

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA MARIA
CENTRO DE CIÊNCIAS RURAIS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM GEOMÁTICA**

**APLICAÇÃO DA TRANSFORMAÇÃO ORTOGONAL
NO GEORREFERENCIAMENTO COM DIVISÃO DE
ÁREA**

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

FABIANO BECKER BRUM

**Santa Maria, RS, Brasil
2008**

APLICAÇÃO DA TRANSFORMAÇÃO ORTOGONAL NO GEORREFERENCIAMENTO COM DIVISÃO DE ÁREA

por

Fabiano Becker Brum

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado do Programa de Pós-Graduação em Geomática, Área de Concentração Tecnologia da Geoinformação, da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM-RS), como requisito parcial para obtenção do grau de **Mestre em Geomática.**

Orientador: Prof. Eno Darci Saatkamp

**Santa Maria, RS, Brasil
2008**

**Universidade Federal de Santa Maria
Centro de Ciências Rurais
Programa de Pós-graduação em Geomática**

A Comissão Examinadora, abaixo assinada,
aprova a Dissertação de Mestrado.

**APLICAÇÃO DA TRANSFORMAÇÃO ORTOGONAL
NO GEORREFERENCIAMENTO COM DIVISÃO DE
ÁREA**

Elaborada por
Fabiano Becker Brum

Como requisito parcial para obtenção do grau de
Mestre em Geomática

COMISSÃO EXAMINADORA

Prof. Eno Darci Saatkamp, Dr.
Presidente/Orientador

Prof. Júlio Farret, Dr. (UFSM)

Prof. Rudiney Soares Pereira, Dr. (UFSM)

Santa Maria, 11 de novembro de 2008.

Dedico esta etapa aos meus filhos, João Pedro e João Otávio.

AGRADECIMENTOS

A Deus, que além da vida concede-me a luz que ilumina meus passos.

Ao meu orientador, Professor Doutor Eno Darci Saatkamp, pela presteza dedicação e compromisso empenhado na orientação deste trabalho.

Aos professores Júlio Cesar Farret e Rudiney Soares Pereira pelo apoio e colaboração no decorrer do curso, no período de atuação professor substituto de topografia e Geodésia e para que esta etapa se concretizasse.

Ao grande “mestre”, professor Carlito Vieira de Moraes pelos valiosos ensinamentos.

Aos professores Adroaldo Dias Robaina e Márcia Xavier Peiter por me abrirem as portas neste programa de pós-graduação.

A todos os colegas de pós-graduação, em especial aos colegas Edson Stanque, Luis Telechea, Paulo Pillar, Ricardo Schons e Rogério Silva.

As alunos do curso de Engenharia Florestal Rafael Rodrigues e Gustavo Bagatini pela ajuda no experimento de campo.

Aos funcionários do Centro de Ciências Rurais.

Ao sr. Luiz e demais funcionários da Biblioteca Setorial do CCR.

A Marcela Villar, Monte Alverne Sampaio e Vânia Villar, grandes incentivadores que muito me apoiaram.

Aos meus pais, ele in memoriam, pela herança do exemplo a ser seguido e a ela pelo carinho, apoio dedicação e por em mais esta etapa nunca ter medido esforços, renunciado seus sonhos em favor dos meus.

Aos meus filhos João Pedro e João Otávio, pelo simples fato de existirem e com as suas existências nortear a minha.

A minha irmã Liliane, meu cunhado e meus tios pelo incentivo e apoio.

Agradeço, enfim, a todos que simplesmente acreditaram.

"Não sou da altura que me vêem,
mas sim da altura que meus
olhos podem ver."

Fernando Pessoa

RESUMO

Dissertação de Mestrado
Programa de Pós-Graduação em Geomática
Universidade Federal de Santa Maria

APLICAÇÃO DA TRANSFORMAÇÃO ORTOGONAL NO GEORREFERENCIAMENTO COM DIVISÃO DE ÁREA

Autor: Fabiano Becker Brum

Orientador: Eno Darci Saatkamp

Data e Local da Defesa: Santa Maria, 11 de dezembro de 2008.

O avanço da geodésia, em seus métodos e equipamentos traz consigo a crescente necessidade da realização de levantamentos georreferenciados. Assim é possível compatibilizar vários levantamentos sem limites de extensão impostos pelo modelo plano e sem a sobreposição de pontos.

Estes levantamentos geralmente são executados pelo rastreamento de satélites que operam para este fim. Contudo, em certos casos as limitações de precisão e acurácia impostas pelos princípios destes sistemas, bem como a falta de condições físicas e deficiência de equipamentos impossibilita tal operação. Torna-se necessário então realizar levantamentos com a origem topocêntrica e transformá-la em geocêntrica.

Em outros casos, não basta conhecer somente as coordenadas georreferenciadas, sendo necessário conhecer suas equivalentes no plano topográfico, principalmente para calcular e dividir áreas e implantar pontos no plano local. Nestes casos uma solução de grande utilização é transformação das coordenadas elipsoidicas geocêntricas em coordenadas planas associadas ao plano da Projeção Cartográfica UTM, geralmente ignorando-se as deformações, portanto consistindo em uma solução equivocada.

Entre as soluções adequadas para a conversão de coordenadas de uma superfície para outra quando a origem dos sistemas difere entre topocêntrica e geocêntrica é a Transformação Ortogonal. Este método, além de ser mais sucinto que a metodologia de Puissant tradicionalmente utilizada permite a conversão tanto de coordenadas topocêntricas em geocêntricas bem como o inverso.

Neste trabalho inicialmente se comparou a precisão do método da Transformação Ortogonal com o método de Puissant. Também foram comparadas as diferenças entre áreas calculadas a partir de coordenadas no plano cartográfico UTM e coordenadas topocêntricas, além de estabelecida a diferença de posição entre pontos de divisa calculados em um plano e implantados em outro sem as devidas conversões.

O resultados obtidos demonstraram que a precisão do método de Transformação Ortogonal nas distâncias observadas equivale com a metodologia de Puissant. Foi possível observar que os valores referentes a áreas quando calculadas em relação a coordenadas associadas a modelos ou superfícies diferentes apresentam variação. O cálculo e divisão de áreas utilizando coordenadas planas no plano da projeção cartográfica UTM, mesmo com correções de fator de escala e elevação diferiu da área no plano topográfico local, embora tenha se aproximado quando efetuadas correções.

Pontos de divisão de áreas georreferenciadas não devem ser implantados no plano topográfico local utilizando-se coordenadas planas no plano da projeção cartográfica UTM, pois existe diferença de posição entre estas e as coordenadas topográficas. A solução mais adequada pela precisão e facilidade para cálculo e divisão de áreas georreferenciadas a partir de coordenadas geocêntricas é a conversão destas para topocêntricas pela transformação ortogonal de coordenadas.

A transformação ortogonal de coordenadas constitui-se de uma solução prática e rápida tanto para o georreferenciamento de pontos oriundos de levantamentos topográficos, bem como para implantação de pontos georreferenciados no plano topográfico local, podendo ser inclusive facilmente implementado em estações totais topográficas.

Palavras Chaves: 1. Georreferenciamento 2. Sistemas de Projeção cartográfica 3. Transporte geodésico de coordenadas 4. Transformação ortogonal 5. Divisão de áreas

ABSTRACT

Dissertation of Master's degree

Program of Masters degree in Geomática

Federal university of Santa Maria

APPLICATION OF THE ORTHOGONAL TRANSFORMATION IN GEORREFERENCIAMENTO WITH PARTITION OF AREAS.

Author: Fabiano Becker Brum

Adviser: Eno Darci Saatkamp

Date and place of defense: Santa Maria, december 11th 2008.

The Geodesy methods and equipments progress brings with himself the growing need on geodetic surveys. Thereby, it is possible to make compatible any surveys with no extension boundary like from plane models and with no points overlap.

These surveys are usually from geodetic satellites for that specific purpose. However, there are cases under precision restriction by nature of these systems, as well as physical conditions lack and equipments deficiency disables such operations. Thus, it becomes necessary to take place surveys from a topographical origin to a geocentric origin.

To other cases, it is not enough just to know the geodetic coordinates but it is necessary to know its equivalent ones in the topographical plan, mostly to section and calculus of areas besides point locations. In these cases a solution of great use is the transformation of the geocentric coordinates to the UTM Projection plane cartographic coordinates, usually being ignored the deformations. Therefore it is a mistaken solution.

Among the appropriate solutions to transform coordinates between surfaces from a topographical origin to a geocentric origin it is the Orthogonal Transformation. This method is more concise than the traditional Puissant's methodology and to make possible the conversion of topographical coordinateds to geocentric coordinates and vice-versa.

In this work the precision of Orthogonal Transformation method was compared initially with the Puissant's method. Also were compared the differences among areas calculated from the UTM cartographic plan coordinates and topographical coordinates, besides having established the position discrepancy among boundary points calculated in a certain plan and implanted in other one without the true conversions.

The results shows that the Orthogonal Transformation method precision is equivalent to Puissant's method for observed ranges. It was possible to note that the values to areas calculated from coordinates related to models or different surfaces presents discrepancy. The areas section and estimation from the UTM cartographic projection plane coordinates, even with scale factor and elevation corrections, has been different to the area from the local topographical plan, although it was similar when under corrections.

Points from section of geodetic areas can not to have implant in the topographical plane under use of UTM cartographic projection plane coordinates due to the position difference between it and the topographical coordinates. The more appropriate solution, due to good precision and easiness to

section and estimate geodetic areas from geocentric coordinates, is the change to topographical ones using the Orthogonal Transformation.

The Orthogonal Transformation of Coordinates is a practice and quick solution to make geodetic points from topographical surveys as well as to plot geodetic points in the topographical plan, and it is possible to implement it in the Electronic Total Stations in a easy way.

Key words: Georeferencing, Cartographic Projection Systems, Geodetic Coordinate Calculus, Orthogonal Transformation, Areas Section.

LISTA DE FIGURAS

Figura 2-1-Superfícies equipotenciais	18
Figura 2-2-Sistema de coordenadas cartesianas geocêntricas	20
Figura 2-3-Sistema de coordenadas geográficas astronômicas	21
Figura 2-4-Sistema de coordenadas cartesianas astronômicas topocêntricas.....	22
Figura 2-5- Sistema de coordenadas polares astronômicas topocêntricas.....	23
Figura 2-6-Sistema de coordenadas cartesianas elipsóidicas	24
Figura 2-7-Sistema de coordenadas geográficas elipsóidicas	25
Figura 2-8-Sistema de coordenadas cartesianas elipsóidicas topocêntricas.....	28
Figura 2-9-Sistema de coordenadas polares elipsóidicas.	29
Figura 2-10-Problema geodésico direto.	30
Figura 2-11-Problema geodésico inverso	31
Figura 2-12-Desvio da vertical.	35
Figura 2-13-Sistemas de coordenadas cartesianas topocentricas e geocêntricas.	36
Figura 2-14-Rotação do sistema cartesiano topocêntrico em torno do eixo x.....	37
Figura 2-15-Rotação do sistema cartesiano topocêntrico em torno do eixo z.....	38
Figura 2-16-Translação da origem do sistema cartesiano topocêntrico para a origem do sistema cartesiano geocêntrico.	38
Figura 2-17-Dedução da matriz de rotação do sistema cartesiano topocêntrico em torno do eixo X.	39
Figura 2-18-Origem do sistema de coordenadas planas E,N.....	44
Figura 2-19-Brasil dividido em fusos e zonas UTM.	45
Figura 2-20-Fator de escala em relação ao meridiano central do fuso.....	46
Figura 2-21-Cilindro transversal secante ao modelo.....	47
Figura 2-22-Comportamento do fator de escala dentro do fuso UTM.....	47
Figura 2-23-Áreas de ampliação e redução do fator de escala dentro do fuso UTM.....	48
Figura 2-24- Variação dos ângulos de redução	50
Figura 2-25-Convergência meridiana em relação a distância do meridiano central	51
Figura 2-26-Convenção de sinais adotada para convergência meridiana.....	51
Figura 2-27-Elementos geométricos na projeção UTM	53
Figura 2-28-Decomposição do polígono em trapézios.....	55
Figura 2-29-Área a ser dividida.....	57
Figura 2-30-Área total dividida em duas glebas.....	57
Figura 3-1-Disposição geométrica e nomenclatura dos pontos experimentais.	60
Figura 4-1-Pontos visados com estação total a partir do ponto M26.	66
Figura 4-2- Área topográfica dividida em 3 glebas.....	71

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	15
2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	17
2.1 Forma e dimensões da Terra	17
2.1.1 Modelos de representação da Terra	17
2.1.1.1 Modelo Esférico	17
2.1.1.2 Modelo Geoidal	17
2.1.1.3 Modelo Elipsoidal	18
2.1.1.4 Modelo Plano	18
2.2 Sistemas de coordenadas	19
2.2.1 Sistemas de coordenadas naturais.....	19
2.2.1.1 Sistema de coordenadas cartesianas geocêntricas	19
2.2.1.2 Sistema de coordenadas geográficas astronômicas	20
2.2.1.3 Sistema de coordenadas cartesianas astronômicas topocêntricas.....	21
2.2.1.4 Sistema de coordenadas polares astronômicas topocêntricas.....	22
2.2.1.5 Sistema de coordenadas cartesianas elipsóidicas	23
2.2.1.6 Sistema de coordenadas geográficas elipsóidicas	24
2.2.1.7 Sistema de coordenadas cartesianas elipsóidicas topocêntricas.....	27
2.2.1.8 Sistema de coordenadas polares elipsóidicas	28
2.2.1.9 Sistema de coordenadas polares elipsóidicas topocêntricas.....	29
2.3 Transporte Geodésico de Coordenadas	29
2.3.1 Transporte geodésico de coordenadas pela formulação de Puissant	31
2.3.1.1 Problema Geodésico Inverso.....	31
2.3.1.2 Problema Geodésico Direto.....	32
2.4 Vertical de um ponto no topocentro	33
2.5 Normal de um ponto no topocentro	34
2.6 Desvio da vertical	34
2.7 Transformação ortogonal	35
2.7.1.1 Transformação de coordenadas cartesianas topocêntricas em cartesianas geocêntricas.....	36
2.7.1.2 Transformação de coordenadas cartesianas geocêntricas em cartesianas topocêntricas.....	40

2.8 Sistemas de Projeções Cartográficas	41
2.8.1 Classificação dos sistemas de projeções.....	42
2.9 Projeção Universal Transversa de Mercator	42
2.9.1 Histórico da Projeção Universal Transversa de Mercator.....	42
2.9.2 Características da Projeção Universal Transversa de Mercator	43
2.9.3 Coordenadas planas (E,N) na projeção UTM.....	44
2.9.4 Zonas UTM	45
2.9.5 Coeficiente de deformação linear na projeção UTM.....	46
2.9.6 Cálculo do coeficiente de deformação linear na projeção UTM.....	48
2.9.7 Transformação de coordenadas geográficas em planas na projeção UTM e vice-versa.....	49
2.9.8 Elementos geométricos na projeção UTM	49
2.9.8.1 Transformadas	49
2.9.8.2 Corda da transformada.....	50
2.9.8.3 Ângulos de redução	50
2.9.8.4 Convergência Meridiana.....	51
2.9.8.5 Azimute verdadeiro	52
2.9.8.6 Azimute geodésico projetado	52
2.9.8.7 Distância plana	53
2.9.8.8 Distância elipsóidica.....	53
2.9.9 Área na projeção UTM.....	54
2.10 Cálculo de área no plano em função das coordenadas cartesianas	54
2.10.1 Cálculo da área no plano pelo método analítico utilizando a fórmula do trapézio segundo Gauss	55
2.11 Divisão de área no plano	56
2.11.1 Divisão de área pela solução do sistema de equações montado a partir da fórmula da área do trapézio segundo Gauss	56
3 METODOLOGIA	59
3.1.1 Coordenadas de referência.....	60
3.1.2 Levantamento topográfico.....	61
3.1.2.1 Sistema de coordenadas utilizado no levantamento topográfico.....	61
3.1.2.2 Transformação das coordenadas geográficas elipsóidicas dos pontos levantados em coordenadas planas no sistema de projeção cartográfica UTM.....	61
3.1.3 Cálculo da área total	62

3.1.3.1	Área cartográfica corrigida em função do fator de escala e fator de elevação.....	62
3.1.3.2	Comparação entre as áreas calculadas em função das coordenadas cartesianas topocêntricas e coordenadas no plano da projeção UTM, com e sem correção de escala e elevação.....	62
3.1.4	Comparação entre o transporte geodésico de coordenadas pela formulação de Puissant e a transformação ortogonal	62
3.1.5	Divisão da área	63
3.1.5.1	Divisão da área topográfica	63
3.1.5.2	Divisão da área cartográfica	63
3.1.5.3	Comparação da diferença de posição planimétrica em função das coordenadas geográficas dos pontos de divisão	63
4	RESULTADOS E DISCUSSÕES.....	65
4.1	Rastreamento dos pontos por GPS e estimativa das coordenadas elipsóidicas	65
4.2	Medidas obtidas no levantamento topográfico	65
4.3	Azimutes calculados e suas incertezas	66
4.4	Distâncias horizontais calculadas e suas incertezas.....	67
4.5	Coordenadas cartesianas topocêntricas dos pontos levantados	67
4.5.1	Transformação das coordenadas geográficas elipsóidicas dos pontos levantados em coordenadas planas no sistema de projeção cartográfica UTM.....	67
4.6	Cálculo da área total	68
4.6.1	A área topográfica delimitada pelos pontos levantados	68
4.6.2	Área cartográfica delimitada pelos pontos levantados	68
4.6.3	Área cartográfica corrigida em função do fator de escala e fator de elevação.....	68
4.6.4	Comparação entre as áreas calculadas em função das coordenadas cartesianas topocêntricas e coordenadas no plano da projeção UTM, com e sem correção de escala e elevação.....	69
4.6.5	Comparação entre o transporte geodésico de coordenadas pela formulação de Puissant e a transformação ortogonal	69
4.6.6	Divisão da área	70
4.6.6.1	Divisão da área topográfica	70
4.6.6.2	Divisão da área cartográfica	74
4.7	Transformação das coordenadas cartesianas topocêntricas dos pontos de divisão da área topográfica em coordenadas polares topocêntricas.....	77

4.8	Transformação das coordenadas polares topocêntricas dos pontos de divisa em coordenadas cartesianas geocêntricas pela transformação ortogonal	78
4.9	Comparação entre as coordenadas planas no sistema de projeção UTM obtidas na divisão da área cartográfica e na divisão da área topográfica	78
4.10	Comparação entre as coordenadas geográficas elipsóidicas dos pontos de divisa obtidos na divisão da área cartográfica e na divisão da área topográfica	78
4.11	Cálculo da diferença planimétrica de posição relativa	79
5	CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES.....	80
6	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	81
7	ANEXOS.....	84
	Anexo 1-Relatório do processamento dos pontos rastreados	84

1 INTRODUÇÃO

Na maioria dos levantamentos topográficos realizados até certo tempo atrás, os pontos eram referenciados somente a um sistema de coordenadas com origem topocêntrica, considerando-se a Terra no seu modelo de representação mais afastado do real, o plano.

Com o decorrer do tempo, o avanço da geodésia, em seus métodos e equipamentos traz consigo a crescente necessidade de se realizar levantamentos georreferenciados, isto é, referenciados a um sistema de coordenadas fixo a Terra. Assim, o modelo de representação da Terra passa a ser o modelo elipsoidal. Com isso, além de uma representação mais próxima do modelo real, onde as deformações são reduzidas, é possível compatibilizar vários levantamentos sem limites de extensão impostos pelo modelo plano e sem a sobreposição de pontos. A necessidade de georreferenciar é expressa em certos casos inclusive por força de lei, a citar a lei 10267/2001.

Modernamente este tipo de levantamento vem sendo executado com a aplicação da geodésia por satélite, através do rastreamento de sinais de satélites que operam para essa finalidade, a citar a constelação do Sistema Americano Navstar GPS. Ocorre porém, que além das limitações de precisão e acurácia impostas pelos princípios destes sistemas, em alguns casos seu uso não é possível devido a deficiências de equipamento ou falta de condições físicas necessárias ao rastreamento em alguns lugares, sendo necessário realizar o levantamento com origem topocêntrica e após converter a origem para o centro da Terra.

Muitas vezes também não basta conhecer somente as coordenadas georreferenciadas, isto é, associadas ao modelo elipsoidal. É preciso conhecer também suas equivalentes no plano topográfico local, necessidade esta evidenciada quando se necessita implantar pontos no plano topográfico local ou calcular e dividir áreas no plano. Nestes casos uma solução de grande utilização é transformação das coordenadas elipsoidicas geocêntricas em coordenadas planas associadas ao plano da Projeção Cartográfica UTM, geralmente ignorando-se as deformações. Esta, portanto, constitui-se em uma solução equivocada, uma vez que as distorções da projeção se propagam para as coordenadas, assim, um ponto no plano topográfico não terá a mesma coordenada no plano da projeção e vice-versa.

A solução mais adequada, portanto, constitui-se na conversão adequada de coordenadas de uma superfície para outra. A conversão de coordenadas topocêntricas para

geocêntricas geralmente é obtida com boa precisão pelo modelo de Puissant, nos problemas Geodésicos Direto e Inverso. No entanto, este modelo não proporciona a conversão inversa, ou seja, de coordenadas geocêntricas para topocêntricas.

Ao contrário, a transformação ortogonal de coordenadas, que além de possuir desenvolvimento bem mais sucinto do que Puissant, proporciona além da transformação de coordenadas topocêntricas em geocêntricas também a conversão de geocêntricas para topocêntricas. Com isto resolve inclusive o problema de cálculo e divisão de áreas georreferenciadas, possibilitando a partir de coordenadas geocêntricas determinar a área no plano topográfico local, dividi-la e implantá-la, sem a necessidade de realizar a conversão para coordenadas cartográficas. Além disso, por ser de formulação simples, o processo de transformação ortogonal pode ser implementado em estações totais, facilitando o trabalho de campo em atividades de divisão de áreas georreferenciadas e de implantação de pontos no plano topográfico local a partir de coordenadas geocêntricas ou ainda de transporte geodésico de coordenadas.

Neste trabalho, além da apresentação do processo de transformação ortogonal de coordenadas, são realizadas comparações entre o método e a formulação de Puissant. Também são comparadas áreas calculadas e divididas através de coordenadas no plano da projeção cartográfica UTM e no plano topográfico local.

2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

2.1 Forma e dimensões da Terra

Desde os primórdios da humanidade, o homem buscava conhecer o lugar em que vivia e se localizar no espaço, por questões de sobrevivência, orientação e navegação. Esta necessidade relaciona-se intimamente com a determinação da forma e dimensões da Terra. Inicialmente a questão era carregada de misticismo.

A forma e superfície física da Terra segundo Cintra (2001, p.2) são elementos de modelagem matemática complexa devido a suas irregularidades. Assim, torna-se necessário adotar modelos que se aproximem do formato real. Para Torge (2001, p. 2) esta determinação traz relacionadas a geometria e a física.

2.1.1 Modelos de representação da Terra

Os modelos utilizados como aproximação da forma real da Terra são: o Modelo Esférico, Modelo Geoidal e o Modelo Elipsoidal. A abordagem do assunto será sucinta, com ênfase no modelo Elipsoidal devido a sua importância na Geodésia.

2.1.1.1 Modelo Esférico

O modelo esférico, muito utilizado na astronomia, considera a Terra como sendo esférica, desprezando o achatamento nos pólos e por isso não é um modelo rigoroso. Muitas vezes, o raio da esfera é calculado em função da latitude local, e é denominado raio médio Gaussiano a esfera é utilizada para solução não rigorosa de problemas geodésicos quando o elipsóide é considerado como se fosse uma esfera para simplificação de cálculos.

2.1.1.2 Modelo Geoidal

Todos os corpos vinculados a Terra estão sujeitos à força gravitacional. Esta por sua vez é resultante da força de atração exercida pelas massas terrestres e da força centrífuga decorrente do movimento de rotação (GEMAEL, 1987, p.14). O campo gravitacional é um campo conservativo, podendo, portanto ser calculado para um determinado ponto. É também

denominado geopotencial sendo denotado por W . As superfícies cujo geopotencial é constante chamam-se geopes e perpendicular a estas existem infinitas linhas verticais.

A distribuição não homogênea das massas da Terra e suas conseqüências no geopotencial tornam as geopes superfícies irregulares sendo, que todos os seus pontos são perpendiculares as linhas de força denominadas verticais, conforme mostra Figura 2.1.

O modelo geoidal representa a Terra utilizando geóide que é uma geope cujo campo gravitacional possui geopotencial coincidente com o do nível médio dos mares em repouso.

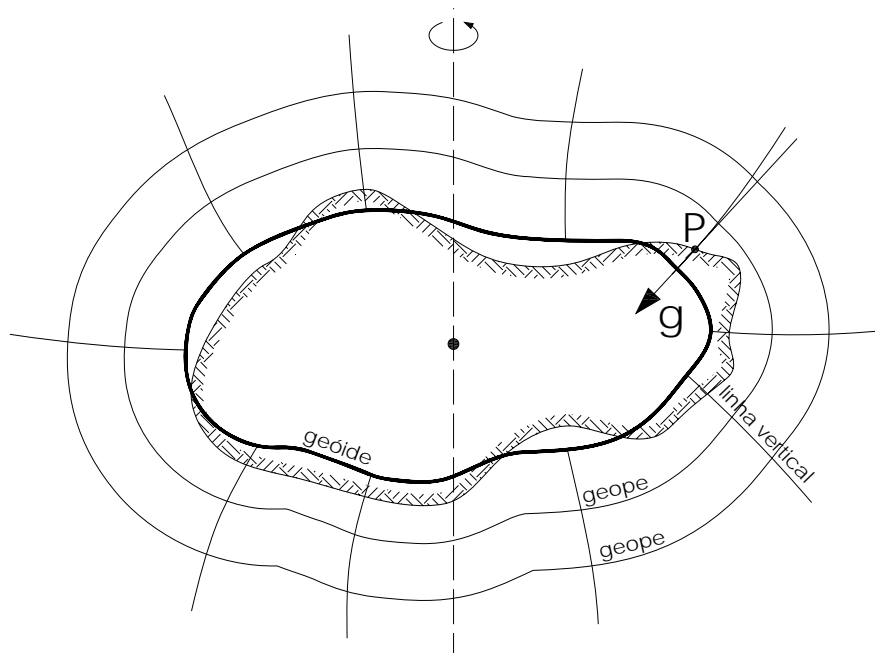


Figura 2.1-Superfícies equipotenciais

Fonte: modificada de Heck (1995, p. 3)

2.1.1.3 Modelo Elipsoidal

Neste modelo a Terra é representada por meio de um elipsóide de revolução. Segundo Gemael (1987, p. 3.1) o elipsóide de revolução (ou biaxial) é a forma geométrica gerada pela rotação de uma semi-elipse (geratriz) em torno de um de seus eixos. No caso do elipsóide utilizado pela Geodésia o eixo de rotação é o semi-eixo menor (b), por isso o elipsóide chama-se achatado.

2.1.1.4 Modelo Plano

O plano é o modelo utilizado pela topografia para representação de uma superfície limitada da Terra. Não se considera a influência dos erros sistemáticos devido à curvatura e o

desvio da vertical, ficando, portanto limitado em uma extensão de 80km por 80 km (NBR 13133, 1994, p. 5)

2.2 Sistemas de coordenadas

A posição de um ponto geodesicamente definido no espaço euclidiano de três dimensões é caracterizada por um terno de coordenadas geográficas astronômicas (Φ, Λ) e altitude ortométrica H , ou pela tríade de coordenadas cartesianas (X, Y, Z) , ou ainda pelo terno composto pelas coordenadas geográficas elipsóidicas (φ, λ) e altitude elipsóidica h . As tríades (Φ, Λ, H) e (φ, λ, h) são chamadas coordenadas naturais e coordenadas elipsóidicas respectivamente (MORAES, 2001, p. 139).

De acordo com Din (1995, apud MORAES 2001, p. 139) em medições geodésicas realizadas sobre a superfície física terrestre utilizam-se os sistemas de coordenadas naturais e elipsóidais. O primeiro compreende os sistemas definidos no espaço gravitacional terrestre e o segundo compreende os sistemas definidos no espaço geométrico. O espaço gravitacional terrestre segundo Grafarend (1981, apud MORAES 2001, p. 139) consiste no conjunto de vetores de gravidade que na forma geométrica euclidiana paralelamente ao vetor do topocentro ficam deslocados ao geocentro. O espaço geométrico consiste no conjunto dos vetores-posição que ligam o topocentro ao geocentro.

Será apresentada uma breve descrição dos sistemas de coordenadas mais importantes no contexto deste trabalho, sendo que mais detalhes sobre o assunto podem ser consultados em Moraes (2001, p. 139-164).

2.2.1 Sistemas de coordenadas naturais

De acordo com Torge (2001, p. 39-40) nos sistemas de coordenadas naturais, são efetuadas medições geodésicas no sistema de Coordenadas Polares Astronômicas Topocêntricas (PAT) em que os instrumentos são posicionados de modo que seu eixo principal se aproxime da vertical do ponto.

2.2.1.1 Sistema de coordenadas cartesianas geocêntricas

Este sistema também pode ser chamado de sistema de coordenadas terrestres fundamentais, sendo caracterizado por:

- a) sistema cartesiano do espaço de três dimensões;
- b) global e fixo na Terra;
- c) origem no centro médio de massas da Terra;
- d) eixo z^* aponta para o IERS Reference Pole (IRP);
- e) plano x^*z^* é paralelo ao IERS Reference Meridian (IRM) ou International Reference Meridian, que passa por Greenwich;
- f) plano x^*y^* corresponde ao plano equatorial astronômico de referência (perpendicular ao eixo z^*);
- g) os eixos são perpendiculares entre si;
- h) o vetor de posição é definido por: $r_0^{*T} = [x^* \ y^* \ z^*]$

A Figura 2-2 ilustra as características deste sistema de coordenadas.

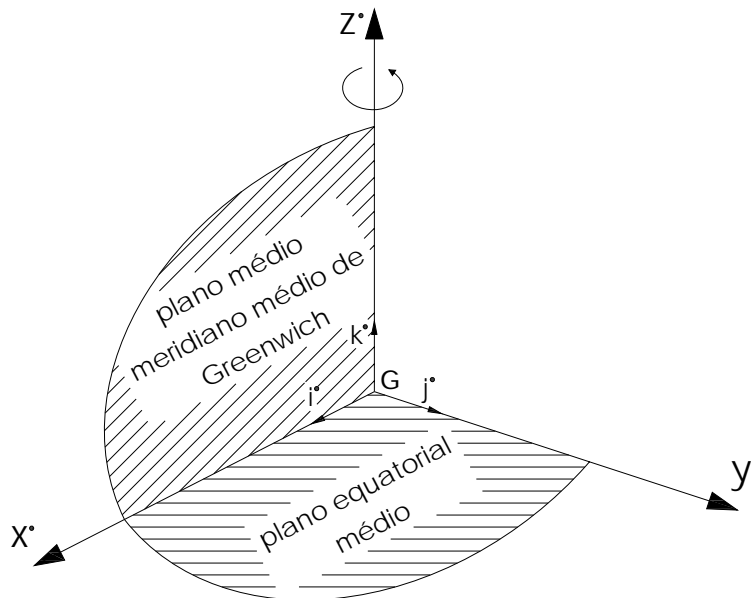


Figura 2-2-Sistema de coordenadas cartesianas geocêntricas

2.2.1.2 Sistema de coordenadas geográficas astronômicas

Segundo a Din (1995, apud MORAES, 2001, p.141) o sistema de coordenadas geográficas astronômicas destina-se a fixar ou definir a direção da vertical de um ponto.

As coordenadas definidas no sistema são a latitude geográfica astronômica denotada por Φ e a longitude geográfica astronômica representada por Λ .

As coordenadas astronômicas de um ponto P_0 são as coordenadas esféricas da direção da vertical deste ponto após o deslocamento paralelo dos eixos de coordenadas geográficas para o ponto conforme ilustra a Figura 2.3.

A latitude geográfica astronômica é o ângulo formado pela vertical do ponto com o plano equatorial astronômico de referência. É contada positivamente para o norte do equador e negativamente ao sul, variando, portanto num intervalo de $-\frac{\pi}{2} \leq \Phi \leq \frac{\pi}{2}$.

A longitude geográfica astronômica é o ângulo formado pelo plano meridiano astronômico de P_0 com o meridiano internacional de referência. A contagem é positiva a leste da projeção de Greenwich no intervalo de $0 \leq \Lambda \leq \pi$ e negativa a oeste no intervalo de $0 > \Lambda > -\pi$.

Segundo HECK (1995, p. 32) o plano que contém a vertical do ponto P_0 situado na superfície física denomina-se plano meridiano astronômico de ponto P_0 , sendo paralelo a z^* .

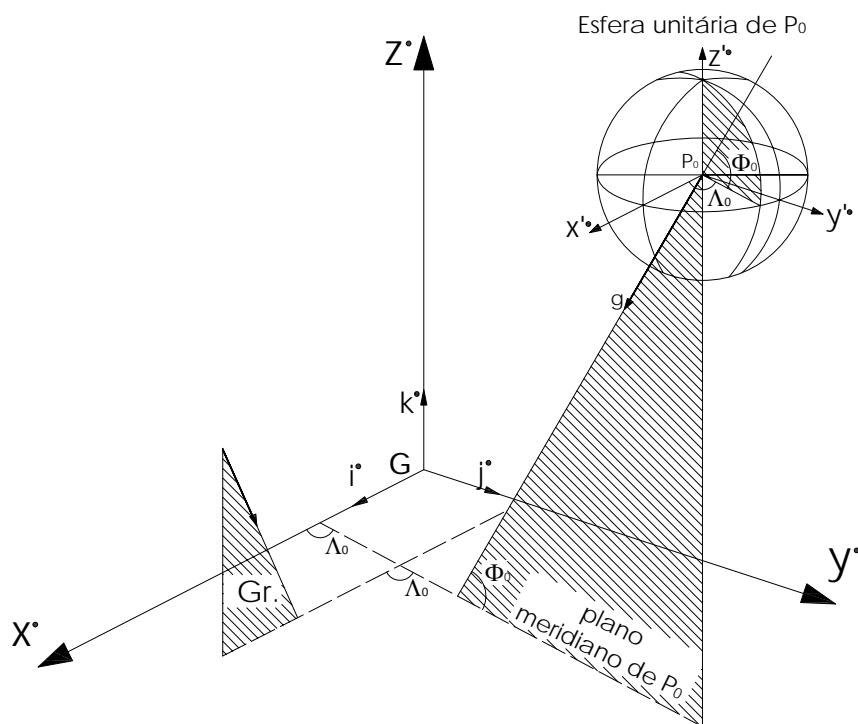


Figura 2.3-Sistema de coordenadas geográficas astronômicas

Fonte: Adaptada de Heck (1995, p.33)

2.2.1.3 Sistema de coordenadas cartesianas astronômicas topocêntricas

Segundo Torge (2001, p 41) as medidas geodésicas efetuadas na superfície terrestre como distâncias e direções estão ligadas a vertical do ponto onde foram realizadas.

O sistema de coordenadas cartesianas astronômicas topocêntricas pode ser caracterizado por:

- a) sistema cartesiano do espaço de três dimensões;
- b) origem no topocentro;
- c) eixo z^\bullet coincide com a direção da vertical, sendo positivo no sentido do zênite do topocentro.
- d) o eixo x^\bullet está contido no plano meridiano astronômico do ponto P_0 sendo positivo no sentido norte astronômico;
- e) o eixo y^\bullet é perpendicular aos demais e positivo no sentido leste;
- f) o sistema é levogiro;
- g) o vetor de posição é dado por: $r_0^{\bullet T} = [x^\bullet \quad y^\bullet \quad z^\bullet]$.

A Figura 2.4 ilustra o sistema de coordenadas astronômicas topocêntricas.

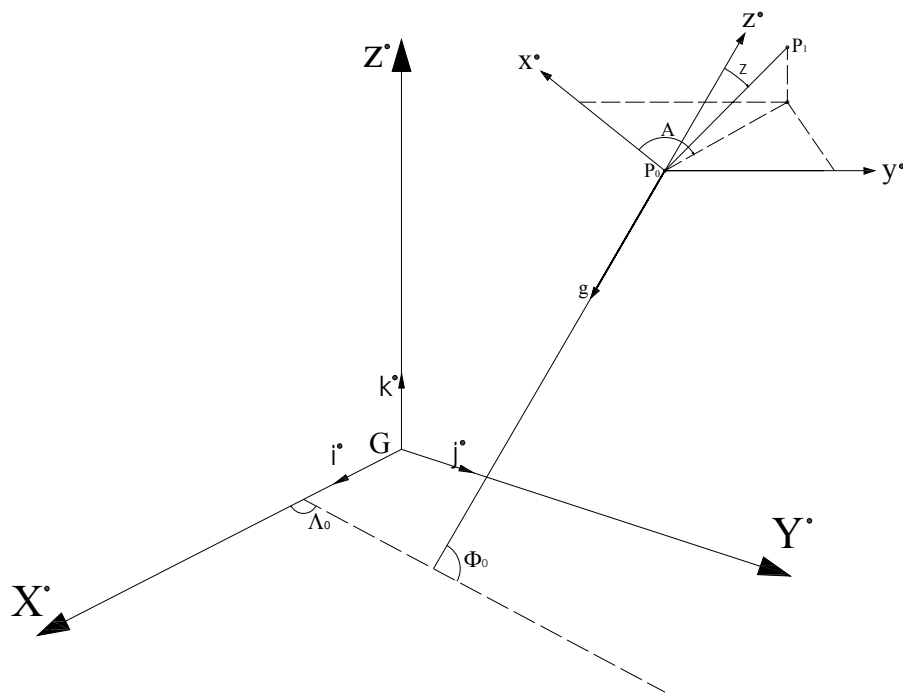


Figura 2.4-Sistema de coordenadas cartesianas astronômicas topocêntricas.

Fonte: Moraes (2001, p. 144)

2.2.1.4 Sistema de coordenadas polares astronômicas topocêntricas

Este sistema é definido em conjunto com o sistema de coordenadas cartesianas astronômicas. Segundo Moraes (2001, p 145) é caracterizado pelas coordenadas polares

obtidas no topocentro (P_0) após a materialização da vertical deste pelo eixo principal do instrumento de medida.

O sistema de coordenadas polares astronômicas topocêntricas é mostrado pela Figura 2-5.

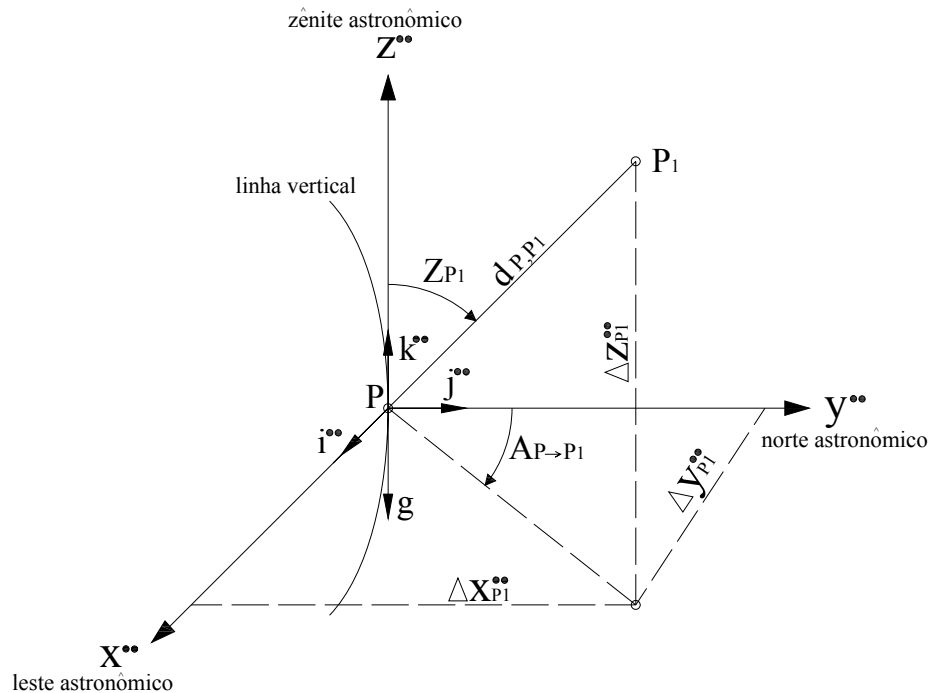


Figura 2-5- Sistema de coordenadas polares astronômicas topocêntricas

Fonte: Moraes (2001, p. 145)

2.2.1.5 Sistema de coordenadas cartesianas elipsóidicas

O sistema de coordenadas cartesianas elipsóidicas denotado por CE é definido em relação ao elipsóide de revolução de acordo com a Figura 2.6 com as seguintes características:

- composto por três eixos cartesianos perpendiculares entre si;
- origem coincide com o centro O do elipsóide;
- eixo X posiciona-se na interseção do plano equatorial do elipsóide e o plano meridiano de Greenwich;
- eixo Y fica contido no plano equatorial do elipsóide de forma a tornar o sistema dextrogiro;
- eixo Z coincide com eixo de rotação do elipsóide.

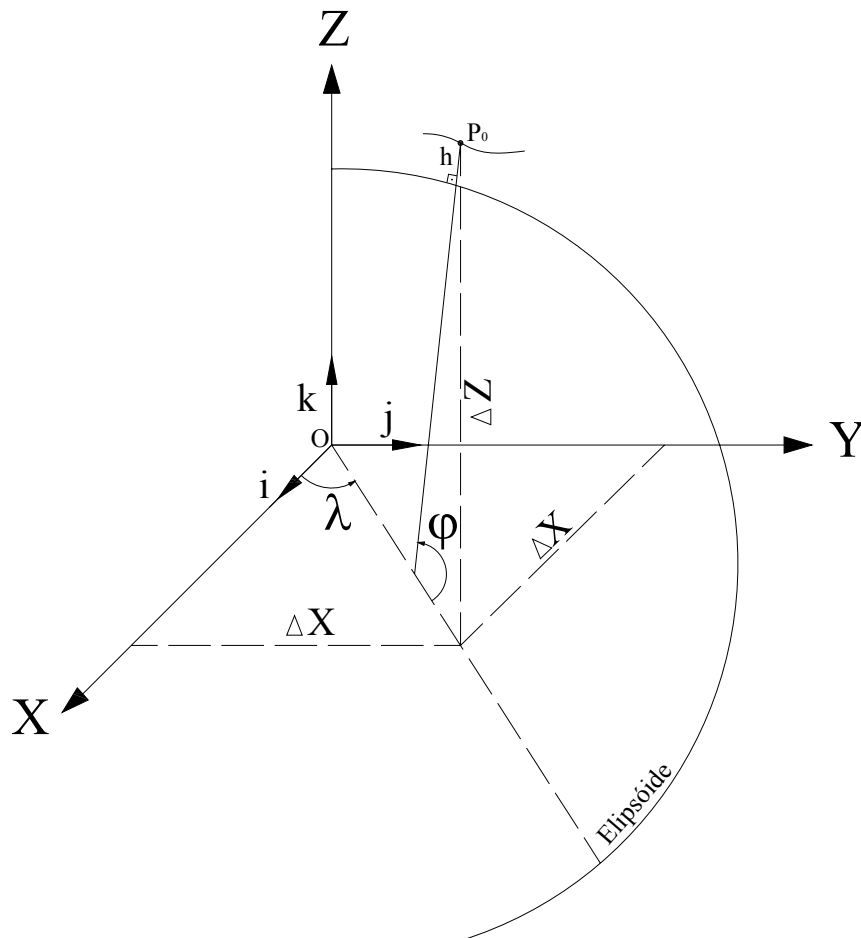


Figura 2.6-Sistema de coordenadas cartesianas elipsóidicas

Fonte: Moraes (2001, p. 150)

Quando o centro geométrico do elipsóide for coincidente com o centro de massa da terra (elipsóide geocêntrico), o sistema de coordenadas elipsóidicas coincide com o sistema de coordenadas cartesianas geocêntricas apresentados na seção 2.2.1.1.

2.2.1.6 Sistema de coordenadas geográficas elipsóidicas

O sistema de coordenadas geográficas elipsóidicas denotado por GE é definido segundo Torge (2001, p 93.) pelos ângulos latitude geográfica elipsóidica φ e longitude geográfica elipsóidica λ . A posição de um ponto P_0 é definida além de φ e λ pela altitude geométrica h , conforme mostra Figura 2-7.

Segundo Moraes (2001, p. 151) a latitude geográfica elipsóidica φ do ponto P_0 é definida como ângulo formado pela normal deste ponto e o plano equatorial elipsóidico. A

contagem é convencionalmente positiva para o norte e negativa para o sul, de modo que o intervalo de variação é $-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$.

A longitude geográfica elipsoidal λ do ponto P_0 é definida como o ângulo formado no plano do equador elipsoidal pela projeção com a normal ao elipsóide do ponto com o plano meridiano de Greenwich. A contagem é feita positivamente para o leste de Greenwich no intervalo de $0 \leq \lambda \leq \pi$ e negativamente a oeste de Greenwich no intervalo $0 > \lambda > -\pi$.

A altitude geométrica é definida como o comprimento do segmento da normal ao elipsóide do ponto, contada desde a superfície elipsoidal até o ponto.

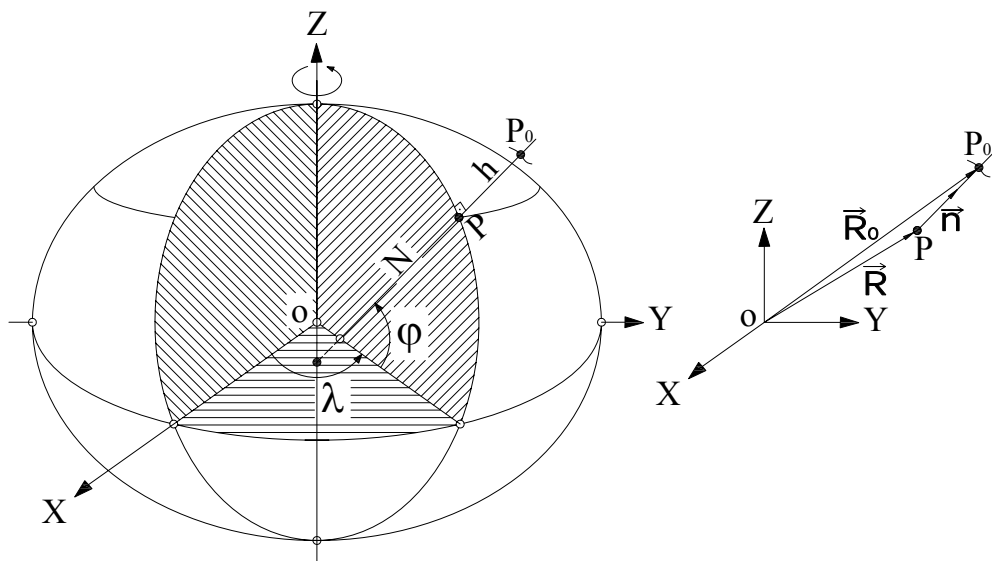


Figura 2-7-Sistema de coordenadas geográficas elipsóidicas

Fonte: editado de Moraes (2001, p. 151)

O vetor \vec{R}_0 tem origem no centro do elipsóide e sua extremidade é no ponto P_0 situado na superfície física terrestre SFT, sendo definido matematicamente segundo Torge (2001, p. 100) pela soma vetorial:

$$\vec{R}_0 = \vec{R} + h \cdot \vec{n} \quad (2.1)$$

Sendo:

$$\vec{R} = \begin{bmatrix} X_p \\ Y_p \\ Z_p \end{bmatrix} = N \begin{bmatrix} \cos\varphi \cos\lambda \\ \cos\varphi \operatorname{sen}\lambda \\ (1-e^2)\operatorname{sen}\varphi \end{bmatrix}; \quad (2.2)$$

\vec{n} é o versor da normal de P_0 , dado por:

$$\vec{n} = \begin{bmatrix} \cos\varphi \cos\lambda \\ \cos\varphi \operatorname{sen}\lambda \\ \operatorname{sen}\varphi \end{bmatrix}. \quad (2.3)$$

O vetor de posição \vec{R}_o é obtido pela substituição de (2.2) e (2.3) em (2.1):

$$\vec{R}_o = \begin{bmatrix} X_{p_0} \\ Y_{p_0} \\ Z_{p_0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (N+h)\cos\varphi \cos\lambda \\ (N+h)\cos\varphi \operatorname{sen}\lambda \\ ((1-e^2)N+h)\operatorname{sen}\varphi \end{bmatrix}. \quad (2.4)$$

Segundo Torge (2001, p. 100) a solução do problema inverso para determinação das coordenadas geográficas elipsóidicas φ e h em função das coordenadas cartesianas elipsóidicas só pode ser feita por métodos iterativos:

$$\varphi = \operatorname{arc\,tang} \frac{Z_{p_0}}{\sqrt{X_{p_0}^2 + Y_{p_0}^2}} \left(1 - e^2 \frac{N}{N+h} \right)^{-1}; \quad (2.5)$$

$$h = \frac{\sqrt{X_{p_0}^2 + Y_{p_0}^2}}{\cos\varphi} - N. \quad (2.6)$$

O processo de iteração pode iniciar com $h=0$, resultando na primeira aproximação de φ . A convergência é rápida para pontos na superfície da terra ($h < N$). Para problemas de Geodésia celeste que envolvem grandes altitudes foram desenvolvidos outros modelos.

A coordenada geográfica elipsóidica λ é calculada em função das cartesianas elipsóidicas por:

$$\lambda = \frac{Y_{p_0}}{X_{p_0}}. \quad (2.7)$$

Outras equações para transformação de coordenadas cartesianas geográficas elipsóidicas φ e h em função das coordenadas cartesianas elipsóidicas é apresentada por Bowring:

$$\varphi = \operatorname{arc\,tg} \frac{z^* + e'^2 a(1-f)\operatorname{sen}^3 u}{\sqrt{x^{*2} + y^{*2} - e^2 a \cos^3 u}}; \quad (2.8)$$

$$h = \sqrt{x^{*2} + y^{*2}} \cos\varphi + z \operatorname{sen}\varphi - \frac{a^2}{N}, \quad (2.9)$$

Onde:

$$u = \arctg \frac{z(1-f)}{\sqrt{x^2 + y^2}} \left(1 + \frac{e'^2 a(1-f)}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right).$$

N: grande normal;

a: semi-eixo maior do elipsóide;

f: achatamento;

e'^2 : segunda excentricidade ao quadrado.

2.2.1.7 Sistema de coordenadas cartesianas elipsóidicas topocêntricas

A descrição deste sistema pode ser feita em analogia ao sistema de coordenadas cartesianas astronômicas topocêntricas, lembrando que este se vincula ao modelo elipsóidico e, portanto é vinculado ao sistema de coordenadas cartesianas elipsóidicas pela direção da normal do ponto P_0 (MORAES, 2001, p. 152).

a) sistema cartesiano do espaço de três dimensões;

b) origem no topocentro;

c) eixo z^* coincide com a direção normal, sendo positivo no sentido do zênite elipsóidico;

d) o eixo x^* está contido no plano meridiano elipsóidico do ponto P_0 sendo positivo no sentido norte elipsóidico;

e) o eixo y^* encontra-se na posição leste-oeste elipsóidica sendo positivo no sentido leste;

f) o sistema é levogiro;

g) o vetor de posição é dado por: $r_0^{*T} = [x^* \quad y^* \quad z^*]$.

A Figura 2-8 ilustra o sistema de coordenadas cartesianas elipsóidicas topocêntricas.

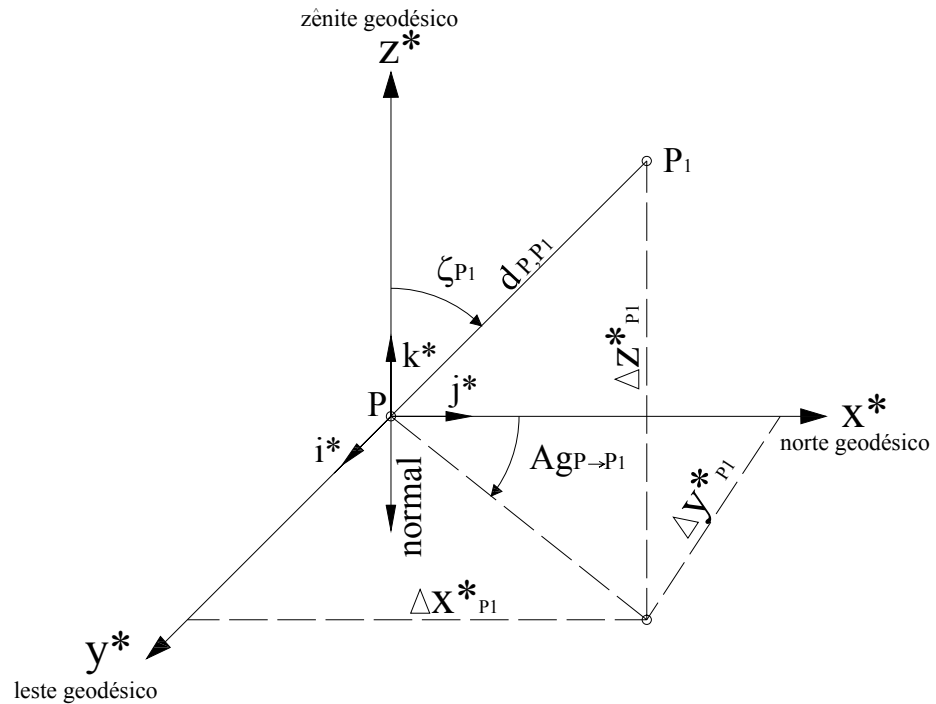


Figura 2-8-Sistema de coordenadas cartesianas elipsóidicas topocêntricas.

Fonte: Moraes (2001, p. 153)

2.2.1.8 Sistema de coordenadas polares elipsóidicas

Neste sistema toma-se um ponto de coordenadas geográficas elipsóidicas conhecidas (φ, λ) como pólo (P_0). A partir deste dá-se a origem para contagem do comprimento da linha geodésica ($s_{0,1}$) até um segundo ponto (P_1). O Azimute geodésico (Ag) do pólo ao segundo ponto será contado em relação ao eixo polar que será tangente à linha meridiana ($t'm$) que passa pelo pólo até a tangente a linha geodésica ($t's$).

Assim, no sistema de coordenadas polares elipsóidicas o ponto P_1 fica definido por $(s_{0,1}$ e $Ag_{P_0 \rightarrow P_1}$) conforme a Figura 2.9.

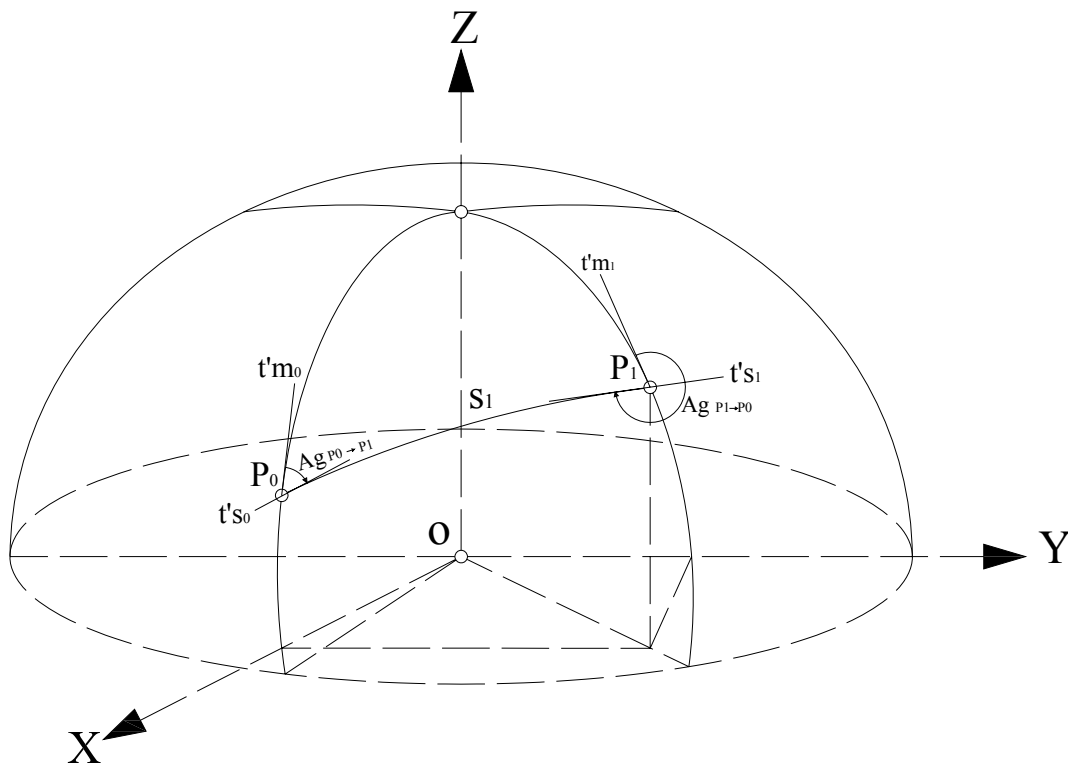


Figura 2-9-Sistema de coordenadas polares elipsóidicas.

2.2.1.9 Sistema de coordenadas polares elipsóidicas topocêntricas

O sistema de coordenadas polares elipsóidicas topocêntricas pode ser relacionado com o sistema de coordenadas cartesianas elipsóidicas topocêntricas. Neste sistema a posição de um ponto na superfície terrestre é dado pela distância (d) em relação ao pólo que é a origem do sistema, o azimuth geodésico (Ag) e o ângulo zenital geodésico (ζ), conforme pode ser observado na Figura 2.8.

2.3 Transporte Geodésico de Coordenadas

O transporte geodésico de coordenadas segundo Saatkamp (2006, p. 44) consiste na determinação de coordenadas de pontos por propagação desde um ponto de coordenadas conhecidas (Datum). Neste processo as coordenadas transportadas são vinculadas às do ponto de origem através de medições de distâncias e direções. Estas mensurações que são realizadas sobre a superfície física terrestre ou próximas dela são realizadas no plano topográfico e por isso precisam ser reduzidas à superfície do elipsóide (modelo utilizado pela Geodésia).

A realização do transporte a partir de um ponto de coordenadas conhecidas utilizando-se medidas tomadas na superfície denomina-se problema geodésico direto (Figura 2.10). Casos onde a partir das coordenadas geodésicas de dois pontos se calcula a distância e direção que os une constituem-se no problema geodésico inverso conforme mostra a Figura 2.11.

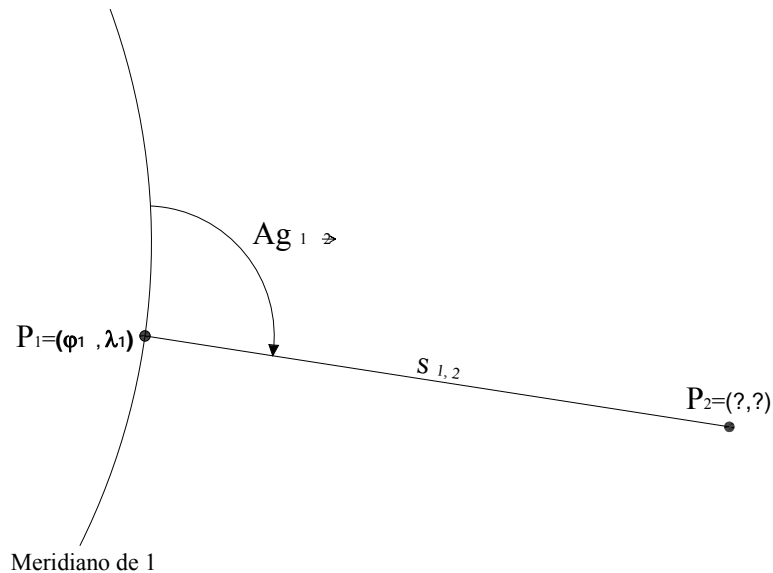


Figura 2-10-Problema geodésico direto.

Uma alternativa para o transporte geodésico de coordenadas é a utilização da formulação de Puissant onde a solução se dá na superfície esférica, ou seja, considera-se que o elipsóide seja uma esfera de raio igual ao raio médio de curvatura na região do levantamento. Esta aproximação limita a utilização do método para linhas relativamente curtas, de até 80 km com precisão de 0,002". Para linhas mais extensas recomenda-se outras formulações, como por exemplo a de Sodano.

Outra alternativa com precisão equivalente ao primeiro método, porém de solução mais simples segundo Saatkamp (2008) se dá pelo processo denominado transformação ortogonal entre coordenadas cartesianas topocêntricas e geocêntricas.

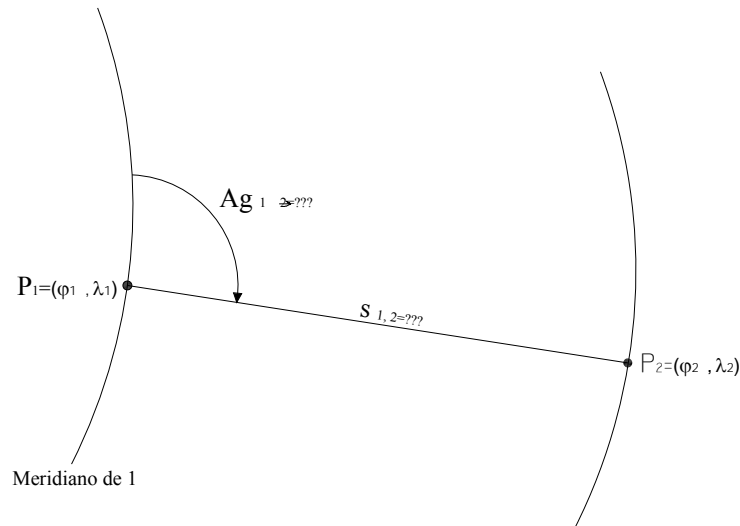


Figura 2-11-Problema geodésico inverso

2.3.1 Transporte geodésico de coordenadas pela formulação de Puissant

A formulação de Puissant é citada por Saatkamp (2006, p. 45-46) para solução dos problemas geodésicos inversos e direto respectivamente.

2.3.1.1 Problema Geodésico Inverso

No problema geodésico inverso (PGI) são conhecidas as coordenadas geodésicas de dois pontos e calcula-se a distância geodésica e o azimute geodésico da direção que os une. A seguir é apresentada a formulação de Puissant para o cálculo da distância geodésica (s) e o azimute geodésico (Ag) do alinhamento 1,2:

$$B_m = \frac{1}{M_m \cdot \text{sen} 1''}; \quad (2.10)$$

$$F = \frac{1}{12} \text{sen} \varphi_m \cdot \cos^2 \varphi_m \cdot \text{sen}^2 1''; \quad (2.11)$$

$$\gamma_{12}'' = \Delta \lambda_{12}'' \cdot \text{sen} \varphi_m \cdot \sec \frac{1}{2} \Delta \varphi_{12} + F (\Delta \lambda_{12}'')^3. \quad (2.12)$$

a) Distância geodésica

$$x = \Delta \lambda'' \cdot \cos \varphi_m \cdot N_m \cdot \text{sen} 1'' = s_{1,2} \cdot \text{sen} \left(Ag_{1 \rightarrow 2} + \frac{\gamma}{2} \right); \quad (2.13)$$

$$y = \frac{\Delta \varphi_{12}'' \cdot \cos(0,5 \Delta \lambda)}{B_m} = s_{1,2} \cdot \cos \left(Ag_{1 \rightarrow 2} + \frac{\gamma}{2} \right); \quad (2.14)$$

b) Azimute geodésico

$$\operatorname{tg}\left(\operatorname{Ag}_{1 \rightarrow 2} + \frac{\gamma}{2}\right) = \frac{x}{y}, \quad (2.15)$$

Onde:

N_m : raio de curvatura da seção transversal calculada para latitude média (φ_m) do alinhamento;

M_m : raio de curvatura da seção meridiana calculada para latitude média (φ_m) do alinhamento;

γ : Convergência meridiana.

2.3.1.2 Problema Geodésico Direto

No problema geodésico direto (PGD) são conhecidas as coordenadas geodésicas de um ponto e a distância e a direção deste ponto até o ponto cujas coordenadas deseja-se calcular. A solução deste problema por Puissant é descrita a seguir, sendo que na notação utilizada considera-se que o ponto de coordenadas geodésicas conhecidas seja o ponto 1:

a) Transporte da latitude:

$$B = \frac{1}{M_1 \cdot \operatorname{sen} l''}; \quad (2.16)$$

$$C = \frac{\operatorname{tg} \varphi_1}{2 \cdot M_1 \cdot N_1 \cdot \operatorname{sen} l''}; \quad (2.17)$$

$$D = \frac{3e^2 \cdot \cos \varphi_1 \cdot \operatorname{sen} \varphi_1 \cdot \operatorname{sen} l''}{2(1 - e^2 \cdot \operatorname{sen}^2 \varphi_1)}; \quad (2.18)$$

$$E = \frac{1 + 3 \cdot \operatorname{tg}^2 \varphi_1}{6 \cdot N_1^2}; \quad (2.19)$$

$$h = \frac{s_{1,2} \cdot \cos \operatorname{Ag}_{1 \rightarrow 2}}{M_1 \cdot \operatorname{sen} l''}; \quad (2.20)$$

$$\delta \varphi'' = B \cdot s_{1,2} \cdot \cos \operatorname{Ag}_{1 \rightarrow 2} - C \cdot s_{1,2}^2 \cdot \operatorname{sen}^2 \operatorname{Ag}_{1 \rightarrow 2} - h \cdot E \cdot s_{1,2} \cdot \operatorname{sen} \operatorname{Ag}_{1 \rightarrow 2}; \quad (2.21)$$

$$\Delta \varphi_{12}'' = \delta \varphi_{12}'' - D \cdot (\delta \varphi_{12}'')^2; \quad (2.22)$$

$$\varphi_2 = \varphi_1 + \Delta \varphi_{1,2}. \quad (2.23)$$

b) Transporte da longitude:

$$T_{12} = \frac{s_{1,2} \cdot \text{sen}Ag_{1 \rightarrow 2}}{N_2 \cdot \cos \varphi_2}; \quad (2.24)$$

$$\Delta\lambda_{12}'' = \frac{T_{12}}{\text{sen}1''} \left(1 - \frac{s_{1,2}^2}{6 \cdot N_2^2} + \frac{T_{12}^2}{6} \right); \quad (2.25)$$

$$\lambda_2 = \lambda_1 + \Delta\lambda_{12}. \quad (2.26)$$

Onde:

N_1 : raio de curvatura da seção transversal calculada para latitude do ponto 1;

N_2 : raio de curvatura da seção transversal calculada para latitude do ponto 2;

M_1 : raio de curvatura da seção meridiana calculada para latitude do ponto 1;

e^2 : primeira excentricidade ao quadrado calculada por;

2.4 Vertical de um ponto no topocentro

A vertical de um ponto localizado no topocentro coincide com a direção do vetor da gravidade (g), sendo tangente neste ponto à linha vertical que passa pelo ponto. Assim, a vertical tem a mesma direção do zênite astronômico no ponto considerado, mas sentido oposto vertical é a direção oposta ao zênite astronômico do ponto considerado, sendo materializada pelo fio do prumo e serve de referência para determinação das coordenadas naturais.

O plano perpendicular a direção vertical é chamado plano horizontal e o plano que contém a direção vertical é denominado plano vertical. Estes são os dois planos de principal interesse para mensurações geodésicas, e é no plano vertical que o eixo principal do instrumento é idealmente (na realidade, aproximadamente) materializado.

O plano de principal interesse para mensurações geodésicas é o plano horizontal tangente ao ponto considerado pois é nele que a vertical é aproximadamente materializada pelo eixo principal do instrumento.

2.5 Normal de um ponto no topocentro

A direção normal de um ponto no topocentro ou simplesmente normal é a direção perpendicular ao plano tangente a uma determinada superfície (no caso, a do elipsóide de revolução), e que ao mesmo tempo passa pelo ponto considerado. É a mesma direção do zênite geodésico, mas pode ser considerada de sentido oposto, se considerarmos indo do ponto na superfície ao interior do modelo e serve como referência para determinação das coordenadas geodésicas.

A normal e o eixo de rotação do modelo, ao contrário da vertical e do eixo de rotação instantâneo, são coplanares. O plano formado por eles define o meridiano geodésico (ou elisóidico) do ponto.

2.6 Desvio da vertical

De acordo com a Figura 2.12, sejam OZ e ON respectivamente a normal e a vertical relativas a um ponto de coordenadas geográficas elipsoidais (φ, λ) e astronômicas (Φ, Λ) . coordenadas geodésicas (φ, λ) e astronômicas (Φ, Λ) . O ângulo i formado pela vertical e pela normal, denomina-se desvio da vertical e segundo Gemael (1987, p.1.7) pode também ser medido pelo arco ZN^* sendo este decomposto em:

$$ZA = \xi = \text{componente meridiana};$$

$$NA = \eta \text{ componente primeiro vertical.}$$

Estas grandezas podem ser calculadas por:

$$\xi = \Phi - \varphi; \quad (2.27)$$

$$\eta = (\Lambda - \lambda)\cos\varphi; \quad (2.28)$$

$$\eta = (A - Ag)\cotg\varphi, \quad (2.29)$$

Onde:

A é o azimute astronômico;

Ag é o azimute geodésico.

* Z é o zênite na esfera celeste e N é a interseção da normal na esfera celeste.

Conhecendo-se as componentes do desvio é possível transformar grandezas astronômicas em geodésicas (elipsoidais) . É o caso por exemplo da Equação de Laplace (2.30) por meio da qual transforma-se o azimute astronômico em geodésico.

$$A_g = A - (\Lambda - \lambda)\text{sen}\varphi. \quad (2.30)$$

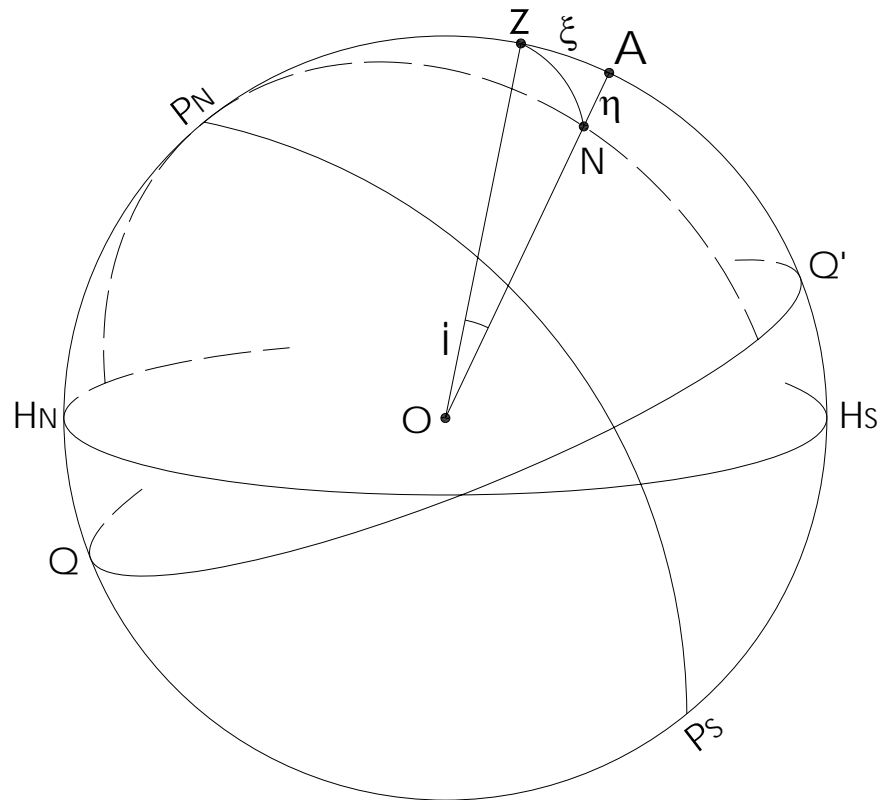


Figura 2.12-Desvio da vertical.

Fonte: Gemael (1987, p. 1.7)

2.7 Transformação ortogonal

De acordo com Saatkamp (2008) o sistema cartesiano topocêntrico consiste de três eixos coordenados ortogonais entre si, sendo: a origem no ponto de instalação do instrumento (estação), o eixo x apontado no sentido leste, o eixo y apontado no sentido norte e o eixo z coincidente com a direção vertical, apontado no sentido do zênite, formando um sistema dextrógiro. Os eixos x e y formam o denominado plano topográfico local, o qual é perpendicular à vertical do ponto, materializada aproximadamente pelo eixo principal do instrumento. O sistema cartesiano geocêntrico também é formado por três eixos coordenados ortogonais, sendo: a origem no centro de massa da Terra (C.M.), o eixo X formado pela

interseção do plano equatorial convencional com o plano meridiano convencional de Greenwich, o eixo Z aponta no sentido do pólo norte convencional e o eixo Y forma um sistema dextrógiro. Ambos os sistemas citados são ilustrados pela Figura 2-13, nessa figura, apresenta-se um ponto P levantado (medido) a partir de P_0 .

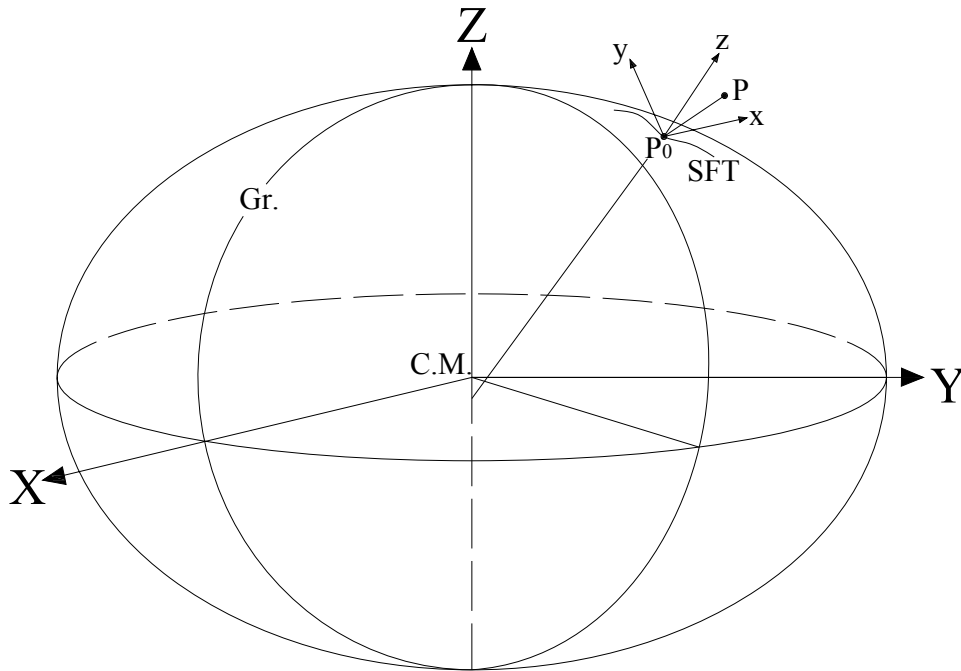


Figura 2-13-Sistemas de coordenadas cartesianas topocêntricas e geocêntricas.

Para que haja equivalência de coordenadas de um ponto tomadas em relação a um sistema e a outro (transformação de coordenadas) é necessário fazer a coincidência dos sistemas cartesiano topocêntrico com o sistema cartesiano geocêntrico. As mesmas operações que levam os dois sistemas a coincidirem também efetuarão a transformação das coordenadas dos pontos ao sistema original (SAATKAMP, 2008).

2.7.1.1 Transformação de coordenadas cartesianas topocêntricas em cartesianas geocêntricas.

A transformação de coordenadas cartesianas topocêntricas em cartesianas geocêntricas considerando a forma rigorosa, sem negligenciar as componentes do desvio da vertical * de acordo com Saatkamp (2008) é realizada conforme segue:

* As componentes do desvio da vertical permitem levar a direção vertical, materializada pelo eixo principal do instrumento, à direção normal no ponto considerado. Neste trabalho, em função do desconhecimento de seu valor e considerando-se que em geral eles são muito pequenos, foram negligenciados nos cálculos, ou seja,

1º) rotação em torno do eixo x, da quantidade $(270^\circ + \varphi_{P_0} - \xi_{P_0})$, para tornar o eixo z paralelo ao eixo Z observando-se que os eixos z e y estão contidos no plano do meridiano de P_0 conforme a Figura 2-14.

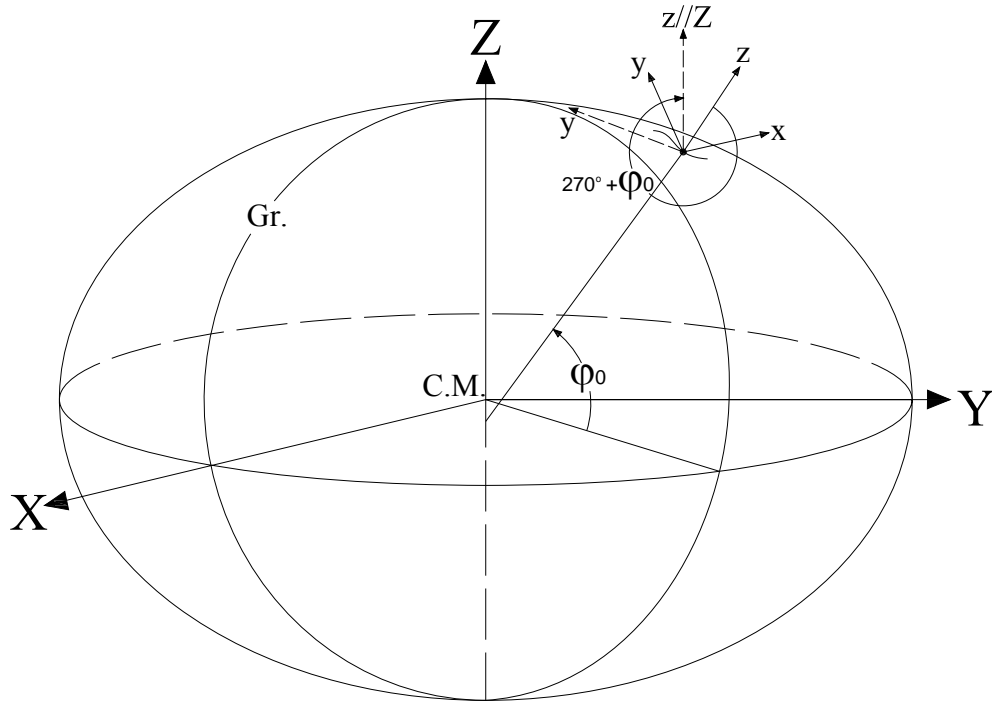


Figura 2-14-Rotação do sistema cartesiano topocêntrico em torno do eixo x.

2º) rotação em torno do eixo z, da quantidade $(270^\circ - \lambda_{P_0} - \eta_{P_0})$, para levar os eixos x e y se tornarem paralelas aos eixos X e Y.

considerou-se que $\xi_{P_0} = 0$ e $\eta = 0$. A convenção de sinais é que $\xi > 0$ quando a vertical estiver ao norte da normal, e $\eta > 0$ quando a vertical estiver a leste da normal.

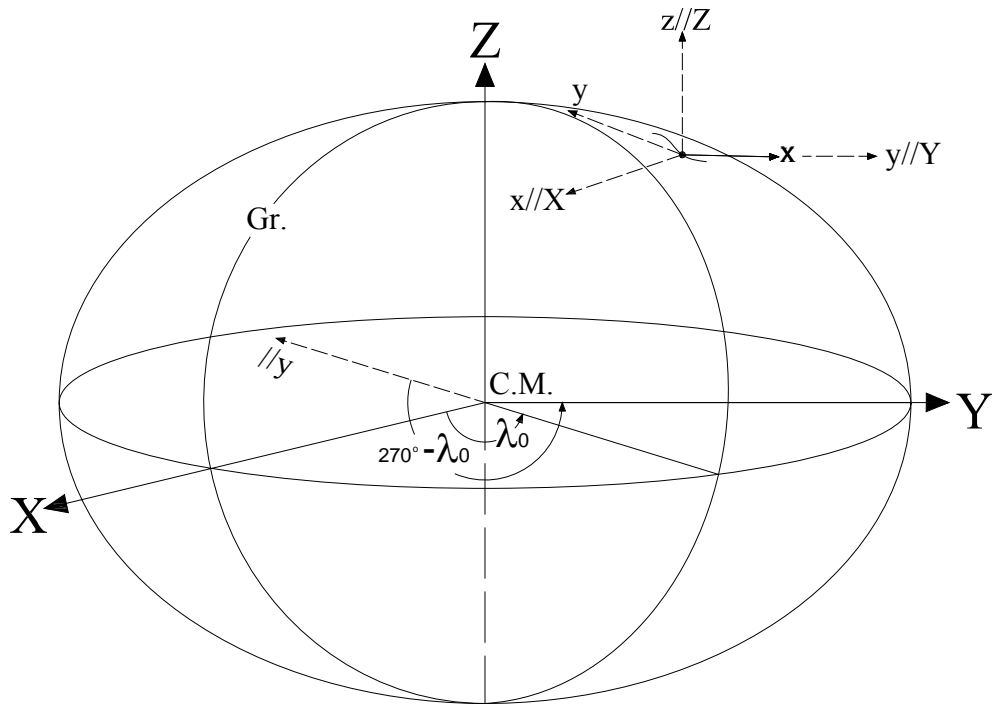


Figura 2-15-Rotação do sistema cartesiano topocêntrico em torno do eixo z.

3º) translação da origem do sistema cartesiano local (P_0) à origem do sistema cartesiano geocêntrico (C.M.), das quantidades correspondentes aos valores da coordenada da origem do sistema local em relação ao sistema geocêntrico conforme mostra a Figura 2-16.

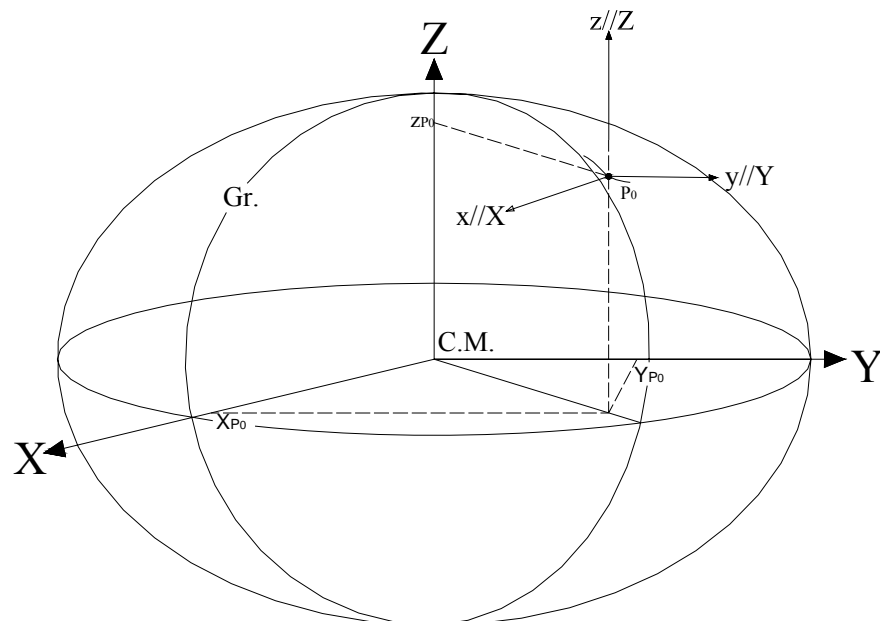


Figura 2-16-Translação da origem do sistema cartesiano topocêntrico para a origem do sistema cartesiano geocêntrico.

Matematicamente, as operações citadas podem ser realizadas na forma matricial pela equação:

$$\vec{R}_{p_i} = \text{Rot}_z(270^0 - \lambda_{p_0} - \eta_{p_0}) \cdot \text{Rot}_x(270^0 + \varphi_{p_0} - \xi_{p_0}) \cdot \vec{r}_{p_i} + \vec{R}_{p_0} \quad (2.31)$$

Onde:

\vec{R}_{p_i} é o vetor de coordenadas cartesianas geocêntricas do ponto p_i ;

Rot_z é a matriz de rotação em torno do eixo z ;

Rot_x é a matriz de rotação em torno do eixo x ;

\vec{r}_{p_i} é o vetor das coordenadas cartesianas do ponto p_i no sistema local (topocêntrico);

\vec{R}_{p_0} é o vetor das coordenadas cartesianas da origem do sistema cartesiano local, em relação ao sistema cartesiano geocêntrico;

η_{p_0} é a componente transversal do desvio da vertical;

ξ_{p_0} é a componente meridiana.

As matrizes de rotação, considerando-se o argumento (ângulo de rotação) α , são deduzidas conforme mostra a Figura 2-17 para a rotação em torno do eixo X , sendo o processo semelhante para rotação em torno do eixo Z :

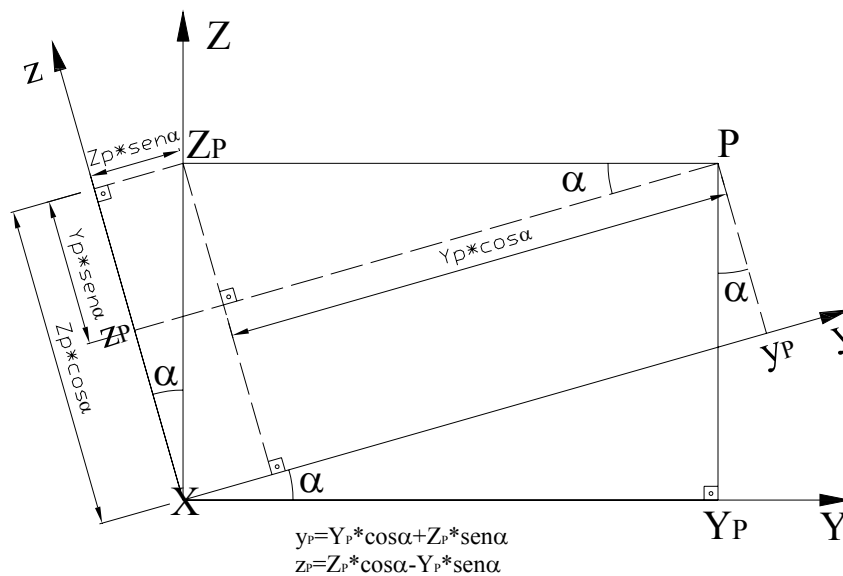


Figura 2-17-Dedução da matriz de rotação do sistema cartesiano topocêntrico em torno do eixo X .

Escrevendo matricialmente têm-se:

$$\text{Rot}_x(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & \text{sen} \alpha \\ 0 & -\text{sen} \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \quad (2.32)$$

$$\text{Rot}_z(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \text{sen} \alpha & 0 \\ -\text{sen} \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.33)$$

Os vetores de coordenadas são dados na forma de coluna. A equação 2.31 é válida para quaisquer coordenadas, considerando-se a convenção: latitude elipsoidal (φ) negativa no hemisfério sul; longitude elipsoidal (λ) negativa no hemisfério a oeste de Greenwich. É considerado como sentido positivo da rotação aquele em que o observador vê o eixo apontando em sua direção e a rotação em torno do eixo é dada no sentido anti-horário (ou regra da mão direita).

O vetor de coordenadas cartesianas do ponto no sistema cartesiano topocêntrico é dado por:

$$\vec{r}_{p_i} = \begin{bmatrix} x_{p_i} \\ y_{p_i} \\ z_{p_i} \end{bmatrix}_{3 \times 1} = D_{i_i} \begin{bmatrix} \text{sen } A_{g_i} \cdot \text{sen } z_i \\ \cos A_{g_i} \cdot \text{sen } z_i \\ \cos z \end{bmatrix}_{3 \times 1} \quad (2.34)$$

Onde:

D_{i_i} é a distância medida (geralmente inclinada) do ponto p_0 ao ponto p_i (corrigida dos efeitos ambientais);

A_{g_i} : azimute geodésico no sentido do ponto p_0 ao ponto p_i , e pode ser calculado pelo problema geodésico inverso utilizando as equações descritas no item 2.3.1.1.

z : ângulo zenital medido ao visar o ponto p_i (a partir de p_0).

Quando a altura do instrumento (h_i) for diferente da altura (h_{p_i}) do alvo (prisma refletor instalado em p_i), à coordenada z do vetor \vec{r}_{p_i} deve ser adicionado o valor ($h_i - h_{p_i}$).

Deve-se observar que a coordenada z_p obtida da equação 2.34 corresponde ao desnível do ponto irradiado em relação ao plano horizontal por p_0 , e ela não deve ser corrigida do efeito da curvatura da Terra, uma vez que está se trabalhando no espaço cartesiano.

2.7.1.2 Transformação de coordenadas cartesianas geocêntricas em cartesianas topocêntricas.

Para transformar coordenadas do sistema cartesiano geocêntrico em coordenadas do sistema cartesiano local, visando, por exemplo, a locação de pontos no plano topográfico

local, basta efetuar as operações inversas. Uma vez que a transformação dada pela equação 2.31 é ortogonal, o vetor x_p é dado por:

$$\vec{r}_{p_i} = Rot_X^{-1}(270^0 + \varphi_{p_0} - \xi_{p_0}) \cdot Rot_Z^{-1}(270^0 - \lambda_{p_0} - \eta_{p_0}) \cdot (\vec{R}_{P_i} - \vec{R}_{P_0}) \quad (2.35)$$

As matrizes de rotação são ortogonais, portanto suas respectivas inversas são iguais às transpostas, podendo, portanto a equação 2.2.35 pode ser reescrita por:

$$\vec{r}_{p_i} = Rot_X^T(270^0 + \varphi_{p_0} - \xi_{p_0}) \cdot Rot_Z^T(270^0 - \lambda_{p_0} - \eta_{p_0}) \cdot (\vec{R}_{P_i} - \vec{R}_{P_0}) \quad (2.36)$$

A equação 2.36 fornece as coordenadas cartesianas do ponto p_i no sistema cartesiano topocêntrico, contudo, o vetor x_{p_i} também é dado pela equação 2.34. Igualando-se ambas, pela 2.34 determina-se as coordenadas polares topocêntricas. Ou seja, a partir da base formada por p_0 e p_i , de coordenadas elipsoidais conhecidas, cujo azimuth geodésico (Ag_i) pode ser calculado pelas equações de Puissant para o PGI (item 2.3.1.1), por meio da equação 2.34 pode-se determinar a distancia (di_i) a ser irradiada a partir de p_0 se for considerado $z = 90^\circ$, ter-se-á a distancia horizontal a ser irradiada. A partir desses elementos pode-se realizar a locação.

2.8 Sistemas de Projeções Cartográficas

Os modelos que mais se aproximam da forma real da Terra são a esfera e o esferóide, ou seja, possuem superfícies curvas. Na engenharia, a exemplo de outras atividades, a representação deve ser plana. Desenvolvem-se então as cartas e mapas que trazem consigo distorções e deformações. Essas imperfeições apesar de impossíveis de serem eliminadas podem ser conhecidas (controladas) para que se possa definir a limitação da representação gráfica.

As deformações são de ângulos, comprimentos, áreas e podem ser reduzidas desde que se consiga estabelecer uma relação entre o modelo e a representação plana. Esta relação pode ser estabelecida através do conhecimento dos sistemas de projeções cartográficas.

2.8.1 Classificação dos sistemas de projeções

Os sistemas de projeções cartográficas podem ser classificados de várias formas, cada uma de acordo com um critério adotado no princípio da construção, na propriedade que conservam, na superfície de projeção adotada e na situação da superfície de projeção.

2.9 Projeção Universal Transversa de Mercator

No decorrer do tempo, cada país adotou uma determinada projeção de acordo com as necessidades de seus propósitos cartográficos e geodésicos. Esta escolha levou em consideração peculiaridades em relação à forma e tamanho de seus territórios, considerando as características mais desejáveis na representação e em muitos casos modificando as projeções básicas. Obviamente nenhuma projeção iria se adequar a todos os países do mundo. Assim a comunidade geodésica e cartográfica mundial aprendeu a conviver com uma grande diversidade de projeções cartográficas.

O Brasil segundo Aguirre e Mello Filho (2007, p. 63) em 1955 adotou a projeção Universal Transversa de Mercator (UTM) seguindo recomendação da União Geodésica e Geofísica Internacional (UGGI). Tal projeção foi utilizada pela Diretoria do Serviço Geográfico do Exército para o mapeamento sistemático nacional.

A projeção Universal Transversa de Mercator (UTM) pertence ao grupo das projeções Transversas de Mercator (TM) pelo cilindro ser transverso ao modelo matemático da terra. Neste grupo além da UTM estão também as projeções de Gauss, Gauss-Kruger, Gauss-Tardi, Local Transversa de Mercator (LTM) e a Regional Transversa de Mercator (RTM).

2.9.1 Histórico da Projeção Universal Transversa de Mercator

A projeção Universal Transversa de Mercator (UTM) foi desenvolvida durante Segunda Guerra Mundial. A intenção segundo Richardus e Adler (1972, p. 138) era suprir a necessidade militar de um sistema mundial de coordenadas planas que possuísse as seguintes características:

- a) Conformidade para minimizar erros direcionais;
- b) Continuidade em cima de grandes áreas juntadas com um número mínimo de zonas;
- c) Erros de escala causados pela projeção não excedendo uma tolerância especificada;
- d) Único referencial em um sistema plano retangular de coordenadas para todas as zonas;

- e) Fórmulas de transformação de uma zona para outra uniformes ao longo do sistema (assumindo um elipsóide de referência);
- f) Convergência meridiana não excedendo cinco graus.

2.9.2 Características da Projeção Universal Transversa de Mercator

Baseado nos critérios anteriormente mencionados, o sistema Universal Transverso de Mercator, (UTM), tem aplicação mundial com as seguintes características (RICHARDUS; ADLER, 1972, p. 138-143).

O modelo matemático (elipsóide de revolução) é dividido em fusos, com amplitude de 6° de longitude numeradas a partir do anti-meridiano de Greenwich no sentido leste-oeste consecutivamente de um a sessenta iniciando com o fuso entre 180° W e 174° W. A longitude limite do fuso é múltipla de seis e coincide com a divisão da carta internacional do mundo ao milionésimo. O meridiano central do fuso possui longitude igual a longitude do limite ao leste menos 3°. Cada fuso consiste em sistema parcial de coordenadas.

Em latitude os fusos são limitados de acordo com Richardus e Adler (1972, p. 143) em 84° Norte e 80° Sul. A partir destas latitudes utiliza-se a projeção Universal Polar Estereográfica abreviado na literatura norte americana como UPS.

A numeração do fuso pode ser calculada em função da longitude pela expressão:

$$NF = \frac{180^\circ + \lambda^\circ}{6^\circ} \quad (2.37)$$

Onde:

NF: número do fuso (deve ser arredondado por excesso na equação 2.37);

λ° = longitude do ponto em graus;

Os limites do fuso podem ser calculados por:

$$\begin{aligned} \lambda_L &= -(180^\circ - NF \cdot 6^\circ) \\ \lambda_O &= \lambda_L - 6^\circ \end{aligned} \quad (2.38)$$

Onde:

NF é o número do fuso;

λ_L é o limite de longitude leste;

λ_O é o limite de longitude oeste.

2.9.3 Coordenadas planas (E,N) na projeção UTM

Na representação plana, ou seja, quando o cilindro de projeção é desenvolvido em um plano, as coordenadas planas no sistema UTM tem origem no cruzamento do equador com o meridiano central do fuso. Esta origem por conveniência é acrescida de constantes que evitam que se trabalhe com valores negativos. Assim, na origem das coordenadas E, abreviatura de leste em inglês e que correspondem ao eixo das abscissas, é acrescentado a constante 500.000 metros. Estas coordenadas crescem no sentido de oeste para leste. As coordenadas N, abreviatura de norte, correspondem ao eixo das ordenadas e sua origem é acrescida da constante 10.000.000 de metros para o hemisfério Sul sendo que neste diminuem em direção ao pólo sul. No hemisfério norte crescem em direção ao pólo norte. A translação das origens denomina-se falso leste e falso norte respectivamente. Na Figura 2-18 é representada a origem das coordenadas planas E e N com as respectivas constantes de translação.

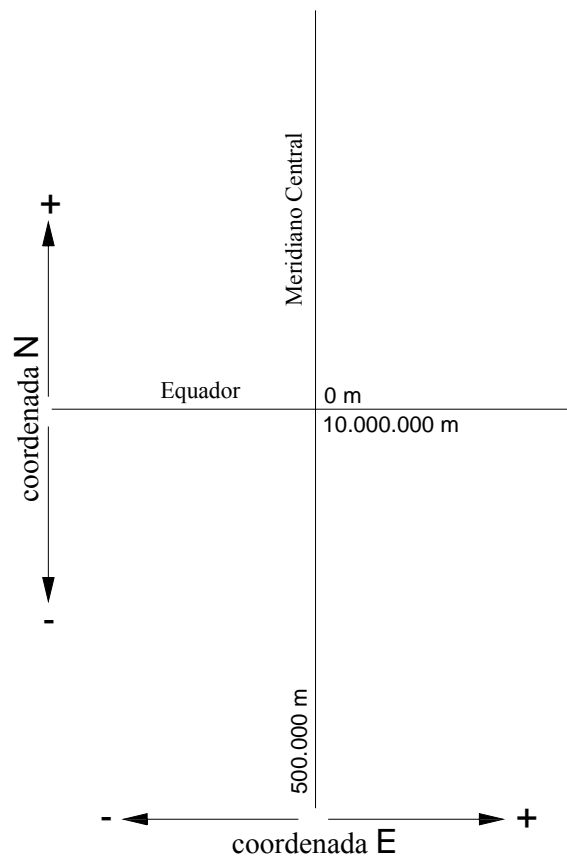


Figura 2-18-Origem do sistema de coordenadas planas E,N.

As coordenadas UTM E e N repetem-se em fusos diferentes por isso é necessário que sempre estejam acompanhadas do número do fuso ou da longitude do meridiano central a fim de evitar ambigüidades.

2.9.4 Zonas UTM

O sistema UTM também pode ser dividido em zonas, neste caso, um dos critérios segue a articulação da carta internacional ao milionésimo. O fuso é dividido em 4° de latitude a partir do equador ao norte e ao sul. Cada zona é designada por uma letra iniciando-se pelo A tanto ao norte quanto ao sul da origem.

Em um outro critério o fuso é dividido em 8° de latitude (exceto a última divisão ao norte e ao sul com 10°) a partir do equador totalizando 22 subdivisões. Estas são denotadas por letras em ordem alfabética iniciando pelo C entre as latitudes 80° S e 90° S terminando em X na zona compreendida entre as latitudes 80° N e 90° N. Desta forma a zona será denominada por uma combinação alfa-numérica com o número do fuso e a letra correspondente a divisão em latitude.

A Figura 2-19 ilustra o território brasileiro dividido em fusos e zonas UTM.

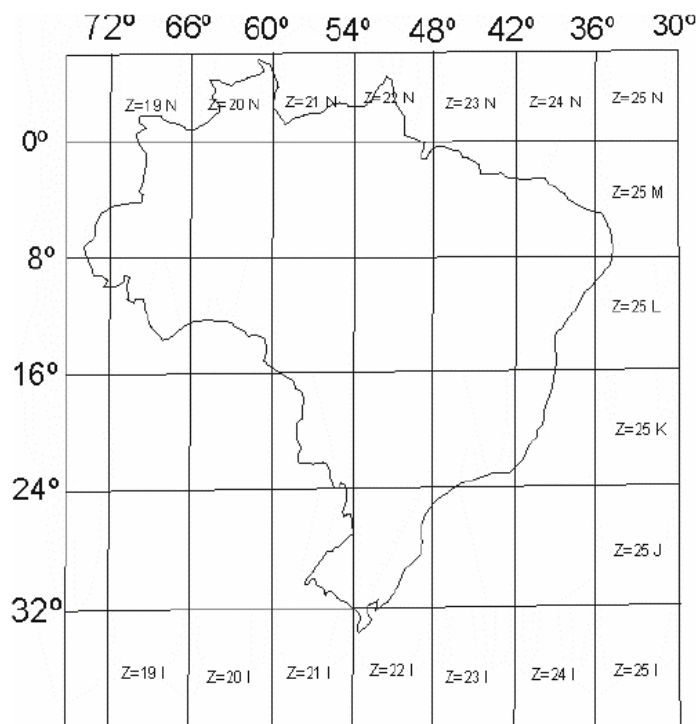


Figura 14. Brasil dividido em fusos e zonas UTM

Figura 2-19-Brasil dividido em fusos e zonas UTM.

Fonte: Aguirre e Mello Filho (2007, p 71)

2.9.5 Coeficiente de deformação linear na projeção UTM

No sentido geométrico o cilindro transversal sendo tangente ao meridiano central faz com que ao longo deste não haja distorções de escala, ou seja, $k=1$. Porém esta deformação é proporcional a distância em relação ao meridiano central conforme mostra a Figura 2-20.

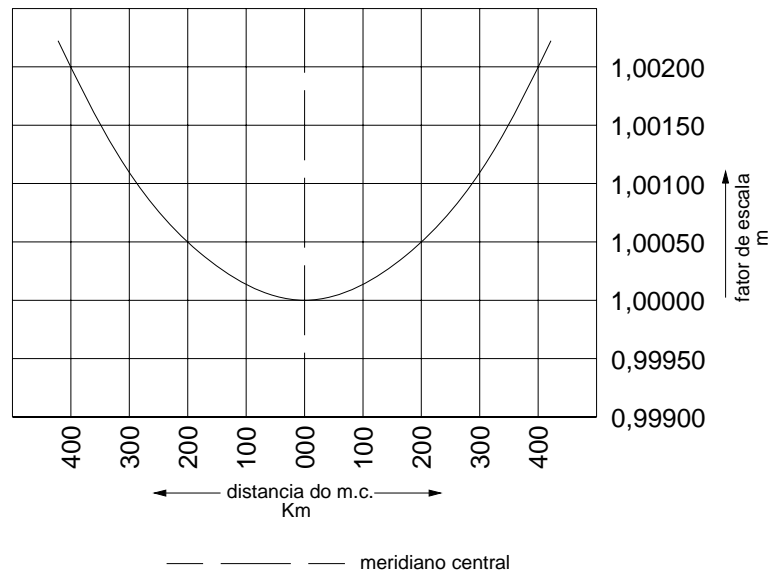


Figura 2-20-Fator de escala em relação ao meridiano central do fuso.

Fonte: Richardus e Adler (1972, p 139)

O coeficiente de deformação linear máximo admitido na projeção UTM é de $1/2500$. Para que esta condição seja satisfeita segundo Ramos (1999, p. 3 36) é necessário que o fator de escala ao longo do meridiano central seja fixado de acordo com a expressão:

$$k_0 = 1 - \frac{1}{2500} \quad (2.39)$$

Estabelecendo-se, pois ao meridiano central o fator de escala obtido pela expressão 2.39, ou seja, $k_0=0,9996$ têm-se uma escala de redução. Isto faz com que o cilindro ao invés de tangente torne-se secante ao modelo conforme mostra a Figura 2-21.

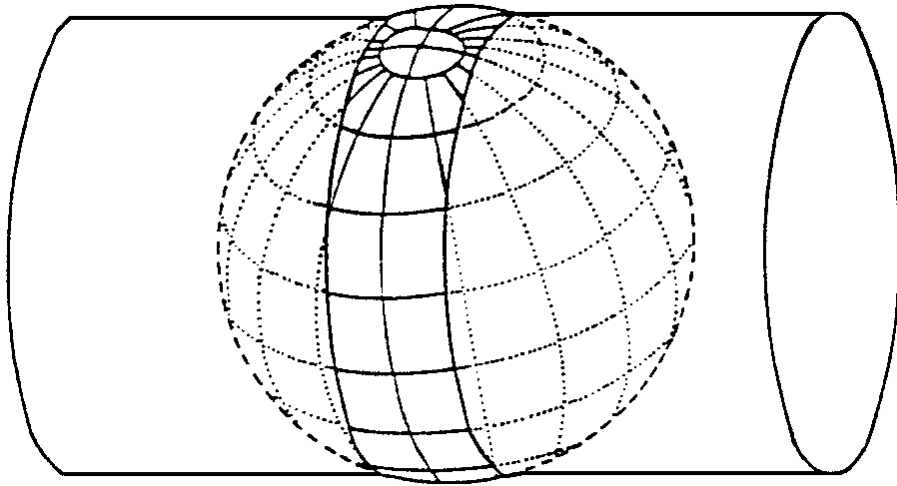


Figura 2-21-Cilindro transversal secante ao modelo.

Na intersecção do cilindro secante com o modelo forma-se duas linhas de secância distantes 180 km do meridiano central do fuso. A distorção no fator de escala ao longo destas linhas é nulo ($k=1$) diminuindo assim o valor absoluto das distorções em relação ao cilindro tangente além de tornar mais favorável sua distribuição dentro do fuso conforme mostra a Figura 2-22.

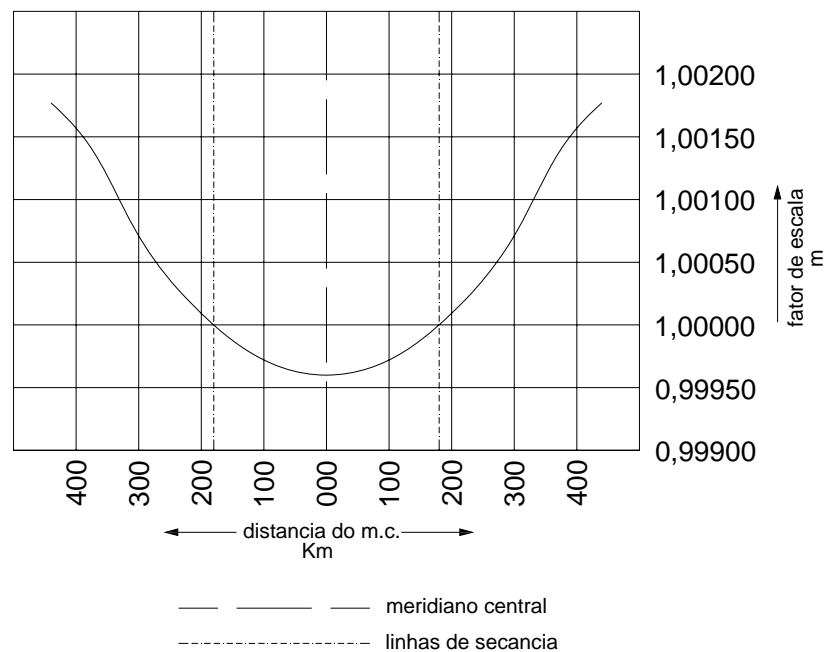


Figura 2-22-Comportamento do fator de escala dentro do fuso UTM.

Fonte: Editado de Richardus e Adler (1972, p 140)

Entre as linhas de secância o fator de escala sofre redução ($k < 1$) ampliando-se fora destas ($k > 1$) conforme mostra a Figura 2-23 .

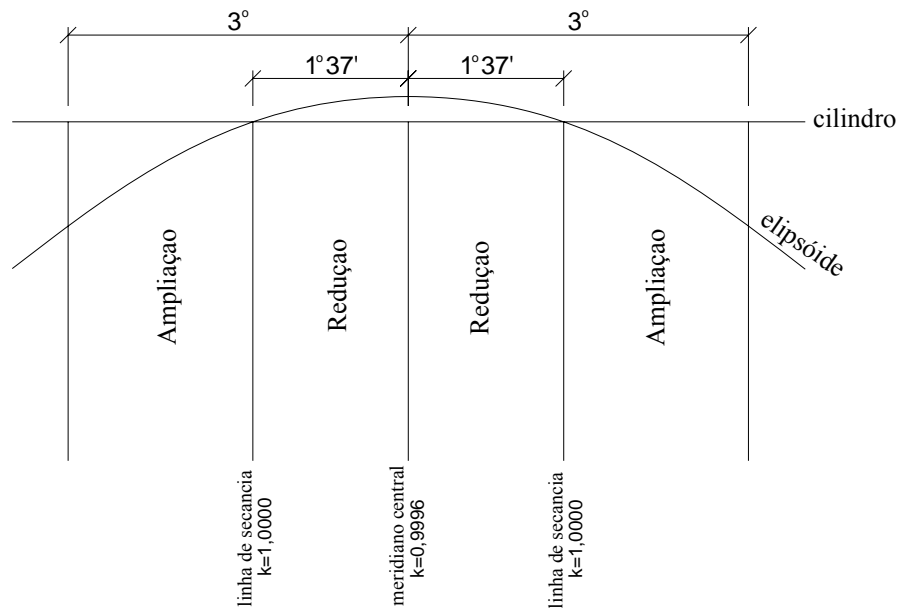


Figura 2-23-Áreas de ampliação e redução do fator de escala dentro do fuso UTM

2.9.6 Cálculo do coeficiente de deformação linear na projeção UTM

Richardus e Adler (1972, p. 140) apresenta a expressão aproximada para cálculo do fator de escala:

$$k = k_0 \left(1 + \frac{E'^2}{2 R^2} \right) \quad (2.40)$$

Onde:

k: fator de escala para um ponto;

k_0 : fator de escala ao longo do meridiano central do fuso;

E' : distância na projeção entre o ponto e o meridiano central, calculado por:

$$E' = 500.000 - E \quad \text{para pontos a oeste do meridiano central} \quad (2.41);$$

$$E' = E - 500.000 \quad \text{para pontos a leste do meridiano central} \quad (2.42);$$

Onde:

E: coordenada X (leste);

R: raio médio da terra no local ou região considerada;

O fator de escala ainda pode ser calculado segundo Beraldo e Soares (1995, apud AGUIRRE e MELLO FILHO, 2007, p. 69) seguinte expressão:

$$k = \frac{k_0}{\left\{1 - [\cos\varphi \operatorname{sen}(\lambda - \lambda_0)]^2\right\}^{\frac{1}{2}}}, \quad (2.43)$$

Onde:

k: fator de escala para um ponto;

k_0 : fator de escala ao longo do meridiano central do fuso;

λ : longitude do ponto;

λ_0 : longitude do meridiano central.

2.9.7 Transformação de coordenadas geográficas em planas na projeção UTM e vice-versa

A transformação de coordenadas geodésicas em planas no sistema de projeção UTM e vice-versa tornou-se um problema geodésico de aplicação corriqueira. Tal fato deve-se a necessidade de se trabalhar na maioria dos projetos e atividades de engenharia em representações planas. Portanto faz-se necessário a conversão entre sistemas de coordenadas geográficas e cartográficas.

Atualmente estas transformações podem ser realizadas com auxílio de programas computacionais específicos para o referido fim, a citar, o TCGEO disponibilizado pelo IBGE, 1995. Mais detalhes sobre o equacionamento utilizado nestas transformações podem ser consultados em Richardus e Adler (1972, p. 141 e 142).

2.9.8 Elementos geométricos na projeção UTM

2.9.8.1 Transformadas

Chamam-se transformadas, as representações no plano de projeção, de linhas elipsóidicas. As transformadas do equador e do meridiano central de cada fuso são linhas retas, sendo que as dos demais meridianos são curvas que convergem para os pólos. As linhas paralelas ao equador possuem como transformadas curvas convexas cuja convexidade é orientada ao equador. A concavidade das transformadas dos meridianos acentua-se com o aumento da distância em relação ao meridiano de referência. Em relação aos paralelos, a flecha aumenta tanto em relação à distância ao meridiano central como com o aumento da latitude (RAMOS, 1999, p. 16 31). Uma linha geodésica também possui uma transformada curva com a concavidade orientada para o meridiano central do fuso.

2.9.8.2 Corda da transformada

A distância no plano da projeção entre dois pontos considerados na superfície do elipsóide é chamada corda da transformada.

O conhecimento e a distinção entre as cordas e as transformadas são fundamental na solução de problemas de transporte em poligonação, transportes de coordenadas e cálculos de azimutes.

2.9.8.3 Ângulos de redução

Os ângulos de redução são formados entre a transformada e sua respectiva corda, sendo denotados por ψ .

A variação dos ângulos de redução ocorre em função do azimute e da posição relativa da base medida em relação ao meridiano central. Estas quantidades podem atingir segundo Ramos (1999, p. 18 31) valores superiores a $20''$ nos extremos dos fusos de 6° , tendendo a nulo quando a base torna-se perpendicular ao meridiano central, conforme mostra a Figura 2-24. Também é importante salientar que o ângulo de redução não é o mesmo nos dois extremos da base.

Em uma triangulação o somatório de ψ resulta no excesso esférico da mesma.

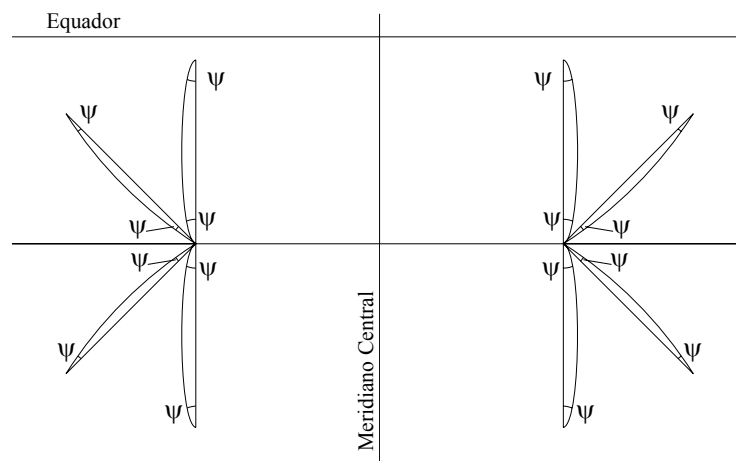


Figura 2-24- Variação dos ângulos de redução

O cálculo das reduções angulares devem considerar os sinais e podem ser calculados para os extremos das base segundo Ramos (1999, p.26 36).

2.9.8.4 Convergência Meridiana

Dá-se o nome de convergência meridiana de um ponto ao ângulo formado entre a tangente ao meridiano em um ponto considerado e a reta paralela ao meridiano central do fuso em questão. Em outra definição pode-se dizer que é o ângulo formado entre o norte da quadricula e o norte geográfico.

A convergência meridiana aumenta em relação a distância do ponto ao meridiano central do fuso e ao equador conforme a Figura 2-25, sendo o sinal convencionado de acordo com a Figura 2-26.

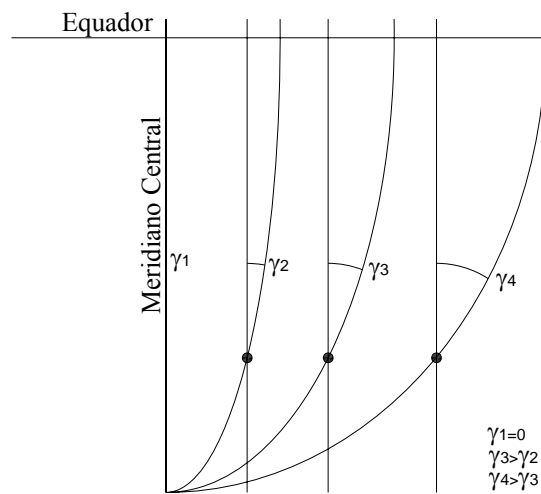


Figura 2-25-Convergência meridiana em relação a distância do meridiano central

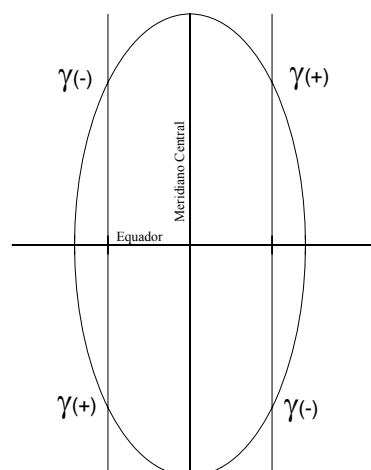


Figura 2-26-Convenção de sinais adotada para convergência meridiana.

O cálculo da convergência meridiana pode ser realizado segundo Ramos (1999, p. 21 a 31) de forma não rigorosa por:

$$\gamma = \Delta\lambda \operatorname{sen}\varphi. \quad (2.44)$$

Modelos mais rigorosos são apresentados por Richardus e Adler (1972, p. 143).

2.9.8.5 Azimute verdadeiro

Azimute geodésico ou verdadeiro (A_g) é o ângulo formado pela tangente ao meridiano que passa pelo ponto e a tangente ao arco da transformada no ponto considerado.

Por convenção é contado a partir da direção Norte no sentido horário.

2.9.8.6 Azimute geodésico projetado

O azimute geodésico projetado ou azimute plano (A_{gp}) é o ângulo formado pelo norte da quadrícula (NQ) e a corda das transformadas. Varia de 0° a 360° sendo contado no sentido horário a partir do norte.

O conhecimento do azimute plano é elemento fundamental em grande parte dos trabalhos onde utilizam-se coordenadas planas. Este azimute pode ser determinado em função do Azimute geodésico (A_g), da redução angular (ψ) e da convergência meridiana (γ) pela equação 2.45 que pode ser deduzida da Figura 2-34 ou em função das coordenadas planas aplicando-se a fórmula de Grafarend (2.46).

$$A_{gp} = A_g + \psi - \gamma \quad (2.45)$$

$$A_{gp_{i \rightarrow i+1}} = 180^\circ \left[1 - \frac{1}{2} \operatorname{sgn}(\Delta E) - \frac{1}{2} \operatorname{sgn}(\Delta E) \cdot \operatorname{sgn}(\Delta N) \right] + \operatorname{arctg} \left(\frac{\Delta E}{\Delta N} \right) \quad (2.46)$$

Onde:

$$\operatorname{sgn}(n) = \frac{n}{|n|} \text{ (função sinal),}$$

i: índice do ponto.

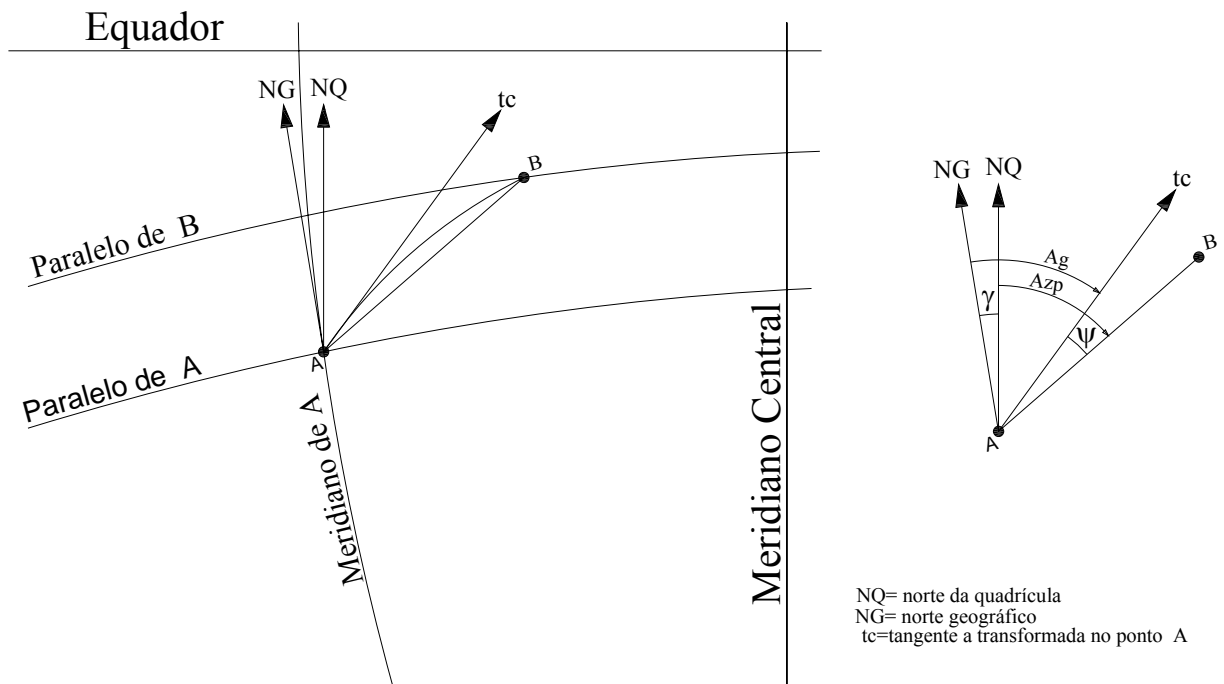


Figura 2-27-Elementos geométricos na projeção UTM

Fonte: Aguirre e Mello Filho (2007, p. 75)

2.9.8.7 Distância plana

A distância plana cartográfica é denotada por S_p e pode ser calculada por trigonometria básica em função das coordenadas planas.

2.9.8.8 Distância elipsóidica

A distância elipsóidica denotada por S_e é a distância plana reduzida ao elipsóide em função do coeficiente de redução local (k), dada por:

$$S_e = \frac{S_p}{k} \quad (2.47)$$

Onde:

k : coeficiente de redução local.

2.9.9 Área na projeção UTM

A área calculada no plano da projeção UTM é chamada de área cartográfica S^c por ser calculada em função das coordenadas planas E e N. Essas coordenadas como já visto possuem distorções lineares que por consequência se propagam para a área.

Como a área é obtida pelo produto de grandezas lineares, e estas por sua vez estão multiplicadas pelo fator de escala (k) uma correção aproximada da área cartográfica em relação a área topográfica pode ser obtida por:

$$S_{\text{topo}} \cong \frac{S^c}{k^2} \quad (2.48)$$

Onde:

S^c é calculada em função de S_p (distância plana ou cartográfica);

S_{topo} é a área topográfica aproximada;

k é o fator de escala para coordenadas médias do local, calculado por (2.43)

Ainda faz-se necessário que (2.49) seja corrigida em função da altitude geométrica uma vez que a projeção é calculada para a superfície do elipsóide. Esta correção é realizada multiplicando-se S_{topo} por:

$$C_h = \frac{R + h_m}{R} \quad (2.49)$$

Onde:

C_h é o fator de correção devido à elevação;

R é o raio médio de curvatura;

h_m é a altitude geométrica média.

Contudo convém comentar que estas correções são aproximadas pelo fato de considerarem parâmetros médios para o local em questão.

2.10 Cálculo de área no plano em função das coordenadas cartesianas

O cálculo de área ou superfície sobre um modelo plano pode ser realizado segundo Moraes (2004, p. 20) pelos seguintes métodos:

a) gráfico, pela decomposição da figura em figuras mais elementares como triângulos e retângulos ;

b) por instrumento, a citar o planímetro e a mesa digitalizadora;

- c) por métodos numéricos como por exemplo a integração numérica;
- d) pelo método analítico em função das coordenadas polares ou cartesianas.

Na topografia e Geodésia o método mais usual é o método analítico, utilizando-se principalmente a fórmula de trapézio segundo Gauss. Os demais métodos podem ser consultados em Moraes (2004, p.20-28).

2.10.1 Cálculo da área no plano pelo método analítico utilizando a fórmula do trapézio segundo Gauss

A fórmula do trapézio segundo Gauss (*Gauss'sche Trapezformel*) pode ser deduzida de acordo com a Figura 2-28 pela decomposição do polígono em trapézios.

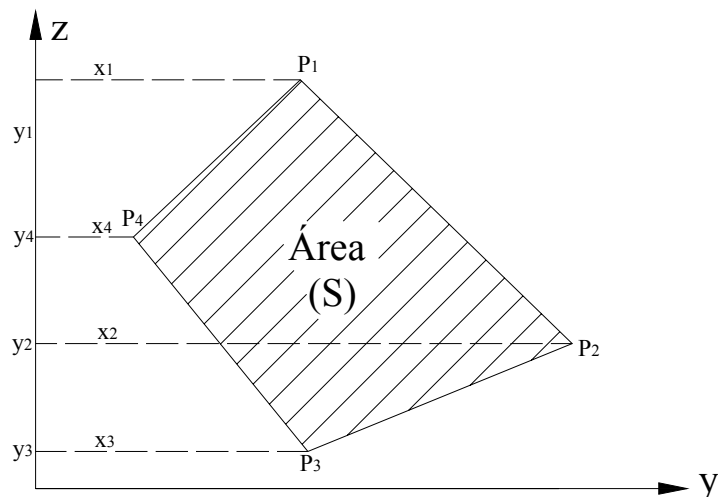


Figura 2-28-Decomposição do polígono em trapézios

Assim têm-se que a área (A) é:

$$A = \frac{x_1 + x_2}{2}(y_1 - y_2) + \frac{x_2 + x_3}{2}(y_2 - y_3) - \frac{x_3 + x_4}{2}(y_4 - y_3) - \frac{x_4 + x_1}{2}(y_1 - y_4) \Rightarrow$$

$$2A = (x_1 + x_2)(y_1 - y_2) + (x_2 + x_3)(y_2 - y_3) + (x_3 + x_4)(y_3 - y_4) + (x_4 + x_1)(y_4 - y_1)$$

Generalizando têm-se:

$$2A = \sum_{i=1}^n (x_i + x_{i+1})(y_i - y_{i+1})$$

Desenvolvendo:

$$2A = \sum_{i=1}^n (x_i y_i - x_i y_{i+1} + y_i x_{i+1} - x_{i+1} y_{i+1})$$

$$2A = \sum_{i=1}^n (y_i x_{i+1} - x_i y_{i+1})$$

Logo a Fórmula de Gauss fica:

$$A = \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^n y_i x_{i+1} - \sum_{i=1}^n x_i y_{i+1} \right) \quad (2.50)$$

Onde:

i é o índice do ponto considerado;

$i+1$ é o índice do próximo ponto em relação ao considerado;

n é o número total de pontos (vértices do polígono);

2.11 Divisão de área no plano

A divisão de superfície ou área no plano pode ser realizada conforme Stanque (2007, p. 81) pelos seguintes métodos:

- a) semelhança de triângulos;
- b) equação da área do trapézio;
- c) integral definida para calcular áreas de figuras regulares;
- d) equação do trapézio de Gauss.

Quando se dispõem das coordenadas cartesianas da área a ser dividida, uma das soluções possíveis é através da montagem de um sistema de equações utilizando-se a fórmula de Gauss onde a área é conhecida e as coordenadas do ponto de divisa são incógnitas. Detalhes sobre os demais métodos podem ser consultados em Stanque (2007, p.81-88).

2.11.1 Divisão de área pela solução do sistema de equações montado a partir da fórmula da área do trapézio segundo Gauss

São conhecidas as coordenadas cartesianas dos pontos delimitadores do perímetro da área representada pela Figura 2-29. Desejando-se dividi-la em duas glebas, inicialmente é necessário definir a área de cada uma delas, bem como, as coordenadas do ponto inicial da linha divisória. As coordenadas cartesianas do ponto final da linha divisória, denominado ponto de divisa (P_d), podem ser calculadas pela solução do sistema de equações montado a partir da fórmula da área do trapézio segundo Gauss.

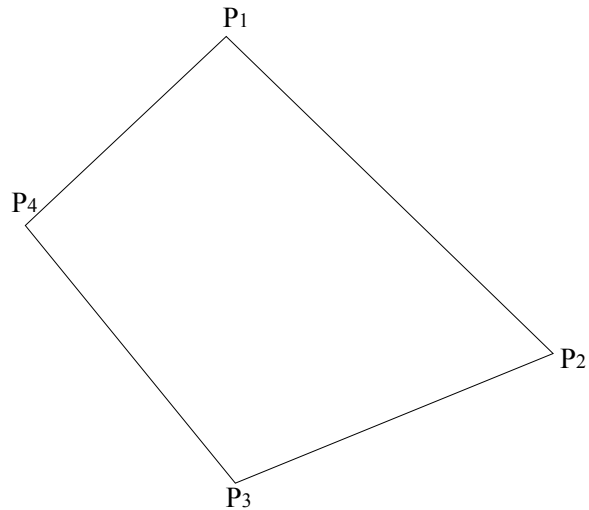


Figura 2-29- Área a ser dividida

Assim, considerando-se que o ponto inicial da linha divisória é para fins de exemplo o ponto P_1 e a área total deve ser dividida em duas glebas de área S_1 e S_2 conforme a Figura 2-30.

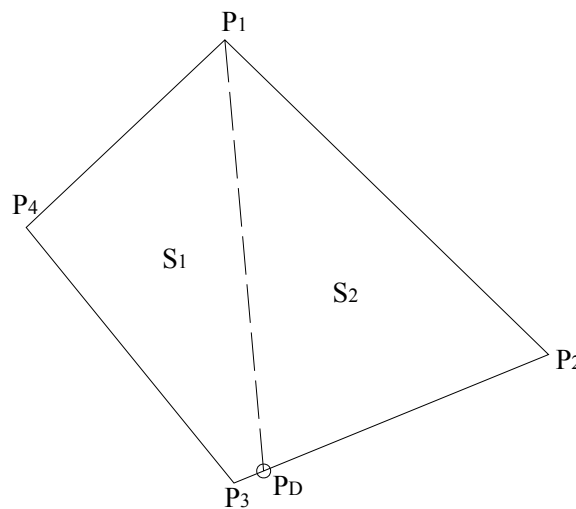


Figura 2-30- Área total dividida em duas glebas

Para cada gleba monta-se uma equação da área utilizando a fórmula da área do trapézio segundo Gauss:

$$2S_1 = y_{P_1} \cdot x_{PD} + y_{PD} \cdot x_{P_3} + y_{P_3} \cdot x_{P_4} + y_{P_4} \cdot x_{P_1} - x_{P_1} \cdot y_{PD} - x_{PD} \cdot y_{P_3} - x_{P_3} \cdot y_{P_4} - x_{P_4} \cdot y_{P_1}$$

$$2S_2 = y_{P_1} \cdot x_{P_2} + y_{P_2} \cdot x_{PD} + y_{PD} \cdot x_{P_1} - x_{P_1} \cdot y_{P_2} - x_{P_2} \cdot y_{PD} - x_{PD} \cdot y_{P_1}$$

Sendo incógnitas apenas x_{PD} e y_{PD} monta-se o sistema de equações:

$$y_{P_1} \cdot x_{PD} + y_{PD} \cdot x_{P_3} - x_{P_1} \cdot y_{PD} - x_{PD} \cdot y_{P_3} = 2S_1 - y_{P_3} \cdot x_{P_4} - y_{P_4} \cdot x_{P_1} + x_{P_3} \cdot y_{P_4} + x_{P_4} \cdot y_{P_1}$$

$$y_{P_2} \cdot x_{PD} + y_{PD} \cdot x_{P_1} - x_{P_2} \cdot y_{PD} - x_{PD} \cdot y_{P_1} = 2S_2 - y_{P_1} \cdot x_{P_2} + x_{P_1} \cdot y_{P_2}$$

Que na forma matricial pode ser expresso por:

$$\begin{bmatrix} y_{P1} - y_{P3} & x_{P3} - x_{P1} \\ y_{P2} - y_{P1} & x_{P1} - x_{P2} \end{bmatrix}_{2 \times 2} \cdot \begin{bmatrix} x_{PD} \\ y_{PD} \end{bmatrix}_{2 \times 1} = \begin{bmatrix} 2S_1 - y_{P3} \cdot x_{P4} - y_{P4} \cdot x_{P1} + x_{P3} \cdot y_{P4} + x_{P4} \cdot y_{P1} \\ 2S_2 - y_{P1} \cdot x_{P2} + x_{P1} \cdot y_{P2} \end{bmatrix}_{2 \times 1}$$

Considerando:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} y_{P1} - y_{P3} & x_{P3} - x_{P1} \\ y_{P2} - y_{P1} & x_{P1} - x_{P2} \end{bmatrix}_{2 \times 2}$$

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_{PD} \\ y_{PD} \end{bmatrix}_{2 \times 1}$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2S_1 - y_{P3} \cdot x_{P4} - y_{P4} \cdot x_{P1} + x_{P3} \cdot y_{P4} + x_{P4} \cdot y_{P1} \\ 2S_2 - y_{P1} \cdot x_{P2} + x_{P1} \cdot y_{P2} \end{bmatrix}_{2 \times 1}$$

Têm-se: $\mathbf{A}_{2 \times 2} \cdot \mathbf{X}_{2 \times 1} = \mathbf{B}_{2 \times 1}$

Logo:

$$\mathbf{X}_{2 \times 1} = \mathbf{A}_{2 \times 2}^{-1} \cdot \mathbf{B}_{2 \times 1} \quad (2.51)$$

3 METODOLOGIA

O trabalho consistiu em uma parte experimental, onde realizou-se um levantamento de pontos por meio de rastreamento de satélites da constelação GPS e por topografia convencional com utilização de estação total topográfica (taquímetro eletrônico). A partir destes levantamentos foram calculadas as coordenadas dos pontos levantados no plano topográfico local, na superfície do elipsóide e no plano da projeção cartográfica UTM.

Através de dois pontos de partida cujo as coordenadas geodésicas eram conhecidas por meio de rastreamento GPS realizou-se o transporte geodésico de coordenadas pela formulação de Puissant. As mesmas coordenadas geodésicas elipsóidicas dos pontos de partida foram convertidas em cartesianas geocêntricas e utilizando-se a transformação ortogonal de coordenadas estas foram transportadas para os demais pontos com as medidas topográficas. As coordenadas geodésicas transportadas por Puissant e convertidas a partir de cartesianas geocêntricas obtidas pela transformação ortogonal foram comparadas com coordenadas de referência obtidas por rastreamento GPS, determinando-se a diferença oriunda dos métodos.

A área delimitada pelos pontos levantados foi calculada e dividida utilizando-se coordenadas dos pontos no plano topográfico local e coordenadas geodésicas convertidas para planas no plano da projeção cartográfica UTM, determinando-se as diferenças.

O local do experimento de campo foi escolhido considerando sua posição em relação ao fuso da projeção cartográfica UTM, buscando-se um local próximo a borda, onde as deformações do fator de escala (k) são próximas das máximas evidenciando assim os efeitos destas deformações. Assim foi escolhida uma área no Campus da Universidade Federal de Santa Maria, localizada no bairro Camobi em Santa Maria-RS, próximo a borda do fuso 22.

Para realizar as medições componentes do experimento de campo foram escolhidos e materializados cinco pontos considerados vértices delimitadores da área experimental. Figura 3-1.

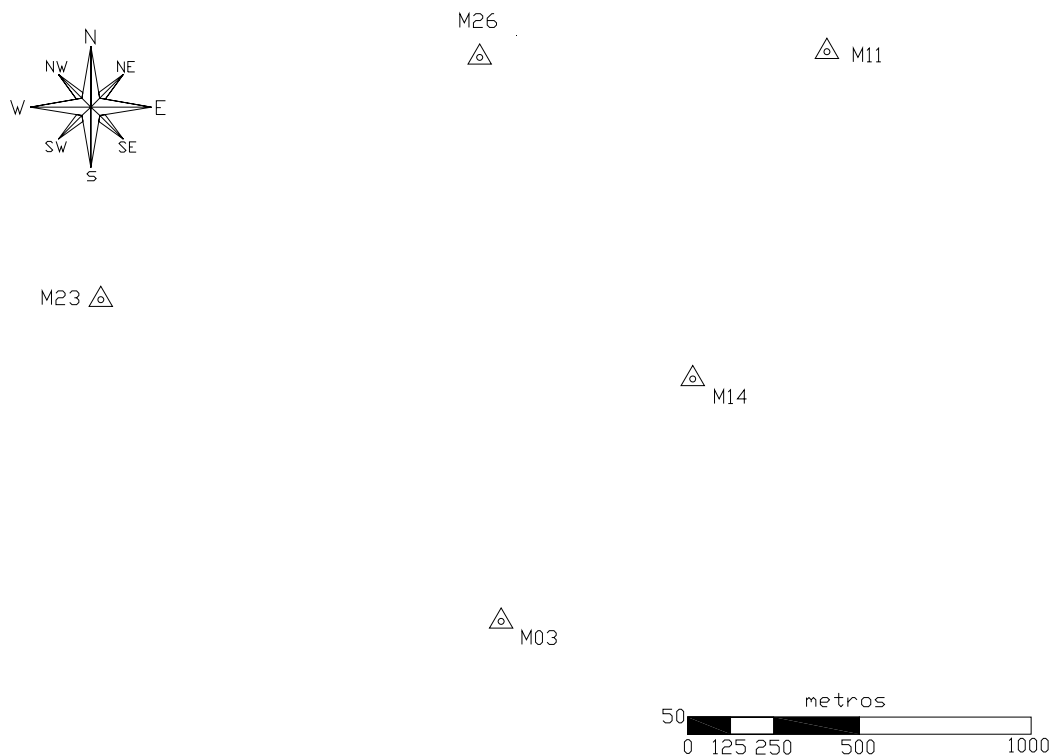


Figura 3-1-Disposição geométrica e nomenclatura dos pontos experimentais.

3.1.1 Coordenadas de referência

Para determinar a posição de referência dos pontos experimentais, estes foram rastreados com receptor GPS dupla frequência, Marca Leica modelo 1200 por tempos não inferiores a duas horas. Os arquivos brutos foram convertidos para o formato Rinex e as coordenadas geográficas elipsóidicas dos pontos foram estimadas com a utilização do programa computacional Ashtech Solutions versão 2.70. O método de posicionamento utilizado foi o relativo estático, sendo utilizado como base a Estação SMAR componente da Rede Brasileira de Monitoramento Contínuo (RBMC) cuja antena situa-se no campus universitário da UFSM, sobre o prédio 42. Os arquivos de observação das datas coincidentes com as do rastreamento dos pontos foram obtidos por download a partir do site www.ibge.gov.br. O processamento apresentou solução fixa a todos os pontos, sendo que o relatório encontra-se no anexo 1.

As coordenadas geográficas elipsóidicas dos pontos experimentais obtidas pelos outros métodos em estudo foram comparadas com as obtidas por GPS, que foram tomadas como referência.

3.1.2 Levantamento topográfico

Para realizar o transporte geodésico de coordenadas, a transformação ortogonal e determinar a posição planimétrica dos pontos em relação ao plano topográfico local, realizou-se o levantamento topográfico. As medições foram efetuadas com uma estação total eletrônica marca Trimble modelo 3305 com precisão angular de 5'' e linear de 2mm + 2ppm.

3.1.2.1 Sistema de coordenadas utilizado no levantamento topográfico

O sistema de coordenadas utilizado no levantamento topográfico foi um sistema semelhante ao sistema de coordenadas polares astronômicas topocêntricas (2.2.1.4), excetuando-se que neste os eixos x e y situam-se no plano horizontal, com o x apontado na direção leste e o y tangente ao meridiano do ponto apontado para a direção Norte, formando um sistema dextrógiro.

Considerando-se \vec{r}_i e \vec{p}_i os vetores das coordenadas cartesianas topocêntricas e polares topocêntricas de um ponto i respectivamente e \vec{r}_0 o vetor das coordenadas cartesianas topocêntricas pólo do sistema de coordenadas polares, a relação entre eles é definida por 3.1.

$$\vec{r}_i = \vec{r}_0 + \vec{p}_i; \quad (3.1)$$

Então:

$$\begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{bmatrix}_{3 \times 1} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix}_{3 \times 1} + Di \begin{bmatrix} \text{sen } Az_i \cdot \text{sen } Z_i \\ \text{cos } Az_i \cdot \text{sen } Z_i \\ \text{cos } Z_i \end{bmatrix}_{3 \times 1}; \quad (3.2)$$

Onde:

Di é a distância inclinada do pólo ao ponto visado;

Z_i é o ângulo zenital lido quando visado o prisma sobre o ponto.

3.1.2.2 Transformação das coordenadas geográficas elipsóidicas dos pontos levantados em coordenadas planas no sistema de projeção cartográfica UTM

O processo de transformação de coordenadas geográficas elipsóidicas em coordenadas planas no sistema de projeção UTM é descrito no item 2.9.7. Neste trabalho utilizou-se o programa computacional TCGEO, que é recomendado e distribuído gratuitamente pelo IBGE, sendo o download disponível em www.ibge.gov.br.

3.1.3 Cálculo da área total

Calculou-se a área total delimitada pelos levantados tanto no plano topográfico quanto no cartográfico, em ambos os casos inicialmente utilizou-se a expressão 2.50.

3.1.3.1 Área cartográfica corrigida em função do fator de escala e fator de elevação

Buscando através da área cartográfica calcular uma aproximação de sua correspondente topográfica, utilizou-se a equação 2.50, sendo que o fator de escala foi calculado por 2.40 para as coordenadas médias da área. Outra correção realizada foi em multiplicar a área pelo fator de elevação uma vez que na projeção cartográfica ela é dada na altura do modelo. Essa correção utilizou a equação 2.49.

3.1.3.2 Comparação entre as áreas calculadas em função das coordenadas cartesianas topocêntricas e coordenadas no plano da projeção UTM, com e sem correção de escala e elevação

A comparação foi feita entre a área topográfica (S), área cartográfica (S^c) sem correções e área cartográfica com correções de escala e elevação (S_{topo}).

3.1.4 Comparação entre o transporte geodésico de coordenadas pela formulação de Puissant e a transformação ortogonal

O transporte geodésico de coordenadas utilizando-se a formulação de Puissant consiste dos chamados problemas inverso e direto, que são descritos no item 2.3.1.1 e 2.3.1.2 respectivamente. Embora existam algumas desvantagens em relação ao seu uso, esse método é o método tradicional de transporte geodésico de coordenadas. Neste trabalho além de ter sido utilizado para calcular o azimute geodésico do alinhamento formado pelos pontos M26 e M11 também foi utilizado como parâmetro de comparação e validação do método de transformação ortogonal de coordenadas descrita no item 2.7.

As coordenadas geográficas elipsóidicas do polo (M26), foram transportadas para os pontos visados M14, M03 e M23. O objetivo foi de calcular a diferença de posição entre esse método e o método de transformação ortogonal. O transporte pela formulação de Puissant foi realizado utilizando-se uma planilha de cálculos no programa Excel, formulada pelo professor Doutor Eno Darci Saatkamp. A transformação ortogonal de coordenadas cartesianas topocêntricas em cartesianas geocêntricas foi realizada no programa Matlab 6.5, em uma rotina formulada pelo mesmo autor, as coordenadas cartesianas geocentricas obtidas no processo foram convertidas em geográficas elipsóidicas utilizando-se o programa TCGEO.

As diferenças de posição planimétrica em metros entre as coordenadas obtidas pelos diferentes métodos foram calculadas pela equação 3.3 e são apresentadas na tabela 12.

$$\varepsilon_p = \sqrt{(\Delta\varphi^{rad} \cdot R_0)^2 + (\Delta\lambda^{rad} \cdot R_0 \cdot \cos\varphi)^2} \quad (3.3)$$

3.1.5 Divisão da área

3.1.5.1 Divisão da área topográfica

A área topográfica total levantada foi dividida em três glebas de áreas iguais.

As divisões utilizando-se as coordenadas cartesianas topocêntricas foram calculadas utilizando-se um sistema de equações montado a partir da equação 2.50, onde as áreas são conhecidas e as coordenadas cartesianas topocêntricas de PD são incógnitas.

3.1.5.2 Divisão da área cartográfica

A área cartográfica foi dividida da mesma forma que a área topográfica, ou seja, a área total foi dividida em três glebas de áreas iguais. Utilizou-se as coordenadas planas no sistema de projeção UTM, diminuídas das constantes 234.000m e 6.707.000m em E e N respectivamente para facilitar os cálculos.

3.1.5.3 Comparação da diferença de posição planimétrica em função das coordenadas geográficas dos pontos de divisão

Esta comparação foi realizada utilizando-se as coordenadas geográficas elipsóidicas dos pontos de divisão no plano cartográfico e topográfico. Estas coordenadas foram obtidas pela

transformação das coordenadas planas na projeção UTM e das cartesianas geocêntricas obtidas no processo de transformação ortogonal em geográficas utilizando-se o TCGEO.

4 RESULTADOS E DISCUSSÕES

4.1 Rastreamento dos pontos por GPS e estimativa das coordenadas elipsóidicas

As coordenadas no formato geográficas elipsóidicas referenciadas ao Sistema de Referência Geocêntrico para as Américas (SIRGAS), realização 2004 e as correspondentes cartesianas elipsóidicas geocêntricas são apresentadas com os respectivos desvios-padrão na

Tabela 1.

Tabela 1-Coordenadas dos estimadas através do processamento do ratreio com receptor GPS.

Ponto	Latitude	$\hat{\sigma}$ (m)	Longitude	$\hat{\sigma}$ (m)	Altitude elipsoidal	$\hat{\sigma}$ (m)
M11	-29° 43' 09,95819"	0,004	-53° 44' 15,23613"	0,004	118,968	0,006
M14	-29° 43' 42,75710"	0,004	-53° 44' 16,74495"	0,004	123,363	0,008
M03	-29° 43' 18,02129"	0,006	-53° 44' 43,93875"	0,006	104,767	0,010
M23	-29° 43' 39,46360"	0,004	-53° 45' 17,71891"	0,006	114,976	0,012
M26	-29° 43' 21,90767"	0,004	-53° 44' 50,99218"	0,006	116,603	0,010
	X [m]		Y [m]		Z [m]	
M11	3279098,864		-4470091,873		-3143460,584	
M14	3278772,242		-4469715,174		-3144339,813	
M03	3277854,902		-4469700,106		-3145273,473	
M23	3277476,232		-4470718,901		-3144247,588	
M26	3278214,837		-4470511,476		-3143778,952	

4.2 Medidas obtidas no levantamento topográfico

A estação foi instalada sobre o ponto denominado M26, a partir do qual visou-se um prisma centrado sobre os pontos denominados M11, M14, M03 e M23, conforme mostra a Figura 4-1.

Para cada ponto realizou-se três séries conjugadas de leituras nas posições direta e inversa da luneta, medindo-se as coordenadas polares topocêntricas: distância inclinada, direção horizontal e o ângulo zenital. Desta medição resultou um conjunto de medidas apresentadas na Tabela-2, com seus respectivos desvios-padrão

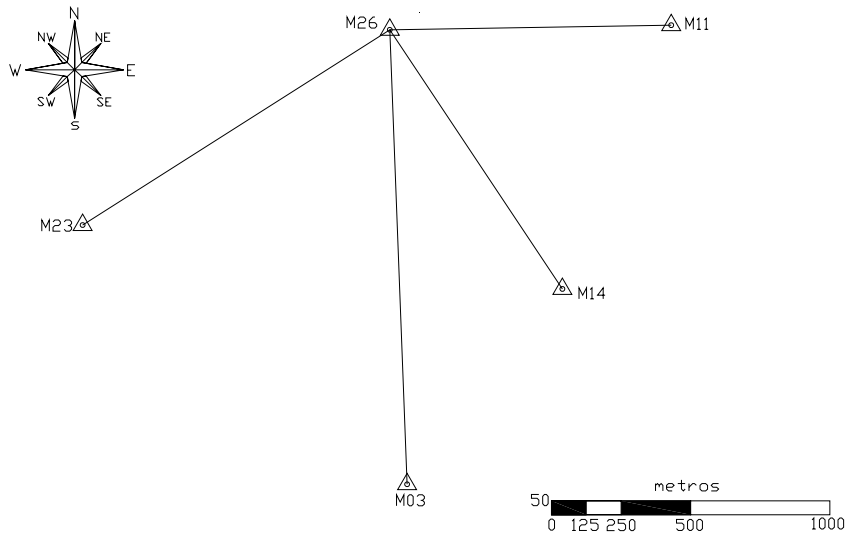


Figura 4-1-Pontos visados com estação total a partir do ponto M26.

Tabela 2-Medidas obtidas pelo levantamento geométrico.

Ponto Visado	Direções Horizontais	$\hat{\sigma}$ (")	Ângulo Zenital	$\hat{\sigma}$ (")	Distância inclinada	$\hat{\sigma}$ (mm)
M11	00° 00' 6,67"	5,01	89° 49' 43,67"	7,77	1029,074	0,00
M14	55° 51' 8,67"	12,06	89° 37' 5,67"	7,29	1122,213	0,29
M03	104° 41' 29,83"	12,71	90° 22' 19,33"	2,36	1738,198	0,76
M23	164° 00' 22,17"	17,51	90° 05' 10,67"	6,53	898,983	0,76

4.3 Azimutes calculados e suas incertezas

Os Azimutes calculados e suas incertezas obtidas através da aplicação da propagação das covariâncias nas observações estão apresentados na Tabela 3.

Tabela 3- azimutes e respectivas incertezas.

Alinhamento	Azimute	Incertezas	
		$\hat{\sigma}^2$ (")	$\hat{\sigma}$ (")
M26→M11	69° 03' 7 32817"	25,10	5,01
M26→M14	124° 54' 9 32817"	170,54	13,05
M26→M03	173° 44' 30 49484"	186,64	13,66
M26→M23	233° 03' 22 82817"	331,70	18,21

4.4 Distâncias horizontais calculadas e suas incertezas

As distâncias horizontais calculadas são apresentadas na Tabela 4.

Tabela 4-Distâncias horizontais e suas incertezas

Alinhamento	Distância horizontal (Dh_i)	$\hat{\sigma}^2$	$\hat{\sigma}$
	[m]	[mm]	[mm]
M26,M11	1029,069	0,04	0,21
M26,M14	1122,188	0,23	0,48
M26,M3	1738,161	0,05	0,23
M26,M23	898,982	0,01	0,08

4.5 Coordenadas cartesianas topocêntricas dos pontos levantados

As coordenadas cartesianas topocêntricas dos pontos são apresentadas na Tabela 5.

Tabela 5-Coordenadas cartesianas topocêntricas dos pontos levantados

Ponto	Coordenadas Cartesianas Topocêntricas	
	x [m]	y [m]
M26	0,000000	0,000000
M11	961,053120	367,912644
M14	920,335903	-642,097098
M03	189,475332	-1727,803062
M23	-718,490459	-540,314503

4.5.1 Transformação das coordenadas geográficas elipsóidicas dos pontos levantados em coordenadas planas no sistema de projeção cartográfica UTM

As coordenadas geográficas dos pontos levantados convertidas em planas no sistema de projeção UTM são apresentadas na Tabela 6:

Tabela 6- Coordenadas planas no sistema de projeção UTM

Ponto	Coordenadas planas na projeção UTM		
	North [m]	East [m]	Meridiano Central
M26	6708774,342	234224,555	-51
M11	6709165,175	235176,987	-51
M14	6708154,114	235160,379	-51
M03	6707050,728	234455,257	-51
M23	6708216,555	233519,013	-51

4.6 Cálculo da área total

4.6.1 A área topográfica delimitada pelos pontos levantados

A área topográfica (S) é apresentada Tabela 7.

Tabela 7-Área topográfica delimitada pelos pontos levantados.

$y_i x_{i+1}$	x_i	y_i	$x_i y_{i+1}$
[m ²]	[m]	[m]	[m ²]
	0,000	0,000	
0,000	961,053	367,913	0,000
338603,216	920,336	-642,097	-617089,419
-121661,561	189,475	-1727,803	-1590159,191
1241410,015	-718,490	-540,315	-102376,270
0,000	0,000	0,000	0,000

$$S = \frac{1458351,669 - (-2309624,880)}{2} = 1883988,275 \text{ m}^2$$

4.6.2 Área cartográfica delimitada pelos pontos levantados

A área cartográfica (S^c) foi calculada em função das coordenadas planas no sistema de projeção UTM, sendo apresentada na Tabela 8.

Tabela 8- Área cartográfica

$y_i x_{i+1}$	x_i	y_i	$x_i y_{i+1}$
[m ²]	[m]	[m]	[m ²]
	6708774,342	234224,555	
1571451227535,870	6709165,175	235176,987	1577749336214,470
1577603472862,170	6708154,114	235160,379	1577729825326,600
1577232591168,710	6707050,728	234455,257	1572761996793,480
1572776636414,180	6708216,555	233519,013	1566223866143,490
1566626362783,560	6708774,342	234224,555	1571229037438,510

$$S^c = \frac{786569290764,500 - 7865694061916,540}{2} = 1885576,024 \text{ m}^2$$

4.6.3 Área cartográfica corrigida em função do fator de escala e fator de elevação

As correções são apresentadas na Tabela 9.

Tabela 9-Área cartográfica corrigida.

Fator de escala médio (k)	Área Cartográfica (S^c) [m ²]	Fator de correção em função da elevação (C_h)	Área topográfica aproximada (S_{topo}) [m ²]
1,000466008	1885576,024	1,000018177	1883854,107

4.6.4 Comparação entre as áreas calculadas em função das coordenadas cartesianas topocêntricas e coordenadas no plano da projeção UTM, com e sem correção de escala e elevação

A comparação foi feita entre a área topográfica (S), área cartográfica (S^c) sem correções e área cartográfica com correções de escala e elevação (S_{topo}). é apresentada na tabela 10.

Tabela 10-Comparação entre a área topográfica, área cartográfica sem correções e área cartográfica com correções de escala e elevação.

Área Topográfica(S) [m ²]	Área Cartográfica (S^c) [m ²]	Área topográfica aproximada (S_{topo}) [m ²]	Diferenças	
			$S - S^c$ (%)	$S - S_{topo}$ (%)
1883988,275	1885576,024	1883854,107	-0,084276	0,007121

4.6.5 Comparação entre o transporte geodésico de coordenadas pela formulação de Puissant e a transformação ortogonal

As coordenadas com os respectivos métodos encontram-se na Tabela 11.

Tabela 11-Coordenadas transportadas por Puissant e por Transformação Ortogonal.

Ponto	Transporte por Puissant		Transformação ortogonal	
	Latitude	Longitude	Latitude	Longitude
M11	-29 ⁰ 43'09,95786"	-53 ⁰ 44'15,23513"	-29 ⁰ 43'09,95785"	-53 ⁰ 44'15,23512"
M14	-29 ⁰ 43'42,75942"	-53 ⁰ 44'16,74697"	-29 ⁰ 43'42,75938"	-53 ⁰ 44'16,74701"
M03	-29 ⁰ 44'18,02033"	-53 ⁰ 44'43,94122"	-29 ⁰ 44'18,02044"	-53 ⁰ 44'43,94120"
M23	-29 ⁰ 43'39,45437"	-53 ⁰ 45'17,72659"	-29 ⁰ 43'39,45438"	-53 ⁰ 45'17,72660"

Tabela 12-Diferenças planimétricas entre as coordenadas obtidas pelos diferentes métodos.

Diferenças Planimétricas									
Ponto	Referência - Puissant			Referência - T. Ortogonal			Puissant - T. Ortogonal		
	Latitude	Longitude	Erro de posição relativa (ϵ_p)	Latitude	Longitude	Erro de posição relativa (ϵ_p)	Latitude	Longitude	Erro de posição relativa (ϵ_p)
	["]	["]	[m]	["]	["]	[m]	["]	["]	[m]
	-0,00232	-0,00202	0,08946	-0,00228	-0,00206	0,08923	0,00004	-0,00004	0,00155
	0,00096	-0,00247	0,07231	0,00085	-0,00245	0,07054	-0,00011	0,00002	0,00341
	0,00923	-0,00768	0,35056	0,00922	-0,00769	0,35054	-0,00001	-0,00001	0,00051

As maiores diferenças entre o transporte realizado por Puissant e a Transformação Ortogonal foram de 3,41mm.

4.6.6 Divisão da área

4.6.6.1 Divisão da área topográfica

A área topográfica total levantada foi dividida em três glebas de áreas iguais. As linhas divisórias iniciaram-se no ponto M26, sendo que os pontos finais de cada linha divisória, chamados de PD1 e PD2 conforme mostra a figura 38, foram determinados conforme segue:

Determinou-se as áreas requeridas para cada gleba:

$$S1= 627996,092\text{m}^2$$

$$S2=627996,092\text{m}^2$$

$$S3= 627996,092\text{m}^2$$

A Figura 4-2 representada a área topográfica dividida em 3 glebas.

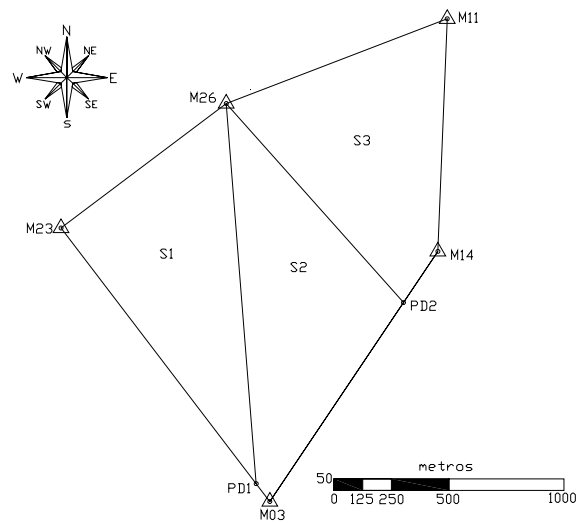


Figura 4-2- Área topográfica dividida em 3 glebas.

Gleba 1

A determinação de PD1 segue:

Primeira equação do sistema de equações é apresentada na tabela 13.

Tabela 13- Primeira equação do sistema de equações.

$y_i x_{i+1}$	x_i	y_i	$x_i y_{i+1}$
[m ²]	[m]	[m]	[m ²]
0,000	0,000	0,000	
0,000	xPD1	yPD1	0,000
-718,490 xPD1	-718,490	-540,315	-540,315 xPD1
0,000	0,000	0,000	0,000
- 718,490yPD1 + 540,315xPD1 = 1255992,184			

A segunda equação do sistema de equações é apresentada na tabela 14.

Tabela 14- Segunda equação do sistema de equações.

$y_i x_{i+1}$	x_i	y_i	$x_i y_{i+1}$
[m ²]	[m]	[m]	[m ²]
	0,000	0,000	
0,000	961,053	367,913	0,000
338603,216	920,336	-642,097	-617089,419
-121661,561	189,475	-1727,803	-1590159,191
-1727,803 xPD1	xPD1	yPD1	189,475 yPD1
0,000	0,000	0,000	0,000
-1727,803xPD1 – 189,475yPD1 = 87794,102			

Escrevendo o sistema na forma matricial têm-se:

$$A \cdot X = B$$

$$\begin{bmatrix} 540,315 & -718,490 \\ -1727,803 & -189,475 \end{bmatrix}_{2 \times 2} (m) \cdot \begin{bmatrix} x_{PD1} \\ y_{PD1} \end{bmatrix}_{2 \times 1} (m) = \begin{bmatrix} 1255992,184 \\ 4936174,631 \end{bmatrix}_{2 \times 1} (m)$$

Assim:

$$X = A^{-1} \cdot B$$

$$\begin{bmatrix} x_{PD1} \\ y_{PD1} \end{bmatrix}_{2 \times 1} (m) = \begin{bmatrix} 130,155 \\ -1650,221 \end{bmatrix}_{2 \times 1} (m)$$

Verificação:

A verificação do sistema de equações é apresentada na tabela 15.

Tabela 15- Verificação do sistema de equações.

$y_i x_{i+1}$	x_i	y_i	$x_i y_{i+1}$
[m ²]	[m]	[m]	[m ²]
	0,000	0,000	
0,000	130,155	-1650,221	0,000
1185668,043	-718,490	-540,315	-70324,634
0,000	0,000	0,000	0,000
$S_1 = 627996,092 \text{ m}^2$			

Gleba3

A determinação de PD2 segue:

Primeira equação do sistema de equações é apresentada na tabela 16.

Tabela 16- Primeira equação do sistema de equações.

$y_i x_{i+1}$	x_i	y_i	$x_i y_{i+1}$
[m ²]	[m]	[m]	[m ²]
	0,000	0,000	
0,000	961,053	367,913	0,000
338603,216	920,336	-642,097	-617089,419
-642,097 xPD2	xPD2	yPD2	920,336 yPD2
0,000	0,000	0,000	0,000
$- 642,097xPD2 - 920,336yPD2 = 300299,548$			

Segunda equação do sistema de equações (equação da área do trapézio de Gauss para as coordenadas de PD e os pontos que delimitam o restante da área) apresenta-se na tabela 17.

Tabela 17- Primeira equação do sistema de equações.

$y_i x_{i+1}$	x_i	y_i	$x_i y_{i+1}$
[m ²]	[m]	[m]	[m ²]
	0,000	0,000	
0,000	xPD2	yPD2	0
189,475 yPD2	189,475	-1727,803	-1727,803 xPD2
1241410,015	-718,490	-540,315	-102376,27
0,000	0,000	0,000	0
$1727,803xPD2 + 189,475yPD2 = 1168198,082$			

Escrevendo o sistema na forma matricial têm-se:

$$A \cdot X = B$$

$$\begin{bmatrix} -642,097 & -920,336 \\ 1727,803 & 189,275 \end{bmatrix}_{2 \times 2} (m) \cdot \begin{bmatrix} x_{PD2} \\ y_{PD2} \end{bmatrix}_{2 \times 1} (m) = \begin{bmatrix} 300299,548 \\ 1168198,082 \end{bmatrix}_{2 \times 1} (m)$$

Assim:

$$X = A^{-1} \cdot B$$

$$\begin{bmatrix} x_{PD2} \\ y_{PD2} \end{bmatrix}_{2 \times 1} (m) = \begin{bmatrix} 770,879 \\ -864,118 \end{bmatrix}_{2 \times 1} (m)$$

Verificação:

A verificação do sistema de equações é apresentada na tabela 18.

Tabela 18- Verificação do sistema de equações.

$y_i x_{i+1}$	x_i	y_i	$x_i y_{i+1}$
[m ²]	[m]	[m]	[m ²]
0,000	0,000	0,000	0,000
338603,216	961,053	367,913	0,000
-494979,169	920,336	-642,097	-617089,419
0,000	770,879	-864,118	-795278,820
0,000	0,000	0,000	0,000
$S_3 = 627996,092 \text{ m}^2$			

4.6.6.2 Divisão da área cartográfica

A área cartográfica foi dividida da mesma forma que a área topográfica, ou seja, a área total foi dividida em três glebas de áreas iguais. Utilizou-se as coordenadas planas no sistema de projeção UTM apresentadas na Tabela, diminuídas das constantes 234000m e 6707000m em E e N respectivamente para facilitar os cálculos.

Gleba 1

Primeira equação do sistema de equações para determinar PD1 é apresentada na tabela 19.

Tabela 19- Primeira equação do sistema de equações.

$y_i x_{i+1}$	x_i	y_i	$x_i y_{i+1}$
[m ²]	[m]	[m]	[m ²]
	224,555	1774,342	
1774,342 E'PD1	E'PD1	N'PD1	224,555N'PD1
-480,987 N'PD1	-480,987	1216,555	1216,555 E'PD1
273183,508	224,555	1774,342	-853435,436
$557,787 \text{ E'PD1} - 705,542 \text{ N'PD1} = 130431,739$			

A segunda equação do sistema de equações para as coordenadas de PD1 é apresentada na tabela 20

Tabela 20-Segunda equação do sistema de equações.

$y_i x_{i+1}$	x_i	y_i	$x_i y_{i+1}$
[m ²]	[m]	[m]	[m ²]
	224,555	1774,342	
2088377,468	1176,987	2165,175	486200,872
2512423,601	1160,379	1154,114	1358377,175
525418,477	455,257	50,728	58863,706
50,728 E'PD1	E'PD1	N'PD1	455,257 N'PD1
224,555 N'PD1	224,555	1774,342	1774,342E'PD1
-1723,614E'PD1 – 230,702N'PD1 = -708676,428			

Escrevendo o sistema na forma matricial têm-se:

$$A \cdot X = B$$

$$\begin{bmatrix} 557,787 & -705,542 \\ -1723,614 & -230,702 \end{bmatrix}_{2 \times 2} (m) \cdot \begin{bmatrix} E'_{PD1} \\ N'_{PD1} \end{bmatrix}_{2 \times 1} (m) = \begin{bmatrix} 130431,739 \\ -708676,428 \end{bmatrix}_{2 \times 1} (m)$$

Assim:

$$X = A^{-1} \cdot B$$

$$\begin{bmatrix} E'_{PD1} \\ N'_{PD1} \end{bmatrix}_{2 \times 1} (m) = \begin{bmatrix} 394,189 \\ 126,771 \end{bmatrix}_{2 \times 1} (m)$$

Adicionadas as constantes que haviam sido extraídas, têm-se as coordenadas planas E e N tem-se as coordenadas de PD1:

$$E = E' + 234000 = 234394,189 \text{ m}$$

$$N = N' + 6707000 \text{ m} = 6707126,771 \text{ m}$$

Verificação:

A verificação do sistema de equações é apresentada na tabela 21.

Tabela 21- Verificação do sistema de equações.

$y_i x_{i+1}$	x_i	y_i	$x_i y_{i+1}$
[m ²]	[m]	[m]	[m ²]
	224,555	1774,342	
699426,648	394,189	126,771	28466,956
-60974,977	-480,987	1216,555	479552,976
273183,508	224,555	1774,342	-853435,436

$$S_1 = 628525,341 \text{ m}^2$$

Primeira equação para determinar PD2 é apresentada na tabela 22.

Tabela 22- Primeira equação do sistema de equações.

$y_i x_{i+1}$	x_i	y_i	$x_i y_{i+1}$
[m ²]	[m]	[m]	[m ²]
	224,555	1774,342	
2088377,468	1176,987	2165,175	486200,872
2512423,601	1160,379	1154,114	1358377,175
1154,114 EPD2	EPD2	NPD2	1160,379 NPD2
224,555 NPD2	224,555	1774,342	1774,342EPD2
- 620,228 E'PD2 - 935,824N'PD2 = -1499172,340			

Segunda equação para determinar PD2 é apresentada na tabela 23.

Tabela 23- Primeira equação do sistema de equações.

$y_i x_{i+1}$	x_i	y_i	$x_i y_{i+1}$
[m ²]	[m]	[m]	[m ²]
	224,555	1774,342	
1774,342 E'PD2	E'PD2	N'PD2	224,555N'PD2
455,257 N'PD2	455,257	50,728	50,728E'PD2
-24399,509	-480,987	1216,555	553845,180
273183,508	224,555	1774,342	-853435,436
1723,614E'PD2 + 230,702N'PD2 = 1965727,110			

Escrevendo o sistema na forma matricial têm-se:

$$A \cdot X = B$$

$$\begin{bmatrix} -620,228 & -935,824 \\ 1723,614 & +230,702 \end{bmatrix}_{2 \times 2} (m) \cdot \begin{bmatrix} E'_{PD2} \\ N'_{PD2} \end{bmatrix}_{2 \times 1} (m) = \begin{bmatrix} -1499172,340 \\ 1965727,110 \end{bmatrix}_{2 \times 1} (m)$$

Assim:

$$X = A^{-1} \cdot B$$

$$\begin{bmatrix} E'_{PD2} \\ N'_{PD2} \end{bmatrix}_{2 \times 1} (m) = \begin{bmatrix} 1016,192 \\ 928,488 \end{bmatrix}_{2 \times 1} (m)$$

Adicionadas as constantes que haviam sido extraídas, têm-se as coordenadas planas E e N de PD2:

$$E = E' + 234000 = 235016,192 \text{ m}$$

$$N = N' + 6707000 \text{ m} = 6707928,488 \text{ m}$$

Verificação:

A verificação do sistema de equações é apresentada na tabela 24.

Tabela 24- Verificação do sistema de equações.

$y_i x_{i+1}$	x_i	y_i	$x_i y_{i+1}$
[m ²]	[m]	[m]	[m ²]
	224,555	1774,342	
2088377,468	1176,987	2165,175	486200,872
2512423,601	1160,379	1154,114	1358377,175
1172801,598	1016,192	928,488	1077398,169
208496,660	224,555	1774,342	1803072,429
$S_3 = 628525,341 \text{ m}^2$			

4.7 Transformação das coordenadas cartesianas topocêntricas dos pontos de divisão da área topográfica em coordenadas polares topocêntricas.

As coordenadas cartesianas topocêntricas dos pontos de divisão da área topográfica calculadas no item 4.6.6 e as correspondentes coordenadas polares topocêntricas estão apresentadas na tabela 25.

Tabela 25-Coordenadas cartesianas topocêntricas e as correspondentes coordenadas polares topocêntricas.

Ponto (Pi)	Coordenadas Cartesianas Topocêntricas		Coordenadas Polares Topocêntricas	
	x [m]	y [m]	Azimute Geodésico Ag M26→Pi	Distância Horizontal (Dh) [m]
PD1	130,155	-1650,221	175°29'25,24408"	1655,346
PD2	770,879	-864,118	138°15'49,94017"	1157,996

4.8 Transformação das coordenadas polares topocêntricas dos pontos de divisa em coordenadas cartesianas geocêntricas pela transformação ortogonal

A presente transformação foi realizada no programa computacional Matlab 6.5 utilizando uma rotina desenvolvida por Saatkamp (2008), sendo que as coordenadas transformadas são apresentadas na tabela 26.

Tabela 26- Coordenadas Cartesianas Geocêntricas.

Ponto	X [m]	Y [m]	Z [m]
PD1	3277835,583	-4469774,186	-3145211,691
PD2	3278582,753	-4469709,601	-3144529,012

4.9 Comparação entre as coordenadas planas no sistema de projeção UTM obtidas na divisão da área cartográfica e na divisão da área topográfica

Tabela 27- Comparação entre as coordenadas planas no sistema de projeção UTM e na divisão da área topográfica

Ponto	Obtidas na divisão da área cartográfica		Obtidas pela transformação das coordenadas topocêntricas		Diferença	
	E [m]	N [m]	E [m]	N [m]	E [m]	N [m]
PD1	234394,189	6707126,771	234394,013	6707126,939	0,176	-0,168
PD2	235016,192	6707928,488	235016,130	6707928,426	0,062	0,062

4.10 Comparação entre as coordenadas geográficas elipsóidicas dos pontos de divisa obtidos na divisão da área cartográfica e na divisão da área topográfica

A comparação pode ser realizada por meio da Tabela 28.

Tabela 28- Coordenadas geográficas dos pontos de divisa obtidos na divisão da área cartográfica e na divisão da área topográfica.

Pontos	Coordenadas obtidas da divisão cartográfica convertidas em geográficas		Coordenadas geográficas correspondentes as cartesianas geocêntricas obtidas pela transformação ortogonal das polares topocêntricas	
	Latitude	Longitude	Latitude	Longitude
PD1	-29°44'15,50078"	-53°44'46,14874"	-29°44'15,50637"	-53°44'46,14234"
PD2	-29°43'49,97021"	-53°44'22,3076"	-29°43'49,96826"	-53°44'22,30525"

4.11 Cálculo da diferença planimétrica de posição relativa

A diferença planimétrica de posição relativa entre os pontos de divisa obtidos pela divisão e cartográfica e topográfica foram calculados por 3.3 em função das coordenadas geográficas elipsóidicas são apresentados na Tabela 29.

Tabela 29- Coordenadas geográficas dos pontos de divisa obtidos na divisão da área cartográfica e na divisão da área topográfica.

Pontos	Diferenças		
	Latitude	Longitude	Diferença de posição planimétrica
	["]	["]	[m]
	-		
PD1	0,00559	0,00640	0,24270
PD2	0,00195	0,00235	0,08691

5 CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES

Concluiu-se pelos resultados obtidos no presente trabalho que a conversão de coordenadas topocêntricas em geocêntricas utilizando-se a transformação ortogonal possui precisão equivalente ao método tradicional de transporte geodésico de coordenadas (Puissant). Este método ainda traz como vantagem a menor quantidade de cálculos e a possibilidade de realização do processo inverso, ou seja, a transformação de coordenadas geocêntricas em topocêntricas.

Foi possível observar que os valores referentes a áreas quando calculadas em relação a coordenadas associadas a modelos ou superfícies diferentes apresentam variação. O cálculo e divisão de áreas utilizando coordenadas planas no plano da projeção cartográfica UTM, mesmo com correções de fator de escala e elevação diferiu da área no plano topográfico local, embora tenha se aproximado dela quando efetuadas essas correções.

Pontos de divisão de áreas georreferenciadas não devem ser implantados no plano topográfico local utilizando-se coordenadas planas no plano da projeção cartográfica UTM, pois existe diferença de posição entre estas e as coordenadas topográficas. A solução mais adequada pela precisão e facilidade para cálculo e divisão de áreas georreferenciadas a partir de coordenadas geocêntricas é a conversão destas para topocêntricas pela transformação ortogonal de coordenadas.

A transformação ortogonal de coordenadas constitui-se de uma solução prática e rápida tanto para o georreferenciamento de pontos oriundos de levantamentos topográficos, bem como para implantação de pontos georreferenciados no plano topográfico local, podendo ser inclusive facilmente implementado em estações totais topográficas.

Por fim, para que se possa quantificar com maior certeza as diferenças de valores de área e posição de pontos de divisão de área calculados em relação a coordenadas associadas a modelos de representação diferentes é preciso analisar a influencia de outros fatores. Portanto, recomenda-se o estudo da influência das incertezas das medidas, bem como, a realização de levantamentos experimentais utilizando-se a transformação ortogonal em distâncias maiores do que as utilizadas neste trabalho.

6 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

AGUIRRE, A. J.; MELLO FILHO, J. A. de. **Introdução à Cartografia**. Santa Maria: UFSM, 2007, 78 p. (Caderno didático)

ABNT - Associação Brasileira de Normas Técnicas. **NBR 13133**: Execução de Levantamento Topográfico. Rio de Janeiro, 1994. 35 p.

BLITZKON, D.; MATOS, A. C. C., A evolução dos referenciais usados em geodésia: A era moderna. **Boletim Ciências e Geodésia**, Curitiba, v. 8, n 1, p. 3-16, mar. 2002.

CINTRA, J. P.; SILVA, M. J. **Teodoro Sampaio e o início da Cartografia Sistemática no Brasil**: Relatório PTR, São Paulo, 2001.

DALMOLIN, Q. **Ajustamento por mínimos quadrados**. 2. ed. Curitiba: Curso de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas, 2004, 175p.

DIN. **Vermessungswesen**: Normen. 6. Auflage. Berlin: Beuth, 1998. (DIN: Deutsches Institut fur Normung).

FENNA, D. **Cartographic Science**: A Compendium of Map Projections, with Derivations. New York: CRC Press Taylor & Francis Group, 2007. 491 p.

FREITAS, S. R. C. et al. Avaliação da Compatibilidade dos Sistemas Geodésicos de Referência no Brasil. **Boletim Ciências e Geodésia**, Curitiba, v. 10, n 2, p. 225-239, jul-dez 2004.

GEMAEL, C. **Introdução a geodésia geométrica**. 2. ed. Curitiba: UFPR, 1987, 145p. (Apostila do Curso de Pós-graduação em Ciências Geodésicas da UFPR, 1ª e 2ª Partes)

GEMAEL, C., **Introdução ao ajustamento de observações**: aplicações geodésicas. Curitiba: Ed. UFPR, 1994, 319p.

HECK, B. **Rechenverfahren und Auswertemodelle der Landsvermessung**: Klassische und moderne Methoden. 2., neubearbeitete und erweiterte Auflage. Heidelberg: H Wichmann, 1995.

IBGE. Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística. Rio de Janeiro, 1995. Disponível em <<http://www.ibge.gov.br/home/geociencias/cartografia/docs.shtm>>. Acesso em: 20 out. 2008.

MCCARTHY, D. D., **IERS conventions**. Paris: Observatoire de Paris, 1996. (IERS Technical Note 21)

MONICO, J. F. G., **Posicionamento pelo NAVSTAR-GPS**: descrição, fundamentos e aplicações. São Paulo: Ed. UNESP, 2000.

MONMONIER, M. **Mapping It Out**. Chicago: University of Chicago., 1993, 301 p.

MORAES, C. V. **Aprimoramento da concepção do modelo geodésico para a caracterização de extremas no espaço geométrico**. 2001. 277 f. Tese (Doutorado em Ciências Geodésicas) - Universidade Federal do Paraná, Curitiba.

MORAES, C. V. **Topografia**. Santa Maria: UFSM, 2004. (Caderno didático).

PEARSON, F. **Map projections: theory and Applications**. New York: CRC Press, 1990. 372 p.

RAMOS, D. **Geodésia na prática**. São Paulo: Araraquara Informática, 1999, 220p.

RICHARDUS, P.; ADLER, R. K. **Map projections: for geodesists, cartographers and geographers**. Amsterdam: North-Holland Publishing Company, 1972, 174p.

SAATKAMP, E.D. **Elementos de geodésia**. Santa Maria: UFSM, 2006, 57p. (Apostila. Curso de Pós-Graduação em Geomática da UFSM)

SAATKAMP, E. D.; FARRET, J. C.; Transformação ortogonal entre coordenadas no sistema cartesiano local e coordenadas no sistema cartesiano geocêntrico: a solução adequada para o georreferenciamento de pontos no plano topográfico e vice-versa. In: SIMPÓSIO BRASILEIRO DE CIÊNCIAS GEODÉSICAS E TECNOLOGIAS DA GEOINFORMAÇÃO, 2, 2008, Recife. **Anais...** Recife, 2008, 1 CD-ROM.

SCHWAB, S. H. S. **Marés gravimétricas:** influências ambientais e calibração instrumental: estudos na estação Curitiba. 1999. 280 f. Tese (Doutorado em Geofísica) – Universidade Federal do Paraná, Curitiba.

STANQUE, E. L. **Divisão de polígonos irregulares do elipsóide biaxial na superfície da projeção azimutal equivalente de Lambert.** 2007. 128 f. Dissertação (Mestrado em Geomática) – Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria.

STEINBRUCH, A.; WINTERLE, P. **Geometria Analítica.** 2 ed. São Paulo: McGraw-Hill, 1987. 292 p.

TORGE, W. **Geodesy.** 3rd ed. Berlin: W de Gruyter, 2001. 416 p.

VUOLO, J. H., **Fundamento da teoria dos erros.** 2. ed. ver e ampl. São Paulo: E. Blucher, 1996, 249p.

ZAKATOV, P. S. **Curso de geodésia superior.** Madrid: Rubiños, 1997. 635 p.

7 ANEXOS

Anexo 1-Relatório do processamento dos pontos rastreados

Posições das Estacoes PONTOS DISSERTAÇÃO

Sistema de coord. horizontal: SIRGAS2000,04 **Data:** 11/26/08
Sistema de altitude: Alt. Elips. **Arq. projeto:** PONTOS DISSERTAÇÃO.spr
Precisao horizontal desejada: 0,050m + 1ppm
Precisao vertical desejada: 0,100m + 2ppm
Nível de confianca: Erro 95%
Unidade de medida linear: metros

<u>Est.</u>	<u>Desc. da Estacao</u>	95% Estado		<u>Estado</u>
		<u>Posicao</u>	<u>erro</u>	
1	M03_	Lat. 29° 44' 18,02129" S Lon. 53° 44' 43,93875" O Elv. 104,767	0,006 0,006 0,010	Processado
2	SMAR	Lat. 29° 43' 08,12600" S Lon. 53° 42' 59,73530" O Elv. 113,171	0,000 0,000 0,000	Fixo Processado Fixo Fixo
3	M11_	Lat. 29° 43' 09,95819" S Lon. 53° 44' 15,23613" O Elv. 118,968	0,004 0,004 0,006	Processado
4	M14_	Lat. 29° 43' 42,75710" S Lon. 53° 44' 16,74495" O Elv. 123,363	0,004 0,004 0,008	Processado
5	0023	Lat. 29° 43' 39,46360" S Lon. 53° 45' 17,71891" O Elv. 114,976	0,004 0,006 0,012	Processado
6	M26_	Lat. 29° 43' 21,90767" S Lon. 53° 44' 50,99218" O Elv. 116,603	0,004 0,006 0,010	Processado

<u>Est.</u>	<u>Desc. da Estacao</u>	Fator
		<u>Elevacao</u>
1	M03_	0,99998355
2	SMAR	0,99998223
3	M11_	0,99998132
4	M14_	0,99998063
5	0023	0,99998194
6	M26_	0,99998169