

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA MARIA
CENTRO DE CIÊNCIAS RURAIS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM GEOMÁTICA**

**ANÁLISE DA QUALIDADE DE
RESULTADOS GPS
EM PROGRAMAS COMERCIAIS**

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

ALARICO VALLS DE MORAES

**Santa Maria, RS, Brasil
2005**

ANÁLISE DA QUALIDADE DE RESULTADOS GPS EM PROGRAMAS COMERCIAIS

por

Alarico Valls de Moraes

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado do Programa de Pós-Graduação em Geomática, Área de Concentração em Tecnologia da Geoinformação, da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM, RS), como requisito parcial para a obtenção do grau de **Mestre em Geomática**

Orientador: Prof. Carlito Vieira de Moraes

Santa Maria, RS, Brasil
2005

Moraes, Alarico Valls

M827a

Análise da qualidade de resultados GPS em programas comerciais / por Alarico Valls de Moraes; orientador Carlito Vieira de Moraes. – Santa Maria, 2005
122 f.: il.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal de Santa Maria, Centro de Ciências Rurais, Programa de Pós-Graduação em Geomática, RS, 2005.

1. Geomática 2. Parâmetros estatísticos estimados 3. Precisão 4. Acurácia 5. Programas comerciais 6. Pós-processamento I., Moraes, Carlito Vieira de, orient. II. Título

CDU: 528.8/.9

Ficha catalográfica elaborada por
Luiz Marchiotti Fernandes – CRB 10/1160
Biblioteca Setorial do Centro de Ciências Rurais/UFSM

**Universidade Federal de Santa Maria
Centro de Ciências Rurais
Programa de Pós-Graduação em Geomática**

A comissão examinadora, abaixo assinada,
aprova a Dissertação de Mestrado

**ANÁLISE DA QUALIDADE
DE RESULTADOS GPS EM PROGRAMAS COMERCIAIS**

elaborada por
ALARICO VALLS DE MORAES

Como requisito parcial para a obtenção do grau de
Mestre em Geomática

COMISSÃO EXAMINADORA:

Prof. Dr. Carlito Vieira de Moraes
(Presidente/Orientador)

Prof. Dr. Quintino Dalmolin – Membro (UFPR)

Prof. Dr. Julio Cesar Farret – Co-orientador (UFSM)

Prof. Dr. Eno Darci Saatkamp - Membro– Co-orientador (UFSM)

Santa Maria, 24 de novembro de 2005.

RESUMO

Dissertação de Mestrado
Programa de Pós-Graduação em Geomática
Universidade Federal de Santa Maria, RS, Brasil

ANÁLISE DA QUALIDADE DE RESULTADOS GPS EM PROGRAMAS COMERCIAIS

Autor: Alarico Valls de Moraes
Orientador: Carlito Vieira de Moraes
Co-orientador: Julio Cesar Farret

Local e Data da Defesa: Santa Maria, 24 de novembro de 2005.

A comunidade técnico-científica brasileira que se dedica à mensuração está vivendo uma nova época com a normatização de parâmetros técnicos para levantamentos geodésicos destinados ao Cadastro Nacional de Imóveis Rurais de acordo com a Lei 10.267/2001. O objetivo desta dissertação é analisar por meio de parâmetros estatísticos estimados a qualidade dos dados oriundos de levantamentos com receptores GPS e pós-processados em programas computacionais presentes no mercado. Dentre os parâmetros estatísticos analisados, o mais importante é o desvio padrão das coordenadas, porque ele é a medida da precisão e compõe a medida da acurácia que exprimem a qualidade dos resultados. Os resultados apresentados pelos programas comerciais são comparados com dados oficiais da Rede Estadual de Marcos GPS que são informações fornecidas pelo Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE). Este trabalho também contribui para a relação usuário-fabricante aproximando-os, entre si, de maneira que o primeiro ao manipular os programas obtenha maior disponibilidade de informações quanto à metodologia aplicada para obter os resultados do processamento. Por meio dos conceitos fundamentais da Estatística univariada e multivariada, este trabalho fornece uma análise de como os programas comerciais estão processando os dados GPS e informa, também, quais os dados mínimos necessários que os programas computacionais devem fornecer ao usuário para que este obtenha os parâmetros estatísticos estimados indicadores da qualidade para cada levantamento geodésico.

Palavras-chave: parâmetros estatísticos estimados, precisão, acurácia, programas comerciais, pós-processamento.

ABSTRACT

Master Dissertation
Curso de Pós-Graduação em Geomática
Universidade Federal de Santa Maria, RS, Brasil

ANÁLISE DA QUALIDADE DE RESULTADOS GPS EM PROGRAMAS COMERCIAIS

(QUALITY ANALISYS OF GPS RESULTS IN THE COMMERCIAL SOFTWARE)

Author: Alarico Valls de Moraes
Adviser: Carlito Vieira de Moraes
Co-adviser: Julio Cesar Farret

Place and Date of Examination: Santa Maria, 24 of November, 2005

The Brazilian technician-scientific community that dedicates to the surveying is living a new time with the normatization of the technical parameters for reference of the geodesic surveys to *Cadastro Nacional de Imóveis Rurais* according to Brazilian Law 10.267/2001. The objective of this work is to analyse by means of the statistical parameters the quality of the survey data with GPS-receivers and post-processed in the softwares present in the market. Amongst the analysed parameters, the most important is the standard deviation of the coordinates, because it is the measure for the precision and it is an composition element of the accuracy, that indicate the result quality. The results presented by commercial softwares are compared with the official data of the State Landmark GPS network that are information supplied for the *Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística* (IBGE). Also this work contribute for the relation user-manufacturer approaching them thus first when manipulating the programs get greater information availability how much to the applied methodology to give the processing results. By means of the fundamental univariate and multivariate Statistic concepts, this work give an analysis of as the commercial softwares are processing GPS data and also inform which the necessary minimum data that the softwares must supply to the user in order to give the estimated statistical parameters that are an indication the quality of each geodetic survey.

Keywords: estimated statistical parameters, precision, accuracy, commercial softwares, post-processing.

LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1 – Média, desvio padrão, correção e valor verdadeiro de uma grandeza de medição	29
Figura 2.2 – Conceitos da teoria clássica dos erros.....	30
Figura 2.3 – Intervalo de confiança para a média populacional.....	34
Figura 2.4 – Intervalo de confiança para a variância populacional.....	35
Figura 3.1 – Função densidade de probabilidade normal bivariada.....	41
Figura 3.2 – Região de probabilidade igual a 0,50 da distribuição qui-quadrado.....	42
Figura 3.3 – Elipse dos erros de um ponto.....	45
Figura 4.1 – Componentes do erro posicional apresentados pelo programa GPS Pathfinder Office 3.0.....	53

LISTA DE FOTOGRAFIAS

Fotografia 4.1 – Marco Cacequi (código 92022).....	58
Fotografia 4.2 – Marco São Vicente do Sul (código 91945).....	59

LISTA DE MAPAS

Mapa 4.1 – Marcos Uruguaiana, Alegrete, Rosário do Sul, Cacequi e São Vicente do Sul.....	57
--	----

LISTA DE PLANILHAS

Planilha 5.1	– Marco Uruguaiana: dados Pro XR processados com dados da Estação SC, estimativas pontuais, estimativas de acurácia e estimativa do erro linear absoluto.....	61
Planilha 5.2	– Marco Alegre: dados Pro XR processados com dados da Estação SC, estimativas pontuais, estimativas de acurácia e estimativa do erro linear absoluto.....	62
Planilha 5.3	– Marco Rosário do Sul: dados Pro XR processados com dados da Estação SC, estimativas pontuais, estimativas de acurácia e estimativa do erro linear absoluto.....	63
Planilha 5.4	– Marco Cacequi: dados Pro XR processados com dados da Estação SC, estimativas pontuais, estimativas de acurácia e estimativa do erro linear absoluto.....	64
Planilha 5.5	– Marco São Vicente do Sul: dados Pro XR processados com dados da Estação SC, estimativas pontuais, estimativas de acurácia e estimativa do erro linear absoluto.....	65
Planilha 5.6	– Marco Uruguaiana: dados GS20 processados com dados da Estação Santa Maria da RBMC, estimativas pontuais, estimativas de acurácia e estimativa do erro linear absoluto...	68
Planilha 5.7	– Marco Alegre: dados GS20 processados com dados da Estação Santa Maria da RBMC, estimativas pontuais, estimativas de acurácia e estimativa do erro linear absoluto...	69
Planilha 5.8	– Marco Rosário do Sul: dados GS20 processados com dados da Estação Santa Maria da RBMC, estimativas pontuais, estimativas de acurácia e estimativa do erro linear absoluto...	70

Planilha 5.9	– Marco Cacequi: dados GS20 processados com dados da Estação Santa Maria da RBMC, estimativas pontuais, estimativas de acurácia e estimativa do erro linear absoluto...	71
Planilha 5.10	– Marco São Vicente do Sul: dados GS20 processados com dados da Estação Santa Maria da RBMC, estimativas pontuais, estimativas de acurácia e estimativa do erro linear absoluto.....	72

LISTA DE QUADROS

Quadro 4.1	– Coordenadas oficiais dos marcos referenciados no Sistema de Referência SAD-69.....	57
Quadro 5.1	– Precisão, acurácia e erro linear absoluto dos dados Pro XR	75
Quadro 5.2	– Precisão, acurácia e erro linear absoluto dos dados GS20	75
Quadro 5.3	– Marco Uruguaiana: intervalo de confiança para média e desvio padrão dos dados Pro XR processados com dados da Estação SC.....	76
Quadro 5.4	– Marco Alegrete: intervalo de confiança para média e desvio padrão dos dados Pro XR processados com dados da Estação SC.....	77
Quadro 5.5	– Marco Rosário do Sul: intervalo de confiança para média e desvio padrão dos dados Pro XR processados com dados da Estação SC.....	78
Quadro 5.6	– Marco Cacequi: intervalo de confiança para média e desvio padrão dos dados Pro XR processados com dados da Estação SC.....	79
Quadro 5.7	– Marco São Vicente do Sul: intervalo de confiança para média e desvio padrão dos dados Pro XR processados com dados da Estação SC.....	
Quadro 5.8	– Marco Uruguaiana: intervalo de confiança para média e desvio padrão dos dados GS20 processados com dados da Santa Maria da RBMC.....	84
Quadro 5.9	– Marco Alegrete: intervalo de confiança para média e desvio padrão dos dados GS20 processados com dados da Santa Maria da RBMC.....	85

Quadro 5.10	– Marco Rosário do Sul: intervalo de confiança para média e desvio padrão dos dados GS20 processados com dados da Santa Maria da RBMC.....	86
Quadro 5.11	– Marco Cacequi: intervalo de confiança para média e desvio padrão dos dados GS20 processados com dados da Santa Maria da RBMC.....	87
Quadro 5.12	– Marco São Vicente do Sul: intervalo de confiança para média e desvio padrão dos dados GS20 processados com dados da Santa Maria da RBMC.....	88
Quadro 5.13	– Distâncias quadráticas para os dados obtidos com o receptor GPS Pathfinder Pro XR e processados com dados da Estação SC.....	93
Quadro 5.14	– Distâncias quadráticas para os dados obtidos com o receptor GPS Leica GS20 e processados com dados da Estação Santa Maria da RBMC.....	95

LISTA DE HISTOGRAMAS

Histograma 5.1	– Marco Uruguaiana: valores da coordenada Este obtidos dos dados Pro XR processados com dados da Estação SC.....	96
Histograma 5.2	– Marco Uruguaiana: valores da coordenada Norte obtidos dos dados Pro XR processados com dados da Estação SC.....	96
Histograma 5.3	– Marco Alegre: valores da coordenada Este obtidos dos dados Pro XR processados com dados da Estação SC.....	97
Histograma 5.4	– Marco Alegre: valores da coordenada Norte obtidos dos dados Pro XR processados com dados da Estação SC.....	97
Histograma 5.5	– Marco Rosário do Sul: valores da coordenada Este obtidos dos dados Pro XR processados com dados da Estação SC.....	98
Histograma 5.6	– Marco Rosário do Sul: valores da coordenada Norte obtidos dos dados Pro XR processados com dados da Estação SC.....	98
Histograma 5.7	– Marco Cacequi: valores da coordenada Este obtidos dos dados Pro XR processados com dados da Estação SC.....	99
Histograma 5.8	– Marco Cacequi: valores da coordenada Norte obtidos dos dados Pro XR processados com dados da Estação SC.....	99
Histograma 5.9	– Marco São Vicente do Sul: valores da coordenada Este obtidos dos dados Pro XR processados com dados da Estação SC.....	100

Histograma 5.10	– Marco São Vicente do Sul: valores da coordenada Norte obtidos dos dados Pro XR processados com dados da Estação SC.....	100
Histograma 5.11	– Marco Uruguaiana: valores da coordenada Este obtidos dos dados GS20 processados com dados da Estação Santa Maria da RBMC.....	101
Histograma 5.12	– Marco Uruguaiana: valores da coordenada Norte obtidos dos dados GS20 processados com dados da Estação Santa Maria da RBMC.....	101
Histograma 5.13	– Marco Alegrete: valores da coordenada Este obtidos dos dados GS20 processados com dados da Estação Santa Maria da RBMC.....	102
Histograma 5.14	– Marco Alegrete: valores da coordenada Norte obtidos dos dados GS20 processados com dados da Estação Santa Maria da RBMC.....	102
Histograma 5.15	– Marco Rosário do Sul: valores da coordenada Este obtidos dos dados GS20 processados com dados da Estação Santa Maria da RBM.....	103
Histograma 5.16	– Marco Rosário do Sul: valores da coordenada Norte obtidos dos dados GS20 processados com dados da Estação Santa Maria da RBMC.....	103
Histograma 5.17	– Marco Cacequi: valores da coordenada Este obtidos dos dados GS20 processados com dados da Estação Santa Maria da RBMC.....	104
Histograma 5.18	– Marco Cacequi: valores da coordenada Norte obtidos dos dados GS20 processados com dados da Estação Santa Maria da RBMC.....	104
Histograma 5.19	– Marco São Vicente do Sul: valores da coordenada Este obtidos dos dados GS20 processados com dados da Estação Santa Maria da RBMC.....	105
Histograma 5.20	– Marco São Vicente do Sul: valores da coordenada Norte obtidos dos dados GS20 processados com dados da Estação Santa Maria da RBMC.....	105

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

Estação SC	:	Estação base de monitoramento contínuo Homologada pelo IBGE e de propriedade da empresa Santiago e Cintra
CNIR	:	Cadastro Nacional de Imóveis Rurais
GPS	:	<i>Global Position System</i>
MVC	:	Matriz variância-covariância
PUCRS	:	Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul
RBMC	:	Rede Brasileira de Monitoramento Contínuo
SAD-69	:	<i>South American Datum of 1969</i>
SGB	:	Sistema Geodésico Brasileiro
URCAMP	:	Universidade da Região da Campanha
UTM	:	<i>Universal Transverse Mercator</i>
DOP	:	Diluição da Precisão
DIN	:	Instituto Alemão de Normalização
MMQ	:	Método dos Mínimos Quadrados
GPS3	:	Receptor GPS que tem característica de trabalhar com código C/A e Fase da portadora, conforme classificação do INCRA.
Código P	:	Código preciso e protegido, uso militar.
Código C/A	:	Código (<i>Acesso livre ou acesso fácil</i>)
Código Y	:	Código P criptografado
Portadora L1	:	Link 1- Sinal de banda L oriunda de cada satélite NAVSTAR na frequência 1.575,42 Mhz.
Portadora L2	:	Link 2 – Sinal de banda L oriundo de cada satélite NAVSTAR na frequência 1.227,60 Mhz.
WGS-84	:	<i>World Geodetic System – 84</i> : Sistema geodésico geocêntrico global de 1984, que usa o elipsóide UGGI-72.

LISTA DE SÍMBOLOS

a	: semi-eixo maior da elipse dos erros
b	: semi-eixo menor da elipse dos erros
d^2	: distância quadrática
\det	: determinante
$\det(\mathbf{S})$: determinante da matriz covariância amostral \mathbf{S}
\mathbf{E}	: matriz de vetores próprios da matriz covariância amostral \mathbf{S}
\mathbf{e}_1	: vetor próprio associado ao valor próprio máximo λ_1 da matriz covariância amostral \mathbf{S}
\mathbf{e}_2	: vetor próprio associado ao valor próprio mínimo λ_2 da matriz covariância amostral \mathbf{S}
e_{11}	: cosseno diretor do semi-eixo maior da elipse
\mathbf{m}	: vetor de médias
s_E	: desvio padrão amostral da coordenada Este
s_N	: desvio padrão amostral da coordenada Norte
$t_{1-\alpha/2;v}$: estatística t de Student sob a probabilidade igual a $1 - \frac{\alpha}{2}$ e número de graus de liberdade igual a $v = n - 1$
tr	: traço
$\text{tr}(\mathbf{S})$: traço da matriz covariância amostral \mathbf{S}
rms	: <i>root mean square deviation</i>
s_{R_E}	: acurácia para a coordenada Este do sistema de projeção UTM
s_{R_N}	: acurácia para a coordenada Norte do sistema de projeção UTM
\bar{x}	: média aritmética

\tilde{x}	: média ponderada das observações
\mathbf{x}	: vetor aleatório multivariado
$\bar{\mathbf{x}}$: vetor de médias
E	: coordenada Este do Sistema de Projeção <i>Universal Transverse Mercator</i>
\bar{E}	: valor médio das coordenadas Este calculadas
E_R	: coordenada Este do marco de referência
N	: coordenada Norte do Sistema de Projeção <i>Universal Transverse Mercator</i>
\bar{N}	: valor médio das coordenadas Norte calculadas
N_R	: coordenada Norte do marco de referência
Pr	: probabilidade
\mathbf{Q}	: matriz diagonal que contém os semi-eixos da elipse dos erros
$\hat{\mathbf{R}}$: matriz correlação amostral
\mathbf{S}	: matriz covariância (ou matriz variância-covariância) amostral
$\hat{\mathbf{V}}^{\frac{1}{2}}$: matriz desvio padrão amostral
\mathbf{X}	: matriz de dados
α	: nível de significância
$1 - \alpha$: nível de confiança
ε_p	: erro de posição
$\varepsilon_{\text{labs.}}$: erro linear absoluto
γ	: ângulo de orientação da elipse dos erros
μ_E	: média populacional da coordenada Este
μ_N	: média populacional da coordenada Norte
$v = n - 1$: número de graus de liberdade
σ_E	: desvio padrão populacional da coordenada Este
σ_N	: desvio padrão populacional da coordenada Norte
χ^2	: estatística qui-quadrado
$\chi^2_{\alpha/2;v}$: estatística qui-quadrado sob a probabilidade igual a $\frac{\alpha}{2}$ e número de graus de liberdade igual a $v = n - 1$

$\chi^2_{1-\alpha/2;v}$: estatística qui-quadrado sob a probabilidade igual a $1 - \frac{\alpha}{2}$ e número de graus de liberdade igual a $v = n - 1$

μ : média populacional

Λ : matriz de valores próprios (autovalores) da matriz covariância

Σ : matriz covariância

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO.....	21
1.1 Objetivos.....	21
1.2 Justificativa.....	23
1.3 Conceito de qualidade.....	23
1.4 Procedimentos no desenvolvimento da pesquisa.....	24
1.5 Resumo dos capítulos.....	24
1.6 Revisão Bibliográfica.....	26
2 PARÂMETROS DA ESTATÍSTICA UNIVARIADA	
INDICADORES DE QUALIDADE.....	28
2.1 Análise dos resultados de medição.....	29
2.2 Precisão, correção e acurácia.....	30
2.3 Estimativas pontuais.....	31
2.3.1 Estimativa pontual: média.....	31
2.3.2 Estimativa pontual: desvio padrão.....	32
2.3.3 Estimativa pontual: erro médio quadrático.....	33
2.4 Estimativa por intervalo de confiança.....	33
2.4.1 Intervalo de confiança para a média populacional.....	33
2.4.2 Intervalo de confiança para a variância populacional.....	34
2.4.3 Intervalo de confiança para o desvio padrão populacional.....	35
3 PARÂMETROS DA ESTATÍSTICA MULTIVARIADA	
INDICADORES DE QUALIDADE.....	36
3.1 Vetor aleatório multivariado.....	36
3.2 Esperança matemática do vetor aleatório.....	36
3.3 Matriz covariância do vetor aleatório.....	37
3.4 Matriz desvio padrão e matriz correlação do vetor aleatório.....	38
3.5 Amostra do vetor aleatório: matriz de dados amostrais.....	39

3.6	Vetor de médias, matriz covariância, matriz desvio padrão e matriz correlação amostrais.....	39
3.7	Distribuição Normal Multivariada.....	41
3.7.1	Verificação da normalidade.....	42
3.8	Distância Quadrática de Mahalanobis.....	43
3.8.1	Distância quadrática de Mahalanobis amostral.....	44
4	MATERIAL E METODOLOGIA.....	48
4.1	Caracterização dos receptores GPS quanto à precisão.....	50
4.2	Caracterização dos programas comerciais de processamento de dados GPS.....	51
4.2.1	Características do Programa GPS Pathfinder Office 3.0.....	51
4.2.1.1	Correção diferencial.....	52
4.2.1.2	Distância entre o receptor de base e o receptor <i>rover</i>	52
4.2.1.3	Estimativas da precisão.....	52
4.2.2	Características do Programa GIS DataPRO.....	54
4.3	Matriz de coeficientes de covariância.....	55
4.4	Localização dos marcos ocupados para a pesquisa.....	57
4.4.1	Marco Cacequi.....	58
4.4.2	Marco São Vicente do Sul.....	59
5	RESULTADOS E ANÁLISE.....	60
5.1	Planilhas dos dados processados, estimativas pontuais, estimativas de acurácia e estimativa do erro linear absoluto.....	60
5.1.1	Planilhas dos dados Pro XR processados com dados da Estação SC, estimativas pontuais, estimativas de acurácia e estimativa do erro linear absoluto.....	61
5.1.1.1	Explicação das planilhas dos dados Pro XR.....	66
5.1.2	Planilhas dos dados GS20 processados com dados da Estação Santa Maria da RBMC, estimativas pontuais, estimativas de acurácia e estimativa do erro linear absoluto.....	68
5.1.2.1	Explicação das planilhas dos dados GS20.....	73
5.1.3	Resumo das estimativas de precisão, de acurácia e do erro linear absoluto....	75
5.2	Estimativas por intervalo de confiança.....	76

5.2.1	Estimativas por intervalo de confiança para os dados Pro XR processados com dados da Estação SC.....	76
5.2.1.1	Explicação dos intervalos de confiança para a média e o desvio padrão populacionais provenientes dos dados Pro XR.....	81
5.2.2	Estimativas por intervalo de confiança para os dados GS20 processados com dados da Estação Santa Maria da RBMC.....	84
5.2.2.1	Explicação dos intervalos de confiança para a média e o desvio padrão populacionais provenientes dos dados GS20.....	89
5.3	Verificação da normalidade pelo método das distâncias quadráticas generalizadas.....	92
5.3.1	Verificação da normalidade dos dados obtidos com o receptor GPS Pathfinder Pro XR e processados com dados da Estação SC.....	92
5.3.2	Verificação da normalidade dos dados obtidos com o receptor GPS Leica GS20 e processados com dados da Estação Santa Maria da RBMC.....	94
5.4	Histogramas.....	96
5.4.1	Histogramas dos dados Pro XR processados com dados da Estação SC	96
5.4.2	Histogramas dos dados processados com dados GS20 da Estação Santa Maria da RBMC.....	101
5.5	Comparação de médias.....	106
5.5.1	Teste para a diferença de duas médias.....	106
5.5.2	Teste para a diferença de dois vetores de médias.....	107
5.6	Estatísticas multivariadas.....	108
5.6.1	Estatísticas multivariadas dos dados Pro XR.....	110
5.6.2	Estatísticas multivariadas dos dados GS20.....	113
6	CONCLUSÃO E RECOMENDAÇÕES.....	116
6.1	Avaliação dos resultados oriundos da coleta de dados com receptor GPS Pathfinder Pro XR.....	117
6.2	Avaliação dos resultados oriundos da coleta de dados com receptor GPS GS20.....	117
6.3	Recomendações.....	118
	REFERÊNCIAS.....	119
	OUTRAS OBRAS CONSULTADAS.....	121

1 INTRODUÇÃO

Atualmente a comunidade técnico-científica brasileira que se dedica à mensuração vivencia uma nova situação após o advento da Lei 10.267/2001, que cria o Cadastro Nacional de Imóveis Rurais (CNIR) e normatiza os levantamentos geodésicos relacionados à obtenção das feições das propriedades rurais e do procedimento legal para seus registros oficiais no Brasil.

Estimulado pela referida lei, o mercado de equipamentos coloca à disposição dos profissionais da área uma vasta gama de receptores do Sistema de Posicionamento Global (GPS) com distintas características e preços. O uso adequado desses receptores se coloca em duas etapas básicas: a tomada das medidas de campo e o processamento com análise dos resultados. A primeira tem sido objeto de maior atenção por parte dos vendedores desses equipamentos, motivo pelo qual possui maior volume de informações a respeito, principalmente por apresentar características peculiares em cada modelo e marca apesar de haver espaços para modificar o caráter mecanicista com que muitas vezes se operam esses receptores atualmente. A mesma afirmação não pode ser dita em relação à segunda etapa, uma vez que a interação de certa parte da comunidade usuária dos programas comerciais de pós-processamento se torna, às vezes, dificultada em virtude da pouca familiaridade com os termos relacionados aos processos matemáticos e estatísticos usados em Geodésia para análise da qualidade de dados.

Este projeto busca contribuir com a parte da comunidade usuária necessitada de esclarecimentos no sentido de melhorar, à luz da ciência, a relação dela com os sistemas de processamento e análise de dados, o que contribui também para a elaboração de trabalhos com mais confiabilidade.

1.1 Objetivos

O objetivo geral desta pesquisa é avaliar por meio de parâmetros da Estatística univariada e da Estatística multivariada a qualidade dos dados de levantamentos GPS

fornecidos pelos seguintes programas comerciais de processamento: GPS Pathfinder Office da Empresa Trimble e GIS DataPRO da Empresa Leica.

Os objetivos específicos são:

- a) conhecer os itens de qualidade de dados apresentados nos programas comerciais GPS Pathfinder Office da Empresa Trimble e GIS DataPRO da Empresa Leica;
- b) realizar levantamento geodésico com equipamentos das marcas acima sobre 5 marcos da rede oficial do Sistema Geodésico Brasileiro (SGB), cujas coordenadas têm seus valores de acurácia conhecidos, localizados nos seguintes municípios do Estado do Rio Grande do Sul: Uruguaiana, Alegrete, Rosário do Sul, Cacequi e São Vicente do Sul;
- c) realizar o processamento;
- d) estimar os parâmetros estatísticos que indicam a qualidade dos resultados, tais como o desvio padrão das coordenadas e o intervalo de confiança para a média e desvio padrão populacionais que se obtêm da Estatística univariada; a verificação da normalidade da distribuição das coordenadas e a matriz covariância amostral que se obtêm da Estatística Multivariada;
- e) estimar os valores das grandezas que são função do desvio padrão e da matriz covariância;
- f) Identificar a quais parâmetros científicos se referem os termos utilizados pelos programas comerciais;
- g) Verificar a confiabilidade de tais parâmetros por meio da aplicação de testes estatísticos.

1.2 Justificativa

Atualmente os programas comerciais de processamento GPS apresentam a estatística dos pontos levantados de uma forma que o usuário tem dificuldade de interpretá-la, gerando insegurança no profissional quanto à qualidade dos dados apresentados em seu trabalho. Além disso, as exigências apresentadas pela Lei 10.264/2001 que institui o CNIR impõem um perfeito domínio de todos os parâmetros de qualidade de forma a comprovar a qualidade do trabalho segundo a exigência da Norma Técnica para o Georreferenciamento de Imóveis Rurais publicada pelo Instituto Nacional de Reforma Agrária (INCRA).

1.3 Conceito de qualidade

A posição de pontos de uma rede geodésica é expressa por suas coordenadas juntamente com a medida de qualidade. A qualidade das coordenadas de um ponto é a indicação de as quão bem estimadas são essas coordenadas.

A indicação da qualidade é dada pela medida dos desvios padrões e pode ser representada pela elipse dos erros no caso bidimensional, definida pelos parâmetros semi-eixo maior, semi-eixo menor e ângulo de orientação, cuja área é a probabilidade igual a 0,39 de conter a posição estimada. Em vez da elipse dos erros, comumente se utilizam quantidades escalares, por exemplo, o erro de posição que é a raiz quadrada do traço da matriz covariância.

As observações, a partir das quais as coordenadas foram calculadas, são grandezas aleatórias e em decorrência disso, as coordenadas também apresentam propriedades aleatórias. A variação em decorrência das propriedades aleatórias das coordenadas chama-se precisão (HEUS, 1982, p. 225).

No caso específico desta pesquisa a qualidade que é almejada está na natureza, confiabilidade e acurácia dos dados apresentados pelos programas comerciais de processamento de dados de receptores GPS.

1.4 Procedimentos no desenvolvimento da pesquisa

Os levantamentos a campo, foram realizados de forma a permitir a qualidade do posicionamento dentro dos parâmetros estabelecidos pela nova Lei 10.267/2001, considerando-se as características de cada equipamento quanto a comprimento da linha de base, tempo de rastreamento e modo de posicionamento. O processamento se dará de forma separada em cada programa comercial analisado. Será feita a análise da acurácia levando-se em conta as coordenadas oficiais do ponto de teste. Será feito cálculo dos parâmetros científicos de análise dos valores estimados. Os mesmos serão comparados com os valores encontrados nos programas comerciais, o que permitirá a identificação do parâmetro bem como a consistência dos valores encontrados.

1.5 Resumo dos capítulos

No capítulo dois são tratados os conceitos fundamentais dos parâmetros da Estatística univariada indicadores de qualidade dos dados juntamente com os modelos de estimação e os fundamentos de análise.

No capítulo três são tratados os conceitos fundamentais dos parâmetros da Estatística multivariada indicadores de qualidade dos dados juntamente com os modelos de estimação e os fundamentos de análise.

No capítulo quatro são descritos minuciosamente os procedimentos realizados no campo durante a ocupação de 5 marcos já mencionados, com apresentação de

mapa ilustrativo que indica a localização de cada marco por município e localização da estação de referência de monitoramento contínuo existente em Santa Maria, a qual servirá de apoio no processo de análise da pesquisa. Descreve-se ainda neste capítulo as características dos programas GPS Pathfinder Office e GIS DataPRO.

No capítulo cinco, são apresentados os resultados oriundos dos testes que mostra, em separado, a qualidade dos resultados do programa GPS Pathfinder Office e do programa GIS DataPRO, também com uma análise da qualidade dos resultados obtidos.

Dos fundamentos descritos no capítulo dois serão calculados as seguinte estimativas:

- a) média amostral;
- b) desvio padrão amostral;
- c) intervalo de confiança para a média populacional;
- d) intervalo de confiança para o desvio padrão populacional.

Dos fundamentos descritos no capítulo três serão calculadas as seguintes estimativas:

- a) o vetor de médias das coordenadas do sistema de projeção UTM,
- b) a matriz covariância amostral;
- c) a matriz desvio padrão amostral;
- d) a matriz correlação amostral;
- e) o determinante da matriz covariância amostral;
- f) o traço da matriz covariância amostral;
- g) o erro de posição;
- h) a matriz de valores próprios da matriz covariância amostral;

- i) a matriz de vetores próprios associados aos valores próprios;
- j) a matriz raiz quadrada dos valores próprios, a qual fornece o comprimento dos semi-eixos maior e menor da elipse dos erros.

No capítulo 6, são apresentadas as conclusões e recomendações da pesquisa.

1.6 Revisão bibliográfica

Jong et al. (2002, p. 49) descreve que o posicionamento baseado em satélites artificiais, tais como os do GPS fornece a posição tridimensional e dependendo da aplicabilidade, a posição horizontal (posição bidimensional) e sua correspondente precisão se tornam importante. A área dentro da qual a posição bidimensional estimada é de ser esperada chama-se elipse dos erros ou região de confiança. A elipse dos erros padrão é definida pelos semi-eixos maior a , semi-eixo menor b e ângulo de orientação γ formado pelo eixo das abscissas e o semi-eixo maior. Além disso, descreve a influencia da *Dilution of Precision* (DOP) no controle de qualidade dos levantamentos com receptores GPS. O valor DOP é definida por

$$DOP = \sqrt{\sum_{i=1}^n (A^T A)_{ii}^{-1}},$$

em que os subíndices indicam que os elementos são da diagonal da matriz $(A^T A)^{-1}$. A matriz A reúne as derivadas parciais das equações de observação em relação aos parâmetros e avaliada com os parâmetros aproximados. Admite-se que todas as observações têm o mesmo peso. O valor DOP indica a influência da geometria (por meio da matriz A) na precisão dos parâmetros a serem estimados. Na expressão do DOP, o somatório do radicando é o traço, isto é, $\sum_{i=1}^n (A^T A)_{ii}^{-1} = \text{tr}(A^T A)^{-1}$.

TIBERIUS (1998, p.3) descreve a busca do homem em controlar seu ambiente através do conhecimento exato. Mostra também que na engenharia e na prática em

geral esta utopia não pode ser realidade devido a diversos erros que estão presentes nas medidas obtidas em levantamentos executados com GPS.

Leick (1995, p. 149 – 161) descreve pormenorizadamente as elipses como região de confiança; elas são utilizadas nas redes bidimensionais. As elipses são centradas na posição ajustada e delimita a área de probabilidade igual a $1-\alpha$ para a posição correta. A elipse dos erros (também chamada elipse padrão) apresenta a propriedade de se relacionar com o erro de posição de uma estação, em que o semi-eixo maior é a medida do desvio padrão máximo na direção deste semi-eixo e o semi-eixo menor é o desvio padrão mínimo na direção deste semi-eixo. Em outras direções, o desvio padrão é dado pelo distância da curva desvio padrão ao centro da elipse que possui centro comum com ela.

Seeber (2003, p. 300-304) descreve a geometria dos satélites e as medidas de acurácia. A medida de acurácia usualmente aplicada em medições e Geodésia é o desvio padrão que é considerado ser idêntico com a raiz quadrada do erro médio quadrático que no idioma inglês escreve-se *root mean square error* (rms). A probabilidade de uma posição estar dentro de uma certa região é descrita pela elipse de confiança (para duas dimensões), ou pelo elipsóide de confiança (para três dimensões) com a posição estimada no seu centro. Os eixos da elipse de confiança são função do desvio padrão das coordenadas. Os níveis de probabilidade aplicados são 68,3% (que corresponde a uma vez o desvio padrão), 95,5% (que corresponde a 2 vezes o desvio padrão) ou 99,7% (que corresponde a 3 vezes o desvio padrão).

2 PARÂMETROS DA ESTATÍSTICA UNIVARIADA INDICADORES DE QUALIDADE

A Estatística é a ciência que trata da coleta, organização, análise e interpretação de observações visando a tomada de decisão pelo pesquisador. Os métodos estatísticos são fundamentais para o tratamento de dados de observações geodésicas.

A idéia básica no tratamento estatístico de dados é que os erros intervenientes na medição são aleatórios e podem ser descritos pelas funções de probabilidade que são funções muito bem definidas (VANIN & GOUFFON, 1994, p. 1). Nas medições esses erros podem ser chamados de flutuações probabilísticas.

Os chamados erros sistemáticos podem ser introduzidos em uma medida por causa da utilização de equipamentos mal ajustados ou mal calibrados ou ao uso de procedimentos incorretos de medição. Além disso, os métodos de análise inadequados e os modelos teóricos incompletos também introduzem erros sistemáticos nos resultados. Os erros sistemáticos, por não possuírem a característica de aleatoriedade, não são tratados pela Estatística, a não ser aqueles provenientes dos métodos de análise estatística.

Os erros acidentais são aqueles causados por variações incontroláveis do processo de medição, o que inclui o sistema de medição e as grandezas intervenientes nos processos, incluindo os instrumentos utilizados diretamente bem como aqueles utilizados indiretamente e os processos que são controlados e também os que não são controlados (VANIN & GOUFFON, 1994, p. 7). Como existem várias causas para a ocorrência desses erros, a previsão de suas ocorrências e, por conseguinte, a eliminação são impossíveis, mas podem ser estimados por métodos estatísticos.

Devido à impossibilidade de os erros acidentais serem eliminados dos valores de uma grandeza de medição, esses erros tornar-se-ão presentes nos valores das grandezas calculadas.

Para estimar a precisão do valor de uma grandeza afetada por erros acidentais, empregam-se as estatísticas. As grandezas estatísticas calculadas para cada amostra denominam-se estatísticas (por exemplo: a média aritmética amostral \bar{x} que estima a média populacional μ_x , a variância s_x^2 , o desvio padrão s_x e o desvio

padrão da média aritmética $s_{\bar{x}}$). As grandezas calculadas para as populações são denominam-se parâmetros.

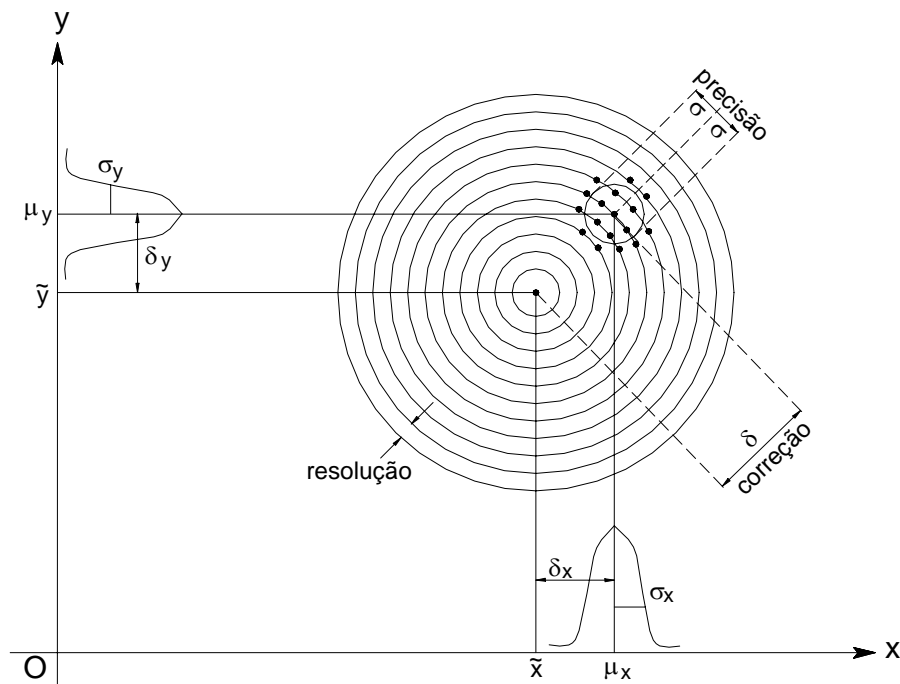


Figura 2.1 – Média, desvio padrão, correção e valor verdadeiro de uma grandeza de medição

Fonte: SCHMIDT, H. (1997).

Nota : Figura adaptada e traduzida do original.

Na figura 2.1, o desvio padrão $\sigma = (\sigma_x; \sigma_y)$, é o parâmetro que representa a dispersão dos n valores em torno da média $\mu = (\mu_x; \mu_y)$ e a correção $\delta = (\delta_x; \delta_y)$ que possui uma parte conhecida e outra parte desconhecida aproxima o valor médio (média) do valor verdadeiro $(\bar{x}; \bar{y})$ que é sempre desconhecido.

2.1 Análise dos resultados de medição

A fim de caracterizar uma grandeza de medição, a teoria clássica de erros faz a distinção entre valor medido x_i e valor verdadeiro \bar{x} de uma grandeza. A diferença entre estes dois valores é chamada desvio verdadeiro η que permanece desconhecido. A diferença entre o i -ésimo valor medido x_i de uma amostra composta de n valores medidos $x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n$ sobre a grandeza x (grandeza escalar) e o seu valor esperado $E(x) = \mu_x$ é chamado desvio aleatório ε_i , que se estima a partir da realização do valor esperado que é efetuada pelo valor médio \bar{x}

dos n valores medidos. A diferença entre o valor esperado e o valor verdadeiro é chamado desvio sistemático (“*bias*”) δ que possui uma parte conhecida δ_c e outra parte desconhecida δ_d que pode ser entendida como a parte que ainda não foi modelada.

Estes conceitos são mostrados na (figura 2.2) e formulados.

$$\varepsilon_i = x_i - \mu; \quad (2.1)$$

$$\delta = \mu - \tilde{x} = \delta_c + \delta_d. \quad (2.2)$$

Então comporá a realização da grandeza de medição x_i , as partes:

$$x_i = \varepsilon_i + \mu = \varepsilon_i + \delta + \tilde{x}. \quad (2.3)$$

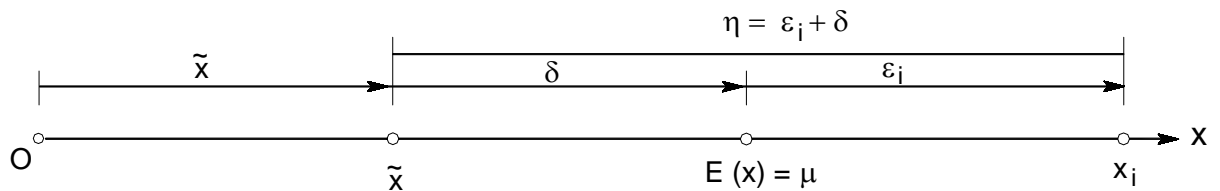


Figura 2.2 – Conceitos da teoria clássica dos erros

Fonte: SCHMIDT (1994, p. 10).

Os valores estimados de variância, de covariância e, por conseguinte, de correlação não são influenciados pelos desvios sistemáticos, pois

$$s_x^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n [(x_i + \delta_x) - (\bar{x} + \delta_x)]^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2; \quad (2.4)$$

$$s_y^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n [(y_i + \delta_y) - (\bar{y} + \delta_y)]^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2; \quad (2.5)$$

$$s_{x,y} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n [(x_i + \delta_x) - (\bar{x} + \delta_x)][(y_i + \delta_y) - (\bar{y} + \delta_y)] = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n [(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})]; \quad (2.6)$$

$$r = \frac{s_{x,y}}{s_x s_y}. \quad (2.7)$$

2.2 Precisão, correção e acurácia

O termo acurácia (latim: *accuratio*; inglês: *accuracy*; alemão: *Genauigkeit*) é a designação qualitativa para o tamanho da aproximação proveniente do resultado da determinação em relação ao valor de referência em que pode estar conforme com a

definição ou convenção do valor verdadeiro, do valor correto ou do valor esperado (DIN, 1987, p. 3).

Neste sentido, a acurácia é a medida indicadora da conformidade de um certo resultado em relação a um padrão no que diz respeito à qualidade. Segundo o padrão de referência, os atributos absoluto, relativo, interno e externo podem adjectivar o termo acurácia (WENDERLEIN, 1988, p. 147).

A acurácia de um resultado de medição é composta de duas componentes (BENNING, 2002, p. 82): a precisão e a correção. A figura 2.1 mostra que a precisão é a medida de dispersão das observações em torno de um valor médio e a correção é a medida do afastamento deste valor médio em relação ao valor verdadeiro.

A precisão descreve de quanto as medidas são reproduzíveis; quanto menor forem os erros acidentais, tanto maior é a precisão da medida. A precisão não leva em conta os erros sistemáticos.

A acurácia descreve quanto o valor experimental está próximo do valor verdadeiro da grandeza (valor de referência); quanto menor for a soma de todos os erros sistemáticos e acidentais (erros estatísticos), tanto maior é a acurácia do resultado.

Distingue-se o termo acurácia do termo precisão:

accuracy: degree of conformity with a standart; precision: degree of refinement in the performance of an operation or in the statement of a result; accuracy relates to the quality of a result, and is distinguished from precision which relates to the operation by which the result is obtained.

(U.S. Department of Commerce. Coast and Geodetic Survey: **Definitions of terms used in geodetic and other surveys**. Special Publications, n. 42, Washington, 1948.)

2.3 Estimativas pontuais

A estimativa pontual conduz a um único número; por isso emprega-se o termo pontual. As observações podem ou não oferecer o mesmo grau de confiança; no segundo caso serão afetadas de pesos diferentes

2.3.1 Estimativa pontual: média

Seja uma grandeza desconhecida x sobre a qual foram efetuadas uma série de n observações, entre si independentes e cujas características permitam oferecer

o mesmo grau de confiança. Após a eliminação dos erros sistemáticos, resulta um conjunto de n observações $x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n$.

Estas observações trazem consigo os erros acidentais e são representativas de valores assumidas por uma variável aleatória x .

A média aritmética resulta como solução do problema quando se aplica o MMQ:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i . \quad (2.8)$$

No caso em que existem observações cujas características não permitam oferecer o mesmo grau de confiança, emprega-se a média ponderada:

$$\tilde{x} = \frac{1}{\sum_{i=1}^n p_i} \sum_{i=1}^n (p_i l_i) . \quad (2.9)$$

2.3.2 Estimativa pontual: desvio padrão

A estimativa da precisão é dada pelo desvio padrão s_x (valor sempre positivo) que é uma medida de dispersão. Define-se o desvio padrão como a raiz quadrada positiva da variância:

$$s_x = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} , \quad (2.10)$$

ou quando as observações forem ponderadas:

$$s_x = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n p_i (x_i - \tilde{x})^2} . \quad (2.11)$$

O desvio padrão da média aritmética, denotado pelo símbolo $s_{\bar{x}}$, é dado por:

$$s_{\bar{x}} = \frac{s_x}{\sqrt{n}} , \quad (2.12)$$

e o desvio padrão da média ponderada é dado por:

$$s_{\tilde{x}} = \frac{s_x}{\sqrt{\sum_{i=1}^n p_i}} . \quad (2.13)$$

2.3.3 Estimativa pontual: erro médio quadrático

Na terminologia da Geodésia, também pode ser empregada, para exprimir a medida de dispersão, o erro médio quadrático, definido por Gauss como “a raiz quadrada da média dos quadrados dos erros verdadeiros”. O erro médio quadrático é igual ao desvio padrão acrescentado o duplo sinal.

$$m_x = \pm s_x . \quad (2.14)$$

O erro médio quadrático da média aritmética se exprime:

$$m_{\bar{x}} = \pm s_{\bar{x}} . \quad (2.15)$$

O erro médio quadrático da média ponderada se exprime:

$$m_{\bar{x}} = \pm s_{\bar{x}} . \quad (2.16)$$

2.4 Estimativa por intervalo de confiança

A estimativa por intervalo conduz a dois números que definem um intervalo de confiança dentro do qual incluirá, com uma certa probabilidade, o parâmetro estimado.

2.4.1 Intervalo de confiança para a média populacional

O intervalo de confiança para a média populacional μ_x é obtido em função do desvio padrão amostral s_x , utilizando a distribuição t de Student, e pode ser calculado com a seguinte expressão:

$$\Pr \left[\bar{x} - s_{\bar{x}} t_{1-\frac{\alpha}{2}} \leq \mu_x \leq \bar{x} + s_{\bar{x}} t_{1-\frac{\alpha}{2}} \right] = 1 - \alpha . \quad (2.17)$$

A (2.17) deve ser lida: “probabilidade de que o intervalo aleatório definido pelos extremos $\bar{x} - s_{\bar{x}} t_{1-\frac{\alpha}{2}}$ e $\bar{x} + s_{\bar{x}} t_{1-\frac{\alpha}{2}}$ contenha o parâmetro populacional μ_x é igual a $1 - \alpha$ ”. Esse intervalo chama-se intervalo de confiança (figura 3.1) e $1 - \alpha$ é o seu nível de confiança.

No caso da média ponderada, o intervalo é:

$$\Pr \left[\bar{\tilde{x}} - s_{\bar{\tilde{x}}} t_{1-\frac{\alpha}{2}} \leq \mu_x \leq \bar{\tilde{x}} + s_{\bar{\tilde{x}}} t_{1-\frac{\alpha}{2}} \right] = 1 - \alpha . \quad (2.18)$$

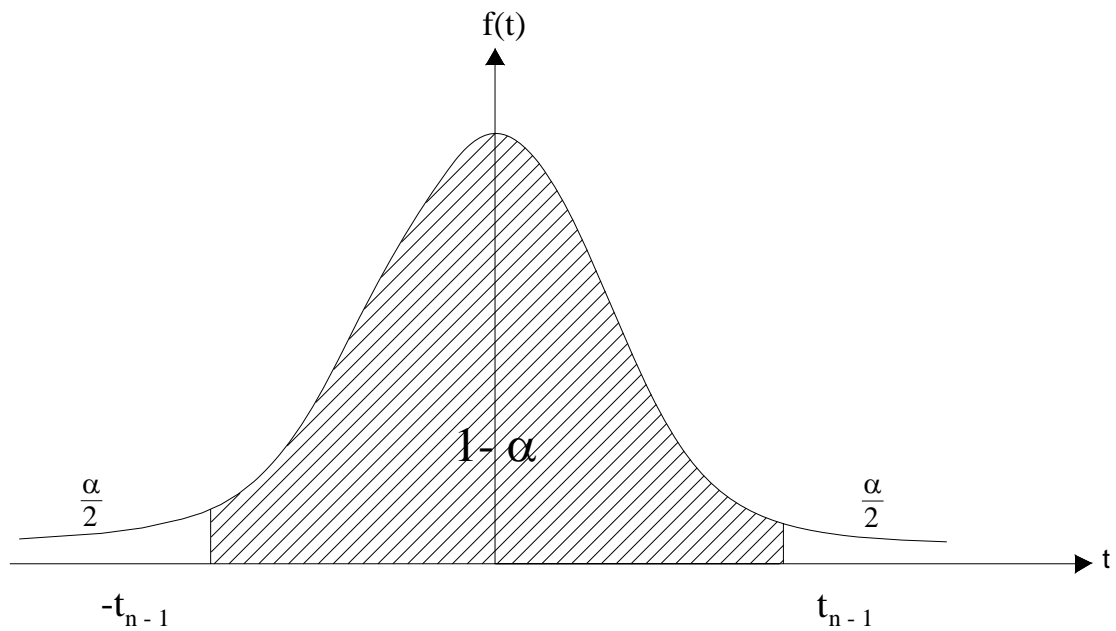


Figura 2.3 – Intervalo de confiança para a média populacional

2.4.2 Intervalo de confiança para a variância populacional

Estima-se um intervalo de confiança para a variância populacional (figura 2.4) σ_x^2 em função da variância amostral s_x^2 , utilizando a distribuição de probabilidade χ^2 com $(n-1)$ graus de liberdade:

$$\Pr \left[\frac{(n-1)s_x^2}{\chi_{1-\frac{\alpha}{2}}^2} \leq \sigma_x^2 \leq \frac{(n-1)s_x^2}{\chi_{\frac{\alpha}{2}}^2} \right] = 1 - \alpha. \quad (2.19)$$

O intervalo de confiança para a variância da média populacional, denotada pelo símbolo $\sigma_{\mu_x}^2$, é estimado por:

$$\Pr \left[\frac{(n-1)s_x^2}{\chi_{1-\frac{\alpha}{2}}^2} \leq \sigma_{\mu_x}^2 \leq \frac{(n-1)s_x^2}{\chi_{\frac{\alpha}{2}}^2} \right] = 1 - \alpha, \quad (2.20)$$

ou

$$\Pr \left[\frac{(n-1)s_x^2}{\chi_{1-\frac{\alpha}{2}}^2} \leq \sigma_{\mu_x}^2 \leq \frac{(n-1)s_x^2}{\chi_{\frac{\alpha}{2}}^2} \right] = 1 - \alpha. \quad (2.21)$$

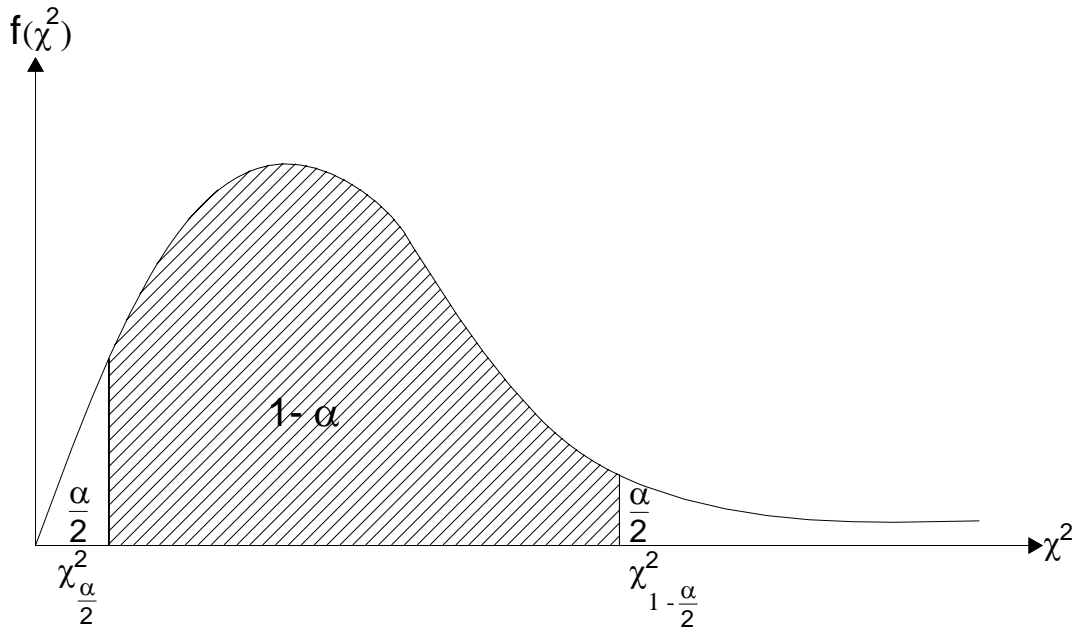


Figura 2.4 – Intervalo de confiança para a variância populacional

2.4.3 Intervalo de confiança para o desvio padrão populacional

Nas expressões do intervalo de confiança para a variância, extraindo a raiz quadrada de cada limite e tomando o valor positivo, obtém-se os respectivos intervalos para o desvio padrão.

3 PARÂMETROS DA ESTATÍSTICA MULTIVARIADA INDICADORES DE QUALIDADE

Os conceitos da Estatística Multivariada são aplicados para a obtenção das estimativas de qualidade quando existem várias variáveis com vários valores determinados. Neste capítulo são expostos os conceitos fundamentais que permitirão a obtenção do vetor de médias, matriz covariância, matriz desvio padrão; matriz correlação, distância estatística, verificação da normalidade e parâmetros da elipses dos erros.

3.1 Vetor aleatório multivariado

Dá-se o nome de vetor aleatório ao vetor cujas componentes são variáveis aleatórias. Para o caso geral, o vetor aleatório é simbolizado pela notação

$$\mathbf{x}^T = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_k \ \dots \ x_p] \quad (3.1)$$

em que p é a quantidade de variáveis aleatórias e k indica um elemento qualquer, isto, é o k -ésimo elemento. Um vetor com uma quantidade p de variáveis aleatórias chama-se vetor aleatório p -variado.

3.2 Esperança matemática do vetor aleatório

A esperança matemática do vetor aleatório, denotada pelo símbolo $E(\mathbf{x})$, também denominada expectância ou valor esperado do vetor aleatório, é definida por

$$E(\mathbf{x}) = E \left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \\ \vdots \\ x_p \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} E(x_1) \\ E(x_2) \\ \vdots \\ E(x_k) \\ \vdots \\ E(x_p) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_k \\ \vdots \\ \mu_p \end{bmatrix} = \boldsymbol{\mu}. \quad (3.2)$$

3.3 Matriz covariância do vetor aleatório

A matriz covariância do vetor aleatório \mathbf{x} é uma generalização do conceito de variância da distribuição univariada, a qual é designada pelo símbolo $\Sigma_{\mathbf{x}}$ e escrita na forma

$$\Sigma_{\mathbf{x}} = \text{cov}(\mathbf{x}) = E[(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})^T]. \quad (3.3)$$

Desenvolvendo a 2.3, obtém-se

$$\Sigma_{\mathbf{x}} = E \begin{bmatrix} (x_1 - \mu_1)(x_1 - \mu_1) & (x_1 - \mu_1)(x_2 - \mu_2) & \cdots & (x_1 - \mu_1)(x_k - \mu_k) & \cdots & (x_1 - \mu_1)(x_p - \mu_p) \\ (x_2 - \mu_2)(x_1 - \mu_1) & (x_2 - \mu_2)(x_2 - \mu_2) & \cdots & (x_2 - \mu_2)(x_k - \mu_k) & \cdots & (x_2 - \mu_2)(x_p - \mu_p) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (x_k - \mu_k)(x_1 - \mu_1) & (x_k - \mu_k)(x_2 - \mu_2) & \cdots & (x_k - \mu_k)(x_k - \mu_k) & \cdots & (x_k - \mu_k)(x_p - \mu_p) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (x_p - \mu_p)(x_1 - \mu_1) & (x_p - \mu_p)(x_2 - \mu_2) & \cdots & (x_p - \mu_p)(x_k - \mu_k) & \cdots & (x_p - \mu_p)(x_p - \mu_p) \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} \text{cov}(x_1, x_1) & \text{cov}(x_1, x_2) & \cdots & \text{cov}(x_1, x_k) & \cdots & \text{cov}(x_1, x_p) \\ \text{cov}(x_2, x_1) & \text{cov}(x_2, x_2) & \cdots & \text{cov}(x_2, x_k) & \cdots & \text{cov}(x_2, x_p) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \text{cov}(x_k, x_1) & \text{cov}(x_k, x_2) & \cdots & \text{cov}(x_k, x_k) & \cdots & \text{cov}(x_k, x_p) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \text{cov}(x_p, x_1) & \text{cov}(x_p, x_2) & \cdots & \text{cov}(x_p, x_k) & \cdots & \text{cov}(x_p, x_p) \end{bmatrix}. \quad (3.4)$$

Usualmente, a 3.4 é escrita na forma

$$\Sigma_{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1k} & \cdots & \sigma_{1p} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \cdots & \sigma_{2k} & \cdots & \sigma_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \sigma_{k1} & \sigma_{k2} & \cdots & \sigma_{kk} & \cdots & \sigma_{kp} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{p1} & \sigma_{p2} & \cdots & \sigma_{pk} & \cdots & \sigma_{pp} \end{bmatrix}, \quad (3.5)$$

em que

$$\sigma_{ii} = E[(x_i - \mu_i)(x_i - \mu_i)] = \text{cov}(x_i, x_i) = \text{var}(x_i), \quad (3.6)$$

$$\sigma_{ij} = E[(x_i - \mu_i)(x_j - \mu_j)] = \text{cov}(x_i, x_j) = \text{cov}(x_j, x_i) = \sigma_{ji}, \quad \forall i, \forall j. \quad (3.7)$$

Os elementos σ_{ii} da diagonal da matriz covariância $\Sigma_{\mathbf{x}}$ são as variâncias das variáveis aleatórias x_i , $i=1,2,\dots,p$ e os elementos σ_{ij} fora da diagonal são as covariâncias entre as variáveis aleatórias x_i e x_j , $i \neq j$, $i, j=1,2,\dots,p$. Se x_i e x_j forem independentes, então $\sigma_{ij}=0$. Mas se $\sigma_{ij}=0$ e as variáveis não são independentes, diz-se que as variáveis são não-correlacionadas.

Os elementos da diagonal da 3.5 podem ser escritos na forma $\sigma_{ii} = \sigma_i^2$. Assim a 3.5 é reescrita assumindo a forma

$$\mathbf{\Sigma}_{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1k} & \cdots & \sigma_{1p} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 & \cdots & \sigma_{2k} & \cdots & \sigma_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \sigma_{k1} & \sigma_{k2} & \cdots & \sigma_k^2 & \cdots & \sigma_{kp} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{p1} & \sigma_{p2} & \cdots & \sigma_{pk} & \cdots & \sigma_p^2 \end{bmatrix}, \quad (3.6)$$

O $\det(\mathbf{\Sigma}_{\mathbf{x}})$ é a medida denominada **variância generalizada** e o $\text{tr}(\mathbf{\Sigma}_{\mathbf{x}})$ é a medida denominada **variância total**.

3.4 Matriz desvio padrão e matriz correlação do vetor aleatório

Dada a matriz covariância $\mathbf{\Sigma}_{\mathbf{x}}$ do vetor aleatório \mathbf{x} p-variado define-se a sua matriz desvio padrão, denotada pelo símbolo $\mathbf{V}_{\mathbf{x}}^{\frac{1}{2}}$, como

$$\mathbf{V}_{\mathbf{x}}^{\frac{1}{2}} = \begin{bmatrix} \sqrt{\sigma_1^2} & & & & & \\ & \sqrt{\sigma_2^2} & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & \sqrt{\sigma_i^2} & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \sqrt{\sigma_p^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & & & & & \\ & \sigma_2 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & \sigma_i & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \sigma_p \end{bmatrix} = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_i, \dots, \sigma_p). \quad (3.7)$$

A matriz correlação $\mathbf{R}_{\mathbf{x}}$ (também chamada matriz de correlações ρ) do vetor aleatório \mathbf{x} é dada por:

$$\mathbf{R}_{\mathbf{x}} = \left(\mathbf{V}_{\mathbf{x}}^{\frac{1}{2}} \right)^{-1} \mathbf{\Sigma} \left(\mathbf{V}_{\mathbf{x}}^{\frac{1}{2}} \right)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{\sigma_{12}}{\sigma_1\sigma_2} & \cdots & \frac{\sigma_{1j}}{\sigma_1\sigma_j} & \cdots & \frac{\sigma_{1p}}{\sigma_1\sigma_p} \\ \frac{\sigma_{21}}{\sigma_2\sigma_1} & 1 & \cdots & \frac{\sigma_{2j}}{\sigma_2\sigma_j} & \cdots & \frac{\sigma_{2p}}{\sigma_2\sigma_p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{\sigma_{j1}}{\sigma_j\sigma_1} & \frac{\sigma_{j2}}{\sigma_j\sigma_2} & \cdots & 1 & \cdots & \frac{\sigma_{jp}}{\sigma_j\sigma_p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\sigma_{p1}}{\sigma_p\sigma_1} & \frac{\sigma_{p2}}{\sigma_p\sigma_2} & \cdots & \frac{\sigma_{pj}}{\sigma_p\sigma_j} & \cdots & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.8)$$

3.5 Amostra do vetor aleatório: matriz de dados amostrais

Uma amostra do vetor aleatório \mathbf{x} é representada pela matriz

$$\mathbf{X} = [x_{ij}]_{n \times p} = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1j} & \dots & x_{1p} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2j} & \dots & x_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \dots & \vdots \\ x_{i1} & x_{i2} & \dots & x_{ij} & \dots & x_{ip} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nj} & \dots & x_{np} \end{bmatrix}. \quad (3.9)$$

A matriz \mathbf{X} , chamada matriz de dados, representa uma amostra de tamanho n proveniente de uma população p -variada. Cada linha desta matriz representa uma observação p -variada, que significa uma reunião de medidas obtidas de p variáveis diferentes de uma variável.

3.6 Vetor de médias, matriz covariância, matriz desvio padrão e matriz correlação amostrais

Em cada coluna da matriz de dados $\mathbf{X} = [x_{ij}]_{n \times p}$ é aplicada equação

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i, \quad (3.10)$$

resultando o vetor médio amostral

$$\bar{\mathbf{x}}^T = [\bar{x}_1 \quad \bar{x}_2 \quad \dots \quad \bar{x}_i \quad \dots \quad \bar{x}_p]. \quad (3.11)$$

A expressão

$$\mathbf{S} = [s_{ij}] = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n [(\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}})(\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}})^T] \quad (3.12)$$

com

$$\mathbf{x}_i^T = [x_{i1} \quad x_{i2} \quad \dots \quad x_{ij} \quad \dots \quad x_{ip}] \quad (3.13)$$

é denominada matriz covariância amostral obtida a partir da (3.9) e (3.11). Na (3.13), cada índice $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ representa uma linha da matriz de dados.

Desenvolvendo a (3.12), obtém-se a forma usual

$$\mathbf{S} = [s_{ij}]_{p \times p} = \begin{bmatrix} s_1^2 & s_{12} & \dots & s_{1j} & \dots & s_{1p} \\ s_{21} & s_2^2 & \dots & s_{2j} & \dots & s_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \dots & \vdots \\ s_{i1} & s_{i2} & \dots & s_i^2 & \dots & s_{ip} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{p1} & s_{p2} & \dots & s_{pj} & \dots & s_p^2 \end{bmatrix}. \quad (3.14)$$

Na (3.13), o $\det(\mathbf{S})$ é a medida denominada variância generalizada e o $\text{tr}(\mathbf{S})$ é a medida denominada variância total.

A matriz desvio padrão amostral é obtida em analogia a (3.7), em que o desvio padrão populacional σ é estimado pelo desvio padrão amostral s , resultando

$$\hat{\mathbf{V}}^{\frac{1}{2}} = \begin{bmatrix} \sqrt{s_1^2} & & & & & \\ & \sqrt{s_2^2} & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & \sqrt{s_i^2} & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \sqrt{s_p^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_1 & & & & & \\ & s_2 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & s_i & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & s_p \end{bmatrix} = \text{diag}(s_1, s_2, \dots, s_i, \dots, s_p). \quad (3.15)$$

A matriz correlação amostral advém da (3.8), em que a matriz covariância $\mathbf{\Sigma}$ é estimada pela matriz \mathbf{S} e a matriz desvio padrão $\mathbf{V}^{\frac{1}{2}}$ é estimada pela matriz $\hat{\mathbf{V}}^{\frac{1}{2}}$, resultando

$$\hat{\mathbf{R}}_{\mathbf{x}} = \left(\hat{\mathbf{V}}_{\mathbf{x}}^{\frac{1}{2}} \right)^{-1} \mathbf{S} \left(\hat{\mathbf{V}}_{\mathbf{x}}^{\frac{1}{2}} \right)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{s_{12}}{s_1 s_2} & \dots & \frac{s_{1j}}{s_1 s_j} & \dots & \frac{s_{1p}}{s_1 s_p} \\ \frac{s_{21}}{s_2 s_1} & 1 & \dots & \frac{s_{2j}}{s_2 s_j} & \dots & \frac{s_{2p}}{s_2 s_p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{s_{i1}}{s_i s_1} & \frac{s_{i2}}{s_i s_2} & \dots & 1 & \dots & \frac{s_{ip}}{s_i s_p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{s_{p1}}{s_p s_1} & \frac{s_{p2}}{s_p s_2} & \dots & \frac{s_{pj}}{s_p s_j} & \dots & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.16)$$

A matriz correlação amostral reúne os coeficientes de correlação linear que mostra a relação entre duas variáveis. O coeficiente positivo indica que se uma variável cresce, a outra variável também cresce; o coeficiente negativo indica que se uma variável cresce, a outra variável decresce. Se duas variáveis têm forte correlação linear positiva, o coeficiente estará próximo de 1.

3.7 Distribuição Normal Multivariada

A distribuição normal p-variada (ou distribuição multinormal de dimensão p ou ainda distribuição normal multivariada) simbolizada por $N_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ é caracterizada pela função de densidade de probabilidade (JOHNSON & WICHERN, 1998, p.159)

$$f(\mathbf{x}) = f(x_1, x_2, \dots, x_p) = \frac{e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})}}{(2\pi)^{\frac{p}{2}} (\det \boldsymbol{\Sigma})^{\frac{1}{2}}}, \quad -\infty < x_i < \infty, \quad i \in \{1, 2, \dots, p\}, \quad (3.17)$$

a qual tem densidade de probabilidade constante em regiões cujos limites são elipses, elipsóides ou hiperelipsóides (chamados contornos de densidade de probabilidade constante) de equação

$$(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}) = d^2(\mathbf{x}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}). \quad (3.18)$$

Nas expressões (3.17) e (3.18), \mathbf{x} é o vetor aleatório que tem distribuição normal p-variada, e π é o número de Euler, $\boldsymbol{\Sigma}$ é a matriz covariância (matriz positiva definida) com

$$\det(\boldsymbol{\Sigma}) = \prod_{i=1}^p \lambda_i \quad (3.19)$$

Se $p=2$, a (3.17) tem a representação gráfica dada pela figura 3.1, após a substituição: x_1 por x e x_2 por y .

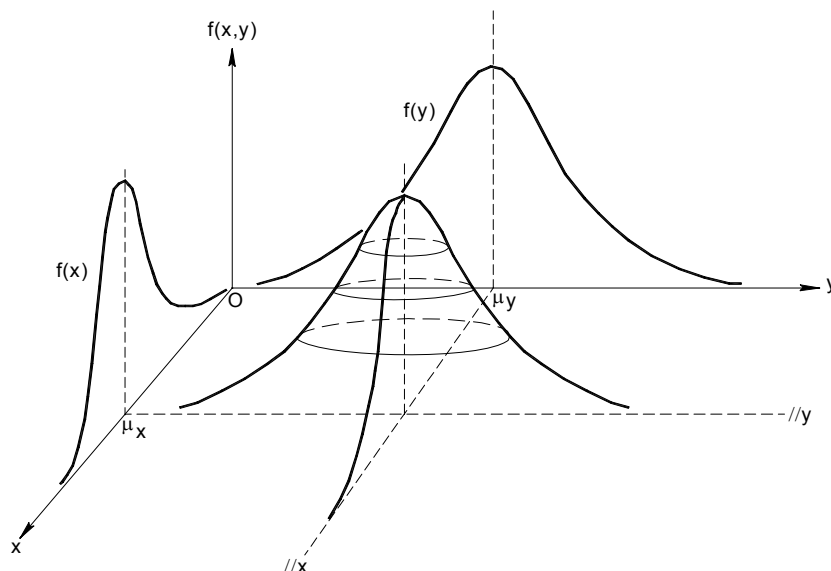


Figura 3.1 – Função densidade de probabilidade normal bivariada
Fonte: MORAES (2001, p.113).

As curvas de mesma densidade de distribuição de probabilidade são elipses, conforme mostra a figura 3.1.

A densidade da distribuição normal é sempre positiva porque a função exponencial não assume valores negativos e o determinante da matriz positiva definida é maior que zero (KOCH, 1980, p. 110).

O expoente da função densidade de probabilidade da distribuição normal univariada mede a distância estatística entre \mathbf{x} e $\boldsymbol{\mu}$ com desvio padrão unitário. Esse expoente pode ser reescrito na forma

$$(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})^T (\sigma^2)^{-1} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}) \sim \chi_1^2 \quad (3.20)$$

e generaliza-se para o vetor \mathbf{x} de p variáveis, assumindo a forma

$$(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}) \sim \chi_p^2 \quad (3.21)$$

em que tem o posto igual a p e, por isso, $\boldsymbol{\Sigma}^{-1}$ existe.

3.7.1 Verificação da normalidade

A distribuição normal bivariada apresenta contornos de densidade de probabilidade constante que são elipses (JOHNSON & WICHERN, 1998, p. 194):

$$(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}) \leq \chi_{2;0,50}^2 \quad (3.22)$$

Espera-se aproximadamente a mesma probabilidade de ocorrência das observações amostrais na elipse para todo vetor \mathbf{x} tal que

$$(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}})^T \mathbf{S}^{-1} (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}) \leq \chi_{2;0,50}^2, \quad (3.23)$$

em que $\boldsymbol{\mu}$ é substituído pela estimativa $\bar{\mathbf{x}}$ e $\boldsymbol{\Sigma}^{-1}$ pela estimativa \mathbf{S}^{-1} .

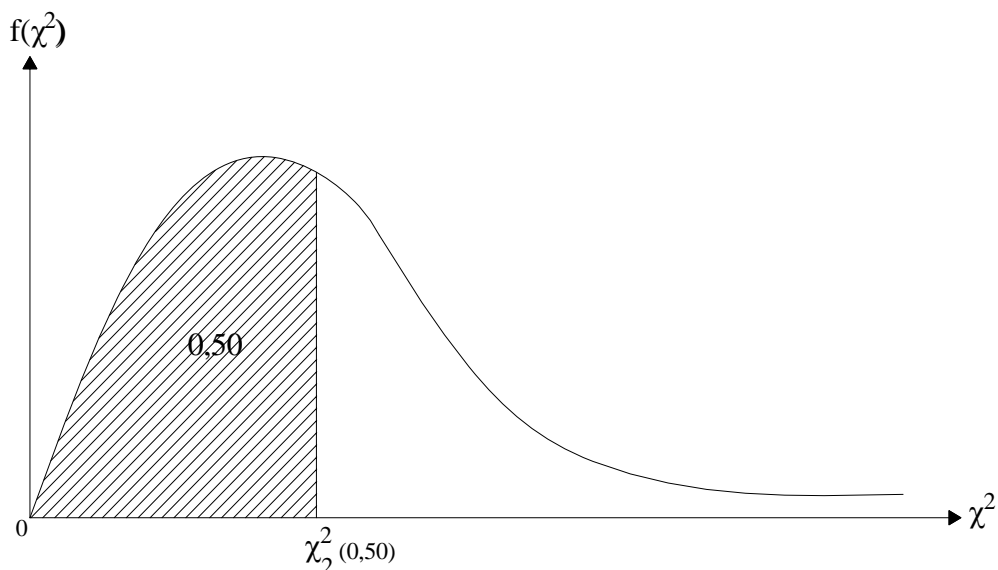


Figura 3.2 – Região de probabilidade igual a 0,50 da distribuição qui-quadrado

O primeiro membro da (3.23) chama-se distância quadrática a qual é denotada pelo símbolo d^2 . Se os dados forem provenientes da distribuição normal, espera-se que 50% deles estejam dentro da elipse, isto é, $d^2 \leq \chi_{2,0,50}^2 = 1,3863$.

3.8 Distância Quadrática de Mahalanobis

Sob a designação distância quadrática de Mahalanobis, introduzido por Mahalanobis em 1930, entende-se um dos conceitos mais fundamentais da Análise Estatística Multivariada: a estatística que traduz a medida da distância estatística entre duas populações com médias diferentes, mas com matrizes covariâncias idênticas.

Sejam os vetores aleatórios \mathbf{x}_1 e \mathbf{x}_2 , cada um dos quais composto de p componentes e

$$E(\mathbf{X}_1) = \boldsymbol{\mu}_1, E(\mathbf{X}_2) = \boldsymbol{\mu}_2 \text{ e } \text{cov}(\mathbf{X}_1) = \text{cov}(\mathbf{X}_2) = \boldsymbol{\Sigma}. \quad (3.24)$$

Se $\boldsymbol{\Sigma}$ for matriz positiva definida, então a distância quadrática de Mahalanobis entre as médias $\boldsymbol{\mu}_1$ e $\boldsymbol{\mu}_2$ das respectivas populações será (MARDIA, 1977, p. 495):

$$d^2(\boldsymbol{\mu}_1, \boldsymbol{\mu}_2, \boldsymbol{\Sigma}) = (\boldsymbol{\mu}_1 - \boldsymbol{\mu}_2)^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\boldsymbol{\mu}_1 - \boldsymbol{\mu}_2). \quad (3.25)$$

Na função de densidade de probabilidade, o expoente é uma constante e medida da distância quadrática de Mahalanobis, que tem distribuição χ_p^2 (MARDIA et al., 1982, p. 39).

Cada valor da distância quadrática de Mahalanobis representa um contorno, cuja forma e orientação são determinadas por $\boldsymbol{\Sigma}$, e o tamanho é determinado por $d^2(\boldsymbol{\mu}_1, \boldsymbol{\mu}_2, \boldsymbol{\Sigma})$ (ANDERSON, 1958, p. 18). Quando, $\boldsymbol{\mu} = \mathbf{0}$ e $\boldsymbol{\Sigma} = \mathbf{I}$ os contornos são circunferências para $p=2$, superfícies esféricas para $p=3$, e superfícies hiperesféricas para $p \geq 4$. Analogamente, se $\boldsymbol{\Sigma} \neq \mathbf{I}$ e não-singular, os contornos são elipses para $p=2$, elipsóides para $p=3$ e hiperelipsóides para $p \geq 4$. O elipsóide tem centro no ponto cujas coordenadas são as do vetor \mathbf{x} . As direções dos semi-eixos são determinadas pelos vetores próprios de $\boldsymbol{\Sigma}$, e os comprimentos desses semi-eixos a_i , pela equação

$$a_i = \sqrt{\lambda_i \chi_{p,1-\alpha}^2}, \quad (3.26)$$

Na (3.26), se $i=1,2$ e $\chi_{1-\alpha,p}^2 = 1$, então os semi-eixos a_1 e a_2 serão os semi-eixos da elipse dos erros, comumente designados por semi-eixo maior a e semi-eixo menor b , respectivamente. Os valores próprios são $\lambda_1 = \lambda_{\max}$ e $\lambda_2 = \lambda_{\min}$.

O eixo maior da elipse forma o ângulo

$$\gamma = \frac{1}{2} \arctan \frac{2\rho\sigma_1\sigma_2}{\sigma_1^2 - \sigma_2^2} \quad (3.27)$$

com o eixo \mathbf{x}_1 . Na 3.27, ρ é o coeficiente de correlação dada pela 3.8. Se $\rho = 0$ e $\sigma_1 = \sigma_2$, a equação é a de um círculo. A correlação zero implica independência entre as variáveis de distribuição normal bivariada (KOTZ et al., 2000, p. 255). Diz-se que as variáveis aleatórias x e y são variáveis aleatórias independentes quando o resultado de x não influencia o resultado de y .

O ângulo de orientação γ da (3.27) pode ser calculado pela função arccos da primeira componente do vetor próprio associado ao valor próprio máximo.

3.8.1 Distância quadrática de Mahalanobis amostral

Na prática, as grandezas $\boldsymbol{\mu}$ e $\boldsymbol{\Sigma}$ são desconhecidas e, por isso, essas grandezas precisam ser estimadas. O vetor médio amostral $\bar{\mathbf{x}}$ estima o vetor médio populacional $\boldsymbol{\mu}$, e a matriz covariância amostral \mathbf{s} estima a matriz covariância populacional $\boldsymbol{\Sigma}$. A distância quadrática de Mahalanobis entre \mathbf{x}_1 e \mathbf{x}_2 se exprime por:

$$d^2(\bar{\mathbf{x}}_1, \bar{\mathbf{x}}_2, \mathbf{s}) = (\bar{\mathbf{x}}_1 - \bar{\mathbf{x}}_2)^T \mathbf{s}^{-1} (\bar{\mathbf{x}}_1 - \bar{\mathbf{x}}_2). \quad (3.28)$$

Como \mathbf{s} deve ser única e cada vetor aleatório possui sua correspondente matriz covariância, então uma única matriz, chamada matriz covariância comum, deve ser estimada pela expressão

$$\mathbf{s} = \frac{(n_1 - 1)\mathbf{s}_1 + (n_2 - 1)\mathbf{s}_2}{n_1 + n_2 - 2} \quad (3.29)$$

em que n_1 e n_2 são a quantidade de linha das respectivas matrizes de dados.

A estatística $d^2(\boldsymbol{\mu}_1, \boldsymbol{\mu}_2, \boldsymbol{\Sigma}) = 1$, isto é, $\chi_p^2 = 1$, representa, para:

- a) $p = 1$, um intervalo unidimensional $[x_i - \hat{\sigma}_i, x_i + \hat{\sigma}_i]$ (SURACE, 1995, p. 185); a probabilidade que o valor estimado esteja contido nesse intervalo é cerca de 68,3%;
- b) $p = 2$, uma elipse de erros de semi-eixos $a_1 = \sqrt{\lambda_1}$ e $a_2 = \sqrt{\lambda_2}$ sendo $\lambda_1 > \lambda_2$ (MIKHAIL & GRACIE, 1981, p. 224-227). A interpretação comum da elipse de erros, na hipótese da distribuição normal dos erros, é que ela delimita a porção do plano que com a probabilidade de aproximadamente 39,4% contém a posição admitida como verdadeira do ponto em relação ao ponto considerado livre de erro na rede geodésica (SURACE, 1995, p. 185) se $d^2(\boldsymbol{\mu}_1, \boldsymbol{\mu}_2, \boldsymbol{\Sigma}) = 1$, a probabilidade que um ponto caia dentro do contorno da elipse é a mesma probabilidade $(1-\alpha)$ da estatística $\chi_{2;1-\alpha}^2 \leq 1$. A figura 3.3 mostra a região delimitada para um ponto coordenado no sistema de projeção *Universal Transverse Mercator* (UTM):

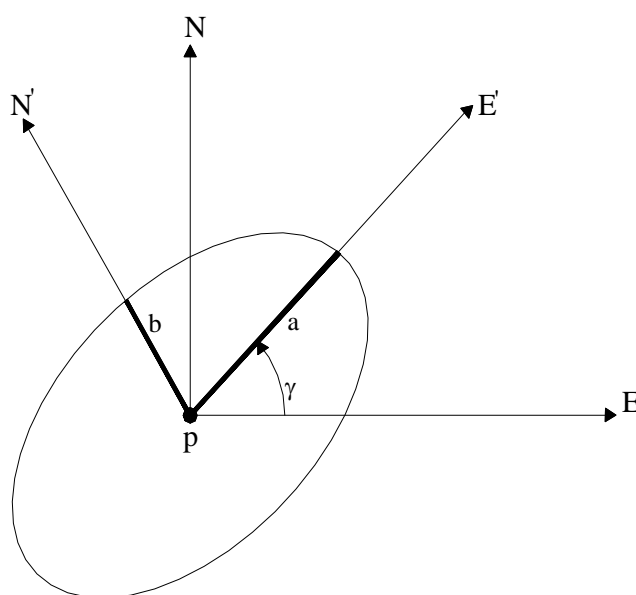


Figura 3.3 – Elipse dos erros de um ponto

- c) $p = 3$, o elipsóide de erros de semi-eixos $a_1 = \sqrt{\lambda_1}$, $a_2 = \sqrt{\lambda_2}$ e $a_3 = \sqrt{\lambda_3}$ sendo $\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3$; a probabilidade que a posição espacial admitida como verdadeira de um ponto esteja no interior do elipsóide é de aproximadamente 19,9%;
- d) $p \geq 4$, os hiperelipsóides de erros.

A estatística $d^2(\boldsymbol{\mu}_1, \boldsymbol{\mu}_2, \boldsymbol{\Sigma}) \neq 1$, isto é, $\chi_p^2 \neq 1$, representa, para:

- a) $p = 1$, uma família de intervalos unidimensionais; para cada valor de $d^2(\boldsymbol{\mu}_1, \boldsymbol{\mu}_2, \boldsymbol{\Sigma})$ calcula-se a probabilidade que o valor estimado se situe dentro do intervalo, ou calcula-se o intervalo para uma dada probabilidade;
- b) $p = 2$, uma família de elipses com a mesma orientação da elipse dos erros; para cada valor de $d^2(\boldsymbol{\mu}_1, \boldsymbol{\mu}_2, \boldsymbol{\Sigma})$ calcula-se a probabilidade $\{c^2 \leq \chi_{2;1-\alpha}^2\} = 1 - \alpha$ que as coordenadas se situem dentro da elipse ou calculam-se os semi-eixos $a_i, i \in \{1, 2\}$, da elipse que contenha as coordenadas:

$$a_1 = \sqrt{\lambda_1 d^2(\boldsymbol{\mu}_1, \boldsymbol{\mu}_2, \boldsymbol{\Sigma})}, \quad (3.30)$$

$$a_2 = \sqrt{\lambda_2 d^2(\boldsymbol{\mu}_1, \boldsymbol{\mu}_2, \boldsymbol{\Sigma})}; \quad (3.31)$$

- c) $p = 3$, uma família de elipsóides cujo tratamento é análogo ao tratamento da família de elipses;
- d) $p \geq 4$, uma família de hiperelipsóides cuja importância se destaca no estudo da análise de componentes principais.

A partir de valores amostrais \mathbf{x}_j , pode-se aproximar $\boldsymbol{\mu}$ por $\bar{\mathbf{x}}$ e $\boldsymbol{\Sigma}$ por \mathbf{S} . Se \mathbf{S} for matriz positiva definida, o contorno (figura 3.3) consistindo de todos os vetores $\mathbf{x} = [x_i]_{p \times 1}$ satisfazendo

$$(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}})^T \mathbf{S}^{-1} (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}) = c^2. \quad (3.32)$$

estimar o contorno de densidade constante

$$(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}) = c^2. \quad (3.33)$$

4 MATERIAL E METODOLOGIA

Os levantamentos realizados foram executados sobre marcos integrantes do Rede Estadual GPS, de forma a permitir a qualidade do posicionamento dentro da Lei 10.267/2001, considerando-se as características de cada equipamento quanto a comprimento da linha de base, tempo de rastreamento e modo de posicionamento. O processamento foi executado de forma específica em cada programa comercial analisado. A análise da acurácia foi feita levando-se em conta as coordenadas oficiais do ponto de teste, ou seja, os marcos da Rede Estadual GPS. Para cada marco de referência, foram feitos cálculos dos parâmetros estatísticos de análise dos valores estimados, os quais foram conceituados nos capítulos dois e três.

Na escolha dos marcos ocupados procurou-se obter pontos com diferentes distâncias das torres de monitoramento contínuo, ou bases ativas, localizadas em Santa Maria, a primeira, junto ao setor de Topografia do Centro de Ciências Rurais, prédio 42 da Universidade Federal de Santa Maria, sob responsabilidade do IBGE e a segunda localizada na empresa Topographia à rua Barão do Triunfo nº 1718, Santa Maria, sob a responsabilidade da Empresa Santiago e Cintra.

Os dois receptores GPS escolhidos para este trabalho são classificados segundo as normas técnicas de georreferenciamento do INCRA como GPS3 por apresentarem uma solução baseada nos códigos C-A e/ou Y e/ou fase da portadora com correção diferencial obtida em pós-processamento com utilização de técnicas baseadas em suavização do código através da portadora.

As características dos aparelhos são:

- a) precisão após processamento *off-line*: 20mm a 1m + 3 ppm (68,7 %);
- b) observável básica: Códigos C/A e/ou Y e/ou fase da portadora;

c) combinação entre observáveis: Duplas diferenças, suavização do código por portadora;

Segundo Monico (2000, p. 40), os equipamentos GPS podem ser classificados baseando-se no critério de dados proporcionados pelo receptor, ou seja:

- a) Código C/A;
- b) Código C/A e portadora L1;
- c) Código C/A e portadora L1 e L2;
- d) Código C/A e P e portadora L1 e L2;
- e) Portadora L1;
- f) Portadora L1 e L2.

Os dois receptores utilizados na pesquisa são dos tipos Código C/A e Código C/A e portadora L1.

A ocupação de 5 marcos da rede estadual de marcos GPS, foi realizada simultaneamente com o receptor GPS Pathfinder Pro XR e o receptor GPS Leica GS20, e teve a seguinte seqüência: Uruguaiana, Alegrete, Rosário do Sul, São Vicente do Sul e Cacequi.

Os dados de ambos receptores foram coletados utilizando como sistema de referência o sistema geocêntrico WGS-84 e após serem processados, foram exportados para o sistema de referência topocêntrico da América Latina SAD-69.

No pós-processamento dos dados de campo, do marco de Rosário do Sul, os pontos coletados com o receptor GPS Leica GS20 apresentaram baixa qualidade provavelmente devido à presença de uma rede elétrica de alta tensão próxima ao marco. Esse problema não ocorreu com os dados do receptor GPS Pathfinder Pro XR.

A ocupação de cada um dos 5 marcos com o receptor GPS Pathfinder Pro XR teve como critério uma ocupação mínima de 30 pontos pertencentes a um único arquivo, de um minuto de rastreamento por ponto, com intervalo de cinco segundos (épocas). A opção do número de pontos está de acordo com a necessidade de obtenção de um mínimo de dados que possibilitem uma análise estatística dos mesmos.

A ocupação de cada um dos 5 marcos com o receptor GPS Leica GS20 teve como critério uma ocupação mínima de 30 pontos, pertencentes a um único arquivo, de dois minutos e meio de rastreamento por ponto, com intervalo de 1 segundo (épocas).

Os dados de campo, oriundos do receptor GPS Pathfinder Pro XR foram processados no programa GPS Pathfinder Office 3.0 e os dados de campo coletados pelo receptor GPS Leica GS20 foram processados no programa computacional GIS Data PRO.

A coleta dos pontos teve solução diferencial baseada no código C-A com correção diferencial obtida em pós-processamento com utilização de técnicas baseadas em suavização do código através da portadora.

Entende-se como técnica de suavização o procedimento que reduz os erros sistemáticos e aleatórios dos dados da estação base através de uma adicional suavização de todas as correções diferenciais.

4.1 Caracterização dos receptores GPS quanto à precisão

Segundo o fabricante, o receptor GPS Pathfinder Pro XR possui uma precisão (rms), após a correção diferencial, melhor que 50 cm quando se rastreia com código C/A, no programa GPS Pathfinder Office v. 3.0 ou superior e observando uma coleta

de pontos ou vértices durante um período mínimo de 1 minuto com taxa de gravação de 5 segundos ou menor, usando uma estação base Pathfinder Pro XR ou Pro XRS brasileira registrando a cada 5 segundos ou menos, numa linha base de até 300 km.

O receptor GS20 PDM possui uma precisão da linha de base em pós processamento, utilizando a técnica de Código de 30cm (rms). Segundo informações do fabricante o limite da linha base é de 250 km.

4.2 Caracterização dos programas comerciais de processamento de dados GPS

As características dos dois programas comerciais de processamento de dados GPS utilizados nesta pesquisa que são o GPS Pathfinder Office 3.0 da Empresa Trimble e o GIS DataPRO da Empresa Leica, foram obtidas em 27 de maio de 2005 nos endereços dos fabricantes: <www.trimble.com> e <www.leica-geosystems.com>.

Os títulos pesquisados em ambos os programas, no item “Ajuda”, foram: arquivos de base, correção diferencial, distância entre base e o *rover*, estimações de precisão, fatores que afetam a precisão, GPS diferencial, obtenção da acurácia máxima, operações de processamento, processamento por código, pós-processamento, propriedades do ponto e modelo estocástico. Nos folhetos de divulgação comercial, os títulos pesquisados foram: pós-processamento, precisão e correção diferencial.

4.2.1 Características do programa GPS Pathfinder Office 3.0

As informações aqui enunciadas foram retiradas do item ajuda do referido programa e por consultas ao fabricante.

4.2.1.1 Correção diferencial

A utilidade “Correção Diferencial” é produzida pela Trimble Navigation Limited para corrigir diferencialmente dados GPS de campo. É executada sob o Windows 95, Windows NT 4, e mais atuais.

A utilidade “Correção Diferencial” permite remover erros dos dados GPS causados pela Disponibilidade Seletiva e outros fatores. Melhora a exatidão das posições GPS de aproximadamente 100m para entre menos de um metro e cinco metros, dependendo do receptor e da técnica de coleta de dados usada.

4.2.1.2 Distância entre a estação de base e o receptor *rover*

A acurácia da correção diferencial se degrada quando a distância entre a estação base e o receptor *rover* aumenta. Uma estimativa desta degradação é de duas partes por milhão (ppm). Por exemplo, 2mm de degradação ocorrem para cada quilômetro entre a base e o receptor *rover*.

4.2.1.3 Estimativas da precisão

A utilidade “Correção Diferencial” produz informações de acurácia para cada posição GPS que foi corrigida diferencialmente com êxito. São gerados várias informações.

Erros posicionais são gerados pela utilidade “Correção Diferencial” para cada componente, norte, leste e altitude da posição. A informação vem apresentada em termos do erro padrão para cada componente das três posições dimensionais. A figura seguinte ilustra cada componente do erro posicional.

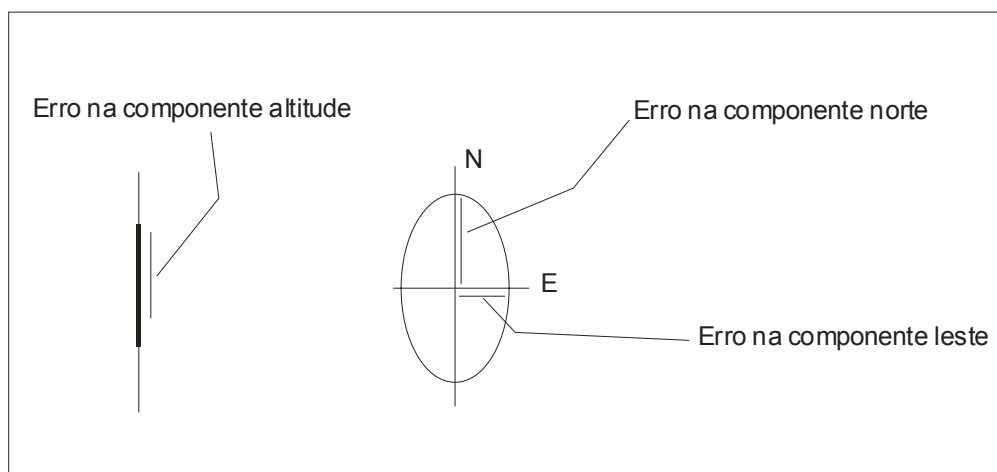


Diagrama do erro posicional

Figura 4.1 – Componentes do erro posicional apresentados pelo programa GPS Pathfinder Office 3.0

Os valores dos parâmetros da elipse dos erros gerados pela utilidade “Correção Diferencial” fornece informações bidimensionais com respeito à orientação relativa. A elipse de erro (figura 3.3) identifica um acesso maior e menor, e a orientação do eixo maior (ou desvio do eixo maior do norte).

A utilidade “Correção Diferencial” produz um nível de confiança para cada posição GPS. O nível estatístico de confiança gerado para cada posição pode ser 68,3% (que corresponde a 1 vez o desvio padrão), 95,5% (que corresponde a 2 vezes o desvio padrão), ou 99,7% (que corresponde a 3 vezes o desvio padrão). Isto vem configurado no diálogo “Opções/Unidades” do programa GPS Pathfinder Office.

O nível de confiança, expresso em probabilidade, e a estimativa atual da precisão possuem uma relação inversa. Isto é, para uma posição determinada, maior a probabilidade, menor a estimativa e vice-versa. Por exemplo, para uma posição, pode-se possuir uma probabilidade de 99% que a posição estará dentro de dois metros da verdade. No entanto, para a mesma posição, pode-se ter uma probabilidade de 68% que a posição está 0,6 metros distante do ponto médio.

Fatores que possam influenciar as estimativas de precisão incluem o tipo de receptor que é utilizado, a distância entre os receptores da base e a distância de receptores *rovers* entre a estação base e o receptor *rover*, Posição da Diluição da Precisão (PDOP), e variantes de referência produzidas durante o processamento da fase portadora.

Se os dados são processados por código com a utilidade da correção diferencial, somente se deve coletar dados dentro do perímetro de 500km da estação de base.

Se processar com fase da onda portadora os dados com a utilidade da correção diferencial, devem-se somente coletar dados dentro de 50km da estação da base.

O programa de processamento GPS Pathfinder Office 3.0 não fornece a resultante das componentes do erro de posição que é um dado importante para que o usuário possa ter mais certeza quanto ao cálculo das coordenadas de seus levantamentos. Sabe-se que a resultante é calculada pela raiz quadrada do traço da matriz variância-covariância das coordenadas estimadas.

4.2.2 Características do Programa GIS DataPRO

Os dados referentes à metodologia utilizada por este programa para calcular as coordenadas dos pontos levantados foram obtidos por busca no item ajuda e por consultas ao fabricante. As principais quantidades são:

- a) $M_0 = \hat{\sigma}_0^2$: variância da unidade de peso *a posteriori*;
- b) q_{ii} : *i*-ésimo elemento da matriz de cofatores de covariância;
- c) $\hat{\sigma}_i = \sigma_0 \sqrt{q_{ii}}$: desvio padrão da coordenada estimada.

A matriz de cofatores de covariância é a inversa da matriz de coeficientes das incógnitas do sistema de equações normais do ajustamento pelo método dos mínimos quadrados (MMQ).

A matriz variância-covariância (MVC) das coordenadas estimadas, denotada pelo símbolo $\Sigma_{\hat{\mathbf{x}}}$, é obtida do produto da variância da unidade de peso *a posteriori* $\hat{\sigma}_0^2$ pela matriz de coeficientes de covariância $\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}}$.

4.3 Matriz de coeficientes de covariância

As coordenadas estimadas encontram-se no vetor $\hat{\mathbf{x}}$ e seus coeficientes de precisão na matriz de coeficientes de covariância das incógnitas $\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}}$ que é a inversa da matriz dos coeficientes das incógnitas das equações normais dada por:

$$\mathbf{N} = (\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1}. \quad (4.1)$$

Na equação (4.1) a matriz \mathbf{A} compreende as derivadas parciais das equações de observação em relação às incógnitas. Genericamente, seja a função:

$$\mathbf{y} = f(\mathbf{x}), \quad (4.2)$$

em que

$$\mathbf{y}^T = [y_1 \ y_2 \ \dots \ y_i \ \dots \ y_n], \quad (4.3)$$

$$\mathbf{x}^T = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_i \ \dots \ x_u], \quad (4.4)$$

avaliada com o vetor dos valores aproximados \mathbf{x}^0 das incógnitas, de forma:

$$\mathbf{A} = [a_{ij}]_{n \times u} = \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial y_1}{\partial x_j} & \dots & \frac{\partial y_1}{\partial x_u} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial y_2}{\partial x_j} & \dots & \frac{\partial y_2}{\partial x_u} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial y_i}{\partial x_1} & \frac{\partial y_i}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial y_i}{\partial x_j} & \dots & \frac{\partial y_i}{\partial x_u} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial y_n}{\partial x_1} & \frac{\partial y_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial y_n}{\partial x_j} & \dots & \frac{\partial y_n}{\partial x_u} \end{bmatrix}, \quad (4.5)$$

$$\mathbf{P} = \text{diag} \left[\frac{\sigma_0^2}{s_{l_1}^2} \ \frac{\sigma_0^2}{s_{l_2}^2} \ \dots \ \frac{\sigma_0^2}{s_{l_i}^2} \ \dots \ \frac{\sigma_0^2}{s_{l_n}^2} \right]. \quad (4.6)$$

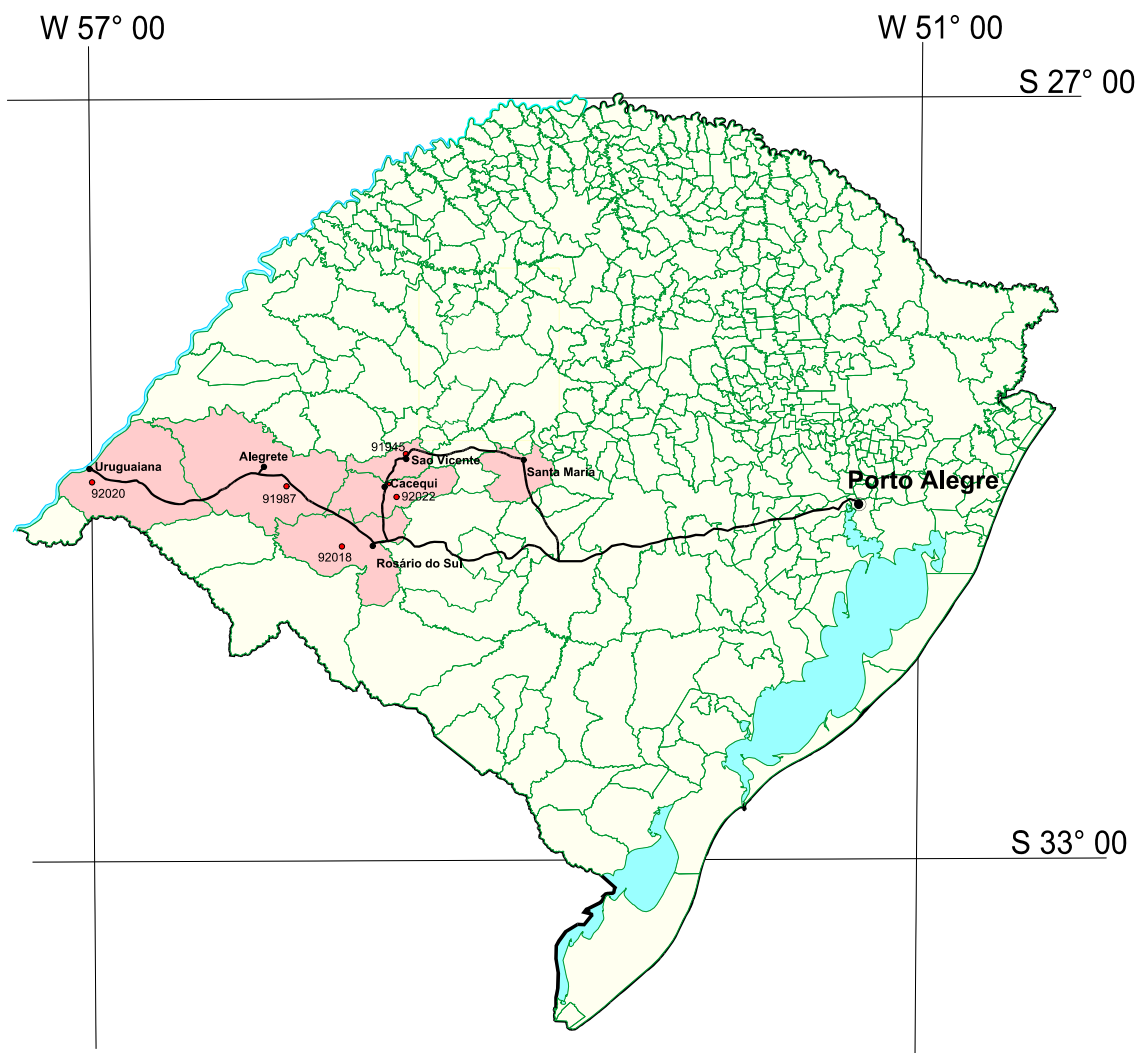
A variância σ_0^2 , no ajustamento de observações geodésicas, chama-se variância de uma observação de peso unitário (KOCH & POPE, 1969, p. 390), e pode ser entendida como a variância da população, pois a esperança da variância amostral s^2 é a variância populacional σ^2 . A matriz de coeficientes de covariância das incógnitas estimadas no ajustamento pelo MMQ é obtida da relação:

$$\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{N}^{-1} = \begin{bmatrix} q_{11} & & & & & \\ q_{21} & q_{22} & & & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & & & \\ q_{i1} & q_{i2} & \cdots & q_{ii} & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ q_{u1} & q_{u2} & \cdots & q_{ij} & \cdots & q_{uu} \end{bmatrix}_{uxu \text{ (simétrica)}} \quad (4.7)$$

A matriz $\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}}$ descreve o comportamento estocástico do vetor das incógnitas $\hat{\mathbf{x}}$.

4.4 Localização dos marcos ocupados para a pesquisa

O mapa 4.1 mostra a localização dos marcos ocupados e as suas coordenadas no quadro 4.1.



Mapa 4.1 – Marcos Uruguaiana, Alegrete, Rosário do Sul, Cacequi e São Vicente do Sul

Município	Coordenadas UTM		altitude elipsóidica [m]	$\hat{\sigma}_\varphi$ [m]	$\hat{\sigma}_\lambda$ [m]	código
	N [m]	E [m]				
Uruguaiana	6.699.664,743	490.125,88	70,26	0,004	0,01	92020
Alegrete	6.690.920,052	619.548,616	134,05	0,003	0,01	91987
Rosário do Sul	6.656.211,843	674.241,098	157,72	0,004	0,01	92018
Cacequi	6.689.008,183	710.386,492	93,38	0,004	0,01	92022
São Vicente do Sul	6.715.958,483	725.292,175	124,79	0,009	0,027	91945

Quadro 4.1 – Coordenadas oficiais dos marcos referenciadas no Sistema de Referência SAD-69
 FONTE: IBGE (2005)

4.4.1 Marco Cacequi

O marco Cacequi (código 92022) está localizado no Antigo Jockey Club da Cidade de Cacequi-RS.



Fotografia 4.1 - Marco Cacequi (código 92022)

4.4.2 Marco São Vicente do Sul

O Marco São Vicente do Sul (código 91945) está localizado na antiga Pista de Pouso Salsinho, em São Vicente do Sul-RS.



Fotografia 4.2 - Marco São Vicente do Sul (código 91945)

5 RESULTADOS E ANÁLISE

Neste capítulo são apresentados as planilhas com os resultados dos processamentos, obtendo as estatísticas univariadas: média, variância, desvio padrão e estimativa de acurácia. Calcula-se também o erro linear absoluto. Com essas estatísticas são calculados o intervalo de confiança para a média e intervalo de confiança para o desvio padrão. Obtém-se também as estimativas da Estatística multivariada.

5.1 Planilhas dos dados processados, estimativas pontuais, estimativas de acurácia e estimativa do erro linear absoluto

Os parâmetros estatísticos da seção 2.3 interpretados para os dados desta pesquisa são escritos na forma:

- a) média das coordenadas UTM Este e Norte

$$\bar{E} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (E_i), \quad (5.1)$$

$$\bar{N} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (N_i); \quad (5.2)$$

- b) desvio padrão da amostra das coordenadas UTM Este e Norte

$$s_E = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (E_i - \bar{E})^2}, \quad (5.3)$$

$$s_N = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (N_i - \bar{N})^2}; \quad (5.4)$$

As estimativas de acurácia são dadas por:

- a) estimativa de acurácia para a coordenada UTM Este

$$s_{R_E} = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (E_i - E_R)^2}, \quad (5.5)$$

em que E_R é a coordenada Este do marco de referência;

- b) estimativa de acurácia para a coordenada UTM Norte:

$$s_{R_N} = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (N_i - N_R)^2}, \quad (5.6)$$

em que N_R é a coordenada Norte do marco de referência.

A estimativa do erro linear absoluto é dada por:

$$\varepsilon_{\text{abs}} = \sqrt{(\bar{E} - E_R)^2 + (\bar{N} - N_R)^2}. \quad (5.7)$$

5.1.1 Planilhas dos dados Pro XR processados com dados da Estação SC, estimativas pontuais, estimativas de acurácia e estimativa do erro linear absoluto

1 Marco Uruguiana

Pro XR - Uruguiana							
N.º	Descrição	Dados da Coordenada E			Dados da Coordenada N		
		Coordenada E	$E_i - \bar{E}$	$(E_i - \bar{E})^2$	Coordenada N	$N_i - \bar{N}$	$(N_i - \bar{N})^2$
1	POINT00001	490.124,7143	-0,1374	0,0189	6.699.658,1245	0,0576	0,0033
2	POINT00002	490.124,7977	-0,0540	0,0029	6.699.658,0733	0,0064	0,0000
3	POINT00003	490.124,8203	-0,0315	0,0010	6.699.657,7922	-0,2747	0,0755
4	POINT00004	490.125,0549	0,2031	0,0413	6.699.657,7064	-0,3605	0,1299
5	POINT00005	490.125,2006	0,3489	0,1217	6.699.658,0196	-0,0473	0,0022
6	POINT00006	490.125,0078	0,1561	0,0244	6.699.658,0986	0,0317	0,0010
7	POINT00007	490.124,9035	0,0518	0,0027	6.699.658,1527	0,0858	0,0074
8	POINT00008	490.124,9467	0,0950	0,0090	6.699.658,2453	0,1784	0,0318
9	POINT00009	490.124,9959	0,1442	0,0208	6.699.658,3418	0,2749	0,0756
10	POINT00010	490.125,0391	0,1874	0,0351	6.699.658,3208	0,2539	0,0645
11	POINT00011	490.125,1331	0,2813	0,0791	6.699.658,3334	0,2665	0,0710
12	POINT00012	490.124,9689	0,1171	0,0137	6.699.658,3661	0,2992	0,0895
13	POINT00013	490.124,8706	0,0188	0,0004	6.699.658,3923	0,3254	0,1059
14	POINT00014	490.124,9276	0,0758	0,0057	6.699.658,4186	0,3518	0,1237
15	POINT00015	490.124,9114	0,0597	0,0036	6.699.658,4047	0,3378	0,1141
16	POINT00016	490.124,6893	-0,1625	0,0264	6.699.658,3981	0,3312	0,1097
17	POINT00017	490.124,4949	-0,3568	0,1273	6.699.658,2891	0,2223	0,0494
18	POINT00018	490.124,5497	-0,3020	0,0912	6.699.658,2827	0,2158	0,0466
19	POINT00019	490.124,6384	-0,2133	0,0455	6.699.658,2514	0,1845	0,0341
20	POINT00020	490.124,6648	-0,1869	0,0349	6.699.658,3444	0,2775	0,0770
21	POINT00021	490.124,8941	0,0424	0,0018	6.699.658,3743	0,3074	0,0945
22	POINT00022	490.125,1384	0,2866	0,0822	6.699.658,3153	0,2484	0,0617
23	POINT00023	490.124,8889	0,0372	0,0014	6.699.658,0246	-0,0423	0,0018
24	POINT00024	490.124,7053	-0,1464	0,0214	6.699.657,7240	-0,3429	0,1176
25	POINT00025	490.124,8303	-0,0215	0,0005	6.699.657,8933	-0,1736	0,0301
26	POINT00026	490.124,9133	0,0616	0,0038	6.699.658,0902	0,0233	0,0005
27	POINT00027	490.124,8815	0,0297	0,0009	6.699.658,1424	0,0755	0,0057
28	POINT00028	490.124,9553	0,1035	0,0107	6.699.658,2737	0,2069	0,0428
29	POINT00029	490.124,9831	0,1314	0,0173	6.699.658,2192	0,1523	0,0232
30	POINT00030	490.124,9264	0,0747	0,0056	6.699.657,9340	-0,1329	0,0177
31	POINT00031	490.124,9191	0,0673	0,0045	6.699.657,8151	-0,2518	0,0634
32	POINT00032	490.124,8870	0,0352	0,0012	6.699.657,8185	-0,2484	0,0617
33	POINT00033	490.124,9976	0,1459	0,0213	6.699.657,8275	-0,2394	0,0573
34	POINT00034	490.124,9090	0,0573	0,0033	6.699.657,8732	-0,1936	0,0375
35	POINT00035	490.124,7039	-0,1478	0,0219	6.699.657,6982	-0,3686	0,1359
36	POINT00036	490.124,6012	-0,2506	0,0628	6.699.657,5978	-0,4690	0,2200
37	POINT00037	490.124,6066	-0,2451	0,0601	6.699.657,6152	-0,4517	0,2041
38	POINT00038	490.124,6525	-0,1992	0,0397	6.699.657,6942	-0,3727	0,1389
39	POINT00039	490.124,7325	-0,1193	0,0142	6.699.657,7268	-0,3401	0,1157
40	POINT00040	490.124,6140	-0,2378	0,0565	6.699.657,6619	-0,4050	0,1640
n = 40		$\bar{E} = 490.124,8517m$		$\sum_{i=1}^n (E_i - \bar{E})^2 = 1,1366 m^2$	$\bar{N} = 6.699.658,0669m$		$\sum_{i=1}^n (N_i - \bar{N})^2 = 2,8063 m^2$
Desvio Padrão Calculado				$S_E = 0,1707m$			$S_N = 0,2682m$
Acurácia do Ponto				$S_{R_E} = 1,0553m$			$S_{R_N} = 6,7665m$
Erro Linear Absoluto				$\epsilon_{labs} = 6,7548m$			

Planilha 5.1 – Marco Uruguiana: dados Pro XR processados com dados da Estação SC, estimativas pontuais, estimativas de acurácia e estimativa do erro linear absoluto

2 Marco Alegrete

Pro XR - Alegrete							
N.º	Descrição	Dados da Coordenada E			Dados da Coordenada N		
		Coordenada E	$E_i - \bar{E}$	$(E_i - \bar{E})^2$	Coordenada N	$N_i - \bar{N}$	$(N_i - \bar{N})^2$
1	POINT00001	619.549,1077	0,2324	0,0540	6.690.919,3633	-0,2814	0,0792
2	POINT00002	619.548,9827	0,1075	0,0116	6.690.919,2545	-0,3902	0,1522
3	POINT00003	619.548,9763	0,1011	0,0102	6.690.919,2532	-0,3915	0,1533
4	POINT00004	619.548,9337	0,0585	0,0034	6.690.919,2584	-0,3862	0,1492
5	POINT00005	619.548,8590	-0,0163	0,0003	6.690.919,1989	-0,4457	0,1987
6	POINT00006	619.548,8607	-0,0145	0,0002	6.690.919,2814	-0,3632	0,1319
7	POINT00007	619.548,9509	0,0756	0,0057	6.690.919,4205	-0,2241	0,0502
8	POINT00008	619.549,0362	0,1609	0,0259	6.690.919,5361	-0,1085	0,0118
9	POINT00009	619.549,1733	0,2981	0,0889	6.690.919,5991	-0,0455	0,0021
10	POINT00010	619.549,2394	0,3642	0,1326	6.690.919,6180	-0,0266	0,0007
11	POINT00011	619.549,2729	0,3976	0,1581	6.690.919,6521	0,0074	0,0001
12	POINT00012	619.549,1923	0,3170	0,1005	6.690.919,6095	-0,0352	0,0012
13	POINT00013	619.549,0263	0,1510	0,0228	6.690.919,5987	-0,0460	0,0021
14	POINT00014	619.548,8582	-0,0171	0,0003	6.690.919,6485	0,0038	0,0000
15	POINT00015	619.548,6734	-0,2018	0,0407	6.690.919,7675	0,1228	0,0151
16	POINT00016	619.548,5677	-0,3076	0,0946	6.690.919,7157	0,0710	0,0050
17	POINT00017	619.548,6283	-0,2469	0,0610	6.690.919,6442	-0,0005	0,0000
18	POINT00018	619.548,7450	-0,1302	0,0170	6.690.919,5762	-0,0684	0,0047
19	POINT00019	619.548,7690	-0,1063	0,0113	6.690.919,4959	-0,1487	0,0221
20	POINT00020	619.548,6576	-0,2177	0,0474	6.690.919,4842	-0,1604	0,0257
21	POINT00021	619.548,7159	-0,1593	0,0254	6.690.919,4732	-0,1714	0,0294
22	POINT00022	619.548,8248	-0,0505	0,0025	6.690.919,5641	-0,0805	0,0065
23	POINT00023	619.548,8676	-0,0077	0,0001	6.690.919,7084	0,0637	0,0041
24	POINT00024	619.548,8371	-0,0381	0,0015	6.690.919,8735	0,2288	0,0523
25	POINT00025	619.548,6951	-0,1801	0,0324	6.690.919,9343	0,2896	0,0839
26	POINT00026	619.548,5627	-0,3126	0,0977	6.690.919,8995	0,2549	0,0650
27	POINT00027	619.548,4958	-0,3795	0,1440	6.690.919,7912	0,1466	0,0215
28	POINT00028	619.548,5397	-0,3355	0,1126	6.690.919,7717	0,1271	0,0161
29	POINT00029	619.548,6158	-0,2594	0,0673	6.690.919,7384	0,0938	0,0088
30	POINT00030	619.548,7283	-0,1470	0,0216	6.690.919,7342	0,0895	0,0080
31	POINT00031	619.548,8058	-0,0694	0,0048	6.690.919,7064	0,0618	0,0038
32	POINT00032	619.548,9730	0,0978	0,0096	6.690.919,8018	0,1571	0,0247
33	POINT00033	619.549,0681	0,1929	0,0372	6.690.919,8826	0,2380	0,0566
34	POINT00034	619.549,0655	0,1903	0,0362	6.690.920,0302	0,3855	0,1486
35	POINT00035	619.549,0387	0,1634	0,0267	6.690.920,0315	0,3868	0,1496
36	POINT00036	619.548,9790	0,1038	0,0108	6.690.919,9091	0,2645	0,0700
37	POINT00037	619.548,9535	0,0782	0,0061	6.690.919,8402	0,1955	0,0382
38	POINT00038	619.548,9668	0,0916	0,0084	6.690.919,7981	0,1535	0,0236
39	POINT00039	619.548,9559	0,0807	0,0065	6.690.919,6589	0,0142	0,0002
40	POINT00040	619.548,8102	-0,0650	0,0042	6.690.919,6632	0,0185	0,0003
n = 40		$\bar{E} = 619.548,8753$ m		$\sum_{i=1}^n (E_i - \bar{E})^2 =$ 1,5420 m ²	$\bar{N} = 6.690.919,6447$ m		$\sum_{i=1}^n (N_i - \bar{N})^2 =$ 1,8165 m ²
Desvio Padrão Calculado				$S_E = 0,1988$ m			$S_N = 0,2158$ m
Acurácia do Ponto				$S_{R_E} = 0,3294$ m			$S_{R_N} = 0,4656$ m
Erro Linear Absoluto				$\varepsilon_{labs} = 0,4828$ m			

Planilha 5.2 – Marco Alegrete: dados Pro XR processados com dados da Estação SC, estimativas pontuais, estimativas de acurácia e estimativa do erro linear absoluto

3 Marco Rosário do Sul

Pro XR – Rosário do Sul							
N.º	Descrição	Dados da Coordenada E			Dados da Coordenada N		
		Coordenada E	$E_i - \bar{E}$	$(E_i - \bar{E})^2$	Coordenada N	$N_i - \bar{N}$	$(N_i - \bar{N})^2$
1	POINT00001	674.240,6745	-0,2995	0,0897	6.656.211,5486	-0,0676	0,0046
2	POINT00002	674.240,7812	-0,1928	0,0372	6.656.211,5594	-0,0568	0,0032
3	POINT00003	674.240,8828	-0,0911	0,0083	6.656.211,6820	0,0658	0,0043
4	POINT00004	674.240,9382	-0,0358	0,0013	6.656.211,7841	0,1679	0,0282
5	POINT00005	674.241,0097	0,0357	0,0013	6.656.211,9221	0,3059	0,0936
6	POINT00006	674.240,8986	-0,0753	0,0057	6.656.211,8425	0,2264	0,0512
7	POINT00007	674.240,8405	-0,1335	0,0178	6.656.211,7221	0,1059	0,0112
8	POINT00008	674.240,7340	-0,2400	0,0576	6.656.211,6343	0,0181	0,0003
9	POINT00009	674.240,7005	-0,2735	0,0748	6.656.211,5451	-0,0710	0,0050
10	POINT00010	674.240,6444	-0,3296	0,1086	6.656.211,5121	-0,1041	0,0108
11	POINT00011	674.240,7242	-0,2497	0,0624	6.656.211,5102	-0,1060	0,0112
12	POINT00012	674.240,8505	-0,1234	0,0152	6.656.211,5897	-0,0265	0,0007
13	POINT00013	674.240,8323	-0,1417	0,0201	6.656.211,6335	0,0173	0,0003
14	POINT00014	674.240,8540	-0,1200	0,0144	6.656.211,6232	0,0070	0,0000
15	POINT00015	674.240,9289	-0,0451	0,0020	6.656.211,6164	0,0002	0,0000
16	POINT00016	674.241,1195	0,1456	0,0212	6.656.211,6980	0,0818	0,0067
17	POINT00017	674.241,1834	0,2094	0,0438	6.656.211,6585	0,0424	0,0018
18	POINT00018	674.241,2092	0,2352	0,0553	6.656.211,6437	0,0276	0,0008
19	POINT00019	674.241,1163	0,1423	0,0203	6.656.211,5799	-0,0363	0,0013
20	POINT00020	674.240,8708	-0,1032	0,0106	6.656.211,4047	-0,2114	0,0447
21	POINT00021	674.240,7790	-0,1950	0,0380	6.656.211,3564	-0,2598	0,0675
22	POINT00022	674.240,9094	-0,0645	0,0042	6.656.211,3037	-0,3124	0,0976
23	POINT00023	674.240,9635	-0,0105	0,0001	6.656.211,3534	-0,2627	0,0690
24	POINT00024	674.241,0537	0,0797	0,0064	6.656.211,4542	-0,1620	0,0262
25	POINT00025	674.240,9990	0,0250	0,0006	6.656.211,4868	-0,1294	0,0167
26	POINT00026	674.240,9039	-0,0701	0,0049	6.656.211,5703	-0,0459	0,0021
27	POINT00027	674.240,9181	-0,0559	0,0031	6.656.211,6900	0,0738	0,0054
28	POINT00028	674.240,9472	-0,0267	0,0007	6.656.211,7282	0,1120	0,0125
29	POINT00029	674.241,0299	0,0560	0,0031	6.656.211,6171	0,0009	0,0000
30	POINT00030	674.241,1748	0,2008	0,0403	6.656.211,5335	-0,0827	0,0068
31	POINT00031	674.241,2228	0,2488	0,0619	6.656.211,6556	0,0394	0,0016
32	POINT00032	674.241,2741	0,3002	0,0901	6.656.211,7900	0,1739	0,0302
33	POINT00033	674.241,3056	0,3316	0,1100	6.656.211,8666	0,2504	0,0627
34	POINT00034	674.241,3011	0,3271	0,1070	6.656.211,8365	0,2204	0,0486
35	POINT00035	674.241,1363	0,1623	0,0264	6.656.211,6670	0,0508	0,0026
36	POINT00036	674.241,0210	0,0470	0,0022	6.656.211,5591	-0,0571	0,0033
37	POINT00037	674.240,9411	-0,0329	0,0011	6.656.211,5451	-0,0710	0,0050
38	POINT00038	674.240,9918	0,0178	0,0003	6.656.211,5383	-0,0779	0,0061
39	POINT00039	674.241,0652	0,0912	0,0083	6.656.211,5740	-0,0421	0,0018
40	POINT00040	674.241,2281	0,2541	0,0646	6.656.211,8111	0,1949	0,0380
n = 40		$\bar{E} = 674.240,9740\text{m}$		$\sum_{i=1}^n (E_i - \bar{E})^2 = 1,2410\text{m}^2$		$\bar{N} = 6.656.211,6162\text{m}$	$\sum_{i=1}^n (N_i - \bar{N})^2 = 0,7839\text{m}^2$
Desvio Padrão Calculado				$S_E = 0,1784\text{m}$			$S_N = 0,1418\text{m}$
Acurácia do Ponto				$S_{R_E} = 0,2182\text{m}$			$S_{R_N} = 0,2699\text{m}$
Erro Linear Absoluto				$\epsilon_{\text{labs}} = 0,2585\text{m}$			

Planilha 5.3 – Marco Rosário do Sul: dados Pro XR processados com dados da Estação SC, estimativas pontuais, estimativas de acurácia e estimativa do erro linear absoluto

4 Marco Cacequi

Pro XR - Cacequi							
N.º	Descrição	Dados da Coordenada E			Dados da Coordenada N		
		Coordenada E	$E_i - \bar{E}$	$(E_i - \bar{E})^2$	Coordenada N	$N_i - \bar{N}$	$(N_i - \bar{N})^2$
1	POINT00001	710.385,8194	-0,9183	0,8432	6.689.008,2543	0,1617	0,0262
2	POINT00002	710.386,2514	-0,4862	0,2364	6.689.007,9530	-0,1396	0,0195
3	POINT00003	710.386,5105	-0,2271	0,0516	6.689.007,8230	-0,2696	0,0727
4	POINT00004	710.386,6820	-0,0557	0,0031	6.689.007,6642	-0,4284	0,1835
5	POINT00005	710.386,7396	0,0020	0,0000	6.689.007,7921	-0,3005	0,0903
6	POINT00006	710.386,7889	0,0512	0,0026	6.689.008,0224	-0,0702	0,0049
7	POINT00007	710.386,8544	0,1167	0,0136	6.689.008,0411	-0,0515	0,0027
8	POINT00008	710.386,8165	0,0788	0,0062	6.689.007,9306	-0,1619	0,0262
9	POINT00009	710.386,7000	-0,0377	0,0014	6.689.007,8737	-0,2189	0,0479
10	POINT00010	710.386,7617	0,0241	0,0006	6.689.007,8422	-0,2504	0,0627
11	POINT00011	710.386,7081	-0,0295	0,0009	6.689.007,8428	-0,2498	0,0624
12	POINT00012	710.386,6139	-0,1238	0,0153	6.689.007,8283	-0,2643	0,0698
13	POINT00013	710.386,7011	-0,0365	0,0013	6.689.007,7535	-0,3391	0,1150
14	POINT00014	710.386,8180	0,0803	0,0064	6.689.007,7228	-0,3698	0,1368
15	POINT00015	710.386,8905	0,1529	0,0234	6.689.007,7662	-0,3264	0,1066
16	POINT00016	710.386,9287	0,1911	0,0365	6.689.007,7224	-0,3702	0,1371
17	POINT00017	710.386,9832	0,2455	0,0603	6.689.007,6372	-0,4554	0,2074
18	POINT00018	710.386,9681	0,2304	0,0531	6.689.007,5528	-0,5398	0,2914
19	POINT00019	710.386,9247	0,1870	0,0350	6.689.007,5259	-0,5667	0,3212
20	POINT00020	710.386,8337	0,0961	0,0092	6.689.007,6394	-0,4532	0,2054
21	POINT00021	710.386,7553	0,0176	0,0003	6.689.007,8492	-0,2434	0,0592
22	POINT00022	710.386,6234	-0,1143	0,0131	6.689.008,1250	0,0324	0,0010
23	POINT00023	710.386,6790	-0,0586	0,0034	6.689.008,2737	0,1811	0,0328
24	POINT00024	710.386,7718	0,0342	0,0012	6.689.008,3050	0,2124	0,0451
25	POINT00025	710.386,9140	0,1764	0,0311	6.689.008,1867	0,0941	0,0089
26	POINT00026	710.386,8741	0,1364	0,0186	6.689.008,1800	0,0875	0,0076
27	POINT00027	710.386,8214	0,0837	0,0070	6.689.008,2151	0,1226	0,0150
28	POINT00028	710.386,7889	0,0513	0,0026	6.689.008,3664	0,2738	0,0750
29	POINT00029	710.386,7281	-0,0095	0,0001	6.689.008,3983	0,3057	0,0935
30	POINT00030	710.386,7387	0,0011	0,0000	6.689.008,5536	0,4611	0,2126
31	POINT00031	710.386,7814	0,0438	0,0019	6.689.008,8677	0,7751	0,6008
32	POINT00032	710.386,7513	0,0136	0,0002	6.689.008,8914	0,7988	0,6381
33	POINT00033	710.386,7667	0,0290	0,0008	6.689.008,8291	0,7365	0,5425
34	POINT00034	710.386,7481	0,0105	0,0001	6.689.008,9649	0,8723	0,7609
35	POINT00035	710.386,7811	0,0435	0,0019	6.689.009,0466	0,9540	0,9101
n = 35		$\bar{E} = 710.386,7376\text{m}$		$\sum_{i=1}^n (E_i - \bar{E})^2 = 1,4826 \text{ m}^2$	$\bar{N} = 6.689.008,0926\text{m}$		$\sum_{i=1}^n (N_i - \bar{N})^2 = 6,1926 \text{ m}^2$
Desvio Padrão Calculado				$S_E = 0,2088\text{m}$			$S_N = 0,4268\text{m}$
Acurácia do Ponto				$S_{R_E} = 0,3252\text{m}$			$S_{R_N} = 0,4365\text{m}$
Erro Linear Absoluto				$\varepsilon_{\text{labs}} = 0,2618\text{m}$			

Planilha 5.4 – Marco Cacequi: dados Pro XR processados com dados da Estação SC, estimativas pontuais, estimativas de acurácia e estimativa do erro linear absoluto

5 Marco São Vicente do Sul

Pro XR – SãoVicente do Sul							
N.º	Descrição	Dados da Coordenada E			Dados da Coordenada N		
		Coordenada E	$E_i - \bar{E}$	$(E_i - \bar{E})^2$	Coordenada N	$N_i - \bar{N}$	$(N_i - \bar{N})^2$
1	POINT00001	725.292,343	0,010	0,000	6.715.958,511	0,009	0,000
2	POINT00002	725.292,303	-0,031	0,001	6.715.958,459	-0,044	0,002
3	POINT00003	725.292,266	-0,068	0,005	6.715.958,417	-0,086	0,007
4	POINT00004	725.292,258	-0,075	0,006	6.715.958,382	-0,121	0,015
5	POINT00005	725.292,256	-0,077	0,006	6.715.958,330	-0,173	0,030
6	POINT00006	725.292,289	-0,045	0,002	6.715.958,432	-0,071	0,005
7	POINT00007	725.292,294	-0,039	0,002	6.715.958,431	-0,072	0,005
8	POINT00008	725.292,252	-0,081	0,007	6.715.958,282	-0,220	0,049
9	POINT00009	725.292,132	-0,201	0,041	6.715.958,309	-0,194	0,038
10	POINT00010	725.292,158	-0,176	0,031	6.715.958,265	-0,238	0,057
11	POINT00011	725.292,293	-0,040	0,002	6.715.958,315	-0,188	0,035
12	POINT00012	725.292,339	0,005	0,000	6.715.958,439	-0,064	0,004
13	POINT00013	725.292,280	-0,053	0,003	6.715.958,557	0,054	0,003
14	POINT00014	725.292,229	-0,105	0,011	6.715.958,522	0,019	0,000
15	POINT00015	725.292,211	-0,122	0,015	6.715.958,485	-0,018	0,000
16	POINT00016	725.292,225	-0,109	0,012	6.715.958,507	0,004	0,000
17	POINT00017	725.292,255	-0,078	0,006	6.715.958,466	-0,037	0,001
18	POINT00018	725.292,366	0,033	0,001	6.715.958,479	-0,024	0,001
19	POINT00019	725.292,315	-0,018	0,000	6.715.958,565	0,063	0,004
20	POINT00020	725.292,154	-0,179	0,032	6.715.958,599	0,096	0,009
21	POINT00021	725.292,204	-0,130	0,017	6.715.958,669	0,166	0,028
22	POINT00022	725.292,355	0,021	0,000	6.715.958,777	0,274	0,075
23	POINT00023	725.292,424	0,090	0,008	6.715.958,688	0,185	0,034
24	POINT00024	725.292,511	0,177	0,031	6.715.958,623	0,120	0,014
25	POINT00025	725.292,596	0,262	0,069	6.715.958,627	0,124	0,015
26	POINT00026	725.292,594	0,260	0,068	6.715.958,482	-0,021	0,000
27	POINT00027	725.292,648	0,314	0,099	6.715.958,423	-0,080	0,006
28	POINT00028	725.292,594	0,260	0,068	6.715.958,451	-0,052	0,003
29	POINT00029	725.292,455	0,121	0,015	6.715.958,602	0,099	0,010
30	POINT00030	725.292,391	0,058	0,003	6.715.958,715	0,212	0,045
31	POINT00031	725.292,349	0,016	0,000	6.715.958,780	0,277	0,077
n = 31		$\bar{E} = 725.292,33352\text{m}$		$\sum_{i=1}^n (E_i - \bar{E})^2 = 0,5588 \text{ m}^2$	$\bar{N} = 6.715.958,5029\text{m}$		$\sum_{i=1}^n (N_i - \bar{N})^2 = 0,5728 \text{ m}^2$
Desvio Padrão Calculado				$S_E = 0,1365\text{m}$			$S_N = 0,1382\text{m}$
Acurácia do Ponto				$S_{R_E} = 0,2112\text{m}$			$S_{R_N} = 0,1396\text{m}$
Erro Linear Absoluto				$\epsilon_{\text{labs}} = 0,1598\text{m}$			

Planilha 5.5 – Marco São Vicente do Sul: dados Pro XR processados com dados da Estação SC, estimativas pontuais, estimativas de acurácia e estimativa do erro linear absoluto

5.1.1.1 Explicação das planilhas dos dados Pro XR

1 Marco Uruguaiana

As coordenadas oficiais do marco Uruguaiana são $E = 490.125,88\text{m}$ e $N = 6.699.664,743\text{m}$. Sobre a amostra de tamanho igual a 40 valores de coordenadas Este e Norte, conforme mostra a planilha 5.1, os valores médios (5.1 e 5.2) calculados são $\bar{E} = 490.124,8517\text{m}$ e $\bar{N} = 6.699.658,0669\text{m}$ e seus respectivos desvios padrões (5.3 e 5.4) calculados são $s_E = 0,1707\text{m}$ e $s_N = 0,2682\text{m}$. As estimativas de acurácia conforme a (5.5) e a (5.6), nas quais as referências são as coordenadas oficiais deste marco, são $s_{R_E} = 1,0553\text{m}$ e $s_{R_N} = 6,7665\text{m}$. O erro linear absoluto (5.7) que é a distância que separa o marco oficial do ponto dado pelos valores médios \bar{E} e \bar{N} é $\varepsilon_{\text{labs}} = 6,7548\text{m}$.

2 Marco Alegrete

As coordenadas oficiais do marco Alegrete são $E = 619.548,616\text{m}$ e $N = 6.690.920,052\text{m}$. Sobre a amostra de tamanho igual a 40 valores de coordenadas Este e Norte, conforme mostra a planilha 5.2, os valores médios (5.1 e 5.2) calculados são $\bar{E} = 619.548,8753\text{m}$ e $\bar{N} = 6.690.919,6447\text{m}$ e seus respectivos desvios padrões (5.3 e 5.4) calculados são $s_E = 0,1988\text{m}$ e $s_N = 0,2158\text{m}$. As estimativas de acurácia conforme a (5.5) e a (5.6), nas quais as referências são as coordenadas oficiais deste marco, são $s_{R_E} = 0,3294\text{m}$ e $s_{R_N} = 0,4656\text{m}$. O erro linear absoluto (5.7) que é a distância que separa o marco oficial do ponto dado pelos valores médios \bar{E} e \bar{N} é $\varepsilon_{\text{labs}} = 0,4828\text{m}$.

3 Marco Rosário do Sul

As coordenadas oficiais do marco Rosário do Sul são $E = 674.241,098\text{m}$ e $N = 6.656.211,843\text{m}$. Sobre a amostra de tamanho igual a 40 valores de coordenadas Este e Norte, conforme mostra a planilha 5.3, os valores médios (5.1 e 5.2) calculados são $\bar{E} = 674.240,9740\text{m}$ e $\bar{N} = 6.656.211,6162\text{m}$ e seus respectivos desvios

desvios padrões (5.3 e 5.4) calculados são $s_E = 0,1784\text{m}$ e $s_N = 0,1418\text{m}$. As estimativas de acurácia conforme a (5.5) e a (5.6), nas quais as referências são as coordenadas oficiais deste marco, são $s_{R_E} = 0,2182\text{m}$ e $s_{R_N} = 0,2699\text{m}$. O erro linear absoluto (5.7) que é a distância que separa o marco oficial do ponto dado pelos valores médios \bar{E} e \bar{N} é $\varepsilon_{\text{labs}} = 0,2585\text{m}$.

4 Marco Cacequi

As coordenadas oficiais do marco Cacequi são $E = 710.386,492\text{m}$ e $N = 6.689.008,183\text{m}$. Sobre a amostra de tamanho igual a 35 valores de coordenadas Este e Norte, conforme mostra a planilha 5.4, os valores médios (5.1 e 5.2) calculados são $\bar{E} = 710.386,7376\text{m}$ e $\bar{N} = 6.689.008,0926\text{m}$ e seus respectivos desvios padrões (5.3 e 5.4) calculados são $s_E = 0,2088\text{m}$ e $s_N = 0,4268\text{m}$. As estimativas de acurácia conforme a (5.5) e a (5.6), nas quais as referências são as coordenadas oficiais deste marco, são $s_{R_E} = 0,3252\text{m}$ e $s_{R_N} = 0,4365\text{m}$. O erro linear absoluto (5.7) que é a distância que separa o marco oficial do ponto dado pelos valores médios \bar{E} e \bar{N} é $\varepsilon_{\text{labs}} = 0,2618\text{m}$.

5 Marco São Vicente do Sul

As coordenadas oficiais do marco Uruguaiana são $E = 725.292,175\text{m}$ e $N = 6.715.958,483\text{m}$. Sobre a amostra de tamanho igual a 31 valores de coordenadas Este e Norte, conforme mostra a planilha 5.5, os valores médios (5.1 e 5.2) calculados são $\bar{E} = 725.292,33352\text{m}$ e $\bar{N} = 6.715.958,5029\text{m}$ e seus respectivos desvios padrões (5.3 e 5.4) calculados são $s_E = 0,1365\text{m}$ e $s_N = 0,1382\text{m}$. As estimativas de acurácia conforme a (5.5) e a (5.6), nas quais as referências são as coordenadas oficiais deste marco, são $s_{R_E} = 0,2112\text{m}$ e $s_{R_N} = 0,1396\text{m}$. O erro linear absoluto (5.7) que é a distância que separa o marco oficial do ponto dado pelos valores médios \bar{E} e \bar{N} é $\varepsilon_{\text{labs}} = 0,1598\text{m}$.

5.1.2 Planilhas dos dados GS20 processados com dados da Estação Santa Maria da RBMC, estimativas pontuais, estimativas de acurácia e estimativa do erro linear absoluto

1 Marco Uruguaiana

GS 20 - Uruguaiana							
N.º	Descrição	Dados da Coordenada E			Dados da Coordenada N		
		Coordenada E	$E_i - \bar{E}$	$(E_i - \bar{E})^2$	Coordenada N	$N_i - \bar{N}$	$(N_i - \bar{N})^2$
1	POINT00001	490.125,8820	-0,1074	0,0115	6.699.664,7010	-0,0509	0,0026
2	POINT00002	490.125,8980	-0,0914	0,0084	6.699.664,6650	-0,0869	0,0075
3	POINT00003	490.125,6520	-0,3374	0,1139	6.699.664,7910	0,0391	0,0015
4	POINT00004	490.125,7320	-0,2574	0,0663	6.699.665,0290	0,2771	0,0768
5	POINT00005	490.125,8860	-0,1034	0,0107	6.699.664,9270	0,1751	0,0307
6	POINT00006	490.125,7030	-0,2864	0,0820	6.699.664,9310	0,1791	0,0321
7	POINT00007	490.125,7850	-0,2044	0,0418	6.699.664,9790	0,2271	0,0516
8	POINT00008	490.125,6440	-0,3454	0,1193	6.699.664,9640	0,2121	0,0450
9	POINT00009	490.125,6060	-0,3834	0,1470	6.699.664,9660	0,2141	0,0458
10	POINT00010	490.125,6610	-0,3284	0,1079	6.699.664,8900	0,1381	0,0191
11	POINT00011	490.125,6910	-0,2984	0,0891	6.699.664,9090	0,1571	0,0247
12	POINT00012	490.125,5020	-0,4874	0,2376	6.699.664,9750	0,2231	0,0498
13	POINT00013	490.125,4700	-0,5194	0,2698	6.699.664,9360	0,1841	0,0339
14	POINT00014	490.125,5810	-0,4084	0,1668	6.699.664,7440	-0,0079	0,0001
15	POINT00015	490.124,4440	-1,5454	2,3883	6.699.665,2770	0,5251	0,2757
16	POINT00016	490.125,3440	-0,6454	0,4166	6.699.664,8130	0,0611	0,0037
17	POINT00017	490.125,4190	-0,5704	0,3254	6.699.664,8190	0,0671	0,0045
18	POINT00018	490.125,5250	-0,4644	0,2157	6.699.664,6940	-0,0579	0,0034
19	POINT00019	490.127,0610	1,0716	1,1483	6.699.664,2200	-0,5319	0,2829
20	POINT00020	490.126,1740	0,1846	0,0341	6.699.664,8410	0,0891	0,0079
21	POINT00021	490.126,3080	0,3186	0,1015	6.699.664,7250	-0,0269	0,0007
22	POINT00022	490.126,4010	0,4116	0,1694	6.699.664,7820	0,0301	0,0009
23	POINT00023	490.126,3260	0,3366	0,1133	6.699.664,9250	0,1731	0,0300
24	POINT00024	490.126,2610	0,2716	0,0738	6.699.664,7530	0,0011	0,0000
25	POINT00025	490.126,4740	0,4846	0,2348	6.699.664,5490	-0,2029	0,0412
26	POINT00026	490.126,3910	0,4016	0,1613	6.699.664,7510	-0,0009	0,0000
27	POINT00027	490.126,4340	0,4446	0,1976	6.699.664,6250	-0,1269	0,0161
28	POINT00028	490.126,4990	0,5096	0,2597	6.699.664,4990	-0,2529	0,0640
29	POINT00029	490.126,3930	0,4036	0,1629	6.699.664,5510	-0,2009	0,0404
30	POINT00030	490.126,6760	0,6866	0,4714	6.699.664,5150	-0,2369	0,0561
31	POINT00031	490.126,8420	0,8526	0,7269	6.699.664,1520	-0,5999	0,3599
32	POINT00032	490.126,4770	0,4876	0,2377	6.699.664,4970	-0,2549	0,0650
33	POINT00033	490.126,1040	0,1146	0,0131	6.699.664,7820	0,0301	0,0009
34	POINT00034	490.126,1360	0,1466	0,0215	6.699.664,6210	-0,1309	0,0171
35	POINT00035	490.126,2480	0,2586	0,0669	6.699.664,5180	-0,2339	0,0547
n = 35		$\bar{E} = 490.125,9894\text{m}$		$\sum_{i=1}^n (E_i - \bar{E})^2 = 9,0120 \text{ m}^2$	$\bar{N} = 6.699.664,7519\text{m}$		$\sum_{i=1}^n (N_i - \bar{N})^2 = 1,7462 \text{ m}^2$
Desvio Padrão Calculado				$S_E = 0,5148\text{m}$			$S_N = 0,2266\text{m}$
Acurácia do Ponto				$S_{R_E} = 0,5267\text{m}$			$S_{R_N} = 0,2268\text{m}$
Erro Linear Absoluto				$\varepsilon_{\text{labs}} = 0,1098\text{m}$			

Planilha 5.6 – Marco Uruguaiana: dados GS20 processados com dados da Estação Santa Maria da RBMC, estimativas pontuais, estimativas de acurácia e estimativa do erro linear absoluto

2 Marco Alegrete

GS 20 - Alegrete							
N.º	Descrição	Dados da Coordenada E			Dados da Coordenada N		
		Coordenada E	$E_i - \bar{E}$	$(E_i - \bar{E})^2$	Coordenada N	$N_i - \bar{N}$	$(N_i - \bar{N})^2$
1	POINT00001	619.548,5140	-0,2712	0,0735	6.690.919,7380	-0,4443	0,1974
2	POINT00002	619.548,5140	-0,2712	0,0735	6.690.919,7910	-0,3913	0,1531
3	POINT00003	619.548,8160	0,0308	0,0009	6.690.919,9260	-0,2563	0,0657
4	POINT00004	619.548,9220	0,1368	0,0187	6.690.920,1000	-0,0823	0,0068
5	POINT00005	619.548,8730	0,0878	0,0077	6.690.919,8930	-0,2893	0,0837
6	POINT00006	619.548,9200	0,1348	0,0182	6.690.919,7790	-0,4033	0,1626
7	POINT00007	619.548,8350	0,0498	0,0025	6.690.919,7430	-0,4393	0,1930
8	POINT00008	619.548,7050	-0,0802	0,0064	6.690.919,8670	-0,3153	0,0994
9	POINT00009	619.548,7990	0,0138	0,0002	6.690.919,9660	-0,2163	0,0468
10	POINT00010	619.548,9470	0,1618	0,0262	6.690.920,1700	-0,0123	0,0002
11	POINT00011	619.548,7290	-0,0562	0,0032	6.690.920,0200	-0,1623	0,0263
12	POINT00012	619.548,6290	-0,1562	0,0244	6.690.920,0140	-0,1683	0,0283
13	POINT00013	619.548,7220	-0,0632	0,0040	6.690.920,0880	-0,0943	0,0089
14	POINT00014	619.548,7410	-0,0442	0,0020	6.690.920,1410	-0,0413	0,0017
15	POINT00015	619.548,6430	-0,1422	0,0202	6.690.920,1630	-0,0193	0,0004
16	POINT00016	619.548,7520	-0,0332	0,0011	6.690.920,2280	0,0457	0,0021
17	POINT00017	619.548,6430	-0,1422	0,0202	6.690.920,2200	0,0377	0,0014
18	POINT00018	619.548,6940	-0,0912	0,0083	6.690.920,3500	0,1677	0,0281
19	POINT00019	619.548,8080	0,0228	0,0005	6.690.920,1810	-0,0013	0,0000
20	POINT00020	619.548,9190	0,1338	0,0179	6.690.920,1720	-0,0103	0,0001
21	POINT00021	619.548,9000	0,1148	0,0132	6.690.920,3190	0,1367	0,0187
22	POINT00022	619.548,7890	0,0038	0,0000	6.690.920,4110	0,2287	0,0523
23	POINT00023	619.548,7190	-0,0662	0,0044	6.690.920,2590	0,0767	0,0059
24	POINT00024	619.548,5260	-0,2592	0,0672	6.690.920,3080	0,1257	0,0158
25	POINT00025	619.548,5340	-0,2512	0,0631	6.690.920,4570	0,2747	0,0755
26	POINT00026	619.548,7390	-0,0462	0,0021	6.690.920,4530	0,2707	0,0733
27	POINT00027	619.548,9820	0,1968	0,0387	6.690.920,4880	0,3057	0,0935
28	POINT00028	619.548,8770	0,0918	0,0084	6.690.920,4680	0,2857	0,0816
29	POINT00029	619.548,8740	0,0888	0,0079	6.690.920,4450	0,2627	0,0690
30	POINT00030	619.549,1700	0,3848	0,1481	6.690.920,4070	0,2247	0,0505
31	POINT00031	619.549,0260	0,2408	0,0580	6.690.920,5010	0,3187	0,1016
32	POINT00032	619.548,6590	-0,1262	0,0159	6.690.920,4540	0,2717	0,0738
33	POINT00033	619.548,4810	-0,3042	0,0925	6.690.920,1560	-0,0263	0,0007
34	POINT00034	619.548,9660	0,1808	0,0327	6.690.920,3570	0,1747	0,0305
35	POINT00035	619.549,1150	0,3298	0,1088	6.690.920,3470	0,1647	0,0271
n = 35		$\bar{E} = 619.548,7852\text{m}$		$\sum_{i=1}^n (E_i - \bar{E})^2 = 0,9907 \text{ m}^2$	$\bar{N} = 6.690.920,1823\text{m}$		$\sum_{i=1}^n (N_i - \bar{N})^2 = 1,8758 \text{ m}^2$
Desvio Padrão Calculado				$S_E = 0,1707\text{m}$			$S_N = 0,2349\text{m}$
Acurácia do Ponto				$S_{R_E} = 0,2421\text{m}$			$S_{R_N} = 0,2695\text{m}$
Erro Linear Absoluto				$\varepsilon_{\text{labs}} = 0,2135\text{m}$			

Planilha 5.7 – Marco Alegrete: dados GS20 processados com dados da Estação Santa Maria da RBMC, estimativas pontuais, estimativas de acurácia e estimativa do erro linear absoluto

3 Marco Rosário do Sul

GS 20 – Rosário do Sul							
N.º	Descrição	Dados da Coordenada E			Dados da Coordenada N		
		Coordenada E	$E_i - \bar{E}$	$(E_i - \bar{E})^2$	Coordenada N	$N_i - \bar{N}$	$(N_i - \bar{N})^2$
1	POINT00001	674.240,5020	-1,1147	1,2425	6.656.208,2950	-3,1121	9,6854
2	POINT00002	674.241,1140	-0,5027	0,2527	6.656.208,9510	-2,4561	6,0326
3	POINT00003	674.240,7760	-0,8407	0,7067	6.656.208,8580	-2,5491	6,4981
4	POINT00004	674.241,1730	-0,4437	0,1968	6.656.209,1470	-2,2601	5,1082
5	POINT00005	674.240,8530	-0,7637	0,5832	6.656.209,1590	-2,2481	5,0541
6	POINT00006	674.241,1890	-0,4277	0,1829	6.656.209,3320	-2,0751	4,3062
7	POINT00007	674.241,7950	0,1783	0,0318	6.656.209,8180	-1,5891	2,5254
8	POINT00008	674.241,3300	-0,2867	0,0822	6.656.209,9300	-1,4771	2,1820
9	POINT00009	674.241,2620	-0,3547	0,1258	6.656.210,2890	-1,1181	1,2502
10	POINT00010	674.241,8800	0,2633	0,0693	6.656.210,3160	-1,0911	1,1906
11	POINT00011	674.241,9940	0,3773	0,1424	6.656.210,7460	-0,6611	0,4371
12	POINT00012	674.241,8010	0,1843	0,0340	6.656.211,5510	0,1439	0,0207
13	POINT00013	674.241,8250	0,2083	0,0434	6.656.212,1120	0,7049	0,4968
14	POINT00014	674.242,0930	0,4763	0,2269	6.656.212,3110	0,9039	0,8170
15	POINT00015	674.242,0850	0,4683	0,2193	6.656.212,8080	1,4009	1,9624
16	POINT00016	674.242,0060	0,3893	0,1516	6.656.213,4560	2,0489	4,1978
17	POINT00017	674.242,2350	0,6183	0,3823	6.656.213,7420	2,3349	5,4516
18	POINT00018	674.242,6600	1,0433	1,0886	6.656.214,4320	3,0249	9,1498
19	POINT00019	674.243,5710	1,9543	3,8195	6.656.215,3580	3,9509	15,6093
20	POINT00020	674.243,9360	2,3193	5,3794	6.656.215,6210	4,2139	17,7566
21	POINT00021	674.242,0910	0,4743	0,2250	6.656.212,8070	1,3999	1,9596
22	POINT00022	674.241,3960	-0,2207	0,0487	6.656.211,5540	0,1469	0,0216
23	POINT00023	674.241,5950	-0,0217	0,0005	6.656.211,6460	0,2389	0,0571
24	POINT00024	674.241,4280	-0,1887	0,0356	6.656.211,4190	0,0119	0,0001
25	POINT00025	674.241,0480	-0,5687	0,3234	6.656.211,2800	-0,1271	0,0162
26	POINT00026	674.241,0770	-0,5397	0,2912	6.656.211,4470	0,0399	0,0016
27	POINT00027	674.241,2200	-0,3967	0,1573	6.656.211,6320	0,2249	0,0506
28	POINT00028	674.241,1810	-0,4357	0,1898	6.656.211,6630	0,2559	0,0655
29	POINT00029	674.241,3370	-0,2797	0,0782	6.656.211,2130	-0,1941	0,0377
30	POINT00030	674.241,2760	-0,3407	0,1160	6.656.211,4070	-0,0001	0,0000
31	POINT00031	674.241,4090	-0,2077	0,0431	6.656.211,4410	0,0339	0,0011
32	POINT00032	674.241,3930	-0,2237	0,0500	6.656.211,3690	-0,0381	0,0015
33	POINT00033	674.241,4210	-0,1957	0,0383	6.656.211,3550	-0,0521	0,0027
34	POINT00034	674.241,3000	-0,3167	0,1003	6.656.211,3460	-0,0611	0,0037
35	POINT00035	674.241,3310	-0,2857	0,0816	6.656.211,4390	0,0319	0,0010
n = 35		$\bar{E} = 674.241,6167\text{m}$		$\sum_{i=1}^n (E_i - \bar{E})^2 = 16,7402 \text{ m}^2$	$\bar{N} = 6.656.211,4071\text{m}$		$\sum_{i=1}^n (N_i - \bar{N})^2 = 101,9519 \text{ m}^2$
Desvio Padrão Calculado				$S_E = 0,7017\text{m}$			$S_N = 1,7316\text{m}$
Acurácia do Ponto				$S_{R_E} = 0,8771\text{m}$			$S_{R_N} = 1,7872\text{m}$
Erro Linear Absoluto				$\epsilon_{\text{labs}} = 0,6775\text{m}$			

Planilha 5.8 – Marco Rosário do Sul: dados GS20 processados com dados da Estação Santa Maria da RBMC, estimativas pontuais, estimativas de acurácia e estimativa do erro linear absoluto

4 Marco Cacequi

GS 20 - Cacequi							
N.º	Descrição	Dados da Coordenada E			Dados da Coordenada N		
		Coordenada E	$E_i - \bar{E}$	$(E_i - \bar{E})^2$	Coordenada N	$N_i - \bar{N}$	$(N_i - \bar{N})^2$
1	POINT00001	710.386,3830	-0,1288	0,0166	6.689.008,3770	0,0898	0,0081
2	POINT00002	710.386,1470	-0,3648	0,1330	6.689.008,2870	-0,0002	0,0000
3	POINT00003	710.386,5520	0,0402	0,0016	6.689.008,0550	-0,2322	0,0539
4	POINT00004	710.386,8040	0,2922	0,0854	6.689.008,0760	-0,2112	0,0446
5	POINT00005	710.386,8670	0,3552	0,1262	6.689.008,0010	-0,2862	0,0819
6	POINT00006	710.386,4380	-0,0738	0,0054	6.689.008,1970	-0,0902	0,0081
7	POINT00007	710.386,2300	-0,2818	0,0794	6.689.008,3080	0,0208	0,0004
8	POINT00008	710.386,3310	-0,1808	0,0327	6.689.008,4570	0,1698	0,0288
9	POINT00009	710.386,5710	0,0592	0,0035	6.689.008,2920	0,0048	0,0000
10	POINT00010	710.386,5110	-0,0008	0,0000	6.689.008,5690	0,2818	0,0794
11	POINT00011	710.386,4980	-0,0138	0,0002	6.689.008,4800	0,1928	0,0372
12	POINT00012	710.386,5290	0,0172	0,0003	6.689.008,4370	0,1498	0,0225
13	POINT00013	710.386,5600	0,0482	0,0023	6.689.008,3800	0,0928	0,0086
14	POINT00014	710.386,4090	-0,1028	0,0106	6.689.008,6980	0,4108	0,1688
15	POINT00015	710.386,3900	-0,1218	0,0148	6.689.008,6490	0,3618	0,1309
16	POINT00016	710.386,4510	-0,0608	0,0037	6.689.008,3120	0,0248	0,0006
17	POINT00017	710.386,5940	0,0822	0,0068	6.689.008,3120	0,0248	0,0006
18	POINT00018	710.386,5960	0,0842	0,0071	6.689.008,4480	0,1608	0,0259
19	POINT00019	710.386,6130	0,1012	0,0103	6.689.008,3020	0,0148	0,0002
20	POINT00020	710.386,4610	-0,0508	0,0026	6.689.008,2510	-0,0362	0,0013
21	POINT00021	710.386,4600	-0,0518	0,0027	6.689.008,3570	0,0698	0,0049
22	POINT00022	710.386,6170	0,1052	0,0111	6.689.008,3600	0,0728	0,0053
23	POINT00023	710.386,5600	0,0482	0,0023	6.689.008,3490	0,0618	0,0038
24	POINT00024	710.386,6430	0,1312	0,0172	6.689.008,1850	-0,1022	0,0104
25	POINT00025	710.386,5410	0,0292	0,0009	6.689.008,3000	0,0128	0,0002
26	POINT00026	710.386,6810	0,1692	0,0286	6.689.008,0610	-0,2262	0,0511
27	POINT00027	710.386,7840	0,2722	0,0741	6.689.007,8900	-0,3972	0,1577
28	POINT00028	710.386,4870	-0,0248	0,0006	6.689.008,0090	-0,2782	0,0774
29	POINT00029	710.386,4960	-0,0158	0,0002	6.689.008,3110	0,0238	0,0006
30	POINT00030	710.386,2710	-0,2408	0,0580	6.689.008,3500	0,0628	0,0039
31	POINT00031	710.386,3250	-0,1868	0,0349	6.689.008,2310	-0,0562	0,0032
32	POINT00032	710.386,5760	0,0642	0,0041	6.689.007,8980	-0,3892	0,1514
n = 32		$\bar{E} = 710.386,5118\text{m}$		$\sum_{i=1}^n (E_i - \bar{E})^2 = 0,7772 \text{ m}^2$	$\bar{N} = 6.689.008,2872\text{m}$		$\sum_{i=1}^n (N_i - \bar{N})^2 = 1,1719 \text{ m}^2$
Desvio Padrão Calculado				$S_E = 0,1583\text{m}$			$S_N = 0,1944\text{m}$
Acurácia do Ponto				$S_{R_E} = 0,1596\text{m}$			$S_{R_N} = 0,2214\text{m}$
Erro Linear Absoluto				$\varepsilon_{\text{labs}} = 0,1060\text{m}$			

Planilha 5.9 – Marco Cacequi: dados GS20 processados com dados da Estação Santa Maria da RBMC estimativas pontuais, estimativas de acurácia e estimativa do erro linear absoluto

5 Marco São Vicente do Sul

GS 20 – SãoVicente do Sul							
N.º	Descrição	Dados da Coordenada E			Dados da Coordenada N		
		Coordenada E	$E_i - \bar{E}$	$(E_i - \bar{E})^2$	Coordenada N	$N_i - \bar{N}$	$(N_i - \bar{N})^2$
1	POINT00001	725.291,9300	-0,3728	0,1390	6.715.958,4210	0,1203	0,0145
2	POINT00002	725.292,2820	-0,0208	0,0004	6.715.958,0520	-0,2487	0,0619
3	POINT00003	725.292,0010	-0,3018	0,0911	6.715.958,3590	0,0583	0,0034
4	POINT00004	725.292,0110	-0,2918	0,0851	6.715.958,4580	0,1573	0,0247
5	POINT00005	725.292,0920	-0,2108	0,0444	6.715.958,4760	0,1753	0,0307
6	POINT00006	725.292,3290	0,0262	0,0007	6.715.958,3030	0,0023	0,0000
7	POINT00007	725.292,2980	-0,0048	0,0000	6.715.958,2790	-0,0217	0,0005
8	POINT00008	725.292,5470	0,2442	0,0596	6.715.958,5020	0,2013	0,0405
9	POINT00009	725.292,4140	0,1112	0,0124	6.715.958,3440	0,0433	0,0019
10	POINT00010	725.292,2490	-0,0538	0,0029	6.715.958,2010	-0,0997	0,0099
11	POINT00011	725.292,5990	0,2962	0,0878	6.715.958,3850	0,0843	0,0071
12	POINT00012	725.292,4600	0,1572	0,0247	6.715.958,5700	0,2693	0,0725
13	POINT00013	725.292,2640	-0,0388	0,0015	6.715.958,4390	0,1383	0,0191
14	POINT00014	725.292,2380	-0,0648	0,0042	6.715.958,3410	0,0403	0,0016
15	POINT00015	725.292,3640	0,0612	0,0037	6.715.958,2280	-0,0727	0,0053
16	POINT00016	725.292,4660	0,1632	0,0266	6.715.958,2810	-0,0197	0,0004
17	POINT00017	725.292,4910	0,1882	0,0354	6.715.958,0710	-0,2297	0,0528
18	POINT00018	725.292,4250	0,1222	0,0149	6.715.958,1780	-0,1227	0,0151
19	POINT00019	725.292,4390	0,1362	0,0186	6.715.958,2810	-0,0197	0,0004
20	POINT00020	725.292,3630	0,0602	0,0036	6.715.958,2580	-0,0427	0,0018
21	POINT00021	725.292,3950	0,0922	0,0085	6.715.958,1020	-0,1987	0,0395
22	POINT00022	725.292,3100	0,0072	0,0001	6.715.958,1030	-0,1977	0,0391
23	POINT00023	725.292,0320	-0,2708	0,0733	6.715.958,1990	-0,1017	0,0103
24	POINT00024	725.292,1010	-0,2018	0,0407	6.715.958,1270	-0,1737	0,0302
25	POINT00025	725.292,1600	-0,1428	0,0204	6.715.958,3090	0,0083	0,0001
26	POINT00026	725.292,3490	0,0462	0,0021	6.715.958,2290	-0,0717	0,0051
27	POINT00027	725.292,3130	0,0102	0,0001	6.715.958,3740	0,0733	0,0054
28	POINT00028	725.292,3400	0,0372	0,0014	6.715.958,4030	0,1023	0,0105
29	POINT00029	725.292,3950	0,0922	0,0085	6.715.958,3350	0,0343	0,0012
30	POINT00030	725.292,4260	0,1232	0,0152	6.715.958,4130	0,1123	0,0126
n = 30		$\bar{E} = 725.292,3028\text{m}$		$\sum_{i=1}^n (E_i - \bar{E})^2 = 0,8270 \text{ m}^2$	$\bar{N} = 6.715.958,3007\text{m}$		$\sum_{i=1}^n (N_i - \bar{N})^2 = 0,5180 \text{ m}^2$
Desvio Padrão Calculado				$S_E = 0,1689 \text{ m}$			$S_N = 0,1337\text{m}$
Acurácia do Ponto				$S_{R_E} = 0,2131\text{m}$			$S_{R_N} = 0,2286\text{m}$
Erro Linear Absoluto				$\epsilon_{\text{labs}} = 0,2226 \text{ m}$			

Planilha 5.10 – Marco São Vicente do Sul: dados GS20 processados com dados da Estação Santa Maria da RBMC, estimativas pontuais, estimativas de acurácia e estimativa do erro linear absoluto

5.1.2.1 Explicação das planilhas dos dados GS20

1 Marco Uruguaiana

As coordenadas oficiais do marco Uruguaiana são $E = 490.125,88\text{m}$ e $N = 6.699.664,743\text{m}$. Sobre a amostra de tamanho igual a 35 valores de coordenadas Este e Norte, conforme mostra a planilha 5.6, os valores médios (5.1 e 5.2) calculados são $\bar{E} = 490.125,9894\text{m}$ e $\bar{N} = 6.699.664,7519\text{m}$ e seus respectivos desvios padrões (5.3 e 5.4) calculados são $s_E = 0,5148\text{m}$ e $s_N = 0,2266\text{m}$. As estimativas de acurácia conforme a (5.5) e a (5.6), nas quais as referências são as coordenadas oficiais deste marco, são $s_{R_E} = 0,5267\text{m}$ e $s_{R_N} = 0,2268\text{m}$. O erro linear absoluto (5.7) que é a distância que separa o marco oficial do ponto dado pelos valores médios \bar{E} e \bar{N} é $\varepsilon_{\text{labs}} = 0,1098\text{m}$.

2 Marco Alegrete

As coordenadas oficiais do marco Alegrete são $E = 619.548,616\text{m}$ e $N = 6.690.920,052\text{m}$. Sobre a amostra de tamanho igual a 35 valores de coordenadas Este e Norte, conforme mostra a planilha 5.7, os valores médios (5.1 e 5.2) calculados são $\bar{E} = 619.548,7852\text{m}$ e $\bar{N} = 6.690.920,1823\text{m}$ e seus respectivos desvios padrões (5.3 e 5.4) calculados são $s_E = 0,1707\text{m}$ e $s_N = 0,2349\text{m}$. As estimativas de acurácia conforme a (5.5) e a (5.6), nas quais as referências são as coordenadas oficiais deste marco, são $s_{R_E} = 0,2421\text{m}$ e $s_{R_N} = 0,2695\text{m}$. O erro linear absoluto (5.7) que é a distância que separa o marco oficial do ponto dado pelos valores médios \bar{E} e \bar{N} é $\varepsilon_{\text{labs}} = 0,2135\text{m}$.

3 Marco Rosário do Sul

As coordenadas oficiais do marco Rosário do Sul são $E = 674.241,098\text{m}$ e $N = 6.656.211,843\text{m}$. Sobre a amostra de tamanho igual a 35 valores de coordenadas Este e Norte, conforme mostra a planilha 5.8, os valores médios (5.1 e 5.2) calculados são $\bar{E} = 674.241,6167\text{m}$ e $\bar{N} = 6.656.211,4071\text{m}$ e seus respectivos desvios

desvios padrões (5.3 e 5.4) calculados são $s_E = 0,7017\text{m}$ e $s_N = 1,7316\text{m}$. As estimativas de acurácia conforme a (5.5) e a (5.6), nas quais as referências são as coordenadas oficiais deste marco, são $s_{R_E} = 0,8771\text{m}$ e $s_{R_N} = 1,7872\text{m}$. O erro linear absoluto (5.7) que é a distância que separa o marco oficial do ponto dado pelos valores médios \bar{E} e \bar{N} é $\varepsilon_{\text{labs}} = 0,6775\text{m}$.

4 Marco Cacequi

As coordenadas oficiais do marco Cacequi são $E = 710.386,492\text{m}$ e $N = 6.689.008,183\text{m}$. Sobre a amostra de tamanho igual a 32 valores de coordenadas Este e Norte, conforme mostra a planilha 5.9, os valores médios (5.1 e 5.2) calculados são $\bar{E} = 710.386,5118\text{m}$ e $\bar{N} = 6.689.008,2872\text{m}$ e seus respectivos desvios padrões (5.3 e 5.4) calculados são $s_E = 0,1583\text{m}$ e $s_N = 0,1944\text{m}$. As estimativas de acurácia conforme a (5.5) e a (5.6), nas quais as referências são as coordenadas oficiais deste marco, são $s_{R_E} = 0,1596\text{m}$ e $s_{R_N} = 0,2214\text{m}$. O erro linear absoluto (5.7) que é a distância que separa o marco oficial do ponto dado pelos valores médios \bar{E} e \bar{N} é $\varepsilon_{\text{labs}} = 0,1060\text{m}$.

5 Marco São Vicente do Sul

As coordenadas oficiais do marco Uruguaiana são $E = 725.292,175\text{m}$ e $N = 6.715.958,483\text{m}$. Sobre a amostra de tamanho igual a 30 valores de coordenadas Este e Norte, conforme mostra a planilha 5.10, os valores médios (5.1 e 5.2) calculados são $\bar{E} = 725.292,3028\text{m}$ e $\bar{N} = 6.715.958,3007\text{m}$ e seus respectivos desvios padrões (5.3 e 5.4) calculados são $s_E = 0,1689\text{m}$ e $s_N = 0,1337\text{m}$. As estimativas de acurácia conforme a (5.5) e a (5.6), nas quais as referências são as coordenadas oficiais deste marco, são $s_{R_E} = 0,2131\text{m}$ e $s_{R_N} = 0,2286\text{m}$. O erro linear absoluto (5.7) que é a distância que separa o marco oficial do ponto dado pelos valores médios \bar{E} e \bar{N} é $\varepsilon_{\text{labs}} = 0,2286\text{m}$.

5.1.3 Resumo das estimativas de precisão, de acurácia e do erro linear absoluto

Os dados Pro XR processados com os dados da Estação SC forneceram as seguintes estimativas de precisão, de acurácia e do erro linear absoluto (quadro 5.1):

Marco	Precisão		Acurácia		Erro linear absoluto ϵ_{labs} [m]
	s_E [m]	s_N [m]	s_{R_E} [m]	s_{R_N} [m]	
Uruguaiana	0,1707	0,2682	1,0553	6,7665	6,7548
Alegrete	0,1988	0,2158	0,3294	0,4656	0,4828
Rosário do Sul	0,1784	0,1418	0,2182	0,2699	0,2585
Cacequi	0,2088	0,4268	0,3252	0,4365	0,2618
São Vicente do Sul	0,1365	0,1382	0,2112	0,1396	0,1598

Quadro 5.1 – Precisão, acurácia e erro linear absoluto dos dados Pro XR

Os dados GS20 processados com dados da Estação Santa Maria da RBMC forneceram as seguintes estimativas de precisão, de acurácia e do erro linear absoluto (quadro 5.2):

Marco	Precisão		Acurácia		Erro linear absoluto ϵ_{labs} [m]
	s_E [m]	s_N [m]	s_{R_E} [m]	s_{R_N} [m]	
Uruguaiana	0,5148	0,2266	0,5267	0,2268	0,1068
Alegrete	0,1707	0,2349	0,2421	0,2695	0,2135
Rosário do Sul	0,7017	1,7316	0,8771	1,7872	0,6775
Cacequi	0,1583	0,1944	0,1596	0,2214	0,1060
São Vicente do Sul	0,1689	0,1337	0,2131	0,2286	0,2226

Quadro 5.2 – Precisão, acurácia e erro linear absoluto dos dados GS20

5.2 Estimativas por intervalo de confiança

As estimativas por intervalo de confiança são obtidas das seções 2.3 e 2.4. Nestas estimativas, o nível de confiança fixado é $1 - \alpha = 0,95$.

5.2.1 Estimativas por intervalo de confiança para os dados do Pro XR processados com dados da Estação SC

1 Marco Uruguaiana

Intervalo de confiança para a média		
	E	N
Média	490.124,8517 m	6.699.658,0669 m
Desvio Padrão	0,1707m	0,2682 m
Desvio Padrão da Média	0,0270 m	0,0424 m
$1 - \alpha$	0,9500	0,9500
α	0,0500	0,0500
$\alpha/2$	0,0250	0,0250
$1 - \alpha/2$	0,9750	0,9750
Graus de Liberdade (n-1)	39	39
$t_{1-\alpha/2;v}$	2,0227	2,0227
Limite Inferior	490.124,7971m	6.699.657,9811m
Limite Superior	490.124,9063m	6.699.658,1527m
Intervalo de confiança para o desvio padrão		
	E	N
Desvio Padrão	0,1707m	0,2682m
Desvio Padrão da Média	0,0270m	0,0424m
$1 - \alpha$	0,9500	0,9500
α	0,0500	0,0500
$\alpha/2$	0,0250	0,0250
$1 - \alpha/2$	0,9750	0,9750
Graus de Liberdade: $v = n - 1$	39	39
$\chi^2_{1-\alpha/2;v}$	58,1201	58,1201
$\chi^2_{\alpha/2;v}$	23,6543	23,6543
Limite Inferior	0,0704	0,0310
Limite Superior	0,1140m	0,0502m

Quadro 5.3 – Marco Uruguaiana: intervalo de confiança para média e desvio padrão dos dados Pro XR processados com dados da Estação SC

Os intervalos de confiança para a média populacional (2.17) das coordenadas Este e Norte, ao nível de confiança $1 - \alpha = 0,95$, são, respectivamente,

$$\Pr[490.124,7971m \leq \mu_E \leq 490.124,9063m] = 0,95 \text{ e } \Pr[6.699.657,9811m \leq \mu_N \leq 6.699.658,1527m] = 0,95.$$

Os intervalos de confiança para o desvio padrão populacional das coordenadas Este e Norte, ao nível de confiança $1 - \alpha = 0,95$, dados pela raiz quadrada positiva dos extremos do intervalo de confiança para a variância (2.20) são, respectivamente, $\Pr[0,0704m \leq \sigma_E \leq 0,1140m] = 0,95$ e $\Pr[0,0310m \leq \sigma_N \leq 0,0502m] = 0,95$.

2 Marco Alegrete

Intervalo de confiança para a média		
	E	N
Média	619.548,8753m	6.690.919,6447m
Desvio Padrão	0,1988m	0,2158m
Desvio Padrão da Média	0,0314m	0,0341m
$1 - \alpha$	0,9500	0,9500
α	0,0500	0,0500
$\alpha/2$	0,0250	0,0250
$1 - \alpha/2$	0,9750	0,9750
Graus de Liberdade: $v = n - 1$	39	39
$t_{1-\alpha/2;v}$	2,0227	2,0227
Limite Inferior	619.548,8117m	6.690.919,5756m
Limite Superior	619.548,9388m	6.690.919,7137m
Intervalo de confiança para o desvio padrão		
	E	N
Desvio Padrão	0,1988m	0,2158m
Desvio Padrão da Média	0,0314m	0,0341m
$1 - \alpha$	0,9500	0,9500
α	0,0500	0,0500
$\alpha/2$	0,0250	0,0250
$1 - \alpha/2$	0,9750	0,9750
Graus de Liberdade ($n - 1$)	39	39
$\chi^2_{1-\alpha/2;v}$	58,1201	58,1201
$\chi^2_{\alpha/2;v}$	23,6543	23,6543
Limite Inferior	0,0234m	0,0321m
Limite Superior	0,0379m	0,0520m

Quadro 5.4 – Marco Alegrete: intervalo de confiança para média e desvio padrão dos dados Pro XR processados com dados da Estação SC

Os intervalos de confiança para a média populacional (2.17) das coordenadas Este e Norte, ao nível de confiança $1 - \alpha = 0,95$, são, respectivamente,

$$\Pr[619.548,8117m \leq \mu_E \leq 619.548,9388m] = 0,95 \text{ e } \Pr[6.690.919,5756mm \leq \mu_N \leq 6.690.919,7137m] = 0,95 .$$

Os intervalos de confiança para o desvio padrão populacional das coordenadas Este e Norte, ao nível de confiança $1 - \alpha = 0,95$, dados pela raiz quadrada positiva dos extremos do intervalo de confiança para a variância (2.20) são, respectivamente, $\Pr[0,0234m \leq \sigma_E \leq 0,0379m] = 0,95$ e $\Pr[0,0321m \leq \sigma_N \leq 0,0520m] = 0,95$.

3 Marco Rosário do Sul

Intervalo de confiança para a média		
	E	N
Média	674.240,9740m	6.656.211,6162m
Desvio Padrão	0,1784m	0,1418m
Desvio Padrão da Média	0,0282m	0,0224m
$1 - \alpha$	0,9500	0,9500
α	0,0500	0,0500
$\alpha / 2$	0,0250	0,0250
$1 - \alpha / 2$	0,9750	0,9750
Graus de Liberdade: $v = n - 1$	39	39
$t_{1-\alpha/2;v}$	2,0227	2,0227
Limite Inferior	674.240,9169m	6.656.211,5708m
Limite Superior	674.241,0310m	6.656.211,6615m
Intervalo de confiança para o desvio padrão		
	E	N
Desvio Padrão	0,1784m	0,1418m
Desvio Padrão da Média	0,0282m	0,0224m
$1 - \alpha$	0,9500	0,9500
α	0,0500	0,0500
$\alpha / 2$	0,0250	0,0250
$1 - \alpha / 2$	0,9750	0,9750
Graus de Liberdade ($n - 1$)	39	39
$\chi^2_{1-\alpha/2;v}$	58,1201	58,1201
$\chi^2_{\alpha/2;v}$	23,6543	23,6543
Limite Inferior	0,0959m	0,2368m
Limite Superior	0,1554m	0,3835m

Quadro 5.5 – Marco Rosário do Sul: intervalo de confiança para média e desvio padrão dos dados Pro XR processados com dados da Estação SC

Os intervalos de confiança para a média populacional (2.17) das coordenadas Este e Norte, ao nível de confiança $1 - \alpha = 0,95$, são, respectivamente,

$$\Pr[674.240,9169\text{m} \leq \mu_E \leq 674.241,0310\text{m}] = 0,95 \quad \text{e} \quad \Pr[6.656.211,5708\text{m} \leq \mu_N \leq 6.656.211,6615\text{m}] = 0,95 .$$

Os intervalos de confiança para o desvio padrão populacional das coordenadas Este e Norte, ao nível de confiança $1 - \alpha = 0,95$, dados pela raiz quadrada positiva dos extremos do intervalo de confiança para a variância (2.20) são, respectivamente, $\Pr[0,0959\text{m} \leq \sigma_E \leq 0,1554\text{m}] = 0,95$ e $\Pr[0,2368\text{m} \leq \sigma_N \leq 0,3835\text{m}] = 0,95$.

4 Marco Cacequi

Intervalo de confiança para a média		
	E	N
Média	710.386,7376m	6.689.008,0926m
Desvio Padrão	0,2088m	0,4268m
Desvio Padrão da Média	0,0353m	0,0721m
$1 - \alpha$	0,9500	0,9500
α	0,0500	0,0500
$\alpha / 2$	0,0250	0,0250
$1 - \alpha / 2$	0,9750	0,9750
Graus de Liberdade: $v = n - 1$	34	34
$t_{1-\alpha/2;v}$	2,0322	2,0322
Limite Inferior	710.386,6659m	6.689.007,9460m
Limite Superior	710.386,8094m	6.689.008,2392m
Intervalo de confiança para o desvio padrão		
	E	N
Desvio Padrão	0,2088m	0,4268m
Desvio Padrão da Média	0,0353m	0,0721m
$1 - \alpha$	0,9500	0,9500
α	0,0500	0,0500
$\alpha / 2$	0,0250	0,0250
$1 - \alpha / 2$	0,9750	0,9750
Graus de Liberdade ($n - 1$)	34	34
$\chi^2_{1-\alpha/2;v}$	51,9660	51,9660
$\chi^2_{\alpha/2;v}$	19,8063	19,8063
Limite Inferior	0,1269m	0,0276m
Limite Superior	0,2105m	0,2105m

Quadro 5.6 – Marco Cacequi: intervalo de confiança para média e desvio padrão dos dados Pro XR processados com dados da Estação SC

Os intervalos de confiança para a média populacional (2.17) das coordenadas Este e Norte, ao nível de confiança $1 - \alpha = 0,95$, são, respectivamente,

$$\Pr[710.386,6659m \leq \mu_E \leq 710.386,8094m] = 0,95 \text{ e } \Pr[6.689.007,9460m \leq \mu_N \leq 6.689.008,2392m] = 0,95 .$$

Os intervalos de confiança para o desvio padrão populacional das coordenadas Este e Norte, ao nível de confiança $1 - \alpha = 0,95$, dados pela raiz quadrada positiva dos extremos do intervalo de confiança para a variância (2.20) são, respectivamente, $\Pr[0,1269m \leq \sigma_E \leq 0,2105m] = 0,95$ e $\Pr[0,0276m \leq \sigma_N \leq 0,2105m] = 0,95$.

5 Marco São Vicente do Sul

Intervalo de confiança para a média		
	E	N
Média	725.292,3335m	6.715.958,5029m
Desvio Padrão	0,1365m	0,1382m
Desvio Padrão da Média	0,0245m	0,0248m
$1 - \alpha$	0,9500	0,9500
α	0,0500	0,0500
$\alpha / 2$	0,0250	0,0250
$1 - \alpha / 2$	0,9750	0,9750
Graus de Liberdade: $v = n - 1$	30	30
$t_{1-\alpha/2;v}$	2,0423	2,0423
Limite Inferior	725.292,2835m	6.715.958,4522m
Limite Superior	725.292,3836m	6.715.958,5535m
Intervalo de confiança para o desvio padrão		
	E	N
Desvio Padrão	0,1365m	0,1382m
Desvio Padrão da Média	0,0245m	0,0248m
$1 - \alpha$	0,9500	0,9500
α	0,0500	0,0500
$\alpha / 2$	0,0250	0,0250
$1 - \alpha / 2$	0,9750	0,9750
Graus de Liberdade ($n - 1$)	30	30
$\chi^2_{1-\alpha/2;v}$	46,9792	46,9792
$\chi^2_{\alpha/2;v}$	16,7908	16,7908
Limite Inferior	0,0245m	0,0194m
Limite Superior	0,0414m	0,0328m

Quadro 5.7 – Marco São Vicente do Sul: intervalo de confiança para média e desvio padrão dos dados Pro XR processados com dados da Estação SC

Os intervalos de confiança para a média populacional (2.17) das coordenadas Este e Norte, ao nível de confiança $1 - \alpha = 0,95$, são

$$\Pr[725.292,2835m \leq \mu_E \leq 725.292,3836m] = 0,95 \quad \text{e} \quad \Pr[6.715.958,4522m \leq \mu_N \leq 6.715.958,5535m] = 0,95 .$$

Os intervalos de confiança para o desvio padrão populacional das coordenadas Este e Norte, ao nível de confiança $1 - \alpha = 0,95$, dados pela raiz quadrada positiva dos extremos do intervalo de confiança para a variância (2.20) são

$$\Pr[0,0245m \leq \sigma_E \leq 0,0414m] = 0,95 \quad \text{e} \quad \Pr[0,0194m \leq \sigma_N \leq 0,0328m] = 0,95 .$$

5.2.1.1 Explicação dos intervalos de confiança para a média e o desvio padrão populacionais provenientes dos dados Pro XR

1 Marco Uruguaiana

As coordenadas oficiais do marco Uruguaiana são $E = 490.125,88\text{m}$ e $N = 6.699.664,743\text{m}$. Os intervalos de confiança para a média populacional proveniente da amostra de tamanho igual a 40 valores de coordenadas Este e Norte obtidos do quadro 5.3, são, respectivamente,

$$\Pr[490.124,7971\text{m} \leq \mu_E \leq 490.124,9063\text{m}] = 0,95 \quad \text{e} \quad \Pr[6.699.657,9811\text{m} \leq \mu_N \leq 6.699.658,1527\text{m}] = 0,95 .$$

A coordenada oficial $E = 490.125,88\text{m}$ não pertence ao intervalo de confiança $\Pr[490.124,7971\text{m} \leq \mu_E \leq 490.124,9063\text{m}] = 0,95$. A coordenada oficial $N = 6.699.664,743\text{m}$ não pertence ao intervalo de confiança $\Pr[6.699.657,9811\text{m} \leq \mu_N \leq 6.699.658,1527\text{m}] = 0,95$.

Os intervalos de confiança para o desvio padrão populacional das coordenadas Este e Norte são, respectivamente, $\Pr[0,0704\text{m} \leq \sigma_E \leq 0,1140\text{m}] = 0,95$ e $\Pr[0,0310\text{m} \leq \sigma_N \leq 0,502\text{m}] = 0,95$. Da planilha 5.1, as estimativas de acurácia da coordenada Este e da coordenada Norte são, respectivamente, $s_{R_E} = 1,0553\text{m}$ e $s_{R_N} = 6,7665\text{m}$. As estimativas de acurácia das coordenadas $s_{R_E} = 1,0553\text{m}$ e $s_{R_N} = 6,7665\text{m}$ não pertencem aos respectivos intervalos do desvio padrão populacional.

2 Marco Alegrete

As coordenadas oficiais do marco Alegrete são $E = 619.548,616\text{m}$ e $N = 6.690.920,052\text{m}$.

Os intervalos de confiança para a média populacional proveniente da amostra de tamanho igual a 40 valores de coordenadas Este e Norte obtidos do quadro 5.4, são, respectivamente,

$$\Pr[619.548,8117\text{m} \leq \mu_E \leq 619.548,9388\text{m}] = 0,95 \quad \text{e} \quad \Pr[6.690.919,5756\text{m} \leq \mu_N \leq 6.690.919,7137\text{m}] = 0,95 .$$

A coordenada oficial $E = 619.548,616\text{m}$ pertence ao intervalo de confiança $\Pr[619.548,8117\text{m} \leq \mu_E \leq 619.548,9388\text{m}] = 0,95$. A coordenada oficial $N = 6.690.920,052\text{m}$ não pertence ao intervalo de confiança $\Pr[6.690.919,5756\text{m} \leq \mu_N \leq 6.690.919,7137\text{m}] = 0,95$.

Os intervalos de confiança para o desvio padrão populacional das coordenadas Este e Norte são, respectivamente, $\Pr[0,0234\text{m} \leq \sigma_E \leq 0,0379\text{m}] = 0,95$ e $\Pr[0,0321\text{m} \leq \sigma_N \leq 0,0520\text{m}] = 0,95$. Da planilha 5.2, as estimativas de acurácia da coordenada Este e da coordenada Norte são $s_{R_E} = 0,3294\text{m}$ e $s_{R_N} = 0,4656\text{m}$, respectivamente. As estimativas de acurácia das coordenadas $s_{R_E} = 0,3294\text{m}$ e $s_{R_N} = 0,4656\text{m}$ não pertencem aos respectivos intervalos do desvio padrão populacional.

3 Marco Rosário do Sul

As coordenadas oficiais do marco Rosário do Sul são $E = 674.241,098\text{m}$ e $N = 6.656.211,843\text{m}$. Os intervalos de confiança para a média populacional proveniente da amostra de tamanho igual a 40 valores de coordenadas Este e Norte, obtidos do quadro 5.5, são, respectivamente,

$$\Pr[674.240,9169\text{m} \leq \mu_E \leq 674.241,0310\text{m}] = 0,95 \quad \text{e} \quad \Pr[6.656.211,5708\text{m} \leq \mu_N \leq 6.656.211,6615\text{m}] = 0,95 .$$

A coordenada oficial $E = 674.241,098\text{m}$ não pertence ao intervalo de confiança $\Pr[674.240,9169\text{m} \leq \mu_E \leq 674.241,0310\text{m}] = 0,95$. A coordenada oficial $N = 6.656.211,843\text{m}$ não pertence ao intervalo de confiança $\Pr[6.656.211,5708\text{m} \leq \mu_N \leq 6.656.211,6615\text{m}] = 0,95$.

Os intervalos de confiança para o desvio padrão populacional das coordenadas Este e Norte são, respectivamente, $\Pr[0,0959\text{m} \leq \sigma_E \leq 0,1554\text{m}] = 0,95$ e $\Pr[0,2368\text{m} \leq \sigma_N \leq 0,3835\text{m}] = 0,95$.

Da planilha 5.3, as estimativas de acurácia da coordenada Este e da coordenada Norte são, respectivamente, $s_{R_E} = 0,2182\text{m}$ e $s_{R_N} = 0,2699\text{m}$. A estimativa de acurácia da coordenada Este $s_{R_E} = 0,2182\text{m}$ não pertence ao intervalo. A estimativa de acurácia da coordenada Norte $s_{R_N} = 0,2699\text{m}$ pertence ao intervalo do desvio padrão populacional.

4 Marco Cacequi

As coordenadas oficiais do marco Cacequi são $E = 710.386,492\text{m}$ e $N = 6.689.008,183\text{m}$. Os intervalos de confiança para a média populacional proveniente

da amostra de tamanho igual a 35 valores de coordenadas Este e Norte obtidos do quadro 5.6, são, respectivamente,

$$\Pr[710.386,6659\text{m} \leq \mu_E \leq 710.386,8094\text{m}] = 0,95 \text{ e } \Pr[6.689.007,9460\text{m} \leq \mu_N \leq 6.689.008,2392\text{m}] = 0,95 .$$

A coordenada oficial $E = 710.386,492\text{m}$ pertence ao intervalo de confiança $\Pr[710.386,6659\text{m} \leq \mu_E \leq 710.386,8094\text{m}] = 0,95$. A coordenada oficial $N = 6.689.008,183\text{m}$ pertence ao intervalo de confiança $\Pr[6.689.007,9460\text{m} \leq \mu_N \leq 6.689.008,2392\text{m}] = 0,95$.

Os intervalos de confiança para o desvio padrão populacional das coordenadas Este e Norte são, respectivamente, $\Pr[0,1269\text{m} \leq \sigma_E \leq 0,2105\text{m}] = 0,95$ e $\Pr[0,0276\text{m} \leq \sigma_N \leq 0,2105\text{m}] = 0,95$. Da planilha 5.4, as estimativas de acurácia da coordenada Este e da coordenada Norte são, respectivamente, $s_{R_E} = 0,3252\text{m}$ e $s_{R_N} = 0,4365\text{m}$. As estimativas de acurácia das coordenadas $s_{R_E} = 0,3252\text{m}$ e $s_{R_N} = 0,4365\text{m}$ não pertencem aos respectivos intervalos do desvio padrão populacional.

5 Marco São Vicente do Sul

As coordenadas oficiais do marco São Vicente do Sul são $E = 725.292,175\text{m}$ e $N = 6.715.958,483\text{m}$. Os intervalos de confiança para a média populacional proveniente da amostra de tamanho igual a 31 valores de coordenadas Este e Norte obtidos do quadro 5.7, são, respectivamente,

$$\Pr[725.292,2835\text{m} \leq \mu_E \leq 725.292,3836\text{m}] = 0,95 \text{ e } \Pr[6.715.958,4522\text{m} \leq \mu_N \leq 6.715.958,5535\text{m}] = 0,95 .$$

A coordenada oficial $E = 725.292,175\text{m}$ pertence ao intervalo de confiança $\Pr[725.292,2835\text{m} \leq \mu_E \leq 725.292,3836\text{m}] = 0,95$. A coordenada oficial $N = 6.715.958,483\text{m}$ pertence ao intervalo de confiança $\Pr[6.715.958,4522\text{m} \leq \mu_N \leq 6.715.958,5535\text{m}] = 0,95$.

Os intervalos de confiança para o desvio padrão populacional das coordenadas Este e Norte são, respectivamente, $\Pr[0,0245\text{m} \leq \sigma_E \leq 0,0414\text{m}] = 0,95$ e $\Pr[0,0194\text{m} \leq \sigma_N \leq 0,0328\text{m}] = 0,95$. Da planilha 5.5, as estimativas de acurácia da coordenada Este e da coordenada Norte são, respectivamente, $s_{R_E} = 0,2112\text{m}$ e $s_{R_N} = 0,1396\text{m}$. As estimativas de acurácia das coordenadas $s_{R_E} = 0,2112\text{m}$ e $s_{R_N} = 0,1396\text{m}$ não pertencem aos respectivos intervalos do desvio padrão populacional.

5.2.2 Estimativas por intervalo de confiança para os dados GS20 processados com dados da Estação Santa Maria da RBMC

1 Marco Uruguaiana

Intervalo de confiança para a média		
	E	N
Média	490.125,9894m	6.699.664,7519m
Desvio Padrão	0,5148m	0,2266m
Desvio Padrão da Média	0,0870m	0,0383m
$1 - \alpha$	0,9500	0,9500
α	0,0500	0,0500
$\alpha/2$	0,0250	0,0250
$1 - \alpha/2$	0,9750	0,9750
Graus de Liberdade: $\nu = n - 1$	34	34
$t_{1-\alpha/2;\nu}$	2,0322	2,0322
Limite Inferior	490.125,8126m	6.699.664,6740m
Limite Superior	490.126,1663m	6.699.664,8297m
Intervalo de confiança para o desvio padrão		
	E	N
Desvio Padrão	0,5148m	0,2266m
Desvio Padrão da Média	0,0870m	0,0383m
$1 - \alpha$	0,9500	0,9500
α	0,0500	0,0500
$\alpha/2$	0,0250	0,0250
$1 - \alpha/2$	0,9750	0,9750
Graus de Liberdade ($n - 1$)	34	34
$\chi^2_{1-\alpha/2;\nu}$	51,9660	51,9660
$\chi^2_{\alpha/2;\nu}$	19,8063	19,8063
Limite Inferior	0,0221m	0,0347m
Limite Superior	0,0347m	0,0544m

Quadro 5.8 – Marco Uruguaiana: intervalo de confiança para média e desvio padrão dos dados GS20 processados com dados da Santa Maria da RBMC

Os intervalos de confiança para a média populacional (2.17) das coordenadas Este e Norte, ao nível de confiança $1 - \alpha = 0,95$, são

$$\Pr[490.125,8126m \leq \mu_E \leq 490.126,1663m] = 0,95 \quad \text{e} \quad \Pr[6.699.664,6740m \leq \mu_N \leq 6.699.664,8297m] = 0,95 .$$

Os intervalos de confiança para o desvio padrão populacional das coordenadas Este e Norte, ao nível de confiança $1 - \alpha = 0,95$, dados pela raiz quadrada positiva dos extremos do intervalo de confiança para a variância (2.20) são, respectivamente, $\Pr[0,0221m \leq \sigma_E \leq 0,0347m] = 0,95$ e $\Pr[0,0347m \leq \sigma_N \leq 0,0544m] = 0,95$.

2 Marco Alegrete

Intervalo de confiança para a média		
	E	N
Média	619.548,7852m	6.690.920,1823m
Desvio Padrão	0,1707m	0,2349m
Desvio Padrão da Média	0,0289m	0,0397m
$1 - \alpha$	0,9500	0,9500
α	0,0500	0,0500
$\alpha/2$	0,0250	0,0250
$1 - \alpha/2$	0,9750	0,9750
Graus de Liberdade: $v = n - 1$	34	34
$t_{1-\alpha/2;v}$	2,0322	2,0322
Limite Inferior	619.548,7266m	6.690.920,1016m
Limite Superior	619.548,8438m	6.690.920,2630m
Intervalo de confiança para o desvio padrão		
Desvio Padrão	0,1707m	0,2349m
Desvio Padrão da Média	0,0289m	0,0397m
$1 - \alpha$	0,9500	0,9500
α	0,0500	0,0500
$\alpha/2$	0,0250	0,0250
$1 - \alpha/2$	0,9750	0,9750
Graus de Liberdade ($n - 1$)	34	34
$\chi^2_{1-\alpha/2;v}$	51,9660	51,9660
$\chi^2_{\alpha/2;v}$	19,8063	19,8063
Limite Inferior	0,0257m	0,0279m
Limite Superior	0,0544m	0,0438m

Quadro 5.9 – Marco Alegrete: intervalo de confiança para média e desvio padrão dos dados GS20 processados com dados da Santa Maria da RBMC

Os intervalos de confiança para a média populacional (2.17) das coordenadas Este e Norte, ao nível de confiança $1 - \alpha = 0,95$, são, respectivamente,

$$\Pr[619.548,7266\text{m} \leq \mu_E \leq 619.548,8438\text{m}] = 0,95 \text{ e } \Pr[6.690.920,1016\text{m} \leq \mu_N \leq 6.699.658,1527\text{m}] = 0,95 .$$

Os intervalos de confiança para o desvio padrão populacional das coordenadas Este e Norte, ao nível de confiança $1 - \alpha = 0,95$, dados pela raiz quadrada positiva dos extremos do intervalo de confiança para a variância (2.20) são, respectivamente, $\Pr[0,0257\text{m} \leq \sigma_E \leq 0,0544\text{m}] = 0,95$ e $\Pr[0,0279\text{m} \leq \sigma_N \leq 0,0438\text{m}] = 0,95$.

3 Marco Rosário do Sul

Intervalo de confiança para a média		
	E	N
Média	674.241,6167m	6.656.211,4071m
Desvio Padrão	0,7017m	1,7316m
Desvio Padrão da Média	0,1186m	0,2927m
$1 - \alpha$	0,9500	0,9500
α	0,0500	0,0500
$\alpha/2$	0,0250	0,0250
$1 - \alpha/2$	0,9750	0,9750
Graus de Liberdade: $v = n - 1$	34	34
$t_{1-\alpha/2;v}$	2,0322	2,0322
Limite Inferior	674.241,3756m	6.656.210,8123m
Limite Superior	674.241,8577m	6.656.212,0020m
Intervalo de confiança para o desvio padrão		
Desvio Padrão	0,7017m	1,7316m
Desvio Padrão da Média	0,1186m	0,2927m
$1 - \alpha$	0,9500	0,9500
α	0,0500	0,0500
$\alpha/2$	0,0250	0,0250
$1 - \alpha/2$	0,9750	0,9750
Graus de Liberdade ($n - 1$)	34	34
$\chi^2_{1-\alpha/2;v}$	51,9660	51,9660
$\chi^2_{\alpha/2;v}$	19,8063	19,8063
Limite Inferior	0,0231m	0,0183m
Limite Superior	0,0362m	0,0288m

Quadro 5.10 – Marco Rosário do Sul: intervalo de confiança para média e desvio padrão dos dados GS20 processados com dados da Santa Maria da RBMC

Os intervalos de confiança para a média populacional (2.17) das coordenadas Este e Norte, ao nível de confiança $1 - \alpha = 0,95$, são, respectivamente,

$$\Pr[674.241,3756m \leq \mu_E < 674.241,8577m] = 0,95 \text{ e } \Pr[6.656.210,8123m \leq \mu_N \leq 6.656.212,0020m] = 0,95 .$$

Os intervalos de confiança para o desvio padrão populacional das coordenadas Este e Norte, ao nível de confiança $1 - \alpha = 0,95$, dados pela raiz quadrada positiva dos extremos do intervalo de confiança para a variância (2.20) são, respectivamente, $\Pr[0,0231m \leq \sigma_E \leq 0,0362m] = 0,95$ e $\Pr[0,0183m < \sigma_N < 0,0288m] = 0,95$.

4 Marco Cacequi

Intervalo de confiança para a média		
	E	N
Média	710.386,5118m	6.689.008,2872m
Desvio Padrão	0,1583m	0,1944m
Desvio Padrão da Média	0,0280m	0,0344m
$1 - \alpha$	0,9500	0,9500
α	0,0500	0,0500
$\alpha/2$	0,0250	0,0250
$1 - \alpha/2$	0,9750	0,9750
Graus de Liberdade: $v = n - 1$	31	31
$t_{1-\alpha/2;v}$	2,0395	2,0395
Limite Inferior	710.386,4547m	6.689.008,2171m
Limite Superior	710.386,5688m	6.689.008,3573m
Intervalo de confiança para o desvio padrão		
Desvio Padrão	0,1583m	0,1944m
Desvio Padrão da Média	0,0280m	0,0344m
$1 - \alpha$	0,9500	0,9500
α	0,0500	0,0500
$\alpha/2$	0,0250	0,0250
$1 - \alpha/2$	0,9750	0,9750
Graus de Liberdade ($n - 1$)	31	31
$\chi^2_{1-\alpha/2;v}$	48,2319	48,2319
$\chi^2_{\alpha/2;v}$	17,5387	17,5387
Limite Inferior	0,0286m	0,0583m
Limite Superior	0,0463m	0,0945m

Quadro 5.11 – Marco Cacequi: intervalo de confiança para média e desvio padrão dos dados GS20 processados com dados da Santa Maria da RBMC

Os intervalos de confiança para a média populacional (2.17) das coordenadas Este e Norte, ao nível de confiança $1 - \alpha = 0,95$, são, respectivamente,

$$\Pr[710.386,4547m \leq \mu_E \leq 710.386,5688m] = 0,95 \text{ e } \Pr[6.689.008,2171m \leq \mu_N \leq 6.689.008,3573m] = 0,95 .$$

Os intervalos de confiança para o desvio padrão populacional das coordenadas Este e Norte, ao nível de confiança $1 - \alpha = 0,95$, dados pela raiz quadrada positiva dos extremos do intervalo de confiança para a variância (2.20) são, respectivamente, $\Pr[0,0286m \leq \sigma_E \leq 0,0463m] = 0,95$ e $\Pr[0,0583m \leq \sigma_N \leq 0,0945m] = 0,95$.

5 Marco São Vicente do Sul

Intervalo de confiança para a média		
	E	N
Média	725.292,3028m	6.715.958,3007m
Desvio Padrão	0,1689m	0,1337m
Desvio Padrão da Média	0,0308m	0,0244m
$1 - \alpha$	0,9500	0,9500
α	0,0500	0,0500
$\alpha/2$	0,0250	0,0250
$1 - \alpha/2$	0,9750	0,9750
Graus de Liberdade: $v = n - 1$	29	29
$t_{1-\alpha/2;v}$	2,0452	2,0452
Limite Inferior	725.292,2397m	6.715.958,2508m
Limite Superior	725.292,3658m	6.715.958,3506m
Intervalo de confiança para o desvio padrão		
Desvio Padrão	0,1689m	0,1337m
Desvio Padrão da Média	0,0308m	0,0244m
$1 - \alpha$	0,9500	0,9500
α	0,0500	0,0500
$\alpha/2$	0,0250	0,0250
$1 - \alpha/2$	0,9750	0,9750
Graus de Liberdade ($n - 1$)	29	29
$\chi^2_{1-\alpha/2;v}$	45,7223	45,7223
$\chi^2_{\alpha/2;v}$	16,0471	16,0471
Limite Inferior	0,0196m	0,0198m
Limite Superior	0,0327m	0,0331m

Quadro 5.12 – Marco São Vicente do Sul: intervalo de confiança para média e desvio padrão dos dados GS20 processados com dados da Santa Maria da RBMC

Os intervalos de confiança para a média populacional (2.17) das coordenadas Este e Norte, ao nível de confiança $1 - \alpha = 0,95$, são, respectivamente,

$$\Pr[725.292,2397\text{m} \leq \mu_E \leq 725.292,3658\text{m}] = 0,95 \text{ e } \Pr[6.715.958,2508\text{m} \leq \mu_N \leq 6.715.958,3506\text{m}] = 0,95 .$$

Os intervalos de confiança para o desvio padrão populacional das coordenadas Este e Norte, ao nível de confiança $1 - \alpha = 0,95$, dados pela raiz quadrada positiva dos extremos do intervalo de confiança para a variância (2.20) são, respectivamente, $\Pr[0,0196\text{m} \leq \sigma_E \leq 0,0327\text{m}] = 0,95$ e $\Pr[0,0198\text{m} \leq \sigma_N \leq 0,0331\text{m}] = 0,95$.

5.2.2.1 Explicação dos intervalos de confiança para a média e o desvio padrão populacionais provenientes dos dados GS20

1 Marco Uruguaiana

As coordenadas oficiais do marco Uruguaiana são $E = 490.125,88\text{m}$ e $N = 6.699.664,743\text{m}$. Os intervalos de confiança para a média populacional proveniente da amostra de tamanho igual a 35 valores de coordenadas Este e Norte obtidos do quadro 5.8, são, respectivamente,

$$\Pr[490.125,8126\text{m} \leq \mu_E \leq 490.126,1663\text{m}] = 0,95 \text{ e } \Pr[6.699.664,6740\text{m} \leq \mu_N \leq 6.699.664,8297\text{m}] = 0,95 .$$

A coordenada oficial $E = 490.125,88\text{m}$ pertence ao intervalo de confiança $\Pr[490.125,8126\text{m} \leq \mu_E \leq 490.126,1663\text{m}] = 0,95$. A coordenada oficial $N = 6.699.664,743\text{m}$ pertence ao intervalo de confiança $\Pr[6.699.664,6740\text{m} \leq \mu_N \leq 6.699.664,8297\text{m}] = 0,95$.

Os intervalos de confiança para o desvio padrão populacional das coordenadas Este e Norte são, respectivamente, $\Pr[0,0221\text{m} \leq \sigma_E \leq 0,0347\text{m}] = 0,95$ e $\Pr[0,0347\text{m} \leq \sigma_N \leq 0,0544\text{m}] = 0,95$. Da planilha 5.6, as estimativas de acurácia da coordenada Este e da coordenada Norte são, respectivamente, $s_{R_E} = 0,5267\text{m}$ e $s_{R_N} = 0,2268\text{m}$. As estimativas de acurácia das coordenadas $s_{R_E} = 0,5267\text{m}$ e $s_{R_N} = 0,2268\text{m}$ não pertencem aos respectivos intervalos do desvio padrão populacional.

2 Marco Alegrete

As coordenadas oficiais do marco Alegrete são $E = 619.548,616\text{m}$ e $N = 6.690.920,052\text{m}$.

Os intervalos de confiança para a média populacional proveniente da amostra de tamanho igual a 35 valores de coordenadas Este e Norte obtidos do quadro 5.9, são, respectivamente,

$$\Pr[619.548,7266\text{m} \leq \mu_E \leq 619.548,8438\text{m}] = 0,95 \text{ e } \Pr[6.690.920,1016\text{m} \leq \mu_N \leq 6.699.658,1527\text{m}] = 0,95 .$$

A coordenada oficial $E = 619.548,616\text{m}$ não pertence ao intervalo de confiança $\Pr[619.548,8117\text{m} \leq \mu_E \leq 619.548,9388\text{m}] = 0,95$. A coordenada oficial $N = 6.690.920,052\text{m}$ não pertence ao intervalo de confiança $\Pr[6.690.919,5756\text{m} \leq \mu_N \leq 6.690.919,7137\text{m}] = 0,95$.

Os intervalos de confiança para o desvio padrão populacional das coordenadas Este e Norte são, respectivamente, $\Pr[0,0257\text{m} \leq \sigma_E \leq 0,0544\text{m}] = 0,95$ e

$\Pr[0,0279\text{m} \leq \sigma_N \leq 0,0438\text{m}] = 0,95$. Da planilha 5.7, as estimativas de acurácia da coordenada Este e da coordenada Norte são, respectivamente, $s_{R_E} = 0,2421\text{m}$ e $s_{R_N} = 0,2695\text{m}$, respectivamente. As estimativas de acurácia das coordenadas $s_{R_E} = 0,2421\text{m}$ e $s_{R_N} = 0,2695\text{m}$ não pertencem aos respectivos intervalos do desvio padrão populacional.

3 Marco Rosário do Sul

As coordenadas oficiais do marco Rosário do Sul são $E = 674.241,098\text{m}$ e $N = 6.656.211,843\text{m}$. Os intervalos de confiança para a média populacional proveniente da amostra de tamanho igual a 35 valores de coordenadas Este e Norte obtidos do quadro 5.10, são, respectivamente,

$$\Pr[674.241,3756\text{m} \leq \mu_E < 674.241,8577\text{m}] = 0,95 \text{ e } \Pr[6.656.210,8123\text{m} \leq \mu_N \leq 6.656.212,0020\text{m}] = 0,95 .$$

A coordenada oficial $E = 674.241,098\text{m}$ não pertence ao intervalo de confiança $\Pr[674.241,3756\text{m} \leq \mu_E < 674.241,8577\text{m}] = 0,95$. A coordenada oficial $N = 6.656.211,843\text{m}$ pertence ao intervalo de confiança $\Pr[6.656.210,8123\text{m} \leq \mu_N \leq 6.656.212,0020\text{m}] = 0,95$.

Os intervalos de confiança para o desvio padrão populacional das coordenadas Este e Norte são, respectivamente, $\Pr[0,0231\text{m} \leq \sigma_E \leq 0,0362\text{m}] = 0,95$ e $\Pr[0,0183\text{m} < \sigma_N < 0,0288\text{m}] = 0,95$. Da planilha 5.8, as estimativas de acurácia da coordenada Este e da coordenada Norte são, respectivamente, $s_{R_E} = 0,8771\text{m}$ e $s_{R_N} = 1,7872\text{m}$. A estimativa de acurácia da coordenada Este $s_{R_E} = 0,8771\text{m}$ não pertence ao intervalo. A estimativa de acurácia da coordenada Norte $s_{R_N} = 1,7872\text{m}$ não pertence ao intervalo do desvio padrão populacional.

4 Marco Cacequi

As coordenadas oficiais do marco Cacequi são $E = 710.386,492\text{m}$ e $N = 6.689.008,183\text{m}$. Os intervalos de confiança para a média populacional proveniente da amostra de tamanho igual a 32 valores de coordenadas Este e Norte obtidos do quadro 5.11, são, respectivamente,

$$\Pr[710.386,4547\text{m} \leq \mu_E \leq 710.386,5688\text{m}] = 0,95 \text{ e } \Pr[6.689.008,2171\text{m} \leq \mu_N \leq 6.689.008,3573\text{m}] = 0,95 .$$

A coordenada oficial $E = 710.386,492\text{m}$ pertence ao intervalo de confiança $\text{Pr}[710.386,4547\text{m} \leq \mu_E \leq 710.386,5688\text{m}] = 0,95$. A coordenada oficial $N = 6.689.008,183\text{m}$ não pertence ao intervalo de confiança $\text{Pr}[6.689.008,2171\text{m} \leq \mu_N \leq 6.689.008,3573\text{m}] = 0,95$.

Os intervalos de confiança para o desvio padrão populacional das coordenadas Este e Norte são, respectivamente, $\text{Pr}[0,0286\text{m} \leq \sigma_E \leq 0,0463\text{m}] = 0,95$ e $\text{Pr}[0,0583\text{m} \leq \sigma_N \leq 0,0945\text{m}] = 0,95$. Da planilha 5.9, as estimativas de acurácia da coordenada Este e da coordenada Norte são, respectivamente, $s_{R_E} = 0,1596\text{m}$ e $s_{R_N} = 0,2214\text{m}$. As estimativas de acurácia das coordenadas $s_{R_E} = 0,1596\text{m}$ e $s_{R_N} = 0,2214\text{m}$ não pertencem aos respectivos intervalos do desvio padrão populacional.

5 Marco São Vicente do Sul

As coordenadas oficiais do marco São Vicente do Sul são $E = 725.292,175\text{m}$ e $N = 6.715.958,483\text{m}$. Os intervalos de confiança para a média populacional proveniente da amostra de tamanho igual a 30 valores de coordenadas Este e Norte obtidos do quadro 5.12, são, respectivamente,

$\text{Pr}[725.292,2397\text{m} \leq \mu_E \leq 725.292,3658\text{m}] = 0,95$ e $\text{Pr}[6.715.958,2508\text{m} \leq \mu_N \leq 6.715.958,3506\text{m}] = 0,95$.

A coordenada oficial $E = 725.292,175\text{m}$ não pertence ao intervalo de confiança $\text{Pr}[725.292,2397\text{m} \leq \mu_E \leq 725.292,3658\text{m}] = 0,95$. A coordenada oficial $N = 6.715.958,483\text{m}$ não pertence ao intervalo de confiança $\text{Pr}[6.715.958,2508\text{m} \leq \mu_N \leq 6.715.958,3506\text{m}] = 0,95$.

Os intervalos de confiança para o desvio padrão populacional das coordenadas Este e Norte são, respectivamente, $\text{Pr}[0,0196\text{m} \leq \sigma_E \leq 0,0327\text{m}] = 0,95$ e $\text{Pr}[0,0198\text{m} \leq \sigma_N \leq 0,0331\text{m}] = 0,95$. Da planilha 5.10, as estimativas de acurácia da coordenada Este e da coordenada Norte são, respectivamente, $s_{R_E} = 0,2131\text{m}$ e $s_{R_N} = 0,2286\text{m}$. As estimativas de acurácia das coordenadas $s_{R_E} = 0,2131\text{m}$ e $s_{R_N} = 0,2286\text{m}$ não pertencem aos respectivos intervalos do desvio padrão populacional.

5.3 Verificação da normalidade pelo método das distâncias quadráticas generalizadas

A verificação da normalidade bivariada pelo método das distâncias quadráticas generalizadas é efetuada de acordo com a (3.23) e figura 3.1. Se os dados provêm de uma população normal, então uma amostra de tamanho n apresenta 50% das distâncias quadráticas que satisfazem a desigualdade $d^2 \leq \chi_{2,0,50}^2$. Esta desigualdade significa que 50% das distâncias quadráticas estão dentro da elipse de mesma densidade de probabilidade (figura 3.1). A estatística $\chi_{2,0,50}^2$ é igual a 1,3863. Logo, $d^2 \leq 1,3863$.

O procedimento para efetuar a verificação da normalidade dos dados depende da ordenação das distâncias quadráticas dadas pelo primeiro membro da (3.23) e aplicada para os dados de cada marco. As distâncias quadráticas ordenadas encontram-se nos quadros 5.13 e 5.14.

5.3.1 Verificação da normalidade dos dados obtidos com o receptor GPS Pathfinder Pro XR e processados com dados da Estação SC

Para os **marcos Uruguaiana, Alegrete e Rosário do Sul**, cada um com amostra de tamanho $n = 40$, espera-se para cada um deles que 20 distâncias quadráticas sejam menores ou iguais a 1,3863. O quadro 5.13 mostra que os marcos Uruguaiana e Alegrete apresentaram, cada um, 17 distâncias quadráticas menores que 1,3863, e o marco Rosário do Sul apresentou 18 distâncias quadráticas menores que 1,3863. Isto significa que os dados não seguem a distribuição normal bivariada. Logo, a **normalidade bivariada dos dados desses marcos é rejeitada**.

Para o **marco Cacequi**, com amostra de tamanho $n = 35$, espera-se que 17 ou 18 distâncias quadráticas sejam menores que 1,3863. Apresentou 23. Logo, a **normalidade bivariada é rejeitada**.

Para o **marco São Vicente do Sul**, com amostra de tamanho $n = 31$, espera-se que 15 ou 16 distâncias quadráticas sejam menores que 1,3863. Apresentou 15. Logo, a **normalidade bivariada não é rejeitada**.

i	Uruguaiana	Alegrete	Rosário do Sul	Cacequi	São Vicente do Sul
	d ²	d ²	d ²	d ²	d ²
1	0,0894	0,0074	0,0788	0,0791	0,0070
2	0,0986	0,0872	0,1186	0,2349	0,1203
3	0,1135	0,1090	0,1836	0,2574	0,1216
4	0,1302	0,1785	0,2525	0,2729	0,2445
5	0,1524	0,1814	0,3966	0,2968	0,2807
6	0,4217	0,2314	0,4407	0,2995	0,2902
7	0,5931	0,5909	0,4944	0,3159	0,2984
8	0,6015	0,5917	0,5907	0,3207	0,3417
9	0,7292	0,6511	0,5937	0,3256	0,4283
10	0,7627	0,8133	0,6259	0,3466	0,5006
11	0,8300	0,8183	0,7281	0,3864	0,7094
12	0,8541	0,8677	0,8295	0,5008	0,7271
13	0,8549	0,8764	0,8365	0,5056	0,8177
14	1,0589	1,0833	0,8956	0,5143	0,8620
15	1,0877	1,1276	0,9197	0,5144	1,0249
16	1,3183	1,1417	1,0780	0,7026	1,6213
17	1,3423	1,2278	1,1732	0,8146	1,8663
18	1,3925	1,4578	1,1820	0,8287	1,8697
19	1,3999	1,5682	1,4311	0,8339	1,9567
20	1,5257	1,7761	1,9106	1,0065	2,3617
21	1,5860	1,9668	1,9643	1,1543	2,5665
22	1,6539	1,9887	1,9863	1,1834	2,9632
23	1,7267	2,2473	2,0231	1,2443	3,2205
24	1,7395	2,3517	2,0738	1,4276	3,2634
25	1,9109	2,4103	2,2298	1,7611	3,6503
26	2,1056	2,4662	2,3816	2,2656	3,8183
27	2,1464	2,5439	2,3879	2,3254	4,1145
28	2,5964	2,7240	2,4243	2,5333	4,1626
29	2,7135	2,9163	2,6683	3,0921	4,2513
30	3,0317	2,9906	2,7409	3,4738	4,5624
31	3,0524	3,2076	2,8934	3,5818	6,9774
32	3,1300	3,3658	3,1393	4,2586	
33	3,3122	3,3666	3,4185	5,2133	
34	3,3288	3,3687	3,4703	5,7766	
35	3,8585	3,4503	4,0616	19,3509	
36	4,1104	3,8360	4,0797		
37	4,4387	4,0834	4,1068		
38	4,7663	4,3306	4,6006		
39	4,9347	4,3854	5,2809		
40	6,5008	4,6130	5,3088		

Quadro 5.13 - Distâncias quadráticas obtidas dos dados obtidos com o receptor GPS Pathfinder Pro XR eprocessados com dados da Estação SC

5.3.2 Verificação da normalidade dos dados obtidos com o receptor GPS Leica GS20 e processados com dados da Estação Santa Maria da RBMC

De acordo com a (3.23), 50% das distâncias quadráticas devem satisfazer a desigualdade $d^2 \leq \chi_{2;0,50}^2$. A estatística $\chi_{2;0,50}^2$ é igual a 1,3863. Logo, $d^2 \leq 1,3863$.

Para os **marcos Uruguaiana, Alegrete e Rosário do Sul**, cada um com amostra de tamanho $n = 35$, espera-se para cada um deles que 17 ou 18 distâncias quadráticas sejam menores ou iguais a 1,3863. O marco Uruguaiana apresentou 20, o marco Alegrete apresentou 18 e o marco Rosário do Sul apresentou 17 distâncias quadráticas menores que 1,3863. Isto significa que os dados do marco Uruguaiana não seguem a distribuição normal bivariada e os dados dos marcos Alegrete e Rosário do Sul seguem a distribuição normal bivariada. Logo, a **normalidade bivariada dos dados do marco Uruguaiana é rejeitada** e a **normalidade dos dados dos marcos Alegrete e Rosário do Sul não é rejeitada**.

Para o **marco Cacequi**, com amostra de tamanho $n = 32$, espera-se que 16 distâncias quadráticas sejam menores que 1,3863. Apresentou 16. Logo, a **normalidade bivariada não é rejeitada**.

Para o **marco São Vicente do Sul**, com amostra de tamanho $n = 30$, espera-se que 15 distâncias quadráticas sejam menores que 1,3863. Apresentou 17. Logo, a **normalidade bivariada é rejeitada**.

i	Uruguaiana	Alegrete	Rosário do Sul	Cacequi	São Vicente do Sul
	d ²	d ²	d ²	d ²	d ²
1	0,3417	0,0198	0,0987	0,0172	0,0248
2	0,4311	0,0787	0,1406	0,0648	0,0277
3	0,4354	0,1048	0,1746	0,1511	0,2185
4	0,4813	0,2337	0,2334	0,1605	0,2271
5	0,5044	0,3547	0,2736	0,1933	0,3085
6	0,6471	0,4978	0,3268	0,2508	0,3490
7	0,7973	0,6216	0,3457	0,3700	0,3790
8	0,8062	0,6884	0,3546	0,4515	0,4088
9	0,8154	0,7180	0,4240	0,5937	0,5614
10	0,8221	0,8603	0,4721	0,5961	0,6529
11	0,8370	0,9706	0,5492	0,6685	0,6623
12	0,8574	0,9977	0,6445	0,7093	0,6831
13	0,8944	1,0062	0,6483	0,8240	0,7151
14	0,9005	1,0148	0,6540	0,8863	0,9442
15	0,9353	1,0690	0,6560	1,0588	1,1026
16	1,0181	1,0912	0,8543	1,1754	1,3027
17	1,0319	1,2987	1,0929	1,4443	1,3039
18	1,1400	1,3411	1,6726	1,5530	2,1891
19	1,2649	1,4437	1,6865	1,6965	2,4339
20	1,2679	1,5231	2,0335	1,7919	3,1230
21	1,4032	1,7063	2,0428	2,3249	3,2791
22	1,5189	1,8121	2,0465	2,5189	3,2792
23	1,5236	2,3113	2,0749	2,7076	3,3141
24	1,7832	2,3730	2,1406	2,9521	3,5092
25	1,7880	2,5566	2,1779	3,4627	3,5938
26	2,0014	2,9996	2,2556	3,4810	4,0157
27	2,2220	3,2974	2,5334	3,8730	4,1784
28	2,3145	3,3345	2,8439	4,3920	4,5881
29	2,4582	3,762	2,8847	4,6292	5,1261
30	3,2415	4,1496	3,0514	4,8949	5,4987
31	3,7158	4,2103	3,2427	5,2452	
32	5,4039	4,6854	3,4094	6,8615	
33	5,5952	4,8037	4,7268		
34	7,7434	4,8638	7,7859		
35	9,0578	5,2002	11,4475		

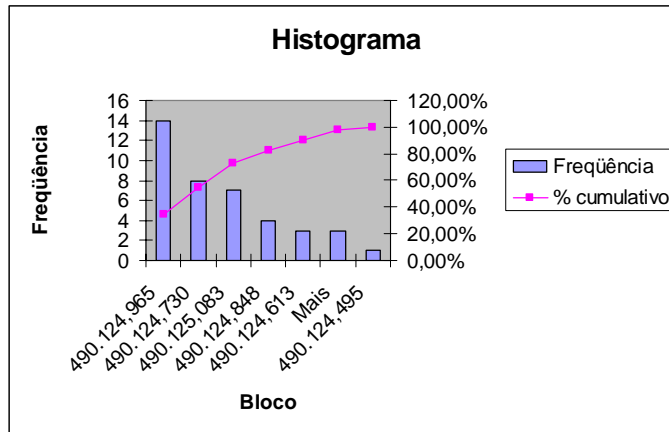
Quadro 5.14 - Distâncias quadráticas para os dados obtidos com o receptor GPS Leica GS20 e processados com dados da Estação Santa Maria da RBMC

5.4 Histogramas

5.4.1 Histogramas dos dados Pro XR processados com dados da Estação SC

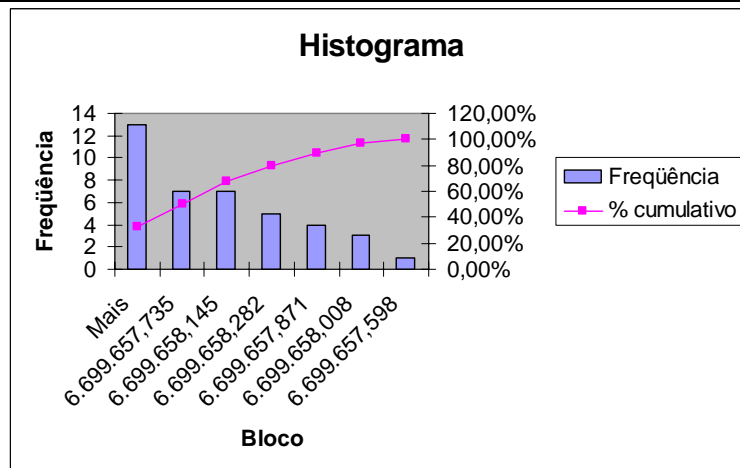
1 Marco Uruguaiana

Bloco	Freqüência	% cumulativo	Bloco	Freqüência	% cumulativo
490.124,495	1	2,50%	490.124,965	14	35,00%
490.124,613	3	10,00%	490.124,730	8	55,00%
490.124,730	8	30,00%	490.125,083	7	72,50%
490.124,848	4	40,00%	490.124,848	4	82,50%
490.124,965	14	75,00%	490.124,613	3	90,00%
490.125,083	7	92,50%	Mais	3	97,50%
Mais	3	100,00%	490.124,495	1	100,00%



Histograma 5.1 – Marco Uruguaiana: valores da coordenada Este obtidos dos dados Pro XR processados com dados da Estação SC

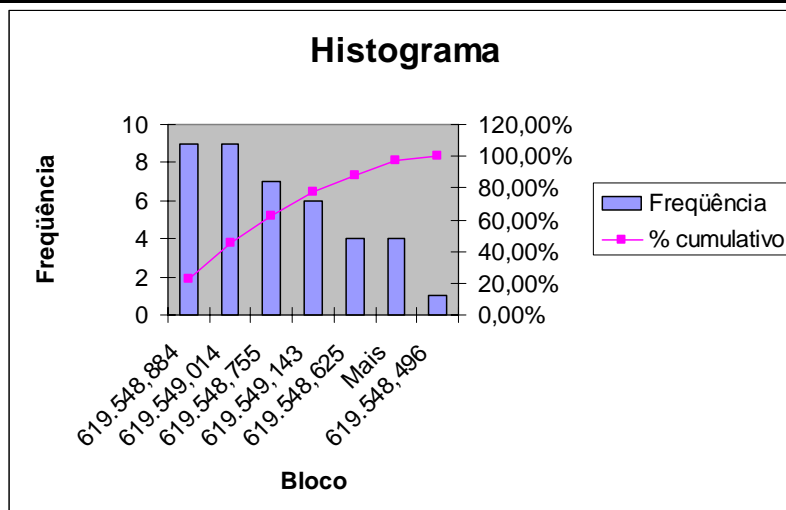
Bloco	Freqüência	% cumulativo	Bloco	Freqüência	% cumulativo
6.699.657,598	1	2,50%	Mais	13	32,50%
6.699.657,735	7	20,00%	6.699.657,735	7	50,00%
6.699.657,871	4	30,00%	6.699.658,145	7	67,50%
6.699.658,008	3	37,50%	6.699.658,282	5	80,00%
6.699.658,145	7	55,00%	6.699.657,871	4	90,00%
6.699.658,282	5	67,50%	6.699.658,008	3	97,50%
Mais	13	100,00%	6.699.657,598	1	100,00%



Histograma 5.2 – Marco Uruguaiana: valores da coordenada Norte obtidos dos dados Pro XR processados com dados da Estação SC

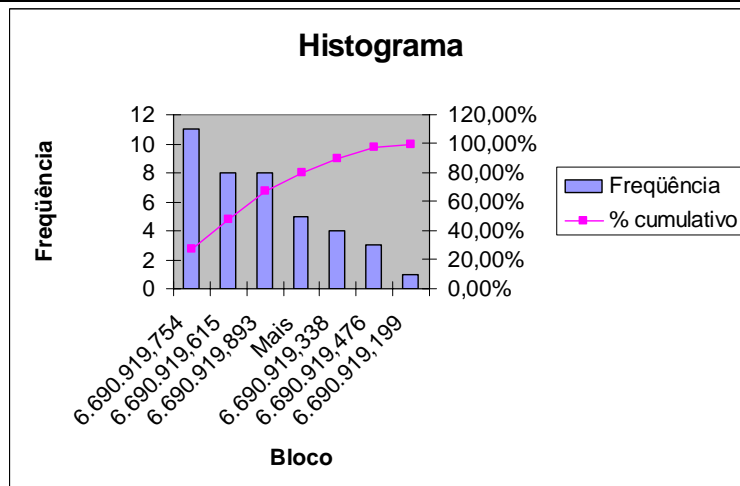
2 Marco Alegrete

Bloco	Freqüência	% cumulativo	Bloco	Freqüência	% cumulativo
619.548,496	1	2,50%	619.548,884	9	22,50%
619.548,625	4	12,50%	619.549,014	9	45,00%
619.548,755	7	30,00%	619.548,755	7	62,50%
619.548,884	9	52,50%	619.549,143	6	77,50%
619.549,014	9	75,00%	619.548,625	4	87,50%
619.549,143	6	90,00%	Mais	4	97,50%
Mais	4	100,00%	619.548,496	1	100,00%



Histograma 5.3 – Marco Alegrete: valores da coordenada Este obtidos dos dados Pro XR processados com dados da Estação SC

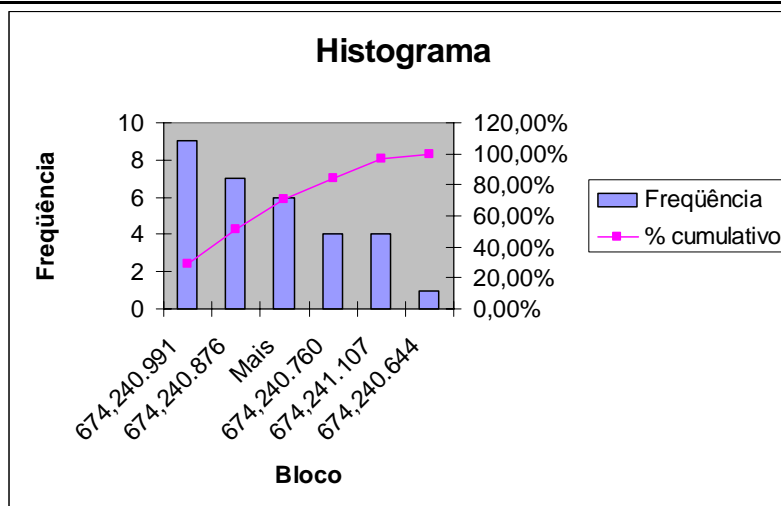
Bloco	Freqüência	% cumulativo	Bloco	Freqüência	% cumulativo
6.690.919,199	1	2,50%	6.690.919,754	11	27,50%
6.690.919,338	4	12,50%	6.690.919,615	8	47,50%
6.690.919,476	3	20,00%	6.690.919,893	8	67,50%
6.690.919,615	8	40,00%	Mais	5	80,00%
6.690.919,754	11	67,50%	6.690.919,338	4	90,00%
6.690.919,893	8	87,50%	6.690.919,476	3	97,50%
Mais	5	100,00%	6.690.919,199	1	100,00%



Histograma 5.4 – Marco Alegrete: valores da coordenada Norte obtidos dos dados Pro XR processados com dados da Estação SC

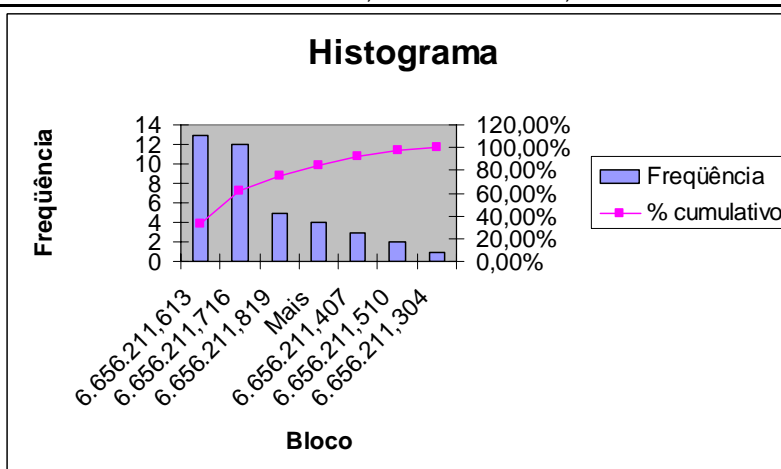
3 Marco Rosário do Sul

Bloco	Frequência	% cumulativo	Bloco	Frequência	% cumulativo
674.240,644	1	3,23%	674.240,991	9	29,03%
674.240,760	4	16,13%	674.240,876	7	51,61%
674.240,876	7	38,71%	Mais	6	70,97%
674.240,991	9	67,74%	674.240,760	4	83,87%
674.241,107	4	80,65%	674.241,107	4	96,77%
Mais	6	100,00%	674.240,644	1	100,00%



Histograma 5.5 – Marco Rosário do Sul: valores da coordenada Este obtidos dos dados Pro XR processados com dados da Estação SC

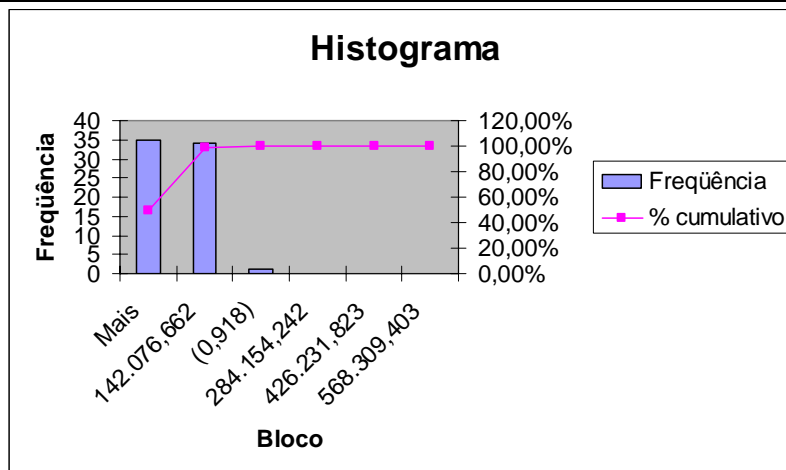
Bloco	Frequência	% cumulativo	Bloco	Frequência	% cumulativo
6.656.211,30	1	2,50%	6.656.211,613	13	32,50%
6.656.211,41	3	10,00%	6.656.211,716	12	62,50%
6.656.211,51	2	15,00%	6.656.211,819	5	75,00%
6.656.211,61	13	47,50%	Mais	4	85,00%
6.656.211,72	12	77,50%	6.656.211,407	3	92,50%
6.656.211,82	5	90,00%	6.656.211,510	2	97,50%
Mais	4	100,00%	6.656.211,304	1	100,00%



Histograma 5.6 – Marco Rosário do Sul: valores da coordenada Norte obtidos dos dados Pro XR processados com dados da Estação SC

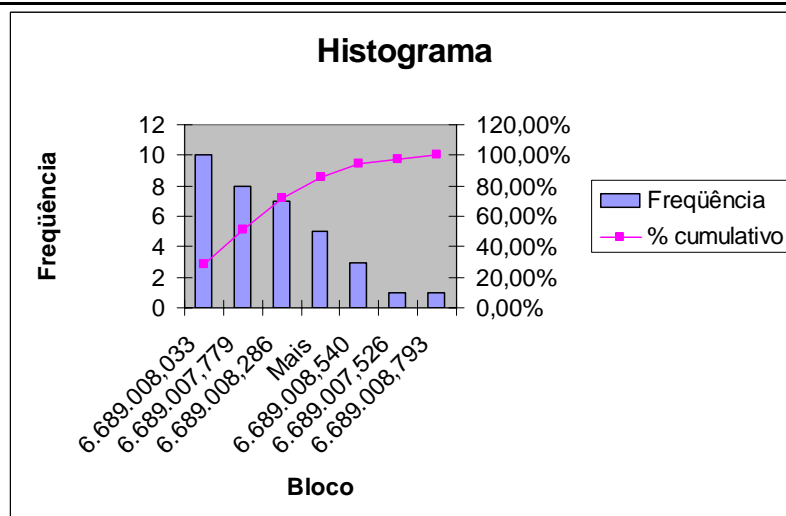
4 Marco Cacequi

Bloco	Freqüência	% cumulativo	Bloco	Freqüência	% cumulativo
(0,918)	1	1,43%	Mais	35	50,00%
142.076,662	34	50,00%	142.076,662	34	98,57%
284,154,242	0	50,00%	(0,918)	1	100,00%
426.231,823	0	50,00%	284.154,242	0	100,00%
568.309,403	0	50,00%	426.231,823	0	100,00%
Mais	35	100,00%	568.309,403	0	100,00%



Histograma 5.7 – Marco Cacequi: valores da coordenada Este obtidos dos dados Pro XR processados com dados da Estação SC

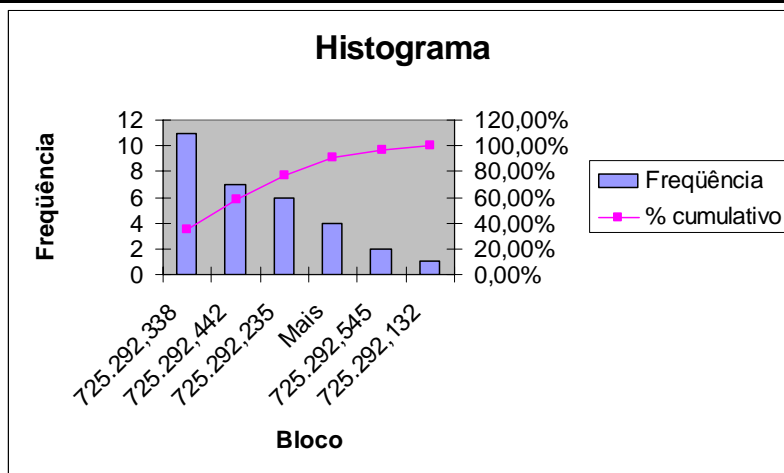
Bloco	Freqüência	% cumulativo	Bloco	Freqüência	% cumulativo
6.689.007,526	1	2,86%	6.689.008,033	10	28,57%
6.689.007,779	8	25,71%	6.689.007,779	8	51,43%
6.689.008,033	10	54,29%	6.689.008,286	7	71,43%
6.689.008,286	7	74,29%	Mais	5	85,71%
6.689.008,540	3	82,86%	6.689.008,540	3	94,29%
6.689.008,793	1	85,71%	6.689.007,526	1	97,14%
Mais	5	100,00%	6.689.008,793	1	100,00%



Histograma 5.8 – Marco Cacequi: valores da coordenada Norte obtidos dos dados Pro XR processados com dados da Estação SC

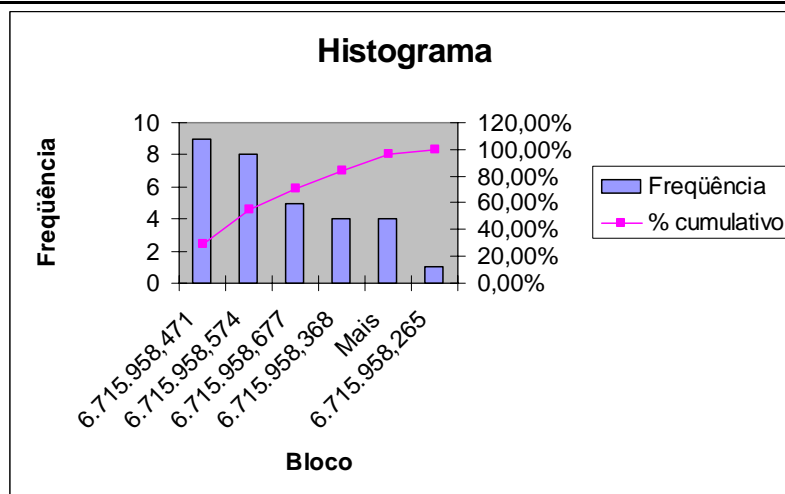
5 São Vicente do Sul

Bloco	Frequência	% cumulativo	Bloco	Frequência	% cumulativo
725.292,132	1	3,23%	725.292,338	11	35,48%
725.292,235	6	22,58%	725.292,442	7	58,06%
725.292,338	11	58,06%	725.292,235	6	77,42%
725.292,442	7	80,65%	Mais	4	90,32%
725.292,545	2	87,10%	725.292,545	2	96,77%
Mais	4	100,00%	725.292,132	1	100,00%



Histograma 5.9 – Marco São Vicente do Sul: valores da coordenada Norte obtidos dos dados Pro XR processados com dados da Estação SC

Bloco	Frequência	% cumulativo	Bloco	Frequência	% cumulativo
6.715.958,265	1	3,23%	6.715.958,471	9	29,03%
6.715.958,368	4	16,13%	6.715.958,574	8	54,84%
6.715.958,471	9	45,16%	6.715.958,677	5	70,97%
6.715.958,574	8	70,97%	6.715.958,368	4	83,87%
6.715.958,677	5	87,10%	Mais	4	96,77%
Mais	4	100,00%	6.715.958,265	1	100,00%

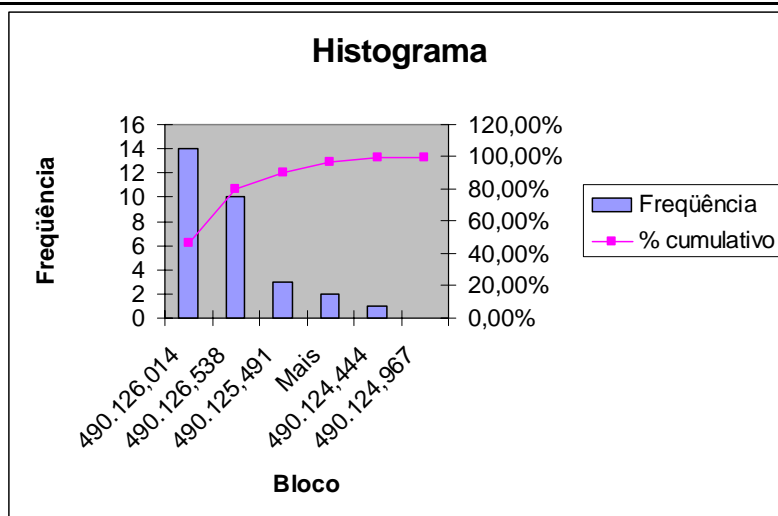


Histograma 5.10 – Marco São Vicente do Sul: valores da coordenada Norte obtidos dos dados Pro XR processados com dados da Estação SC

5.4.2 Histogramas dos dados processados com dados GS20 da Estação Santa Maria da RBMC

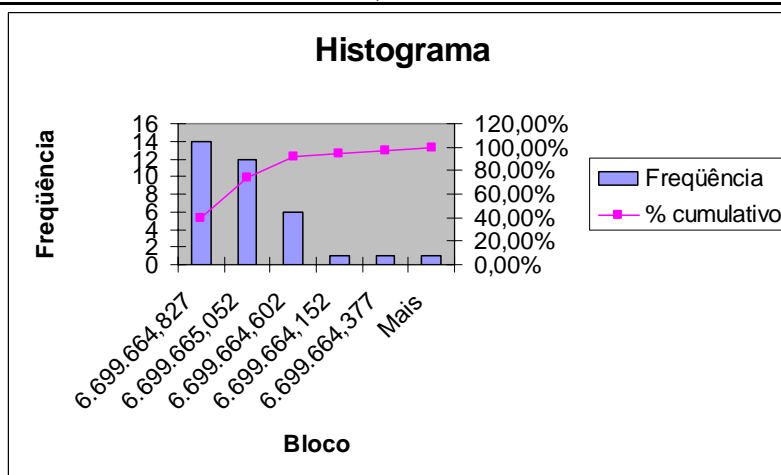
1 Marco Uruguaiana

Bloco	Frequência	% cumulativo	Bloco	Frequência	% cumulativo
490.124,444	1	3,33%	490.126,014	14	46,67%
490.124,967	0	3,33%	490.126,538	10	80,00%
490.125,491	3	13,33%	490.125,491	3	90,00%
490.126,014	14	60,00%	Mais	2	96,67%
490.126,538	10	93,33%	490.124,444	1	100,00%
Mais	2	100,00%	490.124,967	0	100,00%



Histograma 5.11 – Marco Uruguaiana: valores da coordenada Este obtidos dos dados GS20 processados com dados da Estação Santa Maria da RBMC

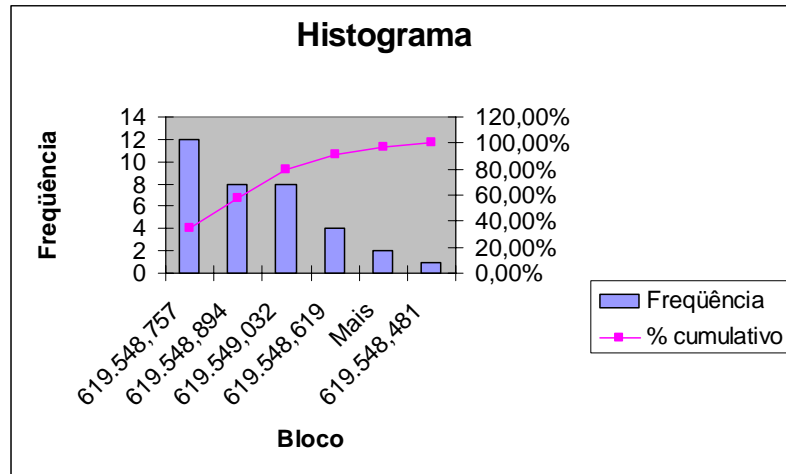
Bloco	Frequência	% cumulativo	Bloco	Frequência	% cumulativo
6.699.664,152	1	2,86%	6.699.664,827	14	40,00%
6.699.664,377	1	5,71%	6.699.665,052	12	74,29%
6.699.664,602	6	22,86%	6.699.664,602	6	91,43%
6.699.664,827	14	62,86%	6.699.664,152	1	94,29%
6.699.665,052	12	97,14%	6.699.664,377	1	97,14%
Mais	1	100,00%	Mais	1	100,00%



Histograma 5.12 – Marco Uruguaiana: valores da coordenada Norte obtidos dos dados GS20 processados com dados da Estação Santa Maria da RBMC

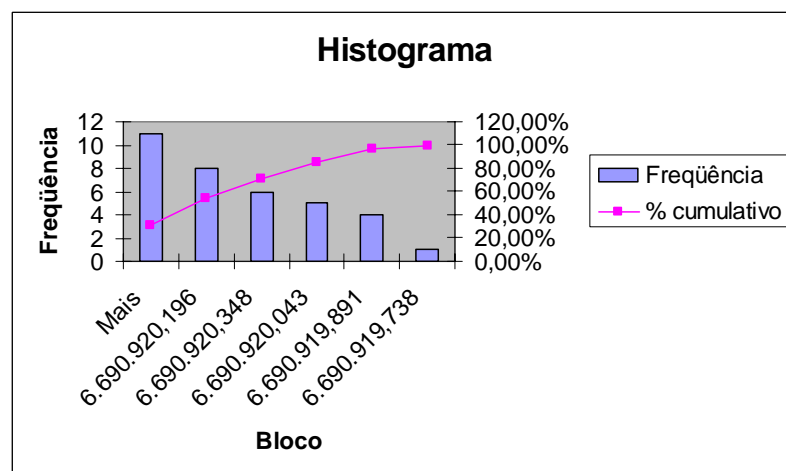
2 Marco Alegre

Bloco	Frequência	% cumulativo	Bloco	Frequência	% cumulativo
619.548,481	1	2,86%	619.548,757	12	34,29%
619.548,619	4	14,29%	619.548,894	8	57,14%
619.548,757	12	48,57%	619.549,032	8	80,00%
619.548,894	8	71,43%	619.548,619	4	91,43%
619.549,032	8	94,29%	Mais	2	97,14%
Mais	2	100,00%	619.548,481	1	100,00%



Histograma 5.13 – Marco Alegre: valores da coordenada Este obtidos dos dados GS20 processados com dados da Estação Santa Maria da RBMC

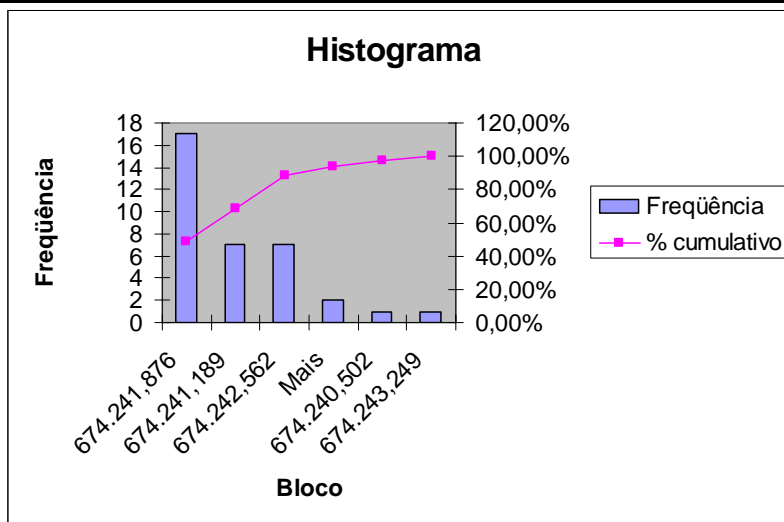
Bloco	Frequência	% cumulativo	Bloco	Frequência	% cumulativo
6.690.919,738	1	2,86%	Mais	11	31,43%
6.690.919,891	4	14,29%	6.690.920,196	8	54,29%
6.690.920,043	5	28,57%	6.690.920,348	6	71,43%
6.690.920,196	8	51,43%	6.690.920,043	5	85,71%
6.690.920,348	6	68,57%	6.690.919,891	4	97,14%
Mais	11	100,00%	6.690.919,738	1	100,00%



Histograma 5.14 – Marco Alegre: valores da coordenada Norte obtidos dos dados GS20 processados com dados da Estação Santa Maria da RBMC

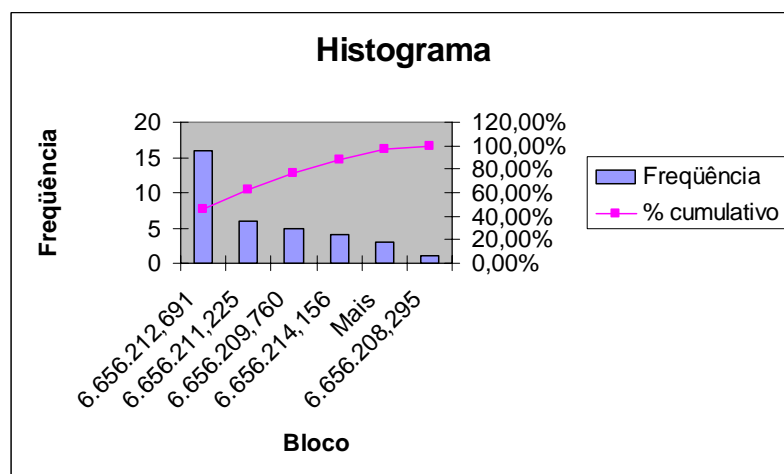
3 Marco Rosário do Sul

Bloco	Freqüência	% cumulativo	Bloco	Freqüência	% cumulativo
674.240,502	1	2,86%	674.241,876	17	48,57%
674.241,189	7	22,86%	674.241,189	7	68,57%
674.241,876	17	71,43%	674.242,562	7	88,57%
674.242,562	7	91,43%	Mais	2	94,29%
674.243,249	1	94,29%	674.240,502	1	97,14%
Mais	2	100,00%	674.243,249	1	100,00%



Histograma 5.15 – Marco Rosário do Sul: valores da coordenada Este obtidos dos dados GS20 processados com dados da Estação Santa Maria da RBMC

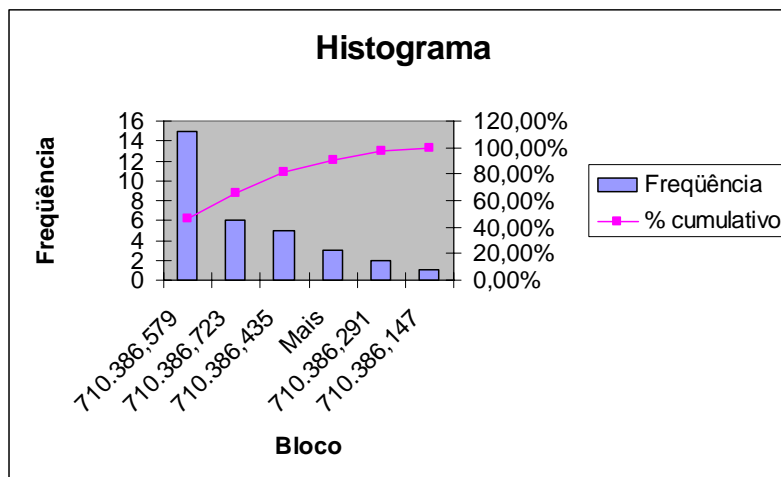
Bloco	Freqüência	% cumulativo	Bloco	Freqüência	% cumulativo
6.656.208,295	1	2,86%	6.656.212,691	16	45,71%
6.656.209,760	5	17,14%	6.656.211,225	6	62,86%
6.656.211,225	6	34,29%	6.656.209,760	5	77,14%
6.656.212,691	16	80,00%	6.656.214,156	4	88,57%
6.656.214,156	4	91,43%	Mais	3	97,14%
Mais	3	100,00%	6.656.208,295	1	100,00%



Histograma 5.16 – Marco Rosário do Sul: valores da coordenada Norte obtidos dos dados GS20 processados com dados da Estação Santa Maria da RBMC

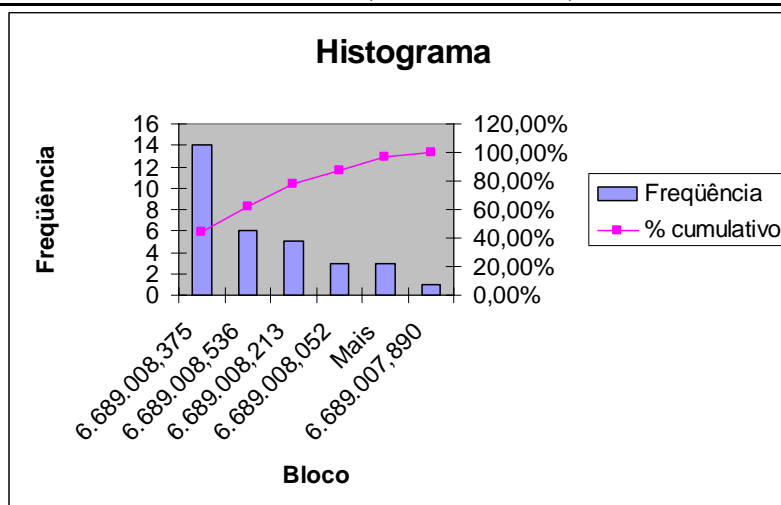
4 Marco Cacequi

Bloco	Frequência	% cumulativo	Bloco	Frequência	% cumulativo
710.386,147	1	3,13%	710.386,579	15	46,88%
710.386,291	2	9,38%	710.386,723	6	65,63%
710.386,435	5	25,00%	710.386,435	5	81,25%
710.386,579	15	71,88%	Mais	3	90,63%
710.386,723	6	90,63%	710.386,291	2	96,88%
Mais	3	100,00%	710.386,147	1	100,00%



Histograma 5.17 – Marco Cacequi: valores da coordenada Este obtidos dos dados GS20 processados com dados da Estação Santa Maria da RBMC

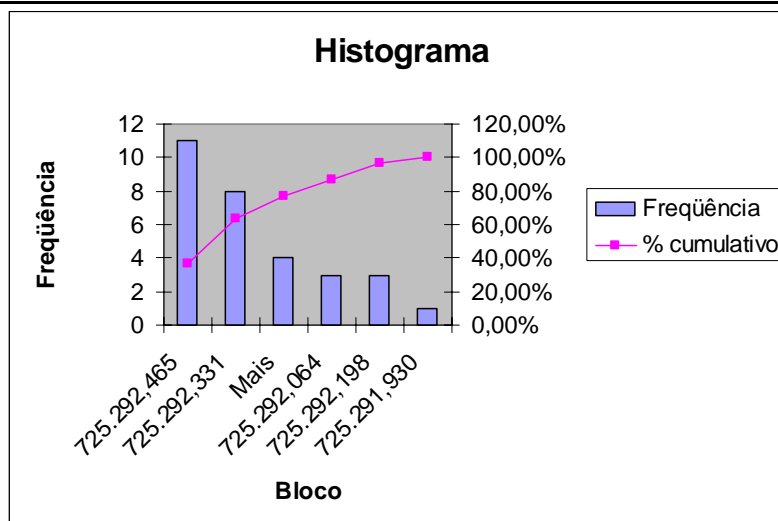
Bloco	Frequência	% cumulativo	Bloco	Frequência	% cumulativo
6.689.007,890	1	3,13%	6.689.008,375	14	43,75%
6.689.008,052	3	12,50%	6.689.008,536	6	62,50%
6.689.008,213	5	28,13%	6.689.008,213	5	78,13%
6.689.008,375	14	71,88%	6.689.008,052	3	87,50%
6.689.008,536	6	90,63%	Mais	3	96,88%
Mais	3	100,00%	6.689.007,890	1	100,00%



Histograma 5.18 – Marco Cacequi: valores da coordenada Norte obtidos dos dados GS20 processados com dados da Estação Santa Maria da RBMC

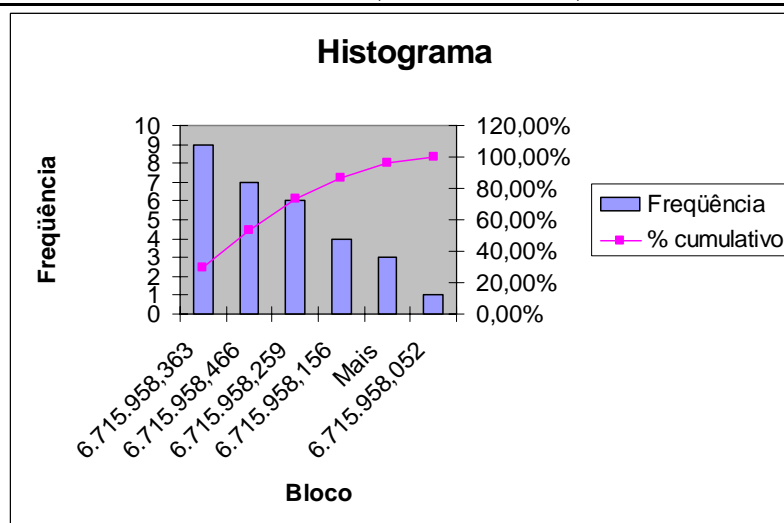
5 Marco São Vicente do Sul

Bloco	Freqüência	% cumulativo	Bloco	Freqüência	% cumulativo
725.291,930	1	3,33%	725.292,465	11	36,67%
725.292,064	3	13,33%	725.292,331	8	63,33%
725.292,198	3	23,33%	Mais	4	76,67%
725.292,331	8	50,00%	725.292,064	3	86,67%
725.292,465	11	86,67%	725.292,198	3	96,67%
Mais	4	100,00%	725.291,930	1	100,00%



Histograma 5.19 – Marco São Vicente do Sul: valores da coordenada Este obtidos dos dados GS20 processados com dados da Estação Santa Maria da RBMC

Bloco	Freqüência	% cumulativo	Bloco	Freqüência	% cumulativo
6.715.958,052	1	3,33%	6.715.958,363	9	30,00%
6.715.958,156	4	16,67%	6.715.958,466	7	53,33%
6.715.958,259	6	36,67%	6.715.958,259	6	73,33%
6.715.958,363	9	66,67%	6.715.958,156	4	86,67%
6.715.958,466	7	90,00%	Mais	3	96,67%
Mais	3	100,00%	6.715.958,052	1	100,00%



Histograma 5.20 – Marco São Vicente do Sul: valores da coordenada Norte obtidos dos dados GS20 processados com dados da Estação Santa Maria da RBMC

5.5 Comparação de médias

Nesta seção são descritas as quantidades necessárias para tornar possível uma inferência estatística.

Independentemente do tipo de distribuição que uma população possa ter e desde que o tamanho da amostra seja $n \geq 30$, o teorema do limite central estabelece que a distribuição das médias das amostras é normal (LARSON & FARBER, p.205). A teoria da amostragem que é a base da inferência estatística se fundamenta na distribuição normal.

5.5.1 Teste para a diferença de duas médias

Quando os desvios padrões populacionais σ_1 e σ_2 forem desconhecidos e supostamente diferentes, a hipótese básica (H_0) de que não exista diferença entre as médias populacionais μ_1 e μ_2 , isto é, $H_0 : \mu_1 = \mu_2$, depende da estatística (COSTA NETO, 1977, p. 114):

$$t = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}}, \quad (5.8)$$

em que \bar{x}_1 e \bar{x}_2 são as médias amostrais obtidas de amostras independentes de tamanhos n_1 e n_2 , respectivamente, s_1^2 e s_2^2 são as variâncias amostrais. O número de graus de liberdade v é dado por

$$v \cong \frac{(w_1 + w_2)^2}{\frac{w_1^2}{n_1 + 1} + \frac{w_2^2}{n_2 + 1}} - 2, \quad (5.9)$$

em que $w_1 = \frac{s_1^2}{n_1}$ e $w_2 = \frac{s_2^2}{n_2}$. Se $|t| > t_{\frac{\alpha}{2}}$, rejeita-se H_0 , ao nível de significância α , isto quer dizer que as médias diferem. Na expressão da estatística t , pode-se substituir \bar{x}_1 pela coordenada oficial E_1 do marco e \bar{x}_2 pela média \bar{E}_2 que se obtém da coluna dos valores calculados de coordenadas Este (planilhas 5.1 a 5.10). Nota-se que a estatística t é dependente do tamanho da amostra n_1 a partir da qual se obteve o valor de E_1 . O valor de n_1 é desconhecido, o que impossibilita o cálculo dessa estatística.

5.5.2 Teste para a diferença de dois vetores de médias

Sendo os dados normais pode-se efetuar, para cada marco, a comparação de dois vetores de médias:

a) o primeiro formado pelas coordenadas oficiais de cada marco, o qual é designado por $\bar{x}_1 = \begin{bmatrix} E_1 \\ N_1 \end{bmatrix}$;

b) e o segundo formado pelo vetor de média das coordenadas Este e das coordenadas Norte do marco, obtido dos dados do experimento realizado conforme mostram as planilhas 5.1 a 5.10, o qual é designado por $\bar{x}_2 = \begin{bmatrix} \bar{E}_2 \\ \bar{N}_2 \end{bmatrix}$.

A comparação visa verificar se os vetores de médias são iguais, isto é, $\bar{x}_1 = \bar{x}_2$ ao nível de significância α .

No caso de grandes amostras em que a diferença entre o tamanho da amostra (n) e o número de componentes do vetor (p) for maior ou igual a 25, os testes são baseados na estatística qui-quadrado (JOHNSON & WICHERN, 1998, p. 196 e 312). Os valores de coordenadas Este e Norte de cada marco formam uma matriz de dados com n linhas e p colunas, conforme mostram as planilhas 5.1 a 5.10.

A distância quadrática $d^2(\bar{x}_1, \bar{x}_2, S)$ dada pela (3.28) segue a distribuição qui-quadrado com p graus de liberdade. Rejeita-se a hipótese da igualdade entre os vetores de média \bar{x}_1 e \bar{x}_2 , ao nível de significância α , se $(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)^T S^{-1} (\bar{x}_1 - \bar{x}_2) > \chi_{\alpha; p}^2$, em que S é a matriz covariância comum dada pela (3.29): $S = \frac{(n_1 - 1)S_1 + (n_2 - 1)S_2}{n_1 + n_2 - 2}$.

Verifica-se que na (3.29) que S depende do tamanho da amostra n_1 referente ao marco oficial e de sua matriz covariância S_1 , valores que não constam dos relatórios dos marcos, exceto as informações de desvio padrão das coordenadas curvilíneas (ver quadro 4.1), enquanto que a matriz covariância S_2 para cada marco encontra na seção 5.5. e o tamanho da amostra n_2 vem escrito no final da primeira coluna de cada planilha da seção 5.1. Ainda que fosse obtida a matriz de covariância para as coordenadas Este e Norte do sistema de projeção UTM por meio da lei de propagação das covariâncias, esta não estaria correta em virtude da falta de informação das covariâncias das coordenadas curvilíneas e além disto falta o tamanho da amostra n_1 .

5.6 Estatísticas multivariadas

Os valores das coordenadas Este e Norte do Sistema UTM de cada marco das planilhas 5.1 a 5.10 foram reunidos em uma matriz de dados segundo o modelo dado pela 3.9. Cada marco, portanto, tem uma matriz de dados com a seguinte estrutura:

$${}^n \mathbf{X}_2 = \begin{bmatrix} E_1 & N_1 \\ E_2 & N_2 \\ \vdots & \vdots \\ E_i & N_i \\ \vdots & \vdots \\ E_n & N_n \end{bmatrix}_{n \times 2}$$

em que n é número de valores de coordenadas.

A seguir foram calculadas para cada marco as seguintes estatísticas multivariadas:

a) o vetor de médias das coordenadas \mathbf{m}

$$\mathbf{m} = \begin{bmatrix} \bar{E} \\ \bar{N} \end{bmatrix}, \quad \text{em que } \bar{E} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E_i \text{ e } \bar{N} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n N_i ;$$

b) a matriz covariância amostral \mathbf{S}

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} S_E^2 & S_{E,N} \\ S_{N,E} & S_N^2 \end{bmatrix}_{2 \times 2} \quad ; \quad \text{(simétrica)}$$

c) a matriz desvio padrão amostral $\hat{\mathbf{V}}^{\frac{1}{2}}$

$$\hat{\mathbf{V}}^{\frac{1}{2}} = \begin{bmatrix} \sqrt{S_E^2} & 0 \\ 0 & \sqrt{S_N^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_E & 0 \\ 0 & S_N \end{bmatrix}_{2 \times 2} \quad ; \quad \text{(diagonal)}$$

d) a matriz correlação amostral $\hat{\mathbf{R}}$

$$\hat{\mathbf{R}} = \left(\hat{\mathbf{V}}^{\frac{1}{2}} \right)^{-1} \mathbf{S} \left(\hat{\mathbf{V}}^{\frac{1}{2}} \right)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{S_{E,N}}{S_E S_N} \\ \frac{S_{N,E}}{S_N S_{NE}} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \hat{r}_{E,N} \\ \hat{r}_{N,E} & 1 \end{bmatrix}_{2 \times 2} \quad ; \quad \text{(simétrica)}$$

e) o determinante da matriz covariância amostral $\det(\mathbf{S})$

$\det(\mathbf{S}) = s_E^2 s_N^2 - s_{E,N} s_{N,E}$; o determinante da matriz covariância amostral é a medida estatística chamada variância generalizada;

f) o traço da matriz covariância amostral $\text{tr}(\mathbf{S})$

$\text{tr}(\mathbf{S}) = s_E^2 + s_N^2$; o traço da matriz covariância amostral é a medida estatística chamada variância total;

g) o erro de posição $\varepsilon_p = \sqrt{\text{tr}(\mathbf{S})}$

$\varepsilon_p = \sqrt{\text{tr}(\mathbf{S})} = \sqrt{s_E^2 + s_N^2}$; o erro de posição é o raio de um círculo com centro no ponto de coordenadas médias;

h) a matriz de valores próprios $\mathbf{\Lambda}$ matriz covariância amostral \mathbf{S}

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}_{2 \times 2} \text{ (diagonal)} ;$$

o determinante da matriz covariância amostral \mathbf{S} é igual ao determinante da de sua matriz de valores próprios, isto é, $\det(\mathbf{S}) = \det(\mathbf{\Lambda})$;

i) a matriz de vetores próprios \mathbf{E} associados aos valores próprios

$$\mathbf{E} = [\mathbf{e}_1 \quad \mathbf{e}_2] = \begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} \\ e_{21} & e_{22} \end{bmatrix} ;$$

o elemento e_{11} é o cosseno diretor, cujo ângulo γ orienta o semi-eixo maior a da elipse dos erros (fig. 3.3) em relação ao eixo das abscissas do sistema de coordenadas;

j) a matriz raiz quadrada \mathbf{Q} da matriz $\mathbf{\Lambda}$, a qual fornece o comprimento dos semi-eixos a e b da elipse dos erros

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_2} \end{bmatrix}_{2 \times 2} \text{ (diagonal)} ; \quad \lambda_1 = \lambda_{\max} \Rightarrow a = \sqrt{\lambda_1} ; \quad \lambda_2 = \lambda_{\min} \Rightarrow b = \sqrt{\lambda_2} .$$

5.6.1 Estatísticas multivariadas dos dados Pro XR

1 Marco Uruguiana (n = 40):

$$\mathbf{m}^T = [\bar{E} \quad \bar{N}] = [490.124,8517375 \quad 6.699.658,066885](m)$$

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} s_E^2 & s_{E,N} \\ s_{N,E} & s_N^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,02914502599275 & 0,01260430391041 \\ 0,01260430391041 & 0,07195619106500 \end{bmatrix} (m^2)$$

$$\hat{\mathbf{V}}^{\frac{1}{2}} = \begin{bmatrix} \sqrt{s_E^2} & 0 \\ 0 & \sqrt{s_N^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_E & 0 \\ 0 & s_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,17071914360361 & 0 \\ 0 & 0,26824651174806 \end{bmatrix} (m)$$

$$\hat{\mathbf{R}} = \begin{bmatrix} 1 & \hat{r}_{E,N} \\ \hat{r}_{N,E} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0,27523430275644 \\ 0,27523430275644 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\det(\mathbf{S}) = s_E^2 s_N^2 - s_{E,N} s_{N,E} = 0,00193829658186 m^4$$

$$\text{tr}(\mathbf{S}) = s_E^2 + s_N^2 = 0,10110121705775 m^2$$

$$\varepsilon_p = \sqrt{\text{tr}(\mathbf{S})} = \sqrt{s_E^2 + s_N^2} = 0,31796417574587 m$$

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,07539145072025 & 0 \\ 0 & 0,02570976633750 \end{bmatrix} (m^2)$$

$$\mathbf{E} = [\mathbf{e}_1 \quad \mathbf{e}_2] = \begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} \\ e_{21} & e_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,26295511837993 & 0,96480806677691 \\ 0,96480806677691 & -0,26295511837993 \end{bmatrix}$$

$$\det(\mathbf{\Lambda}) = \lambda_1 \lambda_2 = 0,00193829658186 m^4$$

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,27457503659337 & 0 \\ 0 & 0,16034265289529 \end{bmatrix} (m)$$

$$e_{11} = 0,26295511837993$$

$$\gamma = \arccos e_{11} = 74^\circ 45' 16,2686''$$

2 Marco Alegrete (n = 40):

$$\mathbf{m}^T = [\bar{E} \quad \bar{N}] = [619.548,8752475 \quad 6.690.919,64466](m)$$

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} s_E^2 & s_{E,N} \\ s_{N,E} & s_N^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,03953858307228 & -0,00543168241301 \\ -0,00543168241301 & 0,04658094655313 \end{bmatrix} (m^2)$$

$$\hat{\mathbf{V}}^{\frac{1}{2}} = \begin{bmatrix} \sqrt{s_E^2} & 0 \\ 0 & \sqrt{s_N^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_E & 0 \\ 0 & s_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,19884311170438 & 0 \\ 0 & 0,21582619524315 \end{bmatrix} (m)$$

$$\hat{\mathbf{R}} = \begin{bmatrix} 1 & \hat{r}_{E,N} \\ \hat{r}_{N,E} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -0,12656676026070 \\ -0,12656676026070 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\det(\mathbf{S}) = s_E^2 s_N^2 - s_{E,N} s_{N,E} = 0,00181224145104 m^4$$

$$\text{tr}(\mathbf{S}) = s_E^2 + s_N^2 = 0,08611952962542 m^2$$

$$\varepsilon_p = \sqrt{\text{tr}(\mathbf{S})} = \sqrt{s_E^2 + s_N^2} = 0,29346129152823 m$$

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,04953293209658 & 0 \\ 0 & 0,03658659752884 \end{bmatrix} (m^2)$$

$$\mathbf{E} = [\mathbf{e}_1 \quad \mathbf{e}_2] = \begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} \\ e_{21} & e_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,47751135138971 & 0,87862557969477 \\ 0,87862557969477 & 0,47751135138971 \end{bmatrix}$$

$$\det(\mathbf{\Lambda}) = \lambda_1 \lambda_2 = 0,00181224145104 m^4$$

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,22255995169072 & 0 \\ 0 & 0,19127623357030 \end{bmatrix} (m)$$

$$e_{11} = -0,47751135138971$$

$$\gamma = \arccos e_{11} = 118^\circ 31' 22,7647''$$

3 Marco Rosário do Sul (n = 40):

$$\mathbf{m}^T = [\bar{E} \quad \bar{N}] = [674.240,9739775 \quad 6.656.211,616175](m)$$

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} s_E^2 & s_{E,N} \\ s_{N,E} & s_N^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,03181871922340 & 0,01089478993598 \\ 0,01089478993598 & 0,02010191474820 \end{bmatrix} (m^2)$$

$$\hat{\mathbf{V}}^{\frac{1}{2}} = \begin{bmatrix} \sqrt{s_E^2} & 0 \\ 0 & \sqrt{s_N^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_E & 0 \\ 0 & s_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,17837802337565 & 0 \\ 0 & 0,14178122142301 \end{bmatrix} (m)$$

$$\hat{\mathbf{R}} = \begin{bmatrix} 1 & \hat{r}_{E,N} \\ \hat{r}_{N,E} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0,43078324203824 \\ 0,43078324203824 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\det(\mathbf{S}) = s_E^2 s_N^2 - s_{E,N} s_{N,E} = 0,000520920733476758 m^4$$

$$\text{tr}(\mathbf{S}) = s_E^2 + s_N^2 = 0,05192063397160 m^2$$

$$\varepsilon_p = \sqrt{\text{tr}(\mathbf{S})} = \sqrt{s_E^2 + s_N^2} = 0,22786099703899 m$$

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,03833033414531 & \\ & 0,01359029982629 \end{bmatrix} (m^2)$$

$$\mathbf{E} = [\mathbf{e}_1 \quad \mathbf{e}_2] = \begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} \\ e_{21} & e_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,85836965726248 & 0,51303170612653 \\ -0,51303170612653 & -0,85836965726248 \end{bmatrix}$$

$$\det(\mathbf{\Lambda}) = \lambda_1 \lambda_2 = 5,209207334767580 \cdot 10^{-4} m^4$$

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,19578134268952 & \\ & 0,11657744132675 \end{bmatrix} (m)$$

$$e_{11} = -0,85836965726248$$

$$\gamma = \arccos e_{11} = 149^\circ 08' 02,4648''$$

4 Marco Cacequi (n = 35):

$$\mathbf{m}^T = [\bar{E} \quad \bar{N}] = [710.386,73764857 \quad 6.689.008,09258857](m)$$

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} s_E^2 & s_{E,N} \\ s_{N,E} & s_N^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,04360620727745 & -0,01012008531369 \\ -0,01012008531369 & 0,18213062987921 \end{bmatrix} (m^2)$$

$$\hat{\mathbf{V}}^{\frac{1}{2}} = \begin{bmatrix} \sqrt{s_E^2} & 0 \\ 0 & \sqrt{s_N^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_E & 0 \\ 0 & s_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,20882099338298 & 0 \\ 0 & 0,42676765327191 \end{bmatrix} (m)$$

$$\hat{\mathbf{R}} = \begin{bmatrix} 1 & \hat{r}_{E,N} \\ \hat{r}_{N,E} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -0,11355820563192 \\ -0,11355820563192 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\det(\mathbf{S}) = s_E^2 s_N^2 - s_{E,N} s_{N,E} = 0,00783960987133 m^4$$

$$\text{tr}(\mathbf{S}) = s_E^2 + s_N^2 = 0,22573683715667 m^2$$

$$\varepsilon_p = \sqrt{\text{tr}(\mathbf{S})} = \sqrt{s_E^2 + s_N^2} = 0,47511770873823 m$$

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,18286606168897 & \\ & 0,04287077546770 \end{bmatrix} (m^2)$$

$$\mathbf{E} = [\mathbf{e}_1 \quad \mathbf{e}_2] = \begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} \\ e_{21} & e_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,07247938487538 & 0,99736991069918 \\ 0,99736991069918 & 0,07247938487538 \end{bmatrix}$$

$$\det(\mathbf{\Lambda}) = \lambda_1 \lambda_2 = 0,00783960987133 m^4$$

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,42762841543678 & \\ & 0,20705259106734 \end{bmatrix} (m)$$

$$e_{11} = -0,07247938487538$$

$$\gamma = \arccos e_{11} = 94^\circ 09' 23,0666''$$

5 Marco São Vicente do Sul (n = 31) :

$$\mathbf{m}^T = [\bar{E} \quad \bar{N}] = [725.292,33352903 \quad 6.715.958,50286452](m)$$

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} s_E^2 & s_{E,N} \\ s_{N,E} & s_N^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,01862462413108 & 0,00540129106149 \\ 0,00540129106149 & 0,01909315303620 \end{bmatrix} (m^2)$$

$$\hat{\mathbf{V}}^{\frac{1}{2}} = \begin{bmatrix} \sqrt{s_E^2} & 0 \\ 0 & \sqrt{s_N^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_E & 0 \\ 0 & s_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,13647206355545 & 0 \\ 0 & 0,13817797594479 \end{bmatrix} (m)$$

$$\hat{\mathbf{R}} = \begin{bmatrix} 1 & \hat{r}_{E,N} \\ \hat{r}_{N,E} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0,28642768684129 \\ 0,28642768684129 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\det(\mathbf{S}) = s_E^2 s_N^2 - s_{E,N} s_{N,E} = 0,0003264288536454620 \text{ m}^4$$

$$\text{tr}(\mathbf{S}) = s_E^2 + s_N^2 = 0,03771777716728 \text{ m}^2$$

$$\varepsilon_p = \sqrt{\text{tr}(\mathbf{S})} = \sqrt{s_E^2 + s_N^2} = 0,19421065152890 \text{ m}$$

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,02426525750970 & 0 \\ 0 & 0,01345251965758 \end{bmatrix} (m^2)$$

$$\mathbf{E} = [\mathbf{e}_1 \quad \mathbf{e}_2] = \begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} \\ e_{21} & e_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,69161723522499 & 0,72226421754075 \\ 0,72226421754075 & -0,69161723522499 \end{bmatrix}$$

$$\det(\mathbf{\Lambda}) = \lambda_1 \lambda_2 = 0,0003264288536454620 \text{ m}^4$$

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,155773096232 & 0 \\ 0 & 0,1159849975539 \end{bmatrix} (m)$$

$$e_{11} = 0,69161723522499$$

$$\gamma = \arccos e_{11} = 46^\circ 14' 30,2504''$$

5.6.2 Estatísticas multivariadas dos dados GS20

1 Marco Uruguiana (n = 35):

$$\mathbf{m}^T = [\bar{E} \quad \bar{N}] = [490.125, 98942857 \quad 6.699.664, 75188572](m)$$

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} s_E^2 & s_{E,N} \\ s_{N,E} & s_N^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,26505819327704 & -0,09496509665459 \\ -0,09496509665459 & 0,05135763361172 \end{bmatrix} (m^2)$$

$$\hat{\mathbf{V}}^{\frac{1}{2}} = \begin{bmatrix} \sqrt{s_E^2} & 0 \\ 0 & \sqrt{s_N^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_E & 0 \\ 0 & s_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,51483802625393 & 0 \\ 0 & 0,22662222664981 \end{bmatrix} (m)$$

$$\hat{\mathbf{R}} = \begin{bmatrix} 1 & \hat{r}_{E,N} \\ \hat{r}_{N,E} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -0,81393719578569 \\ -0,81393719578569 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\det(\mathbf{S}) = s_E^2 s_N^2 - s_{E,N} s_{N,E} = 0,00459439199349 \text{ m}^4$$

$$\text{tr}(\mathbf{S}) = s_E^2 + s_N^2 = 0,31641582688876 \text{ m}^2$$

$$\varepsilon_p = \sqrt{\text{tr}(\mathbf{S})} = \sqrt{s_E^2 + s_N^2} = 0,56250851272559 \text{ m}$$

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,30116018479022 & 0 \\ 0 & 0,01525564209854 \end{bmatrix} (m^2)$$

$$\mathbf{E} = [\mathbf{e}_1 \quad \mathbf{e}_2] = \begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} \\ e_{21} & e_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,93473371328151 & -0,35534896264793 \\ 0,35534896264793 & -0,93473371328151 \end{bmatrix}$$

$$\det(\mathbf{\Lambda}) = \lambda_1 \lambda_2 = 0,00459439199349 \text{ m}^4$$

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,54878063448906 & 0 \\ 0 & 0,12351373242899 \end{bmatrix} (m)$$

$$e_{11} = -0,93473371328151$$

$$\gamma = \arccos e_{11} = 159^\circ 11' 06,6012''$$

2 Marco Alegrete (n = 35):

$$\mathbf{m}^T = [\bar{E} \quad \bar{N}] = [619.548, 78520000 \quad 6.690.920, 18228571](m)$$

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} s_E^2 & s_{E,N} \\ s_{N,E} & s_N^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,02913904706059 & 0,01113008822749 \\ 0,01113008822749 & 0,05516938656796 \end{bmatrix} (m^2)$$

$$\hat{\mathbf{V}}^{\frac{1}{2}} = \begin{bmatrix} \sqrt{s_E^2} & 0 \\ 0 & \sqrt{s_N^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_E & 0 \\ 0 & s_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,17070163168697 & 0 \\ 0 & 0,23488164374416 \end{bmatrix} (m)$$

$$\hat{\mathbf{R}} = \begin{bmatrix} 1 & \hat{r}_{E,N} \\ \hat{r}_{N,E} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0,27759513910030 \\ 0,27759513910030 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\det(\mathbf{S}) = s_E^2 s_N^2 - s_{E,N} s_{N,E} = 0,00148370448756 \text{ m}^4$$

$$\text{tr}(\mathbf{S}) = s_E^2 + s_N^2 = 0,08430843362855 \text{ m}^2$$

$$\varepsilon_p = \sqrt{\text{tr}(\mathbf{S})} = \sqrt{s_E^2 + s_N^2} = 0,29035914593578 \text{ m}$$

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,05927944696365 & 0 \\ 0 & 0,02502898666491 \end{bmatrix} (m^2)$$

$$\mathbf{E} = [\mathbf{e}_1 \quad \mathbf{e}_2] = \begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} \\ e_{21} & e_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,34641037895855 & 0,93808307166785 \\ 0,93808307166785 & -0,34641037895855 \end{bmatrix}$$

$$\det(\mathbf{\Lambda}) = \lambda_1 \lambda_2 = 0,00148370448756 \text{ m}^4$$

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,24347370897830 & 0 \\ 0 & 0,15820552033639 \end{bmatrix} (m)$$

$$e_{11} = 0,34641037895855$$

$$\gamma = \arccos e_{11} = 69^\circ 43' 55,5084''$$

3 Marco Rosário do Sul (n = 35):

$$\mathbf{m}^T = [\bar{E} \quad \bar{N}] = [674.241,61665714 \quad 6.656.211,40714286](m)$$

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} s_E^2 & s_{E,N} \\ s_{N,E} & s_N^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,49235893782180 & 1,03400081515524 \\ 1,03400081515524 & 2,99858412605759 \end{bmatrix} (m^2)$$

$$\hat{\mathbf{V}}^{\frac{1}{2}} = \begin{bmatrix} \sqrt{s_E^2} & 0 \\ 0 & \sqrt{s_N^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_E & 0 \\ 0 & s_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,70168293254275 & 0 \\ 0 & 1,73164203173104 \end{bmatrix} (m)$$

$$\hat{\mathbf{R}} = \begin{bmatrix} 1 & \hat{r}_{E,N} \\ \hat{r}_{N,E} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0,85098489083104 \\ 0,85098489083104 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\det(\mathbf{S}) = s_E^2 s_N^2 - s_{E,N} s_{N,E} = 0,4072220095333 m^4$$

$$\text{tr}(\mathbf{S}) = s_E^2 + s_N^2 = 3,49094306387938 m^2$$

$$\varepsilon_p = \sqrt{\text{tr}(\mathbf{S})} = \sqrt{s_E^2 + s_N^2} = 1,86840655743855 m$$

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3,37010960218137 & 0 \\ 0 & 0,12083346169802 \end{bmatrix} (m^2)$$

$$\mathbf{E} = [\mathbf{e}_1 \quad \mathbf{e}_2] = \begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} \\ e_{21} & e_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,33814345746839 & 0,94109457663474 \\ 0,94109457663474 & -0,33814345746839 \end{bmatrix}$$

$$\det(\mathbf{\Lambda}) = \lambda_1 \lambda_2 = 0,4072220095333 m^4$$

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,83578582688215 & 0 \\ 0 & 0,34761107821532 \end{bmatrix} (m)$$

$$e_{11} = 0,33814345746839$$

$$\gamma = \arccos e_{11} = 70^\circ 14' 10,3064''$$

4 Marco Cacequi (n = 32):

$$\mathbf{m}^T = [\bar{E} \quad \bar{N}] = [710.386,51175000 \quad 6.689.008,28715625](m)$$

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} s_E^2 & s_{E,N} \\ s_{N,E} & s_N^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,02507058064658 & -0,01464637902447 \\ -0,01464637902447 & 0,03780329741212 \end{bmatrix} (m^2)$$

$$\hat{\mathbf{V}}^{\frac{1}{2}} = \begin{bmatrix} \sqrt{s_E^2} & 0 \\ 0 & \sqrt{s_N^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_E & 0 \\ 0 & s_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,15833692129944 & 0 \\ 0 & 0,19443070079624 \end{bmatrix} (m)$$

$$\hat{\mathbf{R}} = \begin{bmatrix} 1 & \hat{r}_{E,N} \\ \hat{r}_{N,E} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -0,47575485730055 \\ -0,47575485730055 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\det(\mathbf{S}) = s_E^2 s_N^2 - s_{E,N} s_{N,E} = 0,0007332341979488666 m^4$$

$$\text{tr}(\mathbf{S}) = s_E^2 + s_N^2 = 0,06287387805870 m^2$$

$$\varepsilon_p = \sqrt{\text{tr}(\mathbf{S})} = \sqrt{s_E^2 + s_N^2} = 0,25074664117132 m$$

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,04740712805723 & 0 \\ 0 & 0,01546675000147 \end{bmatrix} (m^2)$$

$$\mathbf{E} = [\mathbf{e}_1 \quad \mathbf{e}_2] = \begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} \\ e_{21} & e_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,54834289475051 & 0,83625359178698 \\ 0,83625359178698 & 0,54834289475051 \end{bmatrix}$$

$$\det(\mathbf{\Lambda}) = \lambda_1 \lambda_2 = 0,0007332341979488666 m^4$$

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,21773178008097 & 0 \\ 0 & 0,12436538908181 \end{bmatrix} (m)$$

$$e_{11} = -0,54834289475051$$

$$\gamma = \arccos e_{11} = 123^\circ 15' 12,2499''$$

5 Marco São Vicente do Sul ($n = 30$):

$$\mathbf{m}^T = [\bar{E} \quad \bar{N}] = [725.292,30276667 \quad 6.715.958,30070000](\text{m})$$

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} s_E^2 & s_{E,N} \\ s_{N,E} & s_N^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,02851866781481 & -0,00112189999506 \\ -0,00112189999506 & 0,01786235514963 \end{bmatrix} (\text{m}^2)$$

$$\hat{\mathbf{V}}^{\frac{1}{2}} = \begin{bmatrix} \sqrt{s_E^2} & 0 \\ 0 & \sqrt{s_N^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_E & 0 \\ 0 & s_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,16887471040630 & 0 \\ 0 & 0,13365012214596 \end{bmatrix} (\text{m})$$

$$\hat{\mathbf{R}} = \begin{bmatrix} 1 & \hat{r}_{E,N} \\ \hat{r}_{N,E} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -0,04970729943233 \\ -0,04970729943233 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\det(\mathbf{S}) = s_E^2 s_N^2 - s_{E,N} s_{N,E} = 0,0005081519133035580 \text{m}^4$$

$$\text{tr}(\mathbf{S}) = s_E^2 + s_N^2 = 0,04638102296444 \text{m}^2$$

$$\varepsilon_p = \sqrt{\text{tr}(\mathbf{S})} = \sqrt{s_E^2 + s_N^2} = 0,21536253844260 \text{m}$$

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,02863550087647 & 0 \\ 0 & 0,01774552208797 \end{bmatrix} (\text{m}^2)$$

$$\mathbf{E} = [\mathbf{e}_1 \quad \mathbf{e}_2] = \begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} \\ e_{21} & e_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,99462128820897 & -0,10357843907650 \\ 0,10357843907650 & -0,99462128820897 \end{bmatrix}$$

$$\det(\mathbf{\Lambda}) = \lambda_1 \lambda_2 = 0,0005081519133035580 \text{m}^4$$

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,16922027324309 & 0 \\ 0 & 0,13321231958034 \end{bmatrix} (\text{m})$$

$$e_{11} = -0,99462128820897$$

$$\gamma = \arccos e_{11} = 174^\circ 03' 17,0261''$$

6 CONCLUSÃO E RECOMENDAÇÕES

O aprofundamento do tema da pesquisa nos fundamentos da Estatística para a obtenção dos parâmetros indicadores de qualidade e a formulação dos modelos para estimar esses parâmetros atinge os objetivos que é discutir os problemas encontrados por parte da comunidade usuária ao usar os programas comerciais presentes no mercado e com isto interagir com o fabricante de forma que este consiga apresentar programas mais pormenorizados.

Mediante a pesquisa nos manuais dos programas comerciais GPS Pathfinder Office da Empresa Trimble e GIS DataPRO da Empresa Leica que foram utilizados na pesquisa foi possível conhecer melhor os indicadores de qualidade do processamento de dados.

A pesquisa proporcionou a realização de levantamento geodésico, sobre os marcos da rede oficial do SGB, com dois equipamentos presentes no mercado porem não foi possível ter acesso a um volume maior de dados oficiais destes marcos tal como o numero de observações realizadas durante a ocupação do marco pelo IBGE. Com a posse destes dados seria possível comparar o resultado obtido no levantamento realizado com cada um dos receptores com as coordenadas oficiais dos marcos da rede oficial do SGB.

Na busca do conhecimento e identificação dos parâmetros de qualidade adotados pelos programas escolhidos, conseguiu-se identificar com mais nitidez os contidos no programas GIS DataPRO. O Programa GPS Pathfinder Office 3.0 apresenta os parâmetros que utiliza, porém sem aprofundar na identificação dos cálculos que levam a obtenção das coordenadas finais.

6.1 Avaliação dos resultados oriundos da coleta de dados com receptor GPS Pathfinder Pro XR

Como esta pesquisa busca a comparação das coordenadas obtidas pelo cálculo dos dados do levantamento com as coordenadas oficiais dos marcos (quadro 4.1), nota-se no quadro 5.1 que o erro linear absoluto $\varepsilon_{abs.} = 6,7548\text{m}$ do marco Uruguaiana está acima do aceitável, visto que a Lei 10.267/2001 prescreve o valor não superior a 0,50 m.

Os demais marcos Alegrete com $\varepsilon_{abs.} = 0,4828\text{m}$, Rosário do Sul com $\varepsilon_{abs.} = 0,2585\text{m}$, Cacequi com $\varepsilon_{abs.} = 0,2618\text{m}$ e São Vicente do Sul com $\varepsilon_{abs.} = 0,1598\text{m}$. Cada um destes marcos possui erro inferior ao valor prescrito pela Lei 10.265/2001.

6.2 Avaliação dos resultados oriundos da coleta de dados com receptor GPS GS20

Os dados obtidos pelo receptor GS20 forneceram os seguintes resultados (quadro 5.2): marco Uruguaiana com $\varepsilon_{abs.} = 0,1068\text{m}$, marco Alegrete com $\varepsilon_{abs.} = 0,2135\text{m}$, marco Rosário do Sul com $\varepsilon_{abs.} = 0,6775\text{m}$, marco Cacequi com $\varepsilon_{abs.} = 0,1060\text{m}$ e marco São Vicente do Sul com $\varepsilon_{abs.} = 0,2226\text{m}$. Exceto o marco Rosário do Sul, os demais apresentaram o afastamento inferior a 0,50m. O erro referente ao marco Rosário do Sul se deve, provavelmente, à existência de uma rede de alta tensão sobre o marco. Quanto ao resultado obtido pelo receptor Pro XR neste mesmo marco não se comprovou alteração referente à existência da rede mencionada.

6.3 Recomendações

Uma síntese das estimativas de parâmetros estatísticos indicadores de qualidade foram expostos nos capítulos 2 e 3 e calculados no capítulo 5. O fabricante coloca no mercado versões mais atualizadas dos programas de processamento de dados GPS, e, em decorrência disto, esta pesquisa contribui para que as versões novas que surgirem possam contemplar mais parâmetros possíveis de serem estimados. O capítulo 5 mostrou como é efetuada a verificação da normalidade, descreve os testes de comparação de médias, mostra a falta de informação para realizá-lo e calcula a matriz covariância amostral e calcula uma série de estimativas que provêm desta matriz.

REFERÊNCIAS

ANDERSON, T. W. (1958). **An introduction to multivariate statistical analysis**. New York: J. Wiley.

BENNING, W. (2002). **Statistik in Geodäsie, Geoinformation und Bauwesen**. Heidelberg: H. Wichmann.

BRASIL. **Lei 10.267**, de 28 de agosto de 2001. Altera dispositivos das Leis 4.947, de 6 de abril de 1966, 5.868, de 12 de dezembro de 1972, 6.015, de 31 de dezembro de 1973, 6.739, de 5 de dezembro de 1979, 9.393, de 19 de dezembro de 1996, e dá outras providências. Diário Oficial nº 166 – seção 1, Brasília, 29 de agosto de 2001.

DIN. (1987). **DIN 55 350**: Teil 13: Begriffe der Qualitätssicherung und Statistik. Begriffe zur Genauigkeit von Ermittlungsverfahren und Ermittlungsergebnisse, Berlin.

COSTA NETO, P. L. O. (1977). **Estatística**. São Paulo: E. Blücher, 17. reimpressão (1999).

DIN. (1987). **DIN 55 350**: Teil 13: Begriffe der Qualitätssicherung und Statistik. Begriffe zur Genauigkeit von Ermittlungsverfahren und Ermittlungsergebnisse, Berlin.

HEUS, H. (1982). Quality related problems of densification networks. In: INTERNATIONAL FEDERATION OF SURVEYORS, 1982, München. **Proceedings survey control networks**, n. 7, p. 225-237.

IBGE (2005). **Rede planimétrica do SGB**: Banco de Dados Geodésicos – Estações Planimétricas. Disponível em <www.ibge.gov.br>.

JONG, C. D. et al. (2002). **Hydrography**. Series on Mathematical Geodesy and Positioning. Delft: Delft University Press

JOHNSON, R. A.; WICHERN, D. W. (1998). **Applied multivariate statistical analysis**. 4th ed. Upper Saddle River: Prentice Hall.

KOCH, K. R. (1980). **Parameterschätzung und Hypothesentests in linearen Modellen**. Bonn: Dümmler.

KOCH, K. R.; POPE, A. J. (1969). Least squares adjustment with zero variances. **Zeitschrift für Vermessungswesen**, v. 94, n. 10, p. 390-393.

KOTZ, S.; BALAKRISHNAN, N.; JOHNSON, N. L. (2000). **Continuous multivariate distributions**. 2nd ed. New York: J. Wiley, v. 1: models and applications.

LARSON, R.; FABER, B. (2004). **Estatística aplicada**. 2. ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall.

LEICK, A. (1995). **GPS** satellite surveying. 2nd ed. New York: J. Wiley.

MARDIA, K. V.; KENT, J. T.; BIBBY, J. M. (1982). **Multivariate analysis**. 3th printing. London: Academic Press.

MARDIA, K. V. (1977). Mahalanobis distances and angles. In: **International Symposium on Multivariate Analysis**, 4., 1977, Amsterdam . Anais ,,, , Amsterdam, p. 495-511.

MIKHAIL, E. M.; GRACIE, G. (1981). **Analysis and adjustment of survey measurements**. New York: Van Nostrand Reinhold.

MONICO, J. F. G. (2000). **Posicionamento pelo NAVSTAR-GPS**: Descrição, fundamentos e aplicações. São Paulo: UNESP.

MORAES, C. V. (2001). **Aprimoramento da concepção do modelo geodésico para a caracterização de extremas no espaço geométrico**. 2001, 277f. Tese (Doutorado em Ciências Geodésicas). Universidade Federal do Paraná. Departamento de Geomática, Curitiba.

NIEMEIER; W. (2002). **Ausgleichsrechnung**: eine Einführung für Studierende und Praktiker des Vermessungs- und Geoinformationswesens. Berlin: W. de Gruyter.

SCHMIDT, H. (1997). Was ist Genauigkeit? Zum Einfluss systematischer Abweichung auf Mess- und Ausgleichungsergebnisse. **Vermessungswesen und Raumordnung**. Bonn, v. 59, n. 4, S. 212-228.

SCHMIDT, H. (1994). **Meßunsicherheit und Vermessungstoleranz bei Ingenieurvermessungen**. Veröffentlichung des Geodätischen Instituts der Rheinisch-Westfälischen Technischen Hochschule Aachen, n. 51.

SEEBER, G. (2003). **Satellite Geodesy**. 2nd ed. Berlin: W. de Gruyter.

SURACE, L.(1995). Analisi delle precisioni della rete geodetica fondamentale nel sistema IGM 83. **Bolletino di geodesia e Scienze Affini**, v. 54, n. 2 p. 177-208.

TIBERIUS, C.CJ.M. (1998). Quality Control in Positining. **Mathematical Geodesy and Positining**. Delft , pág. 1-8.

U.S. Department of Commerce. Coast and Geodetic Survey (1948). **Definitions of terms used in geodetic and other surveys**. Washington, D.C.

VANIN; V. R.; GOUFFON, P. (1994). Tópicos avançados em tratamento estatísticos de dados em Física experimental. Universidade de São Paulo. Notas de Aula.

WENDERLEIN, W. (1988). Zum Begriff Genauigkeit in der Geodäsie. **Allgemeine Vermessungs-Nachrichten**, v. 95, n. 4, p. 147-148.

OUTRAS OBRAS CONSULTADAS

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS (1994). **NBR13133: Execução de levantamentos topográficos** – procedimentos. Rio de Janeiro: ABNT.

BRASIL, **Decreto 4.449/2002**. Regulamenta a Lei 10.267/2001. Brasília 2002.

CONSELHO FEDERAL DE ENGENHARIA, ARQUITETURA E AGRONOMIA (2003). **PL 0024/2003**: Consulta feita pelo INCRA a cerca dos profissionais habilitados para desenvolverem atividades definidas pela Lei nº 10.267/2001. Brasília 2003.

CONSELHO FEDERAL DE ENGENHARIA, ARQUITETURA E AGRONOMIA (2003). **PL 0633/2003**: Reconsideração da PL 0024/2003 a cerca dos profissionais habilitados para desenvolverem as atividades definidas pela Lei 10.267/2001. Brasília, 2003.

DALMOLIN, Q. (2002). **Ajustamento por mínimos quadrados**. Curitiba: UFPR.

DUARTE, P. A. (1988). **Cartografia Básica**. Florianópolis: UFSC.

ESPARTEL, L. (1982). **Curso de Topografia**. Porto Alegre: Globo.

ESPARTEL, L.; LUDERITZ, J. (1983). **Caderneta de Campo**. Porto Alegre: Globo.

FRITZ, P.R. (2000). **Cartografia Básica**. Canoas: La Salle.

GEMAEL, C. (1994). **Introdução ao ajustamento de observações**: aplicações geodésicas. Curitiba: UFPR.

GOMES, E. (2001). **Medindo Imóveis Rurais com GPS**. Brasília: LK.

INSTITUTO BRASILEIRO DE GEOGRAFIA E ESTATÍSTICA (1983). **RESOLUÇÃO – PR 22**: Especificações e Normas Gerais para Levantamentos Geodésicos. Rio de Janeiro: IBGE.

INSTITUTO BRASILEIRO DE GEOGRAFIA E ESTATÍSTICA (1993). **RESOLUÇÃO – PR 05**: Especificações e Normas Gerais para Levantamentos GPS (preliminares). Rio de Janeiro: IBGE.

INSTITUTO BRASILEIRO DE GEOGRAFIA E ESTATÍSTICA (2002). **Avaliação da Rede Estadual do Rio Grande do Sul**. Rio de Janeiro: IBGE.

INSTITUTO NACIONAL DE COLONIZAÇÃO E REFORMA AGRÁRIA (2003). **Norma técnica para georreferenciamento de Imóveis rurais aplicada à Lei 10.267/2001 e ao Decreto 4.449/2002**. Brasília: INCRA.

JÄGER, R; BILL, R. (1986). Genauigkeits- und Zuverlässigkeitsmasse in Verdichtungsnetzen. In: UNIVERSITÄT KARLSRUHE. Geodätisches Institut. **Berteilung geodätischer Netze**. Stuttgart, p. 70-98.

JORDAN-EGGERT. (1962). **Jordan`s handbook of geodesy (Jordan-Eggert: handbuch de Vermessungskunde)**. Washington: Corps of engineers, U. S. Army-Army Map Service. English translation by Martha W. carta, v. 3.

MARCIA, M. R. (1998). O GPS e a Reforma Agrária. **Info Geo**, n.1, maio.

MORAES, C. V. (1997). **Aplicação do ajustamento às poligonais**. 1997, 162f. Dissertação (mestrado em Ciências Geodésicas). Universidade Federal do Paraná. Departamento de Geomática. Curitiba.

MORAES, C. M. (1952). **Apontamentos de Engenharia Rural**. Porto Alegre: UFRGS.

PROCHÁZKA, E. (1966). Die Verschiebungsellipse und ihre Beziehungen zur fehlerellipse und fehlerkurve. **Studia Geophysica et Geodaetica**, v. 10, n. 2 p. 137-146.

RÉGIS, B. (2000). A falta de precisão das descrições de imóveis. **Info Geo**, n. 3, Junho.

REINALDO, S (2001). CNIR: antes tarde do que nunca. **Info Geo**, n. 21, dezembro.

ROCHA, J. A. M.R. (2000). **GPS: uma abordagem prática**. Rio de Janeiro: Catau.

SILVEIRA, L. C. (2004). Habilitação, Credenciamento e Qualificação. **A MIRA**, n. 120.

TORGE, W. (2001). **Geodesy**. 3rd ed. Berlin: W. de Gruyter.

WELSCH, W.; HEUNECKE, O.; KUHLMANN, H. (2000). **Auswertung geodätischer Übewachtungsmessungen**. Heidelberg: Wichmann. (Handbuch Ingenieurgeodäsie).