

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA MARIA
CENTRO DE CIÊNCIAS RURAIS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM GEOMÁTICA**

**A MODELAGEM TRIDIMENSIONAL NO
TRATAMENTO DO PROBLEMA DIRETO DA
GEODÉSIA**

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Daniel Carlos Cheron Pimentel

Santa Maria, RS, Brasil

2012

A MODELAGEM TRIDIMENSIONAL NO TRATAMENTO DO PROBLEMA DIRETO DA GEODÉSIA

Daniel Carlos Cheron Pimentel

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado do Programa de Pós-Graduação em Geomática, Área de Concentração Tecnologia da Geoinformação, da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM, RS), como requisito parcial para a obtenção do grau de **Mestre em Geomática.**

Orientador: Prof. Dr. Gelson Lauro Dal’Forno

Santa Maria, RS, Brasil

2012

Ficha catalográfica elaborada através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Central da UFSM, com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

Pimentel, Daniel Carlos Cheron

A modelagem tridimensional no tratamento do problema direto da geodésia / Daniel Carlos Cheron Pimentel.-2012.

78 p.; 30cm

Orientador: Gelson Lauro Dal'Forno

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Santa Maria, Centro de Ciências Rurais, Programa de Pós-Graduação em Geomática, RS, 2012

1. Geodésia 2. Topografia 3. Problema Geodésico Direto 4. Modelagem 3D I. Dal'Forno, Gelson Lauro II. Título.

**Universidade Federal de Santa Maria
Centro de Ciências Rurais
Programa de Pós-Graduação em Geomática**

**A Comissão Examinadora, abaixo assinada,
aprova a Dissertação de Mestrado**

**A MODELAGEM TRIDIMENSIONAL NO TRATAMENTO DO
PROBLEMA DIRETO DA GEODÉSIA**

elaborada por
Daniel Carlos Cheron Pimentel

como requisito parcial para obtenção do grau de
Mestre em Geomática

COMISSÃO EXAMINADORA:

Gelson Lauro Dal'Forno, Dr.
(Presidente/Orientador)

José Américo de Mello Filho, Dr. (UFSM)

Rudiney Soares Pereira, Dr. (UFSM)

Santa Maria, 29 de Março de 2012.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, agradeço a Deus pelas graças alcançadas no percorrer de meus caminhos. À minha família, em especial, ao meu pai Dalci Nogueira Pimentel pelos estímulos, orientações e auxílios prestados nesta jornada.

Ao Programa de Pós-Graduação em Geomática da Universidade Federal de Santa Maria, seus professores e funcionários. Em especial ao Prof. Dr. Gelson Lauro Dal'Forno orientador e amigo, ao professor Argentino José Aguirre pela coorientação e colaborações na elaboração desta dissertação.

À empresa Topographia e seu funcionário Engenheiro Agrônomo Fernando Luiz Hillebrand, pelo empréstimo de equipamentos e assessoria técnica para os levantamentos de campo.

Aos amigos, Leandro Casagrande e Marco Ivan Rodrigues Sampaio pelo incentivo e auxílio no decorrer do curso e a todos os demais amigos e colegas, que conheci e convivi nesse período. Cada um deu sua inestimável contribuição nessa etapa de minha vida. Assim, a melhor forma de agradecer é retribuir com minha amizade.

RESUMO

Dissertação de Mestrado
Programa de Pós-Graduação em Geomática
Universidade Federal de Santa Maria

A MODELAGEM TRIDIMENSIONAL NO TRATAMENTO DO PROBLEMA DIRETO DA GEODÉSIA

AUTOR: DANIEL CARLOS CHERON PIMENTEL

ORIENTADOR: GELSON LAURO DAL'FORNO

Data e Local da Defesa: Santa Maria, 29 de março de 2012.

Para a transformação de coordenadas locais em globais, e vice-versa, pode-se empregar a solução do Problema Geodésico Direto (PGD) por Puissant ou a metodologia da modelagem 3D. Neste trabalho, ambas as metodologias foram aplicadas no transporte geodésico das coordenadas de uma poligonal topográfica, enquadrada nas linhas de base geodésica AB e CD, considerando o ponto B como origem dos sistemas. As coordenadas geodésicas dos pontos de apoio (A, B, C e D) foram determinadas no levantamento com GPS (Global Positioning System) e as observações topográficas foram obtidas no levantamento topográfico. A partir das coordenadas locais (v , u , w) da poligonal foram calculadas as componentes topográficas (Δv , Δu , Δw) e transformadas em componentes geodésicas (ΔX , ΔY , ΔZ) por meio da modelagem 3D; calculadas as coordenadas geodésicas cartesianas (X , Y , Z) que posteriormente foram transformadas em coordenadas geodésicas (φ , λ , h). Na solução do PGD, utilizaram-se as observações topográficas corrigidas e reduzidas ao elipsóide. A comparação dos resultados obtidos pela aplicação das duas metodologias, aqui propostas, apresenta um desvio-padrão (σ) de $\pm 7,31 \times 10^{-4}$ segundos para a latitude (φ) e um desvio-padrão (σ) de $\pm 3,71 \times 10^{-4}$ segundos para a longitude (λ). O que resulta em uma incerteza de $\pm 0,080$ m, ao nível de significância de 95 %, entre a posição média de um ponto determinada pela modelagem 3D e pelo PGD. A alteração da origem do sistema não acarretou um erro relativo superior ao limite estabelecido pela NBR 13.133, nas distâncias entre os pontos extremos da poligonal. Estes resultados possibilitam, neste caso, a substituição da metodologia do PGD pela modelagem 3D e a escolha qualquer ponto da base de dados espaciais como origem do sistema. O modelo funcional 3D realiza a conversão das coordenadas topográficas em geodésicas com precisão equivalente ao método tradicional de Puissant, com quantidade menor de cálculos e possibilita a realização do processo inverso. Esta metodologia pode ser utilizada para trabalhos de georreferenciamento e mapeamento, cadastro urbano e rural e atualização cartográfica, entre outros, em que se possa admitir a incerteza encontrada. Os dados sugerem mais avaliações do modelo funcional e a introdução do modelo estocástico para avaliações da qualidade dos dados e do sistema.

Palavras-chave: Geodésia. Topografia. Problema Geodésico Direto. Modelagem 3D.

ABSTRACT

Dissertation
Graduation Program in Geomatics
Federal University of Santa Maria

THE TRIDIMENSIONAL MODELING IN PROCESSING OF DIRECT GEODETIC PROBLEM

AUTHOR: DANIEL CARLOS CHERON PIMENTEL

ADVISER: GELSON LAURO DAL'FORNO

Date and Place of Defence: Santa Maria, March 29th, 2012.

For the transformation of the local coordinates in the global coordinates, and contrariwise, it can be employed the traditional method of Puissant or the 3D modelling. In this paper, both approaches were applied in the geodetic transport of the coordinates of a topographic polygonal, framed in the geodetic base lines AB and CD, considering the point B as the origin of the systems. The geodetic coordinates of supporting points (A, B, C and D) which were determined with GPS (Global Positioning System) and the observations which were obtained in topographic search. From the local coordinates (v, u, w) the polygon was calculated: the topographic components (Δv , Δu , Δw) and 3D modeling was transformed in geodesic components (ΔX , ΔY , ΔZ); the geodetic cartesian coordinates (X, Y, Z) which were subsequently transformed in geodetic coordinates (φ , λ , h). In the solution of the Geodetic Direct Problem (PGD) were used the topographic observations, corrected and reduced to the ellipsoid. The results comparison obtained by applying the two methodologies, suggested here, shows a standard deviation (σ) of $\pm 7,31 \times 10^{-4}$ for the latitude (φ) and a standard deviation (σ) of $\pm 3,71 \times 10^{-4}$ for the longitude (λ). This result in an uncertainty of $\pm 0,080$ meters, in 95% significance level between the average position of a point determined by the 3D modeling and PGD. The change in the origin of the system did not cause a relative error above the limit established by the NBR 13.133 (Brazilian Norm 13.133), at the distances between the extreme points of the polygon. These results allow, in this case, the replacement of the PGD methodology for the 3D modeling and choose any point in the spatial database for origin of the systems. The 3D function model performs the conversion of the topographic coordinates in geodetic coordinates with equivalent accuracy to the traditional method of Puissant, with fewer calculations and enables reverse process. This methodology can be used for georeferencing and mapping work, rural and urban cadastre, cartographic updating, among others, in which uncertainty found can be accepted. The data suggest more evaluations of the functional model and the introduction of the stochastic model, for evaluating the quality of data and system.

Keywords: Geodesy. Topography. Direct Geodetic Problem. 3D Modelling.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 - Disciplinas relacionadas ao modelo global de dados espaciais.....	18
Figura 2 - Representação de um elipsóide de revolução.....	20
Figura 3 - Representação das superfícies de referência da Terra.....	22
Figura 4 - Representação da ondulação geoidal (N), da altitude ortométrica (H) e da altura elipsoidal (h).....	23
Figura 5 - Representação do sistema de coordenadas retangulares fixas no centro de massa da Terra (ECEF).....	28
Figura 6 - Representação das coordenadas curvilíneas elipsoidais (φ , λ) e altura elipsoidal (h) do ponto P.....	29
Figura 7 - Representação do sistema de coordenadas curvilíneas esféricas do ponto P.....	29
Figura 8 - Representação das coordenadas elipsoidais cartesianas ortogonais (X, Y, Z) e geodésicas (φ , λ , h).....	30
Figura 9 - Representação do sistema de coordenadas astronômicas (Φ , Λ) e do sistema de coordenadas astronômicas locais (v, u, w) do ponto P.....	31
Figura 10 - Representação do sistema de coordenadas geodésicas (φ , λ) e do sistema de coordenadas geodésicas local (v, u, w) do ponto P.....	32
Figura 11 - Representação dos sistemas de coordenadas terrestres – sistemas de coordenadas geodésicas (φ , λ , h), sistema de coordenadas geodésicas cartesianas (X, Y, Z) e o sistema de coordenadas geodésicas locais (v, u, w) do ponto P.....	32
Figura 12 - Representação do desvio da vertical (i) no ponto P.....	35
Figura 13 - Representação das reduções às distâncias observadas.....	37
Figura 14 - Representação do Problema Geodésico Direto (PGD).....	38
Figura 15 - Representação do Problema Geodésico Inverso (PGI).....	40
Figura 16 - Diagrama das relações entre os sistemas de coordenadas.....	42
Figura 17 - Representação de planos topográficos conforme a origem adotada.....	43
Figura 18 - Diferenças cartesianas entre coordenadas geodésicas de dois pontos (P1 e P2).....	44
Figura 19 - Representação das reduções de distância quando do emprego do PTL.....	50
Figura 20 - Poligonal teórica enquadrada.....	52

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 -	Coordenadas geodésicas dos pontos A, B, C e D, com seu respectivo desvio-padrão.....	57
Tabela 2 -	Coordenadas geodésicas cartesianas (X, Y, Z) dos pontos A, B, C e D.....	57
Tabela 3 -	Coordenadas topográficas cartesianas (v, u, w) dos pontos A, B, C e D.....	58
Tabela 4 -	Observações topográficas obtidas do levantamento da poligonal enquadrada.....	58
Tabela 5 -	Coordenadas topográficas da poligonal enquadrada.....	59
Tabela 6 -	Diferenças de coordenadas geodésicas (ΔX , ΔY , ΔZ) obtidas a partir das diferenças de coordenadas topográficas (Δv , Δu , Δw) da poligonal.....	60
Tabela 7 -	Coordenadas geodésicas cartesianas da poligonal enquadrada.....	61
Tabela 8 -	Coordenadas geodésicas curvilíneas da poligonal.....	62
Tabela 9 -	Comparação das coordenadas geodésicas curvilíneas do ponto C.....	63
Tabela 10 -	Observações topográficas reduzidas ao elipsóide de referência.....	64
Tabela 11 -	Coordenadas geodésicas curvilíneas da poligonal calculadas por meio do PGD.....	65
Tabela 12 -	Latitudes geodésicas (φ°) dos pontos da poligonal calculadas por modelagem 3D e por Puissant.....	66
Tabela 13 -	Longitudes geodésicas (λ°) dos pontos da poligonal calculadas por modelagem 3D e por Puissant.....	67
Tabela 14 -	Diferença entre os valores de distância entre os pontos B e C, conforme a origem adota para o PTL.....	68

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

3D	- Tridimensional
ABNT	- Associação Brasileira de Normas Técnicas
CGED	- Coordenação de Geodésia
DMA	- Defence and Mapping Agency
ECEF	- Earth Centered / Earth Fixed
EPUSP	- Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
GNSS	- Global Navigation Satellite System
GPS	- Global Positioning System
GSDM	- Global Spatial Data Model
IBGE	- Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística
WGS84	- World Geodetic System 1984
LPS	- Local Positioning System
MED	- Medidor Eletrônico de Distância
MMQ	- Método dos Mínimos Quadrados
NBR	- Norma Brasileira
NGS	- National Geodetic Survey
PGD	- Problema Geodésico Direto
PGI	- Problema Geodésico Inverso
ppm	- Parte por milhão
PTL	- Plano Topográfico Local
RBMC	- Rede Brasileira de Monitoramento Contínuo
SAD-69	- South American Datum 1969
SAL	- Sistema Astronômico Local
SGL	- Sistema Geodésico Local
SIRGAS	- Sistema de Referência Geocêntrico para as Américas
STL	- Sistema Topográfico Local
UTM	- Universal Transversa de Mercator

LISTA DE SÍMBOLOS

a	- semieixo maior do elipsóide
Ag	- azimuth geodésico
Az	- azimuth topográfico
b	- semieixo menor do elipsóide
c	- fator de elevação
e	- primeira excentricidade
e'	- segunda excentricidade
f	- achatamento
h	- altura elipsoidal ou geométrica
H	- altitude ortométrica ou altitude
i	- desvio da vertical
N	- ondulação geoidal
X, Y, Z	- coordenadas geodésicas cartesianas
X_0, Y_0, Z_0	- coordenadas geodésicas cartesianas do ponto de origem
Λ	- longitude astronômica
λ	- longitude geodésica
Φ	- latitude astronômica
φ	- latitude geodésica
r, β, α	- coordenadas curvilíneas esféricas
γ	- convergência meridiana
v, u, w	- coordenadas astronômicas locais
u_0, v_0, w_0	- coordenadas astronômicas locais do ponto de origem
φ, λ, h	- coordenadas geodésicas
Φ, Λ	- coordenadas astronômicas
ξ	- componente meridiana
η	- primeiro vertical
S	- geodésica ou distância elipsoidal
$\Delta v, \Delta u, \Delta w$	- diferença de coordenadas locais
$\Delta X, \Delta Y, \Delta Z$	- diferença de coordenadas globais
σ	- desvio-padrão
ξ	- erro relativo

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	13
1.1.	Caracterização do problema	14
1.2.	Justificativa	15
1.3.	Objetivos	15
1.4.	Estrutura da dissertação	15
2	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	17
2.1.	Modelagem tridimensional de dados espaciais	17
2.2.	Superfícies de referência da Terra	19
2.2.1.	Modelo esférico	19
2.2.2.	Modelo elipsoidal	20
2.2.3.	Modelo real da Terra e o modelo geoidal	21
2.2.4.	Modelo plano	24
2.2.4.1.	Projeções cartográficas	24
2.2.4.2.	Plano topográfico local	25
2.3.	Sistemas de coordenadas	26
2.3.1.	Sistema de coordenadas cartesianas elipsoidais	27
2.3.2.	Sistema de coordenadas geodésicas	28
2.3.3.	Sistema de coordenadas local	30
2.4.	Transporte de coordenadas no elipsóide	33
2.4.1.	Reduções aplicadas às observações topográficas	33
2.4.1.1.	Reduções dos ângulos	33
2.4.1.1.1.	Ângulos medidos	34
2.4.1.1.2.	Convergência meridiana	34
2.4.1.2.	Desvio da vertical	35
2.3.1.3.	Redução da distância	36
2.3.2.	Problema geodésico direto	38
2.3.3.	Problema geodésico inverso	39
2.5.	Modelo matemático tridimensional	40
2.4.1.	Conversão do sistema cartesiano global para o sistema cartesiano local	45
2.4.2.	Transporte do sistema geodésico cartesiano tridimensional para o sistema geodésico local pela matriz de rotação e translação	48
2.4.3.	Transformação de coordenadas geodésicas em coordenadas plano-retangulares no sistema topográfico local conforme a NBR 14.166	48
3.	MATERIAIS E MÉTODOS	51
3.1.	Levantamento geodésico	51
3.2.	Levantamento topográfico	52
3.3.	Transformação das coordenadas	53
4.	RESULTADOS E DISCUSSÃO	57
4.1.	Coordenadas geodésicas e topográficas dos pontos A, B, C e D	57
4.2.	Observações topográficas	58
4.3.	Cálculo das coordenadas geodésicas (φ , λ , h) dos pontos da poligonal por meio da modelagem 3D	60
4.4.	Cálculo das coordenadas geodésicas por meio do PGD	64
4.5.	Comparação dos valores das coordenadas geodésicas (φ , λ) obtidos pela modelagem 3D e pela solução do PGD por Puissant	66
4.6.	Comparação das distâncias topográficas com mudança da origem do plano topográfico	68

5.	CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES	70
6.	REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS	71
7.	APÊNDICES	74
	Apêndice A – Croqui da poligonal topográfica enquadrada.	75
8.	ANEXOS	77
	Anexo A – Relatório resumido do processamento GPS.....	78

1 INTRODUÇÃO

Nos últimos quarenta anos surgiram novas tecnologias nas áreas de Geodésia e Topografia que resultaram em ganho de tempo e qualidade na obtenção de posicionamento de pontos sobre/sob ou próximos à superfície da Terra.

Os sistemas de navegação por satélites, as estações totais e os laser-scanners, entre outros instrumentos, associados à grande evolução das técnicas computacionais revolucionaram a Geodésia e a Topografia.

O sistema GPS (*Global Positioning System*), e seus assemelhados, passam a empregar, para a representação da posição de pontos, um sistema em ambiente tridimensional. Dessa maneira o sistema cartesiano tridimensional (X, Y, Z), com origem no centro de massa da Terra, passa a ser o ideal para representar pontos georreferenciados. Sua grande vantagem é expressar, em um só sistema, a posição de qualquer ponto da Terra. Essa vantagem foi apresentada por Burkholder (1997, p. 02) quando sugeriu um Modelo Global de Dados Espaciais (GSDM – *Global Spatial Data Model*) que, segundo o autor:

é uma coleção de conceitos matemáticos e procedimentos que podem ser usados para coletar, organizar, processar, manipular e avaliar dados espaciais em três dimensões (3-D) mais eficientemente do que pode ser feito usando um modelo de mapeamento bidimensional combinado com uma elevação unidimensional.

Além de Burkholder, outros autores, tais como: Oliveira (2004), Jekeli (2006), Dal’Forno et al. (2008, 2009, 2010), Brum (2008), Monico (2008), têm utilizado esses dados em três dimensões para transformações entre os sistemas geodésicos e topográficos, a partir da aplicação de rotações e translações de sistemas ou transformação ortogonal. Esse modo de tratar os dados recebe também as denominações de modelagem geodésica tridimensional (modelagem 3-D) e modelo global.

A aplicação dessa metodologia permite que dados coletados no Plano Topográfico Local (PTL) sejam integrados, mais fácil e rapidamente, aos sistemas geodésicos, ou vice-versa, do que quando se aplica a metodologia proposta por Puissant ou assemelhadas.

Outra característica importante é a facilidade e a precisão que se obtém nas transformações de coordenadas geodésicas para topográficas, pois ela dispensa o

estabelecimento de um plano de altura média conforme estabelece a NBR 14.166/98.

Assim, a metodologia 3-D é a forma de manipular dados, com padronização global e compatível com sistemas modernos de medição. Apresenta, também, flexibilidade para os usuários, tanto na utilização dos dados espaciais como na possibilidade de discriminar a precisão dos mesmos. O modelo está bem definido e em uso, tendo como desafio sua organização e execução.

1.1. Caracterização do problema

Atualmente, o georreferenciamento de pontos está sendo obtido, tanto por Geodésia como por Topografia. Para a integração desses levantamentos topográficos e geodésicos, há a necessidade da conciliação entre os diferentes referenciais (geodésico e topográfico) em que são obtidas as observações.

Tradicionalmente as observações topográficas, oriundas do levantamento, (distâncias e ângulos planos) são reduzidas à superfície elipsoidal e, a partir desta, desenvolve-se o transporte de coordenadas pelo Problema Geodésico Direto (PGD). Do contrário, a distância geodésica ($S_{A,B}$) e o azimute geodésico ($Ag_{A,B}$) podem ser estimados pelo Problema Geodésico Inverso (PGI), quando se conhecem as coordenadas geodésicas dos pontos relacionados e, após, transportados para o referencial topográfico.

A transformação das coordenadas dos pontos entre o sistema geodésico e o plano topográfico, no Brasil, é regulamentada pela NBR 14.166/98, que estabelece a aplicação do formulário de Puissant. No entanto, a aplicação da metodologia que emprega a Matriz de Rotação e as Translações (modelagem 3D), mostra-se mais adequada e exata (DAL'FORNO et al., 2010, p. 07).

Uma das vantagens que a modelagem tridimensional apresenta sobre os outros métodos é a grande redução da capacidade computacional exigida para a execução das transformações entre sistemas.

1.2. Justificativa

Os levantamentos topográficos e geodésicos são as fontes básicas de dados para o desenvolvimento de projetos de engenharia e planejamento. Para tal tarefa há a necessidade de produtos cartográficos adequados às necessidades de cada empreendimento.

Nesse contexto, onde são utilizadas informações associadas a diferentes sistemas de referência, tem-se a necessidade de sua compatibilização, transformação e associação para que os dados e os produtos gerados possam ser representados e compreendidos corretamente.

Pesquisas sobre o impacto da integração de levantamentos e dados geodésicos com topográficos, suas transformações e representações são fundamentais para a expressão adequada dos dados requeridos no sistema que se propõe adotar.

1.3. Objetivos

Este trabalho tem como objetivo principal discutir e comparar o emprego da metodologia da modelagem tridimensional com a metodologia de Puissant, para a transformação de coordenadas no sistema topográfico para coordenadas no sistema geodésico, e vice-versa.

Como objetivo secundário, busca-se avaliar a influência, nos valores obtidos para as projeções, da mudança do ponto de origem do sistema, uma vez que essa alteração implica na mudança da posição do plano que será sempre perpendicular à normal no ponto.

1.4. Estrutura da dissertação

A dissertação está estruturada em seis capítulos, descritos a seguir:

Capítulo 1: Introdução

O primeiro capítulo, conforme foi visto, procura contextualizar o tema desenvolvido no trabalho, justificar a sua escolha e estabelecer os objetivos a serem alcançados. Descreve-se, ainda, a divisão estrutural do trabalho.

Capítulo 2: Referencial Bibliográfico

O segundo capítulo proporciona uma revisão dos conceitos e definições sobre as superfícies de referência, sobre os sistemas de coordenadas e suas transformações e sobre a modelagem geodésica tridimensional. Apresenta ainda um modelo matemático para a modelagem.

Capítulo 3: Material e Métodos

No terceiro capítulo são descritos os trabalhos de campo realizados, a instrumentação e os aparelhos empregados, a área de estudo e a metodologia empregada.

Capítulo 4: Resultados e Discussão

Nesse capítulo os resultados obtidos são apresentados, analisados e discutidos.

Capítulo 5: Conclusões e Recomendações

O quinto capítulo apresenta as conclusões da dissertação e indicações de algumas recomendações e sugestões para futuros trabalhos.

Capítulo 6: Referências Bibliográficas

Neste capítulo são apresentadas as referências bibliográficas utilizadas no desenvolvimento da pesquisa.

2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

2.1. Modelagem tridimensional de dados espaciais

Com relação à modelagem tridimensional (3D) Oliveira (2004, p.36) assim se manifesta:

Na modelagem geodésica 3D as observações clássicas de azimutes, direções ou ângulos horizontais, ângulos verticais e distâncias são expressas em função das coordenadas cartesianas locais – astronômicas ou geodésicas. Estas coordenadas locais, através de uma transformação entre sistemas de coordenadas, são expressas em função das diferenças entre as coordenadas cartesianas (ΔX , ΔY , ΔZ) e em função da latitude e longitude do ponto que define a origem do sistema local. A modelagem geodésica 3D utiliza as observações astronômicas sem reduzi-las à superfície matemática (elipsóide), o que proporciona uma redução considerável no tempo de processamento, sendo assim menor o esforço computacional exigido pelos sistemas de processamento (VINCENTY & BOWRING, 1978). Uma vez que estas observações já estão reduzidas ao elipsóide, elas também podem ser utilizadas pela modelagem 3D de maneira análoga às observações astronômicas (LEICK, 1994).

Por sua vez Burkholder (1997, p. 01), além do que se apresenta no capítulo 1 deste trabalho, ainda afirma: “Dados espaciais que representam posicionamento no mundo real são tridimensionais. Sistemas modernos de medições coletam dados em um ambiente tridimensional”.

A modelagem tridimensional (3D) de dados espaciais é o tratamento computacional, através de modelos matemáticos, de um banco de dados espaciais expresso em coordenadas cartesianas tridimensionais, no qual são realizadas as transformações e as análises dos dados.

A modelagem 3D cria um ambiente digital, no qual todos os valores de dados tridimensionais podem ser usados para uma infinidade de aplicações de alta qualidade, sem a necessidade do emprego das complexas equações encontradas na geodésia tradicional. A implantação do modelo estocástico no ambiente tridimensional cartesiano é mais rápida do que no sistema geodésico curvilíneo.

Os modelos, que proporcionam uma base universal simples, podem ser aplicados nos mais variados sistemas de coordenadas que são empregados no mundo todo. Oferecem para os usuários de diversas ciências a vantagem de

padronização dos dados espaciais, conforme pode ser verificada na figura 1 (BURKHOLDER, 1997, p. 02).

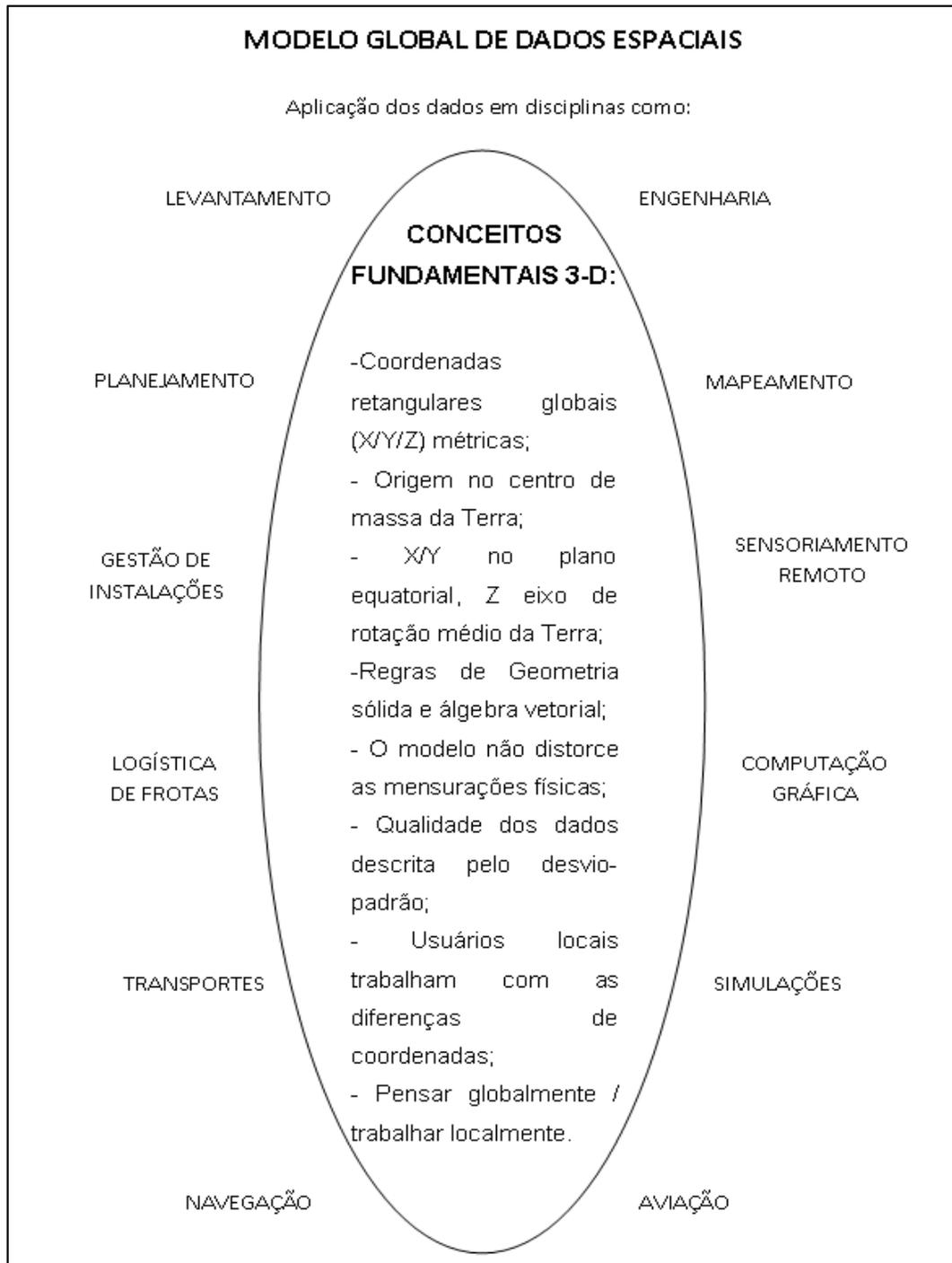


Figura 1 - Disciplinas relacionadas ao modelo global de dados espaciais.
Fonte: adaptado de Burkholder (1997, p. 04).

Na modelagem 3D estão incluídas equações da geodésia geométrica e regras da geometria sólida, relacionadas aos vários sistemas de coordenadas, e consistentes com o modelo geodésico tridimensional descrito por Leick (1990 & 1995 apud BURKHOLDER, 1997, p. 02). Deve-se observar que o modelo é estritamente espacial e não acomoda as mensurações gravimétricas, mas, presume que os efeitos da gravidade são acomodados antes da introdução dos dados espaciais no modelo.

Assim, a modelagem 3D exige o conhecimento das superfícies de referência, dos sistemas de coordenadas utilizados pela geodésia e pela topografia, bem como, suas interrelações e transformações matemáticas.

2.2. Superfícies de referência da Terra

Devido à complexidade da forma e dimensões da Terra, para a sua modelagem matemática, empregam-se em Geodésia e ciências afins, superfícies de referências.

Segundo Clynych (2006, p. 01), três são os modelos da Terra empregados: o modelo esférico, o modelo elipsoidal e o modelo real da Terra. Convém acrescentar aqui o modelo plano da Terra (cartográfico e topográfico).

2.2.1. Modelo esférico

O modelo esférico considera a Terra como uma esfera, desprezando o achatamento (f) nos pólos. Apesar de não ser rigoroso quanto à forma real da Terra, é muito bom para algumas aproximações. A utilização desse modelo simplifica os cálculos geodésicos. A esfera é a forma que minimiza a energia potencial da atração gravitacional entre os elementos de massa. A direção da gravidade é na direção do centro da Terra (CLYNCH, 2006, p. 01).

2.2.2. Modelo elipsoidal

O elipsóide de revolução é um sólido geométrico gerado pela rotação de uma elipse em torno de seu eixo menor. Apresenta uma forma geométrica suave e conveniente às operações geodésicas. É a forma geométrica adotada como superfície de referência para a Terra e sobre a qual são realizados os cálculos geodésicos (OLIVEIRA, 2004, p. 19).

O modelo elipsoidal é a melhor representação da Terra em função de seu movimento de rotação. Esse movimento gera, principalmente, a força centrífuga contrária à força de atração gravitacional da Terra. A interação dessas forças sobre os elementos de massa ocasionam deformações. Assim, a figura geométrica que melhor representa a forma terrestre é a de uma elipse girando em torno do eixo polar, dando origem ao elipsóide (CLYNCH, 2006, p. 01).

O elipsóide de revolução, ilustrado na figura 2, é gerado a partir da rotação de uma elipse em torno do seu semieixo menor (b). Sua forma e dimensões podem ser definidas pelo uso dos parâmetros semieixo maior (a) e pelo semieixo menor (b) ou semieixo maior (a) e o achatamento (f) (TORGE, 2001, p. 08).

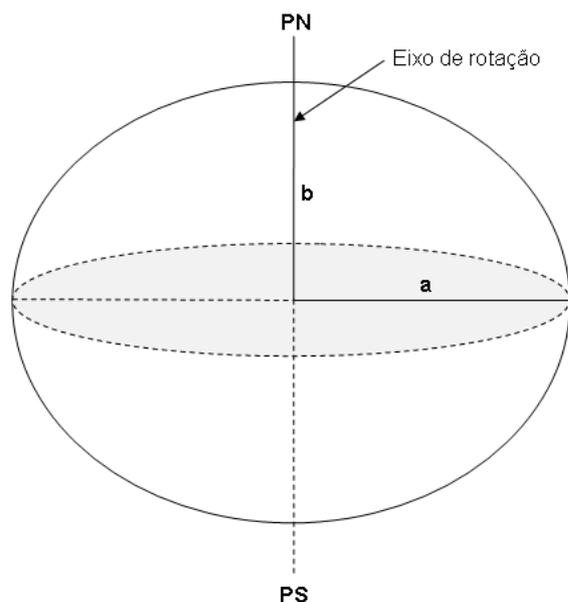


Figura 2 - Representação de um elipsóide de revolução.

Conforme Torge (2001, p. 92), o achatamento (f), a primeira excentricidade (e) e a segunda excentricidade (e') são determinados pelas equações 2.1, 2.2 e 2.3, respectivamente:

$$f = \frac{(a - b)}{a} \quad (2.1)$$

$$e = \frac{\sqrt{(a^2 - b^2)}}{a} \quad (2.2)$$

$$e' = \frac{\sqrt{(a^2 - b^2)}}{b} \quad (2.3)$$

Os elementos do elipsóide, descritos acima, são obtidos a partir do ajustamento e orientação deste em relação ao geóide, de maneira que o afastamento entre as duas superfícies não seja superior a 100 metros. O uso de sistemas elipsoidais equipotenciais tridimensionais, globais e locais, fornece uma aproximação dos sistemas correspondentes da Terra atual, e possibilita a separação entre a posição horizontal e a altura. O elipsóide equipotencial ou normal permite determinar, de uma maneira simples, as coordenadas da superfície elipsoidal, ou seja, a latitude geodésica (φ) e a longitude geodésica (λ) (TORGE, 2001, p. 93).

2.2.3. Modelo real da Terra e o modelo geoidal

O modelo real da Terra não é homogêneo. Há variações de massa, como os oceanos e as montanhas. Há, também, a não homogeneidade sob a superfície. Essa falta de homogeneidade causa variações no campo gravitacional. Assim, a direção da vertical é alterada de ponto para ponto (CLYNCH, 2006 p. 02).

A diferença entre a vertical elipsoidal e a vertical verdadeira é pequena. Andrade (2008, p. 08) determinou um desvio da vertical na ordem de 14,83 segundos no ponto de origem do Sistema Geodésico Local (SGL) e do Sistema Astronômico Local (SAL), em uma rede teste localizada no *campus* da Universidade Federal de Viçosa. No entanto, elas alteram a superfície fundamental que é usada para medições de altura. Por razões práticas elas são medidas a partir de uma superfície irregular em todos os lugares e perpendicular a vertical real. Existem

muitas dessas superfícies de potencial constante, chamadas superfícies de nível (geopes).

Denomina-se de geóide a superfície plana que representa o nível médio dos mares, em mar aberto. Essa é uma superfície de gravidade de potencial constante - uma superfície de nível (Figura 3). A vertical é sempre perpendicular à superfície de nível local (CLYNCH, 2006, p. 02).

Segundo o NGS (*National Geodetic Survey*) (2001), uma definição atual de geóide seria: “a superfície equipotencial do campo de gravidade da Terra que melhor se ajusta, no sentido dos mínimos quadrados, ao nível médio global dos mares”. Esta definição não é perfeita, pois, existe uma indefinição do nível do mar nas regiões próximas dos pólos, devido às alterações no decorrer dos últimos anos. Torge (2001, p. 04) complementa que o nível médio dos mares (geóide) e o campo gravitacional sofrem variações temporais, exigindo que as observações sejam referidas a uma determinada época para correção destas variações.

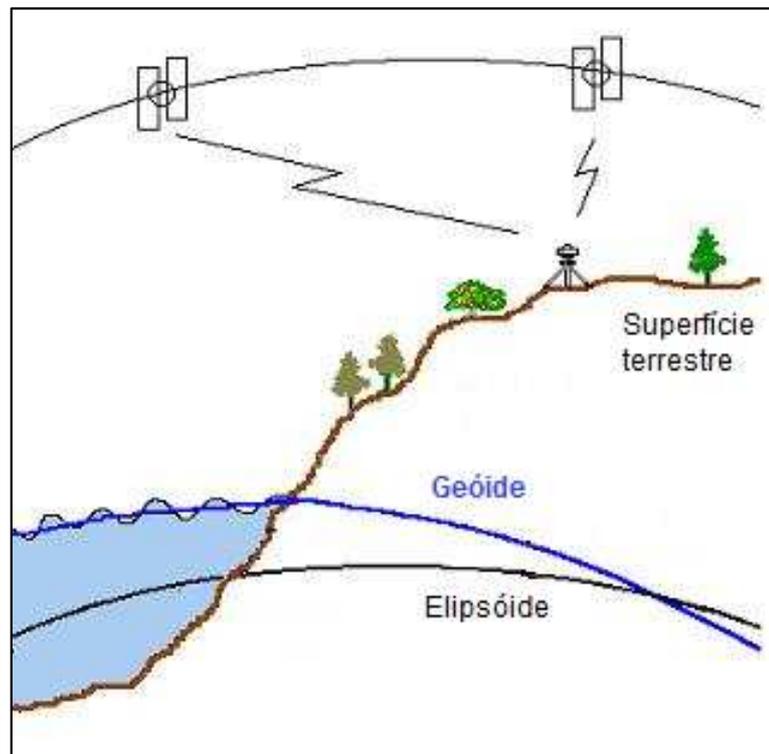


Figura 3 - Representação das superfícies de referência da Terra.

Fonte: adaptada de <http://www.ibge.gov.br/home/geociencias/geodesia/fig3.htm>, acessado dia 10 janeiro de 2012.

A diferença entre as superfícies de referência, elipsóide e geóide, define-se como ondulação geoidal (N). A altura elipsoidal ou geométrica (h) é obtida por levantamentos com GPS e a altitude ortométrica ou altitude (H) pode ser determinada por levantamentos topográficos ou gravimétricos. Essas relações são representadas na figura 4.

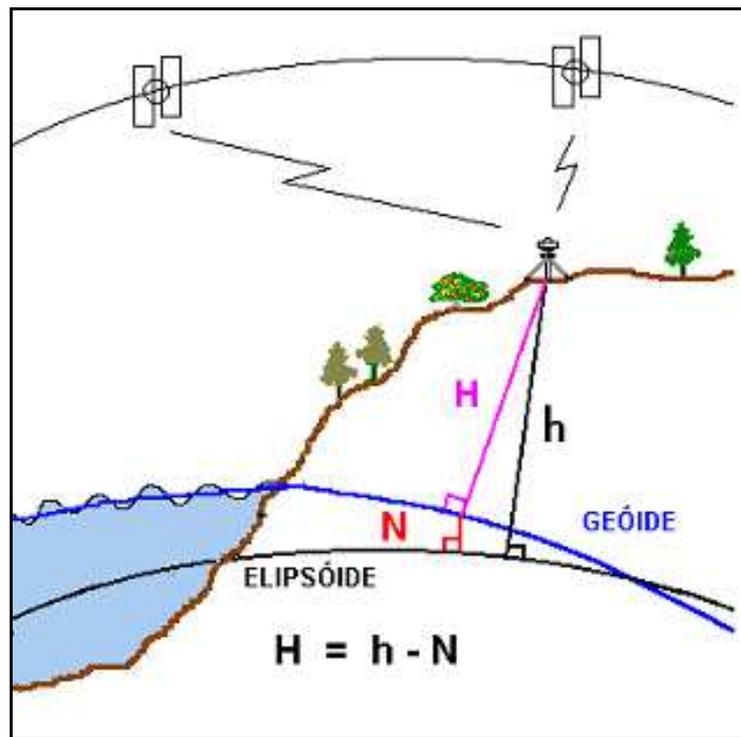


Figura 4 - Representação da ondulação geoidal (N), da altitude ortométrica (H) e da altura elipsoidal (h).

Fonte: <http://www.ibge.gov.br/home/geociencias/geodesia/fig3.htm>, acessado dia 10 janeiro de 2012.

O Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE), por meio da Coordenação de Geodésia (CGED), juntamente com a Escola Politécnica da Universidade de São Paulo (EPUSP), conceberam o MAPGEO2010. O modelo foi calculado com uma resolução de 5' de arco, e o sistema de interpolação das ondulações geoidais foi atualizado. Através desse sistema, os usuários podem obter a ondulação geoidal em um ponto ou conjunto de pontos, cujas coordenadas refiram-se tanto ao SIRGAS2000 quanto ao SAD69, possibilitando a conversão das alturas elipsoidais (h) em altitudes ortométricas (H), com melhor confiabilidade.

2.2.4. Modelo plano

Na Topografia e na Cartografia as representações gráficas são planas e representadas por meio de plantas, cartas e mapas. Essas representações possuem distorções e deformações, inerentes aos sistemas projetivos, que são controladas e que definem a limitação da representação gráfica, tanto no plano topográfico, quanto nas projeções cartográficas (DAL´FORNO, 2010, p. 04).

2.2.4.1. Projeções cartográficas

As projeções cartográficas foram desenvolvidas para representar a superfície curva da Terra em um mapa plano, e definir precisamente a relação bidimensional entre as posições terrestres, expressas em latitude e longitude, e as posições equivalentes em coordenadas planas em um mapa (BURKHOLDER, 1997, p. 07).

O Brasil, a partir de 1955, adotou a projeção Universal Transversa de Mercator (UTM), por recomendação da União Geodésica e Geofísica Internacional (UGGI) para o mapeamento sistemático do território nacional (AGUIRRE e MELLO FILHO, 2007, p. 63).

No sistema UTM o elipsóide é dividido em sessenta fusos, com 6° de longitude cada, numerados a partir do antimeridiano de Greenwich, no sentido anti-horário, iniciando no fuso entre 180° a 174° de longitude oeste (W). A longitude do meridiano central de cada fuso é dada pela longitude limite do fuso (múltipla de seis) menos 3°. Em latitudes os fusos são limitados a 84° norte (N) e a 80° sul (S) (DMA, 1989, p. 2-6).

As coordenadas planas têm origem no cruzamento do Equador com o meridiano central do fuso. Nessa intersecção são acrescentadas constantes para a representação das coordenadas. Na origem das coordenadas leste (E) a constante é de 500.000 metros, com valores crescentes a leste e decrescentes a oeste. Às coordenadas norte (N), no hemisfério sul, acrescenta-se a constante 10.000.000 de metros decrescentes na direção sul. Já, para o hemisfério norte, não há adição de

constantes e os valores são crescentes na direção norte (AGUIRRE e MELLO FILHO, 2007, p. 63).

A combinação da altura ortométrica (H) com as coordenadas cartográficas (y/x ou N/E) não definem um sistema tridimensional retangular apropriado. As projeções conformes são apropriadamente definidas em duas dimensões, não contemplando uma definição matemática para altitudes. A superfície de referência para altitude é uma superfície curva irregular (geóide). A integridade do modelo tridimensional retangular é preservada somente enquanto essa curvatura não for significativa, ou seja, quando se assume a Terra plana. Portanto, associações da altitude com as coordenadas geográficas produzem um sistema de coordenadas pseudo-tridimensional (BURKHOLDER, 1997, p. 07 a 08).

Uma importante consideração, quando utilizadas coordenadas planas, é a diferença entre a distância UTM e a distância no plano topográfico (distância horizontal real). Em muitas situações existe uma diferença considerável, entre a distância UTM e a real, para que isso possa ser ignorado. Nessas situações, é preciso estabelecer um fator de elevação e, conseqüentemente, um plano médio de projeção topográfica, no qual a diferença entre a distância obtida e a distância real seja insignificante. A necessidade de padronização e consideração dessas diferenças é uma questão relevante quando se projetam obras de engenharia (BURKHOLDER, 1997, p. 08). Esta padronização também é observada na NBR 14.166 (ABNT, 1998), que estabelece as condições para a implantação e manutenção de uma Rede de Referência Cadastral Municipal.

2.2.4.2. Plano topográfico local

O modelo plano utilizado nos levantamentos e representações topográficas é denominado como Plano Topográfico Local (PTL). Nessa circunstância, despreza-se a influência dos erros sistemáticos devidos à curvatura e ao desvio da vertical, conforme a NBR 13.133 (ABNT, 1994, p. 05).

Esse plano é perpendicular à vertical no ponto na superfície terrestre, origem do levantamento, podendo também ser perpendicular à normal, no caso da

determinação de coordenadas topográficas a partir de coordenadas geodésicas, sendo assim orientado pelo azimute geodésico (DAL´FORNO, 2010, p. 02).

Segundo a NBR 13.133 (ABNT, 1994, p. 05 a 06), é um sistema de projeção utilizado nos levantamentos para a representação das posições relativas dos pontos topográficos, com as seguintes características:

as projetantes são ortogonais à superfície de projeção, com centro de projeção localizado no infinito; a superfície de projeção é um plano perpendicular à vertical do ponto de origem do levantamento; o plano de projeção está referido ao *datum* altimétrico brasileiro; as deformações máximas decorrentes da desconsideração da curvatura terrestre e a refração atmosférica, são expressas por:

$$\Delta xy = -0,004 \cdot d^3$$

$$\Delta h = 78,5 \cdot d^2$$

$$\Delta h' = 67 \cdot d^2$$

onde Δxy é deformação planimétrica devido à curvatura da Terra (mm), Δh é a deformação altimétrica devido à curvatura da Terra (mm), $\Delta h'$ é a deformação altimétrica devido ao efeito conjunto da curvatura da Terra e da refração atmosférica (mm) e d é a distância considerada no terreno (km); possui dimensão máxima de 80 km a partir do ponto de origem, limitando o erro relativo a 1/35.000 nesta dimensão e 1/15.000 nas suas imediações; a localização planimétrica dos pontos se dá por intermédio de um sistema de coordenadas cartesianas, com origem coincidente à do levantamento topográfico; o eixo das ordenadas é a referência azimutal, podendo estar orientado pelo norte magnético, norte geográfico ou uma direção qualquer notada no terreno.

A NBR 14.166 (ABNT, 1998, p. 05 a 07) estabelece algumas precauções que devem ser tomadas quando se implanta um Sistema Topográfico Local (STL). Para manter a exatidão, tanto no projeto quanto na locação, os erros devem ser inferiores aos erros decorrentes da não consideração da curvatura terrestre e não devem superar os erros inerentes às operações topográficas.

2.3. Sistemas de coordenadas

Para o georreferenciamento geodésico de pontos, basicamente, são utilizados dois tipos de sistemas de coordenadas: o sistema de coordenadas cartesianas (retangulares) e o sistema de coordenadas curvilíneas. Os sistemas de coordenadas descrevem as posições dos pontos sobre/sob ou próximos à superfície terrestre. Ambas as formas de representação estão referidas a um sistema de referência ou ao elipsóide de referência (GEMAEL, 2002, p. 17).

Em levantamentos geodésicos, define-se a posição de um ponto no espaço euclidiano tridimensional por coordenadas astronômicas ou elipsoidais. O primeiro compreende os sistemas definidos no espaço gravitacional terrestre e o segundo, os sistemas definidos no espaço geométrico. No sistema astronômico, a posição é definida por um terno de coordenadas geográficas astronômicas: Φ , Λ e altura ortométrica (H). No sistema elipsoidal utilizam-se as coordenadas geográficas elipsoidais (φ , λ) e a altura elipsoidal (h). Em ambos os sistemas referenciais o posicionamento pode ser expresso pela tríade de coordenadas cartesianas (X , Y , Z) (MORAES, 2001, p. 05).

Em levantamentos topográficos as posições dos pontos são representadas por coordenadas cartesianas tridimensionais (v , u , w), referidas ao plano topográfico local (PTL). Essas coordenadas podem estar expressas no Sistema Geodésico Local (SGL) ou no Sistema Astronômico Local (SAL), conforme se referidas à vertical ou à normal (JEKELI, 2006, p. 2-49 a 2-54).

2.3.1. Sistema de coordenadas cartesianas elipsoidais

As componentes funcionais na modelagem 3D são baseadas em um sistema cartesiano retangular tridimensional dextrógiro, com a origem no centro de massa da Terra. Esse sistema de coordenadas geocêntrico é definido, pela Agência de Defesa e Mapeamento dos Estados Unidos (DMA) como *ECEF* (*earth-centered/earth-fixed*), largamente utilizado por aqueles que trabalham com GPS e dados relacionados. O ECEF também é conhecido por sistema terrestre convencional (LEICK, 2004, p. 13). A figura 5 mostra a configuração desse sistema de coordenadas cartesianas geocêntricas (ECEF).

O sistema de coordenadas cartesiano tridimensional (X , Y , Z) é constituído de três eixos perpendiculares, com sua origem na intersecção dos eixos da elipse e localizado no centro de massa da Terra. O plano formado pelos eixos cartesianos X e Y coincide com o plano equatorial. O eixo X é definido pela origem do sistema de coordenadas e o ponto gerado pela intersecção do plano do Equador e o meridiano de Greenwich. Neste é positivo. O eixo Y , também situado no plano equatorial, é ortogonal ao eixo X e positivo na direção Leste (E). O eixo Z é paralelo ao eixo

médio de rotação da Terra definido pelo Pólo Convencional Terrestre, e positivo na direção do norte (DAL'FORNO, 2010, p. 02).

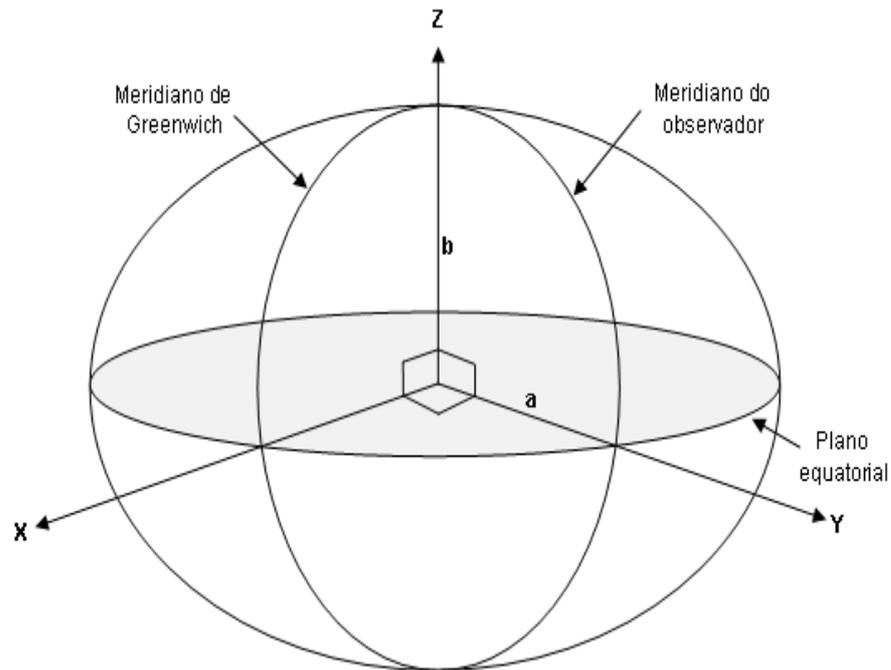


Figura 5 - Representação do sistema de coordenadas retangulares fixas no centro de massa da Terra (ECEF).

Fonte: adaptada de Clynch (2006, p. 03).

2.3.2. Sistema de coordenadas geodésicas

O sistema de coordenadas curvilíneas representa a posição dos pontos no espaço através da latitude (ϕ), longitude (λ) e da altura elipsoidal (h), quando adotado o elipsóide como superfície de referência (Figura 6), ou pelo terno (r, α, β) quando adotada a esfera como superfície de referência (Figura 7).

A latitude elipsoidal é o ângulo formado entre a normal (N) que passa pelo ponto e sua projeção no plano equatorial, com valores de 0° a 90° , Norte (+) ou Sul (-). A longitude geodésica é o ângulo formado no plano equatorial, entre o meridiano convencional de Greenwich e o meridiano que passa pelo ponto considerado, com valores de 0° a 180° , Leste (+) ou Oeste (-).

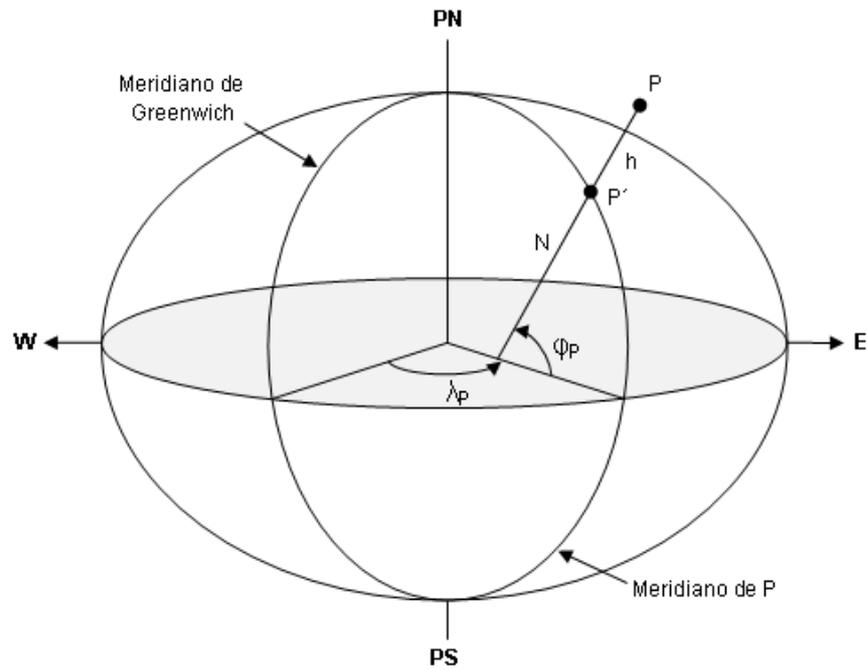


Figura 6 - Representação das coordenadas curvilíneas elipsoidais (ϕ , λ) e altura elipsoidal (h) do ponto P.

Fonte: adaptada de Zanetti (2006, p. 13).

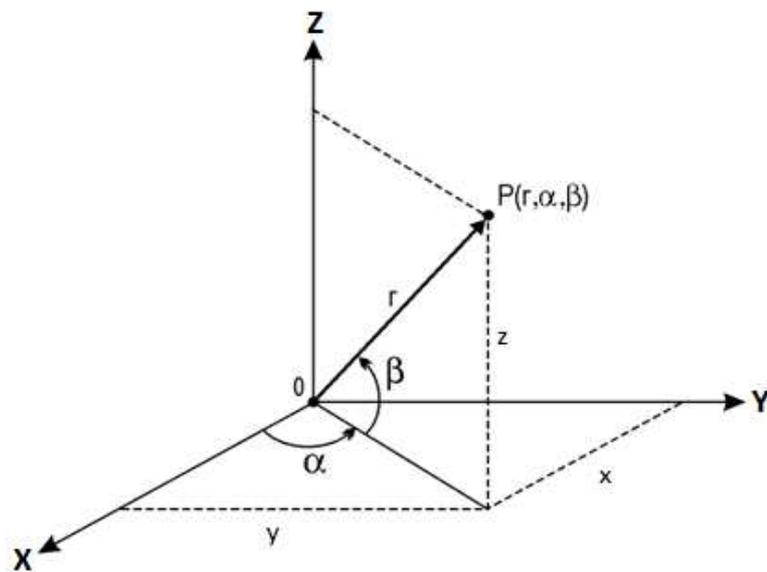


Figura 7 - Representação do sistema de coordenadas curvilíneas esféricas do ponto P.

Fonte: adaptado de Zanetti. (2006, p. 06).

Na figura 8, apresenta-se um sistema tridimensional único para qualquer ponto terrestre, o qual pode ter sua posição definida pelo sistema de coordenadas

geodésicas (ϕ, λ, h) ou coordenadas cartesianas (X, Y, Z) (BURKHOLDER, 1997, p. 03).

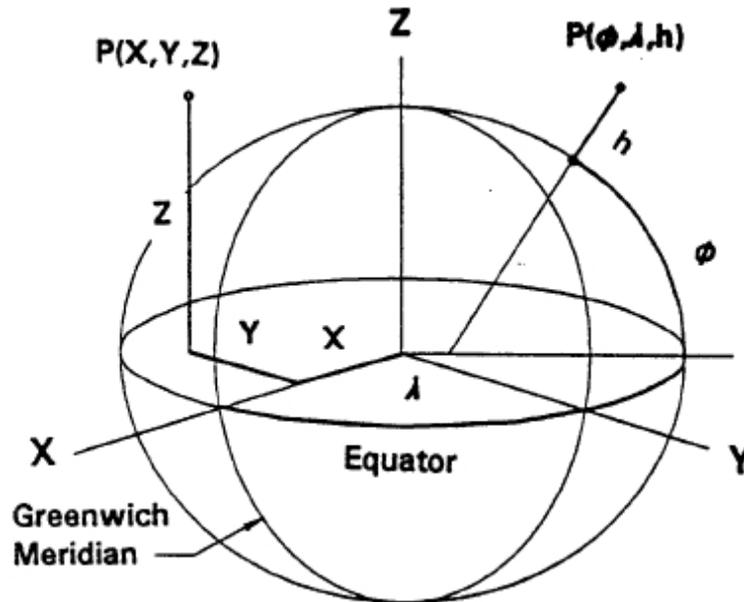


Figura 8 - Representação das coordenadas elipsoidais cartesianas ortogonais (X, Y, Z) e geodésicas (ϕ, λ, h) .

Fonte: Burkholder (1997, p. 05).

2.3.3. Sistema de coordenadas local

O sistema de coordenadas local é localizado sobre o PTL e composto por três eixos ortogonais entre si. Proporciona apoio aos levantamentos tridimensionais locais (Topografia), onde são estimadas medidas angulares e de distâncias através de instrumentos como teodolitos, distanciômetros e estações totais. Esse sistema pode ser empregado em fotogrametria, georreferenciamento e orientação de dados (MONICO, 2008, p. 150).

A convenção da orientação dos eixos varia conforme a área de estudo, como por exemplo, em levantamentos (Topografia) as convenções para as direções são: norte (u), leste (v) e para cima (w); já em navegação são: norte (N), leste (E) e para baixo, ou norte (N), oeste (W) e para cima (JEKELI, 2006, p. 2-49).

Os eixos u e v são perpendiculares entre si e se situam no plano topográfico, e o eixo w é perpendicular a este plano. Quanto à orientação, o eixo u é direcionado ao norte astronômico ou ao norte geodésico, o eixo v é direcionado para leste e o eixo w coincide com a direção da vertical ou da normal ao elipsóide que passa pelo ponto considerado como origem do sistema (DAL'FORNO, 2010, p. 02). As direções w (para baixo ou para cima) podem se situar sobre a normal ou sobre a vertical. Quando a perpendicular ao plano de projeção (PTL) for a vertical do lugar se constitui um Sistema Astronômico Local (SAL). Quando essa perpendicular for normal ao elipsóide é denominado de Sistema Geodésico Local (SGL) (DAL'FORNO, 2010, p. 02). O desenvolvimento matemático é idêntico para ambos os sistemas. A única diferença, no final, é a especificação da latitude e longitude, isso é, a direção da vertical empregada.

A figura 9 apresenta o sistema de coordenadas astronômicas (Φ , Λ) e o sistema astronômico local (v , u , w) associados a um ponto na superfície terrestre.

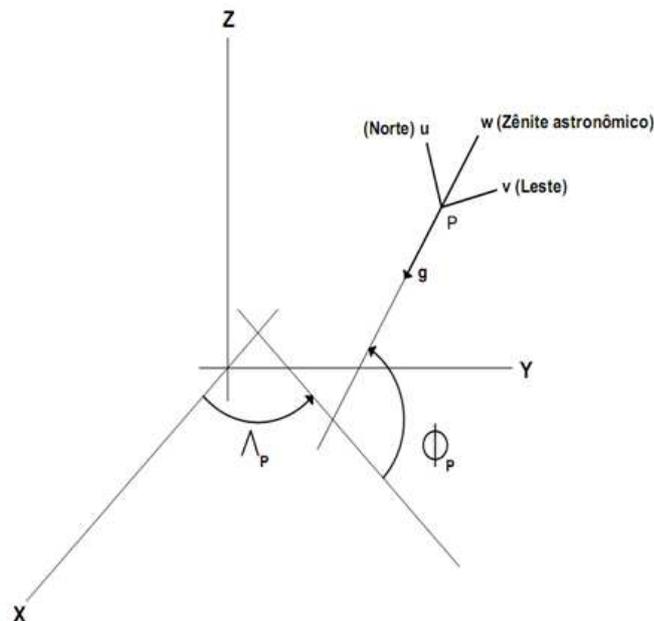


Figura 9 – Representação do sistema de coordenadas astronômicas (Φ , Λ) e do sistema de coordenadas astronômicas locais (v , u , w) do ponto P.
Fonte: adaptada de Jekeli (2006, p. 2-49).

A figura 10 mostra o sistema de coordenadas geodésicas (φ , λ) e o sistema geodésico local (v , u , w) associados a um ponto na superfície terrestre.

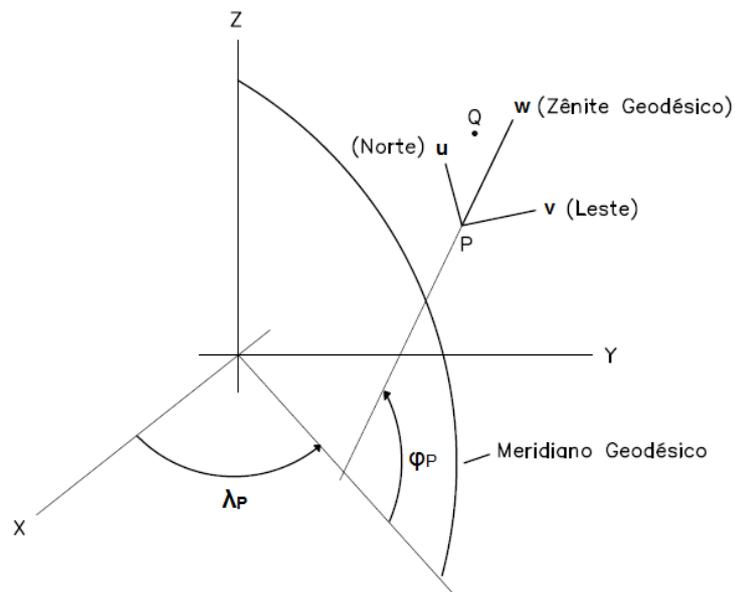


Figura 10 - Representação do sistema de coordenadas geodésicas (φ , λ) e do sistema de coordenadas geodésicas locais (v , u , w) do ponto P.
Fonte: adaptada de Jekeli (2006, p. 2-54).

A figura 11 apresenta as interrelações entre os sistemas aqui apresentados.

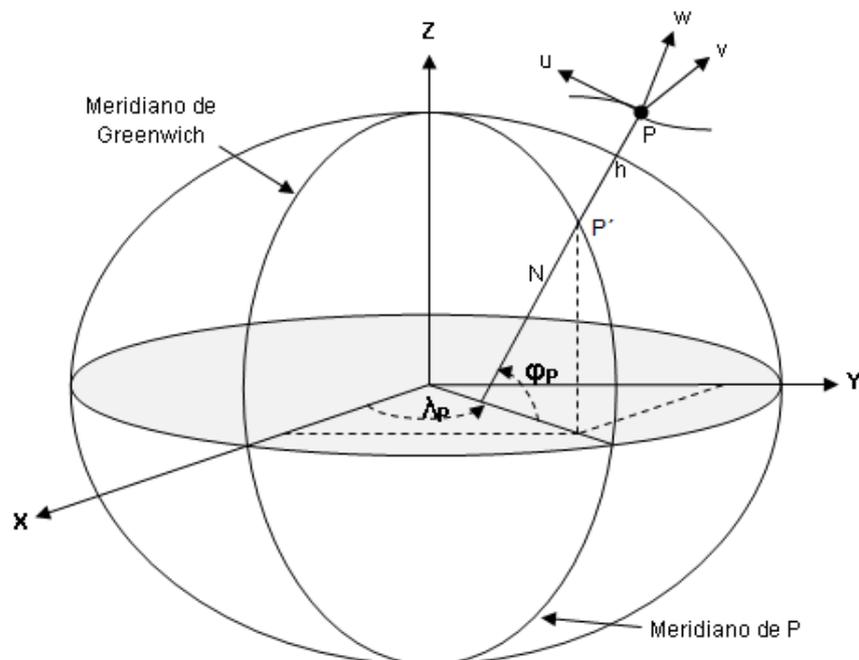


Figura 11 - Representação dos sistemas de coordenadas terrestres – sistemas de coordenadas geodésicas (φ , λ , h), sistema de coordenadas geodésicas cartesianas (X , Y , Z) e o sistema de coordenadas geodésicas locais (v , u , w) do ponto P.
Fonte: adaptada de Dal'Forno (2010, p. 02).

2.4. Transporte de coordenadas no elipsóide

O transporte de coordenadas geodésicas consiste na determinação de coordenadas de pontos a partir de um ponto origem, cujas coordenadas geodésicas são conhecidas. As coordenadas dos pontos são vinculadas às do ponto origem e são determinadas por mensurações de bases, ângulos e azimutes, sendo usado como superfície de referência o elipsóide (SAATKAMP, 2006 apud BRUM, 2008, p. 29).

Conforme Jekeli (2006, p. 2-34), há dois problemas essenciais no cálculo de coordenadas, direções e distâncias sob um elipsóide considerado, denominados de problema geodésico direto (PGD) e o problema geodésico inverso (PGI).

As soluções para esses problemas também formam a base para a solução dos triângulos elipsoidais, análogas às soluções relativamente simples de triângulos esféricos (EHLERT, 1993 apud JEKELI, 2006, p. 2-34). Uma das soluções é desenvolvida por meio da aproximação do elipsóide local a uma esfera. As últimas soluções apresentadas são totalmente desenvolvidas em Rapp (1992, apud JEKELI, 2006, p. 2-34). Existem muitas soluções, para linhas curtas, baseadas em algum tipo de aproximação. Dentre essas, é comum o emprego das fórmulas de Puissant, adequadas para linhas de até 80 km, com precisão de 1 ppm (1 mm/km).

Atualmente, com o GPS, o problema direto como era tradicionalmente resolvido ou utilizado é pouco relevante em Geodésia. O problema indireto ainda é bastante útil quando aplicado à navegação e orientação de longo curso na superfície terrestre (JEKELI, 2006, p. 2-34).

Para que essas transformações sejam realizadas necessita-se introduzir algumas reduções aos elementos topográficos medidos, ou seja, reduções dos ângulos e reduções nas distâncias.

2.4.1. Reduções aplicadas às observações topográficas

2.4.1.1. Reduções dos ângulos

As principais reduções a serem aplicadas aos ângulos medidos, no plano topográfico são: a correção dos ângulos medidos, a correção da convergência meridiana e a correção do desvio da vertical (ZANETTI, 2006, p. 34).

2.4.1.1.1. Ângulos medidos

Como os ângulos observados são ângulos medidos na superfície topográfica, esses ângulos devem sofrer pequenas correções para se tornarem ângulos elipsóidicos.

As reduções sofridas pelos ângulos são calculadas pelas equações abaixo:

$$\delta'' = \left(\frac{e^2 \cdot \cos^2 \varphi \cdot \text{sen}(2 \cdot \text{Az})}{2 \cdot N \cdot (1 - e^2) \cdot \text{sen } 1''} \right) \cdot H_2 \quad (2.4)$$

$$\text{Az} - \text{Az}_1 = \left(\frac{e^2 \cdot s^2 \cdot \cos^2 \varphi \cdot \text{sen}(2 \cdot \text{Az})}{6 \cdot M \cdot N \cdot \text{sen } 1''} \right) \quad (2.5)$$

A primeira refere-se à correção efetuada em um ângulo azimutal devido à altitude geodésica do ponto observado. A segunda correção tem por finalidade transformar um ângulo observado, através da seção normal direta, em um ângulo observado através da linha geodésica. Devido aos seus pequenos valores, para as altitudes brasileiras e para as distâncias usadas em engenharia, essas duas correções não são utilizadas frequentemente.

No entanto, quando se usa o plano UTM, ao se projetarem os ângulos do elipsoide, torna-se necessário aplicar a redução angular que é simbolizada pela letra γ .

2.4.1.1.2. Convergência meridiana

A convergência meridiana (γ) é a diferença entre os azimutes geodésicos de uma geodésica entre dois meridianos, devido à convergência destes para os pólos (ZANETTI, 2006, p. 36). A NBR 14.166 (ABNT, 1998, p. 16) apresenta a equação 2.6 para o cálculo da convergência meridiana entre dois pontos.

$$\gamma = - \left[\Delta\lambda \cdot \sin \varphi_m \cdot \sec \left(\frac{\Delta\varphi}{2} \right) + F \cdot (\Delta\lambda)^3 \right] \quad (2.6)$$

sendo:

$$F = \frac{1}{2} \cdot \sin \varphi_m \cdot \cos^2 \varphi_m \cdot \sin^2 1'' \quad (2.7)$$

2.4.1.2. Desvio da vertical

Conforme Gemael (1999, p. 19), o desvio da vertical (i) é o ângulo formado entre a normal ao elipsóide e a normal à superfície equipotencial (vertical) que passam pelo ponto (Figura 12). O cálculo do desvio da vertical é feito através de suas componentes, a componente meridiana (ξ) e a primeira vertical (η).

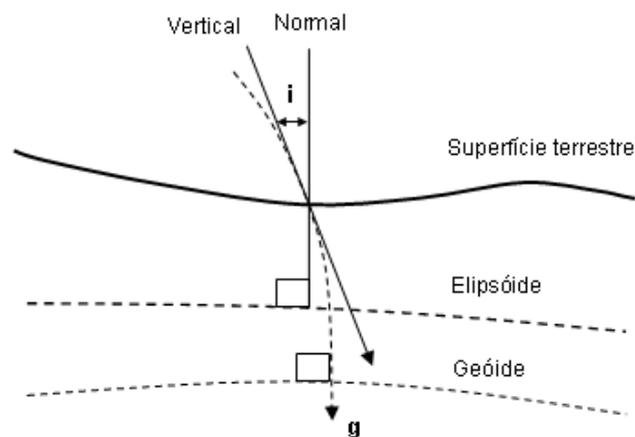


Figura 12 - Representação do desvio da vertical (i) no ponto P.
Fonte: adaptada de Oliveira (2004, p. 28).

O desvio da vertical possui, como principais utilizações, a transformação entre coordenadas astronômicas e geodésicas, a transformação de azimutes astronômicos em azimutes geodésicos, a redução das observações topográficas ao elipsóide e a determinação de diferenças de alturas a partir de ângulos zenitais e distâncias inclinadas (ZANETTI, 2006, p. 40).

Zanetti (2006 p. 02) afirma:

A quantificação das reduções deve ser realizada a partir de medidas efetuadas em uma linha poligonal longa e com desnível acentuado, pois, em pequenas distâncias e desníveis, tais reduções não apresentam valores significativos.

Nos levantamentos com GPS, a direção vertical é definida pela normal ao elipsóide. Nos levantamentos topográficos, realizados com estações totais, a direção vertical é definida segundo a vertical do local. Assim, quando se associam esses dois tipos de levantamentos, seriam necessárias correções pela introdução das componentes do desvio da vertical. Os métodos para obtenção do desvio da vertical envolvem equipamentos sofisticados e esta redução tem sido frequentemente negligenciada (ZANETTI, 2006, p. 02).

Os principais métodos utilizados para a obtenção do desvio da vertical são: o método astro-geodésico, gravimétrico, astro-gravimétrico e através de medidas GPS/LPS (ZANETTI, 2006, p. 41).

2.3.1.3. Redução da distância

Para as distâncias medidas com instrumentos eletrônicos, além das correções instrumentais, aplicam-se reduções geométricas, tais como: a redução da distância ao elipsóide (redução à corda e ao arco) quando os dados forem topográficos e, a correção da curvatura e de distorções devido ao sistema de projeção, no caso cartográfico (ZANETTI, 2006, p. 31).

A redução ao elipsóide consta de duas etapas: i) redução à corda; ii) redução ao arco.

i) Redução à corda

Na fórmula para redução à corda (Equação 2.8), deve-se usar a altura geométrica (h), ou seja, a geodésica ou elipsóidica. Caso essa seja desconhecida, pode-se empregar a altitude (H) sem que isso acarrete erro significativo. Para qualquer dos casos, utiliza-se a média das altitudes dos extremos da linha.

$$\frac{(R + H)}{Dh} = \frac{R}{Dc} \therefore Dc = \frac{(R \cdot Dh)}{(R + H)} \quad (2.8)$$

onde: R é o raio terrestre, H é a altitude, Dh é a distância horizontal (topográfica), e Dc é a distância à corda.

O raio a ser utilizado é o de curvatura da secção normal:

$$R_A = \sqrt{(M \cdot N)} \quad (2.9)$$

Sendo os valores de M e N calculados para a latitude do ponto.

ii) Redução ao arco

Usa-se a fórmula:

$$S = Dc + \left(\frac{Dc^3}{24 \cdot R^3} \right) \quad (2.10)$$

onde: R é o raio terrestre, Dc é a distância à corda e S é a geodésica.

Salienta-se que, se utilizadas às distâncias obtidas a partir de um sistema de projeções cartográficas, necessita-se transformá-las em distâncias topográficas. Esta transformação pode ser feita pelo formulário apresentado pela NBR 14.166/98.

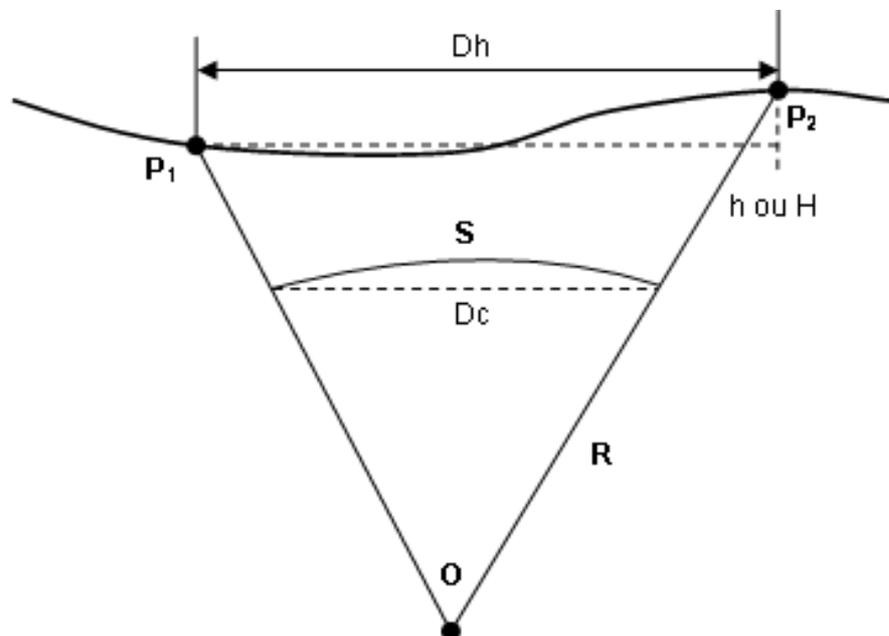


Figura 13 - Representação das reduções às distâncias observadas.

Onde: Dh é a distância horizontal topográfica, Dc é a redução à corda, S é a geodésica, h é a altura elipsoidal, H é a altitude ou altitude ortométrica, R é o raio de curvatura da secção meridiana, O é a origem do elipsóide de referência.

Fonte: adaptado de Zanetti (2006, p. 33).

2.3.2. Problema geodésico direto (PGD)

Conforme Jekely (2006, p. 2-34), no problema direto são conhecidas as coordenadas geodésicas de um ponto (φ_A, λ_A) , a distância $(S_{A,B})$ e o azimute geodésico $(Ag_{A,B})$ para o cálculo da coordenadas geodésicas de um segundo ponto (φ_B, λ_B) , conforme representado na figura 14.

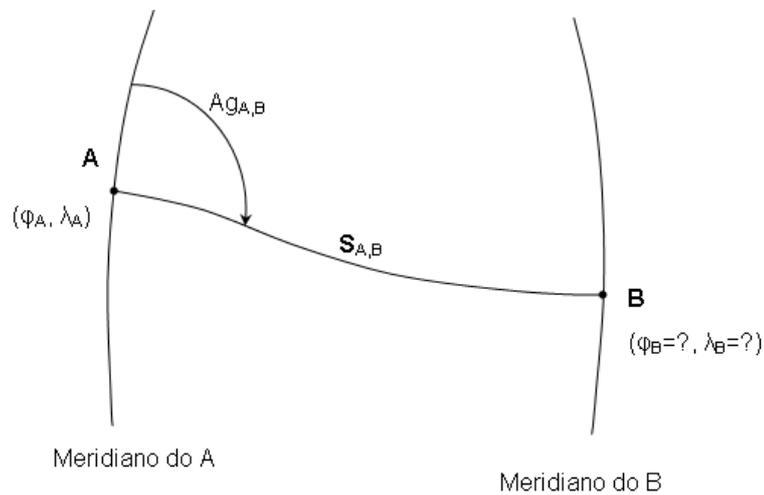


Figura 14 – Representação do Problema Geodésico Direto (PGD).
Fonte: adaptado de Zanetti (2006, p. 29).

As equações de Puissant para a solução do problema direto estão apresentadas abaixo (ZANETTI, 2007, p. 78).

Equações para o transporte da latitude:

$$M_1 = \frac{a \cdot (1 - e^2)}{(1 - e^2 \cdot \text{sen}^2 \varphi_1)^{3/2}} \quad (2.11)$$

$$N_1 = \frac{a}{(1 - e^2 \cdot \text{sen}^2 \varphi_1)^{1/2}} \quad (2.12)$$

$$B = \frac{1}{M_1 \cdot \text{sen} 1''} \quad (2.13)$$

$$C = \frac{\text{tg } \varphi_1}{2 \cdot M_1 \cdot N_1 \cdot \text{sen} 1''} \quad (2.14)$$

$$D = \frac{3 \cdot e^2 \cdot \cos \varphi_1 \cdot \sin \varphi_1 \cdot \sin 1''}{2 \cdot (1 - e^2 \cdot \sin^2 \varphi_1)} \quad (2.15)$$

$$E = \frac{1 + (3 \cdot \operatorname{tg}^2 \varphi_1)}{6 \cdot N_1^2} \quad (2.16)$$

$$h = \frac{S_{1,2} \cdot \cos Ag_{1,2}}{M_1 \cdot \sin 1''} \quad (2.17)$$

$$\delta\varphi_{1,2}'' = B \cdot S_{1,2} \cdot \cos Ag_{1,2} - C \cdot S_{1,2}^2 \cdot \sin^2 Ag_{1,2} - h \cdot E \cdot S_{1,2}^2 \cdot \sin^2 Ag_{1,2} \quad (2.18)$$

$$\Delta\varphi_{1,2}'' = \delta\varphi_{1,2}'' - D \cdot (\delta\varphi_{1,2}'')^2 \quad (2.19)$$

$$\varphi_2 = \varphi_1 + \Delta\varphi_{1,2} \quad (2.20)$$

Equações para o transporte da longitude:

$$T_{1,2} = \frac{S_{1,2} \cdot \sin Ag_{1,2}}{N_2 \cdot \cos \varphi_2} \quad (2.21)$$

$$M_m = \frac{a \cdot (1 - e^2)}{(1 - e^2 \cdot \sin^2 \varphi_m)^{3/2}} \quad (2.22)$$

$$B_m = \frac{1}{M_m \cdot \sin 1''} \quad (2.23)$$

$$\Delta\lambda_{1,2}'' = \frac{T_{1,2}}{\sin 1''} \cdot \left(1 - \frac{S_{1,2}^2}{6 \cdot N_2^2} + \frac{T_{1,2}^2}{6} \right) \quad (2.24)$$

$$\lambda_2 = \lambda_1 + \Delta\lambda_{1,2} \quad (2.25)$$

Equações para o transporte do azimute:

$$\varphi_m = \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} \quad (2.26)$$

$$F = \frac{1}{2} \cdot \sin \varphi_m \cdot \cos^2 \varphi_m \cdot \sin^2 1'' \quad (2.27)$$

$$\gamma_{1,2}'' = \frac{\Delta\varphi_{1,2}'' \cdot \sin \varphi_m}{\cos\left(\frac{\Delta\varphi_{1,2}''}{2}\right)} + F \cdot (\Delta\lambda_{1,2}'')^3 \quad (2.28)$$

$$Ag_{2,1} = Ag_{1,2} + \gamma \pm 180^\circ \quad (2.29)$$

2.3.3. Problema geodésico inverso (PGI)

Conforme Jekely (2006, p. 2-34), no problema inverso são conhecidas as coordenadas geodésicas de dois pontos (φ_A , λ_A e φ_B , λ_B), necessitando-se

determinar a distância ($S_{A,B}$) e o azimute geodésico ($Ag_{A,B}$) do alinhamento \overline{AB} , conforme representado na figura 15.

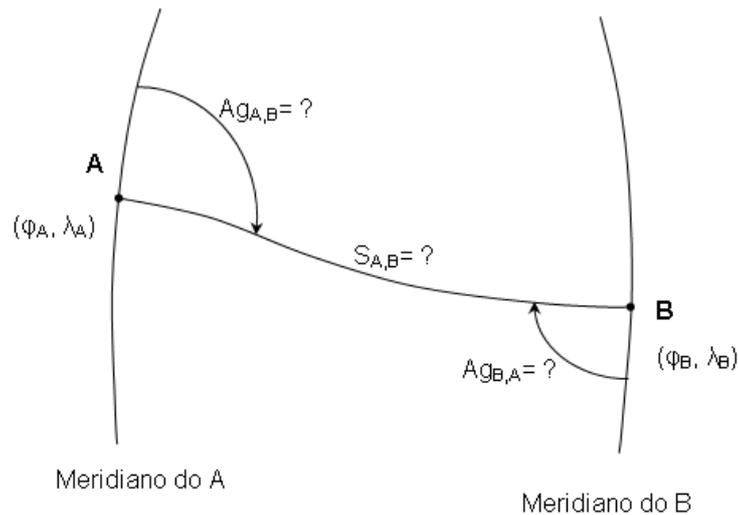


Figura 15 – Representação do Problema Geodésico Inverso (PGI).
Fonte: adaptado de Zanetti (2006, p. 30).

As equações para a solução do problema geodésico inverso por Puissant estão apresentadas abaixo (ZANETTI, 2007, p. 79 a 80).

$$N_m = \frac{a}{(1 - e^2 \cdot \sin^2 \varphi_m)^{1/2}} \quad (2.30)$$

$$x = \Delta\lambda'' \cdot \cos \varphi_m \cdot N_m \cdot \sin 1'' = S_{1,2} \cdot \operatorname{sen} \left(Ag_{1,2} + \frac{\gamma}{2} \right) \quad (2.31)$$

$$y = \frac{\Delta\varphi_{1,2}'' \cdot \cos(\Delta\lambda/2)}{B_m} = S_{1,2} \cdot \cos \left(Ag_{1,2} + \frac{\gamma}{2} \right) \quad (2.32)$$

$$\operatorname{tg} \left(Ag_{1,2} + \frac{\gamma}{2} \right) = \frac{x}{y} \quad (2.33)$$

$$S_{1,2} = \frac{x}{\sin \left(Ag_{1,2} + \frac{\gamma}{2} \right)} = \frac{y}{\cos \left(Ag_{1,2} + \frac{\gamma}{2} \right)} \quad (2.34)$$

2.5. Modelo matemático tridimensional

Os modelos matemáticos tridimensionais podem ser definidos e descritos como uma coleção de conceitos e procedimentos matemáticos utilizados para

manipular dados espaciais (locais e globais). Consiste em um modelo geométrico funcional e estocástico que descreve as características probabilísticas dos dados espaciais. No modelo são utilizadas unidades métricas, regras universais de geometria sólida e de álgebra vetorial, além de um modelo de ajuste linear para efetuar as transformações geométricas (BURKHOLDER, 1997, p. 02). Para a modelagem são utilizados algoritmos testados e de precisão de cálculo comprovada (BURKHOLDER, 1997, p. 07).

As coordenadas geocêntricas (X, Y, Z), armazenadas em arquivos de dados espaciais, são a base para todos os valores de coordenadas obtidos a partir do modelo matemático (BURKHOLDER, 1997, p. 07). O ponto de origem do sistema de coordenadas é uma característica do modelo, que acomoda planos locais de levantamento sem comprometer a integridade geométrica. O modelo permite ao usuário selecionar qualquer ponto na base de dados para origem do sistema de coordenadas, sendo que a localização tridimensional de cada ponto é associada com o respectivo ponto de origem (BURKHOLDER, 1997, p. 09).

Na figura 16, são apresentadas as relações entre o sistema de coordenadas ECEF e os outros sistemas de coordenadas comumente utilizados na apresentação de dados espaciais. O diagrama está baseado na matriz de rotação usada para converter as diferenças de coordenadas globais (ΔX , ΔY , ΔZ) em diferenças de coordenadas locais (Δv , Δu , Δw), considerando qualquer ponto como origem local (BURKHOLDER, 1997, p. 03).

A matriz de rotação é um mecanismo que transforma eficientemente uma perspectiva global em uma local. Essa transposição da matriz também é utilizada para transformar componentes locais do espaço vetorial para as suas correspondentes geocêntricas. O vetor definido pelas componentes geocêntricas (ΔX , ΔY , ΔZ) é equivalentemente ao definido pelas componentes locais (Δv , Δu , Δw), uma vez que ele não é alterado pelo deslocamento da origem ou pela mudança da orientação do sistema de coordenadas de referência (BURKHOLDER, 1997, p. 03).

Quando se trabalha com os componentes locais (Δv , Δu), a distância horizontal está no plano perpendicular à normal no ponto de origem do sistema, e corresponde à distância no plano topográfico (SGL). Compreensivelmente, com um único plano perpendicular à normal, em cada ponto origem, o plano tangente do ponto A para o ponto B é levemente diferente daquele plano com origem no ponto B

para o ponto A (Figura 17). Mas, a integridade geométrica tridimensional é preservada pelo modelo (BURKHOLDER, 1997, p. 08 a 09).

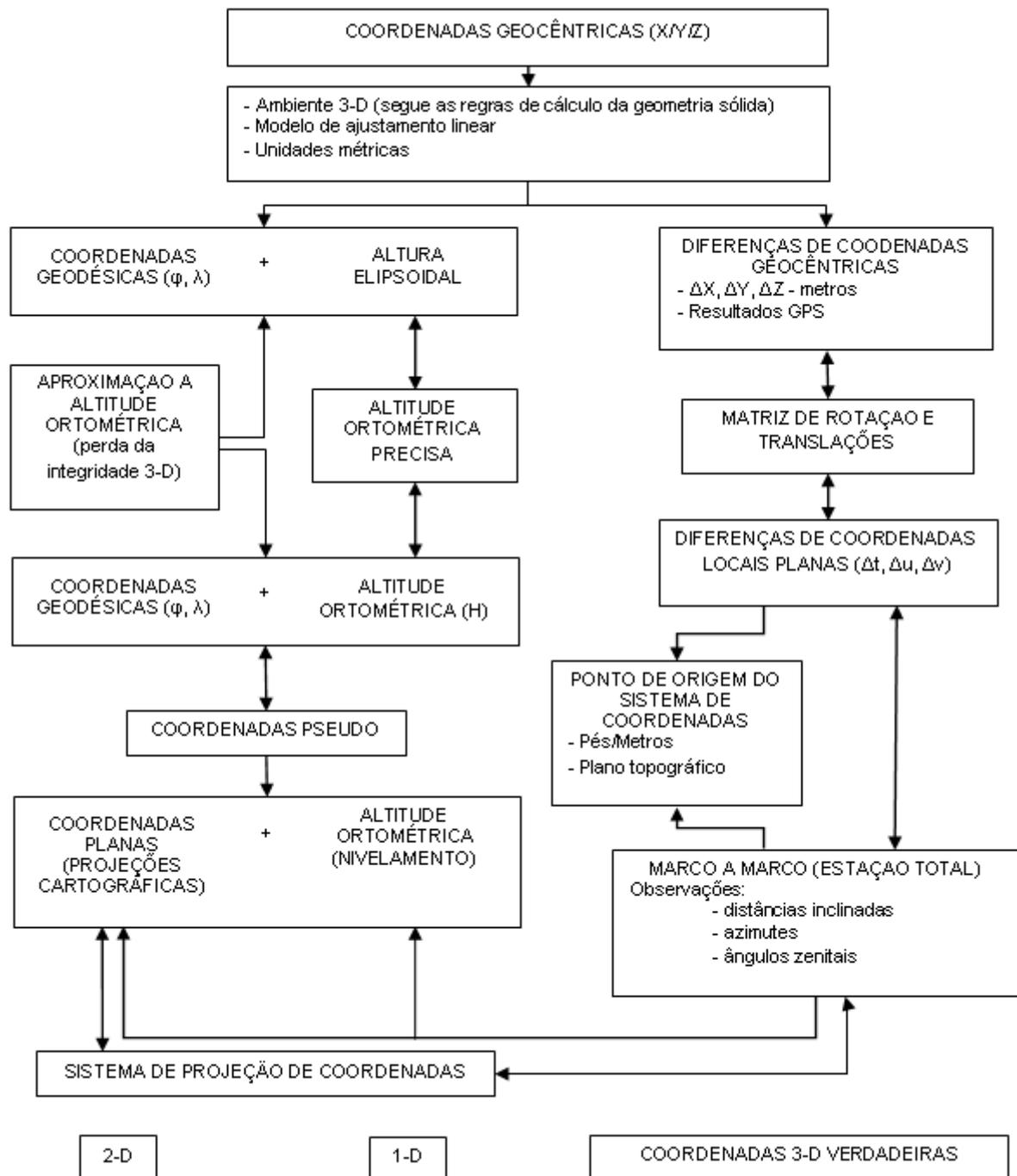


Figura 16 - Diagrama das relações entre os sistemas de coordenadas.
Fonte: adaptado de Burkholder (1997, p. 06).

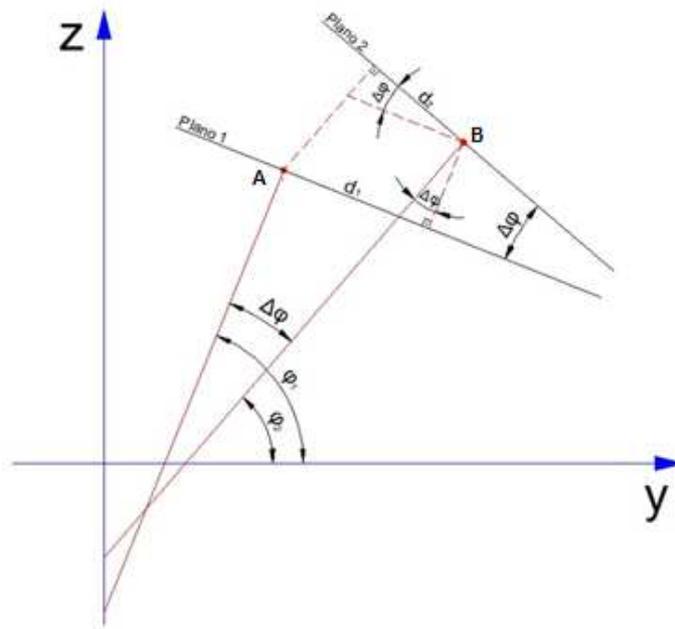


Figura 17 - Representação de planos topográficos conforme a origem adotada.
Fonte: adaptada Dal'Forno (2010).

O valor de azimute obtido no cálculo (Equação 2.35) com componentes locais (Δv , Δu), orientado pelo meridiano do ponto de origem do sistema, aproxima-se do valor do azimute geodésico. O modelo fornece corretamente o azimute de cada alinhamento entre um par de pontos, observando-se que a diferença entre o azimute e seu correspondente contra-azimute deve-se à convergência meridiana (BURKHOLDER, 1997, p. 09).

$$Az \cong Ag = \tan^{-1} \left(\frac{\Delta v}{\Delta u} \right) \quad (2.35)$$

A distância entre dois pontos, cuja posição é definida pelas coordenadas geodésicas (X , Y , Z), pode ser calculada pelas diferenças de coordenadas (ΔX , ΔY , ΔZ), conforme pode ser visualizado na figura 18.

As coordenadas fornecidas pelo sistema GPS são geocêntricas cartesianas tridimensionais (X , Y , Z). Estas coordenadas podem ser transformadas em coordenadas geodésicas (φ , λ , h) e também em coordenadas planas associadas a um sistema de projeções cartográficas, como, por exemplo, a projeção UTM (MONICO, 2008 apud DAL'FORNO, 2010, p. 02).

As observações topográficas obtidas com estações totais incluem distâncias inclinadas, ângulos verticais (zenitais) e determinações de ângulos horizontais ou azimutes. Esses dados são utilizados para calcular as diferenças de coordenadas

geodésicas (ΔX , ΔY , ΔZ). Na realidade as medidas são referidas à vertical, enquanto o modelo estabelece os resultados baseados na normal ao ponto de origem. A diferença é pequena, mas importante, procedendo-se as correções por Laplace caso necessário (BURKHOLDER, 1997, p. 09).

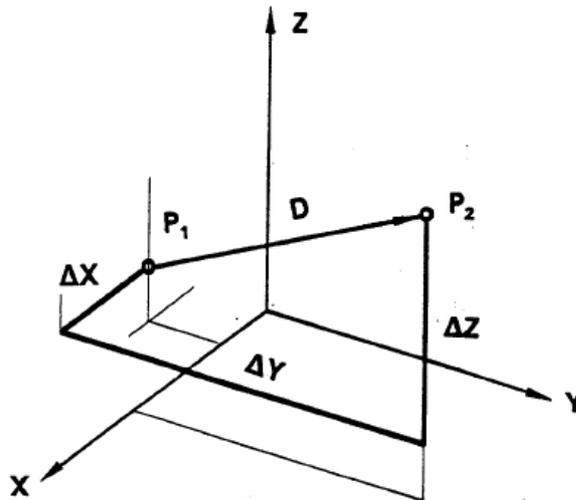


Figura 18 - Diferenças cartesianas entre coordenadas geodésicas de dois pontos (P1 e P2).
Fonte: Burkholder (1997, p. 05).

Embora sugerida como uma forma secundária de obtenção da elevação, as correções da curvatura e da refração podem ser combinadas com a altura elipsoidal, para obter as diferenças de elevação entre os pontos da linha de base. O principal método para obter a altitude depende da ondulação geoidal e da altura elipsoidal acurada (BURKHOLDER, 1997, p. 07).

O horizonte local geodésico é essencialmente o mesmo que o sistema geodésico local e compartilha semelhanças com o plano topográfico local (SOLER, 1988 apud BURKHOLDER, 1997, p. 08). A primeira diferença é definida pela normal ao elipsóide ao invés da vertical dada pelo fio de prumo, em grande parte irrelevante, exceto nos casos em que é necessária uma precisão elevada. Outra diferença é que a origem move-se com o observador, por se trabalhar com as diferenças de coordenadas locais em relação ao ponto de origem especificado pelo usuário.

2.4.1. Conversão do sistema cartesiano global para o sistema cartesiano local

Para a transformação das coordenadas geodésicas (φ , λ e h), de um ponto, em coordenadas cartesianas retangulares (X , Y , Z), considera-se que a origem do sistema cartesiano coincide com a origem do elipsóide de revolução considerado (MONICO, 2008, p. 148). Conforme Burkholder (1997, p. 12) as coordenadas geodésicas dos pontos são transformadas em coordenadas cartesianas através das equações 2.36 a 2.38.

$$X = (N + h) \cdot \cos \varphi \cdot \cos \lambda \quad (2.36)$$

$$Y = (N + h) \cdot \cos \varphi \cdot \sin \lambda \quad (2.37)$$

$$Z = (N \cdot (1 - e^2) + h) \cdot \sin \varphi \quad (2.38)$$

Considerando:

$$N = \frac{a}{(1 - e^2 \cdot \sin^2 \varphi)^{1/2}} \quad (2.39)$$

onde: N é a grande normal, e é a primeira excentricidade e h é altura elipsoidal.

Para o cálculo das coordenadas geodésicas cartesianas de um segundo ponto (X_2 , Y_2 , Z_2), consideram-se as coordenadas do ponto de origem do sistema cartesiano (X_0 , Y_0 , Z_0), calculando-se as coordenadas do segundo ponto através das equações 2.40 a 2.42 (BURKHOLDER, 1997, p. 12).

$$X_2 = X_0 + \Delta X_{1,2} \quad (2.40)$$

$$Y_2 = Y_0 + \Delta Y_{1,2} \quad (2.41)$$

$$Z_2 = Z_0 + \Delta Z_{1,2} \quad (2.42)$$

Considerando-se que:

$$\Delta X_{0,2} = X_2 - X_0 \quad (2.43)$$

$$\Delta Y_{0,2} = Y_2 - Y_0 \quad (2.44)$$

$$\Delta Z_{0,2} = Z_2 - Z_0 \quad (2.45)$$

As componentes cartesianas geodésicas (ΔX , ΔY , ΔZ), quando não são conhecidas as coordenadas geodésicas cartesianas dos pontos em questão, podem ser obtidas pela conversão das componentes locais (Δv , Δu , Δw). Essa conversão pode ser feita diretamente pela matriz de rotação e translação (Equação 2.46) ou individualmente pelas equações 2.47 a 2.49.

$$\begin{bmatrix} \Delta X \\ \Delta Y \\ \Delta Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\text{sen } \lambda & -\text{sen } \varphi \cdot \cos \lambda & \cos \varphi \cdot \cos \lambda \\ \cos \lambda & -\text{sen } \varphi \cdot \text{sen } \lambda & \cos \varphi \cdot \text{sen } \lambda \\ 0 & \cos \varphi & \text{sen } \varphi \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \Delta v \\ \Delta u \\ \Delta w \end{bmatrix} \quad (2.46)$$

$$\Delta X = -\Delta v \cdot \text{sen } \lambda - \Delta u \cdot \text{sen } \varphi \cdot \cos \lambda + \Delta w \cdot \cos \varphi \cdot \cos \lambda \quad (2.47)$$

$$\Delta Y = \Delta v \cdot \cos \lambda - \Delta u \cdot \text{sen } \varphi \cdot \text{sen } \lambda + \Delta w \cdot \cos \varphi \cdot \text{sen } \lambda \quad (2.48)$$

$$\Delta Z = \Delta u \cdot \cos \varphi + \Delta w \cdot \text{sen } \varphi \quad (2.49)$$

Do mesmo modo, o processo inverso também é possível, com a conversão das componentes geodésicas (ΔX , ΔY , ΔZ) para componentes locais (Δv , Δu , Δw), realizada diretamente pela matriz de rotação e translação (Equação 2.50) ou individualmente pelas equações 2.51 a 2.53.

$$\begin{bmatrix} \Delta v \\ \Delta u \\ \Delta w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\text{sen } \lambda & \cos \lambda & 0 \\ -\text{sen } \varphi \cdot \cos \lambda & -\text{sen } \varphi \cdot \text{sen } \lambda & \cos \varphi \\ \cos \varphi \cdot \cos \lambda & \cos \varphi \cdot \text{sen } \lambda & \text{sen } \varphi \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \Delta X \\ \Delta Y \\ \Delta Z \end{bmatrix} \quad (2.50)$$

$$\Delta v = -\Delta X \cdot \text{sen } \lambda + \Delta Y \cdot \cos \lambda \quad (2.51)$$

$$\Delta u = -\Delta X \cdot \text{sen } \varphi \cdot \cos \lambda - \Delta Y \cdot \text{sen } \varphi \cdot \text{sen } \lambda + \Delta Z \cdot \cos \varphi \quad (2.52)$$

$$\Delta w = \Delta X \cdot \cos \varphi \cdot \cos \lambda + \Delta Y \cdot \cos \varphi \cdot \text{sen } \lambda + \Delta Z \cdot \text{sen } \varphi \quad (2.53)$$

Para o cálculo das coordenadas locais de um segundo ponto (u_2 , v_2 , w_2), consideram-se as coordenadas do ponto de origem do STL (u_0 , v_0 , w_0). Conforme a NBR 14.166 (ABNT, 1998, p. 08), adicionam-se às coordenadas do ponto de origem as constantes 150.000 m para as abscissas (v) e 250.000 m às ordenadas (u) do ponto de origem. Para w_0 , utiliza-se a altura elipsoidal (h) ou altitude ortométrica (H) desde que acurada. As coordenadas do segundo ponto podem ser calculadas através das equações 2.54 a 2,56 (BURKHOLDER, 1997, p. 12).

$$u_2 = u_0 + \Delta u_{0,2} \quad (2.54)$$

$$v_2 = v_0 + \Delta v_{0,2} \quad (2.55)$$

$$w_2 = w_0 + \Delta w_{0,2} \quad (2.56)$$

Considerando-se que:

$$\Delta u_{0,2} = u_2 - u_0 \quad (2.57)$$

$$\Delta v_{0,2} = v_2 - v_0 \quad (2.58)$$

$$\Delta w_{0,2} = w_2 - w_0 \quad (2.59)$$

Com o emprego das equações citadas acima, a alteração entre um sistema global e um sistema geodésico local de dados espaciais é simplificada. Para que isso ocorra, os dados devem estar representados em valores cartesianos para a conversão pelo modelo 3D.

Os valores calculados pelo modelo podem ser convertidos para diferentes sistemas de coordenadas. Para a transformação das coordenadas cartesianas (X, Y, Z), de um ponto, em coordenadas geodésicas (φ , λ , h), considera-se que a origem do sistema cartesiano coincide com a origem do elipsóide de revolução considerado (MONICO, 2008, p. 148).

Conforme Burkholder (1997, p. 12), as coordenadas cartesianas dos pontos são transformadas em coordenadas geodésicas através das equações 2.60 a 2.62.

$$\lambda = \tan^{-1} \left[\frac{Y}{X} \right] \quad (2.60)$$

$$\varphi = \tan^{-1} \left[\left(\frac{Z}{\sqrt{(X^2 + Y^2)}} \right) \cdot \left(1 + \left(\frac{e^2 \cdot N \cdot \sin \varphi}{Z} \right) \right) \right] \quad (2.61)$$

$$h = \left(\frac{\sqrt{(X^2 + Y^2)}}{\cos \varphi} \right) - N \quad (2.62)$$

Outra opção é utilizar a aproximação conforme Vincenty (1980 apud BURKHOLDER, 1997, p. 12), desenvolvida pelas equações 2.63 a 2.76.

$$b = a \cdot (1 - f) \quad (2.63)$$

$$p^2 = X^2 + Y^2 \quad (2.64)$$

$$r^2 = p^2 + Z^2 \quad (2.65)$$

$$h' = r - a + \left(\frac{Z^2 \cdot (a - b)}{r^2} \right) \quad (2.66)$$

$$a' = a + h' \quad (2.67)$$

$$b' = b + h' \quad (2.68)$$

$$\tan \varphi' = \left(\frac{a'}{b'} \right)^2 \cdot \left(\frac{Z}{p} \right) \cdot \left[1 + \left(\frac{1}{4} \cdot \frac{e^4 \cdot h' \cdot a \cdot (Z^2 - p^2)}{a'^4} \right) \right] \quad (2.69)$$

$$\cos^2 \varphi' = \frac{1}{(1 + \tan^2 \varphi')} \quad (2.70)$$

$$\sin \varphi' = \cos \varphi' \cdot \tan \varphi' \quad (2.71)$$

$$T = \frac{(p - (h' \cdot \cos \varphi'))^2}{a^2} \quad (2.72)$$

$$U = \frac{(Z - (h' \cdot \sin \varphi'))^2}{b^2} \quad (2.73)$$

$$h = h' + \left[\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{T + U - 1}{\left(\frac{T}{a} + \frac{U}{b} \right)} \right) \right] \quad (2.74)$$

$$\varphi = \tan^{-1} \left[\left(\frac{a}{b} \right)^2 \cdot \left(\frac{Z - (e^2 \cdot h' \cdot \sin \varphi')}{P} \right) \right] \quad (2.75)$$

$$\lambda = \tan^{-1} \left(\frac{Y}{X} \right) \quad (2.76)$$

2.4.2. Transporte do sistema geodésico cartesiano tridimensional para o sistema geodésico local pela matriz de rotação e translação

Para a transformação de coordenadas geodésicas em coordenadas topográficas locais, por rotações e translações, na mesma escala, as formulações matemáticas são dadas por Andrade (1998, p. 98), Jekeli (2006, p. 2-49 a 2-53) e ainda por Monico (2008, p. 151). A transformação é dada pela equação 2.77.

$$\begin{bmatrix} v \\ u \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sin \varphi_0 & \cos \varphi_0 \\ 0 & -\cos \varphi_0 & \sin \varphi_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sin \lambda_0 & \cos \lambda_0 & 0 \\ -\cos \lambda_0 & -\sin \lambda_0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} X - X_0 \\ Y - Y_0 \\ Z - Z_0 \end{bmatrix} \quad (2.77)$$

onde: v, u, w são as coordenadas topográficas transformadas no plano topográfico local; φ_0 , λ_0 são a latitude e a longitude do ponto de origem do sistema; X, Y, Z são as coordenadas geodésicas cartesianas do ponto a transformar; X_0 , Y_0 , Z_0 são as coordenadas geodésicas cartesianas tridimensionais do ponto de origem para o sistema.

2.4.3. Transformação de coordenadas geodésicas em coordenadas plano-retangulares no sistema topográfico local conforme a NBR 14.166

As fórmulas, a seguir apresentadas, permitem a transformação de coordenadas geodésicas em coordenadas plano-retangulares no Sistema Topográfico Local (STL). Na aplicação das fórmulas, consideram-se a latitude (φ) negativa no hemisfério sul e a longitude (λ) crescendo positivamente para oeste. Os coeficientes c e D são negativos no hemisfério sul, e o eixo das ordenadas é o eixo dos Y e o das abscissas é o dos X, conforme a NBR 14.166 (ABNT, 1998, p. 15).

$$X_P = 150000 + x_P \quad (2.78)$$

$$Y_P = 250000 + y_P \quad (2.79)$$

$$x_P = -(\Delta\lambda_1 \cdot \cos \varphi_P \cdot N_P \cdot \text{arc}1'' \cdot c) \quad (2.80)$$

$$y_P = \frac{1}{B} \cdot [\Delta\varphi_1 + Cx_P^2 + D \cdot \Delta\varphi_1^2 + E \cdot \Delta\varphi_1 \cdot x_P^2 + E \cdot Cx_P^4] \cdot c \quad (2.81)$$

$$\Delta\lambda = \lambda_P - \lambda_0 \quad (2.82)$$

$$\Delta\varphi = \varphi_P - \varphi_0 \quad (2.83)$$

$$\Delta\lambda_1 = \Delta\lambda'' \cdot [1 - 3,9173 \cdot 10^{-12} \cdot \Delta\lambda''^2] \quad (2.84)$$

$$\Delta\varphi_1 = \Delta\varphi'' \cdot [1 - 3,9173 \cdot 10^{-12} \cdot \Delta\varphi''^2] \quad (2.85)$$

$$B = \frac{1}{M_0 \cdot \text{arc}1''} \quad (2.86)$$

$$C = \frac{\tan \varphi_0}{2 \cdot M_0 \cdot N_0 \cdot \text{arc}1''} \quad (2.97)$$

$$D = \frac{3 \cdot e^2 \cdot \text{sen} \varphi_0 \cdot \cos \varphi_0 \cdot \text{arc}1''}{2 \cdot (1 - e^2 \cdot \text{sen}^2 \varphi_0)} \quad (2.88)$$

$$E = \frac{1 + 3 \cdot \tan \varphi_0}{6 \cdot N_0^2} \quad (2.89)$$

$$c = \frac{R_0 + H_t}{R_0} \quad (2.90)$$

$$R_0 = \sqrt{(M_0 \cdot N_0)} \quad (2.91)$$

$$M_0 = \frac{a \cdot (1 - e^2)}{(1 - e^2 \cdot \text{sen}^2 \varphi_0)^{3/2}} \quad (2.92)$$

$$N_0 = \frac{a}{(1 - e^2 \cdot \text{sen}^2 \varphi_0)^{1/2}} \quad (2.93)$$

$$N_P = \frac{a}{(1 - e^2 \cdot \text{sen}^2 \varphi_P)^{1/2}} \quad (2.94)$$

onde: M_0 é o raio de curvatura da seção meridiana do elipsóide de referência em P_0 ; N_0 é o raio de curvatura da seção meridiana do elipsóide de referência em P_0 ; N_P é o raio de curvatura da seção meridiana do elipsóide de referência em P ; c é o fator de elevação e H_t é a altitude ortométrica média do terreno ou altitude do plano topográfico local.

Neste processo de cálculo, aplica-se o fator de elevação (c) às coordenadas dos pontos de apoio geodésico que definem o PTL. Este fator eleva o plano ao nível médio do terreno da área de abrangência do STL (ZANETTI, 2006, p. 62). A NBR 14.166/98 estabelece o limite de desnível, na área a ser representada, em 150 metros, mantendo-se o erro inferior a 1/40.000, devido ao fator de redução ou

ampliação das distâncias horizontais. Estabelece, ainda, a necessidade de se subdividir o STL em sistemas parciais e menores que 50 km, em relação ao PTL adotado, quando os desníveis forem superiores ao limite estipulado (DAL´FORNO, 2010, p. 04).

Ainda, segundo Fuentealba et al. (2006) apud Dal´Forno (2010, p. 04):

mesmo que a área representada esteja dentro dos limites do PTL, o efeito da altura do PTL e dos desníveis envolvidos requer um fator de correção para as distâncias horizontais. Assim, conforme se observa na figura 18, a distância horizontal média (SH) entre os pontos A e B do terreno é projetada como SP no plano do horizonte do PTL, que tem como altura Ht (HPTL). Por serem representadas no PTL, as distâncias horizontais são afetadas por um fator de redução ou ampliação (ΔS), cuja magnitude depende da altura média ao PTL (CM), da distância horizontal entre os pontos e, em menor relação, do valor de Ht. A adoção de um plano médio envolve critérios que relacionam as distâncias máximas e os desníveis máximos que se encontram na área.

A figura 19 demonstra as interações do sistema de transformação acima.

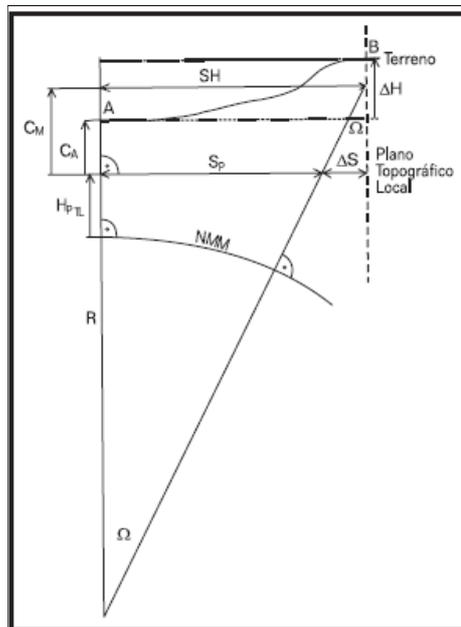


Figura 19 – Representação das reduções de distância quando do emprego do PTL.

Onde: ΔS é o fator de redução ou ampliação; CM é a cota média; SH é a distância horizontal projetada sobre o plano médio; R é raio médio de curvatura (6.378.000 m) e ΔH é a altura do PTL.

Fonte: adaptada de Fuentealba, *et al.* (2006 apud DAL´FORNO, 2010, p. 04).

3. MATERIAIS E MÉTODOS

Neste trabalho se desenvolveu a transformação de coordenadas globais e locais, associadas respectivamente, aos referenciais geodésicos e topográficos, por meio do modelo funcional de modelagem 3D e pela metodologia de solução do problema geodésico direto (PGD) aplicando as equações propostas por Puissant. Com isso, busca-se um estudo comparativo dos resultados obtidos.

Para o desenvolvimento do trabalho, realizaram-se, para a coleta de dados, dois levantamentos, quais sejam: i) um levantamento geodésico e ii) um levantamento topográfico. No levantamento geodésico foram determinadas as coordenadas geodésicas de quatro pontos (A, B, C e D), por meio de rastreamento GPS e que serviram para o apoio geodésico do levantamento topográfico. O levantamento topográfico consta de uma poligonal topográfica enquadrada em bases geodésicas com a utilização de uma estação total e conforme as especificações da NBR 13.133/94.

Com os dados obtidos nesses levantamentos, foram calculadas as coordenadas locais (topográficas) e as coordenadas globais (geodésicas) dos vértices da poligonal com o emprego das duas metodologias especificadas acima.

3.1. Levantamento geodésico

Para a determinação das coordenadas geodésicas dos pontos de apoio A, B, C e D, utilizou-se um receptor GPS da marca Topcon, modelo Hipper, de dupla frequência (L1/L2). Os dados foram coletados no método relativo estático, com permanência de trinta minutos em cada ponto, conforme estabelece a Norma de Georreferenciamento de Imóveis Rurais (INCRA, 2010, p. 36).

Os dados foram pós-processados no software TopconTools, utilizando a base de referência SMAR, localizada na Universidade Federal de Santa Maria, componente da Rede Brasileira de Monitoramento Contínuo (RBMC). Os arquivos para o pós-processamento foram obtidos por *download* a partir do *site* do Instituto

Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE). Os resultados apresentaram solução fixa para as coordenadas geodésicas dos pontos (Anexo A).

3.2. Levantamento topográfico

O levantamento topográfico da poligonal enquadrada (Apêndice A), classe IIIIP conforme estabelece a NBR 13.133/94, foi desenvolvido na BR 392 (trecho Santa Maria – São Sepé), entre os quilômetros 346 e 330, tendo como ponto inicial o ponto B e final o ponto C do levantamento geodésico, conforme esquema mostrado na figura 19.

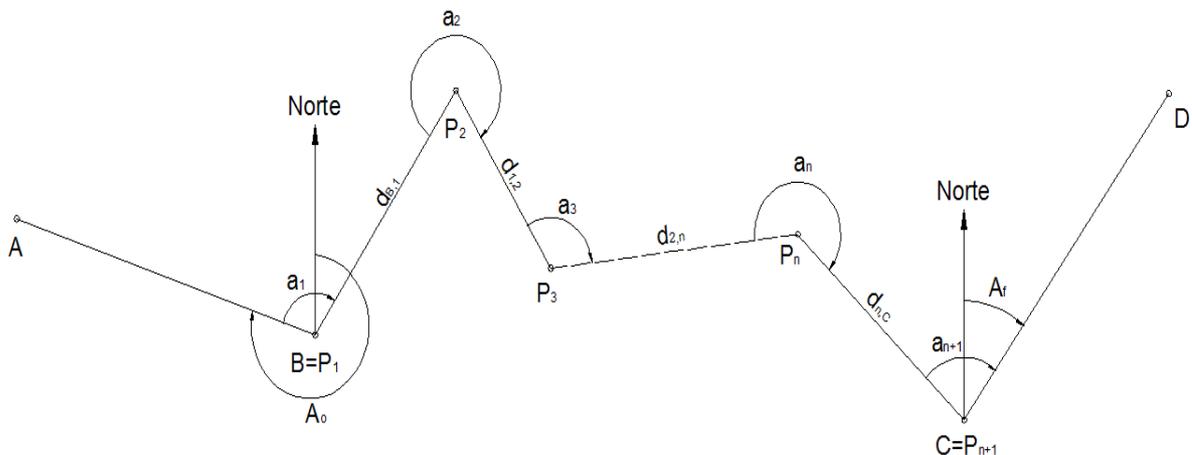


Figura 20 - Poligonal teórica enquadrada.

Onde: **A**, **B**, **C** e **D** são pontos com coordenadas geodésicas conhecidas; **P_i** são os vértices da poligonal; **a_i** são os ângulos horizontais internos em cada vértice; **d_{i,i+1}** são as distâncias horizontais entre os vértices da poligonal; **A₀** é o azimute inicial da base B-A; **A_f** é o azimute final da linha de base C-D. Considerando $i = 1, 2, 3, \dots, n$; **n** o n-ésimo vértice sucessivo que compõem o polígono.

Fonte: adaptado de Moraes (1997, p. 03).

No levantamento dos dados foi utilizada uma estação total SOKKIA com precisão angular de 5" e linear de 5 mm ± (3 ppm x D).

O levantamento iniciou no vértice B, primeiro vértice da poligonal topográfica, desenvolvendo-se por 33 vértices e finalizando no ponto C (Figura 20). Em cada vértice foram coletadas duas séries de observações, no caso, medidas dos ângulos

e distâncias horizontais entre os vértices da poligonal. Em cada série foram realizadas duas leituras (uma direta e outra inversa), obtendo-se posteriormente as médias aritméticas de cada observação. Os dados foram ajustados pelo Modelo dos Correlatos do Método dos Mínimos Quadrados (MMQ).

As observações ajustadas foram processadas em uma planilha eletrônica, utilizando-se o método tradicional de cálculo para a obtenção das coordenadas topográficas dos vértices da poligonal.

Adotou-se como origem do SAL o ponto B, adicionando-se às suas coordenadas topográficas (u_B, v_B) as constantes 150.000 m para as abscissas (v) e 250.000 para as ordenadas (u), conforme o que estabelece a NBR 14.166 (ABNT, 1998, p. 08). As coordenadas topográficas dos pontos A, C e D foram calculadas por meio das equações 3.1 a 3.2 empregadas pelo software Transgeolocal. No presente caso, considerou-se $w = h$, sendo h a altura elipsoidal.

$$u_2 = u_0 + \Delta u_{0,2} \quad (3.1)$$

$$v_2 = v_0 + \Delta v_{0,2} \quad (3.2)$$

$$w_2 = w_0 + \Delta w_{0,2} \quad (3.3)$$

O azimute inicial (Az_i) e o azimute final (Az_f), respectivamente do alinhamento entre os pontos AB e do alinhamento entre os pontos CD, foram calculados pelo software AZCERTO. O software calculou os azimutes e seus graus de incertezas a partir das coordenadas geodésicas dos pontos do alinhamento considerado. Os valores obtidos foram utilizados para o enquadramento da poligonal.

3.3. Transformação das coordenadas

As coordenadas geodésicas (φ, λ, h) dos pontos de apoio geodésico foram transformadas em coordenadas cartesianas (X, Y, Z) pelas equações 3.4 a 3.6.

$$X = (N + h) \cdot \cos \varphi \cdot \cos \lambda \quad (3.4)$$

$$Y = (N + h) \cdot \cos \varphi \cdot \sen \lambda \quad (3.5)$$

$$Z = (N \cdot (1 - e^2) + h) \cdot \sen \varphi \quad (3.6)$$

As coordenadas geodésicas desses pontos foram transportadas para o PTL pelo software Transgeolocal, que utiliza o método da Matriz de Rotação e Translação (Equação 3.7). Nessa transformação, obtiveram-se as diferenças de coordenadas (Δv , Δu , Δw) entre o ponto B, origem do SGL, e os pontos A, C e D.

$$\begin{bmatrix} v \\ u \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \text{sen } \varphi_0 & \text{cos } \varphi_0 \\ 0 & -\text{cos } \varphi_0 & \text{sen } \varphi_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{sen } \lambda_0 & \text{cos } \lambda_0 & 0 \\ -\text{cos } \lambda_0 & -\text{sen } \lambda_0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} X - X_0 \\ Y - Y_0 \\ Z - Z_0 \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

A partir das coordenadas topográficas (v , u , w) da poligonal, obtiveram-se as diferenças de coordenadas topográficas (Δv , Δu , Δw) entre os pontos do polígono e o ponto B por meio das equações 3.8 a 3.10.

$$\Delta v_{0,2} = v_2 - v_0 \quad (3.8)$$

$$\Delta u_{0,2} = u_2 - u_0 \quad (3.9)$$

$$\Delta w_{0,2} = w_2 - w_0 \quad (3.10)$$

Essas diferenças (Δv , Δu , Δw) foram transformadas em diferenças entre as coordenadas geodésicas (ΔX , ΔY , ΔZ) por meio das equações 3.11 a 3.13.

$$\Delta X = -\Delta v \cdot \text{sen } \lambda - \Delta u \cdot \text{sen } \varphi \cdot \text{cos } \lambda + \Delta w \cdot \text{cos } \varphi \cdot \text{cos } \lambda \quad (3.11)$$

$$\Delta Y = \Delta v \cdot \text{cos } \lambda - \Delta u \cdot \text{sen } \varphi \cdot \text{sen } \lambda + \Delta w \cdot \text{cos } \varphi \cdot \text{sen } \lambda \quad (3.12)$$

$$\Delta Z = \Delta u \cdot \text{cos } \varphi + \Delta w \cdot \text{sen } \varphi \quad (3.13)$$

Considerando as diferenças geodésicas (ΔX , ΔY , ΔZ) em relação à origem do SGL, determinaram-se as coordenadas geodésicas cartesianas (X , Y , Z) dos demais pontos da poligonal, por meio das equações 3.14 a 3.16. Realizou-se também o processo inverso para a verificação dos cálculos.

$$X_2 = X_0 + \Delta X_{1,2} \quad (3.14)$$

$$Y_2 = Y_0 + \Delta Y_{1,2} \quad (3.15)$$

$$Z_2 = Z_0 + \Delta Z_{1,2} \quad (3.16)$$

Após a obtenção das coordenadas geodésicas cartesianas, estimaram-se as coordenadas geodésicas (φ , λ , h) dos vértices do polígono. Neste processo, utilizaram-se as equações 3.17 a 3.30.

$$b = a \cdot (1 - f) \quad (3.17)$$

$$p^2 = X^2 + Y^2 \quad (3.18)$$

$$r^2 = p^2 + Z^2 \quad (3.19)$$

$$h' = r - a + \left(\frac{Z^2 \cdot (a - b)}{r^2} \right) \quad (3.20)$$

$$a' = a + h' \quad (3.21)$$

$$b' = b + h' \quad (3.22)$$

$$\tan \varphi' = \left(\frac{a'}{b'}\right)^2 \cdot \left(\frac{Z}{P}\right) \cdot \left[1 + \left(\frac{1}{4} \cdot \frac{e^4 \cdot h' \cdot a (Z^2 - P^2)}{a'^4}\right)\right] \quad (3.23)$$

$$\cos^2 \varphi' = \frac{1}{(1 + \tan^2 \varphi')} \quad (3.24)$$

$$\text{sen } \varphi' = \cos \varphi' \cdot \tan \varphi' \quad (3.25)$$

$$T = \frac{(P - (h' \cdot \cos \varphi'))^2}{a^2} \quad (3.26)$$

$$U = \frac{(Z - (h' \cdot \text{sen } \varphi'))^2}{b^2} \quad (3.27)$$

$$h = h' + \left[\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{T + U - 1}{\left(\frac{T}{a} + \frac{U}{b}\right)} \right) \right] \quad (3.28)$$

$$\varphi = \tan^{-1} \left[\left(\frac{a}{b}\right)^2 \cdot \left(\frac{Z - (e^2 \cdot h' \cdot \text{sen } \varphi')}{P}\right) \right] \quad (3.29)$$

$$\lambda = \tan^{-1} \left(\frac{Y}{X} \right) \quad (3.30)$$

Ainda, comparam-se os valores de coordenadas (φ , λ , h) do ponto C, obtidos pela modelagem com os valores determinados no levantamento geodésico.

Para a determinação das coordenadas geodésicas (φ , λ , h) pela solução do Problema Geodésico Direto (PGD), as observações topográficas foram reduzidas e corrigidas pelas equações 3.31 a 3.37.

$$\delta'' = \left(\frac{e^2 \cdot \cos^2 \varphi \cdot \text{sen}(2 \cdot Az)}{2 \cdot N \cdot (1 - e^2) \cdot \text{sen } 1''} \right) \cdot H_2 \quad (3.31)$$

$$Az - Az_1 = \left(\frac{e^2 \cdot s^2 \cdot \cos^2 \varphi \cdot \text{sen}(2 \cdot Az)}{6 \cdot M \cdot N \cdot \text{sen } 1''} \right) \quad (3.32)$$

$$\gamma = - \left[\Delta\lambda \cdot \text{sen } \varphi_m \cdot \sec \left(\frac{\Delta\varphi}{2} \right) + F \cdot (\Delta\lambda)^3 \right] \quad (3.33)$$

$$F = \frac{1}{2} \cdot \text{sen } \varphi_m \cdot \cos^2 \varphi_m \cdot \text{sen}^2 1'' \quad (3.34)$$

$$\frac{(R + H)}{Dh} = \frac{R}{Dc} \therefore Dc = \frac{(R \cdot Dh)}{(R + H)} \quad (3.35)$$

$$R_A = \sqrt{(M \cdot N)} \quad (3.36)$$

$$S = Dc + \left(\frac{Dc^3}{24 \cdot R^3} \right) \quad (3.37)$$

Posteriormente, aplicou-se o formulário de Puissant (Equações 3.38 a 3.52) para o transporte das coordenadas geodésicas do ponto B para os demais pontos da poligonal.

$$M_1 = \frac{a \cdot (1 - e^2)}{(1 - e^2 \cdot \text{sen}^2 \varphi_1)^{3/2}} \quad (3.38)$$

$$N_1 = \frac{a}{(1 - e^2 \cdot \text{sen}^2 \varphi_1)^{1/2}} \quad (3.39)$$

$$B = \frac{1}{M_1 \cdot \text{sen } 1''} \quad (3.40)$$

$$C = \frac{\text{tg } \varphi_1}{2 \cdot M_1 \cdot N_1 \cdot \text{sen } 1''} \quad (3.41)$$

$$D = \frac{3 \cdot e^2 \cdot \cos \varphi_1 \cdot \sin \varphi_1 \cdot \text{sen } 1''}{2 \cdot (1 - e^2 \cdot \text{sen}^2 \varphi_1)} \quad (3.42)$$

$$E = \frac{1 + (3 \cdot \text{tg}^2 \varphi_1)}{6 \cdot N_1^2} \quad (3.43)$$

$$h = \frac{S_{1,2} \cdot \cos \text{Ag}_{1,2}}{M_1 \cdot \text{sen } 1''} \quad (3.44)$$

$$\delta\varphi_{1,2}'' = B \cdot S_{1,2} \cdot \cos \text{Ag}_{1,2} - C \cdot S_{1,2}^2 \cdot \text{sen}^2 \text{Ag}_{1,2} - h \cdot E \cdot S_{1,2}^2 \cdot \text{sen}^2 \text{Ag}_{1,2} \quad (3.45)$$

$$\Delta\varphi_{1,2}'' = \delta\varphi_{1,2}'' - D \cdot (\delta\varphi_{1,2}'')^2 \quad (3.46)$$

$$\varphi_2 = \varphi_1 + \Delta\varphi_{1,2} \quad (3.47)$$

$$T_{1,2} = \frac{S_{1,2} \cdot \text{sen } \text{Ag}_{1,2}}{N_2 \cdot \cos \varphi_2} \quad (3.48)$$

$$M_m = \frac{a \cdot (1 - e^2)}{(1 - e^2 \cdot \text{sen}^2 \varphi_m)^{3/2}} \quad (3.49)$$

$$B_m = \frac{1}{M_m \cdot \text{sen } 1''} \quad (3.50)$$

$$\Delta\lambda_{1,2}'' = \frac{T_{1,2}}{\text{sen } 1''} \cdot \left(1 - \frac{S_{1,2}^2}{6 \cdot N_2^2} + \frac{T_{1,2}^2}{6} \right) \quad (3.51)$$

$$\lambda_2 = \lambda_1 + \Delta\lambda_{1,2} \quad (3.52)$$

As coordenadas geodésicas (φ , λ , h) dos vértices da poligonal obtidos pela modelagem 3D foram comparadas aos valores obtidos pelo formulário de Puissant, para a solução do PGD.

4. RESULTADOS E DISCUSSÃO

4.1. Coordenadas geodésicas e topográficas dos pontos A, B, C e D.

As coordenadas geodésicas dos pontos de apoio geodésico (A, B, C e D) da poligonal, obtidas no levantamento geodésico, apresentaram solução fixa para o rastreamento de trinta minutos. Os valores de coordenadas são apresentados na tabela 1.

Tabela 1 - Coordenadas geodésicas dos pontos A, B, C e D, com seu respectivo desvio-padrão.

Ponto	Latitude (φ)	Longitude (λ)	h (m)	Precisão (m)	
				Horizontal	Vertical
A	-29,741385	-53,794571	93,964	0,003	0,007
B	-29,744352	-53,792978	83,787	0,004	0,008
C	-29,863317	-53,744529	72,788	0,005	0,015
D	-29,868486	-53,741723	82,955	0,007	0,018

Onde: φ é a latitude geodésica, em graus decimais; λ é a longitude geodésica, em graus decimais; a precisão é dada respectivamente desvios-padrões (σ) de cada ponto observado pelo GPS.

As coordenadas geodésicas cartesianas (X, Y, Z) obtidas a partir da transformação das coordenadas curvilíneas (φ , λ , h) pelas equações 3.4 a 3.6 estão apresentadas na tabela 2.

Tabela 2 - Coordenadas geodésicas cartesianas (X, Y, Z) dos pontos A, B, C e D.

Ponto	X (m)	Y (m)	Z (m)
A	3273924,142	-4472360,889	-3145561,267
B	3273946,946	-4472131,043	-3145841,763
C	3273845,458	-4464067,798	-3157279,429
D	3273900,535	-4463684,491	-3157781,384

As coordenadas geodésicas cartesianas dos pontos A, B, C e D foram transportadas para o PTL através do software Transgeolocal (Equação 3.7),

obtendo-se as componentes (Δv , Δu , Δw) em relação ao ponto B. Aos valores obtidos somaram-se as constantes 150.000 m e 250.000 m. As coordenadas topográficas locais dos demais pontos (A, C e D), apresentadas na tabela 3, foram obtidas por meio da relação dada pelas equações 3.8 a 3.10.

Tabela 3 - Coordenadas topográficas cartesianas (v, u, w) dos pontos A, B, C e D.

Ponto	v (m)	u (m)	w (m)
A	149845,829	250328,870	93,954
B	150000,000	250000,000	83,787
C	154681,106	236811,635	57,379
D	154951,969	236238,509	66,125

4.2. Observações topográficas

As observações topográficas, ângulos (Hz) e distâncias horizontais (Dh) da poligonal enquadrada obtidas no levantamento topográfico, são apresentadas na tabela 4.

Tabela 4 – Observações topográficas obtidas do levantamento da poligonal enquadrada.

(Continua)				
Ponto	Ponto visado	Hz _P (°)	Az _{P,PV} (°)	Dh _{P,PV} (m)
B	2	185,830933	160,714155	534,1423
2	3	180,884774	161,598929	383,1825
3	4	181,562407	163,161336	461,9751
4	5	180,027362	163,188698	463,7352
5	6	179,943903	163,132601	234,4080
6	7	168,697350	151,829951	300,9001
7	8	201,129220	172,959171	473,2327
8	9	182,742103	175,701274	472,0984
9	10	179,973164	175,674438	490,1212
10	11	180,040796	175,715235	514,1978
11	12	182,692957	178,408191	243,2750
12	13	174,459622	172,867814	192,3632
13	14	166,925030	159,792844	471,2195
14	15	182,947867	162,740711	455,4106
15	16	182,552413	165,293124	484,7827
16	17	177,608788	162,901912	396,5330
17	18	178,865819	161,767730	450,9435

(Continuação)				
Ponto	Ponto visado	H_{z_P} (°)	Az_{P,P_V} (°)	Dh_{P,P_V} (m)
18	19	173,208587	154,976318	462,4827
19	20	178,403876	153,380193	458,1329
20	21	182,737646	156,117840	442,0665
21	22	178,617993	154,735833	445,2027
22	23	180,068706	154,804538	432,5121
23	24	179,787844	154,592383	432,8093
24	25	180,122243	154,714626	435,0302
25	26	179,980217	154,694843	420,1304
26	27	180,073005	154,767849	425,9020
27	28	179,996167	154,764016	419,9834
28	29	179,977721	154,741736	464,7082
29	30	179,895057	154,636794	462,8349
30	31	180,017527	154,654320	438,9695
31	32	180,072728	154,727048	417,4220
32	33	180,035696	154,762744	459,0110
33	C	179,986875	154,749619	477,2275

Onde: Az_{P,P_V} é o azimute topográfico do alinhamento considerado, em graus decimais; Dh_{P,P_V} é a distância horizontal entre os vértices considerados.

As coordenadas topográficas dos pontos da poligonal, calculadas a partir dos dados obtidos no levantamento topográfico, são apresentadas na tabela 5. Estas coordenadas foram obtidas após o ajustamento da poligonal.

Tabela 5 - Coordenadas topográficas da poligonal enquadrada.

(Continua)			
Ponto	v (m)	u (m)	w (m)
B	150.000,000	250.000,000	83,787
2	150.176,417	249.495,832	62,944
3	150.297,375	249.132,242	61,854
4	150.431,199	248.690,074	68,726
5	150.565,321	248.246,158	88,997
6	150.633,336	248.021,835	101,582
7	150.775,388	247.756,576	106,346
8	150.833,395	247.286,912	118,584
9	150.868,782	246.816,142	123,222
10	150.905,749	246.327,417	115,730
11	150.944,166	245.814,656	147,253
12	150.950,924	245.571,475	157,777
13	150.974,808	245.380,600	149,306
14	151.137,574	244.938,384	102,538
15	151.272,693	244.503,480	59,646
16	151.395,767	244.034,580	37,457
17	151.512,351	243.655,573	26,411
18	151.653,438	243.227,268	23,037
19	151.849,064	242.808,197	21,640

(Continuação)			
Ponto	v (m)	u (m)	w (m)
20	152.054,339	242.398,627	20,477
21	152.233,313	241.994,410	19,008
22	152.423,322	241.591,791	31,876
23	152.607,446	241.200,428	45,049
24	152.793,145	240.809,481	43,778
25	152.978,958	240.416,130	45,123
26	153.158,538	240.036,314	44,106
27	153.340,095	239.651,048	46,001
28	153.519,154	239.271,148	47,489
29	153.717,444	238.850,869	47,788
30	153.915,702	238.432,646	49,187
31	154.103,615	238.035,931	51,293
32	154.281,826	237.658,463	63,257
33	154.477,533	237.243,265	57,726
C	154.681,106	236.811,635	57,379

Onde: v, u, w são as coordenadas topográficas, em metros.

4.3. Cálculo das coordenadas geodésicas (ϕ , λ , h) dos pontos da poligonal por meio da modelagem 3D

A partir das coordenadas da poligonal topográfica (v, u, w) foram calculadas as diferenças de coordenadas topográficas (Δv , Δu , Δw) pelas equações 3.8 a 3.10, considerando como origem do sistema topográfico o ponto B. Estes valores foram transformados nas componentes elipsoidais (ΔX , ΔY , ΔZ) pelas equações 3.11 a 3.13. Os resultados são apresentados na tabela 6.

Tabela 6 – Diferenças de coordenadas geodésicas (ΔX , ΔY , ΔZ) obtidas a partir das diferenças de coordenadas topográficas (Δv , Δu , Δw) da poligonal.

(Continua)						
P	Δv	Δu	Δw	ΔX	ΔY	ΔZ
B	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
2	176,417	-504,168	-20,843	-16,096	320,642	-427,402
3	297,375	-867,758	-21,933	-25,612	538,409	-742,547
4	431,199	-1.309,926	-15,061	-43,691	789,655	-1.129,868
5	565,321	-1.753,842	5,210	-55,170	1.032,389	-1.525,354
6	633,336	-1.978,165	17,795	-59,577	1.153,551	-1.726,366
7	775,388	-2.243,424	22,559	-20,252	1.340,313	-1.959,040
8	833,395	-2.713,088	34,797	-104,813	1.554,021	-2.372,897

(Continuação)

P	Δv	Δu	Δw	ΔX	ΔY	ΔZ
9	868,782	-3.183,858	39,435	-211,848	1.760,135	-2.783,943
10	905,749	-3.672,583	31,943	-329,092	1.982,868	-3.204,560
11	944,166	-4.185,344	63,466	-432,199	2.188,746	-3.665,403
12	950,924	-4.428,525	73,990	-492,617	2.282,716	-3.881,766
13	974,808	-4.619,400	65,519	-533,629	2.379,170	-4.043,290
14	1.137,574	-5.061,616	18,751	-555,879	2.685,110	-4.404,040
15	1.272,693	-5.496,520	-24,141	-596,308	2.969,076	-4.760,364
16	1.395,767	-5.965,420	-46,330	-645,801	3.245,033	-5.156,477
17	1.512,351	-6.344,427	-57,376	-668,470	3.473,363	-5.480,069
18	1.653,438	-6.772,732	-60,750	-681,882	3.730,527	-5.850,269
19	1.849,064	-7.191,803	-62,147	-647,564	4.014,826	-6.213,434
20	2.054,339	-7.601,373	-63,310	-602,559	4.300,859	-6.568,465
21	2.233,313	-8.005,590	-64,779	-577,363	4.569,425	-6.918,697
22	2.423,322	-8.408,209	-51,911	-535,442	4.833,827	-7.274,653
23	2.607,446	-8.799,572	-38,738	-494,814	5.090,031	-7.620,990
24	2.793,145	-9.190,519	-40,009	-460,201	5.357,121	-7.959,798
25	2.978,958	-9.583,870	-38,664	-424,859	5.623,405	-8.301,991
26	3.158,538	-9.963,686	-39,681	-391,791	5.882,246	-8.631,261
27	3.340,095	-10.348,952	-37,786	-357,232	6.142,395	-8.966,708
28	3.519,154	-10.728,852	-36,298	-323,324	6.399,206	-9.297,293
29	3.717,444	-11.149,131	-35,999	-286,343	6.684,375	-9.662,348
30	3.915,702	-11.567,354	-34,600	-248,221	6.967,930	-10.026,162
31	4.103,615	-11.964,069	-32,494	-211,780	7.236,270	-10.371,654
32	4.281,826	-12.341,537	-20,530	-172,471	7.484,266	-10.705,326
33	4.477,533	-12.756,735	-26,061	-139,074	7.769,959	-11.063,077
C	4.681,106	-13.188,365	-26,408	-101,488	8.063,245	-11.437,666

Onde: P indica o vértice da poligonal; Δv , Δu , Δw são as componentes topográficas, em metros; ΔX , ΔY , ΔZ são as componentes geodésicas, em metros.

Com as componentes elipsoidais (ΔX , ΔY , ΔZ) dos pontos da poligonal em relação ao ponto B, calcularam-se as coordenadas geodésicas cartesianas (X, Y, Z) dos demais vértices do polígono pelas equações 3.14 a 3.16. Os resultados são apresentados na tabela 7.

Tabela 7 – Coordenadas geodésicas cartesianas da poligonal enquadrada.

(Continua)

Ponto	X (m)	Y (m)	Z (m)
B	3.273.946,946	-4.472.131,043	-3.145.841,763
2	3.273.930,850	-4.471.810,402	-3.146.269,165
3	3.273.921,334	-4.471.592,634	-3.146.584,310
4	3.273.903,255	-4.471.341,389	-3.146.971,631
5	3.273.891,775	-4.471.098,654	-3.147.367,117

(Continuação)			
Ponto	X (m)	Y (m)	Z (m)
6	3.273.887,369	-4.470.977,492	-3.147.568,129
7	3.273.926,694	-4.470.790,730	-3.147.800,803
8	3.273.842,133	-4.470.577,022	-3.148.214,660
9	3.273.735,098	-4.470.370,908	-3.148.625,706
10	3.273.617,854	-4.470.148,176	-3.149.046,323
11	3.273.514,747	-4.469.942,297	-3.149.507,166
12	3.273.454,329	-4.469.848,327	-3.149.723,529
13	3.273.413,317	-4.469.751,874	-3.149.885,053
14	3.273.391,066	-4.469.445,933	-3.150.245,803
15	3.273.350,638	-4.469.161,967	-3.150.602,127
16	3.273.301,145	-4.468.886,011	-3.150.998,240
17	3.273.278,475	-4.468.657,680	-3.151.321,832
18	3.273.265,064	-4.468.400,516	-3.151.692,032
19	3.273.299,381	-4.468.116,217	-3.152.055,197
20	3.273.344,386	-4.467.830,185	-3.152.410,228
21	3.273.369,583	-4.467.561,619	-3.152.760,460
22	3.273.411,504	-4.467.297,217	-3.153.116,417
23	3.273.452,132	-4.467.041,012	-3.153.462,753
24	3.273.486,744	-4.466.773,923	-3.153.801,561
25	3.273.522,087	-4.466.507,638	-3.154.143,754
26	3.273.555,155	-4.466.248,797	-3.154.473,024
27	3.273.589,714	-4.465.988,649	-3.154.808,471
28	3.273.623,621	-4.465.731,838	-3.155.139,056
29	3.273.660,603	-4.465.446,669	-3.155.504,111
30	3.273.698,725	-4.465.163,113	-3.155.867,926
31	3.273.735,166	-4.464.894,774	-3.156.213,417
32	3.273.774,475	-4.464.646,777	-3.156.547,089
33	3.273.807,871	-4.464.361,084	-3.156.904,840
C	3.273.845,458	-4.464.067,798	-3.157.279,429

Onde: X, Y, Z são as coordenadas geodésicas cartesianas, em metros.

As coordenadas geodésicas curvilíneas dos pontos da poligonal, apresentadas na tabela 8, foram calculadas pelas equações 3.17 a 3.30 aplicadas as coordenadas geodésicas cartesianas apresentadas na tabela 7.

Tabela 8 – Coordenadas geodésicas curvilíneas da poligonal.

(Continua)			
Ponto	φ (°)	λ (°)	h (m)
B	-29,744352	-53,792978	83,787
2	-29,748900	-53,791154	62,967
3	-29,752180	-53,789903	61,920
4	-29,756169	-53,788519	68,876
5	-29,760173	-53,787133	89,264

Ponto	(Continuação)		
	φ (°)	λ (°)	h (m)
6	-29,762197	-53,786429	101,921
7	-29,764590	-53,784960	106,789
8	-29,768827	-53,784360	119,218
9	-29,773074	-53,783994	124,079
10	-29,777482	-53,783611	116,856
11	-29,782108	-53,783214	148,702
12	-29,784302	-53,783143	159,391
13	-29,786024	-53,782896	151,061
14	-29,790013	-53,781212	104,657
15	-29,793937	-53,779814	62,152
16	-29,798167	-53,778541	40,411
17	-29,801586	-53,777334	29,759
18	-29,805449	-53,775874	26,862
19	-29,809230	-53,773850	25,980
20	-29,812924	-53,771726	25,356
21	-29,816570	-53,769874	24,445
22	-29,820202	-53,767907	37,901
23	-29,823732	-53,766001	51,678
24	-29,827258	-53,764079	51,038
25	-29,830806	-53,762156	53,049
26	-29,834232	-53,760296	52,702
27	-29,837707	-53,758417	55,307
28	-29,841134	-53,756563	57,521
29	-29,844925	-53,754509	58,656
30	-29,848697	-53,752456	60,921
31	-29,852275	-53,750510	63,880
32	-29,855680	-53,748665	76,684
33	-29,859424	-53,746637	72,108
C	-29,863317	-53,744529	72,788

Compararam-se as coordenadas do ponto C, último ponto do polígono, obtidas pela modelagem com as coordenadas determinadas pelo levantamento GPS, obtendo-se diferença na latitude e longitude inferior a 1×10^{-12} graus e 0,000 m para a altura elipsoidal, conforme mostra a tabela 9.

Tabela 9 – Comparação das coordenadas geodésicas curvilíneas do ponto C.

Ponto	φ (°)	λ (°)	h (m)
C	-29,863317	-53,744529	72,788
C'	-29,863317	-53,744529	72,788

Onde: para C são apresentadas as coordenadas determinadas pelo levantamento GPS e para C' as coordenadas calculadas pelo modelo.

4.4. Cálculo das coordenadas geodésicas por meio do PGD

Para a solução do problema geodésico direto (PGD), as observações topográficas ajustadas foram reduzidas ao elipsóide de referência (Tabela 10) por meio das equações 3.31 a 3.37.

Tabela 10 – Observações topográficas reduzidas ao elipsóide de referência.

Ponto	Ponto visado	$Ag_{P,Pv}$ (°)	$S_{P,Pv}$ (m)
B	2	160,714247	534,1353
2	3	161,598116	383,1787
3	4	163,159903	461,9707
4	5	163,186578	463,7302
5	6	163,129793	234,4047
6	7	151,826794	300,8953
7	8	172,955285	473,2248
8	9	175,697089	472,0896
9	10	175,670072	490,1117
10	11	175,710678	514,1885
11	12	178,403437	243,2694
12	13	172,863025	192,3584
13	14	159,787932	471,2085
14	15	162,734963	455,4033
15	16	165,286681	484,7782
16	17	162,894836	396,5307
17	18	161,760055	450,9416
18	19	154,967917	462,4810
19	20	153,370786	458,1313
20	21	156,107377	442,0651
21	22	154,724449	445,2014
22	23	154,792177	432,5100
23	24	154,579073	432,8062
24	25	154,700360	435,0272
25	26	154,679621	420,1275
26	27	154,751701	425,8991
27	28	154,746933	419,9804
28	29	154,723731	464,7047
29	30	154,617767	462,8314
30	31	154,634272	438,9661
31	32	154,706031	417,4186
32	33	154,740808	459,0065
33	C	154,726674	477,2232

Onde: $Ag_{P,Pv}$ é o azimute geodésico do alinhamento considerados, em graus decimais; $S_{P,Pv}$ é a geodésica entre os dois vértices considerados, em metros.

As coordenadas geodésicas curvilíneas dos pontos da poligonal, apresentadas na tabela 11, foram calculadas pela solução do PGD por meio das equações 3.38 a 3.53.

Tabela 11 – Coordenadas geodésicas curvilíneas da poligonal calculadas por meio do PGD.

Ponto	φ (°)	λ (°)
B	-29,744352	-53,792978
2	-29,748900	-53,791154
3	-29,752180	-53,789903
4	-29,756169	-53,788519
5	-29,760174	-53,787133
6	-29,762197	-53,786429
7	-29,764590	-53,784960
8	-29,768827	-53,784360
9	-29,773074	-53,783994
10	-29,777483	-53,783611
11	-29,782108	-53,783214
12	-29,784302	-53,783143
13	-29,786024	-53,782896
14	-29,790013	-53,781212
15	-29,793936	-53,779815
16	-29,798166	-53,778541
17	-29,801585	-53,777335
18	-29,805449	-53,775875
19	-29,809229	-53,773850
20	-29,812924	-53,771726
21	-29,816570	-53,769874
22	-29,820202	-53,767907
23	-29,823732	-53,766002
24	-29,827258	-53,764079
25	-29,830806	-53,762156
26	-29,834232	-53,760297
27	-29,837707	-53,758417
28	-29,841134	-53,756563
29	-29,844925	-53,754510
30	-29,848697	-53,752456
31	-29,852275	-53,750510
32	-29,855680	-53,748665
33	-29,859425	-53,746637
C	-29,863318	-53,744529

Onde: latitude (φ) e a longitude (λ) geodésica, em graus.

4.5. Comparação dos valores das coordenadas geodésicas (φ , λ) obtidos pela modelagem 3D e pela solução do PGD por Puissant

As coordenadas geodésicas obtidas pela modelagem 3D são comparadas aos valores obtidos pela solução do Problema Geodésico Direto (PGD). Na tabela 12 são apresentados os valores obtidos para latitude dos pontos da poligonal e as respectivas discrepâncias entre as metodologias adotadas.

Tabela 12 – Latitudes geodésicas (φ°) dos pontos da poligonal calculadas por modelagem 3D e por Puissant.

Ponto	Modelagem 3D	Puissant	$\Delta\varphi$ (")
B	-29,744352	-29,744352	0,000000
2	-29,748900	-29,748900	0,000044
3	-29,752180	-29,752180	0,000042
4	-29,756169	-29,756169	0,000012
5	-29,760173	-29,760174	0,000202
6	-29,762197	-29,762197	0,000334
7	-29,764590	-29,764590	0,000397
8	-29,768827	-29,768827	0,000573
9	-29,773074	-29,773074	0,000655
10	-29,777482	-29,777483	0,000522
11	-29,782108	-29,782108	0,001206
12	-29,784302	-29,784302	0,001449
13	-29,786024	-29,786024	0,001253
14	-29,790013	-29,790013	0,000061
15	-29,793937	-29,793936	0,001126
16	-29,798167	-29,798166	0,001783
17	-29,801586	-29,801585	0,002123
18	-29,805449	-29,805449	0,002216
19	-29,809230	-29,809229	0,002239
20	-29,812924	-29,812924	0,002254
21	-29,816570	-29,816570	0,002283
22	-29,820202	-29,820202	0,001696
23	-29,823732	-29,823732	0,001067
24	-29,827258	-29,827258	0,001089
25	-29,830806	-29,830806	0,000982
26	-29,834232	-29,834232	0,000992
27	-29,837707	-29,837707	0,000846
28	-29,841134	-29,841134	0,000717
29	-29,844925	-29,844925	0,000644
30	-29,848697	-29,848697	0,000502
31	-29,852275	-29,852275	0,000313
32	-29,855680	-29,855680	0,000502
33	-29,859424	-29,859425	0,000211
C	-29,863317	-29,863318	0,000265

Onde: os valores de latitude (φ) calculados pela Modelagem 3D e por Puissant são apresentados em grau decimal ($^\circ$); a diferenças ($\Delta\varphi$) entre as metodologias é apresentada em segundos (").

Avaliando-se os valores calculados pela modelagem 3D e pela solução do PGD, obteve-se para latitude (ϕ) uma diferença média de $9,00 \times 10^{-4}$ segundos e um desvio-padrão (σ) de $\pm 7,31 \times 10^{-4}$ segundos.

Na tabela 13 são apresentados os valores obtidos para longitude geodésica (λ) dos pontos da poligonal e as respectivas discrepâncias entre as metodologias adotadas.

Tabela 13 – Longitudes geodésicas (λ°) dos pontos da poligonal calculadas por modelagem 3D e por Puissant.

Ponto	Modelagem 3D	Puissant	$\Delta\lambda$ (")
B	-53,792978	-53,792978	0,000000
2	-53,791154	-53,791154	0,000052
3	-53,789903	-53,789903	0,000076
4	-53,788519	-53,788519	0,000085
5	-53,787133	-53,787133	0,000044
6	-53,786429	-53,786429	0,000011
7	-53,784960	-53,784960	0,000005
8	-53,784360	-53,784360	0,000027
9	-53,783994	-53,783994	0,000023
10	-53,783611	-53,783611	0,000045
11	-53,783214	-53,783214	0,000098
12	-53,783143	-53,783143	0,000143
13	-53,782896	-53,782896	0,000084
14	-53,781212	-53,781212	0,000251
15	-53,779814	-53,779815	0,000593
16	-53,778541	-53,778541	0,000798
17	-53,777334	-53,777335	0,000915
18	-53,775874	-53,775875	0,000968
19	-53,773850	-53,773850	0,001001
20	-53,771726	-53,771726	0,001031
21	-53,769874	-53,769874	0,001066
22	-53,767907	-53,767907	0,000897
23	-53,766001	-53,766002	0,000708
24	-53,764079	-53,764079	0,000740
25	-53,762156	-53,762156	0,000725
26	-53,760296	-53,760297	0,000752
27	-53,758417	-53,758417	0,000721
28	-53,756563	-53,756563	0,000695
29	-53,754509	-53,754510	0,000692
30	-53,752456	-53,752456	0,000661
31	-53,750510	-53,750510	0,000610
32	-53,748665	-53,748665	0,000308
33	-53,746637	-53,746637	0,000448
C	-53,744529	-53,744529	0,000450

Onde: os valores de longitude (λ) calculados pela Modelagem 3D e Puissant são apresentados em grau decimal; a diferenças ($\Delta\lambda$) entre as metodologias é apresentada em segundos (").

Avaliando-se os valores calculados pela modelagem 3D e pela solução do PGD, obteve-se para longitude (λ) uma diferença média de $4,62 \times 10^{-4}$ segundos e um desvio-padrão (σ) de $\pm 3,71 \times 10^{-4}$ segundos.

As discrepâncias calculadas ($\Delta\phi$ e $\Delta\lambda$) entre as metodologias podem ser atribuídas ao critério de arredondamento adotado para os cálculos, bem como, o método de Puissant necessitar a redução das observações topográficas ao elipsóide e a adoção de valores médios de latitude e longitude nos cálculos para o transporte de coordenadas.

Para uma latitude e longitude médias, a partir dos desvios-padrões calculados para as diferenças $\Delta\phi$ e $\Delta\lambda$ (Tabelas 12 e 13), determinou-se a incerteza de $\pm 0,080$ m, ao nível de significância de 95 %, entre a posição do ponto determinada pela modelagem 3D e por Puissant.

4.6. Comparação das distâncias topográficas com mudança da origem do plano topográfico

Comparou-se os valores de distância plana entre os pontos B-C e C-B, calculadas no plano local com origem no ponto B, com os valores de distância plana calculados no plano local com origem no ponto C. Os valores das discrepâncias e do erro relativo (ξ) são apresentados na tabela 14.

Tabela 14 – Diferença entre os valores de distância entre os pontos B e C, conforme a origem adota para o PTL.

Origem	D (m)	D' (m)	ξ
B	13994,489	13.994,404	<1/160.000
C	13994,513	13.994,492	<1/600.000
Ξ	<1/580.000	<1/150.000	-

Onde: D é a distância plana calculada entre os pontos B e C, em metros; D' é a distância plana entre os pontos projetado no outro plano do observador, em metros; ξ é a escala aproximada da discrepância.

Avaliando a tabela acima, observa-se que a maior diferença é de 0,109 m entre a distância calculada (D) no plano de C com a projeção (D') no plano de B,

correspondente a uma discrepância na ordem de 1/128.000. Assim, a alteração da origem do sistema, do ponto B para o ponto C, na conversão das coordenadas não acarretou erro nas distâncias entre os pontos B e C, superior ao limite estabelecido para o PTL pela NBR 13.133 (ABNT, 1994, p. 05 a 06). O erro relativo de 1/128.000 é inferior a 1/35.000 estabelecida pela norma. Este resultado, considerando que os pontos são os extremos da poligonal, possibilita escolher, neste caso, qualquer ponto do banco de dados espaciais como origem do sistema.

5. CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES

O modelo funcional tridimensional (3D) realiza a conversão das coordenadas topográficas em geodésicas com precisão equivalente ao método tradicional de solução do PGD por Puissant, apresentando uma quantidade menor de cálculos e a possibilidade da realização do processo inverso, também de forma rápida e precisa.

A comparação dos resultados obtidos pela aplicação das duas metodologias, aqui propostas, apresenta um desvio-padrão (σ) de $\pm 7,31 \times 10^{-4}$ segundos para a latitude (φ) e um desvio-padrão (σ) de $\pm 3,71 \times 10^{-4}$ segundos para a longitude (λ). O que resulta em uma incerteza de $\pm 0,080$ m, ao nível de significância de 95 %, entre a posição média de um ponto determinada pela modelagem 3D e pelo PGD. Este resultado possibilita, neste caso, a substituição da metodologia do PGD pela modelagem 3D.

No presente caso, não existiu diferença significativa nas distâncias entre os pontos, ao se escolher qualquer um deles como a origem do sistema topográfico geodésico local.

Assim, pode-se concluir que a modelagem 3D é uma solução rápida e precisa para o georreferenciamento, para a implantação de pontos geodésicos no PTL e para a implantação de um banco de dados espaciais (globais ou locais), que podem ser tratados como geocêntricos ou como topocêntricos, conforme a necessidade. Esta metodologia pode ser utilizada para trabalhos de georreferenciamento e mapeamento, cadastro urbano e rural e atualização cartográfica, entre outros, em que se possa admitir a incerteza encontrada.

Por fim, recomendam-se mais avaliações do modelo funcional, tais como: i) introdução em um banco de dados maior; ii) estudos para a modelagem da influência da curvatura da Terra no cálculo da altura elipsoidal (h); iii) a introdução do desvio da vertical no modelo; iv) avaliações referentes à manutenção da precisão do PTL para linhas mais longas e com desníveis acentuados; v) estabelecer os limites extremos das latitudes para que a variação das distâncias, no plano topográfico, fiquem dentro do limite aceitável, quando se deseja tomar qualquer ponto do levantamento para a origem do sistema; vi) a introdução do modelo estocástico para avaliações qualitativas dos dados e do sistema.

6. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

AGUIRRE, A. J.; MELLO FILHO, J. A. de. **Introdução à Cartografia**. Santa Maria: UFSM / CCR / Departamento de Engenharia Rural, 78 p. 2007.

ANDRADE, R. J. de O.; **Determinação do desvio da vertical empregando observáveis da topografia clássica e do posicionamento por satélites**. Dissertação de mestrado em *Magister Scientiae*. Viçosa : UFV, 2008, p. 109.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 13.133 – Execução de levantamento topográfico**. Rio de Janeiro, 35 p. 1994.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 14.166 – Rede de referência cadastral municipal – Procedimento**. Rio de Janeiro, 23 p. 1998.

DEFENSE MAPPING AGENCY. **The universal grids: Universal Transverse Marcator (UTM) and Universal Polar Stereographic (UPS)**. DMA technical manual, Fairfax, VA, 49 p. 1989.

BURKHOLDER, E. F. **Definition and description of a Global Spatial Data Model (GSDM)**. U.S. Copyright Office, Washington, D.C. 1997.

DAL'FORNO, G. L.; ANTONIAZZI, R. L.; STRIEDER, A. J.; AGUIRRE, A. J. **Programa computacional para transformação de coordenadas geodésicas em coordenadas locais e o processo inverso**. A MIRA – Agrimensura e Cartografia. Criciúma, Santa Catarina, p. 79-80. Ago. 2008.

DAL'FORNO, G.L.; ANTONIAZZI, R.L; STRIEDER, A.J.; AGUIRRE, A.J. 2008. **Programa computacional para la transformación de Coordenadas Geodésicas Geocéntricas em Coordenadas Topográficas Locales y el proceso inverso**. In: CONGRESO ARGENTINO, 10 Y LATINOAMERICANO DE AGRIMENSURA, 7, Santa Fé, *Anais* (Digital).

DAL'FORNO, G. L.; AGUIRRE, A. J.; HILLEBRAND, F. L.; GREGÓRIO, F. de V. **Transformação de Coordenadas Geodésicas em Coordenadas no Plano Topográfico Local pelos Métodos da Norma NBR 14166:1998 e o de Rotações e Translações**. In: Anais III Simpósio Brasileiro de Ciências Geodésicas e Tecnologias da Geoinformação, Recife-PE, 27-30 de julho de 2010.

DAL'FORNO, G. L.; DAPPER F.; STRIEDER, A. J.; AGUIRRE, A. J. **TRANSGEOLocal – Programa Computacional para Transformação de Coordenadas Geodésicas em Coordenadas Locais e o Processo Inverso**. In: Anais VI Colóquio Brasileiro de Ciências Geodésicas, UFPR, 2009.

FUENTEALBA, O. C.; LANGE, H.; ZEPEDA, R. G. **Manual de Carreteras - Procedimientos de Estudios Viales, vol. 2**. Santiago, Gobierno de Chile, Ministério de Obras Públicas, Dirección de Vialidad. 2001. 291 p.

GEMAEL, C. **Introdução a geodésia física**. Curitiba: Editora UFPR, 304 p. 1999 (reimpresso 2002).

INCRA. **Norma Técnica para Georreferenciamento de Imóveis Rurais**. 2ª Edição. 2010. 86 p.

JEKELI, C. **Geometric Reference Systems**. Division of Geodesy and Geospatial Science. School of Earth Sciences. Ohio State University, 2006. 195 p.

LEICK, A. **GPS Satellite Surveying**. John Wiley & Sons, Toronto, Canadá. 1990.

MONICO, J. F. G. **Posicionamento pelo GNSS: descrição, fundamentos e aplicações**. 2ª Ed. São Paulo: Editora UNESP, 2008.

MORAES, C. V. **Aplicação do ajustamento às poligonais**. Dissertação de Mestrado em Ciências Geodésicas. Curitiba : UFPR, 1997.

MORAES, C. V. **Caracterização de extremas no espaço geométrico: fundamentos jurídicos e geodésicos**. Revista Brasileira de Cartografia, N° 53, p. 1-15, dezembro de 2001.

NATIONAL GEODETIC SURVEY. **Geoid**. United State of America (USA), 2001. Disponível em: <http://www.ngs.noaa.gov/GEOID/geoid_def.html>. Acesso em: 04/08/2011.

OLIVEIRA, B. P. de. **A influência do desvio da vertical e da ondulação geoidal no processamento das redes geodésicas**. Rio de Janeiro: Instituto Militar de Engenharia, 2004. 162 p.

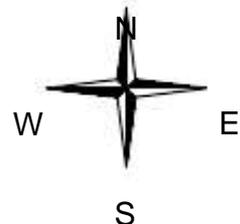
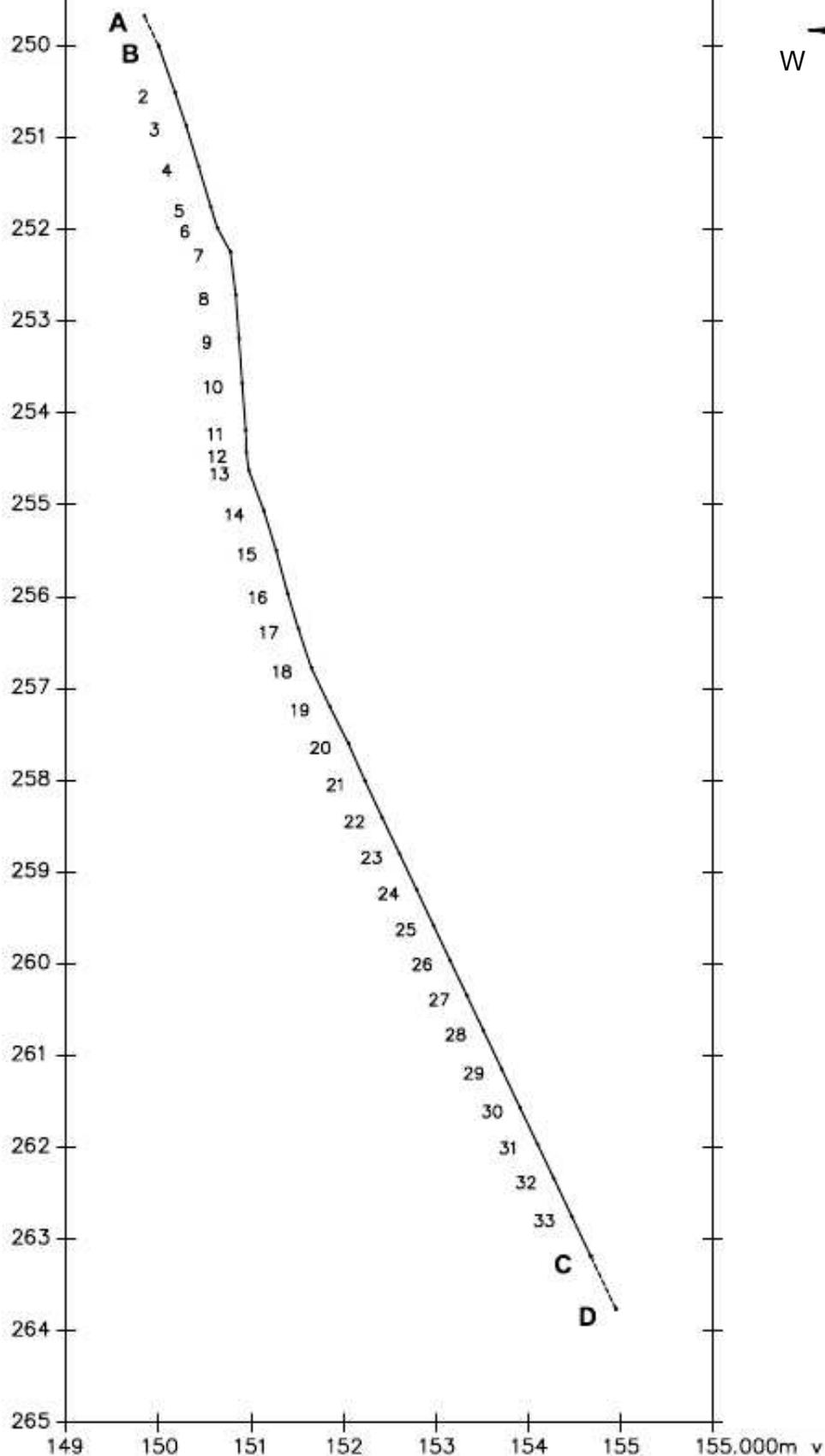
TORGE, W. **Geodesy**. 3ª Edição, Walter de Gruyter. Berlim. 416 p. 2001.

ZANETTI, M. A. Z. **Implicações atuais no relacionamento entre sistemas terrestres de referência de origem local e geocêntrica.** Tese de Doutorado em Ciências Geodésicas. Curitiba : UFPR, 111 p. 2006.

7. APÊNDICES

Apêndice A – Croqui da poligonal topográfica enquadrada.

249.000m u



CROQUI DA POLIGONAL TOPOGRÁFICA ENQUADRADA

ESCALA:

1/70.000

SISTEMA TOPOGRÁFICO LOCAL

PRANCHA:

COORDENADAS CARTESIANAS LOCAIS (v, u)

01/01

8. ANEXOS

Anexo A – Relatório resumido do processamento GPS

Nome do projeto: Gleson Dal Forno 2010-02-06.ttp

Localização: Z:\CAD\Topcon\Gelson Dal Forno 2010-02-06

Data criação: 6/2/2010 - 11:57:59

Autor: Fernando Luis

Unidade Linear: Meters

Unidade Angular: DMS

Projeção: UTMSouth-Zone_22 : 54W to 48W

Datum: SIRGAS

Relatório resumo do ponto

Nome	Latitude	Longitude	Malha Norte (m)	Malha Este (m)	Elevação (m)	σ_n (m)	σ_e (m)	σ_{Hz} (m)
E_01_S54W	29°44'28,98605S	53°47'40,45657W	6706599,174	229719,149	93,964	0,003	0,002	0,004
E_02_MNEO	29°44'39,66658S	53°47'34,71919W	6706273,973	229881,311	83,787	0,003	0,003	0,004
E_03_S54W	29°51'47,94295S	53°44'40,30291W	6693196,771	234883,098	72,788	0,004	0,003	0,005
E_04_MNEO	29°52'06,55127S	53°44'30,20143W	6692630,155	235167,921	82,955	0,005	0,004	0,007
SMAR	29°43'08,12600S	53°42'59,73530W	6709269,527	237205,247	113,11	0	0	0

Relatório observações GPS

Nome	Precisão Horizontal (m)	Precisão Vertical (m)	Tipo Solução	Estado	RMS	Distância (m)	Duração	GPS Satellites
E_01_S54W	0,003	0,007	Fixo	Ajustado	0,007	7944,474	00:32:00	10
E_02_MNEO	0,004	0,008	Fixo	Ajustado	0,009	7909,271	00:34:55	10
E_03_S54W	0,005	0,013	Fixo	Ajustado	0,014	16232,459	00:31:40	8
E_04_MNEO	0,007	0,018	Fixo	Ajustado	0,020	16756,226	00:33:40	8