

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA MARIA
CENTRO DE CIÊNCIAS NATURAIS E EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

Mauro Buemo Pozzobom

**FLUXO DE COERÊNCIA QUÂNTICA PARA UM *QUBIT* EVOLUINDO
SOBRE A AÇÃO DE CANAIS QUÂNTICOS**

Santa Maria, RS
2016

Mauro Buemo Pozzobom

**FLUXO DE COERÊNCIA QUÂNTICA PARA UM *QUBIT* EVOLUINDO SOBRE A AÇÃO
DE CANAIS QUÂNTICOS**

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física, Área de Concentração em Física da Matéria Condensada, da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM, RS), como requisito parcial para obtenção do grau de **Mestre em Física.**

ORIENTADOR: Prof. Jonas Maziero

Santa Maria, RS
2016

Ficha catalográfica elaborada através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Central da UFSM, com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

Pozzobom, Mauro Buemo

Fluxo de coerência quântica para um qubit evoluindo sobre a ação de canais quânticos / Mauro Buemo Pozzobom.- 2016.

70 p. ; 30 cm

Orientador: Jonas Maziero

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Santa Maria, Centro de Ciências Naturais e Exatas, Programa de Pós-Graduação em Educação Física, RS, 2016

1. Coerência Quântica 2. Emaranhamento 3. Canais Quânticos 4. Sistemas Abertos I. Maziero, Jonas II. Título.

©2016

Todos os direitos autorais reservados a Mauro Buemo Pozzobom. A reprodução de partes ou do todo deste trabalho só poderá ser feita mediante a citação da fonte.

Endereço: Rua Visconde de Pelotas, n. 1942, apto 403

End. Eletr.: mbpozzobom@gmail.com

Mauro Buemo Pozzobom

**FLUXO DE COERÊNCIA QUÂNTICA PARA UM *QUBIT* EVOLUINDO SOBRE A AÇÃO
DE CANAIS QUÂNTICOS**

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física, Área de Concentração em Física da Matéria Condensada, da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM, RS), como requisito parcial para obtenção do grau de **Mestre em Física.**

Aprovado em 23 de agosto de 2016:

Jonas Maziero, Dr. (UFSM)
(Presidente/Orientador)

Rogério José Baierle, Dr. (UFSM)

Ruben Aucchaise Estrada, Dr. (UEPG)
(Videoconferência)

Santa Maria, RS
2016

DEDICATÓRIA

Dedico esse trabalho a minha família, meu pai Victor Hugo Aita Pozzobom, minha mãe Matilde Buemo Pozzobom, minha irmã Tânia Buemo Pozzobom e minha querida noiva Tatiele Lamarque.

AGRADECIMENTOS

Ao termino do trabalho se faz por dever agradecer a todos os que me ajudaram nessa caminhada e desculpar-me daqueles que esqueci de mencionar, pelo fraquejar da minha memória.

A Deus que sempre me protegeu, principalmente nas horas mais difíceis garantindo a saúde necessária para que eu pudesse ultrapassar os obstáculos e alcançar os objetivos.

À minha digníssima família que deu-me como alicerce os valores necessários para construção de um bom caráter. Agradeço ao meu pai seu Victor e minha mãe dona Matilde, a dedicação que tiveram na minha criação, se não fosse pelo suor do trabalho deles nunca poderia ter estudado. A minha querida irmã Tânia agradeço por ter compartilhado os momentos mais belos da tua infância comigo, te vi bebê, hoje segue os passos rumo ao oficialato da Força Aérea Brasileira, quanto orgulho.

Agradeço à minha querida e amada noiva que sempre esteve apoiando-me em todos os momentos, desde da metade da graduação até agora. Compartilhamos os melhores momentos e também os menos bons, porque do teu lado não tem tempo ruim, demonstrando o verdadeiro sentido do amor. Você estará sempre em meu coração.

Ao professor Dr. Jonas Maziero que esteve me apoiando como orientador nesse período, dedicando muitas vezes, inclusive, seu tempo de descanso e lazer para ajudar-me com os mais diversos assuntos que estudamos para realizar este trabalho, agradeço pela amizade que temos a tempos e pela condução exemplar nos trabalhos realizados em nosso grupo, sempre guiando nosso caminho através do exemplo, mostrando-se um verdadeiro líder.

Ao Exército Brasileiro onde servi por oito anos e pude desenvolver e aprimorar muitos atributos importantes para qualquer atividade, seja ela docente ou na pesquisa, como empregado ou patrão, ou ainda na lida do campo. Dentre eles destaco persistência, espírito de corpo, liderança, comprometimento, lealdade entre outras. E também porque esse trabalho me deu condições para continuar estudando. Brasil! Acima de Tudo!!!

A todos meus amigos e colegas, principalmente os do Laboratório de Teoria da Matéria Condensada e do Grupo de Informação Quântica e Fenômenos Emergentes, tanto os da pós-graduação como os da iniciação científica, que nunca exitaram em me ajudar em qualquer tipo de atividade, evidenciando assim uma característica muito importante para quem trabalha em grupo, o companheirismo.

Finalmente, agradeço à todos os professores e funcionários que estiveram presentes na minha formação acadêmica, desde a minha infância até agora, ao Programa de Pós-graduação em Física e a UFSM onde tive a oportunidade de aprofundar meus conhecimentos, bem como, todas as entidades públicas onde estudei durante toda a minha vida e também a CAPES que custeou minhas despesas nesses dois anos de estudo.

Bem-sucedido é aquele que honra sua família, protege e está sempre lutando para fazer do seu lar, o melhor lugar do mundo.

(Elis Falcão)

RESUMO

FLUXO DE COERÊNCIA QUÂNTICA PARA UM *QUBIT* EVOLUINDO SOBRE A AÇÃO DE CANAIS QUÂNTICOS

AUTOR: Mauro Buemo Pozzobom

ORIENTADOR: Jonas Maziero

A Coerência Quântica (CQ) tem aspecto fundamental na Mecânica Quântica (MQ), ela é estudada desde o surgimento da MQ todavia, a CQ é uma característica que é facilmente destruída quando um sistema físico interage com o meio ambiente. Além disso, recentemente a coerência quântica tem tido destaque devido a possibilidade de sua utilização como um recurso na Ciência da Informação Quântica (CIQ). Nesse trabalho estudamos o fluxo de CQ de um *qubit* (sistema de dois níveis) interagindo com o ambiente modelado por canais quânticos de ruído que são muito comuns em CIQ. Esses canais representam alguns sistemas físicos e são amplamente utilizados para o estudo de correção de erros, por exemplo. Calculamos a CQ baseados na norma- l_1 para os diferentes canais buscando relacioná-la com o emaranhamento, que também é outro tópico fundamental em MQ. Notamos que para o canal *amplitude damping* a CQ total é igual a soma das partes local e não-local e que a parte não-local equivale ao emaranhamento. Para o canal *phase damping* o emaranhamento não abrange toda a CQ não-local, existindo uma lacuna entre eles que pode depender do tempo e do estado inicial. Além disso, para os canais *bit*, *phase* e *bit phase flip* são consideradas a possibilidade e condições para invariância da CQ. Ainda notamos que para o canal *depolarizing* podemos usar o *qubit* como um catalisador para a criação de CQ e de emaranhamento. Observamos ainda que mesmo estados iniciais incoerentes podem levar à criação de coerência quântica transitória entre sistema e ambiente. Vimos também que o surgimento do emaranhamento não implica necessariamente na diminuição da CQ do *qubit*. Investigamos ainda se a CQ é perdida ou transformada em outros tipos de correlações e também quais condições iniciais possibilitam tornar a coerência quântica mais robusta.

Palavras-chave: Coerência Quântica. Emaranhamento. Canais Quânticos. Sistemas Abertos.

ABSTRACT

QUANTUM COHERENCE FLOW FOR A QUBIT EVOLVING UNDER THE ACTION OF QUANTUM CHANNELS

AUTHOR: Mauro Buemo Pozzobom

ADVISOR: Jonas Maziero

Quantum Coherence (QC) has a fundamental role in Quantum Mechanics (QM). It has been studied since the emergence of QM. However, this quantum feature is easily destroyed when a physical system interacts with the environment. Also, recently the quantum coherence has been highlighted because of the possibility of using it as a resource in the Quantum Information Science (QIS). In this work we study the QC flow of a qubit (two-level system) interacting with the environment modeled by quantum channels of noise that are very common in QIS. These channels represent some physical systems and are widely used for error correction studies. We calculate the QC by the l_1 -norm, doing this for the different channels seeking to relate it to the entanglement, which is also another key topic in QM. We note that in the amplitude damping channel the total QC is equal to the sum of the local and non-local parts and that the non-local part is equivalent to entanglement. For the phase damping channel, entanglement does not cover all non-local QC. Here there is a gap between them that may depend on the time and on the initial state. Besides, for the bit, phase, and bit phase flip channels the possibility and the conditions for invariance of QC are considered. Also, we notice that for the depolarizing channel we can use the qubit as a catalyst for the creation of non-local QC and entanglement. We, as well, observed that even initial states incoherent can lead to transient quantum coherence between system and environment. We also showed that the emergence of entanglement does not necessarily imply the destruction of QC. Furthermore, we investigated whether QC is lost or changed into other types of correlations and besides which initial conditions allow making quantum coherence robust to decoherence.

Keywords: Quantum Coherence. Entanglement. Quantum Channels. Open System.

LISTA DE FIGURAS

- Figura 2.1 – Mera ilustração da representação e um espaço composto por dois outros espaços. 12
- Figura 2.2 – Comportamento do emaranhamento do estado $|\psi_p\rangle = \sqrt{p}|00\rangle + \sqrt{1-p}|11\rangle$, calculado a partir da entropia, onde \sqrt{p} é a amplitude de probabilidade de encontrarmos o estado em $|00\rangle$ ou $|11\rangle$ 14
- Figura 2.3 – Representação de um estado $|\psi\rangle$ na bola de Bloch. 21

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

<i>CIQ</i>	Ciência da Informação Quântica
<i>CQ</i>	Coerência Quântica
<i>MC</i>	Mecânica Clássica
<i>MQ</i>	Mecânica Quântica

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	10
2	APRESENTAÇÃO	12
2.1	REFERENCIAL TEÓRICO	12
2.1.1	Emaranhamento	12
2.1.1.1	<i>Decomposição de Schmidt</i>	14
2.1.1.2	<i>Negatividade</i>	15
2.1.2	Coerência Quântica	16
2.1.3	Decoerência	17
2.2	OBJETIVO	17
2.3	MATERIAIS E MÉTODOS	18
2.3.1	Operador Densidade Reduzido	18
2.3.2	Canais Quânticos	19
2.3.3	Qubit	20
2.4	PRELÚDIO	22
3	ARTIGO 1 - ENVIRONMENT-INDUCED QUANTUM COHERENCE SPREADING	23
4	CONCLUSÃO	34
	REFERÊNCIAS	35
	APÊNDICE A – AMPLITUDE DAMPING	38
A.1	DINÂMICA DO SISTEMA	39
A.2	DINÂMICA DO SISTEMA-AMBIENTE	41
	APÊNDICE B – PHASE DAMPING	44
B.1	DINÂMICA DO SISTEMA	44
B.2	DINÂMICA SISTEMA-AMBIENTE	45
	APÊNDICE C – BIT FLIP	48
C.1	DINÂMICA DO SISTEMA	48
C.2	DINÂMICA SISTEMA-AMBIENTE	49
	APÊNDICE D – PHASE FLIP	52
D.1	DINÂMICA DO SISTEMA	52
D.2	DINÂMICA SISTEMA-AMBIENTE	53
	APÊNDICE E – BIT PHASE FLIP	56
E.1	DINÂMICA DO SISTEMA	56
E.2	DINÂMICA SISTEMA-AMBIENTE	57
	APÊNDICE F – DEPOLARIZING	60
F.1	DINÂMICA DO SISTEMA	61
F.2	DINÂMICA DO SISTEMA-AMBIENTE	65

1 INTRODUÇÃO

Na maioria das vezes a ciência busca representar fenômenos da natureza através de modelos, iniciando o estudo por tarefas simples, avançando para problemas mais difíceis e chegando até obstáculos complexos. Na Mecânica Quântica (MQ) não é diferente, começamos nosso estudo com sistemas físicos fechados, onde não são consideradas influências com o meio externo, e passamos a estudar sistemas físicos abertos que trazem algum tipo de interação com o meio ambiente onde estão inseridos, o que de alguma forma, é o que acontece na maioria das vezes no mundo real.

Desde quando foram observados fenômenos que não podiam ser explicados pela física clássica no final do século XIX (PLANCK, 1900) e início do século XX (PLANCK, 1901), a curiosidade humana em tentar entender e explicar esses fenômenos só aumentou. Ao longo das duas primeiras décadas do século XX, a MQ tem sua base formada com certa desconfiança de alguns dos mais famosos pesquisadores que buscavam ainda relacionar com as já consolidadas leis da Mecânica Clássica (MC). No entanto, as discussões sobre o assunto ficaram mais entusiasmadas com a publicação de diversos artigos na década de vinte e logo depois em 1935 (EINSTEIN; PODOLSKY; ROSEN, 1935) e 1936 (SCHRÖDINGER, 1935, 1936) que tratavam basicamente de características não-locais, chamadas de emaranhamento por Schrödinger. Nessa mesma época o desenvolvimento da teoria da comunicação por Claude Shannon e da teoria da computação por Alan Turing avançavam de maneira gradual, criando a possibilidade de um grande salto no desenvolvimento da ciência e tecnologia.

Uma das possibilidades de teste da não-localidade e/ou indeterminismos foi proposta por John Stewart Bell (BELL, 1964) quando desenvolveu um conjunto de desigualdades. Esses testes começaram a ser feitos alguns anos depois (CLAUSER et al., 1969; ASPECT; GRANGIER; ROGER, 1982), mas só recentemente experimentos comprovaram os resultados teóricos propostos por Bell (LANYON et al., 2014; FORGUES; LUPIEN; REULET, 2015).

O desenvolvimento da MQ e das teorias de computação e de comunicação deram origem à Ciência da Informação Quântica (CIQ), possibilitando a criação ferramentas que podem ser mais eficientes que as usadas em teorias clássicas, tornando viável a possibilidade de utilização das correlações quânticas como um recurso a ser usado na CIQ.

Observados os conceitos anteriores a CIQ já deu passos importantes como no campo da criptografia (BENNETT; BRASSARD, 1984; EKERT, 1991; BENNETT; BRASSARD; MERMIN, 1992) e em algoritmos de fatoração (SHOR, 1994). Outros exemplos que estão sendo estudados atualmente são simulação quântica (SOMAROO et al., 1999; TSENG et al., 2000; GEORGESCU; ASHHAB; NORI, 2014) e redes quânticas (BOSE, 2003), o que mostra que o desenvolvimento nessa área está em plena expansão.

Com a constatação de que os efeitos da MQ podem levar a uma capacidade computacional aumentada, em relação ao processamento de informação de maneira clássica, desencadeou uma investigação muito grande em torno de algoritmos quânticos que são mais eficientes do que suas contrapartidas clássicas. Alguns exemplos são, busca em um banco de dados (GROVER, 1997), resolução de sistemas de equações lineares (HARROW; HASSIDIM; LLOYD, 2009), que por sua vez tem grande interesse na área da ciência e tecnologia e também o ajuste linear de dados e funções (WIEBE; BRAUN; LLOYD, 2012). Parte importante dos algoritmos de fatoração e de busca é a transformada de Fourier quântica. Ela é usada para estimar fases quânticas e autovalores de um operador unitário (NIELSEN; CHUANG, 2010).

A coerência quântica está nos alicerces da MQ, ela é uma quantidade fundamental para todo o desenvolvimento dos trabalhos na área. A inevitável interação com o ambiente destrói esse recurso e por isso acreditamos que é importante descrever a dinâmica da coerência quântica sobre diversos tipos de interação sistema-ambiente.

Embora as principais ideias conceituais relacionadas à CQ, tenha sido relatadas na literatura a décadas, sua quantificação formal do ponto de vista da teoria de recursos foi abordada muito recentemente (ÅBERG, 2014; BAUMGRATZ; CRAMER; PLENIO, 2014; WINTER; YANG, 2016).

Neste trabalho estudamos a dinâmica da coerência quântica para um *qubit* interagindo com o ambiente que é modelado por canais quânticos. A coerência quântica está relacionada com o comportamento quântico característico apresentado por sistemas físicos. O *qubit* representa a menor unidade de armazenamento e transmissão para a CIQ, ele leva “vantagem” sobre o *bit* clássico porque pode assumir duas configurações “ao mesmo tempo”, ao invés de uma, como no caso clássico. Os canais quânticos modelam como acontece a interação do sistema com o ambiente, o que ajuda na realização dos cálculos, uma vez que conseguem simplificar essa interação.

Esse trabalho é composto de uma pequena introdução e justificativa, que já foi feita. Seguido de um capítulo onde temos a apresentação dos assuntos que foram estudados, bem como os objetivos e algumas ferramentas matemáticas que foram utilizadas. Logo depois, uma descrição do artigo, em seguida o artigo propriamente dito. Por fim a conclusão e algumas perspectivas futuras.

2 APRESENTAÇÃO

Abordaremos a seguir alguns dos assuntos que foram estudados para o desenvolvimento desse trabalho, lembraremos algumas definições, e também as ferramentas matemáticas que foram utilizadas.

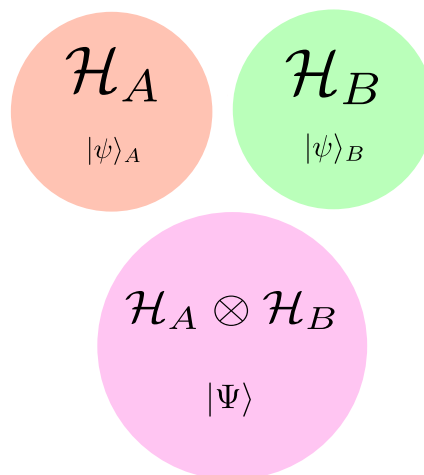
2.1 REFERENCIAL TEÓRICO

2.1.1 Emaranhamento

Em MQ os estados são representados por vetores em um espaço vetorial, chamado de espaço de Hilbert \mathcal{H} . Esse espaço vetorial é completo, sendo bem definido em seu domínio o produto interno, elemento nulo e elemento inverso. Os vetores seguem a notação de Dirac.

Temos um estado composto de duas partes, $|\psi\rangle_A$ e $|\psi\rangle_B$, que pertencem respectivamente a \mathcal{H}_A e \mathcal{H}_B , e podem ser escritos nas bases $\{|a_j\rangle\} \in \mathcal{H}_A$ e $\{|b_k\rangle\} \in \mathcal{H}_B$, com $j = 1, \dots, \dim \mathcal{H}_A$, e o análogo vale para k , podemos representar um vetor nesse espaço composto como: $|\Psi\rangle \in \mathcal{H}_{AB} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$.

Figura 2.1 – Mera ilustração da representação e um espaço composto por dois outros espaços.



Então,

$$\begin{aligned} |\Psi\rangle &= \mathbb{I}_{AB}|\Psi\rangle \\ &= \mathbb{I}_A \otimes \mathbb{I}_B|\Psi\rangle, \end{aligned}$$

onde \mathbb{I}_{AB} é a matriz identidade, podemos escrever ela na forma de uma relação de completudeza:

$$|\Psi\rangle = \left(\sum_{j=1}^{d_A} |a_j\rangle\langle a_j| \right) \otimes \left(\sum_{k=1}^{d_B} |b_k\rangle\langle b_k| \right) |\Psi\rangle.$$

Usando uma das propriedades do produto tensorial, $(\hat{A} \otimes \hat{B})(\hat{C} \otimes \hat{D}) = (\hat{A}\hat{C}) \otimes (\hat{B}\hat{D})$,

$$|\Psi\rangle = \sum_{j,k=1}^{d_A, d_B} |a_j\rangle \otimes |b_k\rangle \langle a_j| \otimes \langle b_k| |\Psi\rangle,$$

onde $c_{jk} = (\langle a_j| \otimes \langle b_k|) |\Psi\rangle \in \mathcal{H}_{ab}$, são os coeficientes complexos. Logo,

$$|\Psi\rangle = \sum_{j,k=1}^{d_A, d_B} c_{jk} |a_j\rangle \otimes |b_k\rangle.$$

Um estado puro composto, é dito separável se podemos escrever ele como a composição entre as duas partes através do produto tensorial:

$$|\Psi^{sep}\rangle := |\psi_A\rangle \otimes |\psi_B\rangle.$$

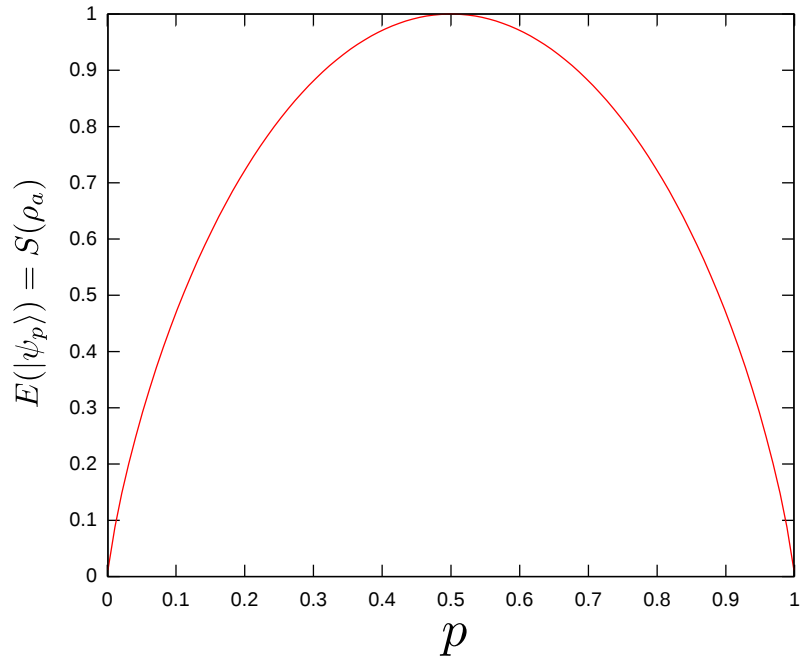
Nesse caso, se conhecemos bem as duas partes do sistema, conhecemos o estado composto como um todo. Relacionando com a entropia de von Neumann, $S(\rho) = -\text{Tr}(\rho \log_2 \rho)$, notamos que ela é zero tanto para o estado composto $|\Psi^{sep}\rangle$, quanto para as suas partes. Basta encontrarmos o operador densidade reduzido através do traço parcial $\text{Tr}_A |\Psi^{sep}\rangle\langle\Psi^{sep}| = |\psi_B\rangle\langle\psi_B| = \rho_B$ e a entropia $S_B = 0 = S_A$. Observamos que estados separáveis são pouco comuns em sistemas compostos.

Agora para estados puros mais gerais, da forma $|\Psi\rangle = \sum_{j,k=1}^{d_A, d_B} c_{jk} |a_j\rangle \otimes |b_k\rangle$, normalmente não é possível decompor esse estado geral em um produto tensorial, onde cada parte pertence a um subespaço. Por exemplo, para o estado

$$|\Psi_+^{AB}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle \otimes |1\rangle + |1\rangle \otimes |0\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}} (|01\rangle + |10\rangle),$$

temos então que $S(|\Psi_+^{AB}\rangle) = 0$. Calculamos a entropia das partes para o estado $|\Psi_+^{AB}\rangle$ e notamos que ela é máxima, $S_A = S_B = 1$. Conseguimos descrever bem o sistema como um todo, mas não conhecemos bem o estado de suas partes, o que é contraintuitivo do ponto de vista da MC. Na realidade a não-separabilidade de um estado composto implica na existência de emaranhamento. Um exemplo mais geral seria o estado $|\psi_p\rangle = \sqrt{p}|00\rangle + \sqrt{1-p}|11\rangle$, cujo o emaranhamento está mostrado na Fig. 2.2.

Figura 2.2 – Comportamento do emaranhamento do estado $|\psi_p\rangle = \sqrt{p}|00\rangle + \sqrt{1-p}|11\rangle$, calculado a partir da entropia, onde \sqrt{p} é a amplitude de probabilidade de encontrarmos o estado em $|00\rangle$ ou $|11\rangle$.



2.1.1.1 Decomposição de Schmidt

Para estados puros gerais podemos usar a decomposição de Schmidt para verificar se este é separável ou não (NIELSEN; CHUANG, 2010). Temos da decomposição de Schmidt se $|\Psi\rangle$ é um estado puro, formado pela composição dos espaços \mathcal{H}_A e \mathcal{H}_B , existem bases, $|s_j^a\rangle$ e $|s_j^b\rangle$, ortonormais para \mathcal{H}_A e \mathcal{H}_B , respectivamente, de modo que

$$|\Psi\rangle = \sum_{j=1}^{\min(d_a, d_b)} \alpha_j |s_j^a\rangle \otimes |s_j^b\rangle,$$

onde α_j são números reais não negativos e satisfazem a condição $\sum_j \alpha_j^2 = 1$, chamados de coeficientes de Schmidt. Agora se tomamos a função traço parcial

$$\begin{aligned} \rho_A &= \text{Tr}_B |\Psi\rangle\langle\Psi| \\ &= \sum_{j=1} \alpha_j^2 |s_j^a\rangle\langle s_j^a|, \end{aligned}$$

nós vemos que se existir mais de um valor de α_j não nulo o estado não é separável, o mesmo vale para ρ_B .

Denominado de emaranhamento por Schrödinger, esse fenômeno que trata de características não-locais, só ocorre no universo quântico e não tem análogo clássico. Atribuímos a um sistema constituído de duas ou mais partes, estar emaranhado, se não conseguimos fazer observações (medidas) sobre uma das partes sem afetar a outras, mesmo que essas partes estejam separadas por uma distância muito grande essa interferência ocorre. Em outras palavras, se um sistema é constituído de duas ou mais partes e podemos representar as partes separadamente dizemos que ele é não emaranhado, ou seja, separável. Do contrário, se não conseguimos representar as partes separadamente o sistema é dito emaranhado.

Para misturas estatísticas de estados utilizamos como medida de emaranhamento a negatividade, descritas de maneira sucinta abaixo, que utiliza o critério da separabilidade de Peres (PERES, 1996).

2.1.1.2 Negatividade

A negatividade é uma das possibilidades de quantificar o emaranhamento e baseia-se no estudo da transposta parcial de um operador densidade.

Se considerarmos que uma matriz M é positiva semidefinida¹. A função transposta, $T(|j\rangle\langle k|) = |k\rangle\langle j|$, é uma mapa linear e positivo, logo a transposta $T(M)$ também será positiva semidefinida.

Então, se temos que ρ_{AB}^{sep} , é um operador densidade formado pela composição de ρ_j^A e ρ_j^B que são positivos semidefinidos, logo ρ_{AB}^{sep} também é positivo e pode ser escrito como,

$$\rho_{AB}^{sep} = \sum_j p_j \rho_j^A \otimes \rho_j^B.$$

Definimos a transposta parcial como:

$$T_A(\rho_{AB}^{sep}) := T \otimes \mathbb{I}(\rho_{AB}^{sep}) \text{ e } T_B(\rho_{AB}^{sep}) := \mathbb{I} \otimes T(\rho_{AB}^{sep})$$

quando à aplicamos a esse operador densidade separável,

$$T_B(\rho_{AB}^{sep}) = \sum_j p_j \rho_j^A \otimes T \rho_j^B,$$

notamos que $T_B(\rho_{AB}^{sep})$ continua sendo um operador positivo semidefinido, e o análogo vale para $T_A(\rho_{AB}^{sep})$.

¹Nesse caso todos os seus autovalores serão maiores ou iguais a zero, então a representação de $M \geq 0$.

Agora se ρ_{AB} não for separável, por exemplo,

$$\rho_{AB} = |\Phi_+^{AB}\rangle\langle\Phi_+^{AB}|$$

com $|\Phi_+^{AB}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle \otimes |0\rangle + |1\rangle \otimes |1\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$ quando aplicamos a transposta parcial

$$\begin{aligned} \mathbb{T}_B(\rho_{AB}) &= \mathbb{T}_B[|\Phi_+^{AB}\rangle\langle\Phi_+^{AB}|] \\ &= \mathbb{T}_B\left[\frac{1}{2}(|00\rangle\langle 00| + |00\rangle\langle 11| + |11\rangle\langle 00| + |11\rangle\langle 11|)\right] \\ &= \frac{1}{2}(|0\rangle\langle 0| \otimes \mathbb{T}|0\rangle\langle 0| + |0\rangle\langle 1| \otimes \mathbb{T}|0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 0| \otimes \mathbb{T}|1\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1| \otimes \mathbb{T}|1\rangle\langle 1|) \\ &= \frac{1}{2}(|00\rangle\langle 00| + |01\rangle\langle 10| + |10\rangle\langle 01| + |11\rangle\langle 11|) \end{aligned}$$

chegamos a uma nova matriz. Se calcularmos os autovalores dessa matriz encontramos, $\{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\}$, notamos assim que existe um autovalor negativo, então a nova matriz falha em ser positiva semidefinida. Essa característica é usada como uma medida de emaranhamento. Quanto maior o valor da soma dos módulos dos autovalores negativos da matriz transposta parcial de ρ_{AB} , mais emaranhado consideramos o sistema (ŻYCZKOWSKI et al., 1998; VIDAL; WERNER, 2002). O emaranhamento dado pela negatividade é definido como:

$$E_n(\rho_{AB}) := \frac{1}{2}(\|\mathbb{T}_b(\rho_{AB})\|_{Tr} - 1),$$

onde $\|M\|_{Tr} := \text{Tr}\sqrt{M^\dagger M}$ é a norma do traço. Essa medida de emaranhamento só é válida para sistemas bipartidos com dimensão máxima de $2 \otimes 3$.

2.1.2 Coerência Quântica

Coerência está na essência da MQ, tendo em vista que refere-se à características que não podem ser explicadas pela física clássica. Ela também está presente há muitos anos na óptica quântica e áreas afins. A partir da perspectiva da teoria de recursos pode ser vista com uma propriedade muito importante para realizar tarefas no âmbito da CIQ. Um dos aspectos mais relevantes é a fragilidade da coerência quântica frente a interação entre o sistema quântico e o ambiente, o que geralmente acarreta em decoerência. Em nosso estudo vamos considerar como medida de coerência quântica a norma- l_1 . Ela consiste na soma dos módulos dos elementos fora da diagonal principal da matriz que representa o estado evoluído em uma base de referência (BAUMGRATZ; CRAMER; PLENIO, 2014).

Podemos representar um estado incoerente por uma matriz, ι , que é diagonal em

alguma base de referência $\{|\psi_j\rangle\}$. Essa base toma-se como padrão a base computacional no espaço de Hilbert, com $j = 1, \dots, d - 1$.

$$\iota = \sum_{j=1}^d \iota_j |\psi_j\rangle \langle \psi_j|,$$

onde ι_j é a distribuição de probabilidades e $d = \dim \mathcal{H}$ é a dimensão do sistema no espaço de Hilbert.

Por exemplo, nosso estado ρ possui coerência quântica, C , em relação a uma base, $\{|\psi_j\rangle\}$, quando representarmos ρ naquela base e existir elementos não nulos fora da diagonal principal,

$$C(\rho) := \min_{\iota} \|\rho - \iota\|_{l_1} = \sum_{j \neq k} |\langle \psi_j | \rho | \psi_k \rangle|.$$

Onde a norma- l_1 de uma matriz M é definida como $\|M\|_{l_1} := \sum_{j,k} |\langle \psi_j | M | \psi_k \rangle|$, em uma base $\{|\psi\rangle\}$.

2.1.3 Decoerência

Como vimos anteriormente podemos ter dois ou mais sistemas físicos correlacionados. A decoerência representa a perda da coerência e das correlações quânticas entre esses sistemas. É o que, na maioria dos casos, queremos evitar, tendo em vista, o nosso interesse em aproveitar as correlações para realizar tarefas. Muitas vezes ela ocorre devido a interação do sistema com ambiente, e pode acarretar também em perda de informação do sistema para o ambiente. Quando a decoerência ocorre temos a transição do estado quântico para o clássico (ZUREK, 2003). Esse processo de certa forma é irreversível, e parece ser o caminho natural para a evolução dos sistemas.

2.2 OBJETIVO

Neste trabalho, estudamos a dinâmica da Coerência Quântica em um sistema de dois níveis (*qubit*) interagindo com o ambiente modelado por canais quânticos. A modelagem das interações em um ambiente geral (completo) é muito difícil e, por ora, fora de alcance. Devido a isso, canais quânticos são ferramentas capazes de fornecer uma boa descrição para uma ampla gama de situações físicas. Neste trabalho, nós usamos esta ferramenta para apresentar um estudo detalhado sobre o fluxo de coerência quântica induzida pelo ambiente, uma vez que, devido à interação do sistema com o ambiente, na

maioria dos casos, ocorre a decoerência.

A decoerência acontece devido à criação de correlações entre sistema-ambiente. Então, entender como funciona fluxo de CQ do sistema para o ambiente e a criação de correlações não-locais pode contribuir para compreender melhor o processo de coerência em si.

Por outro lado, muitos estudos tem sido feitos para descrever a criação de correlações através da CQ. Nesse trabalho temos por objetivo detalhar a dinâmica natural gerada pela interação do sistema-ambiente e verificar se ela é transformada em outro tipo de correlação.

2.3 MATERIAIS E MÉTODOS

2.3.1 Operador Densidade Reduzido

O operador densidade reduzido é muito usado quando trabalhamos com sistemas quânticos compostos, formados por mais de um espaço de vetorial. Para chegarmos ao operador densidade reduzido utilizamos a função traço parcial, que é muito comum para esse tipo de análise. Normalmente para esse caso temos uma operador densidade global, que descreve completamente o estado do sistema. Para um sistema bipartido pode ser representado por $\rho_{ab} = \sum_j p_j |\Psi_j^{ab}\rangle\langle\Psi_j^{ab}| \in \mathcal{H}_{ab}$, no entanto, queremos informações sobre cada uma das partes, que pertencem a espaços diferentes. O espaço \mathcal{H}_{ab} é formado da seguinte maneira $\mathcal{H}_{ab} = \mathcal{H}_a \otimes \mathcal{H}_b$.

Definimos a função traço parcial da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} Tr_b(|\psi\rangle\langle\phi| \otimes |\zeta\rangle\langle\eta|) &:= |\psi\rangle\langle\phi| \otimes Tr(|\zeta\rangle\langle\eta|) \\ &= \langle\eta|\zeta\rangle|\psi\rangle\langle\phi| \end{aligned}$$

onde $|\psi\rangle, |\phi\rangle \in \mathcal{H}_a$ e $|\zeta\rangle, |\eta\rangle \in \mathcal{H}_b$.

Nesse caso podemos então considerar um sistema descrito por um operador densidade ρ_{ab} pertencente ao espaço composto \mathcal{H}_{ab} e obter o operador densidade reduzido do sistema a usando a função traço parcial em ρ_{ab} , tomado sobre b ,

$$\rho_a = Tr_b(\rho_{ab}).$$

Para o operador densidade reduzido do sistema b aplicamos a função traço parcial nova-

mente em ρ_{ab} agora tomado sobre a ,

$$\rho_b = \text{Tr}_a(\rho_{ab}).$$

Podemos considerar então o estado

$$|\Psi_-^{AB}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\rangle \otimes |\downarrow\rangle - |\downarrow\rangle \otimes |\uparrow\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle \otimes |1\rangle - |1\rangle \otimes |0\rangle),$$

nesse caso o operador densidade é

$$\begin{aligned} \rho_{AB} &= |\Psi_-^{AB}\rangle \langle \Psi_-^{AB}| \\ &= \frac{1}{2} (|0\rangle \otimes |1\rangle - |1\rangle \otimes |0\rangle) (\langle 0| \otimes \langle 1| - \langle 1| \otimes \langle 0|) \\ &= \frac{1}{2} (|0\rangle \langle 0| \otimes |1\rangle \langle 1| - |0\rangle \langle 1| \otimes |1\rangle \langle 0| + \\ &\quad - |1\rangle \langle 0| \otimes |0\rangle \langle 1| + |1\rangle \langle 1| \otimes |0\rangle \langle 0|). \end{aligned}$$

Então podemos calcular o operador densidade reduzido para a

$$\begin{aligned} \rho_A &= \text{Tr}_B(\rho_{AB}) \\ &= \frac{1}{2} (|0\rangle \langle 0| \otimes \text{Tr}|1\rangle \langle 1| - |0\rangle \langle 1| \otimes \text{Tr}|1\rangle \langle 0| + \\ &\quad - |1\rangle \langle 0| \otimes \text{Tr}|0\rangle \langle 1| + |1\rangle \langle 1| \otimes \text{Tr}|0\rangle \langle 0|) \\ &= \frac{1}{2} (|0\rangle \langle 0| + |1\rangle \langle 1|) \\ &= \frac{1}{2} \mathbb{I} \end{aligned}$$

obtermos o mesmo resultado se repetirmos para o procedimento para b .

2.3.2 Canais Quânticos

O termo canal quântico é frequentemente usado nesse trabalho e refere-se ao ambiente. Tendo em vista a grande complexidade de modelar o ambiente completamente, os canais que usamos simplificam a representação da interação do sistema com o ambiente. Os canais quânticos caracterizam-se por gerar uma evolução não unitária no sistema, que é exercida por um mapa completamente positivo.

O canal *amplitude damping* é a representação fenomenológica aproximada do processo de emissão espontânea, quando um átomo interage com as flutuações do vácuo do campo eletromagnético. O canal *phase damping* demonstra a maior possibilidade de perda de coerência em diversos sistemas quânticos. Nesse caso não temos troca de energia do sistema com o ambiente. O canal *bit flip* representa o erro mais comum que ocorre

em comunicação clássica, a inversão do *bit* $0 \rightarrow 1$ ou $1 \rightarrow 0$, e esse tipo de erro pode ocorrer também na comunicação quântica. O canal *phase flip* representa um tipo de erro que só acontece no âmbito da mecânica quântica fazendo que ocorra uma adição de fase aleatória a um dos estados da base. O canal *bit phase flip* está associado à ocorrência dos dois erros anteriores ao mesmo tempo. O último canal estudado foi o *depolarizing*, que mistura o sistema com o ambiente de maneira maximamente misto.

Outra ferramenta utilizada foram os operadores de Kraus que simplificam a dinâmica unitária do sistema. O estado do sistema ρ^S mais ambiente E evoluído é descrito por um mapa U que representa uma operação unitária.

$$\rho_t = U(\rho^S \otimes |E\rangle\langle E|)U^\dagger.$$

Podemos mostrar que, se os elementos da matriz dos operadores de Kraus K_j são $\langle S_l | K_j | S_m \rangle = (\langle S_l | \otimes \langle E_j |) U (| S_m \rangle \otimes | E_0 \rangle)$, a evolução do estado do sistema pode ser da forma

$$\rho_t^S = Tr_E(\rho_t) = \sum_j K_j \rho_t K_j^\dagger.$$

Como é o caso mais frequente, os operadores de Kraus que descrevem a ação de um canal de ruído são conhecidos, podemos modelar a dinâmica do sistema do ambiente através do seguinte mapa unitária

$$U | S_l \rangle \otimes | E_0 \rangle = \sum_j (K_j | S_l \rangle) \otimes | E_j \rangle.$$

2.3.3 Qubit

Para a comunicação clássica a unidade de básica para a transmissão e armazenamento de informação é o *bit*, *binary digit*, onde uma entidade física pode armazenar uma informação, de duas possíveis. Assim, por exemplo, um interruptor elétrico pode estar desligado ou ligado. Seja qual for a entidade física, poderemos interpretar essa configuração como 0 ou 1.

O *qubit* (SCHUMACHER, 1995) é o análogo quântico para o *bit*, ele é um sistema de dois níveis, mas, nesse caso podemos dizer que a entidade física está em um estado onde as duas configurações são possíveis “ao mesmo tempo”. Ou seja, o interruptor poderia estar desligado e ligado “ao mesmo tempo”.

Um *qubit* pode ser representado por um vetor na base computacional, e pode as-

sumir dois estados,

$$|0\rangle := \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ e } |1\rangle := \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

ou uma superposição destes dois estados,

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle,$$

onde α e β são amplitudes de probabilidades do estado do *qubit*. Os coeficientes pertencem ao espaço complexo \mathbb{C}^2 . Para estados puros a representação geométrica é a casca esférica da bola de Bloch, veja na figura 2.3.

A representação geométrica para um estado geral qualquer de um *qubit* é:

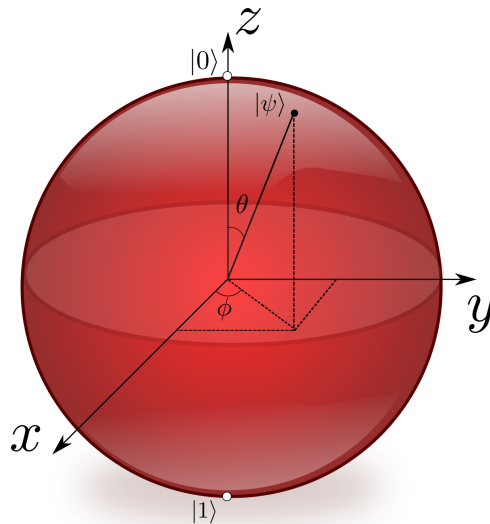
$$\rho = 2^{-1}(\mathbb{I} + \vec{r} \cdot \vec{\sigma}),$$

onde $\vec{r} = (r_1, r_2, r_3)$ são as componentes do vetor e $\vec{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ são as matrizes de Pauli

$$\sigma_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \sigma_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Podemos representar qualquer sistema de dois níveis como um vetor nessa bola².

Figura 2.3 – Representação de um estado $|\psi\rangle$ na bola de Bloch.



²As componentes desse vetor na bola de Bloch são $r_1 = r \sin\theta \cos\phi$, $r_2 = r \sin\theta \sin\phi$ e $r_3 = r \cos\theta$, para $r \in [0, 1]$, $\theta \in [0, \pi]$ e $\phi \in [0, 2\pi]$.

2.4 PRELÚDIO

Recentemente, vários artigos têm investigado a relação entre a coerência quântica (CQ) e outras correlações e também suas interconversões através de operações unitárias. Nesse artigo nós consideramos a dinâmica natural gerada devido à interação de um sistema quântico de dois níveis (um *qubit*) com o meio ambiente, que é modelado por canais quânticos. Este processo é normalmente acompanhado pela perda de CQ do sistema, que é induzida pela criação espontânea de correlações entre ele e seus arredores. De modo a simplificar a notação da representação da evolução temporal do sistema mais ambiente, usamos uma transformação unitária representada por operadores de Kraus. A técnica utilizada para calcular a CQ foi proposta por Baumgratz e seus colegas, onde sugerem uma medida bem fundamentada da CQ que consiste na soma dos módulos dos elementos fora da diagonal principal da matriz que representa o estado evoluído em uma base de referência. Nós observamos resultados interessantes do fluxo de CQ induzida pelo ambiente. Por exemplo, que a CQ geralmente não é conservada, que até estados iniciais incoerentes podem levar à CQ transitória entre sistema e ambiente. Para alguns dos canais de *flip* identificamos a possibilidade e as condições para o congelamento da CQ e também para uma modificação brusca na taxa de alteração com o tempo. Também observamos que o canal *depolarizing* pode ser considerado como um catalisador na criação de CQ e de emaranhamento. O restante do artigo está organizado da seguinte forma. Na Sec. II, começamos descrevendo as condições iniciais que devem ser consideradas em todos os cálculos subsequentes, como o estado inicial do *qubit* e a sua CQ. Em seguida, mencionamos brevemente a representação do operador de Kraus e seu mapeamento unitário correspondente. Depois estabelecemos as condições iniciais para o ambiente e para a evolução temporal do sistema mais ambiente. Posteriormente, nós aplicamos este formalismo para estudar o fluxo de coerência quântica, através da norma- l_1 , para um *qubit* evoluindo sobre a ação do ambiente modelados por canais quânticos. Para cada subseção seguinte abordamos um canal diferente: *amplitude damping* (Sec. II A) onde definimos a coerência quântica local (C_l) e não local (C_{nl}) e também lembramos brevemente o cálculo do emaranhamento através da *concurrence*. Ao longo da Sec. II B, relativa ao canal *phase damping*, além das constatações sobre o canal propriamente dito, revisamos o cálculo do emaranhamento por meio da negatividade. Para os canais *bit flip* (Sec. II C), *phase flip* (Sec. II D), *bit phase flip* (Sec. II E) e *depolarizing* (Sec. II F), todos os cálculos foram realizados com base nos conceitos já abordados anteriormente. Por fim, as conclusões sobre os resultados do trabalho estão listadas na Sec. III.

Environment-induced quantum coherence spreading

Mauro B. Pozzobom¹ and Jonas Maziero^{1,2,*}

¹*Departamento de Física, Centro de Ciências Naturais e Exatas,
Universidade Federal de Santa Maria, Avenida Roraima 1000, 97105-900, Santa Maria, RS, Brazil*

²*Instituto de Física, Facultad de Ingeniería, Universidad de la República,
J. Herrera y Reissig 565, 11300, Montevideo, Uruguay*

Quantum coherence (QC) is a fundamental aspect of quantum systems which is generally smeared due to their interaction with the surroundings. In this article we make a thorough study of the spreading of QC, as quantified by the l_1 -norm QC, when a qubit is subjected to noise channels commonly appearing in quantum information science. We report several interesting aspects of this environment-induced QC flow. For instance, we notice that QC is generally not conserved and that even incoherent initial states can lead to transitory system-environment QC. We show that for the amplitude damping channel the evolved total QC can be written as the sum of local and non-local parts, with the last one being equal to entanglement. On the other hand, for the phase damping channel (PDC) entanglement does not account for all non-local QC, with the gap between them depending on time and also on the qubit's initial state. Besides these issues, the possibility and conditions for time invariance of QC are regarded in the case of bit, phase, and bit-phase flip channels. Here we reveal the qualitative dynamical inequivalence between these channels and the PDC and show that the creation of system-environment entanglement does not necessarily imply in the destruction of the qubit's QC. We also investigate the resources needed for non-local QC creation, showing that while the PDC requires initial coherence of the qubit, for some other channels non-zero population of the excited state (i.e., energy) is sufficient. Related to that, considering the depolarizing channel we notice the qubit's ability to act as a catalyst for the creation of joint QC and entanglement, without need for nonzero initial QC or excited state population.

Keywords: coherence, decoherence, non-local coherence, entanglement, quantum channels

I. INTRODUCTION

Although the main conceptual ideas related to quantum coherence (QC) have been present in the literature for decades [1–4], its formal quantification from a resource theory (RT) point of view have been addressed only very recently [5–17]. Free states (FS) and free operations (FO) are two basic ingredients in a RT [18], with the resource states allowing us to overcome the limitations imposed by the FO. Any function (leading quantum states into non-negative real numbers) satisfying some basic conditions and not increasing under the FO may be regarded as a monotone measure for the resource under consideration. For instance, in the RT of entanglement [19], the FS are the separable ones while LOCC (local quantum operations and classical communication) are the FO. Concurrence [20] and negativity [21] are two famous entanglement monotones; and we shall present their definitions and use them in the next section.

In this article, we apply some developments achieved in the RT of quantum coherence [6]. In this RT, the FS, the incoherent states, are those density matrices which are diagonal in some reference basis $|j\rangle$, i.e.,

$$\iota = \sum_{j=1}^d \iota_j |j\rangle\langle j|, \quad (1)$$

with ι_j being a probability distribution and $d = \dim \mathcal{H}$ is the dimension of the system's Hilbert space. The motivation to choose a particular reference basis usually originates from the characteristic physical properties of the system under analysis. For example, in transport phenomena in quantum biology, the eigenvectors of the system's hamiltonian form a natural choice for the reference basis [22]. In this article, $|j\rangle$, with $j = 0, 1, \dots, d-1$, is always assumed to be the standard-computational basis in the regarded Hilbert state.

Arguably, the most involved part of a RT is the identification of its FO. While it is clear that the FO must not create resource states from FS and should not increase the value of a resource quantifier in the general case, which additional constraints one should add to the FO is a subtle matter. The RT of coherence is a typical example of this situation, where there exists several different levels of restrictions one can impose on the FO [15, 17]. In this work,

*Electronic address: jonas.maziero@ufsm.br

we will use the l_1 -norm quantum coherence, which is defined and given by [6]:

$$C(\rho) := \min_{\iota} \|\rho - \iota\|_{l_1} = \sum_{j \neq k} |\langle j|\rho|k\rangle|, \quad (2)$$

where the l_1 -norm of a matrix M is defined as $\|M\|_{l_1} := \sum_{j,k} |\langle j|M|k\rangle|$. This coherence monotone satisfies most of the required properties. For example, it is zero if and only if ρ is a FS and it does not increase under mixing or by (maximally) incoherent operations. For more details, see Ref. [6].

Recently, several articles have investigated the relation between coherence (or other quantumnesses) and entanglement (or other quantum correlations) and their inter-conversions via (incoherent) unitary operations [23–32]. Here, we address a somewhat related question, but we regard the natural dynamics generated due to the interaction of a two-level quantum system (a qubit) with the environment. Besides its practical relevance regarding the preservation of QC and its conversion to quantum correlations, this kind of analysis is important e.g. to better understanding the transition to classicality. This process is normally accompanied by the loss of the system's QC, which is induced by the spontaneous creation of correlations between it and its surroundings. It is worthwhile mentioning that similar issues have been investigated previously, but mainly with regard to decorrelating dynamics for composite systems interacting with local or global environments, or in thermodynamical, non-Markovianity, sensing, and contexts [33–47]. The goal of the present contribution is to provide a thorough description of the dynamical flow of a quantum coherence monotone, the l_1 -norm QC, during the time evolution of a qubit interacting with environments modeled by quantum channels important for quantum information science [48–50].

The remainder of this article is organized as follows. In Sec. II, we start describing the initial conditions that shall be considered in all subsequent calculations. Then we mention briefly the Kraus' operator-sum representation and its corresponding unitary mapping. Afterwards, we apply this formalism to study the l_1 -norm quantum coherence flow for a quantum bit evolving under the action of environments modeled by the amplitude damping (Sec. II A), phase damping (Sec. II B), bit flip (Sec. II C), phase flip (Sec. II D), bit-phase flip (Sec. II E), and depolarizing (Sec. II F) channels. Some final remarks about our findings are included in Sec. III.

II. DYNAMICAL FLOW OF QUANTUM COHERENCE FOR QUANTUM CHANNELS

Throughout this article, we consider a qubit prepared initially in a generic quantum state [48, 50]:

$$\rho^S = 2^{-1} (\sigma_0 + \vec{r} \cdot \vec{\sigma}). \quad (3)$$

In the last equation, σ_0 is the identity operator and the components of the Bloch vector $\vec{r} = (r_1, r_2, r_3)$ are the system's polarizations: $r_j = \text{Tr}(\rho^S \sigma_j)$, with σ_j being the Pauli matrices. It is straightforward seeing that the l_1 -norm quantum coherence of a qubit-like system represented by a Bloch vector \vec{r} (as in Eq. (3)) is given by:

$$C(\rho^S) = \sqrt{r_1^2 + r_2^2}. \quad (4)$$

We observe that the positivity of the density operator requires $\sum_{j=1}^3 r_j^2 \leq 1$, which leads to $C(\rho^S) \in [0, 1]$. For a d -level system, a qudit, we have $C(\rho^S) \in [0, d-1]$ with the maximally coherent state being $|\psi_{mc}\rangle = \sum_{j=1}^d |j\rangle / \sqrt{d}$.

After being prepared in the state (3), the qubit is let to interact with the surroundings. Here, we assume that initially the two are uncorrelated, that the environment is in the vacuum state $|E_0\rangle$, and that it is described by one of the quantum channels regarded in the next sub-sections. Qubit plus environment form an isolated system which evolves unitarily: $\rho_t = U(\rho^S \otimes |E_0\rangle\langle E_0|)U^\dagger$. One can show that, if the matrix elements of the Kraus operators K_j are $\langle S_l|K_j|S_m\rangle = (\langle S_l| \otimes \langle E_j|)U(|S_m\rangle \otimes |E_0\rangle)$, the system's evolved state can be cast in the form [51]:

$$\rho_t^S = \text{Tr}_E(\rho_t) = \sum_j K_j \rho^S K_j^\dagger, \quad (5)$$

with $\text{Tr}_E(\cdot)$ being the partial trace function [52].

If, as is most frequently the case, the Kraus' operators describing the action of a noise channel are known from phenomenological or quantum process tomography means [53, 54], we can model the system-environment dynamics via the following unitary map:

$$U|S_l\rangle \otimes |E_0\rangle = \sum_j (K_j|S_l\rangle) \otimes |E_j\rangle, \quad (6)$$

which also leads to the dynamics in Eq. (5). It is worthwhile mentioning that the set of Kraus' operators inducing a certain evolution on the system state is not unique. In the context we are interested in this article, K_l and

$K'_j = \sum_l V_{jl} K_l$ lead to the same ρ_t^S if V is a unitary transformation applied to the environment after its interaction with the system ceased [51]. As our main goal is to study the quantum coherence spreading during and because of the system-environment interaction, in the sequence we shall not regard this issue anymore.

We observe that $|E_k\rangle$ are used to denote distinguishable states of the environment on its k -excitations subspaces. Thus, when we talk about the coherence of the environment and about the system-environment coherence, we might be referring to subspaces, instead of simply to some of the environment's bases states. In addition to that, it is important stressing that although this formalism (Eq. (6)) does not utilize details about the environment's "structure", it is mathematically and physically correct and has been applied in numerous previous works [33–35, 38, 39, 55–59]. In the sequence we will apply it considering some relevant quantum channels.

A. Amplitude damping channel

Let's start by studying a qubit embodied in a two-level atom-like system¹ with ground state $|0\rangle$ and excited state $|1\rangle$. In the last equations and in the rest of this article, we use the notation: $|S_j\rangle \otimes |E_k\rangle = |jk\rangle$. The environment is the electromagnetic field, which is initially in the vacuum state (with no excitations). The amplitude damping channel (ADC), represented by the Kraus' operators $K_0^{ad} = |0\rangle\langle 0| + \sqrt{q}|1\rangle\langle 1|$ and $K_1^{ad} = \sqrt{p}|0\rangle\langle 1|$, is a phenomenological-approximate representation of the spontaneous emission process, that will take place because of the interaction of the atomic system with the vacuum fluctuations [61]. Above we defined $q := 1 - p$, with $p \in [0, 1]$ being the probability for the atom to emit a photon, also dubbed *parametrized time*. For instance, in liquid state nuclear magnetic resonance, the explicit probability-time relation is: $p = 1 - \exp(-t/T_1)$, with T_1 being the so called longitudinal relaxation time [62]. The unitary representation of the ADC is [49]: $U_{ad}|00\rangle = |00\rangle$ and $U_{ad}|10\rangle = \sqrt{1-p}|10\rangle + \sqrt{p}|01\rangle$. From this unitary map, we obtain the system-environment evolved state

$$\begin{aligned} \rho_p = & 2^{-1}[(1+r_3)|00\rangle\langle 00| + (1-r_3)(p|01\rangle\langle 01| + q|10\rangle\langle 10|) \\ & + (1-r_3)\sqrt{pq}|10\rangle\langle 01| + (r_1 - ir_2)(\sqrt{p}|00\rangle\langle 01| + \sqrt{q}|00\rangle\langle 10|) + c.t.]. \end{aligned} \quad (7)$$

Above, and hereafter, we use *c.t.* to denote the conjugate transpose (adjoint) of the preceding term(s) in the parenthesis, bracket or line (which one should be clear from the context). By using the partial trace [52], we can write the reduced states of the system and environment as in Eq. (3), but with the respective Bloch vector being:

$$\vec{r}(p) = (r_1\sqrt{q}, r_2\sqrt{q}, r_3q + p), \quad (8)$$

$$\vec{R}(p) = (r_1\sqrt{p}, r_2\sqrt{p}, r_3p + q). \quad (9)$$

So the system-environment, system, and environment quantum coherences at time p are given, respectively, by

$$C(\rho_p) = (\sqrt{q} + \sqrt{p})C(\rho^S) + \sqrt{pq}(1 - r_3), \quad (10)$$

$$C(\rho_p^S) = \sqrt{q}C(\rho^S), \quad (11)$$

$$C(\rho_p^E) = \sqrt{p}C(\rho^S). \quad (12)$$

The last expressions show nicely the splitting of the total coherence into its *local*,

$$C_l(\rho_p) := C(\rho_p^S) + C(\rho_p^E), \quad (13)$$

and *nonlocal*,

$$C_{ni}(\rho_p) := C(\rho_p) - C_l(\rho_p), \quad (14)$$

parts². We also see that QC is not conserved in general; note for instance that $C_l(\rho_p) = (\sqrt{q} + \sqrt{p})C(\rho^S) \geq C(\rho^S)$. Besides, even if $C(\rho^S) = 0$, any initial state of the qubit with non-null population of the excited state $|1\rangle$ (i.e., $r_3 \neq 1$) shall lead to transitory system-environment non-local QC, which will disappear only at the asymptotic time $p = 1$.

For simplicity, in order to relate the non-local quantum coherence with quantum correlations, let us begin by computing the *concurrence*. For two-qubit systems, this entanglement quantifier can be written as [20]

$$E_c(\rho_p) = \max\left(0, \sqrt{\lambda_1} - \sqrt{\lambda_2} - \sqrt{\lambda_3} - \sqrt{\lambda_4}\right), \quad (15)$$

¹ Another context in which this channel appears is in quantum communication with spin chains [60].

² While completing this article we became aware of a related work, Ref. [63], where the distribution of multipartite QC was regarded.

where λ_j are the eigenvalues, in decreasing order, of $\rho_p \tilde{\rho}_p$ with $\tilde{\rho}_p := \sigma_2 \otimes \sigma_2 \rho_p^* \sigma_2 \otimes \sigma_2$ and ρ_p^* is the complex conjugate of ρ_p . One can verify that $\rho_p \tilde{\rho}_p$ possess only one non-null eigenvalue: $\lambda_1 = pq(1 - r_3)^2$. Therefore, as $\lambda_1 \geq 0$, we obtain $E_c(\rho_p) = \sqrt{pq}(1 - r_3) = C_{nl}(\rho_p)$. Hence, we arrive at the following dynamical coherence-entanglement relation:

$$C(\rho_p) = C_l(\rho_p) + E_c(\rho_p). \quad (16)$$

We also notice that $C(\rho_{p=1}^S) = E(\rho_{p=1}) = 0$ and $C(\rho_{p=1}) = C(\rho_{p=1}^E) = C(\rho^S)$. That is to say, for this channel all QC initially present in the qubit is transferred to the environment in the asymptotic time.

B. Phase damping channel

The phase damping channel (PDC), which is represented by the Kraus' operators $K_0^{pd} = \sqrt{q}\sigma_0$, $K_1^{pd} = \sqrt{p}|0\rangle\langle 0|$, and $K_2^{pd} = \sqrt{p}|1\rangle\langle 1|$, is a phenomenological description of the principal cause of coherence loss in several quantum systems. The unitary map for this kind of qubit-environment interaction is [49]: $U_{pd}|00\rangle = \sqrt{q}|00\rangle + \sqrt{p}|01\rangle$ and $U_{pd}|10\rangle = \sqrt{q}|10\rangle + \sqrt{p}|12\rangle$. We see from this map that the system base states do not change, i.e., it does not exchange energy with the environment. However, each one of these states leaves a unique ‘‘fingerprint’’ in the environment, causing it to conditionally jump to a different configuration. Besides, here the environment is modeled effectively as a three-level quantum system (a qutrit). For the same initial condition as above, the system-environment, system, and environment evolved states are:

$$\begin{aligned} \rho_p = 2^{-1} \{ & (1 + r_3)(q|00\rangle\langle 00| + p|01\rangle\langle 01|) + (1 - r_3)(q|10\rangle\langle 10| + p|12\rangle\langle 12|) \\ & + \sqrt{pq}[(1 + r_3)|00\rangle\langle 01| + (1 - r_3)|10\rangle\langle 12|] + (r_1 - ir_2)(q|00\rangle\langle 10| + p|01\rangle\langle 12|) + c.t. \\ & + (r_1 - ir_2)\sqrt{pq}(|00\rangle\langle 12| + |01\rangle\langle 10|) + c.t. \}, \end{aligned} \quad (17)$$

$$\rho_p^S = 2^{-1} \{ (1 + r_3)|0\rangle\langle 0| + (1 - r_3)|1\rangle\langle 1| + [(r_1 - ir_2)q|0\rangle\langle 1| + c.t.] \}, \quad (18)$$

$$\rho_p^E = 2^{-1} \{ 2q|0\rangle\langle 0| + p[(1 + r_3)|1\rangle\langle 1| + (1 - r_3)|2\rangle\langle 2|] + \sqrt{pq}[(1 + r_3)|0\rangle\langle 1| + (1 - r_3)|0\rangle\langle 2|] + c.t. \}. \quad (19)$$

Summing up the off-diagonal elements of these three density matrices, we find their QCs to be:

$$C(\rho_p) = (1 + 2\sqrt{pq})C(\rho^S) + 2\sqrt{pq}, \quad (20)$$

$$C(\rho_p^S) = qC(\rho^S), \quad (21)$$

$$C(\rho_p^E) = 2\sqrt{pq}. \quad (22)$$

There are some interesting observations to be made about these formulas. The first one is that the PDC destroys the coherence of the system faster than the ADC does, a fact well known in decoherence theory [64]. The second one is that, for the PDC, the QC of the environment is transient and does not depend on the initial state of the qubit. At last we notice that, as $C(\rho_{p=1}^S) = C(\rho_{p=1}^E) = 0$, any non-zero initial QC present in the system shall be asymptotically transformed into non-local quantum coherence (NLQC).

The next question we want to address is if, for the PDC, entanglement is also, at least up to a constant factor, equivalent to this NLQC:

$$C_{nl}(\rho_p) = (p + 2\sqrt{pq})C(\rho^S). \quad (23)$$

As the Peres' criterion gives a necessary and sufficient condition for separability of qubit-qutrit systems [65, 66], for this channel we shall analyze the entanglement negativity, whose definition is [21]:

$$E_n(\rho_p) = 2^{-1}(\|T_E(\rho_p)\|_1 - 1) = 2^{-1}\sum_j(|\lambda_j| - \lambda_j). \quad (24)$$

In the last equation $T_E(\rho_p)$ stands for the partial transpose of ρ_p , λ_j are the eigenvalues of $T_E(\rho_p)$, and $\|X\|_1 = \text{Tr}\sqrt{XX^\dagger}$ is the trace norm [48]. In the general case, the characteristic polynomial for $T_E(\rho_p)$ is $\lambda^2(\lambda^4 - \lambda^3 + c_2\lambda^2 + c_1\lambda + c_0) = 0$, with $c_2 = 2^{-2}(1 - r_1^2 - r_2^2 - r_3^2)$, $c_1 = 2^{-2}p(2 - p)(r_1^2 + r_2^2)$, and $c_0 = 2^{-4}p^2(2 - p)^2(r_1^2 + r_2^2)(r_3^2 - 1)$. Although analytical expressions for the eigenvalues λ_j can be obtained [67], they have a cumbersome form which does not help in addressing the issue under analysis here. In contrast, it is not difficult verifying that the equality $C_{nl}(\rho_{p=1}) = 2E_n(\rho_{p=1})$ holds asymptotically (and for $p = 0$). Nevertheless, by generating some random initial states ρ^S [68, 69], we checked that for $p \in (0, 1)$ there exists a gap, $\Delta = C_{nl} - 2E_n$, between NLQC and entanglement which depends both on p and on ρ^S . Some examples are shown in Fig. 1. Therefore, for the PDC the coherence-entanglement relation is of the kind:

$$C(\rho_p) = C_l(\rho_p) + [2E_n(\rho_p) + \Delta(p, \rho^S)], \quad (25)$$

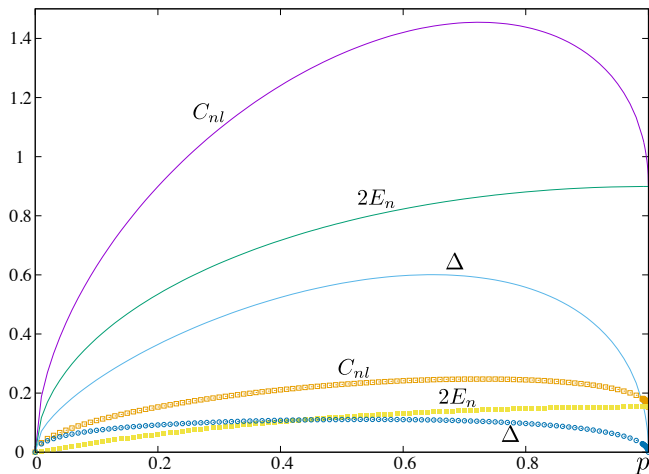


Figure 1: (color online) l_1 -norm non-local quantum coherence, entanglement negativity, and their gap as a function of the parametrized time p for a qubit evolving under the phase damping channel. The lines and points are obtained, respectively, for the qubit initial states $\vec{r} = (-0.41, 0.80, -0.38)$ and $\vec{r} = (0.03, -0.15, -0.19)$.

with $\Delta(0, \rho^S) = \Delta(1, \rho^S) = 0$. Moreover, we verified that other quantum correlations [70], such as for example the amended Hilbert-Schmidt quantum discord [71], measurement-induced disturbance [72], and measurement-induced nonlocality [73], do worse than entanglement in accounting for the PDC-induced NLQC. So, we leave open the question of the possible description of this quantity via a quantum correlation function.

C. Bit flip channel

The bit flip channel (BFC) is the most common error in classical information, where a bit can be flipped, $0 \leftrightarrow 1$, due to random noise. This type of state modification can also take place for a quantum bit, where the computational base states can be left alone, $|0\rangle \rightarrow |0\rangle$ and $|1\rangle \rightarrow |1\rangle$, with probability $1 - p$ or can be flipped, $|0\rangle \leftrightarrow |1\rangle$, with a probability p . The Kraus operators for these transformations are [49]: $K_0^{bf} = \sqrt{q}\sigma_0$ and $K_1^{bf} = \sqrt{p}\sigma_1$. And the induced unitary map is: $U_{bf}|00\rangle = \sqrt{q}|00\rangle + \sqrt{p}|11\rangle$ and $U_{bf}|10\rangle = \sqrt{q}|10\rangle + \sqrt{p}|01\rangle$. Using this map, we find the evolved states:

$$\begin{aligned} \rho_p = 2^{-1} \{ & (1 + r_3)(q|00\rangle\langle 00| + p|11\rangle\langle 11|) + (1 - r_3)(q|10\rangle\langle 10| + p|01\rangle\langle 01|) \\ & + \sqrt{pq}[(1 + r_3)|00\rangle\langle 11| + (1 - r_3)|10\rangle\langle 01|] + (r_1 - ir_2)(q|00\rangle\langle 10| + p|11\rangle\langle 01|) + c.t. \\ & + (r_1 - ir_2)\sqrt{pq}(|00\rangle\langle 01| + |11\rangle\langle 10|) + c.t. \}, \end{aligned} \quad (26)$$

$$\rho_p^S = 2^{-1} \{ [1 + r_3(1 - 2p)]|0\rangle\langle 0| + [1 - r_3(1 - 2p)]|1\rangle\langle 1| + [(r_1 - ir_2(1 - 2p))|0\rangle\langle 1| + c.t.] \}, \quad (27)$$

$$\rho_p^E = q|0\rangle\langle 0| + p|1\rangle\langle 1| + r_1\sqrt{pq}(|0\rangle\langle 1| + c.t.). \quad (28)$$

The formula for the total QC is equal to that obtained for the PDC (Eq. (20)). On the other hand, the local QCs are given by:

$$C(\rho_p^S) = \sqrt{r_1^2 + r_2^2(1 - 2p)^2}, \quad (29)$$

$$C(\rho_p^E) = 2\sqrt{pq}|r_1|, \quad (30)$$

which are not only quantitatively, but also qualitatively different from those obtained for the ADC and PDC. Actually, for the BFC, the distribution of QC is seen to be even more involved than for the previous two channels. For instance, in contrast to the ADC and PDC, for the BFC the QC can be made *constant* (frozen) with time if the qubit initial state has $r_2 = 0$. For an in-depth investigation of frozen quantum coherence, see Ref. [74]. On the other side, if $r_1 = 0$ the QC of the environment is always null and the initial QC of the qubit is altogether transformed into NLQC (for $p = 1$). So, depending on ρ^S , the BFC can lead to qualitative behaviors typical of the ADC or of the PDC, or to a “mixture” of their characteristics traits.

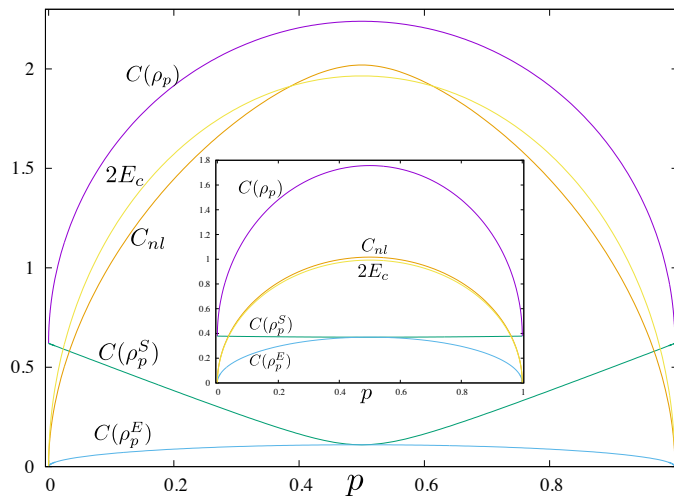


Figure 2: (color online) Coherences and entanglement for the time evolution generated by the bit flip channel applied to a qubit prepared in the state $\vec{r} = (-0.11, -0.61, 0.77)$. The inset shows the same quantities for $\vec{r} = (0.37, -0.08, -0.49)$. In this last case, even though the quantum coherence of the system is almost constant, a considerable amount of transitory non-local quantum coherence and entanglement is generated. As seen in these figures and easily verified with Eqs. (29) and (30), for any initial state, at $p = 1/2$ the coherences of the system and of the environment are equal to $|r_1|$.

Now, let's analyze the NLQC and entanglement generated by the BFC. Here, to compute the concurrence, we notice that the non-null eigenvalues of $\rho_p \tilde{\rho}_p$ are: $\lambda_{\pm} = pq(\sqrt{x} \pm \sqrt{y})^2$, where we used $x = r_2^2 + r_3^2$ and $y = 1 - r_1^2$. So, the concurrence of ρ_p can be written as follows:

$$\begin{aligned} E_c(\rho_p) &= \sqrt{pq} \max(0, \sqrt{x} + \sqrt{y} - |\sqrt{x} - \sqrt{y}|) \\ &= 2\sqrt{pq} \min(\sqrt{x}, \sqrt{y}). \end{aligned} \quad (31)$$

By its turn, the created NLQC reads:

$$C_{nl}(\rho_p) = (1 + 2\sqrt{pq})C(\rho^S) - C(\rho_p^S) + 2\sqrt{pq}(1 - |r_1|). \quad (32)$$

Examples of the dynamics of coherences and entanglement are shown in Fig. 2. As is indicated by the formulae, entanglement is seen not to capture, in general, the quantitative behavior of the NLQC generated by the BFC. Actually, the creation of system-environment entanglement is shown here not to necessarily imply in the destruction of the system's QC.

D. Phase flip channel

The phase flip channel (PFC) is a kind of error which only happens in the quantum realm. The computational base states acquire random phases differing by π . Or, disregarding global phases, one may say that the state $|0\rangle$ is left alone (i.e., $|0\rangle \rightarrow |0\rangle$) and the state $|1\rangle$ acquires a phase π ($|1\rangle \rightarrow e^{i\pi}|1\rangle$). If the phase-flip error happens with a probability p , then we can use the Kraus' operators $K_0^{pf} = \sqrt{q}\sigma_0$ and $K_1^{pf} = \sqrt{p}\sigma_3$, which lead to the unitary map: $U_{pf}|00\rangle = \sqrt{q}|00\rangle + \sqrt{p}|01\rangle$ and $U_{pf}|10\rangle = \sqrt{q}|10\rangle - \sqrt{p}|11\rangle$. The generated evolved density operators are:

$$\begin{aligned} \rho_p &= 2^{-1}\{(1 + r_3)(q|00\rangle\langle 00| + p|01\rangle\langle 01|) + (1 - r_3)(q|10\rangle\langle 10| + p|11\rangle\langle 11|) \\ &\quad + \sqrt{pq}[(1 + r_3)|00\rangle\langle 01| - (1 - r_3)|10\rangle\langle 11|] + (r_1 - ir_2)(q|00\rangle\langle 10| - p|01\rangle\langle 11|) + c.t. \\ &\quad - (r_1 - ir_2)\sqrt{pq}(|00\rangle\langle 11| - |01\rangle\langle 10|) + c.t.\}, \end{aligned} \quad (33)$$

$$\rho_p^S = 2^{-1}\{(1 + r_3)|0\rangle\langle 0| + (1 - r_3)|1\rangle\langle 1| + [(r_1 - ir_2)(1 - 2p)|0\rangle\langle 1| + c.t.]\}, \quad (34)$$

$$\rho_p^E = q|0\rangle\langle 0| + p|1\rangle\langle 1| + r_3\sqrt{pq}(|0\rangle\langle 1| + c.t.). \quad (35)$$

From these density matrices, we compute the quantum coherences. For the system we have

$$C(\rho_p^S) = |1 - 2p|C(\rho^S). \quad (36)$$

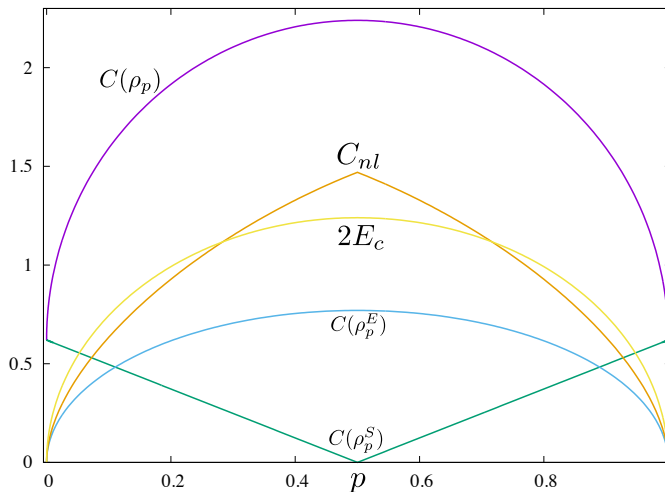


Figure 3: (color online) Coherences and entanglement for the time evolution generated by the phase flip channel applied to a qubit prepared in the state $\vec{r} = (-0.11, -0.61, 0.77)$. In contrast to the previous channels, for the PFC there is a discontinuity in the rate of change of the system's and nonlocal quantum coherences at $p = 1/2$.

The total coherence is once more equal to that obtained for the PDC (Eq. (20)). The QC of the environment is obtained from the corresponding expression for the BFP, Eq. (30), by substituting r_1 with r_3 .

We see thus that, in contrast to the BFC, for the PFC we cannot obtain a constant value for the QC of the system. The qubit's QC monotonically decreases up to $p = 1/2$, which is the time (probability) for which our uncertainty about what happened with the system is maximal. For $p \in (1/2, 1)$, the qubit's QC increases, going back to its initial value when $p = 1$. Besides, for the PFC the environment's QC does not depend on the initial QC of the system. In fact, the environment gains transitory coherence whenever the qubit's ground and excited states populations are not equal. We observe also that the concurrence of ρ_p for the PFC can be obtained from that in Eq. (31) by the exchange of r_1 and r_3 . The NLQC for the PFC is

$$C_{nl}(\rho_p) = (1 + 2\sqrt{pq} - |1 - 2p|)C(\rho^S) + 2\sqrt{pq}(1 - |r_3|). \quad (37)$$

So, NLQC is created for all but the incoherent and excited state unpopulated initial states. In Fig. 3 is shown an example of the time dependence of these coherences and entanglement.

E. Bit-phase flip channel

The bit-phase flip channel (BPFC) is used to describe the situation in which both the bit flip and the phase flip errors happen with probability p , but simultaneously, i.e., $|0\rangle \rightarrow e^{i\pi/2}|1\rangle$ and $|1\rangle \rightarrow e^{i(-\pi/2)}|0\rangle$. To describe this kind of noise interaction, we can use the Kraus operators: $K_0^{bpf} = \sqrt{q}\sigma_0$ and $K_1^{bpf} = \sqrt{p}\sigma_2$, which lead to the unitary mapping: $U_{bpf}|00\rangle = \sqrt{q}|00\rangle + i\sqrt{p}|11\rangle$ and $U_{bpf}|10\rangle = \sqrt{q}|10\rangle - i\sqrt{p}|01\rangle$. The density operators generated by this map are:

$$\begin{aligned} \rho_p = & 2^{-1}[(1 + r_3)(q|00\rangle\langle 00| + p|11\rangle\langle 11|) + (1 - r_3)(q|10\rangle\langle 10| + p|01\rangle\langle 01|) \\ & + i\sqrt{pq}[(1 - r_3)|10\rangle\langle 01| - (1 + r_3)|00\rangle\langle 11|] + (r_1 - ir_2)(q|00\rangle\langle 10| - p|11\rangle\langle 01|) + c.t. \\ & + i(r_1 - ir_2)\sqrt{pq}(|00\rangle\langle 01| + |11\rangle\langle 10|) + c.t.], \end{aligned} \quad (38)$$

$$\rho_p^S = 2^{-1}\{[1 + r_3(1 - 2p)]|0\rangle\langle 0| + [1 - r_3(1 - 2p)]|1\rangle\langle 1| + [(r_1(1 - 2p) - ir_2)|0\rangle\langle 1| + c.t.]\}, \quad (39)$$

$$\rho_p^E = q|0\rangle\langle 0| + p|1\rangle\langle 1| + r_2\sqrt{pq}(|0\rangle\langle 1| + c.t.). \quad (40)$$

The expressions for the quantum coherences and entanglement associated with these three density matrices are obtained from those in Eqs. (20), (29), (30), and (31) by (when needed) exchanging r_1 and r_2 . Therefore, the analysis of the QC flow for the BPFC is similar to that for the BFC. It is noticeable though that, in contrast to the PFC, if the phase flip error happens accompanied by a bit flip error, we regain the possibility for frozen QC, which is obtained for the BPFC when $r_1 = 0$.

F. Depolarizing channel

The depolarizing channel (DC) describes the situation in which the interaction of the system with the surroundings mixes its state with the maximally entropic one with a probability p , i.e., $\rho^S \mapsto (1-p)\rho^S + p\sigma_0/2$. This kind of environment appears, for instance, in teleportation with arbitrary mixed entangled resources [75]. The DC can be described using the following set of Kraus' operators: $K_0^d = \sqrt{1-3p/4}\sigma_0$, $K_1^d = \sqrt{p/4}\sigma_1$, $K_2^d = \sqrt{p/4}\sigma_2$, and $K_3^d = \sqrt{p/4}\sigma_3$, which lead to the unitary map: $U_d|00\rangle = \sqrt{1-3p/4}|00\rangle + \sqrt{p/4}(|11\rangle + i|12\rangle + |03\rangle)$ and $U_d|10\rangle = \sqrt{1-3p/4}|10\rangle + \sqrt{p/4}(|01\rangle - i|02\rangle - |13\rangle)$. So, this environment is modeled effectively as a four-level system (a ququart). Now, if we define $u = p/4$ and $v = 1 - 3u$, the evolved states take the form:

$$\begin{aligned} \rho_p = 2^{-1} \{ & (1+r_3)[v|00\rangle\langle 00| + u(|03\rangle\langle 03| + |11\rangle\langle 11| + |12\rangle\langle 12|)] \\ & + (1-r_3)[v|10\rangle\langle 10| + u(|01\rangle\langle 01| + |02\rangle\langle 02| + |13\rangle\langle 13|)] \\ & + (1+r_3)[\sqrt{uv}(|00\rangle\langle 11| + |00\rangle\langle 03| - i|00\rangle\langle 12|) + u(|03\rangle\langle 11| - i|03\rangle\langle 12| - i|11\rangle\langle 12|)] + c.t. \\ & + (1-r_3)[\sqrt{uv}(|01\rangle\langle 10| - i|02\rangle\langle 10| - |10\rangle\langle 13|) + u(i|01\rangle\langle 02| - |01\rangle\langle 13| + i|02\rangle\langle 13|)] + c.t. \\ & + (r_1 - ir_2)[v|00\rangle\langle 10| + \sqrt{uv}(|00\rangle\langle 01| + i|00\rangle\langle 02| - |00\rangle\langle 13| + |11\rangle\langle 10| + i|12\rangle\langle 10| + |03\rangle\langle 10|)] + c.t. \\ & + (r_1 - ir_2)u[|11\rangle\langle 01| + i|02\rangle\langle 13| + |12\rangle\langle i01| - \langle 02| - i|13\rangle + |03\rangle\langle 01| + i|02\rangle\langle 13|] + c.t. \}, \end{aligned} \quad (41)$$

$$\rho_p^S = 2^{-1} \{ (1+r_3q)|0\rangle\langle 0| + (1-r_3q)|1\rangle\langle 1| + [(r_1 - ir_2)q|0\rangle\langle 1| + c.t.] \}, \quad (42)$$

$$\rho_p^E = v|0\rangle\langle 0| + u\sum_{j=1}^3 |j\rangle\langle j| + \sqrt{uv}(\sum_{j=1}^3 r_j|0\rangle\langle j| + c.t.) + u[-i(r_3|1\rangle\langle 2| - r_2|1\rangle\langle 3| + r_1|2\rangle\langle 3|) + c.t.]. \quad (43)$$

The total coherence can be written as follows:

$$C(\rho_p) = (3\sqrt{u} + \sqrt{v})^2 C(\rho^S) + 6(\sqrt{uv} + u). \quad (44)$$

The expression for the QC of the system is equal to that for the PDC (Eq. (21)). So the DC is seen to be as effective as the PDC at erasing the QC of the qubit. The QC of the environment at p is given by:

$$C(\rho_p^E) = 2(\sqrt{uv} + u)\sum_{j=1}^3 |r_j|. \quad (45)$$

As $(\sqrt{uv} + u)_{p=1} = 1/2$, we notice that, asymptotically, QC is generated in the environment for all coherent and/or population unbalanced initial states. For the DC the NLQC reads:

$$C_{nl}(\rho_p) = [(3\sqrt{u} + \sqrt{v})^2 - q]C(\rho^S) + 2(\sqrt{uv} + u)(3 - \sum_{j=1}^3 |r_j|). \quad (46)$$

From these equations, we readily identify a somewhat puzzling phenomenon. The DC, even for a maximally mixed or ground initial states of the qubit, leads to the creation of NLQC (no energy or QC required). So, for this channel, the system can be a catalyst whose state is not modified but whose presence helps in creating joint QC and quantum correlations. Examples of these dynamic behaviors are presented in Fig. 4.

III. CONCLUDING REMARKS

In this article, we performed a detailed analysis of the dynamical flow of the l_1 -norm quantum coherence for a qubit interacting with environments modeled by quantum channels relevant for quantum information science. Our investigation provided several insights about how these different kinds of system-environment interaction can affect the quantum properties of the system, of the environment, and of their correlations. We noticed that quantum coherence is not conserved in general and that even incoherent initial states may lead to the creation of transitory QC. For the amplitude damping channel, the non-local QC created during the time evolution was shown to be completely captured by the entanglement concurrence. This is not the case for the phase damping channel. Besides, asymptotically the PDC transforms all initial coherence of the qubit into non-local system-environment QC, while the ADC only transfer it to the environment. The dynamic spreading of QC due to the bit, phase, or bit-phase flip channels was shown to be more diverse than for the ADC and PDC. Actually, by tuning the initial state of the qubit we can observe dynamical behaviors typical of these two channels or a mixture of them. We showed with this that, contrary to what have been suggested previously (see e.g. Ref. [55]), the PDC is qualitatively distinct from the flip channels. Moreover, for the flip channels, we have identified the possibility and conditions for frozen QC and for a sudden modification in its rate of change with time. Besides, the creation of system-environment entanglement was shown here not necessarily to imply in the decaying of the system's QC. We also investigated the qubit's initial resources needed for creating non-local QC, showing that while the PDC requires QC the ADC and phase flip channel need only nonzero population

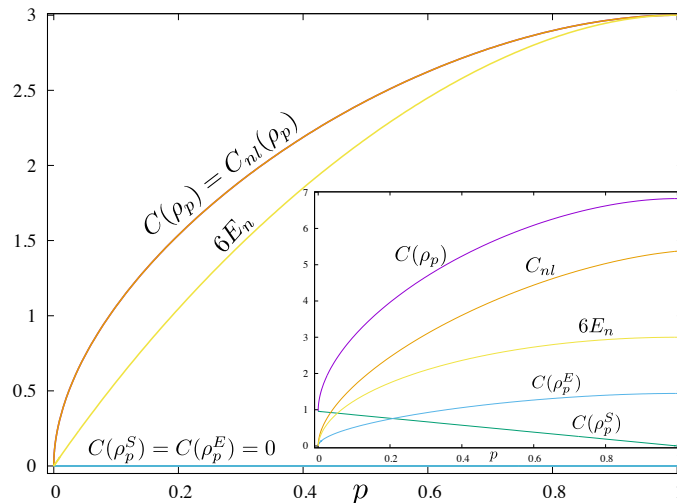


Figure 4: (color online) Dynamics of coherences and entanglement generated by the depolarizing channel for the qubit initial state $\vec{r} = \vec{0}$. The inset is for $\vec{r} = (-0.58, -0.76, 0.11)$.

of the excited state (i.e., energy). What is more, the potential of the qubit for acting as a catalyst for the creation of joint QC and entanglement by the depolarizing channel was reported.

Most of the literature on decoherence theory acknowledges that this process takes place due to the creation of correlations between the system and its surroundings. How much and what kind of correlation is dynamically generated depends on the specificities of the system-environment interaction Hamiltonian. Modeling these interactions in a general setting is extremely difficult and surely out of reach. Quantum channels are tools capable of providing such a description for a wide range of physical situations. In this article, we used this tool to present the most complete study of the environment-induced quantum coherence flow up to now. Besides the several interesting findings described in the main text and summarized in the last paragraph, our work may contribute for two distinct directions of research. On one side, it may be interesting to emulate the distinct dynamical behaviors induced by distinct quantum channels in order to transform coherence into quantum correlations in a prescribed and desired way. On the other hand, understanding how the system loses its coherence and how this coherence is transferred to the environment and/or transformed into nonlocal properties (entanglement, discord, etc) is the essence of what one might call understanding the decoherence process. Of course, in quantum information science we would like to ultimately use this knowledge to control, prevent or mitigate such kind of unwanted transformations. We hope that our results and the solutions for the questions raised here can shed some light for understanding and tackling this intricate problem.

Acknowledgments

JM gratefully acknowledges the hospitality of the Physics Institute and Laser Spectroscopy Group at the Universidad de la República, Uruguay.

Funding: This work was supported by the Brazilian funding agencies: Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq), processes 441875/2014-9 and 303496/2014-2, Instituto Nacional de Ciência e Tecnologia de Informação Quântica (INCT-IQ), process 2008/57856-6, and Coordenação de Desenvolvimento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), process 6531/2014-08.

-
- [1] R.P. Feynman, R.B. Leighton, and M. Sands, *The Feynman Lectures on Physics*, vol. 3, Addison-Wesley Publishing Company, 1965.
 - [2] L. Mandel and E. Wolf, *Optical Coherence and Quantum Optics*, Cambridge University Press, 1995.
 - [3] S.D. Bartlett, T. Rudolph, and R.W. Spekkens, Dialogue concerning two views on quantum coherence: Factist and fictionist, *Int. J. Quantum Inf.* **04** (2006) 17.

- [4] C.-M. Li, N. Lambert, Y.-N. Chen, G.-Y. Chen, and F. Nori, Witnessing quantum coherence: From solid-state to biological systems, *Sci. Rep.* **2** (2012) 885.
- [5] J. Åberg, Catalytic coherence, *Phys. Rev. Lett.* **113** (2014) 150402.
- [6] T. Baumgratz, M. Cramer, and M.B. Plenio, Quantifying coherence, *Phys. Rev. Lett.* **113** (2014) 140401.
- [7] F. Levi and F. Mintert, A quantitative theory of coherent delocalization, *New J. Phys.* **16** (2014) 033007.
- [8] A. Winter and D. Yang, Operational resource theory of coherence, *Phys. Rev. Lett.* **116** (2016) 120404.
- [9] D. Girolami, Observable measure of quantum coherence in finite dimensional systems, *Phys. Rev. Lett.* **113** (2014) 170401.
- [10] S. Du and Z. Bai, The Wigner–Yanase information can increase under phase sensitive incoherent operations, *Ann. Phys. (N. Y.)* **359** (2015) 136.
- [11] U. Singh, M.N. Bera, A. Misra, and A.K. Pati, Erasing quantum coherence: An operational approach, [arXiv:1506.08186](https://arxiv.org/abs/1506.08186).
- [12] E. Chitambar, A. Streltsov, S. Rana, M.N. Bera, G. Adesso, and M. Lewenstein, Assisted distillation of quantum coherence, *Phys. Rev. Lett.* **116** (2016) 070402.
- [13] C. Napoli, T.R. Bromley, M. Cianciaruso, M. Piani, N. Johnston, and G. Adesso, Robustness of coherence: An operational and observable measure of quantum coherence, *Phys. Rev. Lett.* **116** (2016) 150502.
- [14] S. Rana, P. Parashar, and M. Lewenstein, Trace-distance measure of coherence, *Phys. Rev. A* **93** (2016) 012110.
- [15] E. Chitambar and G. Gour, Are incoherent operations physically consistent? – A critical examination of incoherent operations, *Phys. Rev. Lett.* **117** (2016) 030401.
- [16] L.-H. Shao, Z. Xi, H. Fan, and Y. Li, Fidelity and trace-norm distances for quantifying coherence, *Phys. Rev. A* **91** (2015) 042120.
- [17] I. Marvian and R.W. Spekkens, How to quantify coherence: Distinguishing speakable and unspeakable notions, [arXiv:1602.08049](https://arxiv.org/abs/1602.08049).
- [18] F.G.S.L. Brandão and G. Gour, Reversible framework for quantum resource theories, *Phys. Rev. Lett.* **115** (2015) 070503.
- [19] M.B. Plenio and S. Virmani, An introduction to entanglement theory, *Quantum Inf. Comp.* **7** (2014) 51.
- [20] W.K. Wootters, Entanglement of formation of an arbitrary state of two qubits, *Phys. Rev. Lett.* **80** (1998) 2245.
- [21] G. Vidal and R.F. Werner, Computable measure of entanglement, *Phys. Rev. A* **65** (2002) 032314.
- [22] M. Mohseni, Y. Omar, G. Engel, and M.B. Plenio (eds.), *Quantum Effects in Biology*, Cambridge University Press, 2014.
- [23] A. Streltsov, U. Singh, H.S. Dhar, M.N. Bera, and G. Adesso, Measuring quantum coherence with entanglement, *Phys. Rev. Lett.* **115** (2015) 020403.
- [24] N. Killoran, F.E.S. Steinhoff, and M.B. Plenio, Converting non-classicality into entanglement, *Phys. Rev. Lett.* **116** (2016) 080402.
- [25] J. Ma, B. Yadin, D. Girolami, V. Vedral, and M. Gu, Converting coherence to quantum correlations, *Phys. Rev. Lett.* **116** (2016) 160407.
- [26] C. Croal, C. Peuntinger, V. Chille, C. Marquardt, G. Leuchs, N. Korolkova, and L. Mišta, Jr., Entangling the whole by beam splitting a part, *Phys. Rev. Lett.* **115** (2015) 190501.
- [27] W. Ge, M.E. Tasgin, and M.S. Zubairy, Conservation relation of nonclassicality and entanglement for Gaussian states in a beam splitter, *Phys. Rev. A* **92** (2015) 052328.
- [28] H. Gholipour and F. Shahandeh, Entanglement-nonclassicality: A mutual impression, *Phys. Rev. A* **93** (2016) 062318.
- [29] D. Girolami and B. Yadin, Witnessing multipartite entanglement by detecting coherence, [arXiv:1509.04131](https://arxiv.org/abs/1509.04131).
- [30] Z. Jiang, M.D. Lang, and C.M. Caves, Mixing nonclassical pure states in a linear-optical network almost always generates modal entanglement, *Phys. Rev. A* **88** (2013) 044301.
- [31] C.-s. Yu, Y. Zhang, and H. Zhao, Quantum correlation via quantum coherence, *Quantum Inf. Proc.* **13** (2014) 1437.
- [32] X. Hu, A. Milne, B. Zhang, and H. Fan, Quantum coherence of steered states, *Sci. Rep.* **6** (2016) 19365.
- [33] J. Maziero, T. Werlang, F.F. Fanchini, L.C. Céleri, and R.M. Serra, System-reservoir dynamics of quantum and classical correlations, *Phys. Rev. A* **81** (2010) 022116.
- [34] J. Maziero and F.M. Zimmer, Genuine multipartite system-environment correlations in decoherent dynamics, *Phys. Rev. A* **86** (2012) 042121.
- [35] O.J. Fariás, G.H. Aguilar, A. Valdés-Hernández, P.H.S. Ribeiro, L. Davidovich, and S.P. Walborn, Observation of the emergence of multipartite entanglement between a bipartite system and its environment, *Phys. Rev. Lett.* **109** (2012) 150403.
- [36] Z. Ma, Z. Chen, and F.F. Fanchini, Multipartite quantum correlations in open quantum systems, *New J. Phys.* **15** (2013) 043023.
- [37] M. Galiceanu, M.W. Beims, and W.T. Strunz, Quantum energy and coherence exchange with discrete baths, *Physica A* **415** (2014) 294.
- [38] G.H. Aguilar, A. Valdés-Hernández, L. Davidovich, S.P. Walborn, and P.H.S. Ribeiro, Experimental entanglement redistribution under decoherence channels, *Phys. Rev. Lett.* **113** (2014) 240501.
- [39] G.H. Aguilar, O.J. Fariás, A. Valdés-Hernández, P.H.S. Ribeiro, L. Davidovich, and S.P. Walborn, Flow of quantum correlations from a two-qubit system to its environment, *Phys. Rev. A* **89** (2014) 022339.
- [40] K. Roszak and Ł. Cywiński, Characterization and measurement of qubit-environment entanglement generation during pure dephasing, *Phys. Rev. A* **92** (2015) 032310.
- [41] J.H. Reina, C.E. Susa, and F.F. Fanchini, Extracting information from qubit-environment correlations, *Sci. Rep.* **4** (2014) 7443.
- [42] B. Leggio, R. Lo Franco, D.O. Soares-Pinto, P. Horodecki, and G. Compagno, Distributed correlations and information flows within a hybrid multipartite quantum-classical system, *Phys. Rev. A* **92** (2015) 032311.
- [43] V. Chille, N. Quinn, C. Peuntinger, C. Croal, L. Mišta, Jr., C. Marquardt, G. Leuchs, and N. Korolkova, Quantum nature of

- Gaussian discord: Experimental evidence and role of system-environment correlations, *Phys. Rev. A* **91** (2015) 050301(R).
- [44] D. Xu, C. Wang, Y. Zhao, and J. Cao, Effects of system-bath entanglement on the performance of light-harvesting systems: A quantum heat engine perspective, *New J. Phys.* **18** (2016) 023003.
- [45] S. Lorenzo, R. McCloskey, F. Ciccarello, M. Paternostro, and G.M. Palma, Landauer's principle in multipartite open quantum system dynamics, *Phys. Rev. Lett.* **115** (2015) 120403.
- [46] M.B. Plenio and S.F. Huelga, Sensing in the presence of observed environments, *Phys. Rev. A* **93** (2016) 032123.
- [47] F.A. Wudarski and F. Petruccione, Exchange of information between system and environment: Facts and myths, *EPL* **113** (2016) 50001.
- [48] M.A. Nielsen and I.L. Chuang, *Quantum Computation and Quantum Information*, Cambridge University Press, 2000.
- [49] J. Preskill, *Lecture Notes on Quantum Computation* (<http://theory.caltech.edu/people/preskill/ph229>, 2016).
- [50] M.M. Wilde, *Quantum Information Theory*, Cambridge University Press, 2013.
- [51] J. Maziero, The Kraus representation for the dynamics of open quantum systems, *Rev. Bras. Ensino Fis.* **38** (2016) e2307.
- [52] J. Maziero, Computing partial traces and reduced density matrices, *Int. J. Mod. Phys. C* **28** (2016) 1750005.
- [53] D.W. Leung, Choi's proof and quantum process tomography, *J. Math. Phys.* **44** (2003) 528.
- [54] M. Mohseni, A.T. Rezakhani, and D.A. Lidar, Quantum process tomography: Resource analysis of different strategies, *Phys. Rev. A* **77** (2008) 032322.
- [55] A. Salles, F. Melo, M.P. Almeida, M. Hor-Meyll, S.P. Walborn, P.H.S. Ribeiro, and L. Davidovich, Experimental investigation of the dynamics of entanglement: Sudden death, complementarity, and continuous monitoring of the environment, *Phys. Rev. A* **78** (2008) 022322.
- [56] M. Hor-Meyll, A. Auyuanet, C. Borges, A. Aragão, J.A. Huguenin, A. Khoury, and L. Davidovich, Environment-induced entanglement with a single photon, *Phys. Rev. A* **80** (2009) 042327.
- [57] O.J. Fariás, A.V. Hernández, G.H. Aguilar, P.H.S. Ribeiro, S.P. Walborn, L. Davidovich, X.-F. Qian, and J.H. Eberly, Experimental investigation of dynamical invariants in bipartite entanglement, *Phys. Rev. A* **85** (2012) 012314.
- [58] J. Wang and J. Jing, System-environment dynamics of X-type states in noninertial frames, *Ann. Phys.* **327** (2012) 283.
- [59] A.C.S. Costa, M.W. Beims, and W.T. Strunz, System-environment correlations for dephasing two-qubit states coupled to thermal baths, *Phys. Rev. A* **93** (2016) 052316.
- [60] S. Bose, Quantum communication through an unmodulated spin chain, *Phys. Rev. Lett.* **91** (2003) 207901.
- [61] C.C. Gerry and P.L. Knight, *Introductory Quantum Optics*, Cambridge University Press, 2005.
- [62] J. Maziero, R. Auccaise, L.C. Céleri, D.O. Soares-Pinto, E.R. deAzevedo, T.J. Bonagamba, R.S. Sarthour, I.S. Oliveira, and R.M. Serra, Quantum discord in nuclear magnetic resonance systems at room temperature, *Braz. J. Phys.* **43** (2013) 86.
- [63] R. Chandrashekar, P. Manikandan, J. Segar, and T. Byrnes, Distribution of quantum coherence in multipartite systems, *Phys. Rev. Lett.* **116** (2016) 150504.
- [64] W.H. Zurek, Reduction of the Wave Packet: How Long Does It Take? In *Frontiers of Nonequilibrium Statistical Physics*. Edited by P. Meystre and M. O. Scully, Plenum, 1984.
- [65] A. Peres, Separability criterion for density matrices, *Phys. Rev. Lett.* **77** (1996) 1413.
- [66] M. Horodecki, P. Horodecki, and R. Horodecki, Separability of mixed states: Necessary and sufficient conditions, *Phys. Lett. A* **223** (1996) 1.
- [67] S.L. Shmakov, A universal method of solving quartic equations, *Int. J. Pure Appl. Math.* **71** (2011) 251.
- [68] J. Maziero, Random sampling of quantum states: A survey of methods, *Braz. J. Phys.* **45** (2015) 575.
- [69] J. Maziero, Fortran code for generating random probability vectors, unitaries, and quantum states, *Front. ICT* **3** (2016) 4.
- [70] L.C. Céleri, J. Maziero, and R.M. Serra, Theoretical and experimental aspects of quantum discord and related measures, *Int. J. Quantum Inf.* **09** (2011) 1837.
- [71] S.J. Akhtarshenas, H. Mohammadi, S. Karimi, and Z. Azmi, Computable measure of quantum correlation, *Quantum Inf. Process.* **14** (2014) 247.
- [72] S. Luo, Using measurement-induced disturbance to characterize correlations as classical or quantum, *Phys. Rev. A* **77** (2008) 1.
- [73] S. Luo and S. Fu, Measurement-induced nonlocality, *Phys. Rev. Lett.* **106** (2011) 120401.
- [74] T.R. Bromley, M. Cianciaruso, and G. Adesso, Frozen quantum coherence, *Phys. Rev. Lett.* **114** (2015) 210401.
- [75] G. Bowen and S. Bose, Teleportation as a depolarizing quantum channel, relative entropy, and classical capacity, *Phys. Rev. Lett.* **87** (2001) 267901.

4 CONCLUSÃO

Neste trabalho estudamos a dinâmica da coerência quântica para um *qubit* interagindo com ambientes modelados por canais quânticos de ruído. Notamos vários aspectos significativos de como os diferentes tipos de interação podem afetar as propriedades quânticas do sistema.

Identificamos comportamentos interessantes para o fluxo de CQ, com características distintas para cada tipo de ambiente. Percebemos que a coerência quântica não é conservada em geral e que mesmo estados iniciais incoerentes podem levar à CQ transitória. Para o canal *amplitude damping* a CQ não local criada durante a evolução temporal foi completamente transformada em emaranhamento. Esse fato não acontece para o canal *phase damping*, ele transforma toda a coerência inicial do *qubit* em CQ não-local do sistema e do ambiente.

A dinâmica de propagação da CQ devido aos canais *bit flip*, *phase flip* e *bit phase flip* mostrou-se mais diversificada do que para o *amplitude damping* e o *phase damping*. Na verdade, por meio do ajuste do estado inicial do *qubit* podemos observar comportamentos dinâmicos típicos destes dois canais ou de uma mistura deles. Além disso, para os canais de *flip*, identificamos a possibilidade e as condições para a CQ ser estabilizada.

O potencial do *qubit* para atuar como um catalisador para a criação de CQ e emaranhamento através do canal *depolarizing* também foi relatado. Além disso, quando existe a criação de emaranhamento do sistema-ambiente não implica necessariamente na destruição de CQ do sistema.

Além do entendimento básico obtido, nossos resultados podem ser úteis para a identificação de procedimentos a serem usados para proteger CQ ou para transformá-la em outras correlações quânticas. Além disso, os canais quânticos têm se apresentado como as principais ferramentas para a maioria das análises relacionadas com correção de erros, capacidades de canal, dinâmica de correlações quânticas, etc. Relatamos também a impossibilidade de utilizar o emaranhamento para descrever a coerência quântica não-local gerada por alguns canais quânticos. Embora nossas constatações não afirmam ter resolvido o problema da luta contra a decoerência, os nossos resultados podem contribuir sobre como a coerência do sistema é afetada e, esperamos motivar e inspirar métodos para preservá-la.

A perspectivas para o próximo trabalho é estudar o fluxo de coerência quântica para dois ou mais *qubits* interagindo com ambientes locais e globais, e verificar a possibilidade de implementação para testes no computador quântico da IBM, que foi aberto para uso do público em geral em maio deste ano e conta com cinco *qubits*.

REFERÊNCIAS

ÅBERG, J. Catalytic Coherence. **Phys. Rev. Lett.**, American Physical Society, v. 113, p. 150402, Oct 2014. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.113.150402>>.

ASPECT, A.; GRANGIER, P.; ROGER, G. Experimental Realization of Einstein-Podolsky-Rosen-Bohm *Gedankenexperiment* : A New Violation of Bell's Inequalities. **Phys. Rev. Lett.**, American Physical Society, v. 49, p. 91–94, Jul 1982. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.49.91>>.

BAUMGRATZ, T.; CRAMER, M.; PLENIO, M. B. Quantifying Coherence. **Phys. Rev. Lett.**, American Physical Society, v. 113, p. 140401, Sep 2014. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.113.140401>>.

BELL, J. S. On the Einstein Podolsky Rosen Paradox. **Physics**, v. 1, n. 3, p. 195–200, 11 1964. Disponível em: <https://cds.cern.ch/record/111654/files/vol1p195-200_001.pdf>.

BENNETT, C. H.; BRASSARD, G. Quantum cryptography: Public key distribution and coin tossing. **Proceedings of IEEE International Conference on Computers, Systems, and Signal Processing, India**, p. 175, 1984. Disponível em: <<https://www.cs.ucsb.edu/~chong/290N-W06/BB84.pdf>>.

BENNETT, C. H.; BRASSARD, G.; MERMIN, N. D. Quantum cryptography without Bell's theorem. **Phys. Rev. Lett.**, American Physical Society, v. 68, p. 557–559, Feb 1992. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.68.557>>.

BOSE, S. Quantum Communication through an Unmodulated Spin Chain. **Phys. Rev. Lett.**, American Physical Society, v. 91, p. 207901, Nov 2003. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.91.207901>>.

CLAUSER, J. F. et al. Proposed Experiment to Test Local Hidden-Variable Theories. **Phys. Rev. Lett.**, American Physical Society, v. 23, p. 880–884, Oct 1969. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.23.880>>.

EINSTEIN, A.; PODOLSKY, B.; ROSEN, N. Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality Be Considered Complete? **Phys. Rev.**, American Physical Society, v. 47, p. 777–780, May 1935. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.47.777>>.

EKERT, A. K. Quantum cryptography based on Bell's theorem. **Phys. Rev. Lett.**, American Physical Society, v. 67, p. 661–663, Aug 1991. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.67.661>>.

FORGUES, J.-C.; LUPIEN, C.; REULET, B. Experimental Violation of Bell-like Inequalities By Electronic Shot Noise. **Phys. Rev. Lett.**, American Physical Society, v. 114, p. 130403, Apr 2015. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.114.130403>>.

GEORGESCU, I. M.; ASHHAB, S.; NORI, F. Quantum simulation. **Rev. Mod. Phys.**, American Physical Society, v. 86, p. 153–185, Mar 2014. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.86.153>>.

GROVER, L. K. Quantum Mechanics Helps in Searching for a Needle in a Haystack. **Phys. Rev. Lett.**, American Physical Society, v. 79, p. 325–328, Jul 1997. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.79.325>>.

HARROW, A. W.; HASSIDIM, A.; LLOYD, S. Quantum Algorithm for Linear Systems of Equations. **Phys. Rev. Lett.**, American Physical Society, v. 103, p. 150502, Oct 2009. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.103.150502>>.

LANYON, B. P. et al. Experimental Violation of Multipartite Bell Inequalities with Trapped Ions. **Phys. Rev. Lett.**, American Physical Society, v. 112, p. 100403, Mar 2014. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.112.100403>>.

NIELSEN, M. A.; CHUANG, I. L. **Quantum computation and quantum information**. [S.l.]: Cambridge university press, 2010.

PERES, A. Separability Criterion for Density Matrices. **Phys. Rev. Lett.**, American Physical Society, v. 77, p. 1413–1415, Aug 1996. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.77.1413>>.

PLANCK, M. On an Improvement of Wien's Equation for the Spectrum. **Verh. Deut. Phys. Ges.**, p. 2–4, 1900. Disponível em: <<http://materias.df.uba.ar/f4ba2015c1/files/2012/08/papers-planck.pdf>>.

_____. On the law of the energy distribution in the normal spectrum. **Annalen der Physik**, v. 4, 1901.

SCHRÖDINGER, E. Discussion of Probability Relations between Separated Systems. **Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society**, v. 31, p. 555–563, 10 1935. ISSN 1469-8064. Disponível em: <<http://journals.cambridge.org/article/S0305004100013554>>.

_____. Probability relations between separated systems. **Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society**, v. 32, p. 446–452, 10 1936. Disponível em: <<http://journals.cambridge.org/abstract/S0305004100019137>>.

SCHUMACHER, B. Quantum coding. **Phys. Rev. A**, American Physical Society, v. 51, p. 2738–2747, Apr 1995. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.51.2738>>.

SHOR, P. W. Algorithms for quantum computation: discrete logarithms and factoring. **Proceedings of the 35th Annual Symposium on Foundations of Computer Science**, p. 124–134, 11 1994. Disponível em: <<http://ieeexplore.ieee.org.ez47.periodicos.capes.gov.br/xpl/articleDetails.jsp?arnumber=365700&tag=1>>.

SOMAROO, S. et al. Quantum Simulations on a Quantum Computer. **Phys. Rev. Lett.**, American Physical Society, v. 82, p. 5381–5384, Jun 1999. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.82.5381>>.

TSENG, C. H. et al. Quantum simulation with natural decoherence. **Phys. Rev. A**, American Physical Society, v. 62, p. 032309, Aug 2000. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.62.032309>>.

VIDAL, G.; WERNER, R. F. Computable measure of entanglement. **Phys. Rev. A**, American Physical Society, v. 65, p. 032314, Feb 2002. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.65.032314>>.

WIEBE, N.; BRAUN, D.; LLOYD, S. Quantum Algorithm for Data Fitting. **Phys. Rev. Lett.**, American Physical Society, v. 109, p. 050505, Aug 2012. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.109.050505>>.

WINTER, A.; YANG, D. Operational Resource Theory of Coherence. **Phys. Rev. Lett.**, American Physical Society, v. 116, p. 120404, Mar 2016. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.116.120404>>.

ZUREK, W. H. Decoherence, einselection, and the quantum origins of the classical. **Rev. Mod. Phys.**, American Physical Society, v. 75, p. 715–775, May 2003. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.75.715>>.

ŻYCZKOWSKI, K. et al. Volume of the set of separable states. **Phys. Rev. A**, American Physical Society, v. 58, p. 883–892, Aug 1998. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.58.883>>.

APÊNDICE A – AMPLITUDE DAMPING

O canal *amplitude damping* representa o efeito da interação do sistema, um átomo de dois níveis, com o ambiente, nesse caso, o campo eletromagnético. Inicialmente o átomo poderá estar no estado de mínima energia (fundamental) $|0\rangle$ ou estado excitado $|1\rangle$, e consideramos o campo eletromagnético no estado de vácuo (sem excitação). Então o processo de emissão espontânea de um fóton acontece devido a interação do átomo com as flutuações de vácuo do ambiente. Ocorre a perda de energia do sistema para o ambiente.

Os operadores de Kraus para esse canal são;

$$K_0^{ad} = |0\rangle\langle 0| + \sqrt{q}|1\rangle\langle 1| \text{ e } K_1^{ad} = \sqrt{p}|0\rangle\langle 1|,$$

na forma matricial:

$$K_0^{ad} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{1-p} \end{bmatrix} \quad K_1^{ad} = \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{p} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Podemos modelar a dinâmica do sistema-ambiente através do seguinte mapa unitário,

$$U|S_l\rangle \otimes |E_0\rangle = \sum_j (K_j|S_l\rangle) \otimes |E_j\rangle. \quad (\text{A.1})$$

Chegamos então ao mapa unitário que representa esse canal,

$$\begin{aligned} U|S_l\rangle \otimes |E_0\rangle &= \sum_j (K_j|S_l\rangle) \otimes |E_j\rangle \\ U|00\rangle &= K_0|0\rangle \otimes |0\rangle + K_1|0\rangle \otimes |1\rangle \\ &= (|0\rangle\langle 0| + \sqrt{q}|1\rangle\langle 1|) |0\rangle \otimes |0\rangle + (\sqrt{p}|0\rangle\langle 1|) |0\rangle \otimes |1\rangle \\ &= |0\rangle\langle 0||0\rangle \otimes |0\rangle + \sqrt{q}|1\rangle\langle 1||0\rangle \otimes |0\rangle + \sqrt{p}|0\rangle\langle 1||0\rangle \otimes |1\rangle \\ &= |00\rangle, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U|S_l\rangle \otimes |E_0\rangle &= \sum_j (K_j|S_l\rangle) \otimes |E_j\rangle \\ U|10\rangle &= K_0|1\rangle \otimes |0\rangle + K_1|1\rangle \otimes |1\rangle \\ &= (|0\rangle\langle 0| + \sqrt{q}|1\rangle\langle 1|) |1\rangle \otimes |0\rangle + (\sqrt{p}|0\rangle\langle 1|) |1\rangle \otimes |1\rangle \\ &= |0\rangle\langle 0||1\rangle \otimes |0\rangle + \sqrt{q}|1\rangle\langle 1||1\rangle \otimes |0\rangle + \sqrt{p}|0\rangle\langle 1||1\rangle \otimes |1\rangle \\ &= \sqrt{q}|10\rangle + \sqrt{p}|01\rangle, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U_{ad}|00\rangle &\xrightarrow{AD} |00\rangle \\ U_{ad}|10\rangle &\xrightarrow{AD} \sqrt{1-p}|10\rangle + \sqrt{p}|01\rangle. \end{aligned}$$

Vamos definir $q := 1 - p$ com $p \in [0, 1]$ é a probabilidade do átomo emitir um fóton, chamado também de tempo parametrizado.

A.1 DINÂMICA DO SISTEMA

Vamos considerar o estado inicial do *qubit* como

$$\rho^S = 2^{-1} (\mathbb{I} + \vec{r} \cdot \vec{\sigma}). \quad (\text{A.2})$$

Com o vetor na esfera de Bloch como

$$\vec{r} = (r_1, r_2, r_3)$$

com

$$r_1 = r \sin \theta \cos \phi, \quad r_2 = r \sin \theta \sin \phi, \quad r_3 = r \cos \theta$$

onde

$$r \in [0, 1], \quad \theta \in [0, \pi], \quad \phi \in [0, 2\pi).$$

e as matrizes de Pauli são:

$$\sigma_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

O estado evoluído é do sistema:

$$\begin{aligned} \rho_p^S &= \sum_{j=0}^1 K_j \rho^S K_j^\dagger \\ &= 2^{-1} \left(\sum_{j=0}^1 K_j K_j^\dagger + \sum_{j=0}^1 K_j \vec{r} \cdot \vec{\sigma} K_j^\dagger \right) \\ &= 2^{-1} \left(\sum_{j=0}^1 K_j K_j^\dagger + \sum_{k=1}^3 r_k \sum_{j=0}^1 K_j \sigma_k K_j^\dagger \right). \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

Para todos os canais o sistema segue a mesma dinâmica representada por A.3.

Nós observamos que, enquanto $\sum_{j=0}^1 K_j^\dagger K_j = \mathbb{I}$,

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^1 K_j K_j^\dagger &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{1-p} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{1-p} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{p} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \sqrt{p} & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1-p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1+p & 0 \\ 0 & 1-p \end{bmatrix} \\ &= \mathbb{I} + p\sigma_3. \end{aligned}$$

Pode-se também verificar que

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^1 K_j \sigma_1 K_j^\dagger &= \sqrt{1-p} \sigma_1, \\ \sum_{j=0}^1 K_j \sigma_2 K_j^\dagger &= \sqrt{1-p} \sigma_2, \\ \sum_{j=0}^1 K_j \sigma_3 K_j^\dagger &= (1-p) \sigma_3. \end{aligned}$$

Então o estado evoluído para esse canal é:

$$\begin{aligned} \rho_p^S &= 2^{-1} \left(\mathbb{I} + p\sigma_3 + r_1 \sqrt{1-p} \sigma_1 + r_2 \sqrt{1-p} \sigma_2 + r_3 (1-p) \sigma_3 \right) \\ &= 2^{-1} \left(\mathbb{I} + r_1 \sqrt{1-p} \sigma_1 + r_2 \sqrt{1-p} \sigma_2 + (p + r_3 (1-p)) \sigma_3 \right) \\ &= 2^{-1} \left(\mathbb{I} + \vec{r}(p) \cdot \vec{\sigma} \right), \end{aligned} \tag{A.4}$$

com o vetor de Bloch evoluído

$$\begin{aligned} \vec{r}(p) &= (r_1(p), r_2(p), r_3(p)) \\ &= \left(r_1 \sqrt{1-p}, r_2 \sqrt{1-p}, p + r_3 (1-p) \right). \end{aligned}$$

Com este estado pode-se calcular todos os tipos de funções do estado do sistema, tais como coerência quântica, a pureza, a entropia, a energia média, polarizações, etc.

Para tópicos relacionados com a coerência é sempre útil ter a representação matricial do estado:

$$\rho_p^S = 2^{-1} \begin{bmatrix} 1 + p + r_3(1-p) & \sqrt{1-p}(r_1 - ir_2) \\ \sqrt{1-p}(r_1 + ir_2) & 1 - p - r_3(1-p) \end{bmatrix}.$$

Pode-se ver também que, $\rho_{p=1}^S = |0\rangle\langle 0|$.

A.2 DINÂMICA DO SISTEMA-AMBIENTE

O estado inicial sistema-ambiente conjunto, é assumido como sendo:

$$\begin{aligned}
\rho &= \rho^S \otimes |0\rangle\langle 0| \\
&= 2^{-1} \begin{bmatrix} 1 + r_3 & r_1 - ir_2 \\ r_1 + ir_2 & 1 - r_3 \end{bmatrix} \otimes |0\rangle\langle 0| \\
&=: 2^{-1}(r_{11}|0\rangle\langle 0| + r_{12}|0\rangle\langle 1| + r_{21}|1\rangle\langle 0| + r_{22}|1\rangle\langle 1|) \otimes |0\rangle\langle 0| \\
&= 2^{-1}(r_{11}|00\rangle\langle 00| + r_{12}|00\rangle\langle 10| + r_{21}|10\rangle\langle 00| + r_{22}|10\rangle\langle 10|)
\end{aligned} \tag{A.5}$$

Então o estado evoluído do sistema-ambiente é:

$$\begin{aligned}
\rho_p &= U\rho U^\dagger \\
&= 2^{-1}(r_{11}U|00\rangle\langle 00|U^\dagger + r_{12}U|00\rangle\langle 10|U^\dagger + r_{21}U|10\rangle\langle 00|U^\dagger + r_{22}U|10\rangle\langle 10|U^\dagger) \\
&= 2^{-1}(r_{11}|00\rangle\langle 00| + r_{12}|00\rangle(\langle 10|\sqrt{q} + \langle 01|\sqrt{p}) + r_{21}(\sqrt{q}|10\rangle + \sqrt{p}|01\rangle)\langle 00| \\
&\quad + r_{22}(\sqrt{q}|10\rangle + \sqrt{p}|01\rangle)(\langle 10|\sqrt{q} + \langle 01|\sqrt{p})) \\
&= 2^{-1}(r_{11}|00\rangle\langle 00| + r_{12}\sqrt{q}|00\rangle\langle 10| + r_{12}\sqrt{p}|00\rangle\langle 01| + r_{21}\sqrt{q}|10\rangle\langle 00| + r_{21}\sqrt{p}|01\rangle\langle 00| \\
&\quad + r_{22}q|10\rangle\langle 10| + r_{22}\sqrt{pq}|10\rangle\langle 01| + r_{22}\sqrt{pq}|01\rangle\langle 10| + r_{22}p|01\rangle\langle 01|) \\
&= 2^{-1} \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12}\sqrt{p} & r_{12}\sqrt{q} & 0 \\ r_{21}\sqrt{p} & r_{22}p & r_{22}\sqrt{pq} & 0 \\ r_{21}\sqrt{q} & r_{22}\sqrt{pq} & r_{22}q & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
&= 2^{-1} \begin{bmatrix} (1 + r_3) & (r_1 - ir_2)\sqrt{p} & (r_1 - ir_2)\sqrt{q} & 0 \\ (r_1 + ir_2)\sqrt{p} & (1 - r_3)p & (1 - r_3)\sqrt{pq} & 0 \\ (r_1 + ir_2)\sqrt{q} & (1 - r_3)\sqrt{pq} & (1 - r_3)q & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

O estado do sistema-ambiente no tempo assintótico é:

$$\begin{aligned}
\rho_{p=1} &= 2^{-1} \begin{bmatrix} (1 + r_3) & (r_1 - ir_2) & 0 & 0 \\ (r_1 + ir_2) & (1 - r_3) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
&= 2^{-1}((1 + r_3)|00\rangle\langle 00| + (r_1 - ir_2)|00\rangle\langle 01| + (r_1 + ir_2)|01\rangle\langle 00| + (1 - r_3)|01\rangle\langle 01|) \\
&= 2^{-1}|0\rangle\langle 0| \otimes \rho^S.
\end{aligned}$$

Vamos verificar os cálculos para o estado reduzido ρ_p^S , com os obtidos através da aplicação direta dos operadores de Kraus, tomando a função traço parcial do operador

densidade total ρ_p em relação ao ambiente

$$\begin{aligned}
\rho_p^S &= \text{Tr}_E(\rho_p) \\
&= 2^{-1}(r_{11}\text{Tr}_E|00\rangle\langle 00| + r_{12}\sqrt{q}\text{Tr}_E|00\rangle\langle 10| + r_{12}\sqrt{p}\text{Tr}_E|00\rangle\langle 01| + \\
&\quad + r_{21}\sqrt{q}\text{Tr}_E|10\rangle\langle 00| + r_{21}\sqrt{p}\text{Tr}_E|01\rangle\langle 00| + r_{22}q\text{Tr}_E|10\rangle\langle 10| + \\
&\quad + r_{22}\sqrt{pq}\text{Tr}_E|10\rangle\langle 01| + r_{22}\sqrt{pq}\text{Tr}_E|01\rangle\langle 10| + r_{22}p\text{Tr}_E|01\rangle\langle 01|) \\
&= 2^{-1}(r_{11}|0\rangle\langle 0| + r_{12}\sqrt{q}|0\rangle\langle 1| + r_{21}\sqrt{q}|1\rangle\langle 0| + 0 + r_{22}q|1\rangle\langle 1| + r_{22}p|0\rangle\langle 0|) \\
&= 2^{-1}((r_{11} + r_{22}p)|0\rangle\langle 0| + r_{12}\sqrt{q}|0\rangle\langle 1| + r_{21}\sqrt{q}|1\rangle\langle 0| + r_{22}q|1\rangle\langle 1|).
\end{aligned}$$

Usando

$$r_{11} = 1 + r_3, r_{22} = 1 - r_3 \text{ e } r_{12} = r_{21}^* = r_1 - ir_2 \quad (\text{A.6})$$

nós temos:

$$\begin{aligned}
\rho_p^S &= 2^{-1}((r_{11} + r_{22}p)|0\rangle\langle 0| + r_{12}\sqrt{q}|0\rangle\langle 1| + r_{21}\sqrt{q}|1\rangle\langle 0| + r_{22}q|1\rangle\langle 1|) \\
&= 2^{-1}((1 + p + r_3q)|0\rangle\langle 0| + (1 - p - qr_3)|1\rangle\langle 1| \\
&\quad + (r_1 - ir_2)\sqrt{q}|0\rangle\langle 1| + (r_1 + ir_2)\sqrt{q}|1\rangle\langle 0|) \\
&= 2^{-1}(\mathbb{I} + r_1\sqrt{q}\sigma_1 + r_2\sqrt{q}\sigma_2 + (p + qr_3)\sigma_3),
\end{aligned}$$

que é igual a equação (A.4).

O estado evoluído do ambiente obtido a partir da função traço parcial do operador densidade total ρ_p em relação ao sistema:

$$\begin{aligned}
\rho_p^E &= \text{Tr}_S(\rho_p) \\
&= 2^{-1}(r_{11}\text{Tr}_S|00\rangle\langle 00| + r_{12}\sqrt{q}\text{Tr}_S|00\rangle\langle 10| + r_{12}\sqrt{p}\text{Tr}_S|00\rangle\langle 01| + \\
&\quad + r_{21}\sqrt{q}\text{Tr}_S|10\rangle\langle 00| + r_{21}\sqrt{p}\text{Tr}_S|01\rangle\langle 00| + r_{22}q\text{Tr}_S|10\rangle\langle 10| + \\
&\quad + r_{22}\sqrt{pq}\text{Tr}_S|10\rangle\langle 01| + r_{22}\sqrt{pq}\text{Tr}_S|01\rangle\langle 10| + r_{22}p\text{Tr}_S|01\rangle\langle 01|) \\
&= 2^{-1}(r_{11}|0\rangle\langle 0| + r_{12}\sqrt{p}|0\rangle\langle 1| + 0 + r_{21}\sqrt{p}|1\rangle\langle 0| + r_{22}q|0\rangle\langle 0| + r_{22}p|1\rangle\langle 1|) \\
&= 2^{-1}((r_{11} + r_{22}q)|0\rangle\langle 0| + r_{12}\sqrt{p}|0\rangle\langle 1| + r_{21}\sqrt{p}|1\rangle\langle 0| + r_{22}p|1\rangle\langle 1|) \\
&= 2^{-1}((1 + r_3 + (1 - r_3)q)|0\rangle\langle 0| + (1 - r_3)p|1\rangle\langle 1| + (r_1 - ir_2)\sqrt{p}|0\rangle\langle 1| + (r_1 + ir_2)\sqrt{p}|1\rangle\langle 0|) \\
&= 2^{-1}(\mathbb{I} + r_1\sqrt{p}\sigma_1 + r_2\sqrt{p}\sigma_2 + (1 - (1 - r_3)p)\sigma_3) \\
&= 2^{-1}(\mathbb{I} + \vec{R}(p) \cdot \vec{\sigma})
\end{aligned}$$

com

$$R_1(p) = r_1\sqrt{p}, R_2(p) = r_2\sqrt{p}, R_3(p) = 1 - (1 - r_3)p.$$

Na forma de matriz considerando a base padrão:

$$\rho_p^E = 2^{-1} \begin{bmatrix} 2 - (1 - r_3)p & \sqrt{p}(r_1 - ir_2) \\ \sqrt{p}(r_1 + ir_2) & (1 - r_3)p \end{bmatrix}.$$

No tempo assintótico:

$$\rho_{p=1}^E = 2^{-1} \begin{bmatrix} (1 + r_3) & (r_1 - ir_2) \\ (r_1 + ir_2) & (1 - r_3) \end{bmatrix} = \rho^S.$$

APÊNDICE B – PHASE DAMPING

O canal *phase damping* é uma representação fenomenológica da principal fonte de ruído em sistemas quânticos, nesse caso não existe troca de energia entre o sistema e ambiente. Possui os seguintes operadores de Kraus:

$$K_0^{pd} = \sqrt{q}\sigma_0, K_1^{pd} = \sqrt{p}|0\rangle\langle 0| \text{ e } K_1^{pd} = \sqrt{p}|1\rangle\langle 1|$$

O mapa unitário é o seguinte, calculado pela equação A.1:

$$\begin{aligned} U_{pd}|00\rangle &\xrightarrow{PD} \sqrt{q}|00\rangle + \sqrt{p}|01\rangle \\ U_{pd}|10\rangle &\xrightarrow{PD} \sqrt{q}|10\rangle + \sqrt{p}|12\rangle. \end{aligned}$$

B.1 DINÂMICA DO SISTEMA

A dinâmica do sistema segue como nas equações A.2 e A.3. Observamos também que, enquanto $\sum_{j=0}^2 K_j^\dagger K_j = \mathbb{I}$,

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^2 K_j K_j^\dagger &= \begin{bmatrix} \sqrt{q} & 0 \\ 0 & \sqrt{q} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{q} & 0 \\ 0 & \sqrt{q} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sqrt{p} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{p} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{p} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{p} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} q & 0 \\ 0 & q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & p \end{bmatrix} \\ &= \mathbb{I}. \end{aligned}$$

Podemos verificar que,

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^2 K_j \sigma_1 K_j^\dagger &= q\mathbb{I}\hat{\sigma}_1 + p|0\rangle\langle 0|\hat{\sigma}_1|0\rangle\langle 0| + p|1\rangle\langle 1|\hat{\sigma}_1|1\rangle\langle 1| = (1-p)\hat{\sigma}_1, \\ \sum_{j=0}^2 K_j \sigma_2 K_j^\dagger &= q\mathbb{I}\hat{\sigma}_2 + p|0\rangle\langle 0|\hat{\sigma}_2|0\rangle\langle 0| + p|1\rangle\langle 1|\hat{\sigma}_2|1\rangle\langle 1| = (1-p)\hat{\sigma}_2, \\ \sum_{j=0}^2 K_j \sigma_3 K_j^\dagger &= q\mathbb{I}\hat{\sigma}_3 + p|0\rangle\langle 0|\hat{\sigma}_3|0\rangle\langle 0| + p|1\rangle\langle 1|\hat{\sigma}_3|1\rangle\langle 1| = \hat{\sigma}_3. \end{aligned}$$

Então o estado evoluindo para esse canal é:

$$\rho_p^S = 2^{-1} (\mathbb{I} + r_1 (1-p) \hat{\sigma}_1 + r_2 (1-p) \hat{\sigma}_2 + r_3 \hat{\sigma}_3) \quad (\text{B.1})$$

B.2 DINÂMICA SISTEMA-AMBIENTE

O estado inicial do sistema-ambiente é assumido como sendo A.5,

$$\rho = 2^{-1}(r_{11}|0\rangle\langle 0| + r_{12}|0\rangle\langle 1| + r_{21}|1\rangle\langle 0| + r_{22}|1\rangle\langle 1|) \otimes |0\rangle\langle 0|,$$

e evolui unitariamente no tempo. Então o estado evoluído do sistema ambiente é:

$$\begin{aligned} \rho_p &= U\rho U^\dagger \\ &= 2^{-1}(r_{11}U|00\rangle\langle 00|U^\dagger + r_{12}U|00\rangle\langle 10|U^\dagger + r_{21}U|10\rangle\langle 00|U^\dagger + r_{22}U|10\rangle\langle 10|U^\dagger) \\ &= 2^{-1}\{[r_{11}(\sqrt{q}|00\rangle + \sqrt{p}|01\rangle)(\sqrt{q}\langle 00| + \sqrt{p}\langle 01|)] + \\ &\quad + [r_{12}(\sqrt{q}|00\rangle + \sqrt{p}|01\rangle)(\sqrt{q}\langle 10| + \sqrt{p}\langle 12|)] + \\ &\quad + [r_{21}(\sqrt{q}|10\rangle + \sqrt{p}|12\rangle)(\sqrt{q}\langle 00| + \sqrt{p}\langle 01|)] + \\ &\quad + [r_{22}(\sqrt{q}|10\rangle + \sqrt{p}|12\rangle)(\sqrt{q}\langle 10| + \sqrt{p}\langle 12|)]\} \\ &= 2^{-1}\{r_{11}[q|00\rangle\langle 00| + \sqrt{pq}|00\rangle\langle 01| + \sqrt{pq}|01\rangle\langle 00| + p|01\rangle\langle 01|] + \\ &\quad + r_{12}[q|00\rangle\langle 10| + \sqrt{pq}|00\rangle\langle 12| + \sqrt{pq}|01\rangle\langle 10| + p|01\rangle\langle 12|] + \\ &\quad + r_{21}[q|10\rangle\langle 00| + \sqrt{pq}|10\rangle\langle 01| + \sqrt{pq}|12\rangle\langle 00| + p|12\rangle\langle 01|] + \\ &\quad + r_{22}[q|10\rangle\langle 10| + \sqrt{pq}|10\rangle\langle 12| + \sqrt{pq}|12\rangle\langle 10| + p|12\rangle\langle 12|]\} \end{aligned}$$

na base, $|00\rangle, |01\rangle, |02\rangle, |10\rangle, |11\rangle, |12\rangle$,

$$\rho_p = 2^{-1} \begin{bmatrix} r_{11}q & r_{11}\sqrt{pq} & 0 & r_{12}q & 0 & r_{12}\sqrt{pq} \\ r_{11}\sqrt{pq} & r_{11}p & 0 & r_{12}\sqrt{pq} & 0 & r_{12}p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ r_{21}q & r_{21}\sqrt{pq} & 0 & r_{22}q & 0 & r_{22}\sqrt{pq} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ r_{21}\sqrt{pq} & r_{21}p & 0 & r_{22}\sqrt{pq} & 0 & r_{22}p \end{bmatrix}$$

O estado do sistema-ambiente no tempo assintótico é:

$$\rho_{p=1} = 2^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r_{11} & 0 & 0 & 0 & r_{12} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r_{21} & 0 & 0 & 0 & r_{22} \end{bmatrix}$$

usando A.6, temos:

$$\rho_{p=1} = 2^{-1} \left[(1 + r_3) |01\rangle\langle 01| + (r_1 - ir_2) |01\rangle\langle 12| + (r_1 + ir_2) |12\rangle\langle 01| + (1 - r_3) |12\rangle\langle 12| \right].$$

Vamos verificar os cálculos para o estado reduzido ρ_p^S , com os obtidos através da aplicação direta dos operadores de Kraus, tomando a função traço parcial do operador densidade total ρ_p em relação ao ambiente, temos:

$$\begin{aligned} \rho_p^S &= \text{Tr}_E(\rho_p) \\ &= 2^{-1} \{ r_{11}qTr_E|00\rangle\langle 00| + r_{11}\sqrt{pq}Tr_E|00\rangle\langle 01| + r_{12}qTr_E|00\rangle\langle 10| + r_{12}\sqrt{pq}Tr_E|00\rangle\langle 12| \\ &\quad + r_{11}\sqrt{pq}Tr_E|01\rangle\langle 00| + r_{11}pTr_E|01\rangle\langle 01| + r_{12}\sqrt{pq}Tr_E|01\rangle\langle 10| + r_{12}pTr_E|01\rangle\langle 12| \\ &\quad + r_{21}qTr_E|10\rangle\langle 00| + r_{21}\sqrt{pq}Tr_E|10\rangle\langle 01| + r_{22}qTr_E|10\rangle\langle 10| + r_{22}\sqrt{pq}Tr_E|10\rangle\langle 12| \\ &\quad + r_{21}\sqrt{pq}Tr_E|12\rangle\langle 00| + r_{21}pTr_E|12\rangle\langle 01| + r_{22}\sqrt{pq}Tr_E|12\rangle\langle 10| + r_{22}pTr_E|12\rangle\langle 12| \} \\ &= 2^{-1} [r_{11}(1-p)|0\rangle\langle 0| + r_{12}(1-p)|0\rangle\langle 1| + r_{11}p|0\rangle\langle 0| + \\ &\quad + r_{21}(1-p)|1\rangle\langle 0| + r_{22}(1-p)|1\rangle\langle 1| + r_{22}p|1\rangle\langle 1|] \\ &= 2^{-1} [(1+r_3)|0\rangle\langle 0| + (1-r_3)|1\rangle\langle 1| + (r_1-ir_2)(1-p)|0\rangle\langle 1| + (r_1+ir_2)(1-p)|1\rangle\langle 0|], \end{aligned}$$

que é igual a B.1. Na forma matricial considerando a base padrão:

$$\rho_p^S = 2^{-1} \begin{bmatrix} 1+r_3 & (r_1-ir_2)(1-p) \\ (r_1+ir_2)(1-p) & 1-r_3 \end{bmatrix}.$$

No tempo assintótico

$$\rho_{p=1}^S = 2^{-1} \begin{bmatrix} 1+r_3 & 0 \\ 0 & 1-r_3 \end{bmatrix}$$

O estado evoluído do ambiente obtido a partir da função traço parcial do operador densidade total ρ_p em relação ao sistema:

$$\begin{aligned} \rho_p^E &= \text{Tr}_S(\rho_p) \\ &= 2^{-1} [r_{11}qTr_S|00\rangle\langle 00| + r_{11}\sqrt{pq}Tr_S|00\rangle\langle 01| + r_{12}qTr_S|00\rangle\langle 10| + r_{12}\sqrt{pq}Tr_S|00\rangle\langle 12| \\ &\quad + r_{11}\sqrt{pq}Tr_S|01\rangle\langle 00| + r_{11}pTr_S|01\rangle\langle 01| + r_{12}\sqrt{pq}Tr_S|01\rangle\langle 10| + r_{12}pTr_S|01\rangle\langle 12| \\ &\quad + r_{21}qTr_S|10\rangle\langle 00| + r_{21}\sqrt{pq}Tr_S|10\rangle\langle 01| + r_{22}qTr_S|10\rangle\langle 10| + r_{22}\sqrt{pq}Tr_S|10\rangle\langle 12| \\ &\quad + r_{21}\sqrt{pq}Tr_S|12\rangle\langle 00| + r_{21}pTr_S|12\rangle\langle 01| + r_{22}\sqrt{pq}Tr_S|12\rangle\langle 10| + r_{22}pTr_S|12\rangle\langle 12|] \\ &= 2^{-1} [r_{11}q|0\rangle\langle 0| + r_{11}\sqrt{pq}|0\rangle\langle 1| + r_{11}\sqrt{pq}|1\rangle\langle 0| + r_{11}p|1\rangle\langle 1| \\ &\quad + r_{22}q|0\rangle\langle 0| + r_{22}\sqrt{pq}|0\rangle\langle 2| + r_{22}\sqrt{pq}|2\rangle\langle 0| + r_{22}p|2\rangle\langle 2|] \\ &= 2^{-1} [2q|0\rangle\langle 0| + (1+r_3)\sqrt{pq}|0\rangle\langle 1| + (1+r_3)\sqrt{pq}|1\rangle\langle 0| + (1+r_3)p|1\rangle\langle 1| \\ &\quad + (1-r_3)\sqrt{pq}|0\rangle\langle 2| + (1-r_3)\sqrt{pq}|2\rangle\langle 0| + (1-r_3)p|2\rangle\langle 2|]. \end{aligned}$$

Na base computacional $|0\rangle, |1\rangle, |2\rangle$

$$\rho_p^E = 2^{-1} \begin{bmatrix} 2q & (1+r_3)\sqrt{pq} & (1-r_3)\sqrt{pq} \\ (1+r_3)\sqrt{pq} & (1+r_3)p & 0 \\ (1-r_3)\sqrt{pq} & 0 & (1-r_3)p \end{bmatrix}.$$

No tempo assintótico,

$$\rho_{p=1}^E = 2^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1+r_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1-r_3 \end{bmatrix}.$$

APÊNDICE C – BIT FLIP

O Bit flip é o erro mais comum que encontramos na computação clássica, onde zero torna-se um e vice-versa ($0 \rightleftharpoons 1$), devido a um erro aleatório. Naturalmente, esse tipo de erro pode acontecer para sistemas quânticos, onde estados da base computacional podem ser deixados sozinhos, $|0\rangle \rightarrow |0\rangle$ e $|1\rangle \rightarrow |1\rangle$, com probabilidade $1 - p$ ou podem flipar, $|0\rangle \rightleftharpoons |1\rangle$, com probabilidade p . Os seguintes operadores de Kraus descrevem essa transformação:

$$K_0^{bf} = \sqrt{q}\sigma_0 \text{ e } K_1^{bf} = \sqrt{p}\sigma_1.$$

O mapa unitário que descreve esse mapa é $(U|S_i\rangle \otimes |E_0\rangle = \sum_j (K_j|S_i\rangle) \otimes |E_j\rangle)$, temos então:

$$\begin{aligned} U_{bf}|00\rangle &\xrightarrow{BF} \sqrt{q}|00\rangle + \sqrt{p}|11\rangle, \\ U_{bf}|10\rangle &\xrightarrow{BF} \sqrt{q}|10\rangle + \sqrt{p}|01\rangle. \end{aligned}$$

C.1 DINÂMICA DO SISTEMA

A dinâmica do sistema segue como nas equações A.2 e A.3. Observamos também que, enquanto $\sum_{j=0}^2 K_j^\dagger K_j = \mathbb{I}$,

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^1 K_j K_j^\dagger &= \begin{bmatrix} \sqrt{q} & 0 \\ 0 & \sqrt{q} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{q} & 0 \\ 0 & \sqrt{q} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{p} \\ \sqrt{p} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{p} \\ \sqrt{p} & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} q & 0 \\ 0 & q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p & 0 \\ 0 & p \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \mathbb{I}. \end{aligned}$$

Podemos verificar que,

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^1 K_j \sigma_1 K_j^\dagger &= \sigma_1, \\ \sum_{j=0}^1 K_j \sigma_2 K_j^\dagger &= (1 - 2p) \sigma_2, \\ \sum_{j=0}^1 K_j \sigma_3 K_j^\dagger &= (1 - 2p) \sigma_3.\end{aligned}$$

Então o estado evoluído para esse canal é:

$$\begin{aligned}\rho_p^S &= 2^{-1} (\mathbb{I} + r_1 \sigma_1 + r_2 (1 - 2p) \sigma_2 + r_3 (1 - 2p) \sigma_3) \\ &= 2^{-1} (\mathbb{I} + r_1 \sigma + r_2 (1 - 2p) \sigma_2 + r_3 (1 - 2p) \sigma_3) \\ &= 2^{-1} (\mathbb{I} + \vec{r}(p) \cdot \vec{\sigma})\end{aligned}\tag{C.1}$$

C.2 DINÂMICA SISTEMA-AMBIENTE

O estado inicial do sistema ambiente é igual a equação A.5. Então o estado evoluído do sistema-ambiente é:

$$\begin{aligned}\rho_p &= U \rho U^\dagger \\ &= 2^{-1} (r_{11} U |00\rangle \langle 00| U^\dagger + r_{12} U |00\rangle \langle 10| U^\dagger + r_{21} U |10\rangle \langle 00| U^\dagger + r_{22} U |10\rangle \langle 10| U^\dagger) \\ &= 2^{-1} \{ [r_{11} (\sqrt{q}|00\rangle + \sqrt{p}|11\rangle) (\sqrt{q}\langle 00| + \sqrt{p}\langle 11|)] + \\ &\quad + [r_{12} (\sqrt{q}|00\rangle + \sqrt{p}|11\rangle) (\sqrt{q}\langle 10| + \sqrt{p}\langle 01|)] + \\ &\quad + [r_{21} (\sqrt{q}|10\rangle + \sqrt{p}|01\rangle) (\sqrt{q}\langle 00| + \sqrt{p}\langle 11|)] + \\ &\quad + [r_{22} (\sqrt{q}|10\rangle + \sqrt{p}|01\rangle) (\sqrt{q}\langle 10| + \sqrt{p}\langle 01|)] \} \\ &= 2^{-1} \{ r_{11} [q|00\rangle \langle 00| + \sqrt{pq}|00\rangle \langle 11| + \sqrt{pq}|11\rangle \langle 00| + p|11\rangle \langle 11|] + \\ &\quad + r_{12} [q|00\rangle \langle 10| + \sqrt{pq}|00\rangle \langle 01| + \sqrt{pq}|11\rangle \langle 10| + p|11\rangle \langle 01|] + \\ &\quad + r_{21} [q|10\rangle \langle 00| + \sqrt{pq}|10\rangle \langle 11| + \sqrt{pq}|01\rangle \langle 00| + p|01\rangle \langle 11|] + \\ &\quad + r_{22} [q|10\rangle \langle 10| + \sqrt{pq}|10\rangle \langle 01| + \sqrt{pq}|01\rangle \langle 10| + p|01\rangle \langle 01|] \}\end{aligned}$$

Na base $|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle$

$$\rho_p = 2^{-1} \begin{bmatrix} r_{11}q & r_{12}\sqrt{pq} & r_{12}q & r_{11}\sqrt{pq} \\ r_{21}\sqrt{pq} & r_{22}p & r_{22}\sqrt{pq} & r_{21}p \\ r_{21}q & r_{22}\sqrt{pq} & r_{22}q & r_{21}\sqrt{pq} \\ r_{11}\sqrt{pq} & r_{12}p & r_{12}\sqrt{pq} & r_{11}p \end{bmatrix}$$

O estado do sistema-ambiente no tempo assintótico é

$$\begin{aligned} \rho_{p=1} &= 2^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r_{22} & 0 & r_{21} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r_{12} & 0 & r_{11} \end{bmatrix} \\ &= 2^{-1} (r_{22}|01\rangle\langle 01| + r_{21}|01\rangle\langle 11| + r_{12}|11\rangle\langle 01| + r_{11}|11\rangle\langle 11|) \\ &= 2^{-1} [(1 - r_3) |01\rangle\langle 01| + (r_1 + ir_2) |01\rangle\langle 11| + (r_1 - ir_2) |11\rangle\langle 01| + (1 + r_3) |11\rangle\langle 11|]. \end{aligned}$$

Vamos verificar os cálculos para o estado reduzido ρ_p^S , com os obtidos através da aplicação direta dos operadores de Kraus, tomando a função traço parcial do operador densidade total do sistema ambiente:

$$\begin{aligned} \rho_p^S &= \text{Tr}_E(\rho_p) \\ &= 2^{-1} \{ r_{11} [qTr_E|00\rangle\langle 00| + \sqrt{pq}Tr_E|00\rangle\langle 11| + \sqrt{pq}Tr_E|11\rangle\langle 00| + pTr_E|11\rangle\langle 11|] \\ &\quad + r_{12} [qTr_E|00\rangle\langle 10| + \sqrt{pq}Tr_E|00\rangle\langle 01| + \sqrt{pq}Tr_E|11\rangle\langle 10| + pTr_E|11\rangle\langle 01|] \\ &\quad + r_{21} [qTr_E|10\rangle\langle 00| + \sqrt{pq}Tr_E|10\rangle\langle 11| + \sqrt{pq}Tr_E|01\rangle\langle 00| + pTr_E|01\rangle\langle 11|] \\ &\quad + r_{22} [qTr_E|10\rangle\langle 10| + \sqrt{pq}Tr_E|10\rangle\langle 01| + \sqrt{pq}Tr_E|01\rangle\langle 10| + pTr_E|01\rangle\langle 01|] \} \\ &= 2^{-1} \{ r_{11}q|0\rangle\langle 0| + r_{11}p|1\rangle\langle 1| + r_{12}q|0\rangle\langle 1| + r_{12}p|1\rangle\langle 0| + \\ &\quad + r_{21}q|1\rangle\langle 0| + r_{21}p|0\rangle\langle 1| + r_{22}q|1\rangle\langle 1| + r_{22}p|0\rangle\langle 0| \} \end{aligned}$$

Usando A.6, nós temos:

$$\begin{aligned} \rho_p^S &= 2^{-1} \{ [(1 + r_3)q + (1 - r_3)p] |0\rangle\langle 0| + [(1 + r_3)p + (1 - r_3)q] |1\rangle\langle 1| + \\ &\quad + [(r_1 - ir_2)q + (r_1 + ir_2)p] |0\rangle\langle 1| + [(r_1 - ir_2)p + (r_1 + ir_2)q] |1\rangle\langle 0| \} \\ &= 2^{-1} \{ [1 + r_3(1 - 2p)] |0\rangle\langle 0| + [1 - r_3(1 - 2p)] |1\rangle\langle 1| + \\ &\quad + [r_1 - ir_2(1 - 2p)] |0\rangle\langle 1| + [r_1 + ir_2(1 - 2p)] |1\rangle\langle 0| \} \end{aligned}$$

que é igual a equação C.1, na forma matricial na base padrão temos:

$$\rho_p^S = 2^{-1} \begin{bmatrix} 1 + r_3(1 - 2p) & r_1 - ir_2(1 - 2p) \\ r_1 + ir_2(1 - 2p) & 1 - r_3(1 - 2p) \end{bmatrix}.$$

O estado evoluído do ambiente obtido a partir da função traço parcial do operador densidade total ρ_p em relação ao sistema:

$$\begin{aligned}
\rho_p^E &= \text{Tr}_S(\rho_p) \\
&= 2^{-1} \{ r_{11} [q \text{Tr}_S|00\rangle\langle 00| + \sqrt{pq} \text{Tr}_S|00\rangle\langle 11| + \sqrt{pq} \text{Tr}_S|11\rangle\langle 00| + p \text{Tr}_S|11\rangle\langle 11|] + \\
&\quad + r_{12} [q \text{Tr}_S|00\rangle\langle 10| + \sqrt{pq} \text{Tr}_S|00\rangle\langle 01| + \sqrt{pq} \text{Tr}_S|11\rangle\langle 10| + p \text{Tr}_S|11\rangle\langle 01|] + \\
&\quad + r_{21} [q \text{Tr}_S|10\rangle\langle 00| + \sqrt{pq} \text{Tr}_S|10\rangle\langle 11| + \sqrt{pq} \text{Tr}_S|01\rangle\langle 00| + p \text{Tr}_S|01\rangle\langle 11|] + \\
&\quad + r_{22} [q \text{Tr}_S|10\rangle\langle 10| + \sqrt{pq} \text{Tr}_S|10\rangle\langle 01| + \sqrt{pq} \text{Tr}_S|01\rangle\langle 10| + p \text{Tr}_S|01\rangle\langle 01|] \} \\
&= 2^{-1} \{ r_{11} [q|0\rangle\langle 0| + p|1\rangle\langle 1|] + r_{12} [\sqrt{pq}|0\rangle\langle 1| + \sqrt{pq}|1\rangle\langle 0|] + \\
&\quad + r_{21} [\sqrt{pq}|0\rangle\langle 1| + \sqrt{pq}|1\rangle\langle 0|] + r_{22} [q|0\rangle\langle 0| + p|1\rangle\langle 1|] \} \\
&= 2^{-1} \{ [(1+r_3)q + (1-r_3)q] |0\rangle\langle 0| + [(1+r_3)p + (1-r_3)p] |1\rangle\langle 1| + \\
&\quad + [(r_1 - ir_2)\sqrt{pq} + (r_1 + ir_2)\sqrt{pq}] |0\rangle\langle 1| + \\
&\quad + [(r_1 - ir_2)\sqrt{pq} + (r_1 + ir_2)\sqrt{pq}] |1\rangle\langle 0| \}
\end{aligned}$$

Na forma matricial:

$$\rho_p^E = \begin{bmatrix} q & r_1\sqrt{pq} \\ r_1\sqrt{pq} & p \end{bmatrix}.$$

No tempo assintótico:

$$\rho_{p=1}^E = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = |1\rangle\langle 1|.$$

APÊNDICE D – PHASE FLIP

O erro *phase flip* é um tipo de erro que só acontece para sistemas quânticos. Os estados da base computacional adquirem uma fase aleatória diferente de π . Ignorando as fases globais, consideramos o estado $|0\rangle$ sozinho (i.e., $|0\rangle \rightarrow |0\rangle$), o estado $|1\rangle$ adquire uma fase π ($|1\rangle \rightarrow e^{i\pi}|1\rangle = -|1\rangle$). Se o erro *phase flip* acontece com uma probabilidade p , então usamos os seguintes operadores de Kraus para escreve-lo.

$$K_0^{pf} = \sqrt{q}\sigma_0 \text{ e } K_1^{pf} = \sqrt{p}\sigma_3.$$

Usando a equação A.1 encontramos o seguinte mapa unitário:

$$\begin{aligned} U_{pf}|00\rangle &\xrightarrow{PF} \sqrt{q}|00\rangle + \sqrt{p}|01\rangle, \\ U_{pf}|10\rangle &\xrightarrow{PF} \sqrt{q}|10\rangle - \sqrt{p}|11\rangle. \end{aligned}$$

Note-se a semelhança deste mapa com o canal de *phase damping*.

D.1 DINÂMICA DO SISTEMA

A dinâmica do sistema segue como nas equações A.2 e A.3. Observamos também que, enquanto $\sum_{j=0}^1 K_j^\dagger K_j = \mathbb{I}$,

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^1 K_j K_j^\dagger &= \begin{bmatrix} \sqrt{q} & 0 \\ 0 & \sqrt{q} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{q} & 0 \\ 0 & \sqrt{q} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sqrt{p} & 0 \\ 0 & -\sqrt{p} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{p} & 0 \\ 0 & -\sqrt{p} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (1-p) & 0 \\ 0 & (1-p) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p & 0 \\ 0 & p \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \mathbb{I}. \end{aligned}$$

Podemos verificar que,

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^1 K_j \sigma_1 K_j^\dagger &= (1 - 2p) \sigma_1 \\ \sum_{j=0}^1 K_j \sigma_2 K_j^\dagger &= (1 - 2p) \sigma_2 \\ \sum_{j=0}^1 K_j \sigma_3 K_j^\dagger &= \sigma_3.\end{aligned}$$

Então o estado evoluído para esse canal é:

$$\rho_p^S = 2^{-1} (\mathbb{I} + r_1 (1 - 2p) \sigma_1 + r_2 (1 - 2p) \sigma_2 + r_3 \sigma_3) \quad (\text{D.1})$$

D.2 DINÂMICA SISTEMA-AMBIENTE

O estado inicial do sistema ambiente é igual a equação A.5. Então o estado evoluído do sistema-ambiente é:

$$\begin{aligned}\rho_p &= U \rho U^\dagger \\ &= 2^{-1} [r_{11} U |00\rangle \langle 00| U^\dagger + r_{12} U |00\rangle \langle 10| U^\dagger + r_{21} U |10\rangle \langle 00| U^\dagger + r_{22} U |10\rangle \langle 10| U^\dagger] \\ &= 2^{-1} [r_{11} (\sqrt{q}|00\rangle + \sqrt{p}|01\rangle) (\sqrt{q}\langle 00| + \sqrt{p}\langle 01|) + \\ &\quad + r_{12} (\sqrt{q}|00\rangle + \sqrt{p}|01\rangle) (\sqrt{q}\langle 10| - \sqrt{p}\langle 11|) + \\ &\quad + r_{21} (\sqrt{q}|10\rangle - \sqrt{p}|11\rangle) (\sqrt{q}\langle 00| + \sqrt{p}\langle 01|) + \\ &\quad + r_{22} (\sqrt{q}|10\rangle - \sqrt{p}|11\rangle) (\sqrt{q}\langle 10| - \sqrt{p}\langle 11|)] \\ &= 2^{-1} \{r_{11} [q|00\rangle \langle 00| + \sqrt{pq}|00\rangle \langle 01| + \sqrt{pq}|01\rangle \langle 00| + p|01\rangle \langle 01|] + \\ &\quad + r_{12} [q|00\rangle \langle 10| - \sqrt{pq}|00\rangle \langle 11| + \sqrt{pq}|01\rangle \langle 10| - p|01\rangle \langle 11|] + \\ &\quad + r_{21} [q|10\rangle \langle 00| + \sqrt{pq}|10\rangle \langle 01| - \sqrt{pq}|11\rangle \langle 00| - p|11\rangle \langle 01|] + \\ &\quad + r_{22} [q|10\rangle \langle 10| - \sqrt{pq}|10\rangle \langle 11| - \sqrt{pq}|11\rangle \langle 10| + p|11\rangle \langle 11|]\}\end{aligned}$$

Na base $|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle$

$$\rho_p = 2^{-1} \begin{bmatrix} r_{11}q & r_{11}\sqrt{pq} & r_{12}q & -r_{12}\sqrt{pq} \\ r_{11}\sqrt{pq} & r_{11}p & r_{12}\sqrt{pq} & -r_{12}p \\ r_{21}q & r_{21}\sqrt{pq} & r_{22}q & -r_{22}\sqrt{pq} \\ -r_{21}\sqrt{pq} & -r_{21}p & -r_{22}\sqrt{pq} & r_{22}p \end{bmatrix}$$

$$\rho_p = 2^{-1} \begin{bmatrix} (1+r_3)q & (1+r_3)\sqrt{pq} & (r_1-ir_2)q & -(r_1-ir_2)\sqrt{pq} \\ (1+r_3)\sqrt{pq} & (1+r_3)p & (r_1-ir_2)\sqrt{pq} & -(r_1-ir_2)p \\ (r_1+ir_2)q & (r_1+ir_2)\sqrt{pq} & (1-r_3)q & -(1-r_3)\sqrt{pq} \\ -(r_1+ir_2)\sqrt{pq} & -(r_1+ir_2)p & -(1-r_3)\sqrt{pq} & (1-r_3)p \end{bmatrix}.$$

O estado do sistema-ambiente no tempo assintótico é

$$\begin{aligned} \rho_{p=1} &= 2^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r_{11} & 0 & -r_{12} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -r_{21} & 0 & r_{22} \end{bmatrix} \\ &= 2^{-1} [(1+r_3)|01\rangle\langle 01| - (r_1-ir_2)|10\rangle\langle 11| - (r_1+ir_2)|11\rangle\langle 01| + (1-r_3)|11\rangle\langle 11|]. \end{aligned}$$

Vamos verificar os cálculos para o estado reduzido ρ_p^S , com os obtidos através da aplicação direta dos operadores de Kraus, tomando a função traço parcial do operador densidade total do sistema ambiente:

$$\begin{aligned} \rho_p^S &= \text{Tr}_E(\rho_p) \\ \rho_p^S &= 2^{-1} \{ r_{11} [q \text{Tr}_E|00\rangle\langle 00| + \sqrt{pq} \text{Tr}_E|00\rangle\langle 01| + \sqrt{pq} \text{Tr}_E|01\rangle\langle 00| + p \text{Tr}_E|01\rangle\langle 01|] + \\ &\quad + r_{12} [q \text{Tr}_E|00\rangle\langle 10| - \sqrt{pq} \text{Tr}_E|00\rangle\langle 11| + \sqrt{pq} \text{Tr}_E|01\rangle\langle 10| - p \text{Tr}_E|01\rangle\langle 11|] + \\ &\quad + r_{21} [q \text{Tr}_E|10\rangle\langle 00| + \sqrt{pq} \text{Tr}_E|10\rangle\langle 01| - \sqrt{pq} \text{Tr}_E|11\rangle\langle 00| - p \text{Tr}_E|11\rangle\langle 01|] + \\ &\quad + r_{22} [q \text{Tr}_E|10\rangle\langle 10| - \sqrt{pq} \text{Tr}_E|10\rangle\langle 11| - \sqrt{pq} \text{Tr}_E|11\rangle\langle 10| + p \text{Tr}_E|11\rangle\langle 11|] \} \\ &= 2^{-1} \{ r_{11} [(1-p) + p] |0\rangle\langle 0| + r_{12} [(1-p) - p] |0\rangle\langle 1| + \\ &\quad + r_{21} [(1-p) - p] |1\rangle\langle 0| + r_{22} [(1-p) + p] |1\rangle\langle 1| \} \end{aligned}$$

Usando A.6, nós temos:

$$\begin{aligned} \rho_p^S &= 2^{-1} [r_{11}|0\rangle\langle 0| + r_{12}(1-2p)|0\rangle\langle 1| + r_{21}(1-2p)|1\rangle\langle 0| + r_{22}|1\rangle\langle 1|] \\ &= 2^{-1} [(1+r_3)|0\rangle\langle 0| + (r_1-ir_2)(1-2p)|0\rangle\langle 1| + (r_1+ir_2)(1-2p)|1\rangle\langle 0| + (1-r_3)|1\rangle\langle 1|] \end{aligned}$$

que é igual a equação D.1. Na forma matricial temos:

$$\rho_p^S = 2^{-1} \begin{bmatrix} 1+r_3 & (r_1-ir_2)(1-2p) \\ (r_1+ir_2)(1-2p) & 1-r_3 \end{bmatrix}.$$

O estado evoluído do ambiente obtido a partir da função traço parcial do operador

densidade total ρ_p em relação ao sistema:

$$\begin{aligned}
\rho_p^E &= \text{Tr}_S(\rho_p) \\
\rho_p^E &= 2^{-1}\{r_{11}[q\text{Tr}_S|00\rangle\langle 00| + \sqrt{pq}\text{Tr}_S|00\rangle\langle 01| + \sqrt{pq}\text{Tr}_S|01\rangle\langle 00| + p\text{Tr}_S|01\rangle\langle 01|] + \\
&\quad + r_{12}[q\text{Tr}_S|00\rangle\langle 10| - \sqrt{pq}\text{Tr}_S|00\rangle\langle 11| + \sqrt{pq}\text{Tr}_S|01\rangle\langle 10| - p\text{Tr}_S|01\rangle\langle 11|] + \\
&\quad + r_{21}[q\text{Tr}_S|10\rangle\langle 00| + \sqrt{pq}\text{Tr}_S|10\rangle\langle 01| - \sqrt{pq}\text{Tr}_S|11\rangle\langle 00| - p\text{Tr}_S|11\rangle\langle 01|] + \\
&\quad + r_{22}[q\text{Tr}_S|10\rangle\langle 10| - \sqrt{pq}\text{Tr}_S|10\rangle\langle 11| - \sqrt{pq}\text{Tr}_S|11\rangle\langle 10| + p\text{Tr}_S|11\rangle\langle 11|]\} \\
&= 2^{-1}\{(r_{11} + r_{22})q|0\rangle\langle 0| + (r_{11} - r_{22})\sqrt{pq}|0\rangle\langle 1| + (r_{11} - r_{22})\sqrt{pq}|1\rangle\langle 0| + \\
&\quad + (r_{11} + r_{22})p|1\rangle\langle 1|\} \\
&= 2^{-1}\{[(1 + r_3) + (1 - r_3)]q|0\rangle\langle 0| + [(1 + r_3) - (1 - r_3)]\sqrt{pq}|0\rangle\langle 1| + \\
&\quad + [(1 + r_3) - (1 - r_3)]\sqrt{pq}|1\rangle\langle 0| + [(1 + r_3) + (1 - r_3)]p|1\rangle\langle 1|\} \\
&= q|0\rangle\langle 0| + r_3\sqrt{pq}|0\rangle\langle 1| + r_3\sqrt{pq}|1\rangle\langle 0| + p|1\rangle\langle 1|.
\end{aligned}$$

Na forma matricial:

$$\rho_p^E = \begin{bmatrix} q & r_3\sqrt{pq} \\ r_3\sqrt{pq} & p \end{bmatrix}.$$

Para $p = 1/2$ temos incerteza máxima se o erro aconteceu ou não,

$$\rho_p^E = 2^{-1}(\sigma_0 + r_3\sigma_1).$$

No tempo assintótico temos:

$$\rho_{p=1}^E = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = |1\rangle\langle 1|.$$

APÊNDICE E – BIT PHASE FLIP

O canal *bit phase flip* é usado para descrever a situação em que o erro *bit flip* e *phase flip* podem acontecer simultaneamente, isto é,

$$\begin{aligned} |0\rangle &\rightarrow +i|1\rangle = e^{i\pi/2}|1\rangle. \\ |1\rangle &\rightarrow -i|0\rangle = e^{i(-\pi/2)}|0\rangle. \end{aligned}$$

Como $\sigma_2 = i\sigma_1\sigma_3$ então

$$\begin{aligned} \sigma_2|0\rangle &= i\sigma_1\sigma_3|0\rangle = i\sigma_1|0\rangle = i|1\rangle \\ \sigma_2|1\rangle &= i\sigma_1\sigma_3|1\rangle = -i\sigma_1|1\rangle = -i|0\rangle, \end{aligned}$$

que correspondem as transformações descritas acima. Assim, podemos usar os seguintes operadores de Kraus para descrever o canal de *bit phase flip*:

$$K_0 = \sqrt{q}\sigma_0, K_1 = \sqrt{p}\sigma_2.$$

O mapa unitário para o canal *bit phase flip* é obtido pela equação A.1, resultando assim no seguinte mapa:

$$\begin{aligned} U_{bpf}|00\rangle &\xrightarrow{BPF} \sqrt{q}|00\rangle + i\sqrt{p}|11\rangle, \\ U_{bpf}|10\rangle &\xrightarrow{BPF} \sqrt{q}|10\rangle - i\sqrt{p}|01\rangle. \end{aligned}$$

E.1 DINÂMICA DO SISTEMA

A dinâmica do sistema segue como nas equações A.2 e A.3. Observamos também que, enquanto $\sum_{j=0}^2 K_j^\dagger K_j = \mathbb{I}$,

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^1 K_j K_j^\dagger &= \begin{bmatrix} \sqrt{q} & 0 \\ 0 & \sqrt{q} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{q} & 0 \\ 0 & \sqrt{q} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -i\sqrt{p} \\ i\sqrt{p} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -i\sqrt{p} \\ i\sqrt{p} & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1-p & 0 \\ 0 & 1-p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p & 0 \\ 0 & p \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \mathbb{I}. \end{aligned}$$

Podemos verificar que,

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^1 K_j \sigma_1 K_j^\dagger &= (1 - 2p)\sigma_1, \\ \sum_{j=0}^1 K_j \sigma_2 K_j^\dagger &= \sigma_2, \\ \sum_{j=0}^1 K_j \sigma_3 K_j^\dagger &= (1 - 2p)\sigma_3.\end{aligned}$$

Então o estado evoluído para esse canal é:

$$\rho_p^S = 2^{-1} (\mathbb{I} + r_1(1 - 2p)\sigma_1 + r_2\sigma_2 + r_3(1 - 2p)\sigma_3) \quad (\text{E.1})$$

E.2 DINÂMICA SISTEMA-AMBIENTE

O estado inicial do sistema ambiente é igual a equação A.5. Então o estado evoluído do sistema-ambiente é:

$$\begin{aligned}\rho_p &= U\rho U^\dagger \\ &= 2^{-1}(r_{11}U|00\rangle\langle 00|U^\dagger + r_{12}U|00\rangle\langle 10|U^\dagger + r_{21}U|10\rangle\langle 00|U^\dagger + r_{22}U|10\rangle\langle 10|U^\dagger) \\ &= 2^{-1}\{r_{11}[(\sqrt{q}|00\rangle + i\sqrt{p}|11\rangle)(\sqrt{q}\langle 00| - i\sqrt{p}\langle 11|)] + \\ &\quad + r_{12}[(\sqrt{q}|00\rangle + i\sqrt{p}|11\rangle)(\sqrt{q}\langle 10| + i\sqrt{p}\langle 01|)] + \\ &\quad + r_{21}[(\sqrt{q}|10\rangle - i\sqrt{p}|01\rangle)(\sqrt{q}\langle 00| - i\sqrt{p}\langle 11|)] + \\ &\quad + r_{22}[(\sqrt{q}|10\rangle - i\sqrt{p}|01\rangle)(\sqrt{q}\langle 10| + i\sqrt{p}\langle 01|)]\} \\ &= 2^{-1}\{r_{11}[q|00\rangle\langle 00| - i\sqrt{pq}|00\rangle\langle 11| + i\sqrt{pq}|11\rangle\langle 00| - i^2p|11\rangle\langle 11|] + \\ &\quad + r_{12}[q|00\rangle\langle 10| + i\sqrt{pq}|00\rangle\langle 01| + i\sqrt{pq}|11\rangle\langle 10| + i^2p|11\rangle\langle 01|] + \\ &\quad + r_{21}[q|10\rangle\langle 00| - i\sqrt{pq}|10\rangle\langle 11| - i\sqrt{pq}|01\rangle\langle 00| + i^2p|01\rangle\langle 11|] + \\ &\quad + r_{22}[q|10\rangle\langle 10| + i\sqrt{pq}|10\rangle\langle 01| - i\sqrt{pq}|01\rangle\langle 10| - i^2p|01\rangle\langle 01|]\}\end{aligned}$$

Na base, $|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle$

$$\rho_p = 2^{-1} \begin{bmatrix} r_{11}q & r_{12}i\sqrt{pq} & r_{12}q & -r_{11}i\sqrt{pq} \\ -r_{21}i\sqrt{pq} & r_{22}p & -r_{22}i\sqrt{pq} & -r_{21}p \\ r_{21}q & r_{22}i\sqrt{pq} & r_{22}q & -r_{21}i\sqrt{pq} \\ r_{11}i\sqrt{pq} & -r_{12}p & r_{12}i\sqrt{pq} & r_{11}p \end{bmatrix}$$

O estado do sistema-ambiente no tempo assintótico é

$$\begin{aligned}\rho_{p=1} &= 2^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r_{22} & 0 & -r_{21} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -r_{12} & 0 & r_{11} \end{bmatrix} \\ &= 2^{-1} [(1 - r_3)|01\rangle\langle 01| - (r_1 - ir_2)|11\rangle\langle 01| - (r_1 + ir_2)|01\rangle\langle 11| + (1 + r_3)|11\rangle\langle 11|].\end{aligned}$$

Vamos verificar os cálculos para o estado reduzido ρ_p^S , com os obtidos através da aplicação direta dos operadores de Kraus, tomando a função traço parcial do operador densidade total do sistema ambiente:

$$\begin{aligned}\rho_p^S &= \text{Tr}_E(\rho_p) \\ &= 2^{-1} \{r_{11} [q\text{Tr}_E|00\rangle\langle 00| - i\sqrt{pq}\text{Tr}_E|00\rangle\langle 11| + i\sqrt{pq}\text{Tr}_E|11\rangle\langle 00| + p\text{Tr}_E|11\rangle\langle 11|] + \\ &\quad + r_{12} [q\text{Tr}_E|00\rangle\langle 10| + i\sqrt{pq}\text{Tr}_E|00\rangle\langle 01| + i\sqrt{pq}\text{Tr}_E|11\rangle\langle 10| - p\text{Tr}_E|11\rangle\langle 01|] + \\ &\quad + r_{21} [q\text{Tr}_E|10\rangle\langle 00| - i\sqrt{pq}\text{Tr}_E|10\rangle\langle 11| - i\sqrt{pq}\text{Tr}_E|01\rangle\langle 00| - p\text{Tr}_E|01\rangle\langle 11|] + \\ &\quad + r_{22} [q\text{Tr}_E|10\rangle\langle 10| + i\sqrt{pq}\text{Tr}_E|10\rangle\langle 01| - i\sqrt{pq}\text{Tr}_E|01\rangle\langle 10| + p\text{Tr}_E|01\rangle\langle 01|]\} \\ &= 2^{-1} \{r_{11}q|0\rangle\langle 0| + r_{11}p|1\rangle\langle 1| + r_{12}q|0\rangle\langle 1| - r_{12}p|1\rangle\langle 0| + r_{21}q|1\rangle\langle 0| - r_{21}p|0\rangle\langle 1| + \\ &\quad + r_{22}q|1\rangle\langle 1| + r_{22}p|0\rangle\langle 0|\} \\ &= 2^{-1} \{[r_{11}q + r_{22}p] |0\rangle\langle 0| + [r_{12}q - r_{21}p] |0\rangle\langle 1| + [-r_{12}p + r_{21}q] |1\rangle\langle 0| + \\ &\quad + [r_{11}p + r_{22}q] |1\rangle\langle 1|\}\end{aligned}$$

Usando A.6, nós temos:

$$\begin{aligned}\rho_p^S &= 2^{-1} \{[(1 + r_3)q + (1 - r_3)p] |0\rangle\langle 0| + [(r_1 - ir_2)q - (r_1 + ir_2)p] |0\rangle\langle 1| + \\ &\quad + [-(r_1 - ir_2)p + (r_1 + ir_2)q] |1\rangle\langle 0| + [(1 + r_3)p + (1 - r_3)q] |1\rangle\langle 1|\} \\ &= 2^{-1} \{(1 + r_3(1 - 2p)) |0\rangle\langle 0| + (r_1(1 - 2p) - ir_2) |0\rangle\langle 1| + \\ &\quad + (r_1(1 - 2p) + ir_2) |1\rangle\langle 0| + (1 - r_3(1 - 2p)) |1\rangle\langle 1|\}\end{aligned}$$

que é igual a equação E.1. Na forma matricial temos:

$$\rho_p^S = 2^{-1} \begin{bmatrix} 1 + r_3(1 - 2p) & r_1(1 - 2p) - ir_2 \\ r_1(1 - 2p) + ir_2 & 1 - r_3(1 - 2p) \end{bmatrix}.$$

O estado evoluído do ambiente obtido a partir da função traço parcial do operador

densidade total ρ_p em relação ao sistema:

$$\begin{aligned}
\rho_p^E &= \text{Tr}_S(\rho_p) \\
&= 2^{-1} \{ r_{11} [q \text{Tr}_S |00\rangle\langle 00| - i\sqrt{pq} \text{Tr}_S |00\rangle\langle 11| + i\sqrt{pq} \text{Tr}_S |11\rangle\langle 00| + p \text{Tr}_S |11\rangle\langle 11|] + \\
&\quad + r_{12} [q \text{Tr}_S |00\rangle\langle 10| + i\sqrt{pq} \text{Tr}_S |00\rangle\langle 01| + i\sqrt{pq} \text{Tr}_S |11\rangle\langle 10| - p \text{Tr}_S |11\rangle\langle 01|] + \\
&\quad + r_{21} [q \text{Tr}_S |10\rangle\langle 00| - i\sqrt{pq} \text{Tr}_S |10\rangle\langle 11| - i\sqrt{pq} \text{Tr}_S |01\rangle\langle 00| - p \text{Tr}_S |01\rangle\langle 11|] + \\
&\quad + r_{22} [q \text{Tr}_S |10\rangle\langle 10| + i\sqrt{pq} \text{Tr}_S |10\rangle\langle 01| - i\sqrt{pq} \text{Tr}_S |01\rangle\langle 10| + p \text{Tr}_S |01\rangle\langle 01|] \} \\
&= 2^{-1} \{ r_{11} q |0\rangle\langle 0| + r_{11} p |1\rangle\langle 1| + r_{12} i\sqrt{pq} |0\rangle\langle 1| + r_{12} i\sqrt{pq} |1\rangle\langle 0| - r_{21} i\sqrt{pq} |0\rangle\langle 1| + \\
&\quad - r_{21} i\sqrt{pq} |1\rangle\langle 0| + r_{22} q |0\rangle\langle 0| + r_{22} p |1\rangle\langle 1| \} \\
&= 2^{-1} \{ [(1 + r_3) q + (1 - r_3) q] |0\rangle\langle 0| + [(1 + r_3) p + (1 - r_3) p] |1\rangle\langle 1| + \\
&\quad + [(r_1 - ir_2) i\sqrt{pq} - (r_1 + ir_2) i\sqrt{pq}] |0\rangle\langle 1| + \\
&\quad + [(r_1 - ir_2) i\sqrt{pq} - (r_1 + ir_2) i\sqrt{pq}] |1\rangle\langle 0| \} \\
&= 2^{-1} \{ (2 - 2p) |0\rangle\langle 0| + (2p) |1\rangle\langle 1| + (2r_2\sqrt{pq}) |0\rangle\langle 1| + (2r_2\sqrt{pq}) |1\rangle\langle 0| \}
\end{aligned}$$

Na forma matricial usando a base padrão:

$$\rho_p^E = \begin{bmatrix} q & r_2\sqrt{pq} \\ r_2\sqrt{pq} & p \end{bmatrix}.$$

No tempo assintótico,

$$\rho_{p=1}^E = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = |1\rangle\langle 1|.$$

APÊNDICE F – DEPOLARIZING

O canal *depolarizing* descreve a situação em que a interação do sistema com o ambiente ocorre de maneira maximamente mista, com probabilidade p ,

$$\rho_p = (1 - p)\rho + p(2^{-1}\sigma_0).$$

Vamos verificar se este mapa é equivalente a

$$\rho'_p = (1 - 3p/4)\rho + (p/4)\sigma_1\rho\sigma_1 + (p/4)\sigma_2\rho\sigma_2 + (p/4)\sigma_3\rho\sigma_3.$$

Escrevendo o operador densidade de um *qubit* na base computacional

$$\rho = \begin{bmatrix} \rho_{00} & \rho_{01} \\ \rho_{10} & \rho_{11} \end{bmatrix} = \rho_{00}|0\rangle\langle 0| + \rho_{01}|0\rangle\langle 1| + \rho_{10}|1\rangle\langle 0| + \rho_{11}|1\rangle\langle 1|$$

nós vemos que

$$\sigma_1\rho\sigma_1 = \rho_{00}|1\rangle\langle 1| + \rho_{01}|1\rangle\langle 0| + \rho_{10}|0\rangle\langle 1| + \rho_{11}|0\rangle\langle 0| = \begin{bmatrix} \rho_{11} & \rho_{10} \\ \rho_{01} & \rho_{00} \end{bmatrix},$$

$$\sigma_2\rho\sigma_2 = \rho_{00}|1\rangle\langle 1| - \rho_{01}|1\rangle\langle 0| - \rho_{10}|0\rangle\langle 1| + \rho_{11}|0\rangle\langle 0| = \begin{bmatrix} \rho_{11} & -\rho_{10} \\ -\rho_{01} & \rho_{00} \end{bmatrix},$$

$$\sigma_3\rho\sigma_3 = \rho_{00}|0\rangle\langle 0| - \rho_{01}|0\rangle\langle 1| - \rho_{10}|1\rangle\langle 0| + \rho_{11}|1\rangle\langle 1| = \begin{bmatrix} \rho_{00} & -\rho_{01} \\ -\rho_{10} & \rho_{11} \end{bmatrix}.$$

Então, como $\text{Tr}(\rho) = \rho_{00} + \rho_{11} = 1$,

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^3 \sigma_j\rho\sigma_j &= \begin{bmatrix} 2\rho_{11} + \rho_{00} & -\rho_{01} \\ -\rho_{10} & 2\rho_{00} + \rho_{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho_{11} + 1 & -\rho_{01} \\ -\rho_{10} & \rho_{00} + 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho_{11} & -\rho_{01} \\ -\rho_{10} & \rho_{00} \end{bmatrix} + \sigma_0 \\ &= \begin{bmatrix} 1 - \rho_{00} & -\rho_{01} \\ -\rho_{10} & 1 - \rho_{11} \end{bmatrix} + \sigma_0 = \begin{bmatrix} -\rho_{00} & -\rho_{01} \\ -\rho_{10} & -\rho_{11} \end{bmatrix} + 2\sigma_0 = -\rho + 2\sigma_0 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\rho'_p &= (1 - 3p/4)\rho + (p/4) \sum_{j=1}^3 \sigma_j \rho \sigma_j \\
&= (1 - 3p/4)\rho + (p/4)(-\rho + 2\sigma_0) \\
&= (1 - 3p/4 - p/4)\rho + (p/2)\sigma_0 \\
&= (1 - p)\rho + p(\sigma_0/2) \\
&= \rho_p.
\end{aligned}$$

Assim, os operadores de Kraus que descrevem o canal *depolarizing* podem ser escritos como:

$$K_0^d = \sqrt{1 - 3p/4}\sigma_0, K_1^d = \sqrt{p/4}\sigma_1, K_2^d = \sqrt{p/4}\sigma_2 \text{ e } K_3^d = \sqrt{p/4}\sigma_3.$$

O mapa unitário para essa transformação é $(U|S_l\rangle \otimes |E_0\rangle = \sum_j (K_j|S_l\rangle) \otimes |E_j\rangle)$:

$$\begin{aligned}
U_d|00\rangle &\xrightarrow{D} \sqrt{1 - 3p/4}|00\rangle + \sqrt{p/4}|11\rangle + i\sqrt{p/4}|12\rangle + \sqrt{p/4}|03\rangle, \\
U_d|10\rangle &\xrightarrow{D} \sqrt{1 - 3p/4}|10\rangle + \sqrt{p/4}|01\rangle - i\sqrt{p/4}|02\rangle - \sqrt{p/4}|13\rangle.
\end{aligned}$$

Vamos definir também $u = p/4$ e $v = 1 - 3u$.

$$\begin{aligned}
U_d|00\rangle &\xrightarrow{D} \sqrt{v}|00\rangle + \sqrt{u}|11\rangle + i\sqrt{u}|12\rangle + \sqrt{u}|03\rangle, \\
U_d|10\rangle &\xrightarrow{D} \sqrt{v}|10\rangle + \sqrt{u}|01\rangle - i\sqrt{u}|02\rangle - \sqrt{u}|13\rangle.
\end{aligned}$$

F.1 DINÂMICA DO SISTEMA

O estado evoluído será

$$\rho_p = (1 - p)\rho + p(2^{-1}\sigma_0).$$

ou

$$\begin{aligned}
\rho_p &= (1 - p) \begin{bmatrix} \rho_{00} & \rho_{01} \\ \rho_{10} & \rho_{11} \end{bmatrix} + (p/2) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} (1 - p)\rho_{00} + p/2 & (1 - p)\rho_{01} \\ (1 - p)\rho_{10} & (1 - p)\rho_{11} + p/2 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

As coerências iniciais, bem como as populações se deterioram rapidamente com p , com o estado assintótico sendo $2^{-1}\sigma_0$.

Vamos considerar o estado inicial do *qubit* como sendo A.2 e o estado evoluído é dado por A.3.

Observamos que, enquanto $\sum_{j=0}^1 K_j^\dagger K_j = \mathbb{I}$,

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^4 K_j K_j^\dagger &= \begin{bmatrix} \sqrt{1-3u} & 0 \\ 0 & \sqrt{1-3u} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{1-3u} & 0 \\ 0 & \sqrt{1-3u} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{u} \\ \sqrt{u} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{u} \\ \sqrt{u} & 0 \end{bmatrix} + \\
&+ \begin{bmatrix} 0 & -i\sqrt{u} \\ i\sqrt{u} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -i\sqrt{u} \\ i\sqrt{u} & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sqrt{u} & 0 \\ 0 & -\sqrt{u} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{u} & 0 \\ 0 & -\sqrt{u} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1-3u & 0 \\ 0 & 1-3u \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u & 0 \\ 0 & u \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u & 0 \\ 0 & u \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u & 0 \\ 0 & u \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1-3p/4+3p/4 & 0 \\ 0 & 1-3p/4+3p/4 \end{bmatrix} \\
&= \mathbb{I}.
\end{aligned}$$

Podemos verificar também que

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^4 K_j \sigma_1 K_j^\dagger &= K_0 \sigma_1 K_0^\dagger + K_1 \sigma_1 K_1^\dagger + K_2 \sigma_1 K_2^\dagger + K_3 \sigma_1 K_3^\dagger, \\
&= \begin{bmatrix} \sqrt{1-3u} & 0 \\ 0 & \sqrt{1-3u} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{1-3u} & 0 \\ 0 & \sqrt{1-3u} \end{bmatrix} \\
&+ \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{u} \\ \sqrt{u} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{u} \\ \sqrt{u} & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -i\sqrt{u} \\ i\sqrt{u} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -i\sqrt{u} \\ i\sqrt{u} & 0 \end{bmatrix} + \\
&+ \begin{bmatrix} \sqrt{u} & 0 \\ 0 & -\sqrt{u} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{u} & 0 \\ 0 & -\sqrt{u} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \sqrt{1-3u} & 0 \\ 0 & \sqrt{1-3u} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{1-3u} \\ \sqrt{1-3u} & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{u} \\ \sqrt{u} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{u} & 0 \\ 0 & \sqrt{u} \end{bmatrix} \\
&+ \begin{bmatrix} 0 & -i\sqrt{u} \\ i\sqrt{u} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i\sqrt{u} & 0 \\ 0 & -i\sqrt{u} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sqrt{u} & 0 \\ 0 & -\sqrt{u} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -\sqrt{u} \\ \sqrt{u} & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 1-3p/4 \\ 1-3p/4 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & p/4 \\ p/4 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -p/4 \\ -p/4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -p/4 \\ -p/4 & 0 \end{bmatrix} \\
&= (1-p) \sigma_1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^4 K_j \sigma_2 K_j^\dagger &= K_0 \sigma_2 K_0^\dagger + K_1 \sigma_2 K_1^\dagger + K_2 \sigma_2 K_2^\dagger + K_3 \sigma_2 K_3^\dagger, \\
&= \begin{bmatrix} \sqrt{1-3u} & 0 \\ 0 & \sqrt{1-3u} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{1-3u} & 0 \\ 0 & \sqrt{1-3u} \end{bmatrix} \\
&\quad + \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{u} \\ \sqrt{u} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{u} \\ \sqrt{u} & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -i\sqrt{u} \\ i\sqrt{u} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -i\sqrt{u} \\ i\sqrt{u} & 0 \end{bmatrix} \\
&\quad + \begin{bmatrix} \sqrt{u} & 0 \\ 0 & -\sqrt{u} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{u} & 0 \\ 0 & -\sqrt{u} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \sqrt{1-3u} & 0 \\ 0 & \sqrt{1-3u} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -i\sqrt{1-3u} \\ i\sqrt{1-3u} & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{u} \\ \sqrt{u} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -i\sqrt{u} & 0 \\ 0 & i\sqrt{u} \end{bmatrix} \\
&\quad + \begin{bmatrix} 0 & -i\sqrt{u} \\ i\sqrt{u} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{u} & 0 \\ 0 & \sqrt{u} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sqrt{u} & 0 \\ 0 & -\sqrt{u} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & i\sqrt{u} \\ i\sqrt{u} & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & -i(1-3p/4) \\ i(1-3p/4) & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & ip/4 \\ -ip/4 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -ip/4 \\ ip/4 & 0 \end{bmatrix} \\
&\quad + \begin{bmatrix} 0 & ip/4 \\ -ip/4 & 0 \end{bmatrix} \\
&= (1-p) \sigma_2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^4 K_j \sigma_3 K_j^\dagger &= K_0 \sigma_3 K_0^\dagger + K_1 \sigma_3 K_1^\dagger + K_2 \sigma_3 K_2^\dagger + K_3 \sigma_3 K_3^\dagger, \\
&= \begin{bmatrix} \sqrt{1-3u} & 0 \\ 0 & \sqrt{1-3u} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{1-3u} & 0 \\ 0 & \sqrt{1-3u} \end{bmatrix} \\
&\quad + \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{u} \\ \sqrt{u} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{u} \\ \sqrt{u} & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -i\sqrt{u} \\ i\sqrt{u} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -i\sqrt{u} \\ i\sqrt{u} & 0 \end{bmatrix} \\
&\quad + \begin{bmatrix} \sqrt{u} & 0 \\ 0 & -\sqrt{u} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{u} & 0 \\ 0 & -\sqrt{u} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^4 K_j \sigma_3 K_j^\dagger &= \begin{bmatrix} \sqrt{1-3u} & 0 \\ 0 & \sqrt{1-3u} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{1-3u} & 0 \\ 0 & -\sqrt{1-3u} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{u} \\ \sqrt{u} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{u} \\ -\sqrt{u} & 0 \end{bmatrix} \\
&+ \begin{bmatrix} 0 & -i\sqrt{u} \\ i\sqrt{u} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -i\sqrt{u} \\ -i\sqrt{u} & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sqrt{u} & 0 \\ 0 & -\sqrt{u} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{u} & 0 \\ 0 & \sqrt{u} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} (1-3u) & 0 \\ 0 & -(1-3u) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -u & 0 \\ 0 & u \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -u & 0 \\ 0 & u \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u & 0 \\ 0 & -u \end{bmatrix} \\
&= (1-p) \sigma_3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^4 K_j \sigma_1 K_j^\dagger &= (1-p) \sigma_1, \\
\sum_{j=0}^4 K_j \sigma_2 K_j^\dagger &= (1-p) \sigma_2, \\
\sum_{j=0}^4 K_j \sigma_3 K_j^\dagger &= (1-p) \sigma_3.
\end{aligned}$$

Então o estado evoluído é

$$\rho_p^S = 2^{-1} (\mathbb{I} + r_1 (1-p) \sigma_1 + r_2 (1-p) \sigma_2 + r_3 (1-p) \sigma_3) \quad (\text{F.1})$$

Para tópicos relacionados com a coerência é sempre útil ter a representação matricial do estado:

$$\begin{aligned}
\rho_p^S &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & r_1(1-p) \\ r_1(1-p) & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -ir_2(1-p) \\ ir_2(1-p) & 0 \end{bmatrix} + \\
&\quad \begin{bmatrix} r_3(1-p) & 0 \\ 0 & -r_3(1-p) \end{bmatrix} \\
\rho_p^S &= 2^{-1} \begin{bmatrix} 1 + r_3q & (r_1 - ir_2)q \\ (r_1 + ir_2)q & 1 - r_3q \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Pode-se ver que, $\rho_{p=1}^S = \mathbb{I}$.

F.2 DINÂMICA DO SISTEMA-AMBIENTE

O estado inicial do sistema ambiente é igual a equação A.5. Então o estado evoluído do sistema-ambiente é:

$$\begin{aligned}
\rho_p &= U\rho U^\dagger \\
&= 2^{-1} (r_{11}U|00\rangle\langle 00|U^\dagger + r_{12}U|00\rangle\langle 10|U^\dagger + r_{21}U|10\rangle\langle 00|U^\dagger + r_{22}U|10\rangle\langle 10|U^\dagger) \\
&= 2^{-1}\{[r_{11}(\sqrt{v}|00\rangle + \sqrt{u}|11\rangle + i\sqrt{u}|12\rangle + \sqrt{u}|03\rangle) \\
&\quad (\sqrt{v}\langle 00| + \sqrt{u}\langle 11| - i\sqrt{u}\langle 12| + \sqrt{u}\langle 03|)] \\
&\quad + [r_{12}(\sqrt{v}|00\rangle + \sqrt{u}|11\rangle + i\sqrt{u}|12\rangle + \sqrt{u}|03\rangle) \\
&\quad (\sqrt{v}\langle 10| + \sqrt{u}\langle 01| + i\sqrt{u}\langle 02| - \sqrt{u}\langle 13|)] \\
&\quad + [r_{21}(\sqrt{v}|10\rangle + \sqrt{u}|01\rangle - i\sqrt{u}|02\rangle - \sqrt{u}|13\rangle) \\
&\quad (\sqrt{v}\langle 00| + \sqrt{u}\langle 11| - i\sqrt{u}\langle 12| + \sqrt{u}\langle 03|)] \\
&\quad + [r_{22}(\sqrt{v}|10\rangle + \sqrt{u}|01\rangle - i\sqrt{u}|02\rangle - \sqrt{u}|13\rangle) \\
&\quad (\sqrt{v}\langle 10| + \sqrt{u}\langle 01| + i\sqrt{u}\langle 02| - \sqrt{u}\langle 13|)]]\} \\
&= 2^{-1}\{r_{11}[(1-3u)|00\rangle\langle 00| + \sqrt{u(1-3u)}|00\rangle\langle 11| + \\
&\quad -i\sqrt{uv}|00\rangle\langle 12| + \sqrt{uv}|00\rangle\langle 03| + \\
&\quad + \sqrt{uv}|11\rangle\langle 00| + u|11\rangle\langle 11| - iu|11\rangle\langle 12| + u|11\rangle\langle 03| + \\
&\quad + i\sqrt{uv}|12\rangle\langle 00| + iu|12\rangle\langle 11| + u|12\rangle\langle 12| + iu|12\rangle\langle 03| + \\
&\quad + \sqrt{uv}|03\rangle\langle 00| + u|03\rangle\langle 11| - iu|03\rangle\langle 12| + u|03\rangle\langle 03|] \\
&\quad + r_{12}[v|00\rangle\langle 10| + \sqrt{uv}|00\rangle\langle 01| + i\sqrt{uv}|00\rangle\langle 02| - \sqrt{uv}|00\rangle\langle 13| + \\
&\quad + \sqrt{uv}|11\rangle\langle 10| + u|11\rangle\langle 01| + iu|11\rangle\langle 02| - u|11\rangle\langle 13| + \\
&\quad + i\sqrt{uv}|12\rangle\langle 10| + iu|12\rangle\langle 01| - u|12\rangle\langle 02| - iu|12\rangle\langle 13| + \\
&\quad + \sqrt{uv}|03\rangle\langle 10| + u|03\rangle\langle 01| + iu|03\rangle\langle 02| - u|03\rangle\langle 13|] \\
&\quad + r_{21}[v|10\rangle\langle 00| + \sqrt{uv}|10\rangle\langle 11| - i\sqrt{uv}|10\rangle\langle 12| + \sqrt{uv}|10\rangle\langle 03| + \\
&\quad + \sqrt{uv}|01\rangle\langle 00| + u|01\rangle\langle 11| - iu|01\rangle\langle 12| + u|01\rangle\langle 03| + \\
&\quad -i\sqrt{uv}|02\rangle\langle 00| - iu|02\rangle\langle 11| - u|02\rangle\langle 12| - iu|02\rangle\langle 03| + \\
&\quad -\sqrt{uv}|13\rangle\langle 00| - u|13\rangle\langle 11| + iu|13\rangle\langle 12| - u|13\rangle\langle 03|] + \\
&\quad + r_{22}[v|10\rangle\langle 10| + \sqrt{uv}|10\rangle\langle 01| + i\sqrt{uv}|10\rangle\langle 02| - \sqrt{uv}|10\rangle\langle 13| + \\
&\quad + \sqrt{uv}|01\rangle\langle 10| + u|01\rangle\langle 01| + iu|01\rangle\langle 02| - u|01\rangle\langle 13| + \\
&\quad -i\sqrt{uv}|02\rangle\langle 10| - iu|02\rangle\langle 01| + u|02\rangle\langle 02| + iu|02\rangle\langle 13| + \\
&\quad -\sqrt{uv}|13\rangle\langle 10| - u|13\rangle\langle 01| - iu|13\rangle\langle 02| + u|13\rangle\langle 13|]\}
\end{aligned}$$

O estado do sistema-ambiente no tempo assintótico é

$$\rho_{p=1} = 8^{-1} \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{12}i & r_{11} & r_{12} & r_{11} & -r_{11}i & -r_{12} \\ r_{21} & r_{22} & r_{22}i & r_{21} & r_{22} & r_{21} & -r_{21}i & -r_{22} \\ -r_{21}i & -r_{22}i & r_{22} & -r_{21}i & -r_{22}i & -r_{21}i & -r_{21} & r_{22}i \\ r_{11} & r_{12} & r_{12}i & r_{11} & r_{12} & r_{11} & -r_{11}i & -r_{12} \\ r_{21} & r_{22} & r_{22}i & r_{21} & r_{22} & r_{21} & -r_{21}i & -r_{22} \\ r_{11} & r_{12} & r_{12}i & r_{11} & r_{12} & r_{11} & -r_{11}i & -r_{12} \\ r_{11}i & r_{12}i & -r_{12} & r_{11}i & r_{12}i & r_{11}i & r_{11} & -r_{12}i \\ -r_{21} & -r_{22} & -r_{22}i & -r_{21} & -r_{22} & -r_{21} & r_{21}i & r_{22} \end{bmatrix}$$

Vamos verificar os cálculos para o estado reduzido ρ_p^S , com os obtidos através da aplicação direta dos operadores de Kraus, tomando a função traço parcial do operador densidade total do sistema ambiente:

$$\begin{aligned} \rho_p^S &= \text{Tr}_E(\rho_p) \\ &= 2^{-1} \{ r_{11} [v \text{Tr}_E |00\rangle\langle 00| + \sqrt{uv} \text{Tr}_E |00\rangle\langle 11| - i\sqrt{uv} \text{Tr}_E |00\rangle\langle 12| + \sqrt{uv} \text{Tr}_E |00\rangle\langle 03| + \\ &\quad + \sqrt{uv} \text{Tr}_E |11\rangle\langle 00| + u \text{Tr}_E |11\rangle\langle 11| - iu \text{Tr}_E |11\rangle\langle 12| + u \text{Tr}_E |11\rangle\langle 03| + \\ &\quad + i\sqrt{uv} \text{Tr}_E |12\rangle\langle 00| + iu \text{Tr}_E |12\rangle\langle 11| + u \text{Tr}_E |12\rangle\langle 12| + iu \text{Tr}_E |12\rangle\langle 03| + \\ &\quad + \sqrt{uv} \text{Tr}_E |03\rangle\langle 00| + u \text{Tr}_E |03\rangle\langle 11| - iu \text{Tr}_E |03\rangle\langle 12| + u \text{Tr}_E |03\rangle\langle 03|] \\ &\quad + r_{12} [v \text{Tr}_E |00\rangle\langle 10| + \sqrt{uv} \text{Tr}_E |00\rangle\langle 01| + i\sqrt{uv} \text{Tr}_E |00\rangle\langle 02| - \sqrt{uv} \text{Tr}_E |00\rangle\langle 13| + \\ &\quad + \sqrt{uv} \text{Tr}_E |11\rangle\langle 10| + u \text{Tr}_E |11\rangle\langle 01| + iu \text{Tr}_E |11\rangle\langle 02| - u \text{Tr}_E |11\rangle\langle 13| + \\ &\quad + i\sqrt{uv} \text{Tr}_E |12\rangle\langle 10| + iu \text{Tr}_E |12\rangle\langle 01| - u \text{Tr}_E |12\rangle\langle 02| - iu \text{Tr}_E |12\rangle\langle 13| + \\ &\quad + \sqrt{uv} \text{Tr}_E |03\rangle\langle 10| + u \text{Tr}_E |03\rangle\langle 01| + iu \text{Tr}_E |03\rangle\langle 02| - u \text{Tr}_E |03\rangle\langle 13|] \\ &\quad + r_{21} [v \text{Tr}_E |10\rangle\langle 00| + \sqrt{uv} \text{Tr}_E |10\rangle\langle 11| - i\sqrt{uv} \text{Tr}_E |10\rangle\langle 12| + \sqrt{uv} \text{Tr}_E |10\rangle\langle 03| + \\ &\quad + \sqrt{uv} \text{Tr}_E |01\rangle\langle 00| + u \text{Tr}_E |01\rangle\langle 11| - iu \text{Tr}_E |01\rangle\langle 12| + u \text{Tr}_E |01\rangle\langle 03| + \\ &\quad - i\sqrt{uv} \text{Tr}_E |02\rangle\langle 00| - iu \text{Tr}_E |02\rangle\langle 11| - u \text{Tr}_E |02\rangle\langle 12| - iu \text{Tr}_E |02\rangle\langle 03| + \\ &\quad - \sqrt{uv} \text{Tr}_E |13\rangle\langle 00| - u \text{Tr}_E |13\rangle\langle 11| + iu \text{Tr}_E |13\rangle\langle 12| - u \text{Tr}_E |13\rangle\langle 03|] + \\ &\quad + r_{22} [v \text{Tr}_E |10\rangle\langle 10| + \sqrt{uv} \text{Tr}_E |10\rangle\langle 01| + i\sqrt{uv} \text{Tr}_E |10\rangle\langle 02| - \sqrt{uv} \text{Tr}_E |10\rangle\langle 13| + \\ &\quad + \sqrt{uv} \text{Tr}_E |01\rangle\langle 10| + u \text{Tr}_E |01\rangle\langle 01| + iu \text{Tr}_E |01\rangle\langle 02| - u \text{Tr}_E |01\rangle\langle 13| + \\ &\quad - i\sqrt{uv} \text{Tr}_E |02\rangle\langle 10| - iu \text{Tr}_E |02\rangle\langle 01| + u \text{Tr}_E |02\rangle\langle 02| + iu \text{Tr}_E |02\rangle\langle 13| + \\ &\quad - \sqrt{uv} \text{Tr}_E |13\rangle\langle 10| - u \text{Tr}_E |13\rangle\langle 01| - iu \text{Tr}_E |13\rangle\langle 02| + u \text{Tr}_E |13\rangle\langle 13|] \} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\rho_p^S &= \text{Tr}_E(\rho_p) \\
&= 2^{-1}\{r_{11}[v|0\rangle\langle 0| + u|1\rangle\langle 1| + u|1\rangle\langle 1| + u|0\rangle\langle 0|] + \\
&\quad + r_{12}[v|0\rangle\langle 1| + u|1\rangle\langle 0| - u|1\rangle\langle 0| - u|0\rangle\langle 1|] + \\
&\quad + r_{21}[v|1\rangle\langle 0| + u|0\rangle\langle 1| - u|0\rangle\langle 1| - u|1\rangle\langle 0|] + \\
&\quad + r_{22}[v|1\rangle\langle 1| + u|0\rangle\langle 0| + u|0\rangle\langle 0| + u|1\rangle\langle 1|]\} \\
&= 2^{-1}\{[r_{11}v + r_{11}u + r_{22}u + r_{22}u] |0\rangle\langle 0| + \\
&\quad + [r_{11}u + r_{11}u + r_{22}v + r_{22}u] |1\rangle\langle 1| + \\
&\quad + [r_{12}v - r_{12}u + r_{21}u - r_{21}u] |0\rangle\langle 1| + \\
&\quad + [r_{12}p/4 - r_{12}u + r_{21}v - r_{21}u] |1\rangle\langle 0|\}
\end{aligned}$$

Usando A.6 temos:

$$\begin{aligned}
\rho_p^S &= 2^{-1}\{[(1 + r_3)v + (1 + r_3)u + 2(1 - r_3)u] |0\rangle\langle 0| + + \\
&\quad + [2(1 + r_3)u + (1 - r_3)v + (1 - r_3)u] |1\rangle\langle 1| + \\
&\quad + [(r_1 - ir_2)v - (r_1 - ir_2)u] |0\rangle\langle 1| + \\
&\quad + [(r_1 + ir_2)v - (r_1 + ir_2)u] |1\rangle\langle 0|\} \\
&= 2^{-1}\{(1 + r_3q)|0\rangle\langle 0| + (1 - r_3q)|1\rangle\langle 1| + (r_1 - ir_2)q|0\rangle\langle 1| + (r_1 + ir_2)q|1\rangle\langle 0|\}
\end{aligned}$$

que é igual a equação F.1 e representada na forma matricial:

$$\rho_p^S = 2^{-1} \begin{bmatrix} 1 + r_3q & (r_1 - ir_2)q \\ (r_1 + ir_2)q & 1 - r_3q \end{bmatrix}.$$

O estado evoluído do ambiente obtido a partir da função traço \mathcal{H}_S :

$$\begin{aligned}
\rho_p^E &= \text{Tr}_S(\rho_p) \\
&= 2^{-1}\{r_{11}[v\text{Tr}_S|00\rangle\langle 00| + \sqrt{uv}\text{Tr}_S|00\rangle\langle 11| - i\sqrt{uv}\text{Tr}_S|00\rangle\langle 12| + \sqrt{uv}\text{Tr}_S|00\rangle\langle 03| + \\
&\quad + \sqrt{uv}\text{Tr}_S|11\rangle\langle 00| + u\text{Tr}_S|11\rangle\langle 11| - iu\text{Tr}_S|11\rangle\langle 12| + u\text{Tr}_S|11\rangle\langle 03| + \\
&\quad + i\sqrt{uv}\text{Tr}_S|12\rangle\langle 00| + iu\text{Tr}_S|12\rangle\langle 11| + u\text{Tr}_S|12\rangle\langle 12| + iu\text{Tr}_S|12\rangle\langle 03| + \\
&\quad + \sqrt{uv}\text{Tr}_S|03\rangle\langle 00| + u\text{Tr}_S|03\rangle\langle 11| - iu\text{Tr}_S|03\rangle\langle 12| + u\text{Tr}_S|03\rangle\langle 03|] \\
&+ r_{12}[v\text{Tr}_S|00\rangle\langle 10| + \sqrt{uv}\text{Tr}_S|00\rangle\langle 01| + i\sqrt{uv}\text{Tr}_S|00\rangle\langle 02| - \sqrt{uv}\text{Tr}_S|00\rangle\langle 13| + \\
&\quad + \sqrt{uv}\text{Tr}_S|11\rangle\langle 10| + u\text{Tr}_S|11\rangle\langle 01| + iu\text{Tr}_S|11\rangle\langle 02| - u\text{Tr}_S|11\rangle\langle 13| + \\
&\quad + i\sqrt{uv}\text{Tr}_S|12\rangle\langle 10| + iu\text{Tr}_S|12\rangle\langle 01| - u\text{Tr}_S|12\rangle\langle 02| - iu\text{Tr}_S|12\rangle\langle 13| + \\
&\quad + \sqrt{uv}\text{Tr}_S|03\rangle\langle 10| + u\text{Tr}_S|03\rangle\langle 01| + iu\text{Tr}_S|03\rangle\langle 02| - u\text{Tr}_S|03\rangle\langle 13|] \\
&+ r_{21}[v\text{Tr}_S|10\rangle\langle 00| + \sqrt{uv}\text{Tr}_S|10\rangle\langle 11| - i\sqrt{uv}\text{Tr}_S|10\rangle\langle 12| + \sqrt{uv}\text{Tr}_S|10\rangle\langle 03| + \\
&\quad + \sqrt{uv}\text{Tr}_S|01\rangle\langle 00| + u\text{Tr}_S|01\rangle\langle 11| - iu\text{Tr}_S|01\rangle\langle 12| + u\text{Tr}_S|01\rangle\langle 03| + \\
&\quad - i\sqrt{uv}\text{Tr}_S|02\rangle\langle 00| - iu\text{Tr}_S|02\rangle\langle 11| - u\text{Tr}_S|02\rangle\langle 12| - iu\text{Tr}_S|02\rangle\langle 03| + \\
&\quad - \sqrt{uv}\text{Tr}_S|13\rangle\langle 00| - u\text{Tr}_S|13\rangle\langle 11| + iu\text{Tr}_S|13\rangle\langle 12| - u\text{Tr}_S|13\rangle\langle 03|] + \\
&+ r_{22}[v\text{Tr}_S|10\rangle\langle 10| + \sqrt{uv}\text{Tr}_S|10\rangle\langle 01| + i\sqrt{uv}\text{Tr}_S|10\rangle\langle 02| - \sqrt{uv}\text{Tr}_S|10\rangle\langle 13| + \\
&\quad + \sqrt{uv}\text{Tr}_S|01\rangle\langle 10| + u\text{Tr}_S|01\rangle\langle 01| + iu\text{Tr}_S|01\rangle\langle 02| - u\text{Tr}_S|01\rangle\langle 13| + \\
&\quad - i\sqrt{uv}\text{Tr}_S|02\rangle\langle 10| - iu\text{Tr}_S|02\rangle\langle 01| + u\text{Tr}_S|02\rangle\langle 02| + iu\text{Tr}_S|02\rangle\langle 13| + \\
&\quad - \sqrt{uv}\text{Tr}_S|13\rangle\langle 10| - u\text{Tr}_S|13\rangle\langle 01| - iu\text{Tr}_S|13\rangle\langle 02| + u\text{Tr}_S|13\rangle\langle 13|] \} \\
&= 2^{-1}\{r_{11}[v|0\rangle\langle 0| + \sqrt{uv}|0\rangle\langle 3| + u|1\rangle\langle 1| - iu|1\rangle\langle 2| + \\
&\quad + iu|2\rangle\langle 1| + u|2\rangle\langle 2| + \sqrt{uv}|3\rangle\langle 0| + u|3\rangle\langle 3|] \\
&+ r_{12}[\sqrt{uv}|0\rangle\langle 1| + i\sqrt{uv}|0\rangle\langle 2| + \sqrt{uv}|1\rangle\langle 0| - u|1\rangle\langle 3| + \\
&\quad + i\sqrt{uv}|2\rangle\langle 0| - iu|2\rangle\langle 3| + u|3\rangle\langle 1| + iu|3\rangle\langle 2|] \\
&+ r_{21}[\sqrt{uv}|0\rangle\langle 1| - i\sqrt{uv}|0\rangle\langle 2| + \sqrt{uv}|1\rangle\langle 0| + u|1\rangle\langle 3| + \\
&\quad - i\sqrt{uv}|2\rangle\langle 0| - iu|2\rangle\langle 3| - u|3\rangle\langle 1| + iu|3\rangle\langle 2|] + \\
&+ r_{22}[v|0\rangle\langle 0| - \sqrt{uv}|0\rangle\langle 3| + u|1\rangle\langle 1| + iu|1\rangle\langle 2| + \\
&\quad - iu|2\rangle\langle 1| + u|2\rangle\langle 2| - \sqrt{uv}|3\rangle\langle 0| + u|3\rangle\langle 3|] \}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\rho_p^E &= 2^{-1} \{ [r_{11}v + r_{22}v] |0\rangle\langle 0| + [r_{11}\sqrt{uv} - r_{22}\sqrt{uv}] |0\rangle\langle 3| + \\
&\quad + [r_{11}u + r_{22}u] |1\rangle\langle 1| + [-r_{11}iu + r_{22}iu] |1\rangle\langle 2| + \\
&\quad + [r_{11}iu - r_{22}iu] |2\rangle\langle 1| + [r_{11}u + r_{22}u] |2\rangle\langle 2| + \\
&\quad + [r_{11}\sqrt{uv} - r_{22}\sqrt{uv}] |3\rangle\langle 0| + [r_{11}u + r_{22}u] |3\rangle\langle 3| + \\
&\quad + [r_{12}\sqrt{uv} + r_{21}\sqrt{uv}] |0\rangle\langle 1| + [r_{12}i\sqrt{uv} - r_{21}i\sqrt{uv}] |0\rangle\langle 2| + \\
&\quad + [r_{12}\sqrt{uv} + r_{21}\sqrt{uv}] |1\rangle\langle 0| + [-r_{12}u + r_{21}u] |1\rangle\langle 3| + \\
&\quad + [r_{12}i\sqrt{uv} - r_{21}i\sqrt{uv}] |2\rangle\langle 0| + [-r_{12}iu - r_{21}iu] |2\rangle\langle 3| + \\
&\quad + [r_{12}u - r_{21}u] |3\rangle\langle 1| + [r_{12}iu + r_{21}iu] |3\rangle\langle 2| \} \\
&= 2^{-1} \{ [(1+r_3)v + (1-r_3)v] |0\rangle\langle 0| + [(1+r_3)\sqrt{uv} - (1-r_3)\sqrt{uv}] |0\rangle\langle 3| + \\
&\quad + [(1+r_3)u + (1-r_3)u] |1\rangle\langle 1| + [-(1+r_3)iu + (1-r_3)iu] |1\rangle\langle 2| + \\
&\quad + [(1+r_3)iu - (1-r_3)iu] |2\rangle\langle 1| + [(1+r_3)u + (1-r_3)u] |2\rangle\langle 2| + \\
&\quad + [(1+r_3)\sqrt{uv} - (1-r_3)\sqrt{uv}] |3\rangle\langle 0| + [(1+r_3)u + (1-r_3)u] |3\rangle\langle 3| + \\
&\quad + [(r_1 - ir_2)\sqrt{uv} + (r_1 + ir_2)\sqrt{uv}] |0\rangle\langle 1| + \\
&\quad + [(r_1 - ir_2)i\sqrt{uv} - (r_1 + ir_2)i\sqrt{uv}] |0\rangle\langle 2| + \\
&\quad + [(r_1 - ir_2)\sqrt{uv} + (r_1 + ir_2)\sqrt{uv}] |1\rangle\langle 0| + \\
&\quad + [-(r_1 - ir_2)u + (r_1 + ir_2)u] |1\rangle\langle 3| \\
&\quad + [(r_1 - ir_2)i\sqrt{uv} - (r_1 + ir_2)i\sqrt{uv}] |2\rangle\langle 0| + \\
&\quad + [-(r_1 - ir_2)iu - (r_1 + ir_2)iu] |2\rangle\langle 3| + \\
&\quad + [(r_1 - ir_2)u - (r_1 + ir_2)u] |3\rangle\langle 1| + [(r_1 - ir_2)iu + (r_1 + ir_2)iu] |3\rangle\langle 2| \} \\
&= 2^{-1} \{ [2 - 3p/2] |0\rangle\langle 0| + [2r_3\sqrt{uv}] |0\rangle\langle 3| + [p/2] |1\rangle\langle 1| + \\
&\quad + [-r_3ip/2] |1\rangle\langle 2| + [r_3ip/2] |2\rangle\langle 1| + [p/2] |2\rangle\langle 2| + \\
&\quad + [2r_3\sqrt{uv}] |3\rangle\langle 0| + [p/2] |3\rangle\langle 3| + \\
&\quad + [2r_1\sqrt{uv}] |0\rangle\langle 1| + [2r_2\sqrt{uv}] |0\rangle\langle 2| + \\
&\quad + [2r_1\sqrt{uv}] |1\rangle\langle 0| + [ir_2p/2] |1\rangle\langle 3| + \\
&\quad + [2r_2\sqrt{uv}] |2\rangle\langle 0| + [-r_1ip/2] |2\rangle\langle 3| + \\
&\quad + [-ir_2p/2] |3\rangle\langle 1| + [r_1ip/2] |3\rangle\langle 2| \}
\end{aligned}$$

Na forma matricial:

$$\rho_p^E = \begin{bmatrix} v & r_1\sqrt{uv} & r_2\sqrt{uv} & r_3\sqrt{uv} \\ r_1\sqrt{uv} & u & -ir_3u & ir_2u \\ r_2\sqrt{uv} & ir_3u & u & -ir_1u \\ r_3\sqrt{uv} & -ir_2u & ir_1u & u \end{bmatrix}.$$

No tempo assintótico,

$$\rho_{p=1}^E = 4^{-1} \begin{bmatrix} 1 & r_1 & r_2 & r_3 \\ r_1 & 1 & -ir_3 & ir_2 \\ r_2 & ir_3 & 1 & -ir_1 \\ r_3 & -ir_2 & ir_1 & 1 \end{bmatrix}.$$