemática na solução do sistema de equações de fluidos não é o único problema na mecânica de fluidos. Além dela há o problema físico de conhecer as condições iniciais e os forçantes que controlam o movimento.

Embora consideramos o fluido um meio contínuo, no sentido de podermos desprezar o caráter granular da matéria, as interações moleculares podem controlar a estabilidade do escoamento de um fluido, pois uma pequena flutuação de ν pode iniciar o movimento turbulento. Estes forçantes de ordem molecular produzem um campo

de força aleatório, cuja origem está nas colisões moleculares. Uma investigação mais completa da troca de *momentum* entre os constituintes do fluido, seria dada pela teoria cinética de gases, sendo desta forma necessária a solução da equação de transporte de Boltzmann. Desta forma não estaríamos mais tratando de um meio contínuo e sim de um sistema de muitos corpos. Um campo turbulento tratado como um sistema de muitos corpos não poderia ser investigado pelo emprego da mecânica estatística clássica, pois trata-se de um sistema longe do equilíbrio termodinâmico.

Esta é das razões porquê uma teoria de turbulência baseada em primeiros princípios não foi formulada e as teorias existentes são essencialmente teorias estatísticas.

Como bem sabemos, pode-se distinguir entre dois tipos de escoamentos. Os escoamentos laminares, que são suaves e determinísticos, e os escoamentos turbulentos, que são abruptos e irregulares no tempo e espaço. A transição de escoamento laminar para escoamento turbulento é considerado um dos problemas mais complexos em mecânica dos fluidos. As teorias de transição de escoamento laminar para turbulento são baseadas nas infinitamente pequenas perturbações no escoamento. Estas perturbações teriam sua origem nas colisões intermoleculares, e, dependendo da estabilidade do escoamento, seriam amplificadas ao passar do tempo e então o escoamento tornar-se-ia turbulento.

Na tentativa de criterizar a transição para a turbulência, Osbourne Reynolds (1895) definiu uma relação entre os as forças inerciais e viscosas que atuam nos fluidos. Esta razão, um parâmetro macroscópico seria o ponto crítico de transição entre escoamentos laminares e turbulentos. Reynolds definiu a razão entre os termos $u_j(\partial u_i/\partial x_j)$ e $\nu \nabla^2 u_i$. Esta razão unidimensional, hoje chamada número de Reynolds, é definida como

$$Re = \frac{u_j(\partial u_i/\partial x_j)}{\nu \nabla^2 u_i}. \quad (2.16)$$

Entretanto, as forças inerciais são da ordem de U/L^2 e as forças viscosas são da ordem de $\nu U/L^2$. Onde U é uma velocidade característica do escoamento e L é uma

escala de comprimento característico. Assim, o número de Reynolds do escoamento pode ser caracterizado por

$$Re = \frac{UL}{\nu}. \quad (2.17)$$

Em geral, considera-se que o número de Reynolds crítico está entre 2300 e 3000. Para números de Reynolds menores que o número de Reynolds crítico o fluido é laminar, para números de Reynolds maiores que o crítico o fluido torna-se turbulento. Na natureza e em laboratório os escoamentos são em sua maioria turbulentos. Em experimentos laboratoriais em túnel de vento $Re \sim 10^5$ e na camada limite atmosférica $Re \sim 10^7$.

Lumley e Panofsky (1964, página 3) apontam algumas propriedades de um campo turbulento que serão apresentadas aqui.

- Turbulência é observada ser rotacional e dissipativa, isto é, energia mecânica é transformada em calor; Há movimentos aleatórios tridimensionais que são aproximadamente irrotacionais e não dissipativos, tais como um corpo em um fluido que sua superfície é perturbada por um vento turbulento, ou em um fluido fora de uma camada limite. Mas estes não dissipam energia mecânica em energia interna através de uma cascata de turbilhões de tamanho menor. Esta cascata, finalizando em dissipação, é limitada com não linearidade e tridimensionalidade bem como rotacionalidade e é geralmente considerada como um aspecto essencial da turbulência.
- Turbulência é tridimensional. A cascata de energia para turbilhões menores e menores pode ser pensada como um reposicionamento de "vórtices esticados" descritos pelos termos não lineares das equações de movimento, os quais requerem que o movimento seja tridimensional e não linear.
- Turbulência é não linear. A transferência de energia ocorre de um tamanho de turbilhão para um de outro tamanho e apenas acontece de maneira não linear.
- Turbulência é estocástica. Na prática, não importa com qual cuidado as condições de um experimento são reproduzidas, o campo de velocidades não poderá

ser predito em detalhe. Embora não seja provado que as equações de movimento possuam solução única para um dado conjunto de condições iniciais, a unicidade do problema físico é semelhante; não obstante, a solução (no regime instável) parece ser sensível à diminutas mudanças nas condições, de tal forma que nunca teremos conhecimento destas minúcias para predizer a detalhada estrutura do escoamento. Por esta razão, e também porque não queremos e não necessitamos saber toda a informação nos detalhes do escoamento, nós usamos a descrição estatística.

- Turbulência é difusiva. Um ponto marcado num fluido turbulento irá vagar, excursionando para longe de sua posição inicial, qualitativamente como o movimento de uma molécula em um gás. Este comportamento é responsável pelo transportes de quantidades (massa, *momentum* e calor); de fato, tal transporte é mais efetivo que o devido ao movimento molecular.
- Em turbulência, as escalas de tempo e comprimento do movimento turbulento que servem para transportar propriedades são grandes, muitas vezes da mesma ordem da escalas de tempo e comprimento caracterizando a distribuição das propriedades sendo transportadas, e nunca muito maior.
- Turbulência é um fenômeno contínuo. Na maior parte dos escoamentos a dinamicamente menor escala significativa é muitas vezes maior do que as distâncias intermoleculares ou dimensões intemoleculares.

É importante perceber que, mesmo que fosse possível obter uma solução completa de um escoamento turbulento, onde o campo de velocidades $u_i(x_1, x_2, x_3, t)$ pudesse ser conhecido com exatidão em cada ponto do espaço e a cada instante de tempo requerido, esse tipo de conhecimento seria inaplicável. Não teríamos como lidar com essa informação detalhada, ou no sentido computacional, armazenar e processar esta enorme quantidade de informação. Em outras palavras, devido aos graus de liberdade envolvidos em um escoamento turbulento serem muito grandes² a

²Segundo Landau e Lifshitz (1965, pg. 123), o número de graus de liberdade em um escoamento turbulento é proporcional a $Re^{9/4}$.

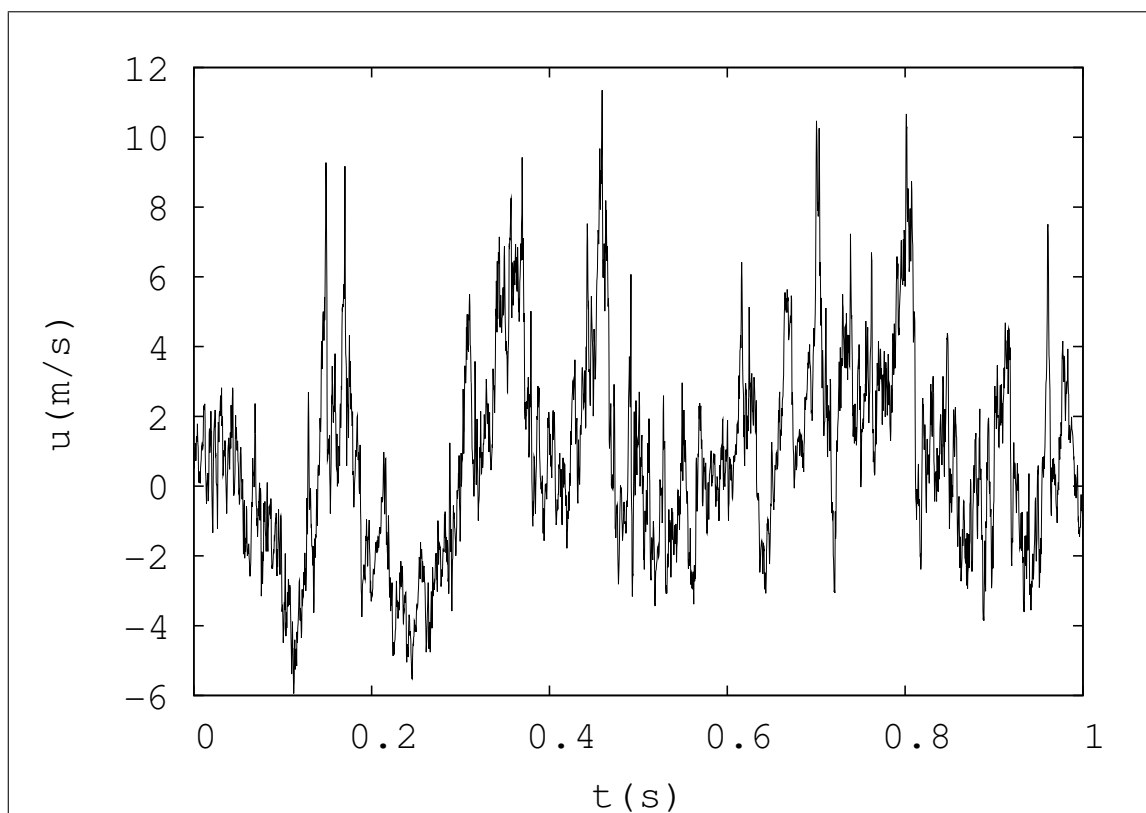


Figura 2.1: Característica de uma variável turbulenta num túnel de vento com $Re \approx 10^5$ onde a velocidade do vento foi medida à uma taxa de 3 kHz.

única possibilidade é o tratamento estatístico das quantidades de interesse.

2.4 O espectro de energia cinética turbulenta

Em escoamentos com elevado número de Reynolds, o campo de velocidade $u_i(x_1, x_2, x_3, t)$ possui uma intrincada variação espacial e temporal. Podemos observar na figura (2.1), que mesmo à uma taxa de amostragem alta (3000 Hz), não é possível observar uma variação suave da velocidade com o tempo. O mesmo comportamento é esperado com respeito ao espaço.

Pode-se imaginar, entretanto, que uma variável turbulenta, como a da figura (2.1), é uma composição de um número muito grande de harmônicos. A estes harmônicos chamamos de turbilhões. Seguindo esta idéia, um campo turbulento é composto de uma superposição de um número muito grande de turbilhões de vários

números de onda. Naturalmente surge a necessidade de conhecermos a distribuição da energia cinética entre estes números de onda. Contudo uma derivação do espectro de energia a partir da equação de Navier-Stokes não é conhecida. Assim, a necessidade de uma formulação que não seja baseada em primeiros princípios é requerida.

Richardson em 1922 postulou que os turbilhões são formados nas grandes escalas. Estes transferem sua energia para turbilhões menores que por sua vez transferem para turbilhões menores ainda e assim por diante. Esta cascata de energia finaliza nos menores turbilhões que transformam sua energia cinética em energia interna através da dissipação viscosa.

Quando o número de Reynolds é muito grande, o escoamento é completamente dominado pela turbulência e todos os graus de excitação possíveis dos turbilhões, dos grandes aos menores possíveis, são alcançados. A turbulência que caracteriza este escoamento é dita Turbulência Completamente Desenvolvida.

2.5 Camadas limite

Landau e Lifshitz (1959, p. 145) observam que em escoamentos com Re muito elevados pode-se analogamente pensar que a viscosidade $\nu \rightarrow 0$, e conseqüentemente o fluido poderia ser considerado ideal (não viscoso) de forma que a equação de Navier-Stokes recuperaria a forma da equação de Euler. Entretanto esta aproximação não pode ser feita quando esta situação ocorre próxima à paredes sólidas. As condições para um fluido ideal requerem que somente a componente normal da velocidade se anule; a componente tangencial à superfície em geral se mantém finita. Para um fluido viscoso, entretanto, a velocidade na parede sólida deve se anular inteiramente. Disto pode-se concluir que, para Re elevado, o decréscimo da velocidade para zero ocorre quase exclusivamente em uma fina camada junto à parede. Esta é chamada camada limite e é caracterizada pela presença de consideráveis gradientes de velocidade.

Capítulo 3

Teoria estatística da turbulência

3.1 Elementos da teoria estatística

De acordo com a teoria de probabilidades, uma variável aleatória, resultante de uma experimentação sob condições definidas, pode assumir qualquer um de um número de possíveis valores numéricos, os quais são impossíveis de se prever (PANCHEV, 1971).

Para compreender as leis estatísticas das quantidades aleatórias é necessário conhecer a distribuição de probabilidades dos dados valores.

Considerando que um número real arbitrário $\xi(t)$ é uma variável aleatória no tempo, o evento $\xi(t) < \xi$ define a probabilidade $P(\xi(t) < \xi)$ como

$$F_{\xi} d\xi = Pr\{\xi < \xi(t) < \xi + d\xi\},$$

onde F_{ξ} é a função integral de distribuição de probabilidade da variável ξ . Para um conjunto de n variáveis aleatórias, podemos definir

$$F_{\xi_1 \dots \xi_n} d\xi_1 \dots d\xi_n = Pr\{\xi_1 < \xi_1(t) < \xi_1 + d\xi_1, \dots, \xi_n < \xi_n(t) < \xi_n + d\xi_n\}$$

Assim, uma função densidade de probabilidade n -dimensional pode ser definida por

$$f_{\xi}^n = \frac{\partial^n}{\partial \xi_1 \dots \partial \xi_n} F_{\xi_1 \dots \xi_n}.$$

Quando a função distribuição de probabilidades é uma função, a exemplo, do espaço quadri-dimensional (espaço-tempo), este processo define um campo aleatório e é conhecido como processo estocástico. Desta forma os momentos estatísticos serão também dependentes do espaço quadri-dimensional (x_i, t) , onde x_i são as coordenadas generalizadas definidas em \mathbb{R}^3 . O momento estatístico de ordem p de um campo escalar ξ ¹ é então definido por

$$\langle \xi^p(x_i, t) \rangle = \int d\xi f_\xi(x_i, t) \xi^p. \quad (3.1)$$

Momentos com mais de uma variável também podem ser construídos. Aqui definimos os tensores de correlação de segunda e terceira ordem, respectivamente

$$R_{i,j} = \langle \eta_i \eta'_j \rangle \quad (3.2)$$

e

$$R_{ij,k} = \langle \eta_i \eta_j \eta'_k \rangle, \quad (3.3)$$

onde η_i representa um campo aleatório vetorial definido no espaço tridimensional no ponto $P(x_1, x_2, x_3)$ e η'_i no ponto $P'(x'_1, x'_2, x'_3)$ com $i, j, k = 1, 2, 3$.

Se a função densidade de probabilidade que define o campo aleatório η_i for independente do tempo, teremos um campo estatisticamente estacionário. Desta forma $R_{i,j}$ também será independente do tempo.

Se além de estatisticamente estacionária, a distribuição de probabilidades for independente de translação no espaço, o campo aleatório será estatisticamente homogêneo. Assim, $R_{i,j}$ não dependerá dos pontos $P(x_1, x_2, x_3)$ e $P(x'_1, x'_2, x'_3)$, será função somente do vetor que une os dois pontos.

Por fim, se além de estacionária e homogênea, a distribuição for invariante à rotações e reflexão de coordenadas, este campo é dito isotrópico e será função apenas de $r = \sqrt{(x'_1 - x_1)^2 + (x'_2 - x_2)^2 + (x'_3 - x_3)^2}$.

¹Também válido para campos vetoriais.

3.2 Formulação geral do problema da descrição estatística da turbulência

O escoamento de um fluido incompressível é completamente determinado por um campo de velocidade solenoidal $u_i(x_1, x_2, x_3, t)$. O problema da turbulência² é reduzido desta forma em encontrar a distribuição de probabilidade $F^{6n}(d\omega)$ no espaço de fase $\Gamma = \{\omega\}$ do escoamento turbulento, onde $\{\omega\}$ são as $6n$ coordenadas de posição e *momentum* de um conjunto de n moléculas que compõem o fluido. O espaço de fase Γ define todos possíveis campos de vetores solenoidais $u_i(x_1, x_2, x_3, t)$ que satisfazem as equações da mecânica de fluidos e as condições de contorno impostas nas fronteiras do escoamento.

Numa formulação mais simples, isto é, menos completa, somente os valores instantâneos das entidades físicas são consideradas. Nesta aproximação, o problema da turbulência consiste em encontrar a família de um parâmetro da distribuição de probabilidade $F_t^{6n}(d\tilde{\omega})$ no espaço de fase $\Gamma_t = \tilde{\omega}$, onde os pontos $\tilde{\omega}$ são todos os possíveis campos solenoidais $u_i(x_1, x_2, x_3, t)$ que satisfazem as correspondentes condições de contorno³.

A dependência no tempo da distribuições $F_t^{6n}(d\tilde{\omega})$ reflete na evolução do campo de velocidades de acordo com as equações da mecânica dos fluidos. De fato, se escrevermos a solução destas equações simbolicamente como

$$u_i(x_1, x_2, x_3, t) = \mathbb{T}_t u_i(x_1, x_2, x_3, 0),$$

onde T_t é um operador não linear correspondente, para qualquer grandeza A do espaço de fase Γ_t , a igualdade

$$F_t^{6n}(A) = F_0^{6n}(\mathbb{T}_{-t}A)$$

é assegurada, onde $\mathbb{T}_{-t}A$ pertencendo à Γ_0 é o conjunto de todos os campos de velocidades iniciais $u_i(x_1, x_2, x_3, 0)$, os quais sob ação do operador \mathbb{T}_t são transformados

²Formulação apresentada por Monin e Yaglom, 1975, pg. 7

³Estas condições podem ser dependentes do tempo, e como resultado, se usa o subscrito t na notação para o espaço de fase.

em $u_i(x_1, x_2, x_3, t)$. Consequentemente, vemos que a família de de probabilidades $F_t^{6n}(\tilde{\omega})$ é definida em princípio unicamente pela distribuição inicial $F_0^{6n}(\tilde{\omega})$. E como resultado, na formulação em discussão, o problema da turbulência é um problema da evolução da medida da probabilidade em um espaço funcional com dadas condições iniciais.

3.3 Teorema ergódico

A teoria estatística nos remete ao senso de médias probabilísticas, ou seja, supõe-se que a distribuição de densidade de probabilidade de uma variável é conhecida. Porém, na física estatística, um valor estatístico de uma variável é obtido após a determinação de uma média sobre *ensemble*. Este procedimento requer a realização de um número muito grande de experimentos com condições iniciais macroscópicas idênticas, então a média é obtida pela média de todos os experimentos. No limite do número de experimentos tendendo ao infinito, a média de *ensemble* converge para a média no senso estatístico da teoria de probabilidades. Em outras palavras, o conhecimento da distribuição de densidade de probabilidade é equivalente à realização de um número infinito de experimentos. No entanto, na grande maioria das vezes, o controle minucioso das condições iniciais de um experimento torna este procedimento inviável, enquanto as médias possíveis de serem realizadas em laboratório são temporais e espaciais. Neste contexto, é formulada a hipótese ergódica.

Consideremos uma função escalar aleatória dependente do tempo $\xi(t)$. Se realizarmos a média de $\xi(t)$ durante um tempo finito, então a *ensemble* da variância desta média sobre a média de *ensemble* de $\xi(t)$ deve tender a zero à medida que o tempo de medida cresce. Formalmente isto pode ser expressado como (LUMLEY; PANOFSKY, 1964)

$$\sigma_\xi^2 = \left\langle \left[\frac{1}{T} \int_0^T \xi(t+t') dt' - \langle \xi(t) \rangle \right]^2 \right\rangle. \quad (3.4)$$

Esta expressão pode ser expandida e reescrita usando a propriedade de comutação

da integral e da média de *ensemble* e a propriedade da correlação ser uma função par:

$$\sigma_{\xi}^2 = \frac{2\langle \xi'^2 \rangle}{T} \int_0^T \left(1 - \frac{t}{T}\right) \rho(t) dt \rightarrow 0, \text{ com } T \rightarrow \infty, \quad (3.5)$$

onde $R_{\xi,\xi}(t) = \langle \xi'^2 \rangle \rho(t) = \langle \xi(t)\xi(t+t) \rangle$ e $\langle \xi'^2 \rangle$ é a variância de ξ sobre a média de *ensemble*.

Assumindo que $\xi(t)$ possui uma escala integral finita, isto é

$$\int_0^{\infty} \rho(t) dt = T_{\xi}, \quad (3.6)$$

então a equação (3.5) pode ser escrita como

$$\sigma_{\xi}^2 = \frac{2\langle \xi'^2 \rangle T_{\xi}}{T} \rightarrow 0, \text{ com } T \rightarrow \infty. \quad (3.7)$$

Esta última relação mostra que à medida que o tempo de média T cresce, a variância em torno da média sobre *ensemble* da variável diminui. Isto significa que, desde que T seja suficientemente longo, pode-se usar médias temporais (ou espaciais) em substituição à médias sobre um *ensemble* estatístico.

Em algumas situações pode-se desejar T grande, entretanto para tempos muito longos o sistema em questão pode não ser mais estacionário, o que invalida o teorema ergódico. Nestes casos deve se tomar cuidado na escolha de um tempo de média T que seja suficientemente longo para que haja convergência estatística e que durante este tempo o sistema ainda possa ser considerado estacionário.

3.4 Hipótese de Taylor

Nas seções anteriores postulou-se a formulação do problema estatístico da turbulência como uma evolução a partir de uma dada condição inicial e as condições nas quais as medidas temporais de grandezas traduzem as medidas no senso estatístico do *ensemble*. Do ponto de vista teórico há um grande interesse de como as grandezas estatísticas variam no espaço em um dado instante de tempo. Porém medidas espaciais são extremamente difíceis de serem realizadas, mas de acordo com a hipótese ergódica, as médias realizadas no tempo e no espaço devem convergir nos

requerimentos da validade da hipótese. Assim, medidas temporais em um ponto fixo no espaço poderiam ser convertidas em medidas espaciais num instante fixo de tempo em escoamento estacionário. Contudo esta igualdade não é assegurada devido ao fato da turbulência decair à medida que os turbilhões são arrastados pelo vento médio. Deste fato surge a necessidade de uma hipótese na qual essa transformação de coordenadas seja pelo menos aproximadamente válida. Esta é conhecida como hipótese de turbulência congelada de Taylor.

Taylor postulou que se a velocidade média do vento U for suficientemente grande, então as propriedades estatísticas da turbulência não terão tempo de mudar a medida que os turbilhões passam por um sensor. Em outras palavras, o tempo de vida do turbilhão deve ser maior do que o tempo que ele leva para passar pelo sensor.

A forma usual que esta hipótese é formulada (LUMLEY; PANOFSKY, 1964) é que, se $u_i(x_1, x_2, x_3, t)$ é o campo de velocidade turbulenta movendo-se ao longo da direção de U , então $u_i(x_1 - Ut, x_2, x_3, t)$ é o sinal medido em um ponto fixo, então

$$\left\langle \left(\frac{\partial u_1}{\partial t} \right)^2 \right\rangle = U^2 \left\langle \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right)^2 \right\rangle. \quad (3.8)$$

Em geral, assume-se que a desigualdade

$$\frac{\sigma_u}{U} < 0,5.$$

é uma condição satisfatória pela condição imposta pela hipótese de Taylor para estatísticas de pequena escala, onde σ_u é a variância de u_1 e σ_u/U é a chamada intensidade da turbulência. Entretanto, Wyngaard e Clifford (1977 *apud* Muschinski *et al.*, 2004) observam que a hipótese de Taylor pode levar à erros consideráveis em $\langle (\partial u_1 / \partial x_1)^2 \rangle$ superestimando a taxa de dissipação $\langle \epsilon \rangle = 15\nu \langle (\partial u_1 / \partial x_1)^2 \rangle$ por um fator de $15 \langle u_1^2 \rangle / U^2$.

3.5 Turbulência estatística no senso de Taylor

A idéia mais simplificada de turbulência é a de uma turbulência completamente homogênea, isotrópica e estacionária. Tal tipo de escoamento é incomum mesmo em

laboratório, entretanto esta idealização trouxe grandes avanços na compreensão de escoamentos turbulentos. As propriedades de um campo turbulento estatisticamente homogêneo e isotrópico foram primeiramente obtidas por Taylor (1935). Primeiramente vamos aplicar estas propriedades na equação (2.15) que descreve a dissipação da energia cinética que será reescrita aqui

$$\epsilon = \frac{1}{2}\nu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)^2. \quad (3.9)$$

Assumindo isotropia, alguns termos podem ser agrupados. Então a expressão toma a seguinte forma

$$\epsilon = 6\nu \left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right) \right]. \quad (3.10)$$

Pela equação da continuidade pode-se verificar que

$$\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right)^2 = -2 \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \frac{\partial u_3}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right),$$

pela hipótese de isotropia estatística resulta que

$$\left\langle \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right)^2 \right\rangle = -2 \left\langle \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right\rangle \quad (3.11)$$

e também

$$\frac{\left\langle \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right\rangle}{\sqrt{\left\langle \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right)^2 \right\rangle} \sqrt{\left\langle \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right)^2 \right\rangle}} = -\frac{1}{2}. \quad (3.12)$$

Em outras palavras, esta última expressão define um coeficiente de correlação entre $\partial u_1/\partial x_1$ e $\partial u_2/\partial x_2$ igual a $-1/2$. Taylor mostrou que, para uma turbulência isotrópica,

$$\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right)^2 = -\frac{\partial u_2}{\partial x_1} \frac{\partial u_1}{\partial x_2}$$

e

$$\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right)^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right)^2. \quad (3.13)$$

Portanto, para uma turbulência estatisticamente isotrópica, a taxa de dissipação de energia cinética turbulenta por unidade de massa por unidade de tempo pode ser escrita como

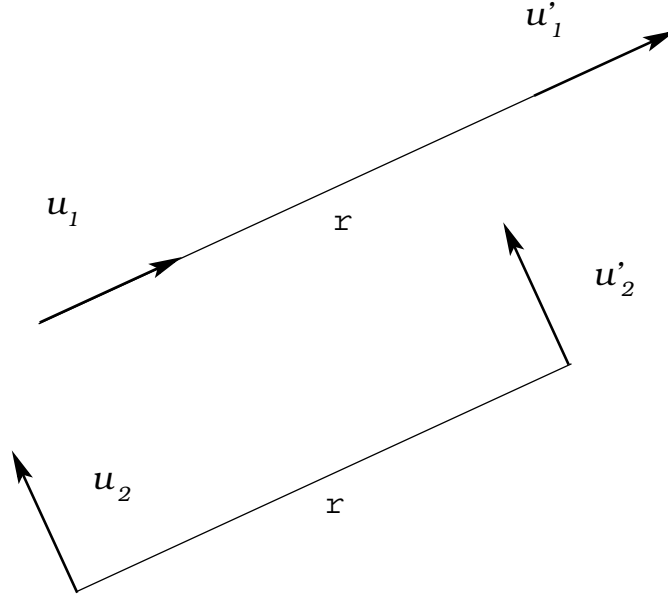


Figura 3.1: Representação de correlação de velocidade longitudinal $R_{r,r}(r) = \langle u_1 u'_1 \rangle$ e transversal $R_{t,t}(r) = \langle u_2 u'_2 \rangle$ entre dois pontos separados por uma distância r .

$$\epsilon = 15 \nu \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right)^2. \quad (3.14)$$

Outra consequência dessa formulação estatística pode ser analisada a partir da função de correlação espacial transversal entre dois pontos separados por r alinhados na direção de x_1 (ver figura (3.1))

$$R_{t,t}(r) = \langle u_2 u'_2 \rangle.$$

Devido ao fato de $R_{t,t}$ ser uma função par de $r = x_2$, podemos expandir para x_2 pequeno da seguinte forma

$$R_{t,t}(r) = \langle u^2 \rangle \left(1 - \frac{1}{2!} \left\langle \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right)^2 \right\rangle \frac{x_2^2}{\langle u^2 \rangle} + \dots \right)$$

A curvatura da curva $R_{t,t}$ em $x_2 = 0$ é portanto a medida de $\langle (\partial u_1 / \partial x_2)^2 \rangle$. Assim,

$$\left\langle \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right)^2 \right\rangle = 2 \langle u^2 \rangle \lim_{x_2 \rightarrow 0} \left(\frac{1 - R_{t,t}}{x_2^2} \right) \equiv \frac{2 \langle u^2 \rangle}{\lambda^2},$$

e com $\sigma_u^2 = \langle u^2 \rangle$ e a relação (3.13) resulta

$$\lambda = \left[\sigma_u^2 / \left\langle \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right)^2 \right\rangle \right]^{1/2}, \quad (3.15)$$

onde λ define uma escala de comprimento onde os efeitos da dissipação começam a se tornar importantes e é conhecida como a micro escala de Taylor.

3.6 A equação de von Kármán-Howarth

Dentro do conceito da teoria estatística de turbulência homogênea e isotrópica, apresenta-se uma equação fundamental da propagação da correlação que foi derivada por Theodore von Kármán e Leslie Howarth em 1938. Primeiramente imagina-se um campo turbulento homogêneo e isotrópico, cuja velocidade média U por simplificação considera-se nula. Este tipo de escoamento é incomum em situações práticas, porém no sentido teórico é importante pois representa uma condição onde a turbulência decai livremente⁴.

Os valores flutuantes, isto é, os valores subtraídos dos valores médios da equação de Navier-Stokes, em um ponto $P(x_1, x_2, x_3)$ pode ser escrito como

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \nabla^2 u_i \quad (3.16)$$

para $i, j = 1, 2, 3$, onde ∇^2 é o operador laplaciano com respeito às coordenadas x_1, x_2, x_3 . Multiplicando a componente k da velocidade u'_k do ponto $P'(x'_1, x'_2, x'_3)$ por (3.16) resulta

$$u'_k \frac{\partial u_i}{\partial t} + u'_k u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{u'_k}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu u'_k \nabla^2 u_i. \quad (3.17)$$

Nesta derivação estamos considerando que a reta que une os pontos P e P' está no eixo x_1 . A hipótese de incompressibilidade do fluido implica em

$$u'_k u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} (u_i u_j u'_k).$$

Definindo o vetor $r_i = x'_i - x_i$ e aplicando o operador média, resulta a seguinte relação

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \langle u_i u_j u'_k \rangle = -\frac{\partial}{\partial r_j} \langle u_i u_j u'_k \rangle. \quad (3.18)$$

⁴Considera-se uma turbulência bem desenvolvida onde o termo f_i que introduz energia cinética nos grandes turbilhões foi “desligado”.

Além disso,

$$-\frac{u'_k}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x'_j} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_i} (p u'_k).$$

Quando aplica-se a média, o termo $\partial \langle p u'_k \rangle / \partial x_i$ se anula ⁵ então $-(u'_k/\rho)(\partial p/\partial x_i)$ também. Como $\nabla^2 = -\nabla_r^2$, onde $\nabla_r^2 = \partial^2/\partial r_1^2 + \partial^2/\partial r_2^2 + \partial^2/\partial r_3^2$, obtém-se as seguintes relações:

$$\left\langle u'_k \frac{\partial u_i}{\partial t} \right\rangle - \frac{\partial}{\partial r_j} \langle u_i u_j u'_k \rangle = \nu \nabla^2 \langle u_i u'_k \rangle \quad (3.19)$$

e

$$\left\langle u_i \frac{\partial u'_k}{\partial t} \right\rangle - \frac{\partial}{\partial r_j} \langle u_i u'_j u'_k \rangle = \nu \nabla_r^2 \langle u_i u'_k \rangle. \quad (3.20)$$

O tensor $\langle u_i u_j u'_k \rangle$ é um tensor de terceira ordem é uma função ímpar das variáveis r_1, r_2 e r_3 . Assim,

$$\langle u_i u_j u'_k \rangle = -\langle u'_i u_j u_k \rangle = -\langle u'_i u_j u_k \rangle \quad (3.21)$$

Substituindo a equação (3.21) em (3.20), resulta

$$\left\langle u_i \frac{\partial u'_k}{\partial t} \right\rangle - \frac{\partial}{\partial r_j} \langle u_i u'_k u'_i \rangle = \nu \nabla_r^2 \langle u_i u'_k \rangle. \quad (3.22)$$

agora somando as equações (3.19) e (3.22) temos

$$\frac{\partial}{\partial t} R_{i,k} - \frac{\partial}{\partial r_j} (R_{ij,k} - R_{kj,i}) = 2\nu \nabla_r^2 R_{i,k}. \quad (3.23)$$

De acordo com as propriedades de turbulência homogênea e isotrópica, as quantidades $\langle u_i u_j u'_k \rangle$ pertencem a um dos seguintes seis grupos $\langle u_1^2 u'_1 \rangle$, $\langle u_1^2 u'_k \rangle$, $\langle u_1 u_i u'_1 \rangle$, $\langle u_1 u_j u'_k \rangle$, $\langle u_i u_j u'_1 \rangle$ e $\langle u_i u_j u'_k \rangle$, onde i, j e k podem ser igual a 2 ou 3. Devido à isotropia $\langle u_1 u'_i \rangle = 0$, $\langle u_1 u_i u'_1 \rangle = 0$, e $\langle u_i u_j u_k \rangle = 0$ porque pela reflexão de pelo menos um dos eixos x_1 ou x_2 estas expressões mudam de sinal. Além disso, $\langle u_1 u_j u'_k \rangle$ e $\langle u_i u_k u'_1 \rangle$ se anulam pela mesma razão a menos que $j = k$ ou $i = j$. Desta forma somente os seguintes valores médios restam como possivelmente diferentes de zero: $\langle u_1^2 u'_1 \rangle$, $\langle u_1 u_2 u'_2 \rangle$, $\langle u_1 u_3 u'_3 \rangle$, $\langle u_2^2 u'_1 \rangle$ e $\langle u_3^2 u'_1 \rangle$. Pela isotropia, $\langle u_1 u_2 u'_2 \rangle = \langle u_1 u_3 u'_3 \rangle$ e $\langle u_2^2 u'_1 \rangle = \langle u_3^2 u'_1 \rangle$. Por fim, três quantidades independentes permanecem diferente de zero; podemos agora definir $\langle u_1^2 u'_1 \rangle = \langle u^2 \rangle^{3/2} k(r)$,

⁵Pois, transformando este termo em coordenadas polares: $(\partial/\partial r)[r^2 \sin(\theta) s(r)] = 0$, logo $(d/dr)s(r) + 2s(r)/r = 0$. Como $s(r)$ é indefinido na origem, a solução apropriada é $s(r) = 0$, assim $\langle p u'_k \rangle = \langle p' u_k j \rangle = 0$ para todo k .

$\langle u_1 u_2 u'_2 \rangle = \langle u_1 u_3 u'_3 \rangle = \langle u^2 \rangle^{3/2} q(r)$ e $\langle u_2^2 u'_1 \rangle = \langle u_3^2 u_1 \rangle = \langle u^2 \rangle^{3/2} h(r)$. Desenvolvendo u'_1 em uma série de potências da variável $r_1 = x'_1 - x_1 = r$, têm-se

$$\langle u_1^2 u'_1 \rangle = \langle u_1^3 \rangle + \left\langle u_1^2 \frac{\partial u_1}{\partial r_1} \right\rangle r_1 + \frac{1}{2} \left\langle u_1^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial r_1^2} \right\rangle r_1^2 + \dots \quad (3.24)$$

Na reflexão do eixo r_1 , devido a $\langle u_1^2 u'_1 \rangle$ ser uma função ímpar de r_1 , o sinal muda, portanto pela condição de isotropia os termos de ordem par da expansão devem se anular. Além do mais, o termo

$$\left\langle u_1^2 \frac{\partial u_1}{\partial r_1} \right\rangle = \frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial r_1} \langle u_1^3 \rangle$$

também se anula. Então o primeiro termo da expansão (3.24) começa com

$$\frac{1}{3!} \left\langle u_1^2 \frac{\partial^3 u_1}{\partial r_1^3} \right\rangle r_1^3,$$

desta forma, com $r \equiv r_1$

$$k(r) = \frac{1}{3!} \frac{\partial^3 k(r)}{\partial r^3} r^3 + \frac{1}{5!} \frac{\partial^5 k(r)}{\partial r^5} r^5 + \dots$$

T. von Kármán e L. Howarth mostraram que uma forma geral para o tensor de correlação de terceira ordem é

$$R_{ij,k} = \langle u^2 \rangle^{3/2} \left\{ r_i r_j r_k \frac{(k-h-2q)}{r^3} + \delta_{ij} r_k \frac{h}{r} + \delta_{ik} r_j \frac{q}{r} + \delta_{jk} r_i \frac{q}{r} \right\}, \quad (3.25)$$

com

$$k = -2h,$$

e

$$q = -h - \frac{r}{2} \frac{dh}{dr}.$$

Definindo as correlações longitudinais $R_{r,r} = \langle u_1 u'_1 \rangle$ e $R_{rr,r} = \langle u_1 u_1 u'_1 \rangle$, ou seja, considerando que os pontos $P(x_1, x_2, x_3)$ e $P'(x'_1, x'_2, x'_3)$ situam-se no eixo x_1 , pode-se finalmente escrever a equação fundamental para a propagação da correlação $R_{r,r}$, conhecida como a equação de von Kármán-Howarth como

$$\frac{\partial R_{r,r}}{\partial t} - \left(\frac{\partial R_{rr,r}}{\partial r} + \frac{4}{r} R_{rr,r} \right) = 2\nu \left(\frac{\partial^2 R_{r,r}}{\partial r^2} + \frac{4}{r} \frac{\partial R_{r,r}}{\partial r} \right). \quad (3.26)$$

Capítulo 4

A teoria de turbulência de Kolmogorov

4.1 Hipóteses da estrutura local da turbulência

Considerando um escoamento turbulento, é natural assumir que as componentes de $u_i = u_i(x_1, x_2, x_3, t)$ em cada parte do domínio \mathbb{D} do espaço quadri-dimensional (x_1, x_2, x_3, t) são variáveis aleatórias no senso da teoria de probabilidades.

Define-se então

$$r_i = x'_i - x_i - u_i \tau$$

e

$$\delta u_i(r, \theta, \phi) = u'_i - u_i,$$

onde $x_i = (x_1, x_2, x_3)$, $x'_i = (x'_1, x'_2, x'_3)$, $\tau = t - t_0$ e $u'_i = u'_i(x'_1, x'_2, x'_3)$. Onde uma lei de distribuição de probabilidades F^n $3n$ -dimensional para δu_i pode ser definida para n pontos contidos no domínio \mathbb{D} .

- **Definição 1:** A turbulência é chamada localmente homogênea no domínio \mathbb{D} , se para cada ponto fixo, r_i e τ a lei de distribuição de probabilidades F^n é independente de x_i , t_0 e u_i assim como todos os pontos situados no domínio \mathbb{D} .
- **Definição 2:** A turbulência é chamada localmente isotrópica se ela é homogênea e se, além disso, a lei de distribuição da *Definição 1* é invariante com respeito à rotações e reflexões dos x_1, x_2 e x_3 .

Kolmogorov (1941a) observa que em comparação com o conceito de turbulência isotrópica introduzido por Taylor, esta definição é mais fraca no sentido que demanda a independência da lei de distribuição com t_0 , isto é, estacionariedade no tempo, porém é mais ampla no sentido que as restrições são impostas nas diferenças de velocidade δu_i e não propriamente em u_i .

A hipótese de turbulência isotrópica no senso de Taylor é experimentalmente confirmada em turbulência de grade. Porém na maioria dos casos de interesse esta hipótese não leva à conclusões verdadeiras. Entretanto, para um domínio \mathbb{D} suficientemente pequeno a turbulência pode ser considerada isotrópica. Contudo, \mathbb{D} pode ser tão pequeno que pode não existir turbulência dentro deste domínio. Neste contexto, o número de Reynolds Re deve ser suficientemente grande ($Re \rightarrow \infty$), e além disso, o domínio \mathbb{D} deve estar longe das fronteiras do escoamento e de outra similaridades.

Kolmogorov introduziu as seguintes hipóteses para a sua teoria:

- ***A primeira hipótese de similaridade:*** Para uma turbulência localmente isotrópica as distribuições F^n são unicamente determinadas pelas quantidades ν e $\langle \epsilon \rangle$.

Com esta hipótese pode-se definir uma escala de dissipação na qual os efeitos dissipativos tornam-se importantes. Assim a microescala de Kolmogorov é definida como

$$\eta \equiv \left(\frac{\nu}{\langle \epsilon \rangle} \right)^{1/4}. \quad (4.1)$$

- ***A segunda hipótese de similaridade:*** Se o módulo do vetor r_i é grande em comparação a η , então a lei de distribuição F^n é unicamente determinada por $\langle \epsilon \rangle$ e não depende de ν .

4.2 As leis de Kolmogorov

Funções estrutura de velocidade de segunda e terceira ordem são definidas, respectivamente, como

$$G_{ij} = \langle \delta u_i \delta u_j \rangle$$

e

$$G_{ijk} = \langle \delta u_i \delta u_j \delta u_k \rangle.$$

Através do emprego de funções estrutura e com $\langle \epsilon \rangle = -\frac{3}{2} \frac{d}{dt} R_{r,r}(r=0, t)$, pode-se escrever uma equação análoga a de von Kármán-Howarth como

$$4 \langle \epsilon \rangle + \left(\frac{dG_{rrr}}{dr} + \frac{4}{r} G_{rrr} \right) = 6\nu \left(\frac{d^2 G_{rr}}{dr^2} + \frac{4}{r} \frac{dG_{rr}}{dr} \right), \quad (4.2)$$

onde $G_{rr}(r) = \langle [\delta u_1(r, 0, 0)]^2 \rangle = 2[R_{rr}(0) - R_{rr}(r)]$ e $G_{rrr}(r) = \langle [\delta u_1(r, 0, 0)]^3 \rangle$.

Esta equação pode ser reescrita na seguinte forma

$$\left(\frac{d}{dr} + \frac{4}{r} \right) \left(6\nu \frac{dG_{rr}}{dr} - G_{rrr} \right) = 4 \langle \epsilon \rangle. \quad (4.3)$$

Kolmogorov mostrou que¹, em virtude de $(d/dr)G_{rr}(0) = 0$ e $G_{rrr}(0) = 0$, a equação anterior toma a forma

$$6\nu \frac{dG_{rr}}{dr} - G_{rrr} = \frac{4}{5} \langle \epsilon \rangle r. \quad (4.4)$$

As duas hipóteses de similariedade dividem o domínio em três regiões, ver figura (4.1). A primeira é conhecida como intervalo de dissipação e é definido para $r \ll \eta$, onde a partir da equação (4.4) obtém-se a seguinte lei

$$G_2^R(r) \equiv G_{rr}(r) = \frac{1}{15\nu} \langle \epsilon \rangle r^2. \quad (4.5)$$

Para $\eta \ll r \ll L$, onde L é uma escala integral de comprimento, o intervalo é conhecido como sub-intervalo inercial. Dentro deste intervalo, a partir da equação (4.4) negligenciando o primeiro termo do lado esquerdo devido a ν ser pequeno², é válida a seguinte lei, conhecida como a lei dos “4/5”,

$$G_3^R(r) \equiv G_{rrr}(r) = -\frac{4}{5} \langle \epsilon \rangle r. \quad (4.6)$$

¹Esta derivação não é trivial.

²Para o ar em condições normais $\nu \approx 1,42 \cdot 10^{-5} (m^2 s^{-1})$.

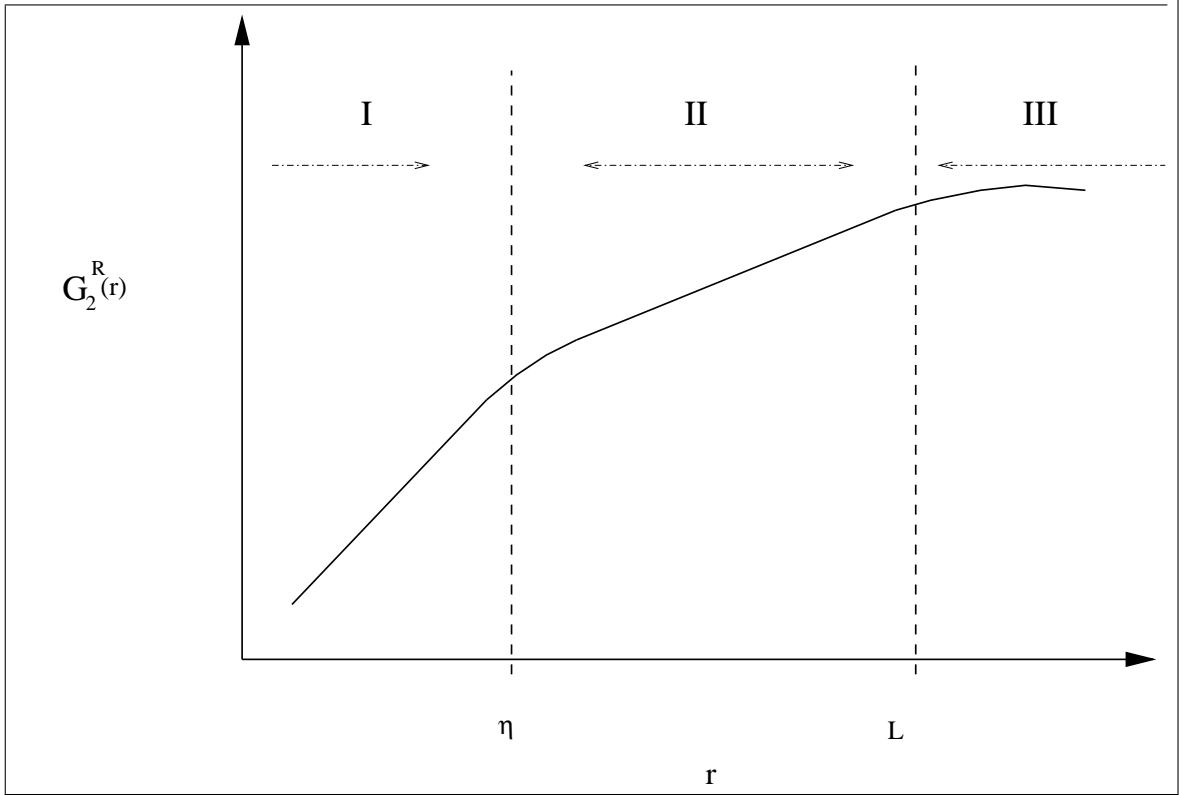


Figura 4.1: Gráfico log-log da função estrutura $G_2^R(r)$ segundo Kolmogorov. A região *I* caracteriza o intervalo de dissipação onde as quantidades estatísticas dependem de $\langle \epsilon \rangle$ e ν com $r \ll \eta$, onde $G_2^R(r) \propto r^2$. A região *II* é conhecida como sub-intervalo inercial onde as quantidades estatísticas são apenas dependentes de $\langle \epsilon \rangle$ e encontra-se no intervalo $\eta \ll r \ll L$ e $G_2^R(r) \propto r^{2/3}$. A região *III* caracteriza os grandes turbilhões, com tamanho da ordem ou maior a L .

Kolmogorov supôs que o momento de assimetria S das diferenças de velocidade, definida por

$$S = \frac{G_3^R}{(G_2^R)^{3/2}}, \quad (4.7)$$

se mantém constante no sub-intervalo inercial³. Assim, como consequência para $\eta \ll r \ll L$, obtém-se a lei conhecida como a lei dos “2/3” definida por

$$G_2^R(r) = C_k \langle \epsilon \rangle^{2/3} r^{2/3}, \quad (4.8)$$

onde $C_k = (-4/5S)^{2/3}$ é uma constante universal.

Uma forma geral dos tensores isotrópicos de segunda ordem é dada por (LAN-

³Essencialmente essa é uma hipótese baseada na auto-similaridade do campo de velocidades.

DAU; LIFSHITZ, 1959; PANCHEV, 1971)

$$G_{ij} = (G_{rr} - G_{tt}) \cos \theta_i \cos \theta_j + \delta_{ij} G_{tt}, \quad (4.9)$$

onde $\cos \theta_i = r_i/r$, δ_{ij} é a delta de Dirac e $G_2^T \equiv G_{tt} = \langle [\delta u_2(r, 0, 0)]^2 \rangle$. Diferenciando-se G_{ij} em relação à r e usando a propriedade de escoamento incompressível, obtém-se a seguinte relação entre G_{rr} e G_{tt} :

$$G_2^T = \frac{1}{2r} \frac{d}{dr} (r^2 G_2^R). \quad (4.10)$$

As equações (4.10) e (4.8) nos dão a seguinte relação para um turbulência localmente isotrópica

$$G_2^T(r) = \frac{4}{3} C_k \langle \epsilon \rangle^{2/3} r^{2/3}, \quad (4.11)$$

ou seja, esta equação define a seguinte propriedade de isotropia entre as componentes longitudinais de transversais de G_{ij} :

$$\frac{G_2^T}{G_2^R} = \frac{4}{3}. \quad (4.12)$$

A equação (4.8), através do teorema de Wiener-Kintchine, pode ser escrita no espaço dos números de onda k . Assim pode-se expressar o espectro de energia unidimensional com a famosa forma válida para o sub-intervalo inercial, conhecida como a lei dos “5/3” de Kolmogorov-Obukhov

$$E_{11}(k) = C'_k \langle \epsilon \rangle^{2/3} k^{-5/3}, \quad (4.13)$$

onde $C'_k = C_k/4,02$.

4.3 A objeção de Landau à universalidade de Kolmogorov

Landau fez uma objeção à aplicabilidade da lei dos “2/3” de Kolmogorov a qualquer tipo de escoamento turbulento com $\eta \ll r \ll L$. Segundo Landau, os valores instantâneos de $\delta u_i \delta u_j$ podem em princípio ser expressos como uma função

universal da taxa de dissipação ϵ no instante considerado. Quando se aplica a média nestas expressões⁴, entretanto, uma importante parte será jogada pela lei de variação de ϵ sobre distâncias da ordem dos grandes turbilhões ($\sim L$), e esta lei é diferente para diferentes tipos de escoamentos. O resultado do processo de média portanto não pode ser universal (Landau e Lifshitz, 1959). Em outras palavras, segundo esta objeção, a constante de Kolmogorov C_k deveria ser uma constante não-universal dependente do tipo de escoamento.

4.4 Refinamento das hipóteses da estrutura local de turbulência

Em 1962, no encontro de Marseille sobre turbulência, foram apresentadas as primeiras medidas convincentes que mostraram o espectro de energia com a dependência de $k^{-5/3}$ previsto por Kolmogorov em 1941. No mesmo encontro (Moffatt, 2002) Kolmogorov reconhece que Landau havia lhe apontado um defeito em sua teoria. Sempre que um valor local de ϵ for maior do que a média, neste local a cascata de energia será mais vigorosa, e conseqüentemente, uma crescente distribuição intermitente de $\epsilon(x_1, x_2, x_3, t)$ é esperada. Sugerindo uma distribuição de probabilidades log-normal⁵ para ϵ , da forma

$$\sigma_{\ln\langle\epsilon_r\rangle}^2 = A + \mu' \ln \frac{L}{r}, \quad (4.14)$$

onde A seria uma constante que dependeria da macroestrutura do escoamento e μ' seria uma constante universal (MUSCHINSKI; FREHLICH; BALSLEY, 2004; FRISCH, 1995), com $\langle\epsilon_r\rangle$ sendo a taxa de dissipação média dentro de uma esfera de raio r centrado em $x_i \equiv (x_1, x_2, x_3)$ definido por (FRISCH, 1995)

$$\langle\epsilon_r(x_i)\rangle = \frac{1}{(4/3)\pi r^3} \int_{|x'_i - x_i| < r} d^3 x'_i \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)^2. \quad (4.15)$$

⁴Kolmogorov referia-se à médias no senso estatístico da teoria de probabilidades. Na prática, porém, aplica-se médias temporais com tempos suficientemente longos e então se faz uma transformação galileana convertendo as medidas temporais em espaciais, para isso, se supõe que o teorema ergódico seja aplicável e utiliza-se a hipótese de turbulência congelada de Taylor.

⁵Sugestão atribuída à Obukhov.

Esta é conhecida como a terceira hipótese de similaridade, mas também é conhecida como teoria log-normal de intermitência ou K62. Kolmogorov mostrou que o expoente $2/3$ poderia ser levemente alterado e as quantidades estatísticas de ordem mais elevadas deveriam ser mais fortemente afetadas por esta intermitência (MOFFATT, 2002). Seguindo estas hipóteses, Kolmogorov reformulou a lei dos “2/3”⁶ como

$$G_2^R(r) = C_k \langle \epsilon \rangle^{2/3} r^{2/3} \left(\frac{r}{L} \right)^\mu, \quad (4.16)$$

onde $\mu = \mu'/9$ (STANIŠIĆ, 1988, pg. 356) e L é uma escala de comprimento geralmente assumida ser a escala integral de comprimento, embora outros autores definem L como sendo o diâmetro dos maiores turbilhões que ainda pertencem ao sub-intervalo inercial (MUSCHINSKI; FREHLICH; BALSLEY, 2004).

De acordo com a invariância de escalas de K41⁷, uma função estrutura de ordem p deveria ser expressa por

$$G_p(r) = C_p \langle \epsilon \rangle^{p/3} r^{p/3} \propto r^{\zeta_p}. \quad (4.17)$$

Os valores obtidos experimentalmente para ζ_p não conferem a igualdade $\zeta_p = p/3$, sobretudo para $p > 3$. O modelo log-normal prevê os expoentes de escala das funções estrutura de ordem p de acordo com

$$\zeta_p = \frac{p}{3} - \frac{1}{2} \mu p (p - 3), \quad (4.18)$$

onde μ seria o parâmetro ajustável do modelo log-normal (WATER; HERWEIJER, 1999). Em particular, há um interesse especial para o expoente de sexta ordem ζ_6 , pois está relacionado com o expoente de intermitência da equação (4.16) por

$$\mu = \frac{1}{9}(2 - \zeta_6). \quad (4.19)$$

Alternativamente á teoria K62, surgiram nas últimas décadas teorias fractais e multifractais para explicar as anomalias de ζ_p com K41 à luz da falta de auto-similaridade do campo de velocidades.

⁶ A lei dos “5/3” para o espectro de energia se altera de maneira similar.

⁷ Ver a forma das equações (4.6) e (4.8).

Enfim, a objeção de Landau introduziu um ingrediente novo às teorias de turbulência, a chamada intermitência. A qual será discutida com mais detalhes no capítulo que segue.

Capítulo 5

Fenomenologia de intermitência

O fator intermitência é o divisor de águas entre a teoria clássica K41 e as teorias dos últimos 44 anos. Neste capítulo serão abordadas definições, implicações e algumas questões ainda não esclarecidas sobre este tema.

5.1 Intermitência

O termo *intermitência* é empregado em várias situações, seu significado pode ser diferente dependendo do emprego ou mesmo da definição do autor. De um modo geral, entende-se função intermitente como uma função caracterizada por pulsações aleatórias de diferentes amplitudes como as da figura (5.1). Abordaremos aqui duas das principais definições de intermitência.

Na camada limite atmosférica, supõe-se que as estimativas dos momentos estatísticos de ordem mais baixa da turbulência são estatisticamente estáveis se o comprimento das séries temporais é algo em torno de 15 minutos ou mais. Isto é devido à separação entre grandes e pequenas escalas (mesoescala e escala micrometeorológica) ser razoavelmente clara (MUSCHINSKI; FREHLICH; BALSLEY, 2004). Neste contexto denomina-se intermitência os eventos esporádicos de criação e morte da turbulência em pequenas regiões na baixa atmosfera¹. Estes fenômenos possuem tempo de vida curto, em geral poucos minutos e são comumente observados durante

¹Alguns autores incluem ainda nesta definição efeitos de escalas maiores, porém aqui não estamos considerando fenômenos como variabilidade da mesoescala, ondas de gravidade e perturbações de escala sinótica devido a suposição de que a separação entre estas escalas é bem definida.

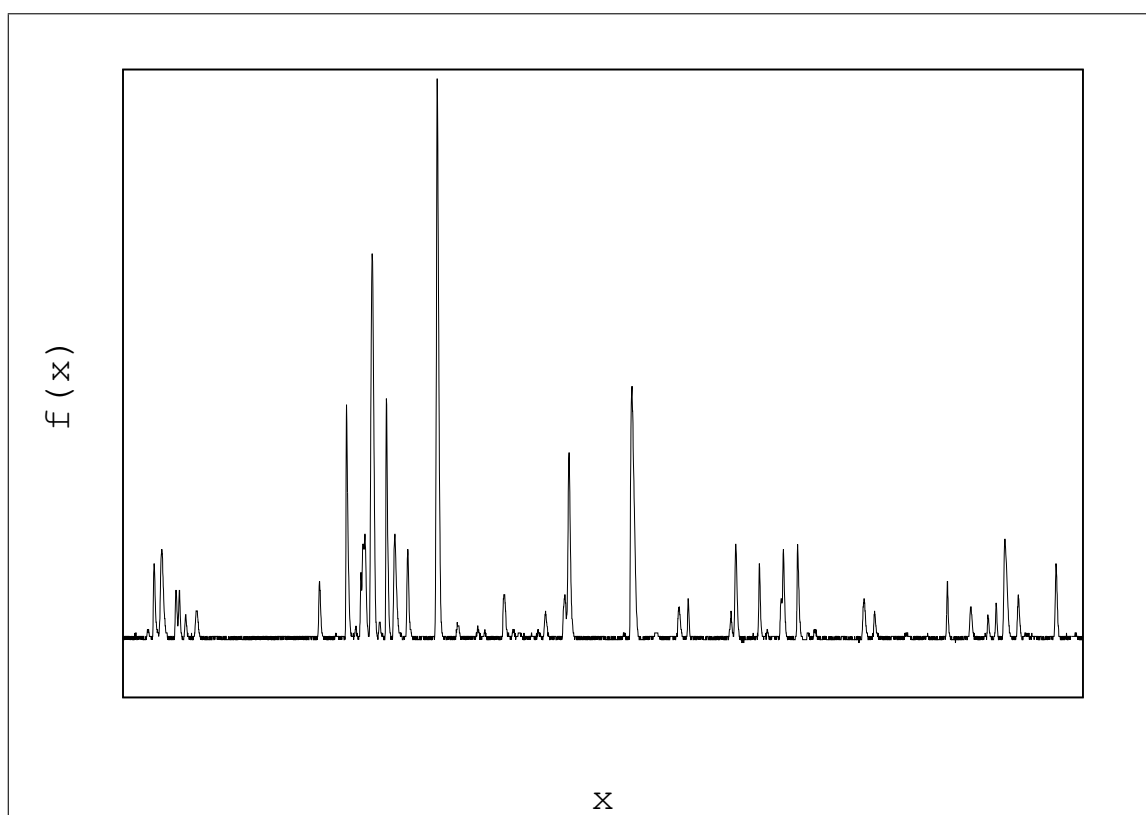


Figura 5.1: Exemplo de uma função intermitente.

noites de céu claro e pouco vento onde há grande perda de calor da superfície para a atmosfera. Devido à forte estabilidade, a porção inferior da camada desacopla dos níveis superiores permitindo o surgimento de jatos de baixos níveis. Estes jatos atuam como forçantes, criando cisalhamento e gerando turbulência em regiões isoladas. Nestas regiões ocorre um grande transporte momentâneo de quantidades escalares e vetoriais pela turbulência até que a estabilidade se estabeleça e a turbulência seja suprimida.

Por esta razão, este fenômeno em micrometeorologia também é denominado intermitência global. Pelo caráter aleatório, a intermitência global traz uma grande complicação na questão do balanço dos fluxos turbulentos noturnos na camada limite atmosférica. Por ser um fenômeno com escala de vida curta, é necessário que se trabalhe com janelas temporais mais curtas, de modo que a contribuição dos signifi-

cativos efeitos intermitentes no transporte das quantidades não seja suprimida pela estatística das longas séries temporais. Porém, este tipo de tratamento em relação à escolha da escala de tempo pode trazer outro problema, a não convergência dos momentos estatísticos. Por esta razão, intermitência é um foco de interesse na área da micrometeorologia.

No estudo de Turbulência Completamente Desenvolvida (TCD) o termo *intermitência* é geralmente referido à taxa de dissipação de energia cinética turbulenta ϵ ser aleatória no tempo e espaço. Segundo (PRASKOVSKY; ONCLEY, 1994), depois da publicação da hipótese refinada de similaridade (apresentada na seção 4.4), intermitência tornou-se o problema central em TCD. Dentro deste conceito, a intermitência é dividida em três intervalos característicos em relação à r : Intermitência de grande escala para $r \sim L$, intermitência do sub-intervalo inercial para $\eta \ll r \ll L$ e intermitência do intervalo de dissipação para $r < \eta$.

Ainda não é claro quais são os efeitos da intermitência de grande escala² nas estatísticas do sub-intervalo inercial e no intervalo de dissipação. Segundo Frisch (1995 pgs. 125 e 127), intermitência no intervalo de dissipação não implica na violação da K41³ e há pouca dúvida sobre a existência de intermitência nessa escala; enquanto uma questão mais intrigante diz respeito à existência de intermitência no sub-intervalo inercial (VAINSHTEIN; SREENIVASAN, 1994; FRISCH, 1995), a qual invalidaria K41. Segundo (SREENIVASAN; ANTONIA, 1997), o apoio à validade de K62⁴ é forte, todavia esta hipótese pode ser questionada.⁵

²A objeção de Landau publicada em (LANDAU; LIFSHITZ, 1959) é em relação a esta intermitência onde r possui escalas comparáveis a L .

³A teoria clássica de Kolmogorov (1941a, b, e c) apresentada nas seções (4.1) e (4.2).

⁴A teoria log-normal de 1962 proposta para a intermitência do sub-intervalo inercial.

⁵Adaptado a partir do original “ (...) the support for Refined Similarity Hypothesis is strong but not unequivocal.”

5.2 Fenômenos atribuídos à intermitência em turbulência completamente desenvolvida

Como uma implicação direta da existência de intermitência no sub-intervalo inercial, a constante universal μ da equação (4.16) deve ser diferente de zero. Outra consequência seria a existência de uma função de correlação para valores instantâneos de ϵ ⁶ (PRASKOVSKY; ONCLEY, 1994), definido por

$$R_{\epsilon,\epsilon}(r) = \langle \epsilon(x_1)\epsilon(x_1 + r) \rangle \propto r^{-\beta}, \quad (5.1)$$

onde β é o chamado expoente de intermitência. Contudo, as evidências fenomenológicas não são conclusivas. Os valores encontrados experimentalmente para β variam de 0,20 a 0,50 e os encontrados para μ variam de 0,00 até 0,08.

A anomalia de escala dos expoentes das funções estrutura é também um fenômeno atribuído à intermitência do sub-intervalo inercial. As escalas não-triviais das funções estrutura são o argumento mais forte em favor da intermitência no sub-intervalo inercial (VAINSHTEIN; SREENIVASAN, 1994), a possibilidade de escalas universais é um dos aspectos mais excitantes da turbulência (WATER; HERWEIJER, 1999).

Há uma busca incessante na determinação do coeficiente μ , o qual regularia o modelo log-normal de K62. Porém há um grande desacordo nos valores encontrados para ζ_p à medida que p cresce. Os modelos fractais e multifractais propõem fórmulas alternativas à equação (4.18). Em geral parecem conduzir a resultados que concordam melhor aos observados experimentalmente.

Deve se observar, entretanto, que a precisão das medida de momentos estatísticos de ordem elevadas é delicada. Para tal é necessário tempos de amostragem muito longos. Devido ao requerimento da hipótese ergódica, o tempo necessário para a convergência dos momentos estatísticos aumenta drasticamente à medida que se aumenta a ordem do momento estatístico. Além disso, é claro, é fundamental que os escoamentos se mantenham estacionários durante estas medidas. Contudo, devido

⁶A obtenção de valores instantâneos para a taxa de dissipação será discutida na seção 6.1.

às dificuldades experimentais, a confiança das medidas dos expoentes de escala ζ_p para grandes ordens ainda merece algum estudo.

5.3 Considerações sobre intermitência e a teoria de Kolmogorov

A teoria de Kolmogorov é construída a partir de argumentos de simetria e de escalas associados às equações de Navier-Stokes. Kolmogorov formulou sua teoria imaginando um campo turbulento decaindo livremente e com número de Reynolds suficientemente grande. Neste contexto a turbulência é dita ser completamente desenvolvida. Frisch (1995) apresenta uma bela definição sobre TCD no senso de Kolmogorov:

No limite do número de Reynolds infinito, todas as possíveis simetrias da equação de Navier-Stokes, usualmente quebradas pelos mecanismos que produzem o escoamento turbulento, são restauradas em um senso estatístico nas pequenas escalas e longe das fronteiras.

De acordo com Kolmogorov, em uma TCD existe um sub-intervalo de equilíbrio universal onde não há dissipação de energia, apenas transferência inercial de energia em forma de cascata, onde os grandes turbilhões transferem energia para os menores. O sub-intervalo inercial seria delimitado por $\eta \ll r \ll L$, onde L é o tamanho característico dos grandes turbilhões e η é a escala onde os efeitos de viscosidade molecular tornam-se importantes.

Frisch (1995 pg. 89) ressalta que para se obter a dependência $G_p \propto r^{p/3}$ não é necessário assumir isotropia local. Por exemplo, de caráter qualitativo no caso $p = 2$, podemos assumir que a diferença de energia cinética entre dois pontos afastados por r é da ordem de δu_1^2 , onde $\delta u_1 = u_1(x_1 + r) - u_1(x_1)$, temos então

$$\Delta E_c \sim \delta u_1^2.$$

Como consideramos uma turbulência livremente decaindo, a taxa de variação de energia cinética entre dois pontos separados por r durante uma variação de tempo

Δt deve ser da ordem da taxa de dissipação de energia. Além do mais, o tempo Δt deve ser da ordem de $r/\delta u_1$, desta forma

$$\epsilon \sim \frac{\Delta E_c}{\Delta t} \sim \frac{\delta u_1^2}{\Delta t} \sim \frac{\delta u_1^3}{r},$$

assim

$$\delta u_1 \sim (\epsilon r)^{1/3},$$

agora, levando a última expressão ao quadrado e aplicando o operador média, têm-se

$$\langle (\delta u_1)^2 \rangle \propto \langle \epsilon \rangle^{2/3} r^{2/3}.$$

Esta é uma derivação qualitativa da lei dos “2/3”, onde intrinsicamente foi assumido que δu_1 é independente de x_1 , ou seja, foi assumido homogeneidade local. Entretanto, Kolmogorov (1941a) deriva esta lei através de argumentos dimensionais.

Por outro lado, a lei dos “4/5” foi obtida por Kolmogorov (1941c) assumindo, além de homogeneidade, isotropia no sub-intervalo inercial. Seguindo Frisch (1995) e Moffatt (2002), a lei dos “4/5” por ser exata e não-trivial, estabelece uma condição limite na qual as teorias de turbulência são aplicáveis. Por esta razão, a lei dos “4/5” é considerada um dos mais importantes resultados em TCD.

Kolmogorov (1941c) introduziu a constante C_k de uma maneira diferente à Kolmogorov (1941a). Ele assumiu que a assimetria S das diferenças de velocidades permanece constante no sub-intervalo inercial. Contudo, redefinindo S com o emprego das equações (4.6) da K41 e (4.16) da K62 resulta em

$$S \equiv \frac{G_3^R(r)}{(G_2^R(r))^{3/2}} = -\frac{4}{5} C_k^{-3/2} L^{3\mu/2} r^{1-3\zeta_2/2}, \quad (5.2)$$

ou seja, a assimetria S das diferenças de velocidade se torna uma função da variável r a menos que $\zeta_2 = 2/3$. Como um resultado fundamental, a existência de intermitência no sub-intervalo local, que implica em $\mu \neq 0$ se $\zeta_2 = 2/3 + \mu$, têm como consequência a dependência de S em r .

Por outro lado, a questão da universalidade de C_k e μ repousa principalmente sobre a dependência do número de Reynolds. Pois, segundo Monin e Yaglom (1975), da dependência de $\langle \epsilon \rangle$ dos turbilhões mais energéticos resulta uma taxa de dissipação

flutuante desordenada $\epsilon(x_1, x_2, x_3, t)$ caracterizada por um comportamento intermitente. Com isso espera-se que a variância do campo $\epsilon(x_1, x_2, x_3, t)$ aumente com o aumento do número de Reynolds Re .

Praskovsky e Oncley (1994) questionaram a grande dispersão de valores encontrados na literatura para C_k , μ , e β . Os quais são encontrados variar de 1,5 – 2,6, 0,00 – 0,08 e 0,2 – 0,5, respectivamente. Eles investigaram a dependência de C_k , μ e também β com o número de Reynolds da microescala de Taylor R_λ , definido por $R_\lambda = \sigma_u \lambda / \nu$. Eles basearam seus estudos em dados de túnel de vento e camada limite atmosférica, com R_λ variando de 2800 a 12700. Encontraram um valor para μ que definiram como “não mensurável”, encontraram $\beta \approx 0,20$ independente de R_λ e encontraram C_k dependente de R_λ , com $C_k \approx R_\lambda^{-0,10}$. Entretanto Sreenivasan (1995), fazendo uma compilação com mais de uma centena de trabalhos relacionando C_k e R_λ , com valores de $R_\lambda \approx 50$ até $R_\lambda \approx 20.000$, não encontrou nenhuma dependência de C_k com R_λ e sim uma grande dispersão em torno da média: $C_k = 2,13 \pm 0,22$. Em um outro trabalho, Mydlarski e Warhaft (1996 *apud* Tsuji, 2004) encontraram C_k dependente de R_λ através da seguinte relação $C_k = 2,05 + 50,7 \cdot R_\lambda^{-2/3}$. Saddoughi (1997) com medidas de altíssima resolução obteve tanto para $R_\lambda \approx 800$ como para $R_\lambda \approx 2000$ valores para C_k em concordância com $C_k = 2,13$ de Sreenivasan (1995).

Estes resultados são intrigantes porque a dependência em R_λ não é clara e a revisão de centenas de estimativas de C_k apresentada por Sreenivasan (1995) mostra uma grande dispersão em torno de um valor médio. Por esta razão Muschinski *et al.* (2004) referem-se à C_k como uma constante “quase universal”.

A determinação de C_k depende essencialmente da determinação da taxa de dissipação média e do reconhecimento da região onde situa-se o sub-intervalo inercial. Com dados de velocidade de vento obtidos através de anemometria de alta resolução, geralmente assume-se que é válida a hipótese de isotropia local dentro do sub-intervalo inercial e então emprega-se a relação $\epsilon = 15\nu (\partial u_1 / \partial x_1)^2$ para a determinação de $\langle \epsilon \rangle$. Da mesma forma, emprega-se $\epsilon = 15\nu (\partial u_1 / \partial x_1)^2$ na obtenção de valores instantâneos da taxa de dissipação para o cálculo de $R_{\epsilon, \epsilon}(r) = \langle \epsilon(x_1) \epsilon(x_1 + r) \rangle$. Pois, de acordo com K62, $R_{\epsilon, \epsilon}(r) \propto r^{-\beta}$, onde β está de alguma forma relacionado

com μ , desde que ambos são consequência da existência de intermitência no sub-
intervalo inercial.

Capítulo 6

Simetrias e aspectos universais em turbulência bem desenvolvida

O parâmetro que controla o escoamento em uma turbulência completamente desenvolvida é a taxa de dissipação de energia cinética turbulenta ϵ . A taxa de dissipação de energia é governada pela energia dos grandes turbilhões, porém a dissipação só ocorre de fato nos menores turbilhões. A determinação da taxa de dissipação, entretanto, é realizada num intervalo intermediário, no sub-intervalo inercial de equilíbrio universal, onde a isotropia local é geralmente assumida.

A suposição de isotropia local foi feita por Kolmogorov na elaboração de K41 e geralmente esta hipótese é assumida sem nenhuma verificação. Isto se deve ao fato que a grande maioria dos experimentos de alta resolução (com fios quentes) é unidimensional. Anemometria de alta resolução com medidas bidimensionais é bastante complicada, principalmente porque pode comprometer as medidas de pequena escala que são fundamentais para a verificação da hipótese de isotropia local. Anemômetros sônicos, geralmente usados em camadas limites atmosféricas, fornecem medidas tridimensionais, porém com uma resolução grosseira. As taxas de amostragem mais comuns neste tipo de anemometria se situam entre 10 e 20 Hz, enquanto em anemometria com fios quentes as taxas de amostragem são da ordem de dezenas de milhares de Hertz.

O objetivo inicial desta dissertação era verificar a universalidade da constante de Kolmogorov C_k em diferentes números de Reynolds. A determinação desta cons-

tante pode ser realizada de duas maneiras. Uma pela determinação da taxa de dissipação e o emprego de uma lei para $G_2^R(r)$ e a outra é pela determinação do momento de assimetria das diferenças de velocidades. Tanto a determinação da taxa de dissipação como a assimetria são obtidos sob a suposição de isotropia local. Desta forma, a investigação desta hipótese torna-se fundamental na justificativa dos resultados obtidos.

Isotropia local é geralmente assumida na determinação da taxa de dissipação média $\langle \epsilon \rangle$ e na obtenção de valores instantâneos de ϵ para a determinação da constante β , obtida através da correlação

$$R_{\epsilon,\epsilon}(r) = \langle \epsilon(x_1)\epsilon(x_1 + r) \rangle \propto r^{-\beta},$$

cujas existências corroboram a existência de intermitência do sub-intervalo inercial prevista pelo modelo log-normal. Entretanto, nos últimos anos um número crescente de trabalhos experimentais com medidas de alta resolução têm sido realizados no sentido de verificar até que ponto a hipótese de isotropia local é realmente válida. Contudo, não se tem idéia dos efeitos anisotrópicos nas quantidades obtidas através de suposições de isotropia.

Com base no conjunto de dados disponível que contemplam três experimentos, cuja descrição encontra-se no apêndice A, será discutida primeiramente as metodologias geralmente empregadas na determinação da taxa de dissipação de energia e a metodologia para a determinação da constante C_k . Em um segundo momento discutiremos a hipótese de turbulência localmente isotrópica no mesmo conjunto de dados a partir de funções estrutura de diversas ordens.

6.1 Dissipação da energia cinética turbulenta

Uma expressão mais geral para a taxa de dissipação foi apresentada na seção 2.2 e é dada por

$$\epsilon(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{2} \nu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)^2. \quad (6.1)$$

Esta equação contém derivadas espaciais cruzadas das três componentes da velocidade do vento. Por esta razão, esta fórmula não é empregável na determinação de

ϵ a partir de medidas unidimensionais de velocidade, por exemplo, como os dados obtidos a partir de um anemômetro de fio quente. Entretanto, Taylor (1935) (seção 3.5) mostrou que para uma turbulência isotrópica, a expressão (6.1) pode ser reescrita como

$$\epsilon(x_1) = 15\nu \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right)^2. \quad (6.2)$$

Deste modo, para uma turbulência isotrópica, a equação (6.2) pode ser usada em experimentos unidimensionais na obtenção da taxa de dissipação de energia.

A equação (6.2) é amplamente usada na literatura tanto para obtenção de valores médios, como na obtenção de valores instantâneos de ϵ . Para isso emprega-se a hipótese de turbulência congelada de Taylor e escreve-se através do método das diferenças finitas a derivada da velocidade como

$$\frac{\partial u_1(x_1)}{\partial x_1} = \frac{u(x_1 + \delta x_1) - u(x_1 - \delta x_1)}{2\delta x_1}, \quad (6.3)$$

onde δx_1 é o intervalo de amostragem. Contudo a expressão (6.2) é válida somente em condições de isotropia, desta forma, deve-se restringir-la à um domínio onde esta condição seja ao menos aproximadamente verdadeira. Além disso, deve-se ter δx_1 pequeno para que o método das diferenças finitas conduza a valores razoáveis de ϵ .

Alternativamente, a equação $G_3^R(r) = -(4/5) \langle \epsilon \rangle r$, como lei fundamental em teoria de turbulência, pode ser usada na determinação da taxa de dissipação média. Entretanto, momentos estatísticos de terceira ordem muitas vezes apresentam ruídos (ANFOSSI et al., 2000), por esta razão na literatura a expressão (6.2) é amplamente preferida.

A lei para a função estrutura de segunda ordem, equação (4.8) ou mesmo a equação (4.16), pode ser usada para determinar a taxa média de dissipação de energia cinética turbulenta $\langle \epsilon \rangle$, entretanto o valor da constante C_k deve ser conhecido previamente.

Na realização desta dissertação, foi testado o emprego da equação (6.2) com o método das diferenças finitas na determinação de $\langle \epsilon \rangle$, entretanto a baixa taxa de amostragem (3 kHz e 16 Hz) levaram à derivadas mal definidas e assim subestimaram a taxa de dissipação média em várias ordens de grandeza. O mesmo método foi

testado com funções conhecidas e que possuíam derivadas analíticas, como por exemplo senos, cossenos e equações de segundo grau. Foi observado que a medida que a resolução numérica diminui as derivadas numéricas vão subestimando as derivadas analíticas.

Medidas de dissipação diretas empregando a equação (6.2) necessitam anemometria de alta resolução. De acordo com Kuznetsov, Praskovsky e Sabelnikov (1992 *apud* Muschinski *et al.* 2004), a resolução espacial deve ser 2η ou melhor, a qual traduz a seguinte resolução no tempo

$$\delta t = \frac{2}{U} \left(\frac{\nu^3}{\epsilon} \right)^{1/4}.$$

Segundo eles, em uma camada limite atmosférica os valores típicos de U são da ordem de 10 m/s e as flutuações instantâneas de ϵ são da ordem de $0,1 \text{ m}^2/\text{s}^3$. Desta forma $\delta t = 86 \mu\text{s}$, ou seja, a taxa de amostragem deve ser $11,7 \text{ kHz}$ ou maior. Para um túnel de vento padrão, estes requerimentos elevam a taxa de amostragem necessária para cerca de 32 kHz .

Desta forma fica claro que, na impossibilidade da determinação da taxa de dissipação média pela equação (6.2) e o método das diferenças finitas, a alternativa restante para determinar C_k será pelo momento de assimetria das diferenças de velocidade $S = G_3^R / (G_2^R)^{3/2}$. A taxa de dissipação média $\langle \epsilon \rangle$ será determinada apenas para caracterizar o escoamento através das microescalas λ e η e o número de Reynolds da microescala de Taylor R_λ , cujos os valores absolutos não terão importância, somente a ordem de grandeza. Por esta razão a taxa de dissipação será determinada através do ajuste de G_2^R no sub-intervalo inercial usando a constante $C_k = 2,13$ dada por Sreenivasan (1995).

6.2 Emprego de funções estrutura na caracterização de simetrias locais

Na seção anterior foi mencionado que a função estrutura de terceira ordem da velocidade G_3^R apresenta um comportamento ruidoso. Este ruído pode ser visto comparando a função estrutura longitudinal de segunda ordem de velocidade $G_2^R(r) =$

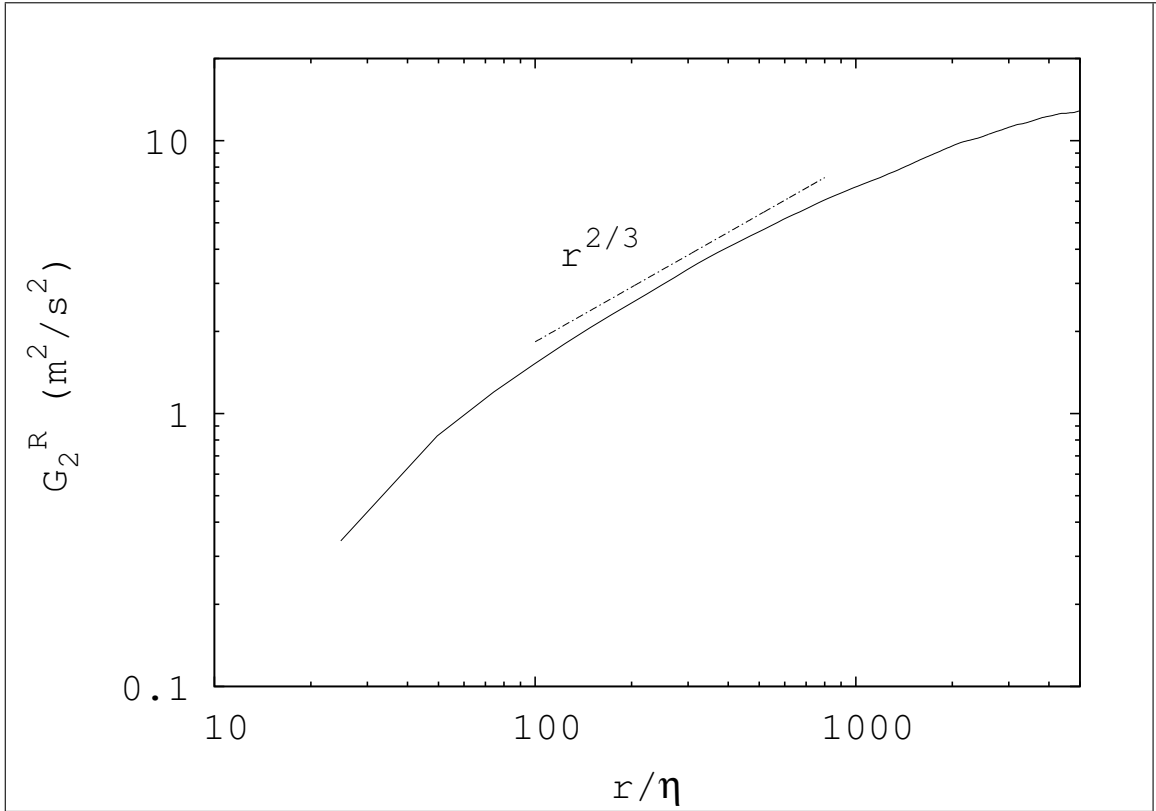


Figura 6.1: Função estrutura longitudinal de segunda ordem $G_2^R(r)$ obtida em túnel de vento com taxa de amostragem de 3 kHz. A figura permite perceber o sub-intervalo inercial definido pela desigualdade $1 \ll r/\eta \ll L/\eta$, com $L/\eta \sim 2000$, $\lambda/\eta \sim 100$ e $\eta \sim 0,2\text{mm}$, onde $G_2^R(r) \propto r^{2/3}$.
md

$\langle [u_1(x_1 + r) - u_1(x_1)]^2 \rangle$ na figura (6.1) com $G_3^R(r) = \langle [u_1(x_1 + r) - u_1(x_1)]^3 \rangle$ na figura (6.2).

Pode-se primeiramente atribuir este ruído à duas razões: ao efeito de finitude da série temporal e também à amplificação dos ruídos intrínsecos dos dispositivos de medida de velocidade com o aumento do momento estatístico.

Entretanto este ruído é percebido com dados de três experimentos diferentes e apresenta-se de maneira similar nas três situações. Como os experimentos foram realizados por instrumentos de tecnologias diferentes, pode-se descartar a possibilidade de amplificação de ruídos intrínsecos de medidas. Quanto a questão da finitude da série temporal, como resultado do teorema ergódico, este ruído deveria diminuir

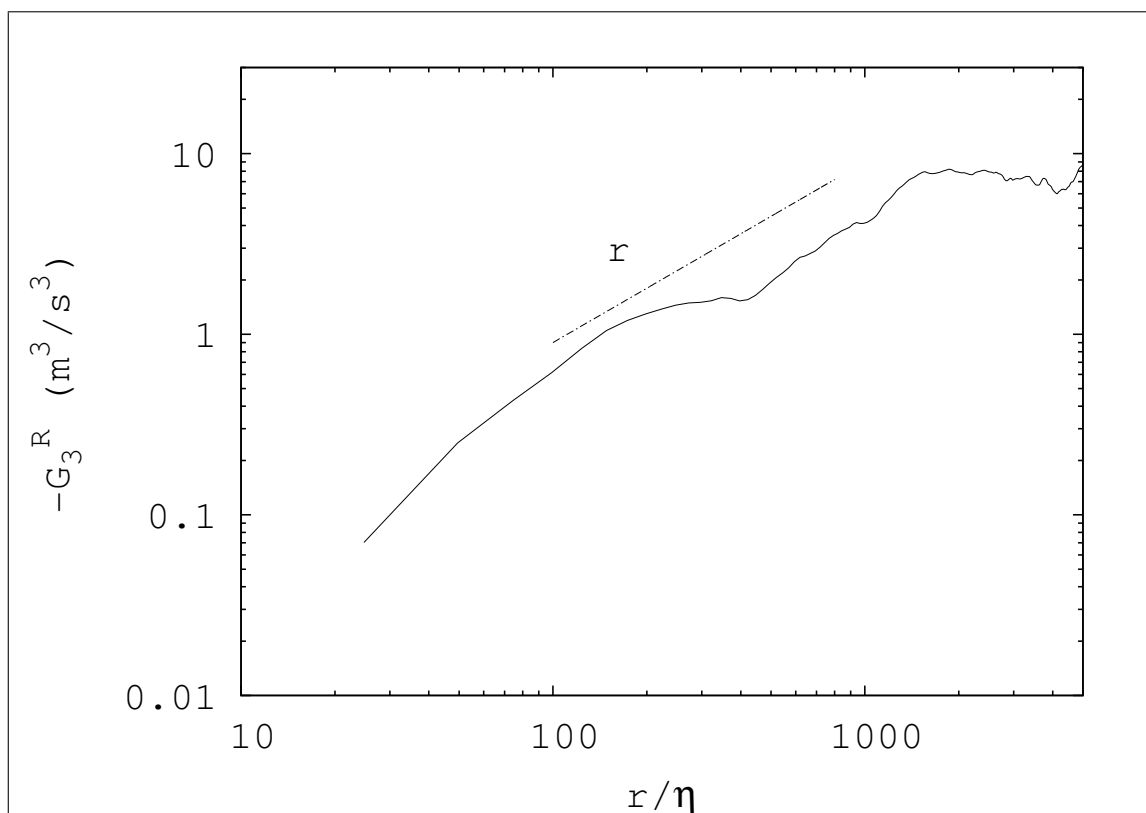


Figura 6.2: Função estrutura de terceira ordem longitudinal $G_3^R(r)$ para a mesma série de dados da figura (6.1). Em contraste com $G_2^R(r)$ da figura (6.1), a relação $G_3^R(r) \propto r$ não é bem caracterizada para a mesma região da figura (6.1).

com o aumento do tempo de média. Contudo foram testadas séries de 34, 68 e 136 minutos para dados de velocidade de vento na camada limite atmosférica e o ruído em G_3^R não foi observado diminuir significativamente com o aumento do tempo de média. Assim outro fator deve estar associado ao comportamento anômalo de G_3^R .

Alguém pode vir a pensar que as conclusões sobre o estranho comportamento em G_3^R são precipitadas. De fato nenhum estudo sobre os erros de medidas dos instrumentos e nenhum teste sobre os erros devido à escolha do tempo de média foram realizados. Não obstante, se estas conclusões estiverem erradas, funções estrutura de ordem mais alta deverão ser mais fortemente afetadas caso qualquer um dos fatores discutidos anteriormente seja responsável pelo comportamento anômalo.

Funções estrutura de velocidade de segunda, terceira, quarta, quinta e sexta

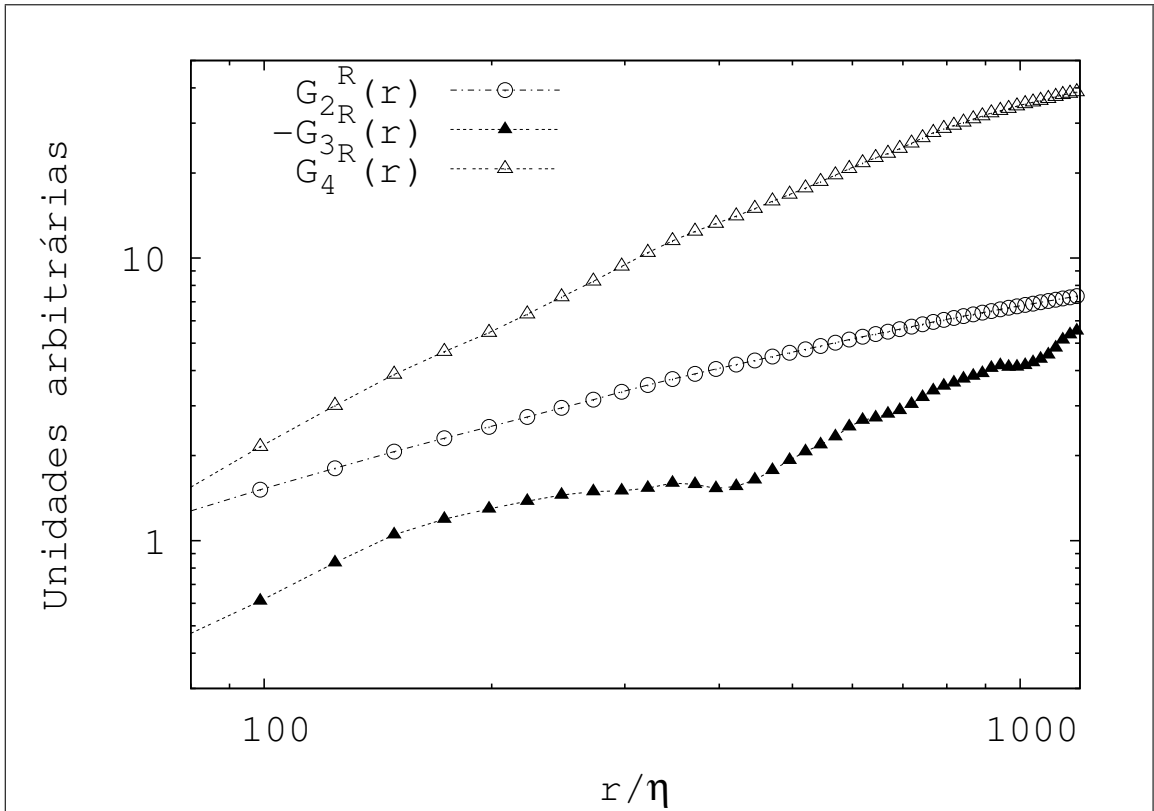


Figura 6.3: Funções estrutura longitudinais de segunda, terceira e quarta ordem para a mesma série de dados da figura (6.1) no intervalo $100 < r/\eta < 1000$.

ordem foram calculadas. Não entrando em discussão sobre os expoentes de escala ζ_p e nem o tempo de média, as funções G_2^R , G_4^R e G_6^R apresentaram ser curvas suaves, enquanto $-G_3^R$ e $-G_5^R$ não são suaves. A figura (6.3) mostra G_2^R , $-G_3^R$ e G_4^R dentro de um intervalo que provavelmente contém o sub-intervalo inercial. Nela pode se perceber o comportamento anômalo apenas em G_3^R .

A anomalia em funções estrutura de ordem ímpar implica numa discrepância com a lei $G_3^R(r) = -(4/5) \langle \epsilon \rangle r$ de Kolmogorov que é presumida ser universal independente de intermitência no sub-intervalo inercial. Frisch (1995, página 129) considera desvios da lei “4/5” intrigantes e cita possíveis fatores ¹ que poderiam causar desvios da lei dos “4/5”:

¹Frisch além destes cita os seguintes fatores que o autor não achou pertinentes à discussão: 5. Não existência de $\langle \epsilon \rangle$ finito quando $\nu \rightarrow 0$; e 6. Determinação imprecisa de $\langle \epsilon \rangle$.

1. Má qualidade dos dados;
2. Contaminação pelo intervalo de dissipação;
3. Violação da hipótese de Taylor;
4. Falta de homogeneidade e/ou isotropia.

Como o ruído é visto nos dados dos dois túneis e nos dados de atmosfera, pode-se descartar a possibilidade de má qualidade dos dados. Devido ao número de Reynolds em todos os experimentos ser alto, o intervalo de dissipação é claro e não contamina o sub-intervalo inercial (ver figura (6.1) na região $r/\eta < \lambda/\eta \sim 100$). Em todos os dados analisados a intensidade da turbulência é baixa ($< 0,25$) e por esta razão o autor não acredita ser esta uma possível causa. A alternativa que resta, seguindo a estas possíveis causas, é a averiguação das hipóteses de homogeneidade e isotropia local.

A maneira mais direta de testar a hipótese de isotropia local é pela relação entre funções estrutura de segunda ordem transversais e longitudinais de velocidade, que dentro do sub-intervalo inercial devido à isotropia devem apresentar a seguinte relação

$$\frac{G_2^T(r)}{G_2^R(r)} = \frac{4}{3}. \quad (6.4)$$

A figura (6.4) mostra a razão de anisotropia calculada com dados da camada limite atmosférica. Pode-se ver na figura que a razão se aproxima $4/3$ somente nas menores escalas resolvidas que são da ordem de 3λ . Poder-se-ia concluir diretamente desta figura que a hipótese de isotropia local não é cumprida na maior parte do sub-intervalo inercial. No entanto, deve se ter em mente que uma rotação de coordenadas foi realizada para alinhar o eixo x_1 com a direção média do vento, devido ao fato do vento mudar constantemente de direção. Em princípio, se esta rotação não for eficaz ela pode ser responsável pela discrepância com o valor $4/3$ visto na figura (6.4).

Também foram calculadas funções estrutura de segunda à quarta ordem para concentração de gás hélio em um experimento de dispersão em túnel de vento com baixa velocidade de vento e de temperatura na camada limite superficial. As figuras

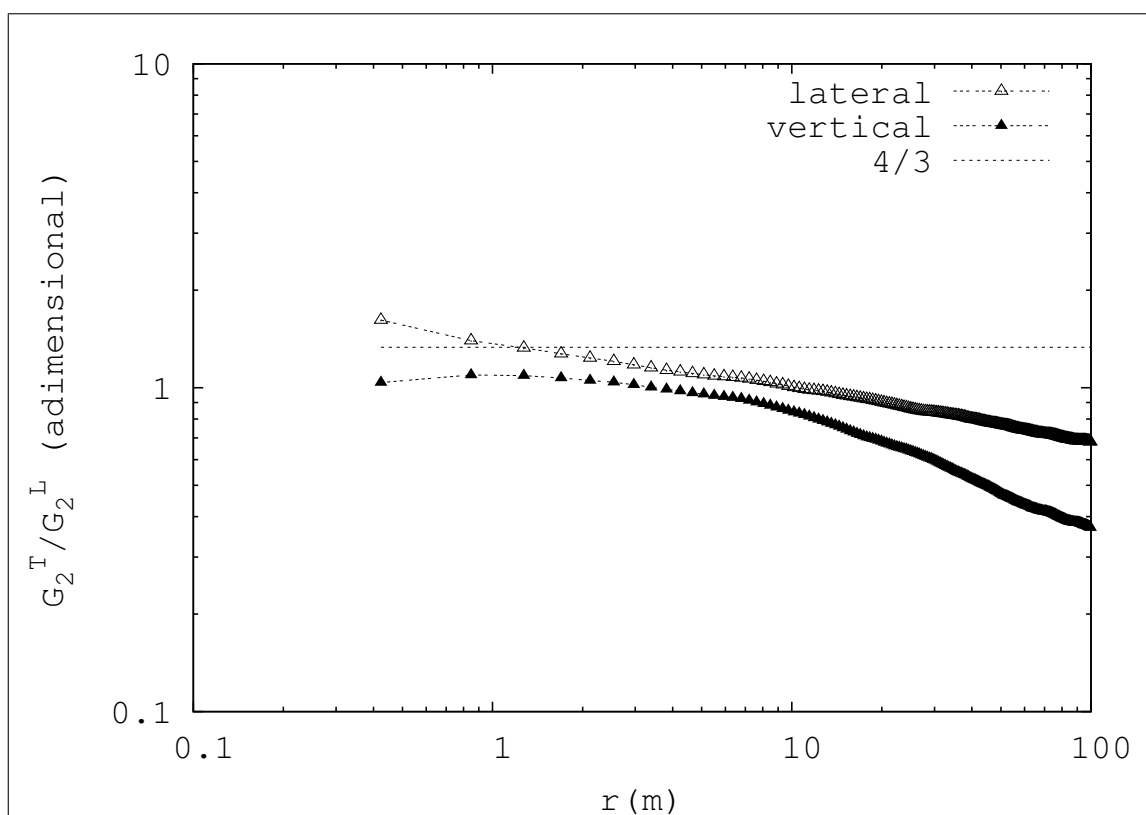


Figura 6.4: Razão entre as funções estrutura de segunda ordem transversais (lateral e vertical) $G_2^T(r)$ e a função estrutura longitudinal $G_2^R(r)$ com dados de camada limite atmosférica e o valor $4/3$ predito sob a hipótese de isotropia local. Nesta série temporal $L \sim 36 m$, $\lambda = 11,5 cm$, $\eta = 0,51 mm$ e $R_\lambda \approx 13005$.

(6.5) e (6.6) mostram as respectivas funções estrutura obtidas. Em contraste com a função estrutura de terceira ordem de velocidade da figura (6.3), as funções estrutura de terceira ordem de concentração e temperatura não apresentam a anomalia discutida anteriormente².

Três questões surgem diretamente destes resultados:

1. Porque há anomalia nas funções estrutura de velocidade de ordem ímpar?
2. Qual a diferença entre funções estrutura de velocidade de ordem par e ímpar?

²Entranto as funções estrutura de ordens ímpares de temperatura apresentaram ser funções negativas, em oposto às de concentração. Este fato talvez esteja relacionado com a medida de temperatura não ser direta e sim obtida a partir das medidas de velocidade do anemômetro sônico.

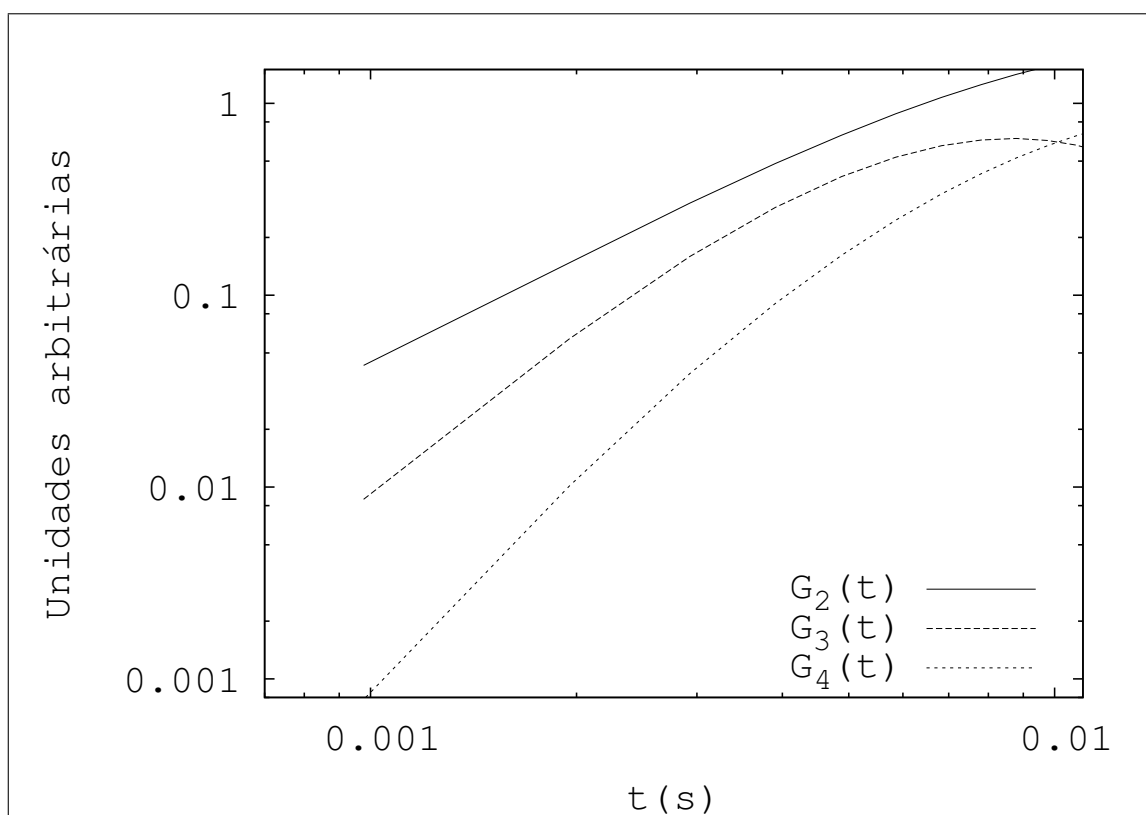


Figura 6.5: Funções estrutura temporal de segunda, terceira e quarta ordem para a concentração de hélio em um experimento de dispersão de tunel de vento com baixa velocidade.

- Qual a diferença entre funções estrutura de velocidade e funções estrutura de concentração e temperatura?

Da definição de isotropia entende-se a invariância frente a rotações e reflexões de uma ou mais direções. Velocidade é uma grandeza vetorial que, por definição, é caracterizada por um módulo e uma direção. Por sua vez, concentração e temperatura são grandezas escalares e são caracterizadas apenas por um módulo. A noção de isotropia para uma grandeza escalar é portanto algo sem sentido. Deste modo, funções estrutura de uma grandeza escalar devem ter o mesmo comportamento em escoamentos localmente isotrópicos como anisotrópicos.

Segundo Frisch (1995), a lei de Kolmogorov para a função estrutura de segunda ordem é obtida apenas com a hipótese de homogeneidade, enquanto para

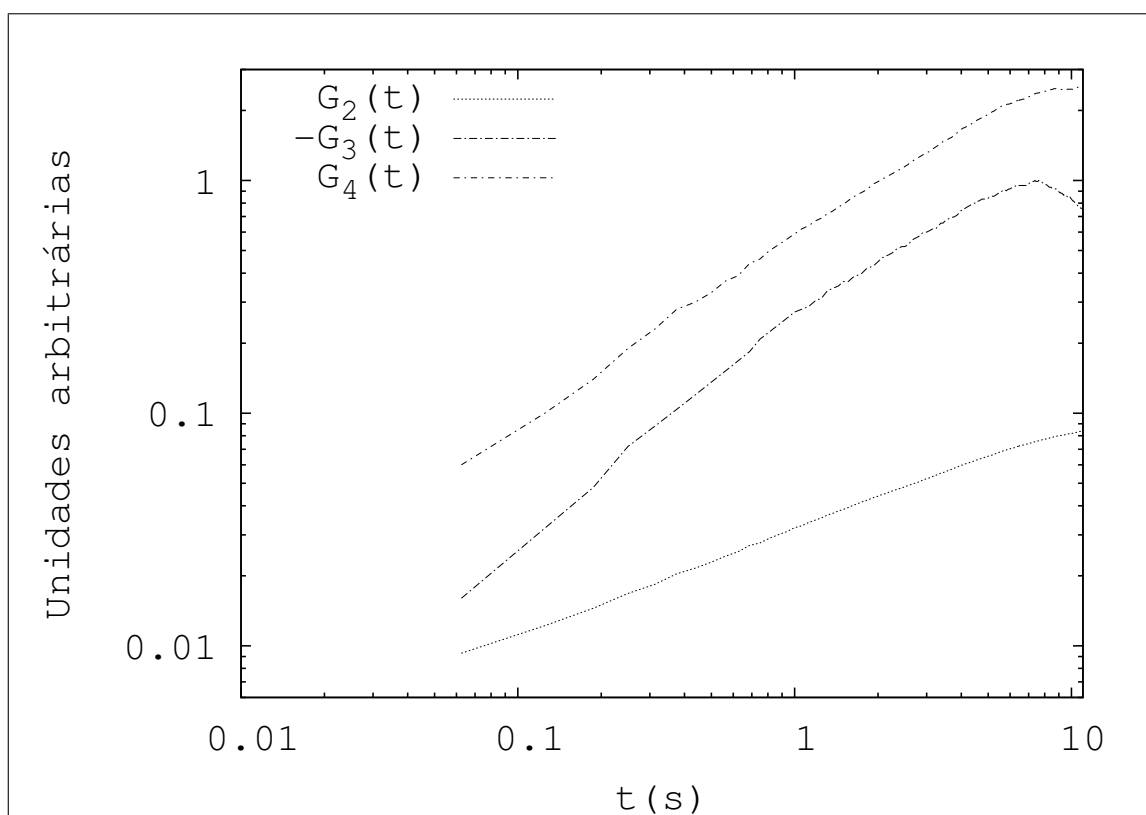


Figura 6.6: Funções estrutura temporal de segunda, terceira e quarta a temperatura na camada limite atmosférica superficial.

a obtenção da lei para a função estrutura de terceira ordem é necessário, além de homogeneidade local, a hipótese de isotropia. Embora sem prova matemática e sem referência alguma sobre propriedades de funções estruturas de campos vetoriais, se faz a seguinte asserção:

Funções estrutura de grandezas vetoriais de ordem par são independentes de isotropia local, enquanto as funções estrutura de grandezas vetoriais de ordem ímpar são de alguma forma afetadas por anisotropia.

Seguindo esta idéia, a não suavidade das funções estrutura de velocidade de ordem ímpar no sub-intervalo inercial é portanto uma manifestação de um campo de velocidades localmente anisotrópico. Assim, funções estrutura de velocidade de ordens ímpares são possíveis indicadores de anisotropia local.

Todavia, estas observações de anisotropia no sub-intervalo inercial não repre-

sentam um comportamento universal para uma turbulência bem desenvolvida. Ela é observada nos dados de camada limite de túnel de vento e atmosfera utilizados neste trabalho. Pode-se observar, entretanto, que Kurien e Sreenivasan (2000) com dados de camada limite atmosférica obtém funções estrutura de terceira ordem de velocidade que não apresentam a anomalia aqui discutida. Da mesma forma, van de Water e Herweijer (1998) também obtiveram funções estrutura de velocidade de ordens 3,9 e 15 obtidas em turbulência de jato que se são caracterizadas por serem bem planas no sub-intervalo inercial. Porém estas funções estruturas não foram medidas diretamente, elas foram obtidas a partir de uma extrapolação da função densidade de probabilidade das velocidades obtidas no experimento. van de Water e Herweijer observam que os expoentes ζ_3 nas funções estrutura de terceira ordem obtidas diretamente diferiam significativamente de 1, cujos valores variaram de 0.96 a 1.03.

Frisch (1995, página 128) apresenta uma figura com dados de túnel de vento do trabalho de Anselmet, Gagne, Hopfinger e Antonia (1984) que mostra funções estrutura de ordem p compensadas pelos fatores de potência, definidas por

$$\frac{\langle (\delta u_1)^p \rangle}{(r/\eta)^{\zeta_p} (\langle \epsilon \rangle \eta)^{p/3}},$$

em função de r/η dentro do sub-intervalo inercial. Observa-se nesta figura que a função estrutura compensada varia consideravelmente para $p = 3$, enquanto para $p = 2$ e $p = 6$ é mais ou menos constante. É interessante observar o comentário de Frisch na página 130:

Anselmet, Gagne, Hopfinger e Antonia (1984) testaram se a amostragem era suficiente para a convergência das estatísticas, mas poderia haver erros sistemáticos em conexão com a função estrutura de terceira ordem.

Saddoughi (1997) investigou isotropia local em camadas limite complexas e simples em um túnel de vento onde $R_\lambda \approx 2000$. Saddoughi usou anemometria de fios quentes com uma taxa de amostragem de 70 kHz medindo velocidade do vento na componente longitudinal e lateral. Ele comenta que no experimento com

altas velocidades (onde $U \approx 30 \text{ m/s}$ e $R_\lambda \approx 2000$) os valores obtido para a taxa de dissipação média pelo ajuste da função estrutura de terceira ordem em uma região relativamente plana foram em geral 15% menores dos obtidos pelo ajuste do espectro. Enquanto no experimento com baixa velocidade (onde $U \approx 8 \text{ m/s}$ e $R_\lambda \approx 800$) nenhuma região plana foi encontrada no gráfico $(-5/4)G_3^R(r)/\langle\epsilon\rangle r$ em função de r/η . Pode-se observar que no gráfico de Saddoughi a região que ele caracteriza como não plana há um comportamento muito similar aos resultados anômalos exibidos na figura (6.2).

Por estas razões pode-se acreditar que a anomalia de funções estrutura de velocidade de ordem ímpar não é resultado da qualidade dos dados usados neste trabalho, pois ela também é encontrada em outros trabalhos, porém pouco ou nada é comentado. Se observa também que na literatura não se encontra gráficos de funções estrutura de velocidade de ordens ímpares, exceto a de terceira ordem.

6.3 Anisotropia nas pequenas escalas

É esperado que os efeitos de anisotropia desapareçam à medida que se decresce a escala de separação r , desde que $r \ll L$. Esta tendência pode ser observada na figura (6.4), porém se observa que mesmo nas menores escalas resolvidas G_2^T/G_2^R é ainda significativamente diferente de $4/3$. Kurien e Sreenivasan (2000) investigaram a memória dos efeitos anisotrópicos através de decomposição isotrópica do grupo de simetria $SO(3)$ de funções estrutura de diferentes ordens combinando componentes transversais e longitudinais. Eles ressaltam que a conclusão mais interessante do trabalho é a descoberta de que os efeitos de anisotropia diminuem muito mais lentamente do que se pensava.

A ausência de isotropia nas pequenas escalas conduz a um sério problema no emprego das expressões que determinam a taxa de dissipação de energia discutidas anteriormente. Por exemplo, empregando $G_2^R(r) = C_k \langle\epsilon\rangle^{2/3} r^{2/3}$, com $C_k = 2,13$ dado por Sreenivsan (1995), na determinação da taxa de dissipação média em uma série dados, foi obtido $\langle\epsilon\rangle \approx 30 \text{ m}^2/\text{s}^3$, enquanto para a mesma série temporal no

Tabela 6.1: Sumário de alguns dos parâmetros do escoamento obtido por Mouri *et al.* (2006). A tabela apresenta algumas características de turbulência gerada por grade e em camada limite em três alturas distintas, $z = 0,05, 0,25$ e $0,70$ m. A taxa de dissipação foi obtida nas direções x_1 e x_2 , foi obtida com $\langle \epsilon_{u_1} \rangle = 15\nu \langle (\partial u_1 / \partial x_1)^2 \rangle$ e $\langle \epsilon_{u_2} \rangle = 7,5\nu \langle (\partial u_1 / \partial x_2)^2 \rangle$. As escalas integrais de comprimento foram determinadas por $L_{u_1} = \int_0^\infty R_{r,r}(r)dr / R_{r,r}(0)$ e $L_{u_2} = \int_0^\infty R_{t,t}(r)dr / R_{t,t}(0)$.

	Grade	Camada limite		
		$z = 0,05$ m	$z = 0,25$ m	$z = 0,70$ m
U (m/s)	10,57	4,61	7,05	10,22
$\langle \epsilon_{u_1} \rangle$ (m^2/s^3)	1,22	19,3	5,45	0,575
$\langle \epsilon_{u_2} \rangle$ (m^2/s^3)	1,20	9,80	4,05	0,493
L_{u_1} (cm)	17,4	17,4	42,3	35,9
L_{u_2} (cm)	4,43	18,1	5,78	7,60
λ (cm)	0,688	0,728	0,896	1,14
η (mm)	0,221	0,131	0,166	0,280
R_λ	249	792	756	428

mesmo intervalo a expressão $G_3^R(r) = -(4/5) \langle \epsilon \rangle r$ fornece $\langle \epsilon \rangle \approx 1 m^2/s^3$. Esta diferença é extremamente grande e certamente não é devido ao valor de C_k , e sim a efeitos anisotrópicos.

Mouri *et al.* (2006) apresentam em seu trabalho uma tabela com os principais parâmetros obtidos em um experimento com turbulência de grade e de camada limite em túnel de vento. Eles utilizaram anemometria de fio quente com taxa de amostragem de 30 kHz medindo na direção longitudinal e na transversal, lateral ao escoamento. Supondo isotropia nas pequenas escalas, eles puderam determinar a taxa de dissipação com as duas medidas de velocidade. Empregando $\langle \epsilon_{u_1} \rangle = 15\nu \langle (\partial u_1 / \partial x_1)^2 \rangle$ e $\langle \epsilon_{u_2} \rangle = 7,5\nu \langle (\partial u_2 / \partial x_1)^2 \rangle$ eles determinaram a taxa de dissipação pelas duas direções. Como requerimento de isotropia as duas medidas devem ser iguais, porém pode se ver na tabela (6.1) que $\langle \epsilon_{u_1} \rangle$ se torna muito diferente de $\langle \epsilon_{u_2} \rangle$ na camada limite nas medidas mais próximas ao piso do túnel³. Entretanto Mouri

³Este comportamento está de acordo com Kolmogorov (1941a) que formulou que no limite do número de Reynolds infinito e longe das fronteiras o escoamento poderia ser localmente isotrópico.

et al. não comentam sobre anisotropia, mas atribuem a diferença entre $\langle \epsilon_{u_1} \rangle$ e $\langle \epsilon_{u_2} \rangle$ à influência de u_3 na medida de u_1 quando a medida é feita próxima ao piso.

Os efeitos anisotrópicos se mostram presentes mesmo nas pequenas escalas e são definitivamente muito significativos, entretanto não se sabe quais as consequências da anisotropia nas equações baseadas na suposição de isotropia local.

6.4 O sub-intervalo de equilíbrio universal

De acordo com K41, em uma turbulência completamente desenvolvida existe um sub-intervalo de equilíbrio universal definido pela desigualdade $\eta \ll r \ll L$.

É bem conhecido o fato de que a microescala de Kolmogorov η não muda muito com R_λ . Em experimentos em túneis de vento $\eta \approx 0,1 \text{ mm}$, e na atmosfera $\eta \approx 1 \text{ mm}$, entretanto a escala de comprimento integral L varia desde cerca de alguns centímetros para túneis de vento até uma centena de metros na camada limite atmosférica. Assim a razão L/η varia de valores menores do que 10^3 até 10^6 . Por esta razão deve ser esperar que o sub-intervalo inercial $[r_a, r_b] \in \eta \ll r \ll L$, deva crescer com o aumento de R_λ .

Deve se reconhecer que a escolha do intervalo $[r_a, r_b]$ é crucial na determinação da correção de intermitência μ da equação

$$G_2^R(r) = C_k \langle \epsilon \rangle^{2/3} r^{2/3} \left(\frac{r}{L} \right)^\mu. \quad (6.5)$$

Como não há uma definição clara nem do tamanho e nem do início do sub-intervalo inercial, essa escolha pode ser arbitrária. Pode-se observar na figura 6.1 que na região $r/\eta \sim 100$, $G_2^R(r)$ tem uma inclinação ligeiramente maior do que $r^{2/3}$, enquanto na região em torno de $r/\eta \sim 800$, $G_2^R(r)$ tem uma inclinação ligeiramente menor que $r^{2/3}$.

Desde que λ é reconhecido ser a escala onde os efeitos dissipativos começam a tornar-se importante e, em geral, $\lambda \sim 100 \eta$, escolhemos o início do sub-intervalo inercial sendo $r_a = \lambda$ ou a menor escala resolvida em cada experimento⁴.

⁴Nos experimentos de camada limite atmosférica e no túnel de vento pequeno as menores escalas resolvidas ainda foram maiores que a microescala de Taylor λ .

Primeiramente o critério usado para escolher o tamanho r_b dos maiores turbilhões que ainda pertencem ao sub-intervalo inercial, e que fosse válido para os três experimentos, foi $r_b = 0,01 L$. Entretanto a relação de r_b com L muda muito de experimento para experimento devido à escala integral L não ter uma dependência bem definida com R_λ . Por exemplo, nos dados de camada limite atmosférica (ver tabelas A.3 e A.4), alguns casos de séries temporais com a escala integral L semelhantes, visivelmente se observa o tamanho da região plana que caracteriza $G_2^R(r)$ ser bem distinta entre estas séries. Ou seja, mesmo em séries temporais cujas escalas integrais são muito próximas, o intervalo $[r_a, r_b]$ pode ser razoavelmente diferente entre uma série e outra. Este fato mostra que a memória de turbilhões de grandes escalas que já decaíram apresentam uma maior influência no sub-intervalo do que os grandes turbilhões que ainda estão nas grandes escalas. Portanto r_b não pode ser escolhido apenas pelo conhecimento da escala integral ⁵.

Em vista da dificuldade de definir uma razão baseada na escala integral L e ou no número de Reynolds da microescala de Taylor R_λ válida para todas as séries temporais, foi optado escolher r_b como o limite da região iniciada em $r = \lambda$ onde $\log G_2^R(r)$ varia linearmente com $\log r$.

De fato, a escolha de $[r_a, r_b]$ baseada na visualização dos gráficos pode ser muito tendenciosa na estimativa de ζ_2 , o que resulta na determinação do coeficiente de correção μ atribuído à intermitência do sub-intervalo inercial. As implicações deste arbítrio serão discutidas adiante.

6.5 Universalidade no sub-intervalo inercial

Em virtude da impossibilidade da determinação direta da taxa de dissipação a partir da equação $\epsilon = 15\nu(\partial u_1/\partial x_1)$ e também da obtenção de $\langle \epsilon \rangle$ a partir de $G_3^R(r) = (-4/5) \langle \epsilon \rangle r$ não ser confiável por razões já discutidas, a constante de Kolmogorov será determinada a partir do momento de assimetria das diferenças de

⁵Contudo poderia se escolher um $r_b > r_a$ pequeno suficiente que fosse válido para qualquer série temporal, entretanto esta escolha implicaria em um intervalo com número muito pequeno de pontos para se fazer ajuste, desta forma a estatística estaria comprometida.

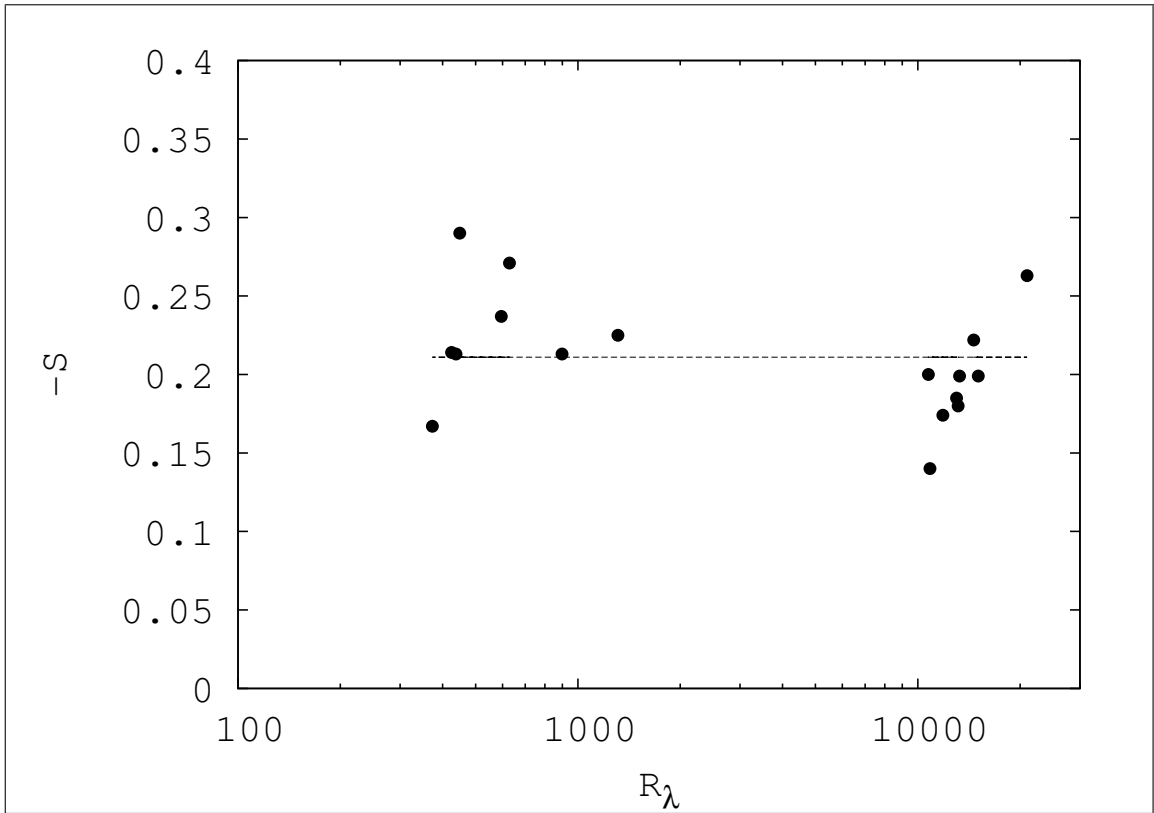


Figura 6.7: Assimetria das diferenças de velocidade S em função do número de Reynolds da microescala de Taylor R_λ e a linha é o valor médio de todos os experimentos $S = -0,211$.

velocidade.

A assimetria S independe da determinação de qualquer outro parâmetro e é determinada apenas por

$$S = \frac{G_3^R(r)}{G_2^R(r)^{3/2}}. \quad (6.6)$$

De acordo com K41, a assimetria é presumida ser uma constante universal, enquanto K62 prediz que S é uma função fracamente dependente de r .

A partir das séries temporais possuindo R_λ muito distintos obtidas nos três experimentos descritos no apêndice A, foi determinado a assimetria de cada série temporal dentro do sub-intervalo inercial. Também foram estimados diversos parâmetros que quantificam a turbulência. A determinação destes parâmetros está descrita na seção A.2 e as tabelas contendo os principais parâmetros turbulentos

encontram-se na seção A.3.

Os valores obtidos para a assimetria mostram que S no sub-intervalo inercial apresenta uma dependência bem complicada com r . Entretanto é mais razoável pensar que S tem um valor (estatístico) constante com r do que ter uma dependência da forma $r^{3\mu/2}$. Apesar de um grande espalhamento, pode se ver na figura 6.7 que a assimetria se mostra universal com R_λ com um valor nominal $-S = 0,211 \pm 0,037$.

O valor médio obtido para ζ_2 em todas as séries temporais $\zeta_2 = 0,667 \pm 0,001$, desta forma $\mu \approx 0,001$ é portanto desprezível. Este resultado sugere que a teoria de Kolmogorov é correta na sua forma clássica de 1941. A constante de Kolmogorov, obtida a partir de $S = -4/5 C_k^{3/2}$, apresenta um valor universal com grande espalhamento, cujo valor obtido é dado por $C_k = 2,431 \pm 0,175$.

As figuras 6.8 *a*, *b*, e *c* mostram a assimetria S obtida no sub-intervalo inercial do túnel de vento pequeno onde a escala integral média das séries temporais é $L \approx 0,10 m$, no túnel de vento grande onde $L \approx 0,30 m$ e na camada limite atmosférica onde $L \approx 30 m$ junto com a função $S(r) = -(4/5)C_k^{-3/2} L^{3\mu/2} r^{1-3\zeta_2/2}$ determinado para cada experimento. As linhas sólidas na figura representam a função $S(r)$ com $C_k = 2,13$ e $\mu = 0,04$ na linha contínua e $C_k = 2,13$ e $\mu = 0,00$ na linha tracejada.

Baseado na figura 6.8 pode-se tirar algumas conclusões interessantes. A primeira conclusão, porém não surpreendente, é que S é razoavelmente constante com r . Na figura 6.8 *b*, entretanto, se observa uma dependência em r , porém esta dependência não está relacionada a G_2^R ser proporcional a uma potência de r diferente de $2/3$ e sim G_3^R ter uma dependência de r com potência diferente de 1. Uma segunda conclusão a respeito da figura 6.8 é que o comportamento ruído atribuído à anisotropia não parece diminuir a medida que R_λ aumenta de cerca de 400 na figura 6.8 *c* para cerca de 15000 na figura 6.8 *a*, ou seja, os efeitos de anisotropia se mantêm mais ou menos independentes de R_λ . A última conclusão é sobre o ruído atribuído à anisotropia não diminuir a medida que se decresce a escala de separação r , ou seja, os efeitos anisotrópicos persistem nas menores escalas resolvidas.

6.6 Anomalia dos expoentes de escalas

Na seção 6.4 foi comentado a arbitrariedade da escolha de $[r_a, r_b]$ na definição do sub-intervalo inercial. O próprio fato de existir esta arbitrariedade já conspira contra a existência de uma região onde $G_2^R \propto r^{2/3+\mu}$ com $\mu \neq 0$ sendo uma constante universal. Vamos expor da seguinte maneira: Se ao invés de definir $\zeta_2 = 2/3 + \mu$ a partir do intervalo $[r_a, r_b]$, definimos o intervalo $[r_a, r_b]$ a partir de algum ζ_2 conhecido. Recordamos que, para um intervalo definido para $\mu > 0$ universal, implicaria, de acordo o modelo log-normal, na existência de uma cascata de energia intermitente. Enquanto, se o intervalo for escolhido de acordo com $\mu = 0$, leva à idéia clássica de transferência de energia de acordo com K41. Se há a possibilidade dessa escolha, provavelmente a melhor escolha seja a de $\mu = 0$, pois leva à consequências mais simples.

O valor $\zeta_2 = 0,667 \pm 0,001$ está muito próximo ao $\zeta_2 = 2/3$ de K41. Entretanto este resultado pode ser exclusivamente fato de uma coincidência ou tendência na escolha de $[r_a, r_b]$. Já foi relatado que os valores encontrados na literatura para μ variam de valores considerados não mensuráveis até 0,075⁶, estes valores possuem um considerável desacordo e desta forma conflitam com a idéia de algum $\mu > 0$ universal.

De acordo com Frisch (1995), a lei $\zeta_p = p/3$ é unicamente consequência de homogeneidade local. Desta forma, não é difícil imaginar que algum $\mu \neq 0$ possa ser consequência da falta de uma ligeira falta homogeneidade local, já que diversos estudos (SADDOUGHI, 1997; WATER; HERWEIJER, 1999; KURIEN; SREENIVASAN, 2000; BIFERALE; VERGASSOLA, 2000; STAIKU; VORSELAARS; WATER, 2003) apontam que isotropia local é válida somente nas menores escalas pertencentes ao sub-intervalo inercial. Além do mais, efeitos devido ao número de Reynolds não ser infinito (GROSSMANN; LOHSE, 1994; L'VOV; PROCACCIA, 1995) ou a influência de anisotropia de escalas maiores, bem como efeitos de fronteira também podem ter seu papel.

⁶ Tsuji (2004) encontrou duas regiões no sub-intervalo inercial, nos números de onda mais baixos encontrou $\mu = 0,075$ e nos números de onda mais alto $\mu = 0,025$.

Estes resultados todos induzem a idéia que K41 possui resultados universais. Entretanto é bem sabido e foi relatado na seção 5.2 que há um grande desacordo entre K41 e as leis de escalas de funções estrutura de ordem elevadas. De acordo com K41, $\zeta_p = p/3$, entretanto os valores experimentais para $p \geq 4$ mostram que K41 superestima consideravelmente ζ_p , enquanto o modelo-lognormal K62 prediz

$$\zeta_p = \frac{p}{3} - \frac{1}{2} \mu(p-3)$$

e se mostra com valores mais próximos aos obtidos experimentalmente.

É interessante perceber que o modelo log-normal, assim como K41, também prevê $\zeta_3 = 1$. Ou seja, a lei $G_3^R(r) = (-4/5) \langle \epsilon \rangle r$ se mantém na forma original, independente do conceito de intermitência do modelo log-normal. Porém vamos partir do pressuposto que o resultado de K41 para a função estrutura de segunda ordem G_2^R pode ser exato. A grande pergunta a se responder é: Como conciliar K41 com as anomalias de escalas dos expoentes ζ_p ?

A derivação para G_2^R apresentada nesta dissertação é baseada na hipótese de que $S = G_3^R / (G_2^R)^{3/2}$ é uma constante universal. A expressão para G_3^R foi obtida para $\eta \ll r \ll L$ a partir de

$$G_3^R(r) = -\frac{4}{5} \langle \epsilon \rangle r + 6\nu \frac{dG_2^R(r)}{dr} \quad (6.7)$$

que por sua vez foi derivada da equação de Navier-Stokes,

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \nabla^2 u_i \quad (6.8)$$

sem o termo forçante f_i , ou seja, para uma turbulência livremente decaindo.

Na maior parte dos escoamentos obtidos em laboratorios e na natureza, a turbulência não é estacionaria e o termo forçante f_i não é nulo. De acordo com Yakhot (1995 *apud* van de Water e Herweijer, 1998), um termo extra que envolve a influência dos forçantes deve ser acrescentado no lado direito da equação (6.7). A presença deste termo causa uma assimetria entre funções estrutura de ordens pares e ímpares.

Novikov (1964, *apud* Moisy, Tabeling e Willaime (1998)) derivou uma expressão para uma turbulência estacionária com forçante como

$$G_3^R(r) = 6\nu \frac{dG_2^R(r)}{dr} - \frac{4}{5} \langle \epsilon \rangle r \left(1 - \frac{4}{15} \frac{r^2}{L_f^2} \right), \quad (6.9)$$

onde L_f é uma escala externa característica do forçante. Moisy, Tabeling e Willaime (1998) realizaram um experimento com turbulência em gás Hélio com temperatura entre 4,2 e 6,5K com um cilindro como o forçante de anisotropia nas escalas externas. Eles concluíram que para R_λ grandes (onde obtiveram melhores resultados) a equação (6.9) é compatível com o experimento, mas com erros da ordem de 10 a 30%. Com erros dessa magnitude obtidos num experimento com forçantes razoavelmente controlados, eles questionam se a equação (6.7) poderia ser usada em sistemas mais realísticos, e se as hipóteses fundamentais (turbulência localmente homogênea e isotrópica) podem ser realmente alcançados somente com o requerimento do número de Reynolds grande.

Uma conclusão importante desta dissertação é que isotropia local não é alcançada provavelmente na grande maioria dos experimentos de camada limite. Já foi mencionado também que a lei $G_2^R(r) \propto r^{2/3}$ é devido somente à hipótese de homogeneidade local e que $G_3^R(r) \propto r$ é consequência de homogeneidade e isotropia local. Entretanto, tendo em vista a equação universal (6.7), válida para uma turbulência decaindo livremente no limite do número de Reynolds infinito, se propõe a seguinte explicação:

À medida que o número de Reynolds aumenta num escoamento turbulento, as simetrias locais vão sendo restauradas uma a uma. Neste limite, é claro que homogeneidade local será alcançada antes que isotropia local, se esta ainda for. Neste contexto, a hipótese de Kolmogorov, de que $S = G_3^R(r)/(G_2^R(r)^{3/2})$ é uma constante universal no senso de turbulência completamente desenvolvida, não deve ser verdadeira desde que depende de isotropia local. Assim, na não existência de isotropia local, S deve ser de alguma forma afetada por esta propriedade (como é visto na figura 6.8).

De outro ponto de vista, a hipótese de S universal contempla a idéia de um

campo de velocidades auto-similar. Se o campo de velocidades fosse auto-similar, como hipótese de K41, ζ_p seria dado por $p/3$ para qualquer p . Entretanto, em virtude da influência de anisotropias de escalas maiores o campo não é auto-similar, pois S não é necessariamente constante. Desta forma, ζ_p possui um comportamento que não está de acordo com K41 inclusive para $p = 3$.

Estas conclusões estão de acordo com Kuznetsov, Praskovsky e Sabelnikov (1992, *apud* van de Water e Herweijer 1999) que discutiram a variação da constante C_3 da lei de escala $G_3^R(r) = -C_3 \langle \epsilon \rangle r$ e μ com o grau de anisotropia de grandes escalas. van de Water e Herweijer (1999) encontraram $C_3 = 0,72$. Igualmente Moisy, Tabeling e Williams (1998) mostram em um gráfico a função $-G_3^R(r)/\langle \epsilon \rangle r$ versus r/η obtida a partir de 3 séries temporais com $R_\lambda = 120, 300$ e 1170 . Nestas séries o valor de C_3 variou de cerca de $0,65$ até próximo a $0,78$. Katul, Parlange e Chu (1994) através da técnica de transformada de ondeleta usando funções estrutura condicionadas e não-condicionadas mostram que os desvios de K41 atribuídos à intermitência no sub-intervalo inercial são devidos a contaminações de grandes escalas (intermitência externa ao sub-intervalo inercial).

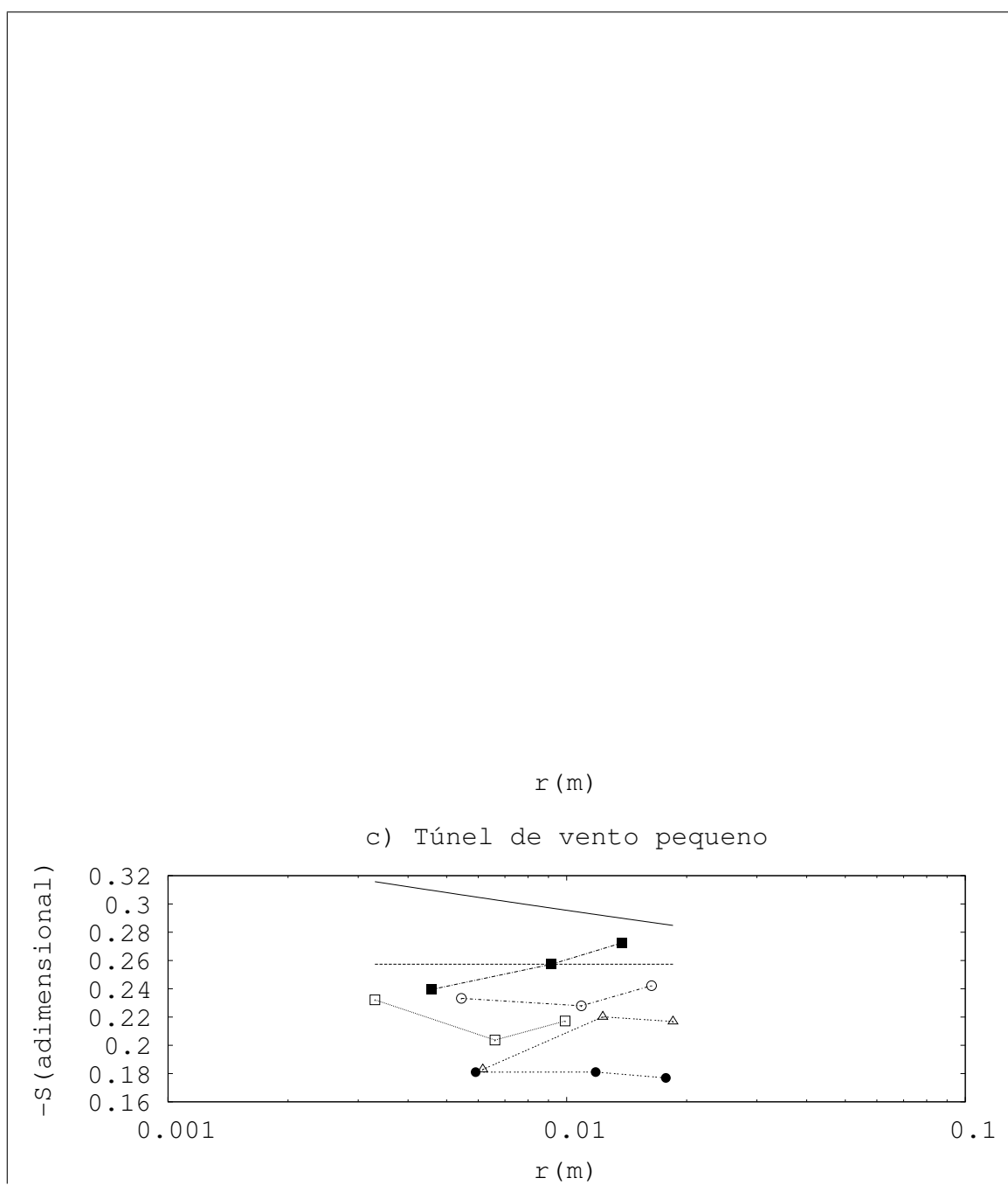


Figura 6.8: Assimetria $S = G_3^R / (G_2^R)^{3/2}$ obtida nos três experimentos: a) Camada limite atmosférica superficial, onde $L \approx 30 \text{ m}$, b) Túnel de vento grande, onde $L \approx 0,30 \text{ m}$ e c) Túnel de vento pequeno, onde $L \approx 0,10 \text{ m}$. As linhas e pontos mostram a assimetria em diferentes séries temporais para cada experimento pertencentes a cada sub-intervalo inercial. As linhas sólidas representam $S = -(4/5)C_k^{-3/2}L^{3\mu/2}r^{1-3\zeta_2/2}$, onde $\zeta_2 = 2/3 + \mu$ e $C_k = 2,13$. Na linha contínua descreve S com $\mu = 0,04$ no caso da existência de intermitência do sub-intervalo inercial e a linha tracejada descreve S com $\mu = 0,00$ de acordo com K41.

Capítulo 7

Considerações finais

A principal conclusão deste trabalho é que a anisotropia no sub-intervalo inercial foi observada estar presente mesmo com grandes números de Reynolds e nas menores escalas resolvidas do conjunto de dados. Estas conclusões foram feitas com base na análise de funções estrutura de diversas ordens de velocidade, temperatura e concentração.

Foi reconhecido que as funções estrutura de velocidade de ordem ímpar geralmente apresentam um comportamento não suave em contraste com as de temperatura e concentração. Este comportamento é uma manifestação de anisotropia local.

Os coeficientes de correção de intermitência μ encontrados neste trabalho foram da ordem de 10^{-3} . Os valores de μ sugerem que não existe intermitência no sub-intervalo inercial. Praskovsky e Oncley (1994) também encontraram $\mu = O(10^{-3})$ o qual foi considerado desprezível, entretanto encontraram $\beta = 0,20$. Como ambas as constantes μ e β são indicadores de intermitência, este resultado é conflitante. A constante β foi obtida a partir de $R_{\epsilon,\epsilon}(r) = \langle \epsilon(x_1)\epsilon(x_1 + r) \rangle \propto r^{-\beta}$, onde foi assumido isotropia local para a determinação da taxa de dissipação instantânea $\epsilon(x_1) = 15\nu (\partial u_1 / \partial x_1)^2$.

De acordo com as conclusões desta dissertação, isotropia local não pode ser assumida sem considerarmos outras consequências físicas. Relações como as da taxa de dissipação medidas a partir de derivadas de velocidade devem ser de alguma maneira afetadas pela anisotropia. Assim o efeito intermitente em medidas “instantâneas” de

$\epsilon(x_1)$ pode não ser uma comprovação da existência de intermitência no sub-intervalo inercial e sim uma anomalia na fórmula isotrópica $\epsilon(x_1) = 15\nu (\partial u_1/\partial x_1)^2$ a exemplo do que foi atribuído acontecer com $G_3^R(r) = (-4/5) \langle \epsilon \rangle r$.

Por estas razões o autor acredita que a intermitência no sub-intervalo inercial não existe, e que o emprego de fórmulas baseadas na hipótese de isotropia local leva à provas erroneas de sua existência.

A constante de Kolmogorov foi determinada a partir da assimetria

$$S = G_3^R(r)/(G_2^R(r))^{3/2} = -\frac{5}{4 C_k^{3/2}},$$

e foi mostrada ser universal com R_λ com o valor $C_k = 2,431 \pm 0,175$. O grande desvio padrão deste e dos valores encontrados na literatura, assim como a possível dependência de C_k com R_λ são explicados da seguinte maneira. Qualquer uma das duas alternativas de se obter C_k (a partir da determinação direta de $\langle \epsilon \rangle$ ou pela assimetria) necessitam do emprego da hipótese de isotopia local. Verificou-se que o emprego dessa hipótese em turbulência real geralmente leva à um certo ruído nas funções que dependem de isotropia, este fato explica o grande desvio em torno de um C_k médio. Na seção 6.1 foi discutido que o emprego de derivadas numéricas necessita de resoluções altíssimas e que o não cumprimento dessas exigências leva à sub-estimação dos valores. Isto explica a dependência de C_k com R_λ encontrada por alguns autores.

A discrepância da anomalia dos expoentes das funções estrutura com K41 não é explicada em termos da intermitência do sub-intervalo inercial como K62. E sim pelo fato do campo de velocidade ser não auto-similar. Isto se justifica pelo comportamento complicado de S com r .

Como conclusão, a teoria clássica de Kolmogorov de 1941 é mostrada ser universal. Entretanto na natureza e em laboratório, os escoamentos possuem número de Reynolds finito e são controlados por forçantes que não permitem que um estado de equilíbrio universal nas pequenas escalas seja atingido. Como resultado, os expoentes de escala ζ_p das funções estrutura apresentam desacordo com K41.

Apêndice A

Obtenção e tratamento dos dados

Os dados de velocidade de vento, temperatura e concentração de Hélio deste presente estudo foram obtidos de experimentos em túnel de vento e em camada limite atmosférica. A união do conjunto de dados é uma parceria entre a Universidade Federal de Santa Maria e a Universidad Nacional del Nordeste de Resistência, Argentina. Este conjunto de dados possui séries temporais com número de Reynolds da microescala de Taylor R_λ variando de 370 até 21000, provavelmente esta variação é a mais ampla encontrada na literatura reunida em um único trabalho.

Os dados foram manipulados por executáveis desenvolvidos com o compilador GNU FORTRAN 77. Os arquivos de saída do executável foram manipulados por rotinas escritas em linguagem SHELL padrão UNIX os gráficos e os ajustes das curvas de dados foram feitos com o aplicativo livre GNUPLOT.

A.1 Dados de camada limite

A.1.1 Túnel de vento

O primeiro conjunto de dados empregado nas análises foram obtidos de dois túneis de vento da Universidad Nacional del Nordeste, Resistência, Argentina. Um deles, o menor, é um túnel de circuito aberto com dimensões $4.45\text{ m} \times 0.48\text{ m} \times 0.48\text{ m}$ (comprimento, altura, largura) onde foi simulado uma camada limite gerada por uma distribuição homogênea de blocos de rugosidade e agulhas de Standen (STANDEN, 1972). A espessura da camada limite foi de $\delta = 350\text{ mm}$. As medidas foram tomadas

em $z = 40 \text{ mm}$, onde z é a altura a partir do piso do túnel de vento. O outro túnel, o maior, é também um túnel de circuito aberto com dimensões $22.8 \text{ m} \times 1.8 \text{ m} \times 2.4 \text{ m}$. A camada limite neste túnel foi simulada pelos método de Standen utilizando blocos de rugosidade superficial e agulhas truncadas. A espessura obtida foi $\delta = 1200 \text{ mm}$. As medidas foram tomadas em $z = 170 \text{ mm}$ variando a velocidade com o regulador de velocidades.

Em ambos os túneis a velocidade do vento foi medida por um anemômetro de fio quente padrão com uma frequência de amostragem de 3 kHz.

Os dados do experimento de dispersão de gás Hélio foram obtidos no túnel de vento da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, Brasil. Este experimento foi realizado para simular a dispersão de um escalar passivo em um terreno suburbano numa escala geométrica de 1:300 a partir do método de rugosidade, barreira e dispositivos mistura. Foi utilizado Hélio puro com uma vazão de $10,55 \text{ l/min}$, onde a velocidade média do escoamento a uma altura $z = 330 \text{ mm}$ foi $U = 0,9 \text{ m/s}$. Séries temporais de 60s foram obtidas por uma sonda aspirante ligada à um anemômetro de fio quente com frequência de aquisição de 1024 Hertz. A série temporal utilizada neste trabalho foi obtida com medidas na região central da pluma de Hélio.

A.1.2 Camada limite atmosférica

Os dados de camada limite atmosférica foram coletados em uma torre micro-meteorológica situada no município de Paraíso do Sul, Brasil, usando um anemômetro sônico tridimensional com uma taxa de amostragem de 16 Hz à uma altura de 10 m . A torre está situada um terreno plano, aproximadamente homogêneo. Séries temporais de uma hora (2^{16} pontos), representando ventos fortes estacionários em uma direção constante e com baixa intensidade de turbulência, foram obtidos em dezembro de 2003. Os dados de vento foram primeiramente alinhados para a direção média de escoamento (MCMILLEN, 1988; KAIMAL; FINNINGAN, 1994) e as tendências lineares foram removidas das séries pelo método dos mínimos quadrados.

A.2 Determinação de parâmetros turbulentos

A hipótese de Taylor $r = U\tau$ foi usado para converter medidas temporais em espaciais e a hipótese ergódica foi usada para converter médias temporais em médias sobre *ensemble*. Isotropia local foi assumida na determinação das microescalas de Taylor de de Kolmogorov.

A microescala de Taylor, definida por

$$\lambda = [\sigma_u^2 / \langle (\partial u_1 / \partial x_1)^2 \rangle]^{1/2}, \quad (\text{A.1})$$

foi obtida substituindo o termo $(\partial u_1 / \partial x_1)^2$ na relação de isotropia da taxa de dissipação

$$\left\langle \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right)^2 \right\rangle = \frac{\langle \epsilon \rangle}{15\nu},$$

e a microescala de Kolmogorov foi determinada por

$$\eta = (\nu^3 / \langle \epsilon \rangle)^{1/4}. \quad (\text{A.2})$$

A taxa de dissipação média de energia $\langle \epsilon \rangle$ foi obtida pelo ajuste de $G_2^R(r) = C_k \langle \epsilon \rangle^{2/3} r^{2/3}$ com $C_k = 2,13$ dado por Sreenivasan (1995).

O número de Reynolds da microescala de Taylor foi determinado então por

$$R_\lambda = \frac{\sigma_u \lambda}{\nu}. \quad (\text{A.3})$$

A escala integral de comprimento, definida por

$$L = \int_0^\infty R_{r,r}(r) dr / R_{r,r}(0), \quad (\text{A.4})$$

foi determinada supondo $R_{r,r}(r)/R_{r,r}(0)$ ter uma exponencial da forma

$$\frac{R_{r,r}(r)}{R_{r,r}(0)} = e^{-r/L}$$

e então foi feito um ajuste para obter a escala integral.

O comprimento de Monin-Obukhov L_{MO} foi determinado nos dados de camada limite atmosférica por

$$L_{MO} = -\frac{u_*^3 \langle T \rangle}{\kappa g \phi_{u_3 T}}, \quad (\text{A.5})$$

onde $u_* = (\tau_{12}^2 + \tau_{13}^2 + \tau_{23}^2)^{1/4}$ é a velocidade de fricção com $\tau_{ij} = \langle (u_i - \langle u_i \rangle)(u_j - \langle u_j \rangle) \rangle$, $\kappa = 0,4$ é constante de von Kármán, g é a aceleração da gravidade, T é a temperatura em Kelvin e

$$\phi_{u_3 T} = \langle (T - \langle T \rangle)(u_3 - \langle u_3 \rangle) \rangle |_{z=0}$$

é o fluxo cinemático de calor na vertical tomado na superfície.

A.3 Sumário dos resultados

Tabela A.1: Principais características da turbulência no túnel de vento pequeno.

	TP-1	TP-2	TP-3	TP-4	TP-5
U (m/s)	9,91	13,73	16,33	17,33	18,48
σ_u^2 (m ² /s ²)	4,11	4,34	2,81	1,04	0,73
z (mm)	6	40	80	155	230
$[r_a, r_b]$ (cm)	0,3–1,2	0,3–2,0	0,3–2,0	0,3–2,5	0,3–2,5
L (m)	0,07	0,13	0,12	0,07	0,07
$\langle \epsilon \rangle$ (m ² /s ³)	102,0	48,8	22,9	7,99	5,50
λ (cm)	0,30	0,44	0,52	0,53	0,64
η (mm)	0,07	0,09	0,10	0,14	0,15
R_λ	425	629	595	373	449
ζ_2	0,665	0,680	0,672	0,641	0,680
$-S$	0,214	0,271	0,237	0,167	0,290

Tabela A.2: Principais características da turbulência no túnel de vento grande.

	TG-1	TG-2	TG-3
U (m/s)	9,33	12,09	14,86
σ_u^2 (m^2/s^2)	3,12	5,62	7,43
z (mm)	170	170	170
$[r_a, r_b]$ (cm)	1,0–7,0	2,0–8,0	2,0–9,0
L (m)	0,26	0,33	0,39
$\langle \epsilon \rangle$ (m^2/s^3)	52	40	33
λ (cm)	0,36	0,55	0,70
η (mm)	0,08	0,09	0,10
R_λ	438	898	1311
ζ_2	0,663	0,657	0,679
$-S$	0,213	0,213	0,225

Tabela A.3: Principais características da turbulência da camada limite atmosférica superficial Parte I.

	Atm-1	Atm-2	Atm-3	Atm-4	Atm-5
	10:23 06/12/03	10:52 06/12/03	11:22 06/12/03	11:51 06/12/03	13:18 06/12/03
U (m/s)	6,88	6,45	6,61	6,71	6,76
σ_u^2 (m^2/s^2)	2,76	2,29	2,23	2,48	2,68
z/L_{MO}	0,101	0,091	0,077	0,067	0,010
$[r_a, r_b]$ (m)	0,3–2,0	0,3–2,0	0,3–2,0	0,3–3,0	0,3–6,0
L (m)	35,8	14,9	29,6	32,9	37,0
$\langle \epsilon \rangle$ (m^2/s^3)	0,046	0,042	0,043	0,042	0,041
λ (cm)	11,4	10,5	10,5	11,1	11,8
η (mm)	0,51	0,66	0,51	0,52	0,52
R_λ	13005	10866	10745	11854	13273
ζ_2	0,670	0,662	0,697	0,669	0,662
$-S$	0,185	0,140	0,200	0,176	0,199

Tabela A.4: Principais características da turbulência da camada limite atmosférica superficial Parte II.

	Atm-6	Atm-7	Atm-8	Atm-9
	13:47 06/12/03	13:50 19/12/03	14:19 19/12/03/	14:48 19/12/03
U (m/s)	7,22	5,56	6,18	6,05
σ_u^2 (m ² /s ²)	2,77	4,06	3,11	3,22
z/L_{MO}	-0,010	-0,084	-0,065	-0,075
$[r_a, r_b]$ (m)	0,3–6,0	0,3–4,0	0,3–7,0	0,3–6,0
L (m)	36,3	61,0	40,0	41,6
$\langle \epsilon \rangle$ (m ² /s ³)	0,045	0,038	0,047	0,047
λ (cm)	11,5	15,2	12,1	12,2
η (mm)	0,51	0,53	0,51	0,51
R_λ	13141	20975	14603	15060
ζ_2	0,668	0,661	0,659	0,656
$-S$	0,180	0,263	0,222	0,199

Referências Bibliográficas

- ANFOSSI, D.; DEGRAZIA, G. A.; FERRERO, E.; GRYNING, S. E.; MORCELLI, M. G.; CASTELLI, S. T. Estimation of the lagrangian structure function constant C_0 from surface-layer wind data. **Boundary-Layer Metereology**, v. 95, p. 249–270, 2000.
- BARENBLATT, G. I.; GOLDENFELD, N. *Does Fully-Developed Turbulence Exist? Reynolds Number Independence versus Asymptotic Covariance*. 1995. Disponível em: <<http://www.citebase.org/cgi-bin/citations?id=oai:arXiv.org:cond-mat/9507132>>.
- BIFERALE, L.; VERGASSOLA, M. *Isotropy vs anisotropy in small-scale turbulence*. 2000. Disponível em: <<http://www.citebase.org/cgi-bin/citations?id=oai:arXiv.org:nlin/0010006>>.
- BUSINGER, J. A. Equations and concepts. In: _____. *F.T.M. NIEUWSTADT H. VAN DOP (Ed.) Atmospheric turbulence and Air Pollution Modeling*. Dordrecht: D. Reidel Publishing Company, 1981. p. 1–36.
- DEGRAZIA, G. A.; ANFOSSI, D. Estimation of the Kolmogorov constant from classical statistical diffusion theory. **Atmospheric Environment**, v. 32, p. 3611–3614, 1998.
- FRISCH, U. *Turbulence - The Legacy of A. N. Kolmogorov*. Cambridge: Cambridge University Pres, 1995.

- GROSSMANN, S.; LOHSE, D. Universality in fully developed turbulence. *Physical Review E*, v. 50, p. 2784, 1994. Disponível em: <<http://www.citebase.org/cgi-bin/citations?id=oai:arXiv.org:chao-dyn/9312001>>.
- HILL, R. J. Correction to Taylor's frozen turbulence approximation. *Atmospheric Research*, v. 40, p. 153–175, 1995.
- KAIMAL, J. C.; FINNINGAN, J. J. *Atmospheric Boundary Layer Flows*. Oxford: Oxford University Press, 1994. 289 p.
- KARMAN, T. von; HOWARTH, L. On the statistical theory of turbulence. *Proceedings of the Royal Society*, A164, p. 192–215, 1938.
- KATUL, G. G.; PARLANGE, M. B.; CHU, C. R. Intermittency, local isotropy, and non-gaussian statistics in atmospheric surface layer turbulence. *Physics of Fluids*, v. 6, p. 2480–2491, 1994.
- KOLMOGOROV, A. N. Dissipation of energy in locally isotropic turbulence. **Dolk. Akad. Nauk. RSSS**, v. 32, p. 15–17, 1941. (reimpresso em Proc. R. Soc. Lond. A 434, 15-17 (1991) (c).
- KOLMOGOROV, A. N. The local structure of turbulence in incompressible viscous fluid for very large Reynolds number. **Dolk. Akad. Nauk. RSSS**, v. 30, p. 9–13, 1941. (reimpresso em Proc. R. Soc. Lond. A 434, 9-13 (1991) (a).
- KOLMOGOROV, A. N. On degeneration (decay) of isotropic turbulence in an incompressible viscous liquid. **Dolk. Akad. Nauk. RSSS**, v. 31, p. 538–540, 1941. (b).
- KURIEN, S.; SREENIVASAN, K. Anisotropic scaling contributions to higher-order structure functions in high-Reynolds-number turbulence. *Physical Review E*, v. 62, n. 2, p. 2206–2212, 2000.
- LAMPORT, L. ***LaTeX, A Document Preparation System - User's Guide and Reference Manual***. [S.l.]: Addison-Wesley Publishing Company, 1985.

- LANDAU, L. D.; LIFSHITZ, E. M. *Fluid Mechanics*. Londres: Pergamon Press, 1959. 536 p.
- LOHSE, D.; MÜLLER-GROELING, A. Anisotropy and scaling corrections in turbulence. *Physical Review E*, v. 54, n. 1, p. 395–405, 1996.
- LUMLEY, J. L.; PANOFSKY, H. A. *Structure of the atmospheric turbulence*. London: John Wiley and Sons, 1964. 232 p.
- L'VOV, V. S.; PROCACCIA, I. “Intermittency” in hydrodynamic turbulence as intermediate asymptotic to Kolmogorov41 scaling. *Physical Review Letters*, v. 74, p. 2690, 1995. Disponível em: <<http://www.citebase.org/cgi-bin/citations?id=oai:arXiv.org:chao-dyn/9410002>>.
- MCMILLEN, R. T. An eddy correlation technique with extended applicability to non simple terrain. *Boundary Layer Meteorology*, v. 23, p. 1191–1924, 1988.
- MOFFATT, H. K. G. K. Batchelor and the homogenization of turbulence. *Annu. rev. Fluid Mech.*, v. 34, p. 19–35, 2002.
- MONIN, A. S.; YAGLOM, A. M. *Statistical Fluid Mechanics, Vol. 1*. Cambridge: The Mit Press, 1971. 769 p.
- MORAES, O. L. L.; ACEVEDO, O. A.; SILVA, R. D.; MAGNAGO, R.; SIQUEIRA, A. C. Nocturnal surface-layer characteristics at the bottom of a valley. *Boundary Layer Meteorology*, v. 112, p. 159–177, 2004.
- MOURI, H.; TAKAOKA, M.; HORI, A.; KAWASHIMA, Y. On Landau’s prediction for large-scale fluctuation of turbulence energy dissipation. *POF*, v. 18, p. 015103, 2006. Disponível em: <<http://www.citebase.org/cgi-bin/citations?id=oai:arXiv.org:physics/0505203>>.
- MUSCHINSKI, A.; FREHLICH, R. G.; BALSLEY, B. Small-scale and large-scale intermittency in the nocturnal boundary layer and the residual layer. *Journal of Fluid Mechanics*, v. 515, p. 3195–351, 2004.

- PANCHEV, S. *Random functions and turbulence*. Oxford: Pergamon Press, 1971. 444 p.
- PRASKOVSKY, A.; ONCLEY, S. Measurements of the Kolmogorov constant and intermittency exponent at very high Reynolds numbers. **Physics of Fluids**, v. 106, n. 6, p. 2886–2888, 1994.
- RICHARDSON, L. F. *Weather prediction by numerical process*. Cambridge: Cambridge University Press, 1922.
- SADDOUGHI, S. Local isotropy in complex turbulent boundary layers at high Reynolds number. *Journal of Fluid Mechanics*, v. 348, p. 201–245, 1997.
- SORBJAN, Z. *Structure of the Atmospheric Boundary Layer*. New Jersey: Prentice Hall Inc., 1989. 317 p.
- SREENIVASAN, K. R. On the univ ersality of the Kolmogorov constant. **Physics of Fluids**, v. 7, p. 2778–2784, 1995.
- SREENIVASAN, K. R.; ANTONIA, R. A. The phenomenology of small-scale turbulence. *Annu. Rev. Fluid Mech.*, p. 435–474, 1997.
- STAICU, A.; VORSELAARS, B.; WATER, W. van de. Turbulence anisotropy and the SO(3) description. *Physical Review E*, v. 68, 2003.
- STANDEN, M. M. A spire array for generating thick turbulent shear layers for natural wind simulation in wind tunnels. *National Council of Canada, NAE Report LTR-LA-94*, 1972.
- STANISIC, M. M. *The mathematical theory of turbulence*. Second. New York: Springer-Verlag, 1988. 501 p.
- STULL, R. *An Introduction to Boundary Layer Meteorology*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1988. 666 p.

- TAYLOR, G. I. Statistical theory of turbulence. *Proceedings of the Royal Society*, A151, p. 421–478, 1935.
- TAYLOR, G. I. The spectrum of turbulence. *Proceedings of the Royal Society*, A164, p. 476–490, 1938.
- TSUJI, Y. Intermittency effect on energy spectrum in high-reynolds number turbulence. *Physics of Fluids*, v. 16, n. 6, 2004.
- VAINSHTEIN, S. I.; SREENIVASAN, K. R. Kolmogorov's $\frac{4}{5}$ th law and intermittency in turbulence. *Journal of Fluid Mechanics*, v. 73, n. 23, p. 3085–3088, 1994.
- WATER, W. van de; HERWEIJER, J. A. High-order structure functions of turbulence. *Journal of Fluid Mechanics*, v. 387, p. 3–37, 1999.