

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA MARIA  
CENTRO DE CIÊNCIAS RURAIS  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM GEOMÁTICA**

**FUNDAMENTOS CONCEITUAIS DA DETERMINAÇÃO  
DO GEÓIDE PELO MÉTODO GRAVIMÉTRICO**

**DISSERTAÇÃO**

**JOCELAINE CARGNELUTTI**

**Santa Maria, RS, Brasil  
2007**

# **FUNDAMENTOS CONCEITUAIS DA DETERMINAÇÃO DO GEÓIDE PELO MÉTODO GRAVIMÉTRICO**

**por**

**Jocelaine Cargnelutti**

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado do Programa de Pós-Graduação em Geomática, Área de Concentração em Tecnologia da Geoinformação, da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM, RS), como requisito parcial para a obtenção do grau de  
**Mestre em Geomática**

**Orientador: Prof. Carlito Vieira de Moraes**

Santa Maria, RS, Brasil

2007

**Cargnelutti, Jocelaine, 1980-**

**C276f**

Fundamentos conceituais da determinação do geóide pelo método gravimétrico / por Jocelaine Cargnelutti ; orientador Carlito Vieira de Moraes. – Santa Maria, 2007.

152 f. ; il.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal de Santa Maria, Centro de Ciências Rurais, Programa de Pós-Graduação em Geomática, RS, 2007.

1. Geomática 2. Terra real 3. Terra normal 4. Integral de Stokes 5. Ondulação do geóide 6. Potencial de gravidade 7. Fórmulas de Vening-Meinesz 8. Anomalia da gravidade 9. Componentes do desvio da vertical I Moraes, Carlito Vieira de, orient. II. Título

CDU: 528.21

Ficha catalográfica elaborada por  
Luiz Marchiotti Fernandes – CRB 10/1160  
Biblioteca Setorial do Centro de Ciências Rurais/UFSM

**Universidade Federal de Santa Maria  
Centro de Ciências Rurais  
Programa de Pós-Graduação em Geomática**

A Comissão Examinadora, abaixo assinada,  
aprova a Dissertação

**FUNDAMENTOS CONCEITUAIS DA DETERMINAÇÃO DO GEÓIDE  
PELO MÉTODO GRAVIMÉTRICO**

elaborada por

Jocelaine Cargnelutti

Como requisito parcial para a obtenção do grau de  
**Mestre em Geomática**

**COMISSÃO EXAMINADORA:**

---

**Prof. Dr. Carlito Vieira de Moraes**  
(Presidente/Orientador)

---

**Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Inês Farias Ferreira** – Membro (UFSM)

---

**Dr. Everson Dal Piva** – Membro (FINEP/UFSM)

---

**Prof. Dr. Eno Darci Saatkamp** – Membro (UFSM)

Santa Maria, 30 de março de 2007.

Dedico esta dissertação aos meus pais, Celita Bertoldo Cargnelutti e Selito Cargnelutti, que, através de seus exemplos, me ensinaram os valores mais importantes da minha vida. A eles o meu respeito, o meu amor e o meu agradecimento.

Aos meus irmãos, Jocelito, Ademir, Joceli e Denise, pela compreensão, pela força, pela amizade e pelo apoio que nunca falharam. A eles agradeço também pelo respeito às coisas que julgo ser importante.

Dedico igualmente esta dissertação ao meu namorado, Marcos Diego Diettrich, que, esquecendo-se de si próprio, compartilhou todos os momentos comigo. Agradeço por você ter superado todas as minhas boas expectativas e por ser a minha alegria.

## **AGRADECIMENTOS**

Devo um agradecimento especial ao meu orientador, Professor Carlito Vieira de Moraes; agradeço-lhe o conhecimento transferido, a disponibilidade, a paciência e o exemplo de profissionalismo. Agradeço-lhe, também, o empenho profissional, sem o qual não teria sido possível alcançar meus objetivos.

Igualmente agradeço ao Professor Julio Cesar Farret o conhecimento transferido, o apoio e o grande trabalho que desenvolve.

Ao Professor Eno Darci Saatkamp, que, sempre disposto, mostra simpatia, fornece o apoio e o conhecimento.

À Professora Inês Farrias Ferreira a participação na banca de avaliação desta dissertação. Agradeço-lhe a oportunidade e o apoio, nesta e em outras ocasiões.

Ao programa de Pós-Graduação em Geomática a oportunidade de fazer parte deste programa.

Sou grata a todos os professores do Curso de Pós-Graduação em Geomática, que de várias formas proporcionaram-me a ajuda no entendimento de questões; agradeço também a disponibilidade e a atenção concedida.

Ao Aluno-Monitor do Setor de Geodésia e Topografia, Fernando Luis Hillebrand, a ajuda na edição final de algumas figuras, muito úteis no aperfeiçoamento do meu trabalho.

Aos servidores administrativos desta instituição.

Agradeço e lembro com saudades de todos os meus colegas do Curso de Mestrado e Especialização em Geomática pelas conversas, rodas de chimarrão e longas manhãs de aulas. Sucesso para todos vocês.

Devo um agradecimento particular às minhas amigas Dariane, Sharlene e Vanderléia, as conversas filosóficas e interessantes. Agradeço-lhes também a oportunidade da convivência.

Agradeço às minhas verdadeiras amigas de longa e curta data, a parceria, os bons momentos, o convívio rico e questionador.

Aos meus amigos mais queridos, por todos os bons momentos, que hoje lembro-me com saudades. Desejo sucesso, grandes realizações pessoais e profissionais.

Agradeço às várias pessoas especiais que hoje fazem parte da minha família e da minha vida.

Sou grata a todos aqueles, que de alguma forma colaboraram direta e indiretamente com o bom andamento deste trabalho.

Sou grata a Deus pela vida e por todas as minhas conquistas.

"Uma verdade matemática não é simples nem complicada por si mesma. É uma verdade."

Emile Lemoine

"Diz-me, e eu esquecerei; ensina-me e eu lembrarme-ei; envolve-me, e eu aprenderei."

Autor desconhecido

## RESUMO

Dissertação de Mestrado  
Programa de Pós-Graduação em Geomática  
Universidade Federal de Santa Maria, RS, Brasil

### FUNDAMENTOS CONCEITUAIS DA DETERMINAÇÃO DO GEÓIDE PELO MÉTODO GRAVIMÉTRICO

Autora: Jocelaine Cargnelutti  
Orientador: Carlito Vieira de Moraes  
Local e Data da Defesa: Santa Maria, 30 de março de 2007.

Fundamentos conceituais da determinação do geóide pelo método gravimétrico com o objetivo de ordenação didática. Mostra-se que o estudo da Terra real possui um grande número de variáveis, o que torna a solução do problema inviável. Estuda-se então, o comportamento da Terra real por meio da determinação de parâmetros da Terra normal. Utiliza-se o elipsóide de revolução que é a superfície matematicamente definida e que melhor representa a Terra real. Mostra-se que a determinação do geóide consiste na determinação da ondulação geoidal  $N$  e a deflexão da vertical  $\theta$ , decomposta na componente meridiana  $\xi$  (também denominada componente norte-sul) e na componente  $1^\circ$  vertical  $\eta$  (também denominada componente leste-oeste). Expõem como a ondulação do geóide é obtida pela integral de Stokes em função das anomalias da gravidade e como as componentes do desvio da vertical são determinadas pelas fórmulas de Vening-Meinesz. Deduz-se os polinômios de Legendre que são funções para a solução da integral de Stokes. Pormenoriza-se os fundamentos do potencial da gravidade. Mostra-se que as redes geodésicas horizontais (conjunto de pontos com coordenadas curvilíneas geodésicas latitude e longitude) e as redes geodésicas verticais (conjunto de pontos com altitudes) requerem, em seus modelos, grandezas que provêm da determinação do geóide.

Palavras-chave: Terra real; Terra normal; integral de Stokes; ondulação do geóide; potencial de gravidade; fórmulas de Vening-Meinesz; anomalia da gravidade; componentes do desvio da vertical.

## ABSTRACT

Master Dissertation  
Curso de Pós-Graduação em Geomática  
Universidade Federal de Santa Maria, RS, Brasil.

# FUNDAMENTOS CONCEITUAIS DA DETERMINAÇÃO DO GEÓIDE PELO MÉTODO GRAVIMÉTRICO

(FUNDAMENTAL CONCEPTS OF GRAVIMETRIC GEOID DETERMINATION)

Author: Jocelaine Cargnelutti  
Adviser: Carlito Vieira de Moraes  
Place and Date of Examination: Santa Maria, march 30, 2007

Fundamental concepts of gravimetric geoid determination with the objective to didactic methodology. It's described that the study of the real Earth have a large number of variable, what becomes impracticable the problem solution. It is studied then, the behavior of the real Earth by means of the parameter determinations of the normal Earth. Ellipsoid of revolution is used as surface mathematically defined and it represents better the real Earth. The geoid determination consists of the determination of the geoidal undulation  $N$  and the deflection of the vertical  $\theta$ , that is decomposed in the meridian component  $\xi$  (also called north-south component) and in the component prime vertical  $\eta$  (also called east-west component). The geoid undulation is given by the Stokes' integral in function of the gravity anomalies and as the deflection of the vertical components are determined by the Vening-Meinesz's formulas. It is deduced the Legendre's polynomials, that are functions for the solution of the Stokes' integral. It is described the potential theory of the gravity. It is showed that the horizontal geodesic networks (reference points with latitude and longitude geodetic coordinates) and the vertical geodetic networks (reference points with heights) require, in its models, quantities from the geoid determination.

Keywords: Real Earth; normal Earth; Stokes' integral; Vening-Meinesz's formulas; gravimetry anomaly; geoidal ondulation; deflection of the vertical components.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1 – Superfícies que envolvem o posicionamento geodésico: Vertical, normal, altitude geométrica ( $h$ ), ortométrica ( $H$ ) e ondulação do geóide ( $N$ ), superfície física terrestre (SFT), geóide, nível médio do mar (NMM) e elipsóide.	29
Figura 2.2 – Vertical e coordenadas astronômicas: latitude ( $\Phi$ ) e longitude ( $\Lambda$ ). ....	34
Figura 2.3 – Normal e coordenadas geodésicas: latitude ( $\varphi$ ), longitude ( $\lambda$ ) e altitude ( $h$ ).	35
Figura 2.4 – Altimetria por satélites artificiais	40
Figura 3.1 – Primeira Lei de Kepler	43
Figura 3.2 – Componentes da força de atração	45
Figura 3.3 – Distribuição de $n$ partículas atrativas	47
Figura 3.4 – Potencial Newtoniano	49
Figura 3.5 – Distância $\ell$	49
Figura 3.6 – Massas atrativas	54
Figura 3.7 – Coordenadas esféricas	55
Figura 3.8 – Superfície fechada $S$ , que delimita um volume $v$ .	58
Figura 3.9 – Representação do polinômio de Legendre	69
Figura 3.10 – Coordenadas esféricas das projeções de $P$ e $P'$ sobre a esfera	71
Figura 3.11 – Zonais	72
Figura 3.12 – Sectoriais	73
Figura 3.13 – Tesserais	73
Figura 3.14 – Representação gráfica dos harmônicos esféricos	74
Figura 4.1 – Esferopotencial de atração	79
Figura 4.2 – Direções $s_1$ , $s_2$ , e $s_3$	82
Figura 4.3 – Linhas de força da Terra real	90
Figura 4.4 - Anomalia da gravidade e distúrbio da gravidade	95

Figura 4.5 – Reduções gravimétricas: (a) Correção ar-livre, (b) Correção de Bouguer, (c) Correção de terreno e (d) Correção da curvatura da Terra.....	98
Figura 4.6 – Correção de Bouguer.....	100
Figura 4.7 – Cilindro de eixo vertical apoiado no geóide.....	101
Figura 4.8 – Correção do Terreno.....	103
Figura 4.9 – Estrutura da Terra.....	106
Figura 4.10 – Processo de condensação.....	107
Figura 4.11 – Método de inversão.....	108
Figura 4.12 – Efeitos topográficos e isostáticos.....	111
Figura 4.13 – Efeito da topografia sobre o valor da gravidade observado.....	111
Figura 4.14 – Modelo de Pratt-Hayford.....	112
Figura 4.15 – Sistema isostático de Pratt-Hayford.....	113
Figura 4.16 – Profundidade de compensação.....	115
Figura 4.17 – Modelo isostático de Vening-Meinesz.....	116
Figura 4.18 – Relação entre geóide, co-geóide, elipsóide e efeito indireto.....	118
Figura 5.1 – Relação entre $\Psi$ , $d\Psi$ , $dA$ e $dS$ .....	123
Figura 5.2 – Relação entre a ondulação do geóide e o desvio da vertical.....	127
Figura 6.1 – Componentes do desvio da vertical, $\xi$ e $\eta$ .....	134
Figura 6.2 – Componente norte-sul ou componente meridiana.....	136
Figura 6.3 – Componente leste-oeste ou componente $1^\circ$ vertical.....	137
Figura 6.4 - Método dos três gradientes.....	140
Figura 6.5 – Raios de Azimute $A_i$ e $A_{i+1}$ .....	141
Figura 6.6 – Regiões S, s, sub-região $s_0$ , estações A e B.....	143

## **LISTA DE QUADROS**

Quadro 2.1 – Missões altimétricas, precisão das medidas e acurácia das órbitas....	41
Quadro 4.1 – Zonas de Hayford .....	104

## LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

FFT	:	<i>Fast Fourier Transform</i> (Transformada Rápida de Fourier)
GPS	:	<i>Global Positioning System</i>
CCD	:	<i>Charge Compeld Device</i>
NMM	:	Nível Médio do Mar
PVCG	:	Problema de Valor de Contorno de Geodésia
IUGG	:	<i>International Union of Geodesy and Geophysics</i>
IGSN71	:	<i>International gravity Standardization Net 1971</i>
IOC	:	<i>Intergovernmental Oceonographic Commission</i>
CMQ	:	Colocação por Mínimos Quadrados
SFT	:	Superfície Física Terrestre

## LISTA DE SÍMBOLOS

$a$	:	Semi-eixo maior do elipsóide de referência
$a_{nm}$	:	constante arbitrária da função $S_n$ (função harmônico esférico de superfície de grau $n$ )
$b$	:	semi-eixo menor do elipsóide de referência
$b_{nm}$	:	constante arbitrária da função $S_n$ (função harmônico esférico de superfície de grau $n$ )
$c$	:	velocidade da luz no vácuo
$c$	:	Semidistância focal
$\vec{C}$	:	força centrífuga por unidade de massa
$dF$	:	atração produzida pela massa elementar $dm$
$T_0$	:	termo de grau zero no desenvolvimento do potencial perturbador
$M_T$	:	massa terrestre
$M_E$	:	massa do elipsóide
$\bar{a}$	:	coeficiente plenamente normalizado
$\bar{b}$	:	coeficiente plenamente normalizado
$c_n$	:	variância da grau de anomalia
$dA$	:	arco elementar
$dm$	:	massa elementar
$dN$	:	influência das zonas negligenciadas ou erro de truncamento
$\overline{dN^2}$	:	erro médio quadrático de uma valor médio de $dN$
$\frac{dN}{ds}$	:	desvio local da ondulação geoidal
$div$	:	operador divergente
$H_p$	:	Altitude ortométrica do ponto $P$
$\bar{ds}$	:	deslocamento elementar de componente $dx$ , $dy$ , $dz$
$dS$	:	área elementar
$dv$	:	volume elementar
$d\lambda$	:	diferencial da longitude geodésica
$d\sigma$	:	elemento de superfície de uma esfera de raio unitário
$d\phi$	:	diferencial da latitude
$d\phi$	:	diferencial do fluxo
$d\Psi$	:	arco elementar
$\Psi$	:	distâncias polares
$e$	:	1ª excentricidade numérica da elipse meridiana

$f$	:	achatamento do elipsóide de referência
$g$	:	gravidade real
$g_0$	:	Gravidade na superfície da geóide
$g_{OBS}$	:	Gravidade observada
grad	:	operador gradiente
$h$	:	altitude geométrica ou elipsoidal
$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$	:	versores fundamentais de orientação dos eixos cartesianos
$i_p$	:	Desvio interpolado
$k$	:	grau de truncamento de $S(\Psi)$
$\ell$	:	distância
lim	:	limite de uma função
$m$	:	massa
$m$	:	(índice do polinômio de Legendre)
$n$	:	(índice do polinômio de Legendre)
$m_q$	:	Desvio padrão do erro de interpolação
$r, \theta, \lambda$	:	coordenadas polares esféricas do ponto de cálculo
$r, v, \lambda$	:	coordenadas esféricas
rot	:	operador rotacional
$t$	:	(na fórmula de Rodrigues)
$v$	:	volume limitado pela superfície $S$
$v$	:	Coordenada esférica no polinômio de Legendre
$v'$	:	Coordenada esférica no polinômio de Legendre
$A_{nm}$	:	coeficiente com unidade de potencial
$E$	:	Função escalar
$\vec{A}$	:	Função vetorial de posição
$B_{nm}$	:	coeficiente com unidade de potencial
$C_{AL}$	:	correção ar-livre
$C_{BS}$	:	correção de Bouguer simples ou incompleta
$C_{nm}$	:	coeficiente adimensional
$c_n$	:	variância de grau
$\vec{F}$	:	vetor força
$\vec{F}_n$	:	componente normal de $\vec{F}$
$F_x$	:	componente cartesiana da força na direção $x$
$F_y$	:	componente cartesiana da força na direção $y$
$F_z$	:	componente cartesiana da força na direção $z$
$G$	:	constante universal de gravitação
$GM$	:	constante gravitacional geocêntrica
$H$	:	altitude ortométrica
$H_P$	:	altitude da estação no ponto $P$
$J_{nm}$	:	coeficientes sem unidades
$J_2$	:	fator dinâmico de forma
$K_{nm}$	:	coeficientes sem unidades
$M$	:	massa da Terra, incluindo as partes sólidas, líquidas e gasosas
$N$	:	ondulação do geóide

$P_{nm}(v)$	:	fórmula de Ferrers
$P_n(\Psi)$	:	função polinômio de Legendre
$\bar{P}_{nm}$	:	funções associadas de Legendre plenamente normalizadas
$Q_n$	:	coeficientes de Molodenski
$R$	:	raio médio da Terra
$S_n$	:	harmônico esférico de superfície de grau $n$
$S_{nm}$	:	coeficiente adimensional
$S(\Psi)$	:	função de Stokes
$T$	:	potencial perturbador
$U$	:	potencial normal
$V$	:	potencial gravitacional da Terra real
$W$	:	geopotencial ou potencial da Terra real
$\vec{W}$	:	Potencial vetorial
$W_0$	:	potencial do nível do mar
$\beta$	:	coeficiente
$\beta'$	:	coeficiente
$\gamma$	:	gravidade normal na superfície do elipsóide de referência
$\gamma_e$	:	gravidade normal no equador
$\gamma_p$	:	gravidade normal no pólo
$\gamma_x$	:	componente cartesiana na direção $x$ do vetor gravidade normal
$\gamma_y$	:	componente cartesiana na direção $y$ do vetor gravidade normal
$\gamma_z$	:	componente cartesiana na direção $z$ do vetor gravidade normal
$\delta$	:	densidade da camada superficial da Terra em relação ao geóide
$\delta_1$	:	densidade da camada subjacente ao geóide
$\eta$	:	componente 1º vertical do desvio da vertical ou componente leste-oeste do desvio da vertical
$\eta$	:	componente 1º vertical do desvio da vertical em segundos
$\lambda$	:	longitude geodésica
$\xi$	:	componente meridiana do desvio da vertical ou componente norte-sul do desvio da vertical
$\xi''$	:	componente meridiana do desvio da vertical em segundos
$\pi$	:	número irracional aproximadamente 3,14...
$\rho$	:	densidade
$\varphi$	:	latitude geodésica
$\varphi_m$	:	latitude média
$\varphi, \lambda, h$	:	coordenadas geodésicas curvilíneas latitude, longitude e altitude
$\omega$	:	velocidade angular de rotação
$\Delta g$	:	anomalia da gravidade
$\Delta g_s$	:	anomalia da gravidade na direção sul
$\Delta g_n$	:	anomalia da gravidade na direção norte
$\Delta g_o$	:	anomalia da gravidade na direção oeste
$\Delta g_L$	:	anomalia da gravidade na direção leste

$\Delta g_{AL}$	:	anomalia da gravidade ar-livre
$\Delta g_{BC}$	:	anomalia de Bouguer completa
$\Delta g_H$	:	anomalia de Helmert
$\Delta g_i$	:	anomalia média de uma zona
$\Delta M$	:	diferença entre a massa terrestre e a massa elipsoidal
$\Delta N$	:	diferença de ondulação geoidal
$\Delta T$	:	Incremento do potencial perturbador
$\Delta V$	:	laplaciano do potencial
$\Delta W$	:	diferença entre o geopotencial no geóide e o esferopotencial no elipsóide
$\Lambda$	:	longitude astronômica
$\Phi$	:	latitude astronômica
$\Psi$	:	distância esférica do elemento de área $dS$ ao ponto de cálculo
$X$	:	componente da força derivada do potencial $V$
$Y$	:	componente da força derivada do potencial $V$
$Z$	:	Componente da força derivada do potencial $V$
$Z$	:	esferopotencial da atração
$Q$	:	esferopotencial de rotação ou centrífugo
$A_1$	:	azimute da direção 1
$A_2$	:	azimute da direção 2
$U_T$	:	Potencial correspondente à atração

### OUTROS SÍMBOLOS

$\vec{\nabla}$	:	vetor operador nabla
$\Delta$	:	laplaciano
$\frac{\partial}{\partial x}$	:	derivada parcial de primeira ordem em relação a $x$
$\frac{\partial^2}{\partial x^2}$	:	derivada parcial de segunda ordem em relação a $x$
$\phi$	:	fluxo
$\infty$	:	representação do infinito
$\int_M$	:	Massa de uma figura plana
$\int_S$	:	Área de uma figura plana
$\int_V$	:	Volume de um corpo
$\sum_{n=2}^{\infty}$	:	somatório, com $n$ pertencente ao conjunto $[2, \infty)$

### UNIDADES

Gal	:	unidade auxiliar para a medida da aceleração da gravidade (após Galileu). $1 \text{ Gal} = 10^{-2} \text{ m s}^{-2}$
mGal	:	miligal. $1 \text{ mGal} = 10^{-5} \text{ m s}^{-2}$
$\mu\text{Gal}$	:	microgal. $1 \mu\text{Gal} = 10^{-8} \text{ m s}^{-2}$
kg	:	quilograma
rad	:	radiano
s	:	segundo de tempo cronológico
"	:	segundo sexagesimal de arco
$\frac{\text{rad}}{\text{s}} = \text{rad s}^{-1}$	:	radiano por segundo
N	:	Newton

## SUMÁRIO

<b>1 INTRODUÇÃO</b> .....	<b>23</b>
<b>1.1 Materiais utilizados na pesquisa</b> .....	<b>24</b>
<b>1.2 Objetivos</b> .....	<b>25</b>
1.2.1 Objetivo Geral .....	25
1.2.2 Objetivos Específicos .....	25
<b>1.3 Contribuições da Pesquisa</b> .....	<b>26</b>
<b>1.4 Estrutura da Pesquisa</b> .....	<b>26</b>
<b>2 SUPERFÍCIES ENVOLVIDAS E PRINCIPAIS MÉTODOS DE</b> .....	<b>28</b>
<b>DETERMINAÇÃO DO GEÓIDE</b> .....	<b>28</b>
<b>2.1 Definição de geóide e significação de geóide</b> .....	<b>28</b>
<b>2.2 Métodos de determinação do geóide</b> .....	<b>31</b>
2.2.1 Método Gravimétrico .....	32
2.2.2 Método Astrogeodésico.....	33
2.2.3 Altimetria Celeste .....	35
2.2.4 Integral de Stokes e Polinômio Generalizado.....	35
2.2.5 Métodos Combinados.....	36
<b>2.3 Principais Técnicas de Solução da Integral de Stokes</b> .....	<b>36</b>
2.3.1 Integração numérica.....	37
2.3.2 Colocação por Mínimos Quadrados .....	37
2.3.4 Altimetria por satélite artificial.....	40

2.3.5 Global Positioning System (GPS) – Nivelamento pontual .....	41
2.3.6 Combinação das Técnicas .....	41
<b>3 FUNDAMENTOS DA TEORIA DO POTENCIAL.....</b>	<b>43</b>
<b>3.1 Lei da gravitação universal .....</b>	<b>43</b>
<b>3.2 Componentes da força de atração.....</b>	<b>44</b>
<b>3.3 Potencial gravitacional .....</b>	<b>48</b>
<b>3.4 Operadores .....</b>	<b>49</b>
3.4.1 Operador nabla ou operador de Hamilton .....	49
3.4.2 Operador gradiente de um escalar.....	50
3.4.3 Operador divergente de um vetor.....	50
3.4.4 Operador rotacional de um vetor.....	50
3.4.5 Operador de Laplace ou operador laplaciano de um vetor.....	51
<b>3.5 Campos Vetoriais e Campos Escalares .....</b>	<b>51</b>
3.5.1 Campo Vetorial Conservativo ou Irrotacional .....	52
3.5.2 Campo vetorial solenoidal .....	53
3.5.3 Campo vetorial harmônico.....	53
<b>3.6 Superfície equipotencial .....</b>	<b>53</b>
<b>3.7 Equação de Laplace .....</b>	<b>54</b>
<b>3.8 Equação de Poisson .....</b>	<b>56</b>
<b>3.9 Fórmula de Gauss-Ostrogradski.....</b>	<b>58</b>
<b>3.10 Identidades de Green .....</b>	<b>59</b>
3.10.1 Problemas de Valor de Contorno da Geodésia Física - PVCG .....	61
3.10.2 Primeira identidade de Green.....	63
3.10.3 Segunda identidade de Green.....	65
3.10.4 Terceira identidade de Green .....	65
<b>3.11 Fórmula de Chasles .....</b>	<b>66</b>
<b>3.12 Polinômios de Legendre.....</b>	<b>68</b>

<b>3.13 Funções harmônicas esféricas .....</b>	<b>70</b>
3.13.1 Função harmônica esférica zonal.....	72
3.13.2 Funções harmônicas esféricas setoriais.....	72
3.13.3 Funções harmônicas esféricas tesserais.....	73
<b>3.14 Representação geométrica das funções harmônicas esféricas .....</b>	<b>73</b>
<b>3.15 Problemas direto e inverso da teoria do potencial.....</b>	<b>74</b>
<b>4 FUNDAMENTOS DO CAMPO GRAVITACIONAL .....</b>	<b>76</b>
<b>4.1 Campo da gravidade normal .....</b>	<b>76</b>
4.1.1 Terra normal.....	76
4.1.2 Gravidade Normal .....	77
4.1.3 Esferopotencial.....	78
4.1.4 Fórmulas de Clairaut e Newton .....	81
4.1.5 Fórmula de Somigliana.....	85
4.1.6 Fórmulas internacionais .....	85
4.1.6.1 O Coeficiente $J_2$ .....	86
<b>4.2 Campo da gravidade terrestre.....</b>	<b>87</b>
4.2.1 Força e aceleração da gravidade .....	87
4.2.2 Vertical e superfícies equipotenciais .....	89
4.2.3 Equação de Bruns.....	90
4.2.4 Geopotencial .....	91
<b>4.3 Potencial perturbador ou potencial anômalo .....</b>	<b>93</b>
<b>4.4 Anomalia e distúrbio da gravidade.....</b>	<b>94</b>
<b>4.5 Reduções Gravimétricas .....</b>	<b>96</b>
4.5.1 Anomalia ar-livre .....	98
4.5.2 Dedução da anomalia de Bouguer .....	99
4.5.2.1 Redução Modificada de Bouguer .....	100
4.5.2.2 Platô de Bouguer.....	100

4.5.2.3 Calota de Bouguer.....	102
4.5.2.4 Correção do Terreno .....	103
4.5.2.5 Anomalia de Bouguer .....	105
4.5.3 Redução pelo Método de Helmert.....	106
4.5.4 Método de Rudski .....	107
4.5.5 Reduções Isostáticas .....	109
4.5.5.1 O Sistema Pratt-Hayford .....	112
4.5.5.2 Sistema de Airy-Heiskanen .....	114
4.5.5.3 Sistema Regional de Vening-Meinesz.....	116
4.5.5.4 Efeito Indireto das Reduções Gravimétricas .....	117
<b>5 DETERMINAÇÃO GRAVIMÉTRICA DAS ONDULAÇÕES DO GEÓIDE .....</b>	<b>120</b>
<b>5.1 Integral de Stokes .....</b>	<b>122</b>
<b>5.2 Desvio da vertical: fórmulas de Vening-Meinesz .....</b>	<b>127</b>
<b>5.3 Aplicação .....</b>	<b>128</b>
5.3.1 Cálculo das Ondulações do Geóide pelo método dos zonais .....	130
5.3.2. Cálculo da ondulação do geóide pelo método dos quadrados .....	131
5.3.3 Produto final dos cálculos da ondulação geoidal.....	132
5.3.4 Truncamento da Integral de Stokes .....	132
<b>5.4 Requisitos dos Dados Gravimétricos.....</b>	<b>133</b>
<b>6 DETERMINAÇÃO DO DESVIO DA VERTICAL .....</b>	<b>134</b>
<b>6.1 Integral de Vening-Meinesz .....</b>	<b>135</b>
<b>6.2 Aplicação .....</b>	<b>138</b>
6.2.1 Contribuição da Região Vizinha .....	138
6.2.2 Contribuição da região próxima.....	140
6.2.3 Contribuição da região distante.....	143
<b>7 CONCLUSÃO E RECOMENDAÇÕES .....</b>	<b>145</b>
<b>7.1 Conclusão.....</b>	<b>145</b>

<b>7.2 Recomendações .....</b>	<b>146</b>
<b>REFERÊNCIAS.....</b>	<b>147</b>
<b>DEMAIS OBRAS CONSULTADAS .....</b>	<b>152</b>

# 1 INTRODUÇÃO

A determinação das dimensões e da forma da Terra sempre foram e são atualmente questões de interesse mundial. O conhecimento do campo gravitacional terrestre representa uma ferramenta que permite determinar a dimensão e a forma que a superfície terrestre assume, assim como, permitir o estudo do comportamento dinâmico da Terra.

A superfície terrestre apresenta irregularidades. Portanto, os cálculos não podem ser realizados utilizando diretamente esta superfície, pois geram uma grande quantidade de variáveis, o que dificulta obter a solução desejada. Assim surgem trabalhos voltados para escolha da figura que melhor represente a forma da Terra. Esta superfície é chamada de Elipsóide de Revolução obtida pelo giro de uma elipse em torno de seu eixo menor. Este elipsóide é definido matematicamente.

Além das irregularidades há uma série de fenômenos que resultam em deslocamentos de pontos (BLITZKOW, 1996, p. 9):

- a) deformações no terreno, decorrentes de obras de engenharia;
- b) movimentos de placas da litosfera;
- c) marés terrestres e oceânicas;
- d) efeito de carga sobre a crosta;
- e) movimento de rotação;
- f) deslocamento de eixo de rotação;
- g) comportamento dinâmico do sistema Terra-Lua;
- h) movimento dos planetas, dos satélites naturais e artificiais.

A Geodésia se preocupa com o estudo da forma, dimensões e os parâmetros definidores do campo gravitacional exterior da terrestre. O problema da Geodésia compreenderá o estabelecimento dos parâmetros que caracterizam suas medidas, forma, posição e a determinação da superfície de referência que represente suficientemente bem a figura da Terra real. O problema compreende ainda o estudo do campo gravitacional terrestre e suas variações no tempo.

A Ciência Geodésica possui, entre seus propósitos principais, a definição e determinação de referenciais para o posicionamento geodésico. A orientação

absoluta de tais referenciais depende do conhecimento do potencial de gravidade da Terra real. Para obtenção do geopotencial condiciona-se à existência de redes gravimétricas mundiais de alta precisão, base para o estabelecimento de redes nacionais fundamentais e redes derivadas. Atualmente a rede gravimétrica mundial recomendada pela International Union of Geodesy and Geophysics (IUGG) é a International Gravity Standardization Net 1971 (IGSN71) (FREITAS et al. 2002).

Observando o cunho didático que representa o objetivo geral desta dissertação, vários conceitos e propriedades serão apresentados para o entendimento da determinação do geóide pelo método gravimétrico. Assim, far-se-á o estudo detalhado das superfícies e parâmetros que envolvem o posicionamento geodésico, a apresentação de algumas técnicas para determinação do geóide, o estudo dos fundamentos da teoria do potencial, o estudo do campo gravitacional da Terra real e da Terra normal, o estudo do potencial perturbador, o estudo da anomalia e distúrbio da gravidade e o estudo das reduções gravimétricas.

Os tópicos referentes aos fundamentos da teoria do potencial trazem principalmente informações a respeito do potencial gravitacional, equação de Laplace, Equação de Poisson, identidades de Green, polinômios de Legendre, funções harmônicas esféricas, e problemas direto e inverso da teoria do potencial.

Os conceitos envolvidos no tópico fundamentos de campo gravitacional, buscam fazer a relação do campo da gravidade da Terra real com o potencial gerado pela Terra real, assim como a relação existente do campo da gravidade normal com o potencial da Terra normal. Far-se-á também o estudo da anomalia da gravidade, que consiste da diferença entre o valor da gravidade medida pelo instrumento gravímetro<sup>1</sup> sobre a superfície física da Terra e reduzida ao geóide e o valor da gravidade normal calculada no ponto correspondente da Terra normal. Ainda, estudar-se-á as reduções gravimétricas que serão necessários para a aplicação da fórmula de Stokes.

## **1.1 Materiais utilizados na pesquisa**

O trabalho foi realizado baseando-se em pesquisas conceituais no sentido de promover didaticamente os conceitos envolvidos na determinação do geóide.

---

<sup>1</sup> Alguns tipos de gravímetros podem ser encontrados em <[www.microglacoste.com](http://www.microglacoste.com)> e <[www.scintrex.com](http://www.scintrex.com)>.

O material utilizado no trabalho de pesquisa está relacionado a seguir:

- a) acervo bibliográfico da Universidade Federal de Santa Maria, Universidade Federal do Paraná e *British Library* (por meio do Serviço de Comutação Bibliográfica);
- b) programas de computador.

Da internet, utilizaram-se as seguintes fontes de consulta:

- a) *Tables of Contents in Geodesy* em <[www.craymer.ca](http://www.craymer.ca)>;
- b) *Deflections of the vertical in the Netherlands derived from geodetic astronomical observations* em <[www.dekoepel.nl/Geodetic-Astronomy.html](http://www.dekoepel.nl/Geodetic-Astronomy.html)>;
- c) *International Association of Geodesy* em <[www.iag-aig.org](http://www.iag-aig.org)>;
- d) *International Earth Rotation and Reference Systems Service* em <[www.iers.org](http://www.iers.org)>;
- e) *Scintrex a Division of LRS* em <[www.scintrex.com](http://www.scintrex.com)>;
- f) *Microglacost a Division of LRS* em <[www.microglacoste.com](http://www.microglacoste.com)>;
- g) *International Geoid Service* em <[www.iges.polimi.it](http://www.iges.polimi.it)>;
- h) *Bureau International des Poids et Mesures* em <[www.bipm.fr](http://www.bipm.fr)>.

## 1.2 Objetivos

### 1.2.1 Objetivo Geral

O objetivo geral desta dissertação é ordenar didaticamente os fundamentos conceituais da determinação do geóide pelo método gravimétrico permitindo o estudo detalhado dos conceitos envolvidos.

### 1.2.2 Objetivos Específicos

Os objetivos específicos são:

- a) sistematizar didaticamente os conceitos;
- b) ordenar os conteúdos que envolvem a determinação do geóide pelo método gravimétrico;
- c) apresentar os principais métodos e técnicas para a determinação do geóide;
- d) apresentar os fundamentos da teoria do potencial;

- e) apresentar conceitos relacionados ao campo gravitacional da Terra real, o campo gravitacional da Terra normal, potencial perturbador, anomalia da gravidade e reduções gravimétricas;
- f) pormenorizar os fundamentos da integral de Stokes para a obtenção das ondulações do geóide através das anomalias da gravidade;
- g) pormenorizar as fórmulas de Vening-Meinesz para o cálculo das componentes do desvio da vertical, a partir das anomalias da gravidade.

### **1.3 Contribuições da Pesquisa**

Esta dissertação traz as seguintes contribuições:

- a) contribuição metodológica ao ensino da Geodésia dos cursos de graduação, pois promove a apresentação dos conceitos de forma sistematizada;
- b) contribuição com os fundamentos conceituais envolvidos na determinação do geóide, pois a literatura Geodésica não dispõe de trabalhos de fácil compreensão para o ensino de Geodésia.

### **1.4 Estrutura da Pesquisa**

O capítulo 2 apresenta alguns conceitos fundamentais para o entendimento inicial da proposta do trabalho. Além disso, encontra-se neste capítulo a definição de geóide, uma síntese dos métodos de determinação do geóide e algumas técnicas distintas para determinação das alturas geoidais que proporcionam a solução da integral de Stokes.

No capítulo 3 é apresentado os fundamentos da teoria do potencial que serão importantes para o entendimento dos tópicos tratados nos capítulos seguintes. Neste capítulo são apresentados a definição de operadores, campos vetoriais, equações, fórmulas e funções que fundamentam a teoria do potencial.

No capítulo 4 encontram-se os conceitos relacionados ao campo gravitacional da Terra real, o campo gravitacional da Terra normal, potencial perturbador, anomalia da gravidade e reduções gravimétricas.

O capítulo 5 traz a determinação gravimétrica das ondulações do geóide por meio da fórmula de Stokes. Neste capítulo ainda é visto que Vening-Meinesz propôs fórmulas similares para o cálculo das componentes do desvio da vertical. Apresenta também as equações para a aplicação prática do cálculo da ondulação do geóide por meio de alguns métodos escolhidos.

O capítulo 6 descreve os conceitos relacionados com o desvio da vertical que possui fundamental importância nos cálculos geodésicos. Além disso, apresenta também os quatro métodos atualmente mais utilizados na determinação do desvio da vertical. Algumas equações de aplicações práticas do desvio da vertical em que se tratam as contribuições para as regiões vizinhas, próximas e distantes são também abordadas neste capítulo.

O capítulo 7 apresenta as conclusões e recomendações referentes ao trabalho desenvolvido.

## **2 SUPERFÍCIES ENVOLVIDAS E PRINCIPAIS MÉTODOS DE DETERMINAÇÃO DO GEÓIDE**

Neste tópico serão abordados conceitos relativos às superfícies envolvidas no posicionamento geodésico citando também outros parâmetros que possuem relação com o geóide. Ainda, serão abordados os principais métodos para a determinação das ondulações do geóide e as principais técnicas para a resolução da integral de Stokes.

### **2.1 Definição de geóide e significação de geóide**

A Ciência Geodésica procura materializar na superfície física da Terra ou nas proximidades dessa superfície um conjunto de pontos fundamentais cujas coordenadas são determinadas rigorosamente levando-se em consideração a curvatura terrestre.

Baseado no conceito de Geodésia descrito no parágrafo anterior, o problema de Geodésia pode ser formulado como segue: Determinar a figura e campo gravitacional da Terra e de outros corpos celestes como função do tempo, através de observações sobre a Terra ou fora dela, ou sobre a superfície de outros corpos celestes ou fora destes.

Existem basicamente três superfícies que envolvem o posicionamento geodésico (Figura 2.1). A primeira superfície é a superfície física da Terra (SFT), definida como o limite que separa o relevo topográfico e as águas da atmosfera. Esta superfície é limitante do relevo topográfico onde são realizadas as diversas operações topográficas e geodésicas. A segunda superfície é representada pelo elipsóide de revolução. A terceira é a superfície geoidal que limita um corpo chamado geóide, definida como uma superfície equipotencial do campo da gravidade que mais se aproxima do nível médio não perturbado dos oceanos, prolongado através dos continentes.

O elipsóide de revolução é o modelo geométrico adotado, pois melhor representa a Terra. Este modelo é denominado de superfície de referência, sobre a qual são efetuados os cálculos geodésicos.

Geopes são superfícies equipotenciais do campo da gravidade. O geóide<sup>2</sup> é o geope que mais se aproxima do nível médio do mar imperturbado, prolongado sob todos os continentes. As superfícies equipotenciais de gravidade são denominadas assim pelo fato de que por todo o prolongamento de sua superfície o valor da gravidade é constante.

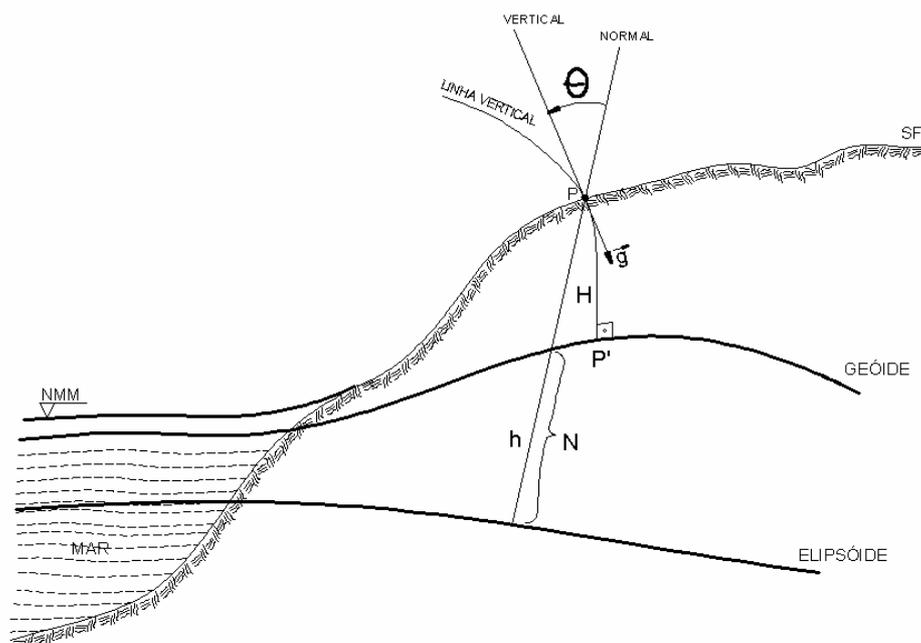


Figura 2.1 – Superfícies que envolvem o posicionamento geodésico: Vertical, normal, altitude geométrica ( $h$ ), ortométrica ( $H$ ) e ondulação do geóide ( $N$ ), superfície física terrestre (SFT), geóide, nível médio do mar (NMM) e elipsóide.

A superfície imperturbada do mar pode ser considerada como uma matéria homogênea de água que está sujeita à ação da gravidade e desta forma atinge um estado de equilíbrio tal que representa uma superfície equipotencial (BOMFORD, 1977, p. 460). Esta superfície é contínua e suave, mas não é analítica devido à variação na densidade das massas terrestres, o que resulta nas ondulações do geóide.

A estimativa do Nível Médio do Mar (NMM) e sua variação são feitas a partir da análise de dados maregráficos registrados de forma gráfica (maregramas) ou com a utilização de meios digitais (maregramas digitalizados a partir de dados coletados por sensores digitais). O NMM (Figura 2.1) é calculado a partir de valores

<sup>2</sup> O termo geóide foi sugerido por Listing.

observados de nível d'água com diferentes taxas de amostragem, sendo a horária a mais utilizada (DALAZOANA, 2006, p. 40).

O método mais simples que fornece a estimativa do NMM é pela média aritmética dos valores de nível d'água observados. No entanto, existem outros métodos mais elaborados que incluem a aplicação de filtros passa-baixa visando eliminar as frequências mais altas, tais como as decorrentes de marés e ondas.

Os valores diários do nível médio do mar podem ser calculados por meio (IOC, 1985, p. 55; PUGH, 1987, p. 302-304 apud DALAZOANA, 2006, p. 40):

- a) da média das leituras horárias;
- b) de um filtro que trata leituras realizadas periodicamente a cada três horas;
- c) de filtros passa-baixa como, por exemplo, o filtro de Doodson que trata leituras horárias.

O monitoramento do NMM representa uma questão de grande interesse para a Geodésia. A Geodésia utiliza dados provenientes do monitoramento do nível do mar para a obtenção de referência para redes verticais clássicas, influências das marés na rotação da Terra, melhorias nos modelos geopotenciais, integração de redes verticais, entre outros fins (DALAZOANA, 2006, p. 42).

O aparecimento do Sistema de Posicionamento Global (GPS) revolucionou as atividades que necessitam de posicionamento em função de sua rapidez e precisão na obtenção de coordenadas. Este fato promoveu um crescente interesse por um geóide mais acurado para aplicações nas áreas de mapeamento e engenharia, onde há necessidade do conhecimento de uma altitude com significado físico que é a altitude ortométrica (H). Para que as altitudes elipsoidais ou geométricas (h) que são referidas ao elipsóide, oriundas de levantamentos com GPS, possam ser utilizadas nestas áreas, é necessário que elas sejam convertidas em altitudes ortométricas (H) que são referidas ao geóide (Figura 2.1). Para isso, precisa-se conhecer a altura ou ondulação geoidal (N), ou seja, a separação entre as duas superfícies de referência, o geóide e o elipsóide.

O tema proposto é representado pela determinação do geóide por meio de observações da gravidade. A fórmula integral de Stokes<sup>3</sup>, proposta por Stokes em 1849, permite a determinação das ondulações do geóide a partir da anomalia da gravidade. Porém, a utilização da fórmula de Stokes na Geodésia Física necessita

---

<sup>3</sup> George Gabriel Stokes (1819 – 1903)

do conhecimento das anomalias da gravidade, reduzidas ao geóide, para se determinar a ondulação  $N$  do geóide em um ponto. A insuficiente distribuição das anomalias da gravidade limita a área de integração a uma calota esférica em torno de um ponto de cálculo. Entretanto, este procedimento gera erros, chamados de “erros de truncamento” (LOBIANCO, 2005, p. 22). Uma anomalia de gravidade consiste na diferença entre o valor da gravidade medida pelo instrumento gravímetro sobre a SFT e reduzida ao geóide e o valor da gravidade normal calculada no ponto correspondente da Terra normal.

A aplicação da fórmula integral de Stokes exige que os dados de gravidade sejam reduzidos ao geóide. É necessário então a aplicação do método de Helmert nas massas topográficas situadas acima do geóide. O deslocamento e remoção das massas topográficas originam o co-geóide e provocam mudanças no potencial de gravidade gerando, erros sistemáticos.

A determinação das ondulações geoidais segundo Santos & Escobar (2000), é obtida pela aplicação da fórmula de Stokes, definida em função das anomalias da gravidade para o modelo esférico da Terra. A determinação do geóide consiste também na determinação do desvio da vertical por meio de suas componentes: componente meridiana  $\xi$ , também denominada de componente norte-sul e a componente primeiro vertical  $\eta$ , também denominada componente leste-oeste.

O modelo de Terra normal é um modelo com características próximas às características da Terra real. Este modelo possui a mesma massa da Terra real, incluindo a massa da atmosfera e a mesma velocidade de rotação  $\omega$  da Terra real.

## 2.2 Métodos de determinação do geóide

Durante todo o período que se estende até início do século XX, a determinação da gravidade nos oceanos não era possível, deixando assim grandes lacunas de pontos no campo gravitacional terrestre. O trabalho de Stokes foi publicado no ano de 1849. Em seu trabalho Stokes expõe dois tópicos. O primeiro diz que, conhecendo-se a forma de uma superfície equipotencial  $S$ , limitante de um sistema de massas atrativas dotado de movimento de rotação, e o valor da gravidade em um ponto da superfície, determina-se o campo externo independente de qualquer hipótese sobre a distribuição de massas no interior da superfície. O

segundo diz que, conhecendo o valor da gravidade em todos os pontos de uma superfície equipotencial, determina-se a forma dessa superfície (GEMAEL, 1999, p. 143).

Interessa particularmente neste trabalho o segundo tópico. Ao são reduzidos os valores da gravidade  $g$  medidos na superfície física da Terra. Compara-se o geóide com o elipsóide. A separação entre o geóide e o elipsóide é fornecida pela fórmula de Stokes, em função das anomalias da gravidade.

É importante lembrar das dificuldades na aplicação da fórmula de Stokes. Algumas considerações e modificações devem ser feitas para que a fórmula de Stokes seja aplicada. Essas informações fundamentais serão expostas e esmiuçadas no capítulo quatro.

Os métodos principais de determinação do geóide são:

- a) método gravimétrico;
- b) método astrogeodésico ou nivelamento astronômico;
- c) altimetria celeste;
- d) integral de Stokes e polinômio generalizado.

A Geodésia é dividida didaticamente em três áreas e em cada uma dessas áreas é possível determinar a alturas geoidais  $N$ . As três divisões são representadas por Geodésia: Geométrica, Física e Celeste.

### 2.2.1 Método Gravimétrico

Para que se torne possível a determinação das ondulações do geóide pelo método gravimétrico é necessário conhecer primeiramente o campo gravitacional terrestre. O problema da determinação da gravidade nos oceanos foi resolvido pela fórmula de Stokes. A fórmula de Stokes é parte integrante do método gravimétrico pois é necessário conhecer a gravidade e as anomalias da gravidade que serão utilizadas na fórmula.

O método gravimétrico determina também as componentes do desvio da vertical mediante medições da gravidade utilizando as fórmulas de Vening-Meinesz. Essas medições são estendidas à total superfície física terrestre. O método gravimétrico e nivelamento astronômico oferecem vantagens e desvantagens; eles devem ser encarados como complementares.

### 2.2.2 Método Astrogeodésico

A Geodésia geométrica apresenta o método mais antigo para a determinação das ondulações do geóide. O método astrogeodésico também é denominado nivelamento astronômico. Este método consiste na determinação do geóide em função do desvio astrogeodésico da vertical, no qual são empregadas as componentes do desvio da vertical obtidas das coordenadas astronômicas que são a latitude  $\Phi$  e a longitude  $\Lambda$  e das coordenadas elipsóidicas, latitude  $\varphi$  e longitude  $\lambda$  do mesmo ponto.

As coordenadas astronômicas (Figura 2.2) são:

- a) latitude astronômica  $\Phi$  ;
- b) longitude astronômica  $\Lambda$  .

A latitude astronômica  $\Phi$  é o ângulo formado pela vertical em um ponto com a sua projeção no equador. A latitude muda ao passar de um geóide para outro; daí a razão de nos cálculos a latitude utilizada ser o valor reduzido ao geóide. A latitude astronômica é medida de  $0^{\circ}$  a  $\pm 90^{\circ}$ , com origem no equador. Convenciona-se a latitude ser positiva no hemisfério norte e negativa no hemisfério sul. A longitude astronômica  $\Lambda$  é o ângulo formado entre o meridiano astronômico e o meridiano de origem. O meridiano astronômico tem seu plano definido pela vertical do lugar e por uma paralela ao eixo de rotação; o meridiano de origem é o meridiano de Greenwich. É contada positiva por leste de  $0^{\circ}$  a  $360^{\circ}$ , ou de  $0^{\circ}$  a  $180^{\circ}$  no hemisfério Oriental e  $0^{\circ}$  a  $-180^{\circ}$  no hemisfério Ocidental.

As coordenadas astronômicas são referidas à direção da vertical. Por isso se diz que  $\Phi$  e  $\Lambda$  são os parâmetros que orientam a vertical no espaço. As coordenadas elipsóidicas são referidas à direção da normal.

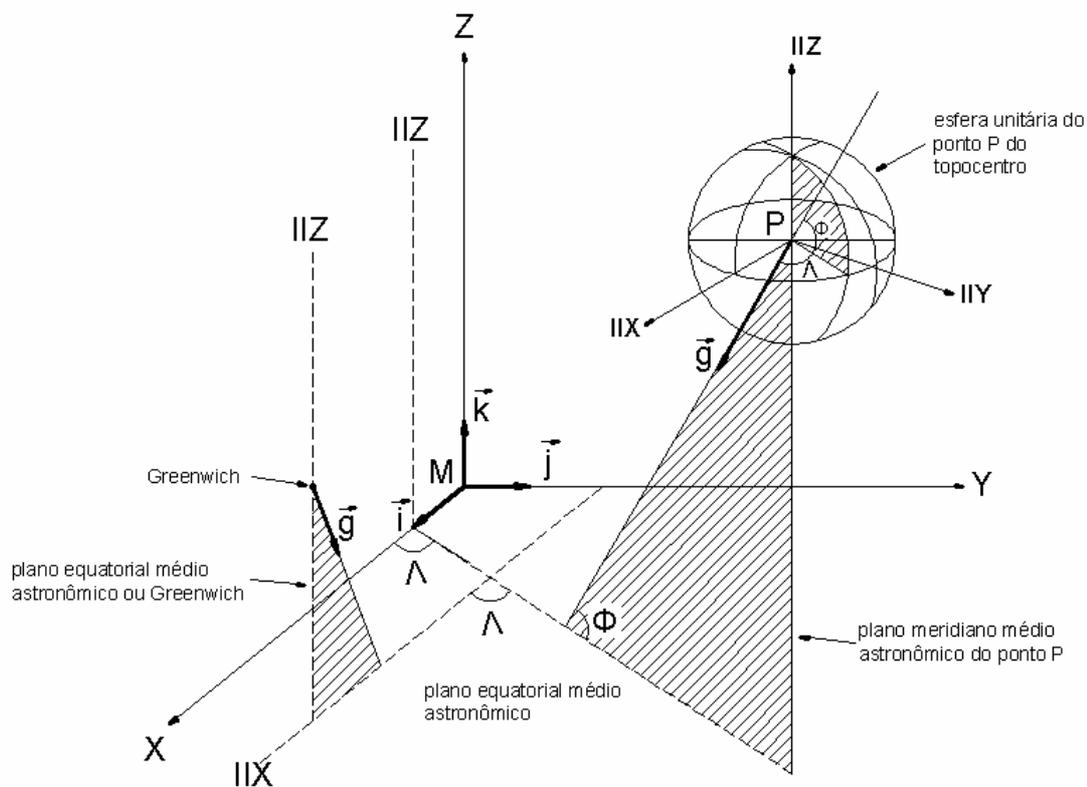


Figura 2.2 – Vertical e coordenadas astronômicas: latitude ( $\Phi$ ) e longitude ( $\Lambda$ ).

As coordenadas elipsóidicas ou geodésicas (Figura 2.3) são:

- a) latitude elipsóidica ou geodésica  $\varphi$ ;
- b) longitude elipsóidica ou geodésica  $\lambda$ ;
- c) altitude elipsóidica  $h$ .

A latitude elipsóidica ou geodésica é definida como o ângulo que a normal forma com sua projeção sobre o plano do equador. A longitude geodésica ou elipsóidica é o ângulo diedro formado pelo meridiano geodésico de origem (meridiano de Greenwich) e o meridiano do ponto considerado.

O desvio da vertical mede a inclinação do geóide em relação ao elipsóide de referência. É também definido como o ângulo formado entre a normal e a vertical. Vertical é a reta tangente no ponto à linha vertical. Linha vertical é definida como a linha de força do campo gravitacional. Normal é uma reta que passa pelo ponto e é perpendicular a uma tangente ao elipsóide (GEMAEL, 1999, p. 18).

As ondulações do geóide podem ser determinadas em função dos coeficientes do geopotencial. Geopotencial  $W$  é o potencial gerado pela Terra real.

O geopotencial  $W$  é representado pela soma do potencial gravitacional de atração  $V$  e o potencial centrífugo de rotação  $Q$  da Terra real. Neste método ocorre a utilização de harmônicos esféricos plenamente normalizados.

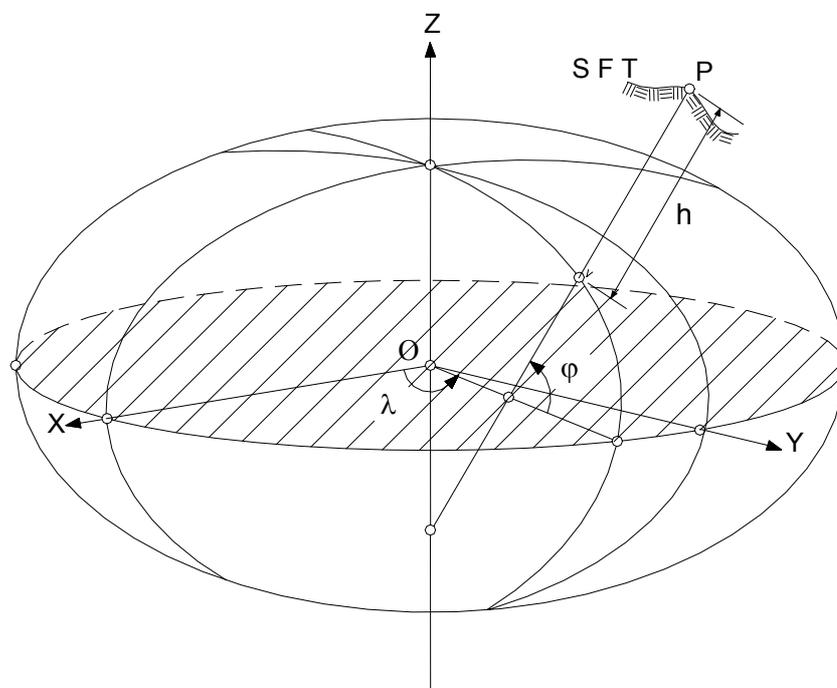


Figura 2.3 – Normal e coordenadas geodésicas: latitude ( $\varphi$ ), longitude ( $\lambda$ ) e altitude ( $h$ ).

### 2.2.3 Altimetria Celeste

Um outro método empregado na determinação das ondulações do geóide é representado pela altimetria celeste. Neste método, um satélite artificial de órbita conhecida, mede a distância do satélite à superfície instantânea do oceano. Estas medidas são transmitidas a um receptor terrestre.

### 2.2.4 Integral de Stokes e Polinômio Generalizado

Para obter as ondulações do geóide para regiões relativamente pequenas, Vaníček & Krakiwsky (1982) propõem um método, que também pode ser estendido a qualquer parâmetro do campo anômalo. A ondulação do geóide é determinada por duas maneiras. A primeira, pela integral de Stokes e segunda por um polinômio generalizado.

### 2.2.5 Métodos Combinados

Os métodos para a determinação das ondulações do geóide que foram destacados devem ser encarados como complementares, lembrado que todos eles possuem vantagens e desvantagens. Portanto, é importante verificar os princípios de cada um e verificar as melhores condições de aplicabilidade. Além disso, é coerente estudar as possíveis combinações desses métodos.

No método astrogravimétrico serão consideradas as determinações astrogeodésicas do desvio da vertical e as correspondentes determinações gravimétricas.

O objeto da Geodésia Geométrica são as determinações astrogeodésicas e o objeto da Geodésia Física são as determinações gravimétricas.

A Geodésia Física analisa os métodos de estudo da figura de Terra como um corpo físico e geométrico com base nas leis da mecânica e dados experimentais, utilizando-se medições geodésicas, gravimétricas e astronômicas (ZAKATOV, 1997, p. 258).

O método astrogeodésico determina o desvio da vertical necessário para o cálculo da ondulação do geóide, comparando coordenadas geodésicas com coordenadas astronômicas .

De acordo com o mesmo autor, o conhecimento das ondulações do geóide mediante o método de Stokes combinado com os coeficientes de potencial oferece vantagens, pois suas desvantagens são minimizadas.

## 2.3 Principais Técnicas de Solução da Integral de Stokes

As alturas geoidais podem ser determinadas de acordo com a utilização de técnicas distintas. As técnicas principais de solução da integral de Stokes são (LOBIANCO, 2005, p. 73):

- a) integração numérica e Transformada Rápida de Fourier (FFT);
- b) colocação por mínimos quadrados;
- c) harmônicos esféricos;
- d) ondaletas;

- e) obtenção direta da ondulação geoidal pela diferença entre altitudes elipsoidais, com auxílio do GPS e altitudes ortométricas que se obtêm do nivelamento geométrico e gravimetria;
- f) altimetria por satélite (nos oceanos);
- g) combinação entre estas técnicas.

Algumas das técnicas que foram mencionadas acima serão descritas a seguir.

### 2.3.1 Integração numérica

A integral de Stokes representa a forma clássica de obtenção das ondulações do geóide a partir das anomalias da gravidade sobre a superfície da Terra. Será utilizada também a função de Stokes, denotada pelo símbolo  $S(\Psi)$ , como núcleo de integração, que age como uma função peso para as anomalias da gravidade  $\Delta g$  (ROLAND & DENKER, 2003 apud LOBIANCO, 2005, p. 77).

A integração numérica ou quadratura numérica é utilizada quando uma integral definida de certa função não pode ser avaliada analiticamente ou quando certos tipos especiais de funções envolvidas na solução analítica são muito complexas para permitir o uso direto. Assim, uma integral definida pode ser resolvida numericamente a partir de sua fragmentação em uma soma.

A convolução Transformada Rápida de Fourier (FFT) representa uma técnica espectral de processamento rápido e simples. A utilização do algoritmo da FFT processa rapidamente o sinal espectral do campo de gravidade e resolve a integral de Stokes, com as anomalias da gravidade fornecidas em uma malha regular. Esta técnica vem suprir a necessidade da crescente capacidade computacional e maior tempo de processamento exigido pelo aumento da quantidade e distribuição dos dados de gravidade em todo o planeta (LOBIANCO, 2005, p.78).

### 2.3.2 Colocação por Mínimos Quadrados

A colocação por mínimos quadrados é uma técnica matemática que pode ser utilizada para a determinação do campo da gravitacional anômalo, combinando dados heterogêneos de diferentes tipos, onde a função covariância do potencial

anômalo, ou de uma de suas componentes, desempenha um papel fundamental (LOBIANCO, 2005, p. 84).

De acordo com o autor citado no último parágrafo, este método determina o potencial perturbador  $T$  a partir de um conjunto de quantidades mensuráveis inter-relacionadas e de diferentes tipos. O potencial anômalo ou perturbador  $T$ , é a diferença entre o geopotencial  $W$  e o esferopotencial  $U$ :

$$T = W - U. \quad (2.1)$$

A interpretação analítica do potencial perturbador  $T$  somente pode ser obtida de forma aproximada, utilizando a combinação linear de  $f$  funções de bases adequadas  $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_q$ :

$$T(P) = f(P) = \sum_{k=1}^q b_k \phi_k(P), \quad (2.2)$$

em que  $P$  é o ponto onde as funções são consideradas e  $b_k$  são os coeficientes.

Considerando que o potencial perturbador  $T$  é harmônico fora da superfície da Terra, são feitas escolhas de funções base  $\phi_k$  que também devem ser harmônicas e que satisfaçam a equação de Laplace:

$$\Delta\phi_k = 0 \quad \text{ou} \quad \nabla^2\phi_k = 0. \quad (2.3)$$

Pode-se assumir que sejam fornecidos valores isentos de erros para a interpolação de  $T$ , em  $q$  pontos  $P_i$ . É chamado de colocação este método de ajustar uma aproximação analítica a  $q$  funcionais dados. Tanto na colocação como na interpolação, para qualquer sistema de funções de base  $\phi_k$ , a determinação dos coeficientes  $b_k$  sempre envolve a solução de  $q \times q$  sistemas de equações lineares (MORITZ, 1984 apud LOBIANCO, 2005, p. 86).

A seleção de funções base  $\phi(P)$  para interpolação pode ser feita de modo que o desvio padrão do erro de interpolação  $m_p$  seja minimizado.

A colocação é uma generalização do problema da interpolação. O método de colocação ajusta uma aproximação analítica a  $q$  funcionais dados.

De acordo com Lobianco (2005), a vantagem dessa técnica é que, sendo uma matriz covariância a matriz a ser invertida, ela é simétrica e definida positiva, diferente do caso geral, onde a matriz é assimétrica.

### 2.3.3 Ondaletas (Wavelets)

O termo ondaletas (*wavelets*) surgiu em 1980. Ao estudar dados sísmicos, J. Morlet percebeu que eles apresentavam conteúdos de frequência que variavam rapidamente ao longo do tempo, tornando assim a transformada de Fourier inadequada como ferramenta de análise.

Aplicada ao cálculo da ondulação do geóide, a técnica da ondaleta utiliza dados do campo de gravidade residual por meio de um procedimento chamado “remover-calcular-repor” onde o cálculo é feito em duas fases. Na primeira fase, procede-se uma convolução dos dados de gravidade residual a partir de diversas funções de ondaleta. Estas funções ondaletas são casos particulares de uma função ondaleta protótipo. O resultado desta primeira fase é a decomposição do espectro total dos dados originais em um conjunto de sinais filtrados detalhados com uma resolução espacial única. Na segunda fase é feita uma convolução da gravidade residual detalhada com um núcleo de integração, levando as ondulações geoidais correspondentes. Aplicando a segunda fase à cada detalhe decomposto dos dados originais, tem-se como resultado às técnicas de integração clássica (ROLAND & DENKER, 2003 apud LOBIANCO, 2005, p. 88-92).

A integral de Stokes e a modelagem por ondaletas baseiam-se na fórmula de Stokes. No entanto, existem algumas diferenças entre estas técnicas. A principal diferença na metodologia está na diferente forma de manuseio no domínio da frequência, direcionando assim, para diferentes esforços computacionais. Outra diferença está relacionada às propriedades dos núcleos. O núcleo de Stokes é definido por uma fórmula fechada, mas é infinita em  $\Psi = 0$ , exigindo uma correção para a zona interna. Os núcleos das ondaletas são definidos por uma expansão em série. Cálculos exatos exigem ondaletas de banda limitada e tabulação acurada (ROLAND & DENKER, 2003 apud LOBIANCO, 2005, p. 94).

De acordo com os mesmos autores, um aspecto problemático do método da ondaleta é o erro de truncamento, que surge da soma finita dos detalhes. Este problema pode ser reduzido por uma relação balanceada entre a resolução dos dados e o conteúdo espectral dos resíduos. O erro de truncamento diminui, elevando a resolução dos dados.

As ondaletas são ideais para análise de sinais não-estacionários pois, localizam-se no tempo, enquanto que as bases de Fourier na freqüência, não se localizam no tempo (MORITTIN, 1999 apud LOBIANCO, 2005, p. 94-95).

De acordo com o mesmo autor, a análise de Fourier e as ondaletas são utilizadas para aprimorar uma função por uma combinação linear de senos e cossenos ou ondaletas.

#### 2.3.4 Altimetria por satélite artificial

A altimetria por satélite artificial consiste em determinar a distância  $R$ , do satélite até a superfície observada. O altímetro transmite um pulso curto de radiação de microonda até a superfície da Terra e parte dessa radiação é refletida em direção ao aparelho. Estes sinais são cuidadosamente analisados para derivar medições precisas de todo o percurso entre o satélite e a superfície do mar.

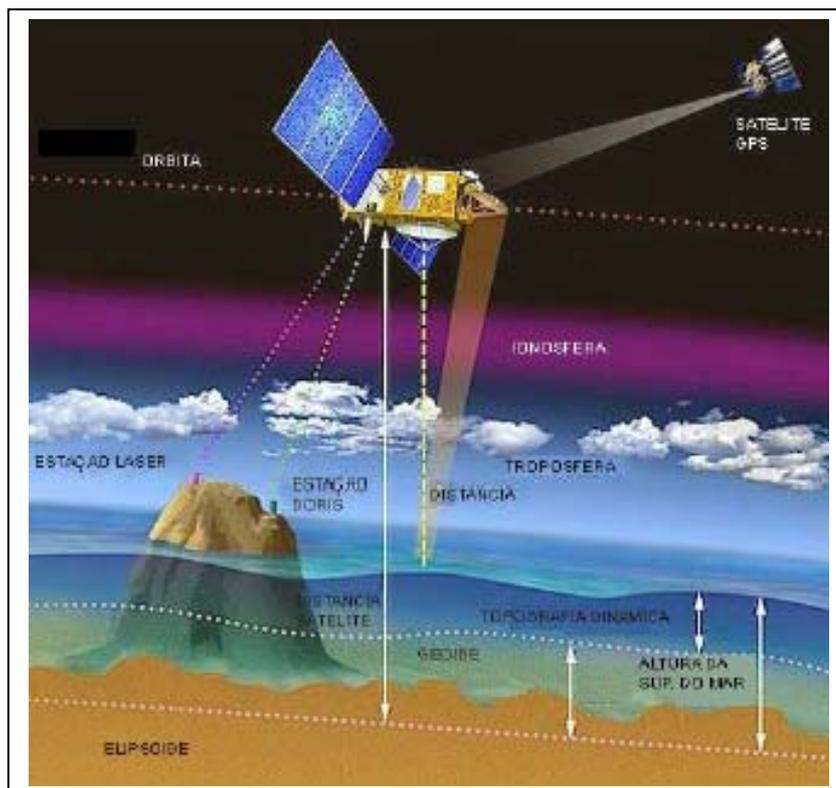


Figura 2.4 – Altimetria por satélites artificiais  
Fonte: (LOBIANCO, 2005)

A distância  $R$  entre o satélite e o oceano pode ser calculada de forma bastante acurada, substanciada na medição dos intervalos de tempo do processo,

escalado pela velocidade da luz. O objetivo principal deste processo é a medição do nível do mar em relação a um sistema de referência, exigindo medições independentes da trajetória da órbita do satélite (LOBIANCO, 2005, p.95).

As missões de altimetria por satélite são fontes de dados homogêneos e indispensáveis para a determinação do geóide nos oceanos. Algumas informações são importantes para o esclarecimento dessas missões (Figura 2.4 e Quadro 2.1).

<b>CARACTERÍSTICAS DA ALTIMETRIA POR RADAR PARA OS VÁRIOS SATÉLITES</b>			
<b>Satélite</b>	<b>Período da missão</b>	<b>Precisão da medida [cm]</b>	<b>Acurácia da órbita [cm]</b>
<b>GEOS-3</b>	abril 1975 – dezembro 1978	25	≈ 500
<b>SEASAT</b>	julho 1978 – outubro 1978	5	≈ 100
<b>GEOSAT</b>	março 1985 – dezembro 1989	4	30 – 50
<b>ERS-1</b>	julho 1991 – junho 1996	3	8 – 15
<b>TOPEX-POSEIDON</b>	agosto 1992 – presente	2	2 – 3
<b>ERS-2</b>	abril 1995 – presente	3	7 – 8
<b>JASON-1</b>	dezembro 2001 – presente	2	1 – 3
<b>ENVISAT</b>	janeiro 2002 – presente	3	5 – 7

Quadro 2.1 – Missões altimétricas, precisão das medidas e acurácia das órbitas  
Fonte: Clifton et al. (2001), CLS (2004) apud (LOBIANCO, 2005)

### 2.3.5 Global Positioning System (GPS) – Nivelamento pontual

Os recursos técnicos trazidos pelo GPS, revolucionaram as tradicionais técnicas de posicionamento.

O GPS permite a obtenção de coordenadas geodésicas  $(\varphi, \lambda, h)$  de um ponto P, de forma rápida com dados precisos e acurados. Porém, a altitude elipsoidal  $h$  é referida ao elipsóide e medida ao longo da normal. Subtraindo-se a altitude elipsoidal  $h$  da altitude ortométrica  $H$ , referida ao geóide e medida ao longo da vertical, e considerando a não colinearidade da vertical e da normal, obtém-se a ondulação  $N$  do geóide, conforme figura (2.1).

$$N \approx h - H. \quad (2.4)$$

### 2.3.6 Combinação das Técnicas

Em particular, cada técnica possui vantagens e desvantagens. A combinação de técnicas objetiva aproveitar as vantagens oferecidas isoladamente, considerando

principalmente os constantes refinamentos dos modelos geopotenciais e o seu caráter global, juntamente com o número de abrangência crescentes dos levantamentos gravimétricos efetuados nas áreas continental e oceânica (LOBIANCO, 2005, p.101).

De acordo com o mesmo autor, uma técnica associada ao cálculo das ondulações geoidais é a técnica remover-calcular-repor. Esta técnica combina as informações de longos comprimentos de onda de um modelo geopotencial, em que cada versão define um esferóide diferente, com observação de curto comprimento de onda dos dados terrestres de gravidade sobre a área de interesse.

A técnica remover-calcular-repor é usada para o cálculo combinado de geóides regionais.

O conhecimento das ondulações do geóide mediante o método de Stokes combinado com os coeficientes de potencial oferece vantagens, pois suas desvantagens são minimizadas.

### 3 FUNDAMENTOS DA TEORIA DO POTENCIAL

O propósito deste capítulo é apresentar os fundamentos da teoria do potencial que serão importantes para o entendimento dos tópicos tratados nos próximos capítulos.

#### 3.1 Lei da gravitação universal

A Lei de Newton afeta todos os objetos no Universo, desde as gotas de chuvas aos planetas no Sistema Solar e é conhecida como a Lei da Gravitação Universal. Newton demonstrou geometricamente em 1687, com base nas Leis de Kepler, que um planeta em seu giro em torno do Sol está sujeito a uma força que varia inversamente ao quadrado da distância que os separa. As Leis de Kepler podem hoje ser deduzidas a partir da Lei da Gravitação Universal.

Johannes Kepler (1571-1630) deduziu as Leis que regem os movimentos dos planetas (Figura 3.1), e mesmo sem explicá-las criou a base para a descrição dinâmica do movimento planetário permitindo assim a generalização de Newton.

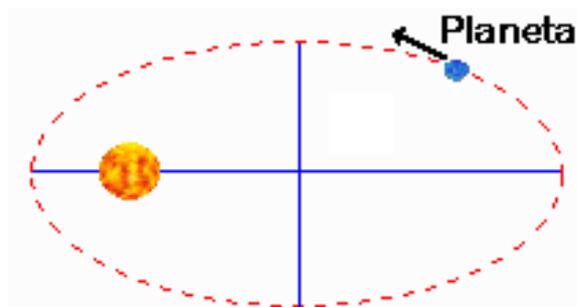


Figura 3.1 – Primeira Lei de Kepler

Fonte: <<http://educar.sc.usp.br/licenciatura/2000/gravitacao/leisdeKepler.htm>>

A primeira lei ou lei das órbitas diz que as órbitas dos planetas são elipses, nas quais o Sol ocupa um dos focos.

A segunda lei diz que áreas descritas pelo raio vetor de um planeta são proporcionais aos tempos empregados em descrevê-lo.

A proporção área para tempo fica da seguinte maneira:

$$\frac{\Delta a_1}{\Delta t_1} = \frac{\Delta a_2}{\Delta t_2} \quad (3.1)$$

A terceira lei diz que o quadrado do período  $T$  de um planeta é diretamente proporcional ao cubo da distância ao Sol.

$$T^2 = Gr^3, \quad (3.2)$$

onde  $r$  é o raio médio da órbita e  $G$  é a constante de proporcionalidade.

O enunciado da lei da gravitação universal diz: toda partícula de matéria no Universo atrai outra partícula, com uma força cuja direção é aquela da linha que une as duas e cujo módulo é diretamente proporcional ao produto de suas massas e inversamente proporcional ao quadrado da distância que as separa.

O módulo da força é dado por (HOFMANN-WELLENHOF & MORITZ, 2005, p. 3):

$$F = G \frac{m_1 m_2}{\ell^2}, \quad (3.3)$$

onde  $G$  é a constante gravitacional de Newton, e considerando-se o Sistema Internacional de unidades tem-se que:

$$G = 6,6742 \times 10^{-11} \text{m}^3 \text{s}^{-2} \text{kg}^{-1}, \quad (3.4)$$

e a distância  $\ell$  é representada por:

$$\ell = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2} \quad (3.5)$$

A partícula  $m_1$  é denominada de partícula atrativa de coordenadas  $(x', y', z')$  e a  $m_2$  de partícula atraída de coordenadas  $(x, y, z)$ . Na (3.3) faz-se  $m_1 = m$  e  $m_2 = 1$  o que resulta o módulo

$$F = G \frac{m}{\ell^2}. \quad (3.6)$$

A fórmula (3.6) expressa a força exercida por uma massa  $m$  em uma unidade de massa situada a uma distância  $\ell$  da massa  $m$  (HOFMANN-WELLENHOF & MORITZ, 2005, p.4).

### 3.2 Componentes da força de atração

A força de atração exercida por uma partícula  $m$  localizada na origem do sistema cartesiano sobre a partícula de massa unitária localizada no ponto  $P(x, y, z)$  é dada por:

$$\vec{F} = -\frac{Gm}{\ell^2} \frac{\vec{\ell}}{\ell} = -\frac{Gm}{\ell^3} \vec{\ell}. \quad (3.7)$$

O sinal (-) indica que os vetores  $\vec{F}$  e  $\vec{\ell}$  têm sentidos opostos. O vetor  $\vec{\ell}$  pode ser representado por:

$$\vec{\ell} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}, \quad (3.8)$$

sendo  $\vec{i}, \vec{j}$  e  $\vec{k}$  os versores fundamentais. O vetor  $\vec{F}$  pode ser representado por:

$$\vec{F} = -\frac{Gm(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k})}{\ell^3}. \quad (3.9)$$

A Figura (3.2) representa a decomposição da força  $\vec{F}$  em suas três componentes  $F_x$ ,  $F_y$  e  $F_z$ .

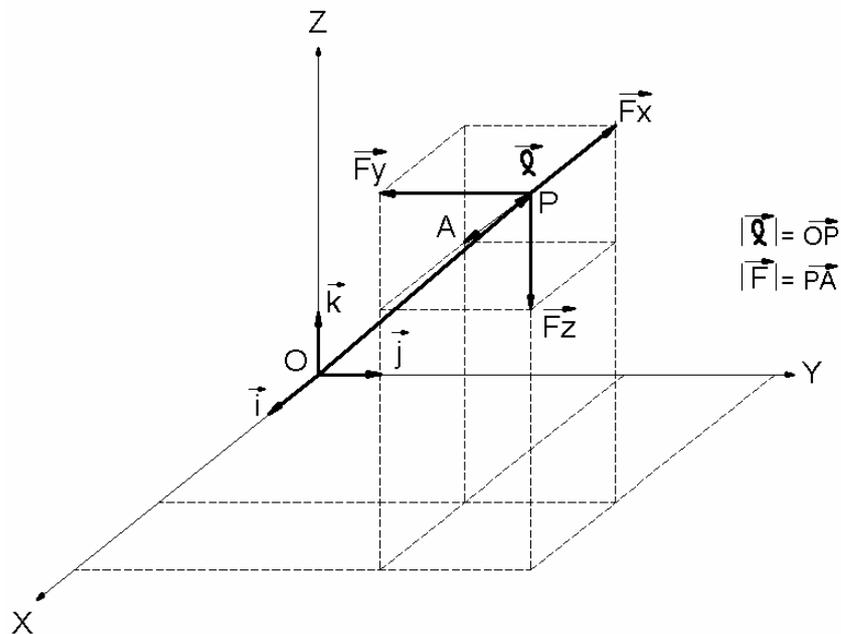


Figura 3.2 – Componentes da força de atração

Os módulos das componentes cartesianas da força de atração exercida por uma partícula  $m$  localizada na origem do sistema cartesiano sobre a partícula de massa unitária localizada no ponto  $P(x, y, z)$ , são expressas da seguinte forma:

$$F_x = -\frac{Gmx}{\ell^3}; \quad (3.10)$$

$$F_y = -\frac{Gmy}{\ell^3}; \quad (3.11)$$

$$F_z = -\frac{Gmz}{\ell^3}. \quad (3.12)$$

A força de atração exercida por uma partícula de massa  $m$  que está situada em um ponto  $P'(x', y', z')$  é dada por:

$$\vec{F} = -\frac{Gm}{\ell^3}[(x - x')\vec{i} + (y - y')\vec{j} + (z - z')\vec{k}]. \quad (3.13)$$

Assim, as componentes cartesianas da força de atração exercida por uma partícula  $m$ , que está situada em um ponto  $P'(x', y', z')$ , são dadas por:

$$F_x = -\frac{Gm(x - x')}{\ell^3}; \quad (3.14)$$

$$F_y = -\frac{Gm(y - y')}{\ell^3}; \quad (3.15)$$

$$F_z = -\frac{Gm(z - z')}{\ell^3}. \quad (3.16)$$

Analisando e generalizando o caso para um sistema de  $n$  partículas atrativas, obtém-se para a força de atração (Figura 3.3):

$$\vec{F} = -G \sum_{i=1}^n \left( \frac{m_i}{\ell_i^3} \right) \vec{\ell}_i. \quad (3.17)$$

Assim, as componentes cartesianas da força de atração exercida por  $n$  partículas atrativas, são representadas da seguinte forma:

$$F_x = -G \sum_{i=1}^n \frac{m_i(x - x_i)}{\ell_i^3}, \quad (3.18)$$

$$F_y = -G \sum_{i=1}^n \frac{m_i(y - y_i)}{\ell_i^3}, \quad (3.19)$$

$$F_z = -G \sum_{i=1}^n \frac{m_i(z - z_i)}{\ell_i^3}. \quad (3.20)$$

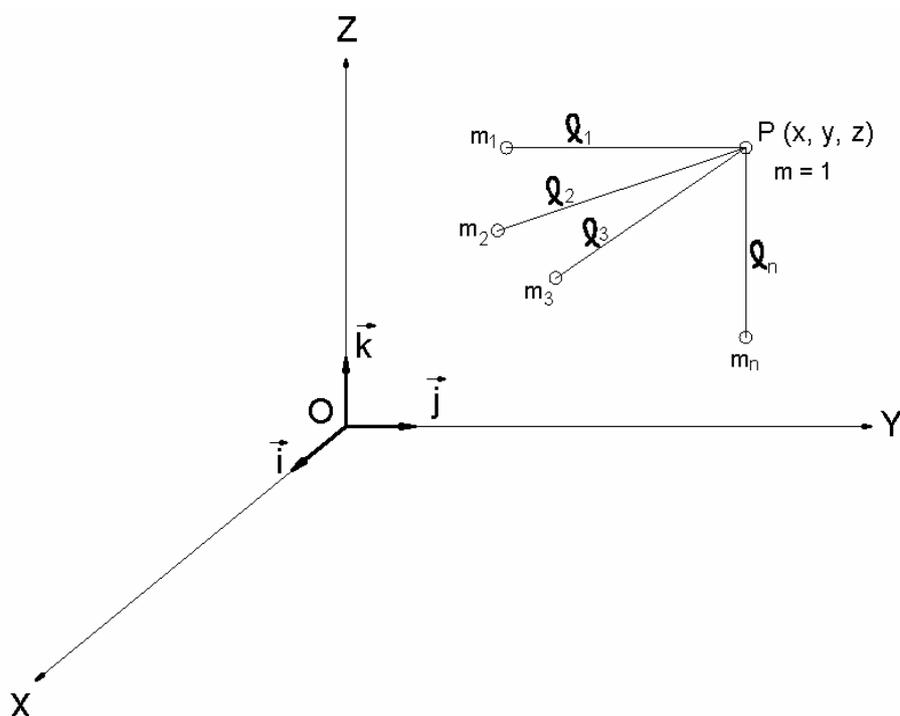


Figura 3.3 – Distribuição de n partículas atrativas

Há um outro caso para ser considerado. Pode-se ter uma distribuição contínua de massa. Neste caso, para um corpo de massa  $m$  e volume  $v$ , a força de atração será representada por

$$\vec{F} = -G \int_M \frac{dm}{\ell^3} \vec{\ell}. \quad (3.21)$$

Portanto, as componentes cartesianas da força de atração exercida por um corpo de massa  $m$  e volume  $v$  são expressas da seguinte maneira:

$$F_x = -G \int_M \frac{(x - x')}{\ell^3} dm = -G \int_v \frac{(x - x')}{\ell^3} \rho dv, \quad (3.22)$$

$$F_y = -G \int_M \frac{(y - y')}{\ell^3} dm = -G \int_v \frac{(y - y')}{\ell^3} \rho dv, \quad (3.23)$$

$$F_z = -G \int_M \frac{(z - z')}{\ell^3} dm = -G \int_v \frac{(z - z')}{\ell^3} \rho dv, \quad (3.24)$$

sendo  $dm$  a massa elementar de coordenadas  $(x', y', z')$  e  $dv$  volume elementar.

A massa elementar  $dm$  e o volume elementar  $dv$  se relacionam por:

$$dm = \rho dv = \rho dx' dy' dz', \quad (3.25)$$

em que  $\rho$  representa a densidade nos corpos não homogêneos é função de ponto dada por:  $\rho = f(x', y', z')$ .

### 3.3 Potencial gravitacional

A teoria do potencial, que se remonta a Laplace, desempenha papel fundamental nos cálculos geodésicos da determinação do campo gravitacional da Terra e suas implicações com a forma da Terra (GEMAEL, 1999, p. 33).

A função escalar  $V$  que representa o potencial gravitacional de atração ou newtoniano, com massa  $m(x', y', z')$  no ponto  $P(x', y', z')$ , é definida como uma função escalar do tipo:

$$V = \frac{Gm}{\ell} \quad (3.26)$$

No caso de um sistema discreto de partículas, com  $n$  partículas de massas  $m_1, m_2, \dots, m_n$ , o potencial gravitacional de atração produzido pelas  $n$  partículas, é representado por:

$$V = G \sum_{i=1}^n \frac{m_i}{\ell_i} \quad (3.27)$$

E no caso de uma distribuição contínua de massas em um volume, com densidade  $\rho$ , o potencial gravitacional de atração produzido pela massa elementar  $dm$  (Figura 3.4) e distância  $\ell$  (Figura 3.5), é expresso por:

$$V = G \int_m \frac{dm}{\ell} = G \int_v \frac{\rho dx' dy' dz'}{\ell} \quad (3.28)$$

A principal propriedade do potencial gravitacional de atração é que a derivada de  $V$  em relação aos eixos coordenados é igual às componentes da força de atração exercida sobre o ponto  $P(x, y, z)$ . Os módulos são :

$$\frac{\partial V}{\partial x} = F_x; \quad (3.29)$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} = F_y; \quad (3.30)$$

$$\frac{\partial V}{\partial z} = F_z. \quad (3.31)$$

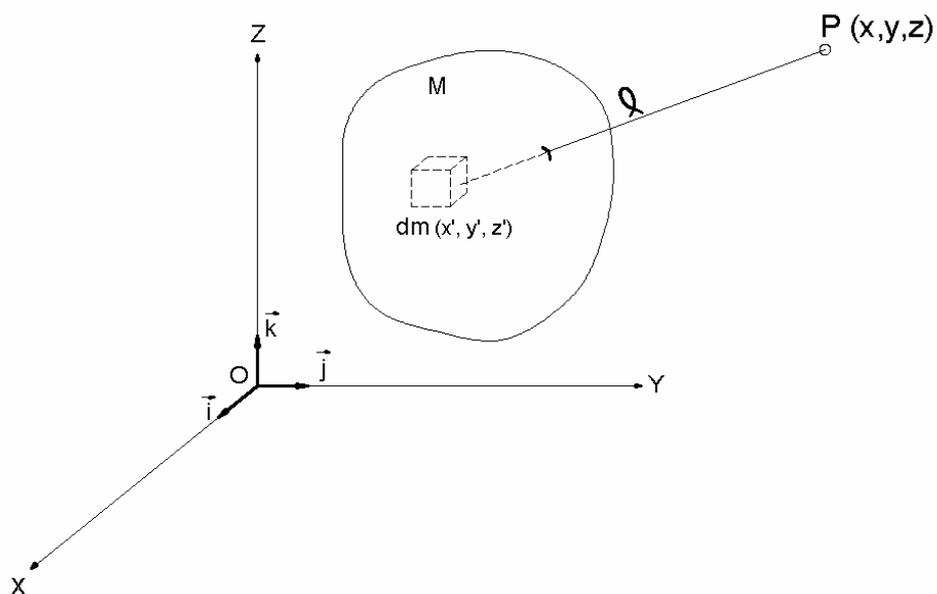
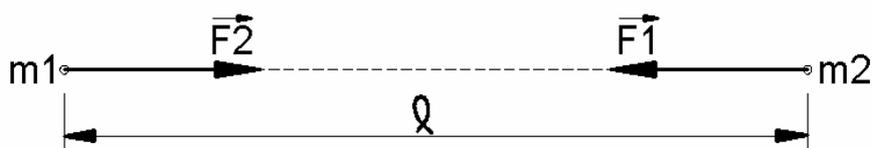


Figura 3.4 – Potencial Newtoniano

Figura 3.5 – Distância  $\ell$ 

### 3.4 Operadores

Alguns operadores são de freqüente aplicação na teoria do potencial. O potencial newtoniano é uma função escalar de posição, pois assume valores diferentes nos diferentes pontos de uma região.

Definem-se, então, funções vetoriais de posição.

#### 3.4.1 Operador nabla ou operador de Hamilton

O vetor simbólico nabla<sup>4</sup>  $\vec{\nabla}$  é definido por:

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k}. \quad (3.32)$$

<sup>4</sup> Alguns autores como Ramsey (1961) denominam o vetor nabla de operador hamiltoniano

### 3.4.2 Operador gradiente de um escalar

O gradiente da função escalar  $E = f(x, y, z)$  é definido por:

$$\text{grad } E = \vec{\nabla} E, \quad (3.33)$$

$$\text{grad } E = \frac{\partial E}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial E}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial E}{\partial z} \vec{k}. \quad (3.34)$$

O operador grad transforma um escalar em vetor. O gradiente de uma função escalar  $E = f(x, y, z)$ , representa o produto escalar entre o operador nabla e a função escalar  $E = f(x, y, z)$ . As componentes deste vetor são as derivadas da função escalar segundo os eixos  $x$ ,  $y$  e  $z$ .

### 3.4.3 Operador divergente de um vetor

O divergente da função vetorial de posição  $\vec{A} = \vec{f}(x, y, z)$  é definido por:

$$\text{div } \vec{A} = \vec{\nabla} \cdot \vec{A}. \quad (3.35)$$

O ponto (.) indica produto escalar ou produto interno:

$$\text{div } \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}. \quad (3.36)$$

O operador divergente transforma um vetor em um escalar, através de um produto escalar entre o operador nabla e a função vetorial de Posição  $\vec{A} = \vec{f}(x, y, z)$ .

### 3.4.4 Operador rotacional de um vetor

O rotacional  $\text{rot } \vec{A}$  é definido por:

$$\text{rot } \vec{A} = \vec{\nabla} \times \vec{A}. \quad (3.37)$$

O símbolo ( $\times$ ) representa o produto vetorial. A representação matricial de  $\text{rot } \vec{A}$  se escreve

$$\text{rot } \vec{A} = \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{bmatrix}. \quad (3.4.7)$$

O operador rotacional, tem como resultado um vetor, pois considera a operação entre o operador nabla e a função vetorial de Posição  $\vec{A} = \vec{f}(x, y, z)$ , através de um produto vetorial.

### 3.4.5 Operador de Laplace ou operador laplaciano de um vetor

O operador de Laplace (laplaciano), simbolizado por  $\nabla^2$  (nabla ao quadrado) ou por  $\Delta$  (delta), é definido por:

$$\nabla^2 = \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \quad (3.38)$$

O símbolo lap também é utilizado (KUHN, 2000, p. 12).

Pode-se notar que o laplaciano corresponde ao operador div grad:

$$\text{div grad}E = \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial z^2} = \Delta E. \quad (3.39)$$

## 3.5 Campos Vetoriais e Campos Escalares

Um campo vetorial é constituído por uma região e pelo conjunto de vetores associados, onde a cada ponto dessa região pode ser associado de maneira unívoca<sup>5</sup> um vetor. Os vetores são funções de ponto, variando de maneira contínua e uniforme e estarão representando forças de atração, velocidades, acelerações e outros. Para representar um campo vetorial é necessário representar todos os vetores deste campo. Estes vetores estão associados a cada um dos pontos do campo vetorial. Portanto, um único vetor não pode ser considerado representativo do campo considerado.

Um campo escalar é constituído por uma região e pelo conjunto de escalares associados, onde a cada ponto dessa região pode ser associado de maneira unívoca um escalar. Os escalares são funções de ponto, varia de maneira contínua e uniforme e representa, por exemplo, temperatura e pressão.

---

<sup>5</sup> Correspondência um-a-um. Para cada elemento do domínio existe um único elemento do contradomínio associado a ele.

Definem-se a seguir, os campos vetoriais e escalares utilizados em Geodésia. Os campos estacionários são campos cujos vetores não variam com o tempo. Eles são classificados em:

- a) campo conservativo ou irrotacional;
- b) campo solenoidal;
- c) campo harmônico.

### 3.5.1 Campo Vetorial Conservativo ou Irrotacional

Um campo vetorial  $\vec{F} = \vec{F}(x, y, z)$  é conservativo quando é dotado de potencial escalar  $V$ ; ou seja, quando existe um escalar  $V = V(x, y, z)$  tal que:

$$\vec{F} = \text{grad } V. \quad (3.40)$$

Este campo vetorial pode ser representado por:

$$\vec{F} = \frac{\partial V}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial V}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial V}{\partial z} \vec{k} = F_x \vec{i} + F_y \vec{j} + F_z \vec{k}, \quad (3.41)$$

onde cada uma das parcelas é representada pela derivada parcial de  $V$  segundo os eixos coordenados. A condição necessária e suficiente para que isso ocorra é

$$\text{rot } \vec{F} = 0 \quad (3.42)$$

Pode-se também dizer que um campo é conservativo quando a expressão do trabalho elementar é uma diferencial exata

$$\vec{F} \cdot \vec{ds} = F_x dx + F_y dy + F_z dz = \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz = dV. \quad (3.43)$$

Pode-se ainda integrar a expressão (3.43) entre dois pontos A e B ao longo de uma trajetória qualquer  $s$ . O resultado fornece o trabalho realizado pela força de atração para transportar a unidade de massa de um ponto para outro. Logo após, aplica-se o operador grad ao potencial escalar  $V$  e ao vetor resultante aplica-se o operador div, o que resulta:

$$\text{grad } V = \vec{F}, \quad (3.44)$$

$$\text{div } \vec{F} = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = \Delta V. \quad (3.45)$$

A expressão (3.45) diz que o laplaciano da potencial num ponto de um campo conservativo é igual ao divergente do vetor atração.

### 3.5.2 Campo vetorial solenoidal

Um campo vetorial  $\vec{F} = \vec{F}(x, y, z)$  é denominado solenoidal quando é dotado de potencial vetorial  $\vec{W}$ , ou seja, quando existe um vetor que satisfaça:

$$\vec{F} = \text{rot } \vec{W} . \quad (3.46)$$

Para que a expressão (3.46) ocorra, a condição

$$\text{div } \vec{F} = 0 \quad (3.47)$$

deve ocorrer.

### 3.5.3 Campo vetorial harmônico

Um campo vetorial  $\vec{F} = \vec{F}(x, y, z)$  é harmônico quando as seguintes condições forem verdadeiras:

$$\text{rot } \vec{F} = 0 \quad (3.48)$$

$$\text{div } \vec{F} = 0 \quad (3.49)$$

Tendo a seguinte condição:

$$\text{rot } \vec{F} = 0 \rightarrow \vec{F} = \text{grad } V , \text{ resulta em:}$$

$$\text{div } \vec{F} = \text{div grad } V = \Delta V = 0 . \quad (3.50)$$

A expressão (3.50) é a equação de Laplace para o potencial. Esta equação é de fundamental importância para a Teoria do Potencial.

### 3.6 Superfície equipotencial

Superfície equipotencial é definida como o lugar geométrico dos pontos do campo que tem o mesmo potencial escalar (GEMAEL, 1999, p. 38). A definição pode ser expressa por

$$V = V(x, y, z) = \text{constante} . \quad (3.51)$$

Um campo gravitacional possui em geral várias superfícies equipotenciais. É importante saber que o vetor grad V é perpendicular às superfícies equipotenciais do campo.

### 3.7 Equação de Laplace<sup>6</sup>

A equação de Laplace é válida para pontos exteriores às massas atrativas, isto é, o ponto atraído é exterior às massas atrativas (Figura 3.6).

O laplaciano de uma função escalar  $E = E(x, y, z)$  é dado por:

$$\Delta E = \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial z^2} \quad (3.52)$$

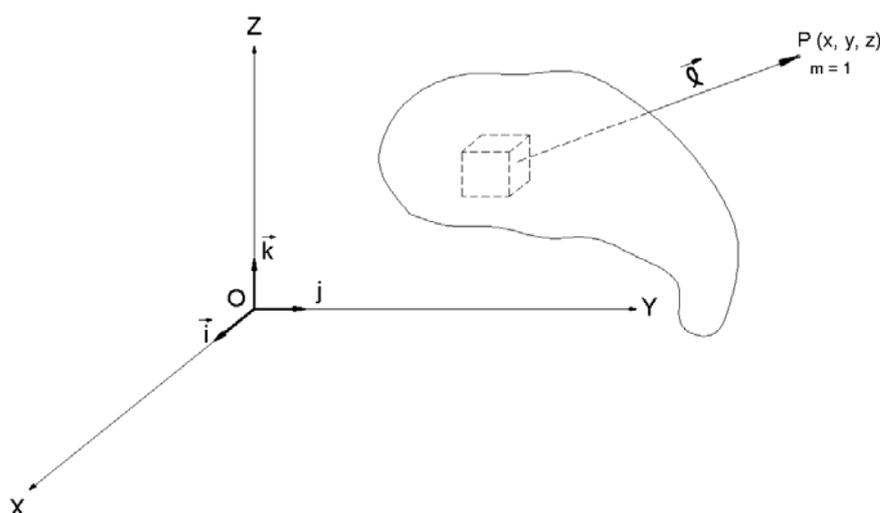


Figura 3.6 – Massas atrativas

O laplaciano de uma função escalar  $E = E(x, y, z)$  expresso em coordenadas esféricas  $(r, \nu, \lambda)$ , representadas na Figura (3.7), possui importância nos cálculos geodésicos e sua expressão fica caracterizada por:

$$\Delta E = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial E}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \text{sen} \nu} \frac{\partial}{\partial \nu} \left( \text{sen} \nu \frac{\partial E}{\partial \nu} \right) + \frac{1}{r^2 \text{sen}^2 \nu} \frac{\partial^2 E}{\partial \lambda^2}, \quad (3.53)$$

que também pode ser representada por

$$\Delta E = \frac{\partial^2 E}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial E}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 E}{\partial \nu^2} + \frac{\text{cotg} \nu}{r^2} \frac{\partial E}{\partial \nu} + \frac{1}{r^2 \text{sen}^2 \nu} \frac{\partial^2 E}{\partial \lambda^2}. \quad (3.54)$$

<sup>6</sup> Pierre Simon Laplace (1749 – 1827)

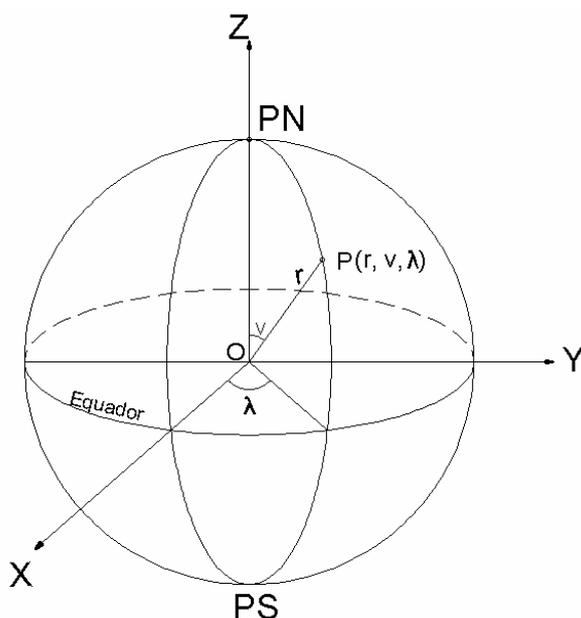


Figura 3.7 – Coordenadas esféricas

Se o ponto atraído está dentro do corpo à distância  $\ell$  pode ser zero, o que implicaria na não solução de algumas integrais (ZAKATOV, 1997, p. 309).

Considera-se o potencial de atração  $V$  gerado por um sistema discreto de partículas em um ponto que não se confunda com nenhum outro ponto do sistema:

$$V = \sum_{i=1}^n G \frac{m_i}{\ell_i}. \quad (3.55)$$

As derivadas parciais de primeira ordem em relação ao potencial de atração  $V$  são:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -G \sum_{i=1}^n \frac{m_i (x - x'_i)}{\ell_i^3}, \quad (3.56)$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} = -G \sum_{i=1}^n \frac{m_i (y - y'_i)}{\ell_i^3}, \quad (3.57)$$

$$\frac{\partial V}{\partial z} = -G \sum_{i=1}^n \frac{m_i (z - z'_i)}{\ell_i^3}. \quad (3.58)$$

As derivadas parciais de segunda ordem em relação ao potencial de atração  $V$  ficam da seguinte forma:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = G \sum_{i=1}^n \frac{m_i}{\ell_i^3} - 3G \sum_{i=1}^n \frac{m_i (x - x'_i)^2}{\ell_i^5}, \quad (3.59)$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = G \sum_{i=1}^n \frac{m_i}{\ell_i^3} - 3G \sum \frac{m_i (x - x'_i)^2}{\ell_i^5}, \quad (3.60)$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = G \sum_{i=1}^n \frac{m_i}{\ell_i^3} - 3G \sum \frac{m_i (z - z'_i)^2}{\ell_i^5}. \quad (3.61)$$

Somam-se membro a membro as parcelas das derivadas parciais de segunda ordem em relação aos eixos coordenados e obtém-se:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 3 \sum_{i=1}^n \frac{m_i}{\ell_i^3} - 3 \sum \frac{m_i}{\ell_i^3} = 0, \quad (3.62)$$

que também pode ser representada por:

$$\Delta V = 0. \quad (3.63)$$

A expressão (3.63) diz que o laplaciano do potencial gravitacional em pontos externos às massas atrativas é nulo. Esta mesma expressão representa a equação de Laplace (GEMAEL, 1999, p. 41).

Uma função é harmônica quando satisfaz a equação de Laplace em todos os pontos de uma região, ou seja, a função é contínua em todos os pontos da região. Uma função harmônica é também analítica, isto é, tanto essas funções como suas derivadas são contínuas na região considerada.

O potencial de atração para os pontos da região não ocupada por massas atrativas será sempre uma função harmônica, isto é, em qualquer ponto do espaço fora do corpo atrativo a função potencial  $V$  sempre vai satisfazer a equação de Laplace. O potencial gravitacional de atração no interior das massas atrativas não é nulo (ZAKATOV, 1997, p. 311).

### 3.8 Equação de Poisson<sup>7</sup>

O potencial de atração é uma função harmônica nos espaços que não estão ocupados pelas massas atrativas, ou seja, nos espaços vazios da região. Então, conhece-se o laplaciano do potencial da atração no exterior das massas atrativas. É necessário conhecer também o laplaciano do potencial no interior das massas atrativas.

A equação de Poisson é válida para pontos interiores às massas, isto é, o ponto atraído é interior às massas atrativas. Esta equação será deduzida a partir do

---

<sup>7</sup> Siméon Denis Poisson (1781 – 1840)

potencial gerado pela esfera E, e pelas massas que a circundam (GEMAEL, 1999, p. 42).

O potencial gerado por uma esfera homogênea de massa M e de raio r, num ponto exterior à esfera é o mesmo potencial que se obteria concentrando a massa da esfera no seu centro, o qual é expresso por:

$$V = \frac{GM}{\ell}. \quad (3.64)$$

O potencial gerado por uma esfera homogênea de massa M e de raio r, num ponto interior à esfera, é expresso por:

$$V = \frac{2}{3} G\pi\rho(3r^2 - \ell^2), \quad (3.65)$$

onde  $\ell$  é a distância do ponto até o centro da esfera.

De posse das expressões (3.64) e (3.65), pode-se escrever o potencial V no ponto P, sendo P um ponto do interior de uma distribuição contínua de massas. Estas massas serão divididas em duas partes. A primeira é representada por uma esfera E, de raio suficientemente pequeno para que a densidade  $\rho$  no seu interior possa ser admitida constante e que esta esfera contenha P. A segunda parte é representada pelo restante das massas (GEMAEL, 1999, p. 42).

O potencial V no ponto P do interior de uma distribuição contínua de massas é representado pela soma de  $V_1$  e  $V_2$ , isto é:

$$V = V_1 + V_2, \quad (3.66)$$

onde  $V_1$  é o potencial gerado pela esfera E, e  $V_2$  é o potencial gerado pelas massas que circundam a esfera E.

Pode-se escrever:

$$\Delta V = \Delta V_1 + \Delta V_2, \quad (3.67)$$

pois o operador de Laplace possui a propriedade distributiva.

Escreve-se  $\ell$  em função das coordenadas do ponto P e calcula-se o Laplaciano da função  $V_1$  que é representado por

$$\Delta V_1 = \Delta \left[ \frac{2}{3} G\pi\rho(3r^2 - \ell^2) \right] = -4G\pi\rho, \quad (3.68)$$

e com  $\Delta V_2 = 0$  resulta a equação de Poisson que é válida para pontos interiores às massas.

A equação de Poisson é expressa por:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = \Delta V = -4G\pi\rho. \quad (3.69)$$

Tanto a equação de Laplace como a equação de Poisson são fundamentais na teoria do potencial. A equação de Laplace fornece recursos para a determinação do potencial externo da Terra e o estudo de sua forma (ZAKATOV, 1997, p. 311).

### 3.9 Fórmula de Gauss-Ostrogradski

A fórmula de Gauss<sup>8</sup>-Ostrogradski exprime o fluxo do vetor  $\vec{F}$  em uma superfície de área  $S$  e volume  $v$ .

Define-se o fluxo elementar  $d\phi$  do vetor  $\vec{F}$  como (GEMAEL, 1999, p. 43):

$$d\phi = \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \vec{F}_n dS, \quad (3.70)$$

onde  $\vec{n}$  é o versor da normal orientada positivamente para o exterior de  $S$ ,  $dS$  é uma área elementar e  $\vec{F}_n$  é a componente de  $\vec{F}$  segundo a normal (Figura 3.8).

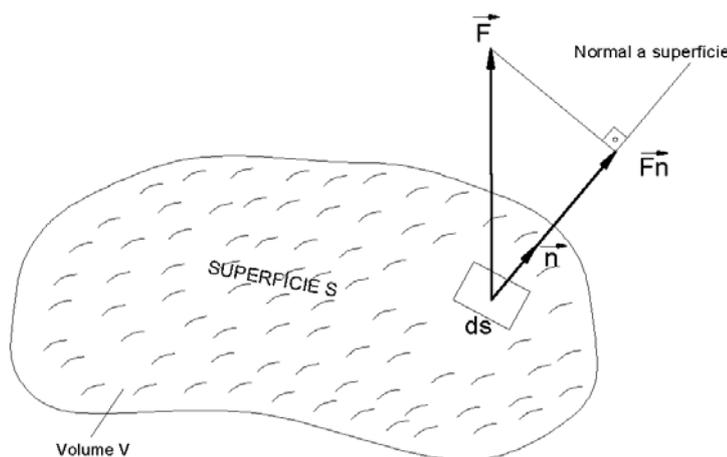


Figura 3.8 – Superfície fechada  $S$ , que delimita um volume  $v$

Exprime-se o fluxo total através da superfície pela integral

$$\phi = \int_S \vec{F}_n dS. \quad (3.71)$$

A fórmula de Gauss-Ostrogradski:

$$\int_v \text{div} \vec{F} dv = \int_S \vec{F}_n dS, \quad (3.72)$$

<sup>8</sup> Carl Friedrich Gauss (1777-1855).

diz que a integral do divergente de um vetor estendida a um volume  $v$  é igual ao fluxo do mesmo vetor através da superfície  $S$  limitante de  $v$ . A equação (3.72) também é conhecida como teorema de Green e teorema do divergente.

### 3.10 Identidades de Green

Os teoremas de Green<sup>9</sup> e as fórmulas integrais relacionadas a eles são fundamentais na teoria do potencial (HEISKANEN & MORITZ, 1985).

A fórmula integral de Gauss é dada pela seguinte expressão:

$$\int_v \text{div} \vec{F} \, dv = \int_S \vec{F}_n \, dS, \quad (3.73)$$

onde  $v$  é o volume delimitado pela superfície  $S$ ,  $dv$  é o volume elementar de  $v$ ,  $\vec{F}_n$  é a projeção do vetor  $\vec{F}$  sobre a superfície normal  $n$ ,  $\text{div} \vec{F}$  é o divergente do vetor  $\vec{F}$  e  $dS$  é um elemento da superfície  $S$ .

O vetor  $\vec{F}$  possui as componentes  $X, Y, Z$  e é escrito da seguinte forma:

$$\vec{F} = \vec{F}(X, Y, Z), \quad (3.74)$$

e o divergente de  $\vec{F}$  é escrito:

$$\text{div} \vec{F} = \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} \quad (3.75)$$

A fórmula integral de Gauss, dada pela expressão (3.73) é válida para qualquer campo de vetores, independente do significado físico. No interior da superfície  $S$  pode haver muitas fontes geradoras de fluxo de um fluido incompreensível, cujo vetor velocidade é  $\vec{F}$ , ou sumidouros onde o fluido é eliminado.

O operador  $\text{div} \vec{F}$  mede a intensidade das fontes ou dissipadores. O lado esquerdo da fórmula que representa a integral de Gauss mostra a quantidade de fluido gerado ou dissipado em uma unidade de tempo pela ação combinada de fontes e dissipadores no interior da superfície; e o lado direito da fórmula integral de Gauss é a quantidade de fluido que escoou em unidade de tempo através de uma superfície  $S$ . Fica expressa assim a igualdade entre essas duas quantidades (HEISKANEN & MORITZ, 1985, p. 10).

---

<sup>9</sup> George Green (1793-1841)

De acordo com o mesmo autor, observando o caso em que  $\vec{F}$  seja o vetor da força gravitacional, tem-se que  $\vec{F}$  não tem uma interpretação tão simples como a do exemplo acima, porém pode-se usar a mesma analogia. Na gravitação, as componentes X, Y, Z da força podem ser derivados do potencial V, através das equações:

$$X = \frac{\partial V}{\partial x}, \quad Y = \frac{\partial V}{\partial y}, \quad Z = \frac{\partial V}{\partial z}. \quad (3.76)$$

Substituem-se as expressões (3.76) em (3.75) e resulta:

$$\text{div } \vec{F} = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = \Delta V. \quad (3.77)$$

A equação de Poisson é dada por:

$$\text{div } \vec{F} = \Delta V = -4\pi G\rho, \quad (3.78)$$

onde  $\rho$  é a densidade e G é a constante de gravitação de Newton.

Pode-se interpretar que as massas são as fontes do campo gravitacional; a intensidade das fontes,  $\text{div } \vec{F}$ , é proporcional a densidade  $\rho$ .

A fórmula integral de Gauss pode ser expressa em termos da função V. Fazendo-se coincidir a direção do eixo x positivo com a direção normal n orientada para o exterior da superfície S, a componente normal de  $\vec{F}$  é a componente x (X):

$$F_n = X \quad (2.79)$$

Por outro lado, sendo  $\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial n}$  a derivada de V na direção normal orientada para o exterior n, obtém-se por meio da expressão (3.76) que:

$$F_n = \frac{\partial V}{\partial n}. \quad (3.80)$$

Voltando na equação (3.73) e levando em consideração a expressão (3.80), juntamente com a relação  $\vec{F} = \Delta V$ , obtém-se:

$$\int_v \Delta V dv = \int_s \frac{\partial V}{\partial n} dS. \quad (3.81)$$

A expressão (3.81) é a fórmula integral para o potencial.

As identidades de Green têm sua aplicação nos problemas de contorno da Geodésia Física.

### 3.10.1 Problemas de Valor de Contorno da Geodésia Física - PVCG

O conhecimento de uma determinada variável sobre uma superfície e a determinação de uma função que relacione tal variável, conduz ao chamado problema de contorno.

A determinação da superfície geoidal está intimamente relacionada ao problema de valor de contorno da Geodésia Física.

Os problemas de contorno são divididos em três tópicos. Problemas de contorno da teoria do Potencial, da Geodésia Física e da integral de Poisson.

O problema de contorno da Teoria do Potencial é dividido em três problemas:

- a) primeiro problema de valor de contorno ou problema de Dirichlet<sup>10</sup> ;
- b) segundo problema de valor de contorno ou problema de Neumann<sup>11</sup>;
- c) terceiro problema de valor de contorno ou problema de Hilbert<sup>12</sup>.

O primeiro problema ou problema de Dirichlet, objetiva determinar uma função harmônica no interior ou no exterior de uma dada superfície  $S$  quando são conhecidos os valores que a função assume sobre a superfície.

O segundo problema ou problema de Neumann consiste em determinar uma função harmônica no interior e no exterior de uma dada superfície  $S$  quando são conhecidos os valores que a derivada normal da função assume sobre a superfície.

O terceiro problema consiste em determinar uma função harmônica no interior de uma dada superfície  $S$  quando são conhecidos os valores que assume sobre a superfície uma combinação da função e de sua derivada normal.

O primeiro problema de contorno da geodésia Física também pode ser resolvido diretamente pela integral de Poisson. Também existem fórmulas semelhantes para o segundo e para o terceiro problema (HEISKANEN & MORITZ, 1985, p. 37).

O PVCG pode ser formulado admitindo-se as seguintes condições (HECK, 1988 apud BLITZKOW, 1996, p. 30):

- a) A Terra se comporta como um corpo rígido e gira com velocidade angular  $\omega$  uniforme em torno de um eixo fixo.
- b) A massa da Terra está localizada no interior da superfície física  $S$ .

---

<sup>10</sup> Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1806-1859).

<sup>11</sup> Neumann (1903-1957).

<sup>12</sup> David Hilbert (1862-1943).

- c) O potencial gravitacional newtoniano é gerado pela atração total dos elementos de massa atuando sobre uma partícula.
- d) O potencial é regular no infinito e satisfaz a equação de Laplace no exterior das massas e satisfazendo também a equação de Poisson no interior das massas;
- e) Introdz-se um referencial fixo a Terra com origem no seu centro de massa, obtendo um sistema dextrogiro;
- f) admite-se que o contorno é uma superfície regular suave S.

As incógnitas a serem determinadas são: a função potencial de gravidade  $W$  no exterior das massas e a geometria da superfície de contorno  $S$ .

Na prática, algumas dessas condições necessárias para o estabelecimento do PVCG não são atendidas. O PVCG exige, para sua aplicação, a não existência de massas externas à superfície. Portanto, é necessário eliminar o efeito da atmosfera e dos astros que geram influência sobre a Terra (GROTEN, 1984 apud BLITZKOW, 1996, p. 31). Pelo fato de que o PVCG é tratado como um problema estacionário serão então negligenciados fenômenos geodinâmicos. Pode-se então considerar o tempo como uma variável adicional. Importante também é o conhecimento das grandezas de observação de forma contínua. Em consequência, os dados obtidos de forma discreta devem ser interpolados. Assim, a direção  $n$  da aceleração da gravidade será conhecida apenas nos pontos onde são conduzidas observações astronômicas.

O problema de contorno da Geodésia Física é analisado em duas etapas. Primeiramente serão obtidos os valores do geopotencial e sua derivada normal sobre a superfície física da Terra. A primeira etapa será determinar essa superfície e a segunda será determinar o campo gravitacional externo.

A integral de Poisson ajuda o problema de Dirichlet, particularizado para uma esfera de raio  $R$ , encontrando sua solução. A integral de Poisson é expressa a seguir (GEMAEL, 1999, p.52):

$$F(r, v, \lambda) = \frac{R}{4\pi} \int_{\sigma} \frac{(r^2 - R^2) F(R, v', \lambda')}{\ell^3} d\sigma, \quad (3.82)$$

onde,  $F(v, r, \lambda)$  e  $F(R, v', \lambda')$  são funções harmônicas respectivamente no exterior ( $r > R$ ) e sobre a superfície da esfera de raio  $R$ ;  $d\sigma$  é a área elementar de uma esfera de raio unitário sobre a qual deve a integral ser estendida.

A distância  $\ell$  pode ser expressa por:

$$\ell^2 = R^2 + r^2 - 2Rr \cos \Psi, \quad (3.83)$$

onde,  $\cos \Psi$  é representado pela seguinte expressão:

$$\cos \Psi = \cos v \cos v' + \operatorname{sen} v \operatorname{sen} v' \cos(\lambda - \lambda'). \quad (3.84)$$

A integral de Poisson fica da seguinte maneira:

$$F(R, v, \lambda) = \frac{R(r^2 - R^2)}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{F(R, v', \lambda') \operatorname{sen} v'}{\ell^3} dv' d\lambda'. \quad (3.85)$$

Para que a integral (3.82) tome esta forma, é necessário considerar a relação entre os elementos de área:

$$ds = R^2 d\sigma = R^2 \operatorname{sen} v' dv' d\lambda'. \quad (3.86)$$

Algumas dificuldades apresentam-se na aplicação prática do PVCG, pois este exige uma distribuição contínua de dados sobre a superfície limite. Ocorre que, dispõe-se de dados discretos que não cobrem a superfície total. Assim, a determinação do potencial anômalo é um problema indeterminado, pois o número de incógnitas, com coeficientes de zero até infinito, é maior do que o número de observações. Portanto, uma solução é encontrada num espaço de dimensão finita. O melhor resultado para solução do problema indeterminado se adquire se o campo da gravidade for suave. Esta condição é atendida se o efeito da topografia for negligenciado (SACERDATE & SANSONO, 1985 apud BLITZKOW, 1996, p. 35).

A concepção moderna do PVCG devida a Molodenskii, não leva em consideração a distribuição de densidades no interior das massas. Porém, a proposta inicial para a solução do PVCG se deve a Stokes. Stokes propôs a superfície geoidal como superfície de contorno, o que significa resolver um problema de contorno interno às massas. Portanto, é indispensável o conhecimento da distribuição de densidades no interior da camada da crosta, mais especificadamente, entre o geóide e a superfície física (BLITZKOW, 1996, p. 36).

Já o PVCG clássico pode ser resolvido por meio integral de Stokes, em termos do potencial perturbador (HEISKANEN & MORITZ, 1985, p.321-323). O potencial perturbador deve satisfazer a equação de Laplace, portanto, deve ser uma função harmônica. Necessita-se então a remoção das massas externas ao geóide.

### 3.10.2 Primeira identidade de Green

A primeira identidade de Green é representada pela seguinte expressão:

$$\int_v U \Delta V dv + \int_v \left( \frac{\partial U \partial V}{\partial x \partial x} + \frac{\partial U \partial V}{\partial y \partial y} + \frac{\partial U \partial V}{\partial z \partial z} \right) dv = \int_s U \frac{\partial V}{\partial n} dS. \quad (3.87)$$

A primeira identidade de Green, de acordo com (HEISKANEN & MORITZ, 1985, p.11), pode ser obtida a partir da fórmula de Gauss-Ostrogradski mediante substituições. Considerando as funções  $U = U(x, y, z)$ ,  $V = V(x, y, z)$  e fazendo às seguintes substituições:

$$F_x = U \frac{\partial V}{\partial x}; \quad (3.88)$$

$$F_y = U \frac{\partial V}{\partial y}; \quad (3.89)$$

$$F_z = U \frac{\partial V}{\partial z}, \quad (3.90)$$

na expressão (3.73), a componente normal do vetor  $\vec{F} = \vec{F}(X, Y, Z)$  é dada por:

$$F_n = U \frac{\partial V}{\partial n} \quad (3.91)$$

e

$$\vec{F} = \frac{\partial}{\partial x} \left( U \frac{\partial V}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( U \frac{\partial V}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( U \frac{\partial V}{\partial z} \right). \quad (3.92)$$

A expressão do divergente do vetor  $\vec{F}$  pode ser escrita como segue:

$$\text{div } \vec{F} = \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y} \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial z} \frac{\partial V}{\partial z} = U \Delta V. \quad (3.93)$$

Observando que:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( U \frac{\partial V}{\partial x} \right) = U \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial V}{\partial x} \frac{\partial U}{\partial x}, \quad (3.94)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( U \frac{\partial V}{\partial y} \right) = U \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial V}{\partial y} \frac{\partial U}{\partial y}, \quad (3.95)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left( U \frac{\partial V}{\partial z} \right) = U \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} + \frac{\partial V}{\partial z} \frac{\partial U}{\partial z}, \quad (3.96)$$

tem-se:

$$\text{div } \vec{F} = \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y} \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial z} \frac{\partial V}{\partial z} + U \Delta V. \quad (3.97)$$

Substituindo-se as expressões (3.91) e (3.97) na expressão (3.73), obtém-se a primeira identidade de Green:

$$\int_v U \Delta V dv + \int_v \left( \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y} \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial z} \frac{\partial V}{\partial z} \right) dv = \int_s U \frac{\partial V}{\partial n} dS. \quad (3.98)$$

### 3.10.3 Segunda identidade de Green

Para obter-se a segunda identidade de Green, reescrevendo a expressão (3.98), trocando a posição das funções U e V, obtendo-se

$$\int_v V \Delta U du + \int_v \left( \frac{\partial V}{\partial x} \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial z} \frac{\partial U}{\partial z} \right) du = \int_s V \frac{\partial U}{\partial n} dS. \quad (3.99)$$

Fazendo-se a expressão (3.98) menos a expressão (3.99), obtém-se a segunda identidade de Green:

$$\int_v (U \Delta V - V \Delta U) dv = \int_s \left( U \frac{\partial V}{\partial n} - V \frac{\partial U}{\partial n} \right) dS. \quad (3.100)$$

No caso particular de  $U=1$ , a segunda identidade de Green se reduz à fórmula de Gauss-Ostrogradski e assume a seguinte forma:

$$\int \Delta V dv = \int \frac{\partial V}{\partial n} dS, \quad (3.101)$$

com  $\Delta V = \text{div } \vec{F}$  e  $\vec{F}_n = \frac{\partial V}{\partial n}$ .

### 3.10.4 Terceira identidade de Green

A terceira identidade de Green constitui a base matemática para a determinação da superfície física da Terra a partir das medidas do potencial e das medidas da gravidade. Portanto, é fundamental para a conceituação do problema de valor de contorno da Geodésia (HEISKANEN & MORITZ, 1985, p.15).

A terceira identidade de Green está em função da distância  $\ell$  a um ponto fixo P, em relação à superfície S. Fazendo  $U = \frac{1}{\ell}$ , a distância  $\ell$  pode ocupar três posições: exterior, interior ou sobre a superfície S. No primeiro caso,  $\frac{1}{\ell}$  é regular no interior e em S e U satisfaz às condições mencionadas. O segundo e o terceiro

caso,  $\frac{1}{\ell}$  torna-se infinito em um ponto em  $v$  e a expressão (3.100) não pode ser aplicada diretamente. Assim (3.100) deve ser modificada, resultando a terceira identidade de Green:

$$\int_v \frac{1}{\ell} \Delta V dv = -pV + \int_S \left[ \frac{1}{\ell} \frac{\partial V}{\partial n} - V \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{\ell} \right) \right] dS. \quad (3.102)$$

com:

$$p = 4\pi \text{ para } P \text{ interior a } S; \quad (3.103)$$

$$p = 0 \text{ para } P \text{ exterior a } S; \quad (3.104)$$

$$p = 2\pi \text{ para } P \text{ sobre } S. \quad (3.105)$$

Pode-se também orientar a normal positivamente para o interior da superfície  $S$ , a fórmula (3.102) será válida para o caso de considerar  $v$  exterior a  $S$ ; conservando-se dessa forma a orientação original da normal e trocando-se os sinais das derivadas direcionais que aparecem no segundo membro:

$$\int_v \frac{1}{\ell} \Delta V dv = -pV_p - \int_S \left[ \frac{1}{\ell} \frac{\partial V}{\partial n} - V \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{\ell} \right) \right] dS, \quad (3.106)$$

com:

$$p = 0 \text{ para } P \text{ interior a } S; \quad (3.107)$$

$$p = 4\pi \text{ para } P \text{ exterior a } S; \quad (3.108)$$

$$p = 2\pi \text{ para } P \text{ sobre } S. \quad (3.109)$$

A terceira identidade de Green para o caso de  $v$  exterior a superfície  $S$ , é válida para funções  $V$  que satisfazem os requisitos gerais para as identidades de Green.

### 3.11 Fórmula de Chasles

A terceira identidade de Green, para o caso de o volume  $v$  ser exterior a superfície  $S$  fornece a chamada fórmula de Chasles. De acordo com (GEMAE, 1999, p. 46), para que este processo seja feito, algumas particularizações devem ser feitas. A primeira delas se refere à função  $V = f(x, y, z)$  que é uma função harmônica no exterior de  $S$ . Esta função se reduz a:

$$V_p = - \int_S \left[ \frac{1}{\ell} \frac{\partial V}{\partial n} - V \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{\ell} \right) \right] dS. \quad (3.111)$$

A segunda particularização se refere ao ponto P ser exterior a superfície S:

$$V_p = - \frac{1}{4\pi} \int_S \left[ \frac{1}{\ell} \frac{\partial V}{\partial n} - V \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{\ell} \right) \right] dS. \quad (3.112)$$

A terceira particularidade se refere à superfície limitante S. Esta superfície é equipotencial, assim tem-se:

$$\frac{V_0}{4\pi} \int \frac{d}{dn} \left( \frac{1}{\ell} \right) dS = 0. \quad (3.113)$$

Sabe-se que a integral da derivada normal do inverso da distância estendida à total superfície S se anula quando o ponto P é exterior à superfície. Assim tem-se:

$$V_p = - \frac{1}{4\pi} \int_S \frac{1}{\ell} \frac{\partial V}{\partial n} dS. \quad (3.114)$$

A fórmula anterior constitui a chamada fórmula de Chasles. Esta fórmula mostra que toda função harmônica pode ser representada por um potencial sobre qualquer de suas superfícies equipotenciais.

Para entender a fórmula de Chasles é necessário o conceito de superfície material. Admite-se que cada elemento de área  $dS$  da superfície fechada S possui a massa:

$$dm = \rho' dS, \quad (3.115)$$

sendo que a superfície S é uma superfície geométrica e, portanto, sem espessura e  $\rho'$  é a densidade superficial.

Assim, o potencial de atração produzido pela superfície material S em um ponto P exterior ou interior é definido como:

$$V = G \int_M \frac{dm}{\ell} = G \int_S \frac{\rho' dS}{\ell} \quad (3.116)$$

Considerando-se:

$$\rho' = - \frac{1}{4G} \frac{\partial V}{\partial n}, \quad (3.117)$$

o potencial de atração em P será:

$$V_p = - \frac{1}{4\pi} \int_S \frac{1}{\ell} \frac{\partial V}{\partial n} dS. \quad (3.118)$$

Esta última expressão coincide com a expressão (3.114) que é a fórmula de Chasles. A partir disso, pode-se dizer que o potencial produzido pela massa  $M$  é o mesmo que o produzido por qualquer superfície equipotencial do campo à qual se atribua densidade superficial dada pela expressão (3.117). Ainda, o ponto  $P$  terá que ser externo à superfície  $S$ .

### 3.12 Polinômios de Legendre

Descoberto por Legendre<sup>13</sup> em 1782 quando investigava o desenvolvimento em séries da função potencial, a função denotada por  $P_n(\Psi)$ , ou  $P_n(\cos \Psi)$ , ou ainda  $P_n$  constitui o polinômio de Legendre de grau  $n$  (GEMAEL, 1999, p. 54).

O inverso da distância, dado por  $\frac{1}{\ell}$ , pode ser interpretado de acordo com as relações entre os raios  $r$  e  $r'$ :

$$\frac{1}{\ell} = \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r'}{r}\right)^n P_n, \quad \text{para } r' < r; \quad (3.119)$$

$$\frac{1}{\ell} = \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r}{r'}\right)^n P_n, \quad \text{para } r' > r. \quad (3.120)$$

O polinômio de Legendre fica então expresso por:

$$P_n(\Psi) = \frac{1}{n!} \frac{d^n}{dt^n} (t^2 - 1)^n, \quad (3.121)$$

em que  $t = \cos \Psi$ .

Como  $n$  varia de 0 até  $\infty$ , substitui-se  $n$ , obtendo-se:

$$P_0 = 1 \quad \text{para } n = 0;$$

$$P_1 = t = \cos \Psi \quad \text{para } n = 1;$$

$$P_2 = \frac{1}{2} (3t^2 - 1) \quad \text{para } n = 2;$$

---

<sup>13</sup> Adrien-Marie Legendre (1752-1833).

$$P_3 = \frac{1}{2}(5t^3 - 3t) \quad \text{para } n = 3;$$

$$P_4 = \frac{35}{8}\left(t^4 - \frac{6}{7}t^2 + \frac{3}{35}\right) \quad \text{para } n = 4;$$

$$P_5 = \frac{63}{8}\left(t^5 - \frac{10}{9}t^3 + \frac{5}{21}t\right) \quad \text{para } n = 5$$

⋮

$$P_n = \frac{1}{n! 2^n} \frac{d^n}{dt^n} (t^2 - 1)^n$$

Esta última expressão chama-se fórmula de Rodrigues.

De acordo com (GEMAEL, 1999, p. 54), algumas observações podem ser feitas quanto ao desenvolvimento do polinômio de Legendre. Uma delas refere-se à concordância entre o valor assumido por  $n$  e as potências do polinômio  $P_n$ , ou seja, quando  $n$  é par o polinômio  $P_n$  contém somente potências pares; do mesmo modo, quando  $n$  é ímpar o polinômio  $P_n$  contém somente potências ímpares. Outra observação refere-se à função  $P_n(\Psi)$ , que corresponde a uma simétrica em torno da direção  $\Psi = 0$ .

O polinômio de Legendre pode ser representado graficamente, como mostrado na figura (3.9).

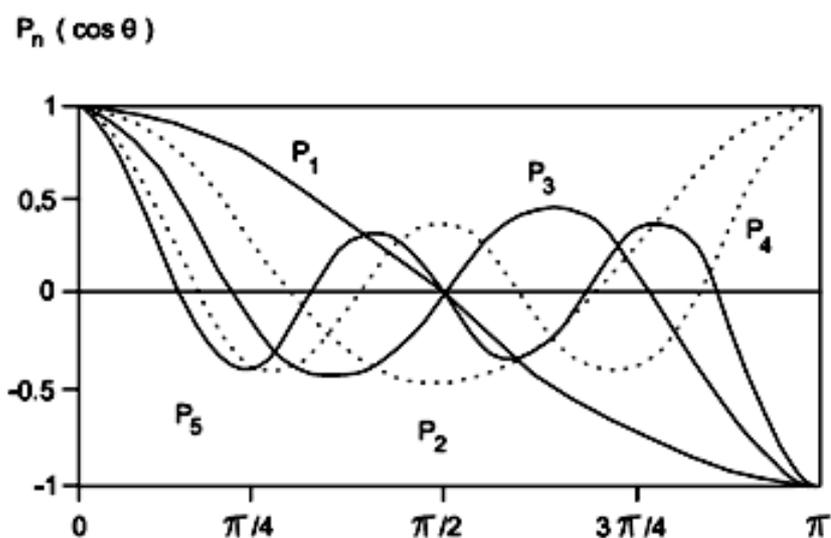


Figura 3.9 – Representação do polinômio de Legendre  
Fonte: (CATALÃO, 1999)

### 3.13 Funções harmônicas esféricas

Uma função que satisfaz a equação de Laplace em todos os pontos de uma região é dita harmônica nessa região. Estas funções são analíticas, isto é, tanto elas como suas derivadas são contínuas na região considerada.

De acordo com Gemael (1999), as funções harmônicas esféricas têm como uma de suas metas determinar a forma de um objeto a partir das medidas do potencial gravitacional. Todo potencial admite uma expansão em harmônicos esféricos.

Designam-se por  $(\nu, \lambda)$  e  $(\nu', \lambda')$  as coordenadas esféricas das projeções do ponto P e de P' respectivamente, sobre uma esfera de raio unitário com centro na origem do sistema cartesiano (Figura 3.10).

O polinômio de Legendre de primeira ordem resulta:

$$P_1(\Psi) = \cos \Psi = \cos \nu \cos \nu' + \text{sen} \nu \text{sen} \nu' \cos(\lambda - \lambda'), \quad (3.122)$$

sendo  $\Psi$  o ângulo formado entre as projeções dos pontos P e P' sobre a esfera.

Utilizando-se dois índices:

$$\cos \nu = P_{10}(\nu) \text{ e } \text{sen} \nu = P_{11}(\nu). \quad (3.123)$$

Substitui-se as expressões (3.123) na equação (3.122) e obtém-se o polinômio de primeira ordem:

$$P_1(\Psi) = P_{10}(\nu)P_{10}(\nu') + P_{11}(\nu)P_{11}(\nu') \cos(\lambda - \lambda'). \quad (3.124)$$

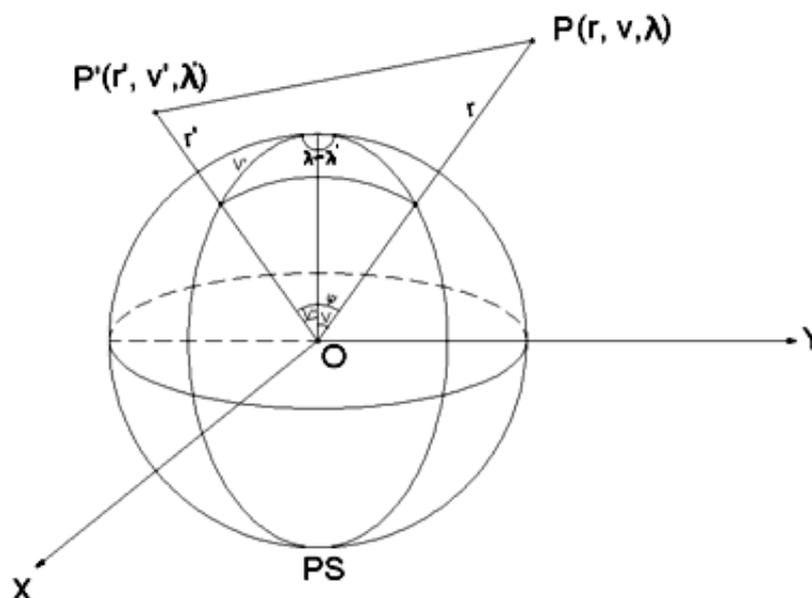


Figura 3.10 – Coordenadas esféricas das projeções de P e P' sobre a esfera

O polinômio de Legendre de segunda ordem fica:

$$P_2(\Psi) = P_{20}(v)P_{20}(v') + P_{21}(v)P_{21}(v')\cos(\lambda - \lambda') + P_{22}(v)P_{22}(v')\cos 2(\lambda - \lambda'), \quad (3.125)$$

onde:

$$P_{20}(v) = \frac{(3\cos^2 v - 1)}{2}, \quad (3.126)$$

$$P_{21}(v) = 3\cos v \operatorname{sen} v, \quad (3.127)$$

$$P_{22}(v) = 3\operatorname{sen}^2 v. \quad (3.128)$$

Pode-se ainda obter o polinômio de Legendre de terceira ordem. Porém, este processo é mais árduo:

$$P_3(\Psi) = P_{30}(v)P_{30}(v') + P_{31}(v)P_{31}(v')\cos(\lambda - \lambda') + P_{32}(v)P_{32}(v')\cos 2(\lambda - \lambda') + P_{33}(v)P_{33}(v')\cos 3(\lambda - \lambda'). \quad (3.129)$$

E assim pode-se exprimir os polinômios de ordem superiores:

$$P_n(\Psi) = S_n = \sum_{m=0}^n P_{nm}(v)P_{nm}(v')\cos m(\lambda - \lambda'), \quad (3.130)$$

em que n indica o grau e m indica a ordem.

Desenvolvendo o último fator do somatório de (3.130) resulta que:

$$S_n = \sum_{m=0}^n P_{nm}(v)P_{nm}(v')[\cos m\lambda \cos m\lambda' + \operatorname{sen} m\lambda \operatorname{sen} m\lambda']. \quad (3.131)$$

E fazendo-se as seguintes substituições:

$$P_{nm}(v')\cos m\lambda' = a_{nm}, \quad (3.132)$$

$$P_{nm}(v')\operatorname{sen} m\lambda' = b_{nm}. \quad (3.133)$$

Resulta para  $S_n$ :

$$S_n = \sum_{m=0}^n a_{nm}P_{nm}(v)\cos m\lambda + b_{nm}P_{nm}(v)\operatorname{sen} m\lambda. \quad (3.134)$$

A função  $S_n$  depende somente das coordenadas  $(v, \lambda)$  do ponto P. Ela é chamada harmônico esférico de superfície de grau n e contém  $(2n+1)$  constantes arbitrárias  $a_{nm}$  e  $b_{nm}$ .

O termo  $P_{nm}(v)\cos m\lambda$  e  $P_{nm}\operatorname{sen} m(\lambda)$  são chamados funções associadas de Legendre de grau n e ordem m.

### 3.13.1 Função harmônica esférica zonal

As parcelas, função de  $\nu$  e  $\lambda$ , que compõem  $S_n$  são também conhecidas como harmônicos esféricos de superfície (particulares) recebendo denominações especiais. O termo  $P_{nm}$ , com  $m=0$  ou simplesmente  $P_n$ , são ditos harmônicos esféricos de zona ou zonais (Figura 3.11).

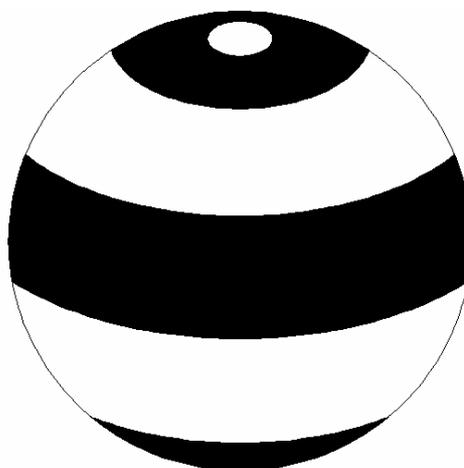


Figura 3.11 – Zonais

Lobianco (2005) explica que para  $m=0$ , a função  $\psi$  é o polinômio de Legendre em  $\cos \psi$ . Os harmônicos zonais possuem o parâmetro  $m=0$ , tendo em vista que a esfera é dividida em zonas por círculos  $P_n = 0$ .

### 3.13.2 Funções harmônicas esféricas setoriais

Se  $n = m$  em  $P_{nm}(\nu)\cos m\lambda$  e  $P_{nm}\sin m(\lambda)$ , as funções harmônicas esféricas chamam setoriais (Figura 3.12).

Os harmônicos setoriais caracterizam-se por dividirem a esfera em meridianos. Quando  $m = n$  e  $m = -n$ ,  $\psi$  assume a forma  $\sqrt{(1 - \cos^2 \psi)^m}$  e possui valor zero em  $\psi = 0$  e  $\psi = \pi$ .



Figura 3.12 – Sectoriais

### 3.13.3 Funções harmônicas esféricas tesserais

Se  $n \neq m$  em  $P_{nm}(\nu) \cos m\lambda$  e  $P_{nm} \sin m(\lambda)$ , as funções harmônicas esféricas chamam tesserais (Figura 3.13).

Os harmônicos localizados entre os harmônicos zonais e os setoriais são chamados tesserais.

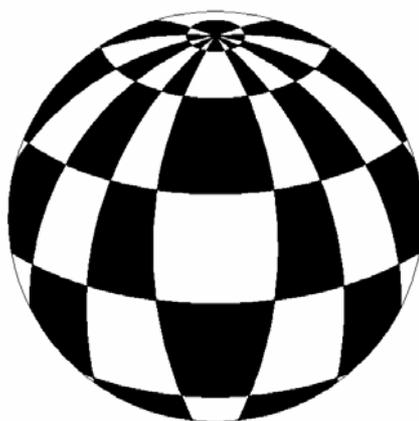


Figura 3.13 – Tesserais

### 3.14 Representação geométrica das funções harmônicas esféricas

A representação do potencial gravitacional da Terra em função da distância e do ângulo, e quando assumida uma simetria axial, pode ser apropriada a escolha de uma série de harmônicos zonais. Para este caso, o maior termo teria  $n = 0$  e variaria com  $\frac{1}{r}$ . O achatamento polar  $f$  da Terra seria refletido em um termo que

somaria a massa próxima ao equador e a subtrairia próxima aos pólos (CALVERT, 2001 apud LOBIANCO, 2005, p. 74).

Na Figura (3.14), algumas conclusões são feitas. Um termo com  $n = 2$  e  $m = 0$  é apropriado, com sua dependência radial de  $\frac{1}{r^3}$  e dependência angular de  $P_2(\text{sen}\varphi)$ , onde  $\varphi$  representa a latitude, sendo este o termo de ordem mais baixa. Os harmônicos esféricos utilizam-se da ortogonalidade, que é uma propriedade matemática muito útil para os harmônicos esféricos.

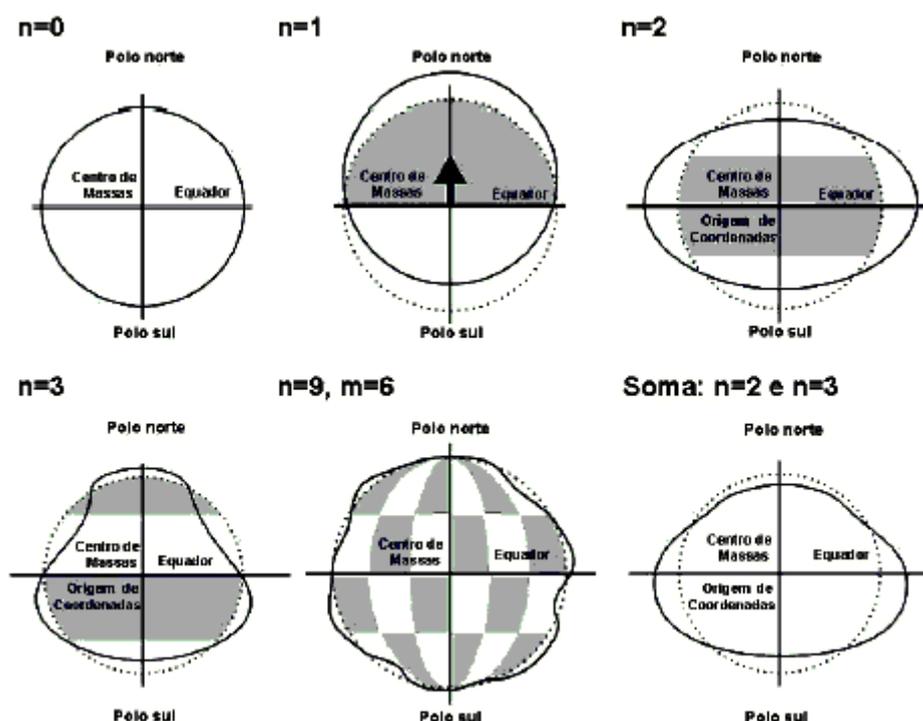


Figura 3.14 – Representação gráfica dos harmônicos esféricos  
Fonte: (DREWES, 2003 apud LOBIANCO, 2005)

### 3.15 Problemas direto e inverso da teoria do potencial

No caminho da determinação do potencial, encontram-se dois problemas, o problema direto e o problema inverso da teoria do potencial:

O problema direto é representado pela determinação do potencial a partir das massas geradoras.

O problema inverso da teoria do potencial é representado pela determinação do potencial a partir das massas geradoras (GEMAEL, 1999, p. 51) e não admite solução única, isto porque existem infinitas distribuições de massa que conduzem ao

mesmo potencial. Uma forma de verificar tal conclusão pode ser obtida a partir de medições do potencial considerando esferas concêntricas e de mesma massa.

Uma outra forma para determinar as soluções completas do problema inverso é obter informações adicionais, como por exemplo, fornecidas pela Geologia e por medidas sísmicas (HEISKANEN & MORITZ, 1985, p. 17).

## **4 FUNDAMENTOS DO CAMPO GRAVITACIONAL**

Para estudar o campo gravitacional terrestre é necessário conhecer e determinar a força que comanda o movimento de todos os corpos no universo. Esta força é gerada pela aceleração da gravidade. De acordo com (TORGE, 1989, p. 1), a intensidade da força do vetor gravidade  $g$  depende da distribuição de massas dos corpos, da massa de modo total e da velocidade de rotação da Terra.

Em Geodésia a figura da Terra tem significados diferentes de acordo com o contexto e com o grau de precisão com que se deseja definir o tamanho e a forma do planeta. É na superfície topográfica que as medidas são efetuadas. Contudo, esta superfície não é adequada para cálculos matemáticos exatos, devido a suas muitas irregularidades que exigiriam uma quantidade muito grande de parâmetros, comprometendo os cálculos e a solução do problema estabelecido. Se a Terra fosse uma esfera uniforme,  $g$  seria uma constante. No entanto, a gravidade varia com a variação da densidade da Terra, pois esta não é uma esfera perfeita.

A Terra tem a forma de um elipsóide por causa da sua rotação. O raio é maior no equador por causa da maior força centrífuga tendendo a acelerar a massa central para fora.

### **4.1 Campo da gravidade normal**

Ao se referir ao potencial da Terra verdadeira refere-se ao geopotencial  $W$ . A Terra verdadeira traz consigo dificuldades, dentre as quais o desconhecimento da lei de variação da densidade no seu interior. Frente às dificuldades, faz-se necessário, substituir o real por meio de modelos com suficiente aproximação.

Em muitos problemas geodésicos, a solução com suficiente aproximação, pode ser encontrada no modelo denominado Terra Normal.

#### **4.1.1 Terra normal**

A Terra normal é representada por um elipsóide de revolução. Este elipsóide possui a mesma massa, incluindo a massa da atmosfera, e a mesma velocidade de

rotação  $\omega$  da Terra real, cujo potencial  $U_0$ , constante sobre a superfície, seja igual ao potencial  $W_0$  sobre a superfície geoidal, com seu centro no centro de massa da Terra (BLITZKOW, 1996, p. 19).

A distribuição de massas da Terra normal é homogênea, garantindo que o potencial gravitacional de atração externo seja representado por superfícies equipotenciais regulares.

A Terra normal é caracterizada pelos semi-eixos maior  $a$  e menor  $b$  do elipsóide ou pelo semi-eixo maior  $a$  e o achatamento  $f$ , pela massa  $M$  e velocidade de rotação  $\omega$ .

A relação entre o campo de gravidade  $\vec{g}$  da Terra verdadeira e o seu geopotencial  $W$  é representada por:

$$\vec{g} = \text{grad}W. \quad (4.1)$$

A relação do campo de gravidade  $\gamma$  da Terra Normal com o seu esferopotencial  $U$  é representada por:

$$\vec{\gamma} = \text{grad}U. \quad (4.2)$$

As superfícies equipotenciais da Terra verdadeira recebem o nome de geopes ( $W = \text{cte}$ ) e a superfície equipotencial da Terra normal é chamado de esferopes ( $U = \text{cte}$ ).

#### 4.1.2 Gravidade Normal

As fórmulas usuais para o cálculo da gravidade teórica sobre a Terra normal ou, em outras palavras, da gravidade normal sobre o elipsóide de referência, são do tipo:

$$\gamma = \gamma_e (1 + \beta \text{sen}^2 \varphi + \text{termos de ordem superior}) \quad (4.3)$$

Com precisão de primeira ordem:

$$\gamma = \gamma_e (1 + \beta \text{sen}^2 \varphi). \quad (4.4)$$

Com precisão de segunda ordem:

$$\gamma = \gamma_e (1 + \beta \text{sen}^2 \varphi + \beta' \text{sen}^2 2\varphi), \quad (4.5)$$

em que,  $\gamma$  e  $\gamma_e$  são a gravidade normal no paralelo  $\varphi$  e no equador, respectivamente e os coeficientes  $\beta$  e  $\beta'$  dependem das dimensões do elipsóide de referência e da velocidade angular de rotação.

#### 4.1.3 Esferopotencial

Esferopotencial é o potencial produzido pela Terra normal e é denotado pelo símbolo  $U$ . Exprime-se o esferopotencial por:

$$U = Z + Q, \quad (4.6)$$

em que,  $Z$  representa o esferopotencial de atração e  $Q$  representa o esferopotencial de rotação ou centrífugo. Assim:

$$\text{grad}U = \bar{\gamma} = \frac{\partial U}{\partial x} \bar{i} + \frac{\partial U}{\partial y} \bar{j} + \frac{\partial U}{\partial z} \bar{k} = \gamma_x \bar{i} + \gamma_y \bar{j} + \gamma_z \bar{k}, \quad (4.7)$$

$$\text{div grad}U = \text{div } \bar{\gamma} = \Delta U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}, \quad (4.8)$$

sendo que  $\gamma_x, \gamma_y$  e  $\gamma_z$  simbolizam as componentes cartesianas do vetor gravidade normal.

No exterior do elipsóide de referência tem-se:

$$\Delta Z = 0, \quad (4.9)$$

$$\Delta Q = \Delta U = 2\omega^2, \quad (4.10)$$

em que  $\omega$  é a velocidade angular da Terra normal, que é por definição igual à da Terra real.

O esferopotencial centrífugo ou de rotação é dado pela seguinte expressão:

$$Q = \frac{1}{2} \omega^2 (x^2 + y^2), \quad (4.11)$$

e provém de uma força  $\bar{C}$  expressa por

$$\bar{C} = \text{grad}Q = \omega^2 x \bar{i} + \omega^2 y \bar{j}, \quad (4.12)$$

onde a componente em relação ao eixo  $OZ$  é nula.

O esferopotencial de atração, considerando a Figura (4.1) é representado por

$$Z = G \int_M \frac{dm}{\ell}, \quad (4.13)$$

em que  $dm (x', y', z')$  é um massa elementar do elipsóide,  $P(x, y, z)$  é o ponto onde se quer calcular o potencial e  $\ell$  é a distância que os separa.

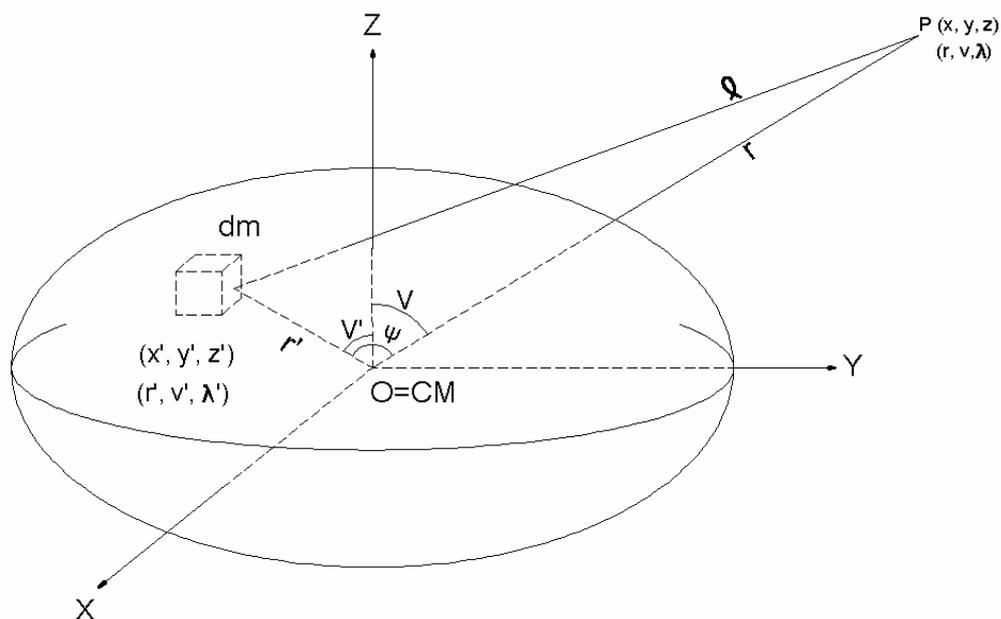


Figura 4.1 – Esferopotencial de atração

Introduzindo os polinômios de Legendre no caso do esferopotencial de atração, tem-se a seguinte descrição para o esferopotencial de atração:

$$Z = G \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \int_M \left(\frac{r'}{r}\right)^n P_n(\Psi) dm. \quad (4.14)$$

Desenvolvendo a fórmula acima têm-se:

$$Z = Z_0 + Z_1 + Z_2 + \dots \quad (4.15)$$

O termo de grau zero:

$$Z_0 = \frac{1}{r} G \int_M dm = \frac{1}{r} GM, \quad (4.16)$$

representa o potencial de atração por uma esfera homogênea de massa  $M$  no ponto  $P$  distanciado  $r$  do seu centro de gravidade;  $M$  é a massa da Terra normal.

O termo de primeiro grau é dado por

$$Z_1 = G \frac{1}{r^2} \int_M r' P_1(\Psi) dm \quad (4.17)$$

E o termo de segundo grau, por

$$Z_2 = G \frac{1}{r^3} \int_M r'^2 P_2(\Psi) dm. \quad (4.18)$$

Após algumas manipulações, obtém-se:

$$Z_2 = \frac{G}{2r^5} [x^2(B + C - 2A) + y^2(A + B - 2C) + z^2(A + B - 2C) + 6xyD + 6yxE + 6xzF] \quad (4.19)$$

no qual A, B e C são momentos de inércia da Terra normal relativamente aos eixos OX, OY e OZ, ou seja,

$$A = \int_M (y'^2 + z'^2) dm; \quad (4.20)$$

$$B = \int_M (x'^2 + z'^2) dm; \quad (4.21)$$

$$C = \int_M (x'^2 + y'^2) dm. \quad (4.22)$$

Além disso, D, E e F são os produtos de inércia:

$$D = \int_M y' z' dm; \quad (4.23)$$

$$E = \int_M x' z' dm; \quad (4.24)$$

$$F = \int_M x' y' dm. \quad (4.25)$$

Utilizando coordenadas esféricas:

$$x = r \operatorname{sen} v \cos \lambda; \quad (4.26)$$

$$y = r \operatorname{sen} v \operatorname{sen} \lambda; \quad (4.27)$$

$$z = r \cos v, \quad (4.28)$$

obtém-se para  $Z_2$  a seguinte expressão:

$$Z_2 = -\frac{G}{r^3} [(C - A)P_2(v)]. \quad (4.29)$$

Para exprimir agora o termo de terceiro grau em coordenadas esféricas, basta introduzir os harmônicos de superfície, que são constituídos por zonais (função de  $v$ ) e das funções associadas de Legendre, estas dependendo de  $v$  e  $\lambda$ . A simetria do modelo adotado implica em fatores nulos para os sectoriais e tesserais, pois não pode haver dependência da longitude.

Portanto, o esferopotencial de atração se restringe aos zonais pares  $P_{2n}(v)$ :

$$Z = \left( \frac{Gm}{r} \right) \left[ 1 - J_2 \left( \frac{a}{r} \right)^2 P_2(v) - J_4 \left( \frac{a}{r} \right)^4 P_4(v) - J_6 \left( \frac{a}{r} \right)^6 P_6(v) \dots \right], \quad (4.30)$$

com

$$J_2 = \frac{(C - A)}{Ma^2}. \quad (4.31)$$

Pode-se então escrever para o esferopotencial:

$$U = \left(\frac{GM}{r}\right) \left[ 1 - \sum_{n=1}^{\infty} J_{2n} \left(\frac{a}{r}\right)^{2n} P_{2n}(v) \right] + \frac{1}{2} (\omega r \operatorname{sen} v)^2, \quad (4.32)$$

onde os coeficientes J são calculados com a fórmula:

$$J_{2n} = (-1)^{n+1} \left[ 1 - n + \frac{5n(C - A)}{Mc^2} \right] \frac{3e^{2n}}{(2n+1)(2n+1)}, \quad (4.33)$$

Sendo e a excentricidade e c raio de curvatura polar:

$$c^2 = a^2 e^2. \quad (4.34)$$

#### 4.1.4 Fórmulas de Clairaut e Newton

A importância das fórmulas Clairaut e Newton<sup>14</sup> se justificam na correlação entre o achatamento do modelo com os valores da gravidade teórica sobre ele, no pólo e no equador, o que permite à Geodésia Física a determinação do achatamento.

A gravidade normal definida anteriormente pode ser escrita:

$$\vec{\gamma} = \operatorname{grad} U, \quad (4.35)$$

$$\vec{\gamma} = \frac{\partial U}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z} \vec{k}, \quad (4.36)$$

sendo  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$  e  $\vec{k}$  os versores fundamentais de um terno cartesiano ortogonal com origem no centro do elipsóide e cujo eixo OZ coincide como o eixo de rotação.

Na Figura (4.2) considera-se, a partir do ponto P, três direções  $s_1$ ,  $s_2$ , e  $s_3$ . As derivadas parciais do esferopotencial em relação a cada uma das direções  $s_1$ ,  $s_2$  e  $s_3$  correspondem às componentes de  $\gamma$  segundo essas direções; logo, o quadrado do módulo do vetor é dado por

$$\gamma^2 = \left(\frac{\partial U}{\partial s_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial s_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial s_3}\right)^2. \quad (4.37)$$

---

<sup>14</sup> Sir Issac Newton (1643-1727).

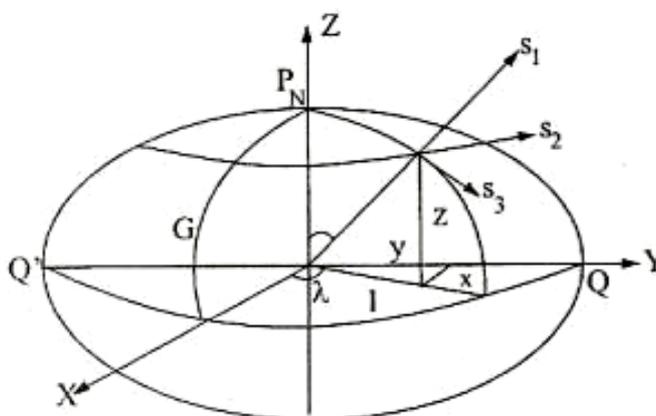


Figura 4.2 – Direções  $s_1$ ,  $s_2$ , e  $s_3$   
 Fonte: (GEMAEL, 1999, p. 83)

Pode-se também exprimir os arcos elementares em coordenadas esféricas, obtendo-se assim para  $ds_1$ ,  $ds_2$  e  $ds_3$  :

$$\begin{aligned} ds_1 &= dr && \text{ao longo da normal,} \\ ds_2 &= r dv && \text{ao longo do meridiano,} \\ ds_3 &= r \operatorname{sen}v d\lambda && \text{ao longo do paralelo.} \end{aligned}$$

Assim o quadrado do módulo do vetor fica:

$$\gamma^2 = \left(\frac{\partial U}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial U}{\partial v}\right)^2 + \frac{1}{(r \operatorname{sen}v)^2} \left(\frac{\partial U}{\partial \lambda}\right)^2. \quad (4.38)$$

Ainda pode-se reescrever a expressão acima, pois devido a simetria da Terra normal, o esferopotencial independe da longitude:

$$\gamma^2 = \left(\frac{\partial U}{\partial r}\right)^2 + \frac{\left(\frac{\partial U}{\partial v}\right)^2}{r^2}. \quad (4.39)$$

Denota-se pelo símbolo  $\bar{n}$  o versor da normal ao elipsóide em P e obtém-se:

$$\bar{\gamma} = \bar{n} \frac{\partial U}{\partial n}. \quad (4.40)$$

Se forem desprezadas as quantidades de segunda ordem (quadrado do achatamento) obtém-se a seguinte expressão para o módulo do vetor:

$$\gamma = r \frac{\partial U}{\partial r}, \quad (4.41)$$

sendo  $r$  o versor do raio vetor geocêntrico.

Quer-se obter a derivada do esferopotencial; para isso negligenciam-se os termos de grau igual e superior a quatro, o que resulta:

$$U = \frac{GM}{r} - \frac{GMJ_2 \left(\frac{a}{r}\right)^2 P_2(v)}{r} + \frac{1}{2} (\omega r \operatorname{sen} v)^2, \quad (4.42)$$

$$U = \frac{GM}{r} - \frac{G(C-A)P_2(v)}{r^3} + \frac{1}{2} (\omega r \operatorname{sen} v)^2, \quad (4.43)$$

$$\gamma = -\frac{GM}{r^2} + \frac{3G(C-A)P_2(v)}{r^4} + \omega^2 r \operatorname{sen}^2 v. \quad (4.44)$$

Ainda é necessária a expressão:

$$\frac{3G(C-A)}{a^3} = \frac{2GM\alpha}{a} - a^2\omega^2. \quad (4.45)$$

Levando em consideração que a superfície da Terra normal é esferope, ou seja, sobre ela o esferopotencial é constante, ter-se-á:

$$\frac{dU}{dv} = 0. \quad (4.46)$$

Após algumas aproximações e transformações, obtém-se:

$$\gamma = \frac{GM}{a^2} \left(1 + f - \frac{3\omega^2 a^3}{2GM}\right) + \cos^2 v \left(\frac{5a\omega^2}{2} - \frac{3GMf}{a^2}\right). \quad (4.47)$$

Com a mesma precisão de primeira ordem, a (4.41) pode ser escrita:

$$m \approx \frac{a\omega^2}{\gamma_e}. \quad (4.48)$$

Fazendo ainda a seguinte aproximação:

$$\gamma_e \approx \frac{GM}{a^2}. \quad (4.49)$$

Agora, substitui-se (4.49) em (4.48) e obtém-se:

$$m \approx \frac{a^3\omega^2}{GM}. \quad (4.50)$$

A expressão obtida em (4.50) vai ser substituída em (4.47), o que conduz a:

$$\gamma = \frac{GM}{a^2} \left(1 + f - \frac{3}{2} m\right) + \cos^2 v \left(\frac{5}{2} a\omega^2 - \frac{3GMf}{a^2}\right). \quad (4.51)$$

O esferopotencial para um ponto equatorial é dado por

$$\gamma_e = \frac{GM}{a^2} \left(1 + f - \frac{3}{2} m\right) \quad (4.52)$$

A expressão (4.51) assume a partir da equação (4.52) o aspecto:

$$\gamma = \gamma_e + \cos^2 \nu \left( \frac{5}{2} a\omega^2 - \frac{3GMf}{a^2} \right). \quad (4.53)$$

Da expressão (4.50), tem-se que:

$$a\omega^2 = \frac{GMm}{a^2}, \quad (4.54)$$

resultando assim para a expressão (4.53):

$$\gamma = \gamma_e + \cos^2 \nu \left( \frac{5GMm}{2a^2} - \frac{GMf}{a^2} \right), \quad (4.55)$$

$$\gamma = \gamma_e + \cos^2 \nu (2,5m - f) \frac{GM}{a^2}. \quad (4.56)$$

Utilizando novamente a expressão (4.49), tem-se:

$$\gamma = \gamma_e + \left[ 1 + \frac{1}{2} (5m - 2f) \cos^2 \nu \right]. \quad (4.57)$$

Fazendo-se

$$\frac{5m}{2} - f = \beta, \quad (4.58)$$

resulta para o esferopotencial que

$$\gamma = \gamma_e (1 + \beta \cos^2 \nu) = \gamma_e (1 + \beta \sin^2 \varphi). \quad (4.59)$$

Nos pólos, tem-se:

$$\gamma_p = \gamma_e (1 + \beta) \quad (4.60)$$

e

$$\frac{(\gamma_p - \gamma_e)}{\gamma_e} = \frac{5m}{2} - f. \quad (4.61)$$

As fórmulas, devidas a Clairaut, mostram que o achatamento da Terra normal pode ser obtido pela gravimetria e sem necessidade de hipóteses sobre a distribuição interna das massas.

Baseados nas fórmulas (4.45) e (4.50), após algumas transformações, obtém-se:

$$\frac{3(C - A)}{2Ma^2} = f - \frac{m}{2} \quad (4.62)$$

ou

$$f = \frac{3}{2} J_2 + \frac{1}{2} m. \quad (4.63)$$

As fórmulas de segunda e terceira ordem do Teorema de Clairaut serão conduzidas envolvendo o zonal de quarto grau. Obtém-se assim:

$$\gamma = \gamma_e \left(1 + \beta \sin^2 \varphi + \beta_1 \sin^2 2\varphi\right), \quad (4.64)$$

$$\beta = \frac{5m}{2} - f - \frac{17}{14}mf, \quad (4.65)$$

$$\beta_1 = \frac{f^2}{8} - \frac{5mf}{8}, \quad (4.66)$$

$$\gamma_e = \frac{GM}{a^2} \left[1 - \frac{3m}{2} + f + \frac{9m^2}{4} - \frac{27}{14}mf + f^2\right]. \quad (4.67)$$

#### 4.1.5 Fórmula de Somigliana

A gravidade normal na superfície do elipsóide é calculada pela fórmula Somigliana (TORGE, 1989, p. 37):

$$\gamma = \frac{a\gamma_e \cos^2 \varphi + b\gamma_p \sin^2 \varphi}{(a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{1}{2}}}. \quad (4.68)$$

#### 4.1.6 Fórmulas internacionais

A fórmula internacional da gravidade foi adotada oficialmente na Assembléia de Stokolmo (1930)

$$\gamma_{30} = 978.049 \left(1 + 0,0052884 \sin^2 \varphi - 0,0000059 \sin^2 2\varphi\right) \quad (4.69)$$

Em 1967, a IUGG, recomendou o Sistema Geodésico de Referência. Os valores derivados são os seguintes:

$$f = \frac{1}{298,247} = 0,0033529237 \quad (4.70)$$

$$\omega = 72.921.151.467 \times 10^{-15} \text{ rad / s} \quad (4.71)$$

$$m = 0,0034498014 \quad (4.72)$$

$$\gamma_e = 978.031,845 \text{ mGal} \quad (4.73)$$

$$\gamma_p = 983.217,730 \text{ mGal} \quad (4.74)$$

$$\beta = 0,0053023655 \quad (4.75)$$

$$\beta' = -0,0000059, \quad (4.76)$$

resultando para a fórmula internacional de 1967:

$$\gamma_{67} = 978031,8 \left(1 + 0,0053024 \sin^2 \varphi - 0,0000059 \sin^2 2\varphi\right) \text{ mGal} \quad (4.77)$$

A seguinte fórmula, não utiliza o dobro da latitude e é mais precisa:

$$\gamma_{67} = 978031,846(1 + 0,005278895\text{sen}^2\varphi - 0,000023462\text{sen}^4\varphi)\text{mGal}. \quad (4.78)$$

#### 4.1.6.1 O Coeficiente $J_2$

A determinação dos coeficientes  $J$  para o caso da Terra verdadeira (geopotencial) encontra na Mecânica Celeste um poderoso instrumento para o seu desenvolvimento (GEMAEL, 1999, p. 82).

O coeficiente  $J_2$ , cerca de mil vezes maior que os restantes, tem sido alvo de determinações rigorosas e hoje desempenha papel importante para o Geodésia e Astronomia. Este coeficiente é também denominado fator dinâmico de forma, cujo valor é:

$$J_2 = 10.827 \times 10^{-7} \quad (4.79)$$

O Sistema Geodésico de Referência (1967) adota os seguintes valores:

$$a = 6.378.160\text{m} \quad (4.80)$$

$$GM = 398.603 \times 10^9 \text{m}^3 \text{s}^{-2} \quad (4.81)$$

$$J_2 = 10.827 \times 10^{-7}. \quad (4.82)$$

O achatamento  $f$  do modelo:

$$f^{-1} = 298,247 \therefore f = 0,0033529237 \quad (4.83)$$

agora é grandeza derivada de  $J_2$ :

$$J_2 = \frac{(2f - m - f^2)}{3 + \frac{2fm}{21}}. \quad (4.84)$$

O valor de  $m$  (relação entre a força centrífuga no equador e a gravidade normal equatorial) pode ser obtido iterativamente com a expressão:

$$m = \frac{a\omega^2}{\gamma_e} - \frac{3}{2}m^2. \quad (4.85)$$

O Sistema Geodésico de Referência (1980) adota os seguintes valores (MORITZ, 1984, p. 388-395):

$$a = 6.378.137\text{m}, \quad (4.86)$$

$$GM = 398.600,5 \times 10^9 \text{m}^3 \text{s}^{-2}, \quad (4.87)$$

$$J_2 = 10.826,3 \times 10^{-7}. \quad (4.88)$$

Achatamento:

$$f = \frac{1}{298,257222101}; \quad (4.89)$$

Gravidade normal no equador:

$$\gamma_e = 978.032,67715 \text{ mGal} . \quad (4.90)$$

Velocidade angular da Terra:

$$\omega = 7292115 \times 10^{-11} \text{ rad.s}^{-1}; \quad (4.91)$$

Gravidade normal no pólo:

$$\gamma_p = 983.218,63685 \text{ mGal} . \quad (4.92)$$

## 4.2 Campo da gravidade terrestre

O estudo do campo gravitacional da Terra é base fundamental para o entendimento das definições e dos cálculos geodésicos. Então se estuda detalhadamente as propriedades envolvidas.

### 4.2.1 Força e aceleração da gravidade

O vetor gravidade  $\vec{g}$  em um ponto resulta da decomposição de outros dois: a força de atração exercida pela massa da Terra sobre a massa unitária, colocada neste ponto, e a força centrífuga em consequência da rotação da Terra:

$$\vec{g} = \vec{F} + \vec{C}, \quad (4.93)$$

onde  $\vec{C}$  é a força centrífuga por unidade de massa:

$$\vec{C} = \omega^2 \vec{d} = \omega^2 x \vec{i} + \omega^2 y \vec{j}, \quad (4.94)$$

onde  $d$  é a distância da partícula de massa unitária ao eixo de rotação e  $\omega$  é a velocidade angular da Terra no seu movimento e rotação.

A força centrífuga deriva de um potencial dado por:

$$Q = \frac{1}{2} \omega^2 (x^2 + y^2), \quad (4.95)$$

pois:

$$\text{grad } Q = \omega^2 x \vec{i} + \omega^2 y \vec{j} = \vec{C} \quad (4.96)$$

Relembrando:

$$\text{grad } W = \frac{\partial W}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial W}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial W}{\partial z} \vec{k} = g_x \vec{i} + g_y \vec{j} + g_z \vec{k}. \quad (4.97)$$

Tais componentes podem ser escritas como segue:

$$g_x = F_x + C_x = \frac{\partial W}{\partial x} = -G \int_M \frac{x - x'}{\ell^3} dm + \omega^2 x, \quad (4.98)$$

$$g_y = F_y + C_y = \frac{\partial W}{\partial y} = -G \int_M \frac{y - y'}{\ell^3} dm + \omega^2 y, \quad (4.99)$$

$$g_z = F_z + C_z = \frac{\partial W}{\partial z} = -G \int_M \frac{z - z'}{\ell^3} dm + \omega^2 z. \quad (4.100)$$

As integrais das expressões (4.98) a (4.100) devem ser estendidas à massa total da Terra real.

O potencial de gravidade  $W$  da Terra real é uma soma de duas componentes, que são: o potencial da atração ou gravitacional  $V$  gerado pela massa da Terra e potencial centrífugo  $Q$ , devido ao movimento de rotação (GEMAEL, 1999, p. 109). O potencial de gravidade  $W$  é denominado geopotencial de gravidade de expressão:

$$W = V + Q. \quad (4.101)$$

O gradiente do geopotencial de gravidade  $W$  representa o vetor força de gravidade  $\vec{g}$ , e o gradiente de suas parcelas  $V$  e  $Q$  são, respectivamente, o vetor força de atração  $\vec{F}$  e força centrífuga  $\vec{C}$ .

Pode-se notar que o campo da gravidade é conservativo:

$$g = \text{grad } W = \text{grad}(V + Q) = \text{grad } V + \text{Grad } Q = F + C, \quad (4.102)$$

sendo  $\vec{g}$  o vetor gravidade,  $V$  o potencial gravitacional (atração) e  $Q$  o potencial centrífugo (rotação) da Terra real.  $\vec{F}$  representa a atração das massas terrestres sobre a partícula de massa unitária e  $\vec{C}$  representa a força centrífuga a que a partícula se acha sujeita.

O vetor força de gravidade  $\vec{g}$ , de acordo com Gemael (1999), pode ser obtido através de determinações absolutas ou por determinações relativas.

As medições absolutas da gravidade são efetuadas de forma isolada em pontos, sem qualquer outra referência externa, geralmente baseadas na análise de algum tipo de movimento sob a ação da gravidade.

As medições relativas da gravidade consistem em analisar os efeitos da gravidade sobre o medidor, gravímetro, em um ponto com o valor de  $g$  conhecido (determinado pela gravimetria absoluta) e efetuar a medição da variação do efeito

até um ponto a determinar. É um processo muito mais simples e rápido que o da gravimetria absoluta.

Em muitos problemas geodésicos adota-se a simplificação de um modelo rígido para Terra e sua velocidade de rotação do planeta é aceita como constante. Mas a velocidade de rotação do planeta varia e, juntamente com o movimento do pólo, o valor de  $g$  também varia.

Muitas são as causas que impedem, rigorosamente de considerar a gravidade constante. Estas causas são representadas por alterações topográficas naturais ou impostas pelo homem, o movimento de massas no interior da Terra, a variação do lençol freático, a variação do nível dos oceanos, a movimentação das placas tectônicas e outros fatores.

#### 4.2.2 Vertical e superfícies equipotenciais

O campo da gravidade é conservativo. As superfícies equipotenciais do campo da gravidade são denominadas geopes. Os geopes são superfícies irregulares. A linha vertical ou também chamada de linha de força do campo da gravidade é perpendicular aos geopes.

Vertical do ponto  $P$  é a reta tangente à linha vertical que passa pelo ponto  $P$ . A vertical representa a direção do vetor da gravidade de  $g$  do ponto  $P$ . A importância da vertical se justifica devido sua vinculação com a latitude astronômica. A vertical é associada ao campo de gravidade da Terra real.

O lugar geométrico dos pontos do espaço que possuem o mesmo potencial de gravidade ou geopotencial de gravidade é chamado de superfície equipotencial ou geopes (GEMAEL, 1999, p. 110).

Por definição, por um ponto do campo passa uma e somente uma superfície equipotencial, e como consequência duas ou mais superfícies nunca se interceptam.

O geope fundamental é o geóide ( $W = W_0$ ), definido como a superfície equipotencial do campo de gravidade que mais se aproxima do nível médio dos mares não perturbados, prolongado através dos continentes.

O cálculo do geóide está baseado na solução da equação de campo de gravitação (GRAFAREND, 1994, p.6).

Partindo-se da hipótese de que a Terra fosse um corpo regular, matematicamente bem definido, sem rotação e sua distribuição de massa fosse homogênea, as superfícies equipotenciais seriam esferas concêntricas. As linhas de força do campo da gravidade seriam retas perpendiculares às superfícies e convergiriam para o centro da esfera, indicando a direção do vetor força da gravidade.

Como as características acima descritas não acontecem, as linhas de força do campo da gravidade não são retas, mas curvas e a superfície são irregulares, como na Figura (4.3). A direção da linha de força é chamada de vertical do lugar.

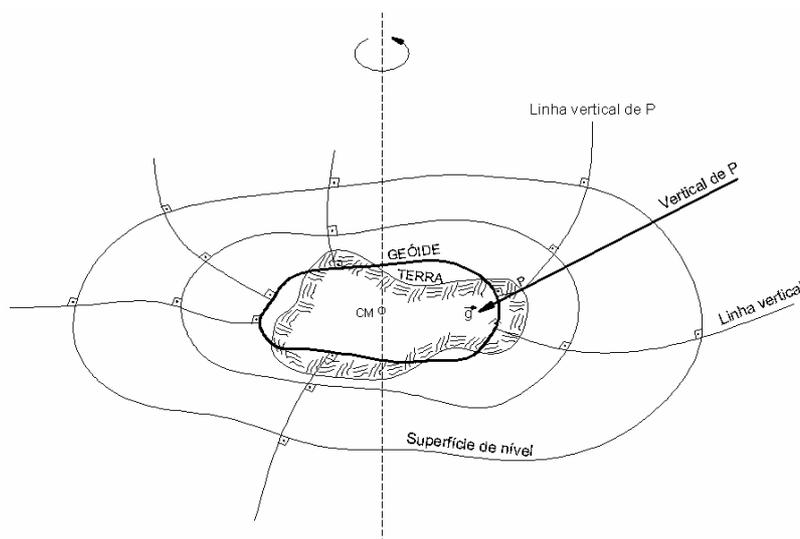


Figura 4.3 – Linhas de força da Terra real

#### 4.2.3 Equação de Bruns

A equação de Bruns relaciona a ondulação do geóide com o potencial perturbador (BLITZKOW, 1996, p. 21).

O conhecimento do gradiente vertical da gravidade ou velocidade de variação de  $g$  ao longo da vertical permite controlar a variação do módulo de  $\vec{g}$ , quando seu ponto de aplicação desloca-se ao longo de uma linha de força (GEMAEL, 1999, p. 116). O gradiente vertical da gravidade é dado por:

$$\frac{\partial^2 W}{\partial z^2} = -\frac{\partial g}{\partial z} \quad (4.103)$$

Aplicando a equação de Poisson generalizada

$$\Delta W = \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} = -4\pi G\rho + 2\omega^2. \quad (4.104)$$

E observando-se que:

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} = -2gC_m, \quad (4.105)$$

com  $C_m = -\frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right)$ , resulta

$$-2gC_m + \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} = 4\pi G\rho + \omega^2. \quad (4.106)$$

Agora, substituindo  $\frac{\partial^2 W}{\partial z^2}$  encontrado na expressão (4.106), na expressão (4.103), tem-se

$$\frac{\partial g}{\partial z} = 4\pi G\rho - 2\omega^2 - 2gC_m, \quad (4.107)$$

que é chamada equação de Bruns.

#### 4.2.4 Geopotencial

O geopotencial de gravidade representa o potencial da Terra real. O geopotencial pode ser separado em geopotencial de atração ou gravitacional e geopotencial centrífugo (GEMAEL, 1999, p. 119).

Como se considera a Terra real, as simetrias existentes na Terra normal desaparecem aqui e se expressa o geopotencial em pontos externos às massas através de uma série de funções harmônicas de superfície.

Para escrever o geopotencial  $W$  no ponto  $P(r, \nu, \lambda)$ , é necessário lembrar a expressão que define a distância entre dois pontos. Representa-se aqui o inverso da distância entre dois pontos:

$$\frac{1}{\ell} = \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left( \frac{r'}{r} \right)^n P_{nm}(\nu) P_{nm}(\nu') \cos m(\lambda - \lambda'). \quad (4.108)$$

O geopotencial  $W$  no ponto  $P(r, \nu, \lambda)$ , que é dado por

$$W = G \int_M \frac{dm}{\ell} + \frac{1}{2} \omega^2 r^2 \sin^2 \nu \quad (4.109)$$

pode ser expresso com ajuda da expressão (3.108), como segue:

$$W = \frac{G}{r} \left[ \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \int_M \left( \frac{r'}{r} \right)^n (a_{nm} \cos m\lambda + b_{nm} \sin m\lambda) P_{nm}(v) \right] dm + R, \quad (4.110)$$

onde R representa o potencial de rotação. A integração deve ser estendida a total massa da Terra.

Excluindo do integrando as quantidades que não dependem das coordenadas da massa elementar  $(r', v', \lambda')$ , obtém-se:

$$W = \frac{G}{r^{n+1}} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left[ P_{nm}(v) \cos m\lambda \int r'^n a_{nm} dm + P_{nm}(v) \sin m\lambda \int r'^n b_{nm} \right] + R. \quad (4.111)$$

$$W = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \frac{1}{r^{n+1}} [A_{nm} \cos m\lambda + B_{nm} \sin m\lambda] P_{nm}(v) + R, \quad (4.112)$$

onde:

$$A_{nm} = \int_0^M r'^n a_{nm} dm = G \int_0^M r'^n P_{nm}(v) \cos m\lambda' dm \quad (4.113)$$

$$B_{nm} = \int_0^M r'^n b_{nm} dm = G \int_0^M r'^n P_{nm}(v) \sin m\lambda' dm \quad (4.114)$$

Algumas considerações devem ser feitas: se a origem do sistema de coordenadas coincidir com centro de gravidade da Terra, anulam-se os termos de 1º grau. Admitindo o eixo de rotação como o eixo principal de inércia anula-se o tesserar de segundo grau.

A expressão (4.112) também pode ser encontrada na literatura sob a forma:

$$W = \left[ \frac{GM}{r} \left\{ 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left( \frac{a}{r} \right)^n (C_{nm} \cos m\lambda + S_{nm} \sin m\lambda) P_{nm}(v) \right\} + R \right], \quad (4.115)$$

com,

$$A_{nm} = C_{nm} GMa^n \quad (4.116)$$

e

$$B_{nm} = S_{nm} GMa^n, \quad (4.117)$$

sendo (a) o semi-eixo equatorial.

Ainda pode-se encontrar a expressão (4.112) na literatura sob a forma:

$$W = \frac{Gm}{r} \left\{ 1 - \sum_{n=2}^{\infty} \left( \frac{a}{r} \right)^n \left[ J_n P_n(v) + \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=1}^n (J_{nm} \cos m\lambda + K_{nm} \sin m\lambda) \times P_{nm}(v) \right] \right\} + R, \quad (4.118)$$

com:

$$C_{nm} = -J_{nm} \quad (4.119)$$

e

$$S_{nm} = -K_{nm} \quad (4.120)$$

### 4.3 Potencial perturbador ou potencial anômalo

Conforme exposto nos itens anteriores, o campo da gravidade é dotado de potencial escalar, chamado de potencial de gravidade ou geopotencial. O campo atribuído ao elipsóide de referência produz potencial teórico denominado potencial de gravidade normal ou esferopotencial. Tomando um ponto qualquer da superfície terrestre, o esferopotencial  $U$  difere do geopotencial  $W$  em virtude da heterogeneidade na distribuição das massas da Terra e o afastamento elipsóide-geóide. Esta diferença é potencial anômalo (HEISKANEN & MORITZ, 1985, p. 82-83).

O potencial perturbador  $T$  de acordo com Gemael (1999, p.133) é definido como a diferença entre o geopotencial  $W$  no ponto  $P$  e o esferopotencial  $U$  no mesmo ponto

$$T = W - U. \quad (4.121)$$

O potencial perturbador também é conhecido como potencial anômalo.

O estudo da figura da Terra está vinculado com o conhecimento detalhado do campo da gravidade. Um dos itens que compõem o campo gravitacional é o potencial da força de gravidade.

Lembrando das definições anteriores, o geopotencial é o potencial produzido pela Terra real e que o esferopotencial é o potencial produzido pela Terra normal. O potencial anômalo pode ser considerado como o potencial gerado pelas massas anômalas, visíveis e invisíveis, que transformam a Terra normal na Terra real, ambas com a mesma massa, variando apenas a sua distribuição.

O potencial perturbador é uma função harmônica, pois sendo o potencial centrífugo o mesmo para a Terra real e para a Terra normal, resulta que o potencial centrífugo desaparece quando efetuada a subtração  $W - U$ :

$$\Delta T = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0. \quad (4.122)$$

A expressão definida acima para o potencial perturbador, pode ser desenvolvida em série de harmônicos esféricos.

De acordo com Zakatov (1997, p. 338), o potencial perturbador é uma função contínua no infinito se satisfazer a condição:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} T = 0. \quad (4.123)$$

O potencial perturbador  $T$  não pode ser medido diretamente. Portanto, o seguinte planejamento é importante: obter o potencial perturbador  $T$  e o potencial da Terra real  $W$ , partindo do desvio da vertical e das anomalias da gravidade com dados experimentais. Após a determinação do potencial da Terra real  $W$ , determinam-se diferentes magnitudes do campo gravitacional da Terra real, como por exemplo, a determinação das alturas geoidais de pontos da superfície da Terra (ZAKATOV, 1997, p. 331-332).

#### 4.4 Anomalia e distúrbio da gravidade

As anomalias da gravidade desempenham um papel importante no estudo da figura da Terra. Quando se calcula o valor da gravidade  $g$  da Terra real e os valores da gravidade da Terra normal  $\gamma$ , estes valores não coincidem, com magnitudes às vezes muito superiores aos erros das observações gravimétricas. Essas discrepâncias são resultados das desigualdades existentes entre o potencial da Terra real e o potencial da Terra normal (ZAKATOV, 1997, p. 331).

Considera-se que ambas as magnitudes  $g$  e  $\gamma$  estão referidas a um mesmo ponto. A gravidade da Terra normal  $\gamma$  se refere a um ponto  $P'$  no elipsóide (Figura 4.4) e o valor medido para a gravidade de Terra real  $g$  se refere a um ponto  $P$  situado na superfície terrestre.

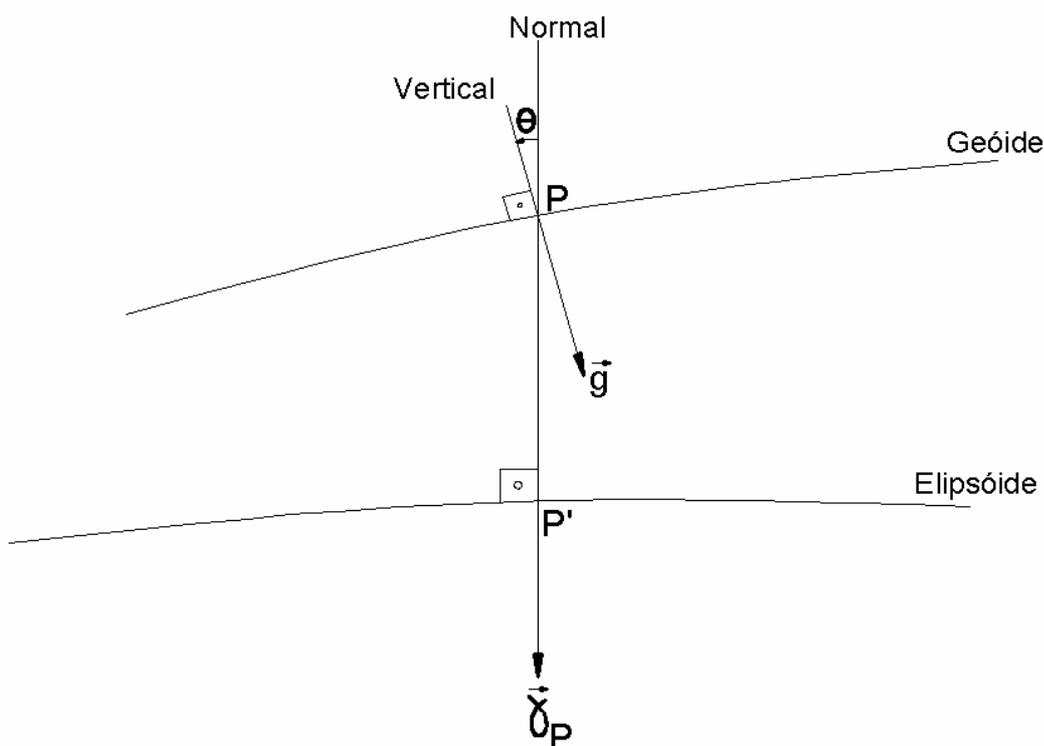


Figura 4.4 - Anomalia da gravidade e distúrbio da gravidade

Considerando a Figura (4.4) que mostra a normal  $n'$  ao elipsóide e a normal  $n$  ao geóide, chega-se ao vetor chamado vetor anomalia da gravidade:

$$\overline{\Delta g} = \vec{g}_p - \vec{\gamma}_{P'} . \quad (4.124)$$

A separação  $N$  entre as superfícies geóide e elipsóide é a ondulação geoidal, calculada com a fórmula de Stokes, que será vista mais adiante.

O ângulo  $\theta$  em  $P$ , formado pelas direções  $\vec{g}_p$  e  $\vec{\gamma}_{P'}$ , constitui o desvio da vertical definido pela sua componente meridiana (TORGE, 1989, p. 44):

$$\xi = \Phi - \varphi = -\frac{1}{\gamma} T_x , \quad (4.125)$$

e pela componente primeiro vertical:

$$\eta = (\Lambda - \lambda) \cos \varphi = -\frac{1}{\gamma} T_y \quad (4.126)$$

onde,  $T_x = \frac{\partial T}{\partial x}$  e  $T_y = \frac{\partial T}{\partial y}$ .

O distúrbio da gravidade é denominado como a diferença entre os módulos  $g$  e  $\gamma$  no mesmo ponto  $P$  e é dado por

$$\delta g_p = g_p - \gamma_{P'} . \quad (4.127)$$

Chama-se vetor distúrbio da gravidade:

$$\vec{\delta}_{g_p} = \vec{g}_p - \vec{\gamma}_p. \quad (4.128)$$

$$\delta\vec{g} = \text{grad}(W - U) = \text{grad} T. \quad (4.129)$$

As anomalias da gravidade são informações necessárias para determinar o potencial perturbador T da Terra (ZAKATOV, 1997, p. 333). As anomalias da gravidade caracterizam as discrepâncias entre o potencial da Terra real e da Terra normal. Estas anomalias fornecem também informações acerca da distribuição das massas no interior da Terra, mas não informa de que forma ocorre essa distribuição.

As anomalias são positivas quando  $g > \gamma$ , e correspondem ao excesso de massas atrativas na região do levantamento dos dados. As anomalias negativas ocorrem quando  $\gamma > g$ , e correspondem à carência de massas atrativas na região analisada (ZAKATOV, 1997, p. 333). De modo geral, as anomalias positivas da gravidade coincidem com as elevações do geóide, e as anomalias negativas com as baixas do geóide. Mas isto nem sempre ocorre, pois a superfície geoidal depende das anomalias da gravidade em toda a superfície da Terra.

As anomalias da gravidade dependem da influência das massas topográficas externas em relação ao nível dos oceanos e das massas anômalas que se encontram interiores à superfície. O conhecimento das anomalias é valioso para revelar as diferentes densidades.

#### 4.5 Reduções Gravimétricas

É conveniente entender o problema das reduções a partir da análise do conjunto de problemas oferecidos na translação das magnitudes medidas na superfície da Terra e seus correspondentes valores sobre a superfície de referência. Em certos casos pode ocorrer também o problema inverso, o traslado das magnitudes encontradas na superfície de referência a qualquer outra superfície e, em particular, a superfície da Terra (ZAKATOV, 1997, p. 431).

Existem vários tipos de reduções gravimétricas, isto porque, os valores medidos de  $g$  estão sujeitos a diferentes tipos de redução com os variados fins a que se destinam (GEMAEL, 1999, p.189).

O efeito da topografia, que se constitui no maior obstáculo à aplicação da técnica de Stokes, pode, no entanto, ser eliminado (ou minimizado) através dos métodos de redução dos valores da gravidade ao nível do geóide.

Algumas reduções são feitas para um determinado fim. Assim é que a definição adotada de anomalia da gravidade exige o conhecimento de  $g$  na superfície do geóide, onde ocorre a redução da gravidade ao nível do mar.

O método de Stokes requer que o potencial anômalo seja uma função harmônica no espaço exterior às massas topográficas, o que implica a necessidade de remoção total das massas externas ao geóide para a sua determinação. Assim o geóide sofrerá variações, maiores ou menores, dependendo do processo utilizado.

Ainda, considera-se a insuficiência de densidade de estações gravimétricas em grandes regiões do mundo. É importante escolher uma anomalia que represente significativamente a região próxima da estação considerada. As anomalias isostáticas são as mais representativas, pois possuem a menor relação com a topografia. As reduções isostáticas oferecem ainda uma alteração relativamente fraca do potencial de gravidade, pois são eliminadas as massas externas ao geóide e as correspondentes massas internas de compensação.

Algumas exigências são impostas para que as reduções sejam úteis para a Geodésia. De acordo com (SIDERIS, 1993 apud LOBIANCO, 2005, p. 54), as exigências são:

- a) as anomalias da gravidade reduzidas devem ser pequenas e suaves, o que torna sua interpolação fácil e representativa;
- b) os efeitos indiretos devem ser pequenos;
- c) as anomalias de gravidade devem ter sentido geofísico, ou seja, devem ser úteis para as interpretações geofísicas.

A anomalia da gravidade  $\Delta g$  é a diferença entre a gravidade observada  $g_{\text{OBS}}$ , com correção gravimétrica  $C_g$  para reduzi-la ao geóide, e a gravidade teórica ou normal  $\gamma$ , obtida por uma função padrão:

$$\Delta g = g_{\text{OBS}} + C_g - \gamma. \quad (4.130)$$

Dependendo do tipo de correção aplicada ao valor observado, obtêm-se diferentes tipos de anomalias da gravidade. As anomalias mais utilizadas são: a anomalia de ar-livre, a anomalia de Helmert, a anomalia de Bouguer, e a anomalia isostática conforme ilustradas na figura (4.5) (LOBIANCO, 2005, p.56).

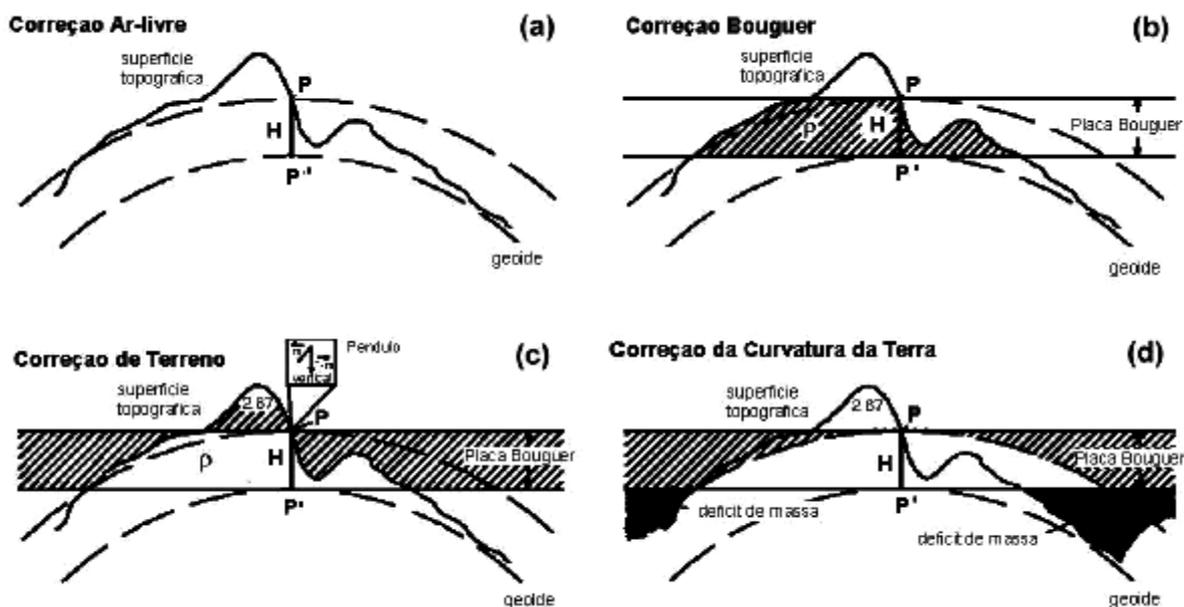


Figura 4.5 – Reduções gravimétricas: (a) Correção ar-livre, (b) Correção de Bouguer, (c) Correção de terreno e (d) Correção da curvatura da Terra  
 Fonte: (DIREEN, 2001 apud LOBIANCO, 2005)

#### 4.5.1 Anomalia ar-livre

Obtém-se a anomalia ar-livre aplicando a correção ar-livre. A anomalia ar-livre considera a variação da gravidade entre a superfície de observação e o geóide, utilizando a altitude do ponto ( $H_p$ ) e desconsiderando a massa entre elas, conforme mostra a Figura (4.5 a). Esta anomalia é positiva acima do geóide e negativa abaixo do geóide (LOBIANCO, 2005, p. 57).

A correção do ar-livre  $C_f$  ou correção Faye é introduzida para reduzir ao nível médio do mar a gravidade observada na superfície física da Terra. A anomalia resultante recebe o nome de anomalia de ar-livre ou anomalia Faye (GEMAEL, 1999, p. 190). A correção do ar-livre para uma estação de altitude ortométrica H é dada pela seguinte expressão:

$$C_f = \frac{\partial g}{\partial h} h, \quad (4.131)$$

sendo  $\frac{\partial g}{\partial h}$  o gradiente vertical da gravidade. Pode-se também utilizar o gradiente da gravidade normal, representado pela seguinte expressão:

$$C_f = 0,3086h. \quad (4.132)$$

Para posteriormente expressar-se a anomalia do ar-livre, relembra-se aqui a expressão que define a anomalia da gravidade:

$$\Delta g = g_0 - \gamma, \quad (4.133)$$

onde,  $g_0$  representa a gravidade na superfície do geóide.

Na fórmula (4.133) introduz-se a correção do ar-livre e obtém-se

$$\Delta g_f = g + C_f - \gamma. \quad (4.134)$$

Resulta então para a anomalia de Faye, substituindo a expressão (4.132) em (4.134):

$$\Delta g_f = g + 0,3086 h - \gamma. \quad (4.135)$$

Quando for necessário maior precisão, pode-se usar a fórmula que expressa o gradiente normal da gravidade normal. Esta fórmula representa a velocidade de variação da gravidade da Terra normal  $\gamma$ , ao longo da normal:

$$\frac{d\gamma}{dn} = -\frac{2\gamma}{a} (1 + \alpha - 2\alpha \text{sen}^2\varphi + m). \quad (4.136)$$

Assim a anomalia do ar-livre fica expressa por

$$\Delta g_f = g + \frac{2\lambda h(1 + \alpha - 2\alpha \text{sen}^2\varphi + m)}{a} - \gamma. \quad (4.137)$$

A anomalia do ar-livre representa a definição cartográfica da estação, fornecendo a latitude para o cálculo da gravidade teórica e a altitude para a correção do gradiente (GEMAEL, 1999, p. 190-191).

#### 4.5.2 Dedução da anomalia de Bouguer

Devido ao fato de que a integral de Stokes pressupõe a inexistência de massas externas ao geóide é necessário, portanto, remover as massas topográficas e preencher as bacias oceânicas. Este procedimento é realizado em duas fases. A redução modificada de Bouguer (Figura 4.6) representa a primeira fase. Nesta fase são eliminadas as massas da região próxima da estação e é constituída por uma calota esférica cujo pólo é a estação e o raio vale 166,7 km. A segunda fase é representada pela redução topoisostática, que elimina as massas topográficas das regiões distantes, que se estendem até o ponto antípoda da estação (GEMAEL, 1999, p. 191).

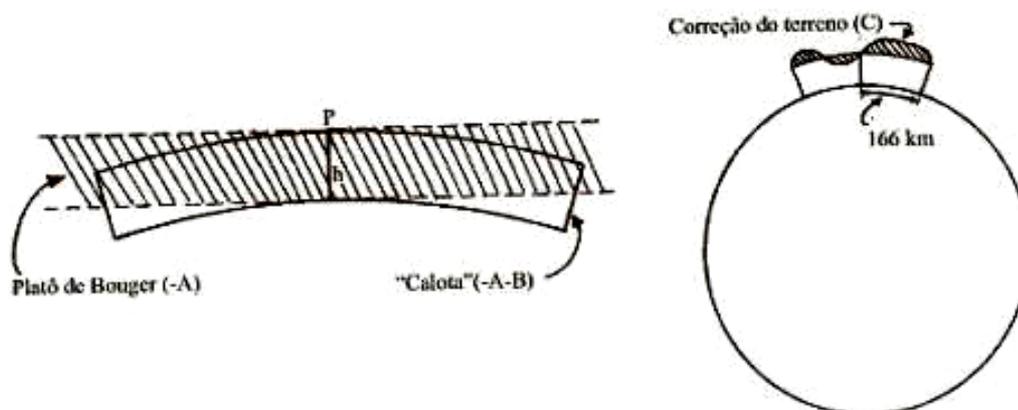


Figura 4.6 – Correção de Bouguer  
 Fonte: (GEMAEL, 1999, 192)

#### 4.5.2.1 Redução Modificada de Bouguer

A redução modificada de Bouguer é a primeira fase necessária para a posterior aplicação da integral de Stokes (GEMAEL, 1999, p.192). Também conhecida como eliminação das massas topográficas num raio de 166,7km, ela pode ser escrita de seguinte maneira:

$$C_b = -A - B + C. \quad (4.138)$$

O termo A é a correção de Bouguer que corresponde a vertical da atração exercida por um platô horizontal de espessura h sobre um ponto de massa unitária situado na sua superfície. A componente descrita acima se aproxima sensivelmente da que seria produzida por uma calota de mesma espessura e com raio esférico de 166,7km. Olhando agora para o segundo termo B, diz-se que ele tem exatamente a função de converter o platô de Bouguer na mencionada calota. O terceiro termo C, chamado de correção do terreno, considera as irregularidades topográficas em relação à calota (GEMAEL, 1999, p.192).

#### 4.5.2.2 Platô de Bouguer

Com o auxílio da Figura (4.7), determina-se a correção de Bouguer A, que corresponde à componente vertical da atração exercida por um platô horizontal de espessura h sobre um ponto de massa unitária situado à sua superfície. A Figura (4.7) está representada por um cilindro de eixo vertical com base inferior apoiada

sobre o geóide. Na base superior será colocada a estação gravimétrica P (GEMAEL, 1999, p. 192).

A partir disso é possível escrever a expressão para a massa elementar  $dm$ :

$$dm = \rho dv = \rho r dA dr dz \quad (4.139)$$

A massa elementar descrita na equação (3.139) produz sobre a massa unitária localizada na estação gravimétrica P uma atração

$$dF = \frac{G\rho dv}{\ell^2}. \quad (4.140)$$

A componente vertical da atração é representada por

$$dF_z = \frac{G\rho dv \cos \beta}{\ell^2}. \quad (4.141)$$

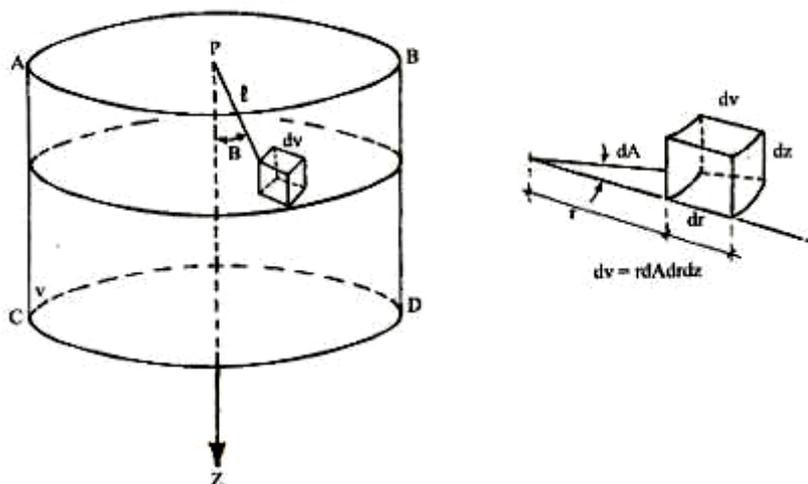


Figura 4.7 – Cilindro de eixo vertical apoiado no geóide

Fonte: (GEMAEL, 1999, p. 193)

Da Figura (4.7) obtém-se que:

$$\ell^2 = r^2 + z^2 \quad (4.142)$$

e

$$\cos \beta = \frac{z}{\ell}. \quad (4.143)$$

Substituindo as expressões (4.142) e (4.143) na expressão (4.141), resulta

$$dF_z = G\rho z r (r^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} dr dz dA. \quad (4.144)$$

De acordo com (GEMAEL, 1999, p. 192), é possível também expressar a componente vertical da atração exercida por um compartimento de altura  $h$  e seção transversal definida por dois arcos circulares concêntricos (centro em  $P$  e raios  $r_1$  e  $r_2$ ) e duas retas convergentes em  $P$ . Estas retas possuem azimutes  $A_1$  e  $A_2$ . A expressão é dada por:

$$F_z = G\rho \int_{A_1}^{A_2} dA \int_0^h zdz \int_{r_1}^{r_2} r(r^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} dr. \quad (4.145)$$

Resulta assim, que a componente vertical da atração exercida pelo platô de Bouguer sobre o ponto  $P$  é

$$A = G\rho \int_{A_1}^{2\pi} dA \int_0^h zdz \int_0^\infty r(r^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} dr. \quad (4.146)$$

Mas,

$$\int_0^\infty r(r^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} dr = \frac{1}{z}. \quad (4.147)$$

Substituindo (4.147) em (4.146), resulta em

$$A = G\rho \int_0^{2\pi} dA \int_0^h dz. \quad (4.148)$$

$$A = 2G\rho h. \quad (4.149)$$

Adotam-se os valores  $G = 6.672 \times 10^{-14} \text{ m}^3 \text{ s}^{-1} \text{ kg}^{-1}$  e  $\rho = 2.670 \text{ kg m}^{-3}$ , obtém-se o seguinte resultado para a atração exercida pelo platô de Bouguer:

$$A = 0,1119h, \quad (4.150)$$

com  $h$  em metros e  $A$  em miligals.

#### 4.5.2.3 Calota de Bouguer

Na expressão (4.138), o termo  $B$  tem a função de converter o platô de Bouguer na calota de mesma espessura do platô e com raio esférico de 166,7 km, tendo como ponto central a estação gravimétrica. O termo  $B$  é a diferença entre as componentes verticais da atração produzida pela calota e pelo platô de Bouguer (GEMAEL, 1999, p.194).

#### 4.5.2.4 Correção do Terreno

As observações gravimétricas realizadas na superfície topográfica são afetadas pela topografia. Como a topografia é irregular, o seu efeito pode não ser expresso em uma forma analítica, sendo necessário assim, realizar integração numérica sobre a superfície da Terra. Para isto, a superfície da Terra é dividida em compartimentos, permitindo que cada compartimento contribua individualmente ao serem somados, gerando o efeito total da integração (CATALÃO, 2000, p. 73).

De acordo com o mesmo autor, a integração da superfície topográfica é feita da seguinte forma. A superfície topográfica é convertida num modelo digital de terreno, sob a forma de valores ou médios, e subdividida em retângulos.

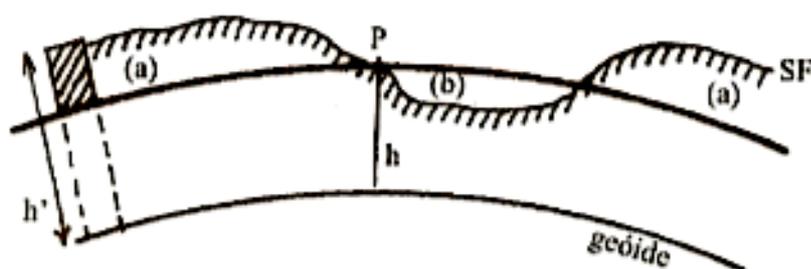


Figura 4.8 – Correção do Terreno

Fonte: (GEMAEL, 1999, p. 194)

A correção do terreno (Figura 4.8) é dada pelo terceiro termo da expressão (4.138). Este termo possui o menor valor, em alguns casos é possível negligenciá-lo. A correção de Bouguer elimina as massas topográficas em relação à calota. O cálculo da correção de Bouguer é feito considerando cartas altimétricas da região vizinha à estação. Para isto, são tomadas circunferências concêntricas de raios dados no quadro (4.1) e centradas na estação gravimétrica. A região é dividida em zonas denominadas de zonas literais de Hayford. Os raios das zonas foram fixados por Hayford visando à simplificação das reduções isostáticas. As zonas são designadas por letras maiúsculas, sendo que a menor calota que envolve a estação é designada por A e a zona literal mais afastada, com raio de 166,7 km é designada pela letra O (GEMAEL, 1999, p.194-195).

As zonas de Hayford são ainda subdivididas em compartimentos. O compartimento é obtido através de radiais e representa a seção transversal de um bloco prismático.

É possível ainda verificar a correção do terreno para cada uma das zonas literais de Hayford, trabalho realizado por Bullard (GEMAEL, 1999). O quadro (4.1) é baseado nas tabelas fundamentais de Cassinis.

ZONA	RAIO	n	ZONA	RAIO	n
A	2	1	18	1 41 13	1
B	68	4	17	1 54 52	1
C	130	4	16	2 11 53	1
C'	230	4	15	2 33 36	1
D	380	6	14	3 03 05	1
D'	590	6	13	4 19 13	16
E	870	8	12	5 46 34	10
E'	1.280	8	11	7 51 30	8
F	1.680	10	10	10 44	6
F'	2.290	10	9	14 09	4
G	3.520	12	8	20 41	4
H	5.240	16	7	26 41	2
I	8.440	20	6	35 58	18
J	12.400	16	5	51 04	16
K	18.800	20	4	72 13	12
L	28.800	21	3	105 48	10
M	58.800	14	2	150 56	6
N	99.000	16	1	180	1
O	132.880	28			
O'	166.735	28			

Quadro 4.1 – Zonas de Hayford  
Fonte: (GEMAEL, 1999, p. 195)

Consideram-se dois casos na aplicação dos valores de Bullard. O primeiro refere-se aos compartimentos continentais. Neste caso, a correção do terreno é positiva para as massas acima da estação e abaixo da estação. O segundo caso refere-se aos compartimentos oceânicos. Para este caso deve-se consultar a tabela de Bullard de duas maneiras. Primeiramente com o argumento  $(h + p)$ , multiplica-se o valor extraído da tabela por 0,61 e a nova consulta à tabela de Bullard deve ser feita com argumento  $h$ , multiplica-se o valor por 0,39 (GEMAEL, 1999, p.195).

O trabalho de avaliação da altitude de cada compartimento exige boas cartas altimétricas.

#### 4.5.2.5 Anomalia de Bouguer

A anomalia de Bouguer resulta da remoção das massas topografias externas, próximas ou distantes da estação, ao geóide. Esta remoção das massas topográficas é feita com a finalidade de legitimar a aplicação da integral de Stokes (GEMAEL, 1999, p.197).

Relembrando da expressão da anomalia de Bouguer, vista anteriormente:

$$\Delta g_b = g + C_f + C_b - \gamma = \Delta g_f + C_b, \quad (4.151)$$

com

$$C_f = 0,3086h, \quad (4.152)$$

$$C_b = -A - B + C = -0,1119 h - B + C. \quad (4.153)$$

Substituindo (4.152) e (4.153) em (4.151), obtém-se a seguinte expressão para a anomalia de Bouguer:

$$\Delta g_b = g + 0,3086 h - 0,1119 h - B + C - \gamma, \quad (4.154)$$

$$\Delta g_b = g + 0,1967 h - B + C - \gamma, \quad (4.155)$$

onde o termo B é a diferença entre as componentes verticais da atração produzida pela calota e pelo platô de Bouguer e é dado pelo quadro (4.1);  $\gamma$  é calculado pela fórmula internacional. Usando h em metros a correção resulta em miligals.

A anomalia de Bouguer apresenta uma considerável correlação negativa regional com a topografia. Isto indica que a redução da gravidade ao geóide pelo gradiente de Bouguer é muito pequena sob as montanhas. Também é possível concluir que o gradiente de Bouguer é muito pequena em valor absoluto.

As anomalias de Bouguer em regiões montanhosas são sistematicamente negativas e podem tomar valores elevados, aumento em média cerca de 100 mGal por 1000 metros de elevação. Isso se deve ao fato de que há certa deficiência de massas sob as montanhas o que faria com que o efeito das massas topográficas sobre os valores medidos da gravidade sofreria certa compensação (CATALÃO, 2000, p. 78).

O mesmo autor ainda traz algumas informações a respeito da crosta terrestre. A crosta terrestre é composta por uma camada de material solidificado de densidade média de  $2,67\text{g.cm}^{-3}$ , fluando numa matéria densa, cuja densidade é  $\rho = 3,27\text{g.cm}^{-3}$ , que é enfraquecida por uma fusão parcial resultante da pressão e do calor. Não

existe uma separação exata entre a crosta sólida e o início do manto enfraquecido. Estima-se que espessura da litosfera varia entre 10 e 80 km. A crosta é a camada de rocha mais externa da litosfera de um planeta. Trata-se de uma camada de rocha sólida que é, em geral, menos densa do que as camadas inferiores. Em planetas parcialmente fundidos, como a Terra, a crosta flutua sobre camadas inferiores de rocha fluída e, se for suficientemente fina, quebra-se em placas que se movem relativamente umas às outras. A crosta possui uma espessura de 10 a 30 km. A parte superior do manto, até uma profundidade de 300 a 400 km, é chamada de astenosfera, conforme Figura (4.9).

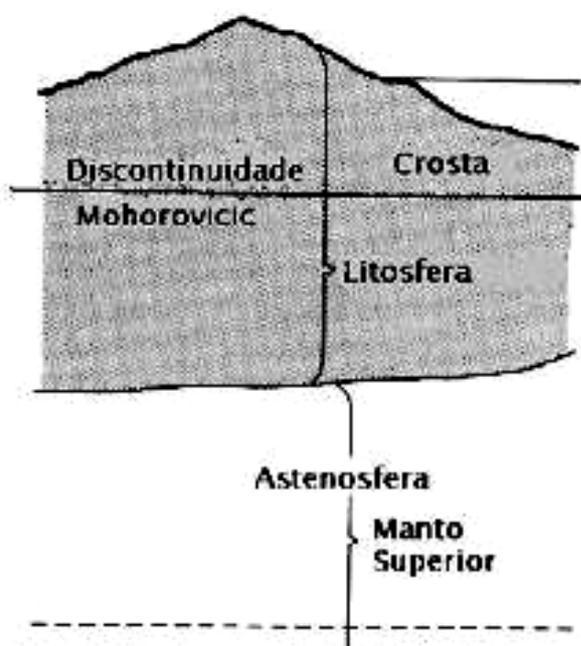


Figura 4.9 – Estrutura da Terra

Fonte: (CATALÃO, 200, p. 78)

Estas camadas estão sujeitas às pressões provenientes de diferentes fenômenos que ocorrem na superfície física da Terra. Quando uma pressão é feita em um ponto, ocorre deformação vertical e regional. A pressão em um ponto repercute mudanças na área circundante devida à resistência da litosfera.

#### 4.5.3 Redução pelo Método de Helmert

O método de Helmert ou método de condensação de Helmert condensa as massas topográficas sobre a superfície do geóide formando uma superfície material.

A massa total da Terra não sofre alteração, e um elemento de área do geóide, após a condensação, terá densidade proporcional à altitude das massas condensadas, conforme Figura (4.10). O método de condensação de Helmert, embasado em idéia sugerida por Stokes, não elimina as massas topográficas, como é feito na redução de Bouguer (GEMAEL, 1999, p. 197).

O mesmo autor ainda destaca que nas regiões de relevo pouco acidentado o método de condensação de Helmert é semelhante ao método de redução ao ar-livre. Nos trabalhos geodésicos, esta possibilidade de utilização dos dois métodos traz a vantagem de satisfazer a integral de Stokes sem introduzir alterações significativas no potencial.

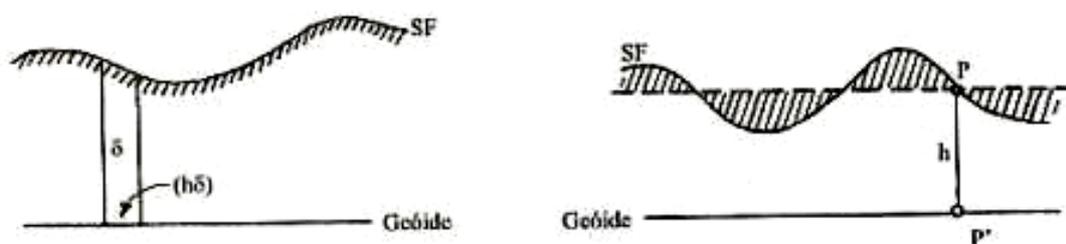


Figura 4.10 – Processo de condensação  
Fonte: (GEMAEL, 1999, p. 198)

No sentido de organizar, sistematizar e esclarecer o trabalho, Helmert estabeleceu etapas para o método de condensação. A primeira etapa objetiva a remoção do platô. A segunda preocupa-se com a redução ao geóide. Na terceira são feitos trabalhos no sentido de fazer a correção do terreno e na quarta etapa é feita a condensação do platô e cálculo de sua atração sobre P.

#### 4.5.4 Método de Rudski

Proposto por Rudski em 1905, o método de Rudski ou método de Inversão consiste na transferência das massas topográficas para posições inversas, sob a superfície geoidal. O potencial da Terra normal ou geopotencial permanece o mesmo para este caso (GEMAEL, 1999, p. 198).

Considera-se o geóide de acordo com Figura (4.11) como uma esfera de raio R e tomando-se uma partícula material P(m), externo ao geóide, nota-se que esta partícula produz em A um potencial deduzido a partir da lei dos cossenos:

$$V = \frac{Gm}{PA} = Gm(R^2 + d^2 - 2Rd \cos \alpha)^{-\frac{1}{2}}, \quad (4.156)$$

onde  $\alpha$  representa o ângulo formado entre os segmentos  $\overline{O'A}$  e  $\overline{OP(m)}$ .

A partícula  $P'(m')$  que está posicionada no interior da superfície geoidal produz no mesmo ponto A um potencial:

$$V = \frac{Gm'}{P'A} = Gm'(R^2 + d'^2 - 2Rd' \cos \alpha)^{-\frac{1}{2}}. \quad (4.157)$$

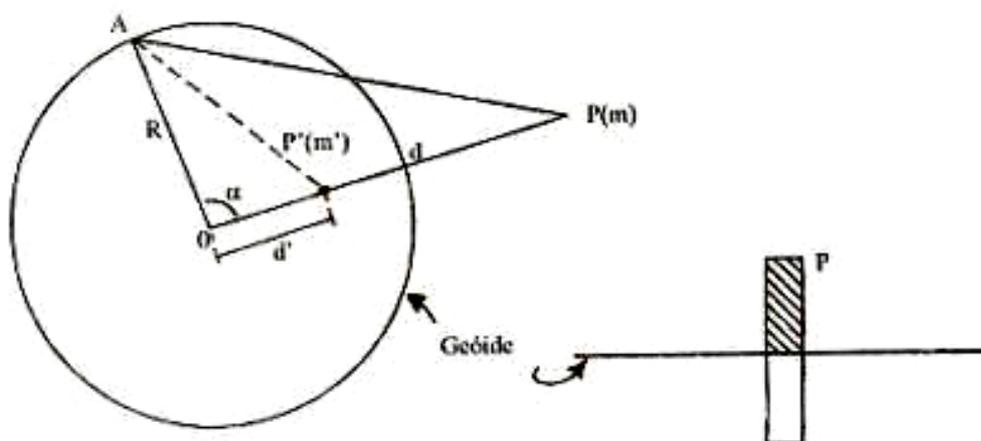


Figura 4.11 – Método de inversão  
Fonte: (GEMAEL, 1999, p. 198)

Nas expressões (4.156) e (4.157) impõe-se a condição que o potencial produzido por partícula material  $P(m)$ , externa ao geóide, é o mesmo potencial produzido por uma partícula  $P'(m')$  que está posicionada no interior da superfície geoidal:

$$V = V', \quad (4.158)$$

resulta que:

$$\frac{Gm}{(R^2 + d^2 - 2Rd \cos \alpha)^{\frac{1}{2}}} = \frac{Gm'}{(R^2 + d'^2 - 2Rd' \cos \alpha)^{\frac{1}{2}}}, \quad (4.159)$$

$$\frac{m}{d \left[ 1 + \left( \frac{R}{d} \right)^2 - \frac{2R \cos \alpha}{d} \right]^{\frac{1}{2}}} = \frac{m'}{R \left[ 1 + \left( \frac{d'}{R} \right)^2 - \frac{2d' \cos \alpha}{R} \right]^{\frac{1}{2}}}. \quad (4.160)$$

A igualdade da expressão (4.160) existe se as seguintes condições são satisfeitas:

$$\frac{m}{d} = \frac{m'}{R} \quad (4.161)$$

e

$$d' = \frac{R^2}{d}. \quad (4.162)$$

Reescreve-se a segunda condição, expressa em (4.162), e obtém-se  $dd' = R^2 = \text{constante}$ . Nota-se que os pontos P e P' são pontos inversos.

Reescreve-se a primeira condição, expressa por (4.161), e obtém-se que:  $m'd = mR$ . Sabendo-se que  $d > R$ , resulta da igualdade que  $m' < m$ . Isto significa que a não variação do potencial exige que uma pequena parte das massas topográficas não seja transferida.

De acordo com o mesmo autor, a redução de Rudski segue na ordem três etapas. A primeira etapa consiste em eliminar as massas topográficas. A segunda considera as massas inversas e na terceira etapa é feita a redução ao geóide.

#### 4.5.5 Reduções Isostáticas

A gravidade  $g$  medida sobre a superfície física da Terra real não é diretamente comparada com a gravidade de Terra normal  $\gamma$  referida a superfície de elipsóide. É necessária então a redução da gravidade  $g$  ao nível do mar. Os métodos de redução diferem dependendo da forma em que as massas externas ao geóide serão tratadas. A redução da gravidade serve de ferramenta para atingir três objetivos importantes e principais. O primeiro objetivo é a determinação da superfície geoidal. O segundo a interpolação da gravidade e o terceiro objetivo é representado pela investigação da crosta terrestre (HEISKANEN & MORITZ, 1985, p. 126-127).

De acordo com o mesmo autor, os dois primeiros objetivos citados acima são de natureza geodésica direta. O terceiro objetivo é de interesse para geodestas e geofísicos que estudam a estrutura geral da crosta terrestre.

As reduções gravimétricas isostáticas produzem pequenas deformações no geóide, ao contrário do que ocorre no método de inversão. Estas pequenas deformações devem ser consideradas (GEMAEL, 1999, p. 199-200).

De acordo com o mesmo autor, a isostasia<sup>15</sup> postula a existência de um estado de equilíbrio na litosfera sob o efeito das ações decorrentes da gravidade. Aos excessos, caracterizados por montanhas, e às deficiências, caracterizadas pelos oceanos, de massa em relação à superfície geoidal, correspondem massas internas de compensação.

Nas regiões compensadas, tem-se um estado de equilíbrio isostático plenamente atingido. Em outras regiões o equilíbrio isostático pode achar-se em fase de processamento e são ditas regiões subcompensadas, ou também pode ocorrer que regiões tenham equilíbrio isostático ultrapassado e são ditas regiões supercompensadas.

Partindo-se do princípio que o equilíbrio isostático é completo, tem-se a igualdade entre as massas topográficas e as massas de compensação, legitimando a aplicação da fórmula da Stokes mediante a transferência das massas topográficas para o interior da superfície geoidal. Introduzem-se as anomalias isostáticas na fórmula de Stokes e obtém-se o afastamento do elipsóide ao co-geóide isostático.

A existência de irregularidades internas de densidade pode ser o motivo pelo qual as anomalias de Bouguer são negativas nas regiões continentais elevadas e positivas nas regiões oceânicas. As anomalias fortemente negativas correspondem às regiões supercompensadas, onde o equilíbrio isostático é ultrapassado, e as positivas correspondem às regiões subcompensadas, onde o equilíbrio isostático pode achar-se em fase de processamento. O equilíbrio isostático tem como possível resultado uma anomalia isostática aproximadamente nula (GEMAEL, 1999, p. 200).

A crosta terrestre encontra-se em estado de equilíbrio isostático em quase toda sua superfície. Desta forma o geóide, sendo uma superfície equipotencial, não deverá ter sua forma afetada por uma superfície topográfica irregular. As massas situadas acima do geóide são compensadas pela menor densidade das massas que se encontram abaixo dessas elevações. A situação inversa ocorre nos oceanos, em que a deficiência das massas superficiais é compensada por uma maior densidade das massas sob o geóide (CATALÃO, 2000, p. 71-72).

O mesmo autor considera que o efeito da isostasia é diminuir o valor da gravidade no geóide sob as montanhas e aumenta esse valor nos oceanos. Isto

---

<sup>15</sup> O termo isostasia surgiu em 1899, criado por Dutton.

significa que o valor da gravidade no geóide sob as montanhas possui outro valor quando na ausência de isostasia.

De acordo com o mesmo autor, a forma das superfícies equipotenciais e linha vertical podem ser observadas na Figura (4.12).

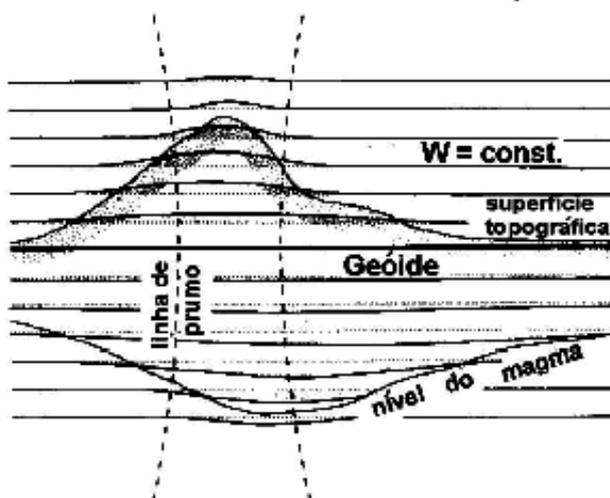


Figura 4.12 – Efeitos topográficos e isostáticos  
Fonte: (CATALÃO, 2000, p. 72)

Ainda ele esclarece que, as observações gravimétricas realizadas na superfície topográfica são afetadas pela topografia (Figura 4.13) e o efeito é tanto maior quanto maior for a distância do geóide em relação ao ponto escolhido na superfície topográfica.

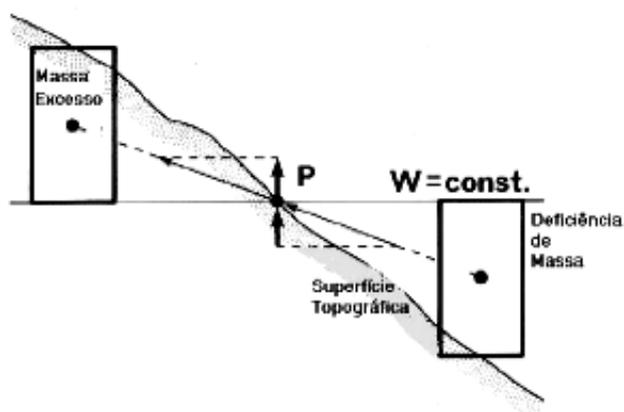


Figura 4.13 – Efeito da topografia sobre o valor da gravidade observado  
Fonte: (CATALÃO, 2000, p. 72)

Pode-se perceber então que o objetivo da redução isostática da gravidade é o equilíbrio da crosta terrestre seguindo o modelo da isostasia. As massas

topográficas não são completamente eliminadas com a redução de Bouguer, pois são levadas ao interior do geóide para eliminar deficiências de massas que existem nas regiões continentais (HEISKANEN & MORITZ, 1985, p.137).

De acordo com o mesmo autor, no modelo de Pratt-Hayford ocorre a igualdade entre as massas topográficas e as massas de compensação, que se estendem do geóide até uma profundidade determinada, denominada profundidade de compensação, mantendo assim o equilíbrio isostático, através da variação de densidade do material subjacente ao geóide. No sistema de Airy-Heiskanen ocorre um equilíbrio isostático baseado na igualdade das massas topográficas e de compensação. A densidade da litosfera para este sistema é considerada constante e a profundidade de compensação variável.

#### 4.5.5.1 O Sistema Pratt-Hayford

Este sistema foi colocado de forma matemática por Hayford. Este modelo assume a superfície entre a litosfera e a astenosfera como sendo plana. Para que esta crosta esteja em equilíbrio, as partes elevadas devem ter uma densidade inferior e as partes côncavas devem ter uma densidade superior. Idealiza-se assim a litosfera como constituída por blocos independentes, possibilitando o cálculo da densidade apropriada. A Figura (4.14) mostra o modelo de Pratt-Hayford (CATALÃO, 2000, p. 79).

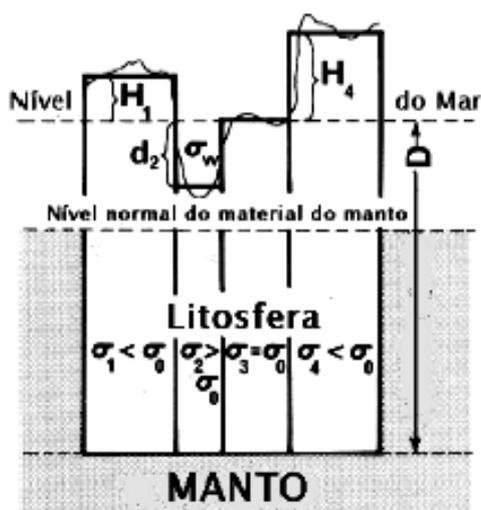


Figura 4.14 – Modelo de Pratt-Hayford  
Fonte: (CATALÃO, 2000, p. 79)

O sistema de Pratt postula a igualdade entre as massas topográficas e as massas de compensação, que se estendem do geóide até uma profundidade determinada, denominada profundidade de compensação. Conforme já explanado por Catalão (2000), o equilíbrio isostático se mantém através da variação de densidade do material subjacente ao geóide. Isto ocorre da seguinte maneira. Sob as montanhas, que são os excessos de massa em relação ao geóide, tem-se uma deficiência de densidade das massas subjacentes e sob o leito dos oceanos haveria um excesso em relação ao valor médio atribuído as massas superficiais (GEMAEL, 1999, p. 200).

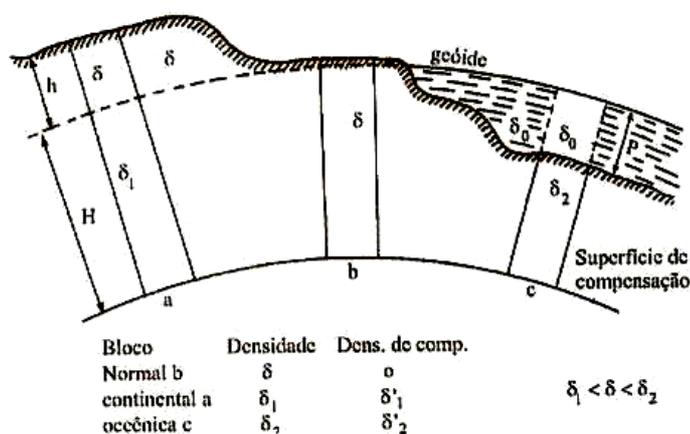


Figura 4.15 – Sistema isostático de Pratt-Hayford  
Fonte: (GEMAEL, 1999, p. 201)

A Figura (4.15) apresenta blocos prismáticos de seção unitária. Os blocos apresentam regiões continentais em a, litorâneas em b e oceânicas em c, são delimitados inferiormente pela superfície de compensação de profundidade H. Estes blocos conteriam a mesma massa.

Os blocos devem exercer a mesma pressão no manto a uma profundidade uniforme H para atingir o equilíbrio (CATALÃO, 2000, p.79).

Considera-se então, de acordo com Gemael (1999, p. 200), um bloco prismático de seção unitária e designando-se por  $\delta$  a densidade da camada superficial e por  $\delta_1$  a densidade da parte subjacente ao geóide, a diferença entre  $\delta$  e  $\delta_1$  é denominada densidade de compensação e é representada a seguir:

$$\delta - \delta_1 = \delta'_1. \quad (4.163)$$

Um sistema isostático postula que às massas topográficas do bloco correspondem massas internas iguais de compensação, porém de sinal contrário:

$$H\delta_1' = -h\delta. \quad (4.164)$$

Assim, a densidade de compensação fica expressa por:

$$\delta_1' = \frac{-h\delta}{H}. \quad (4.165)$$

Considera-se agora um bloco oceânico de profundidade  $p$ . Designa-se por  $\delta_0$  a densidade da água do mar, por  $\delta_2$  a densidade das massas subjacentes ao leito oceânico e por  $\delta_2'$  a densidade de compensação igual à diferença  $\delta - \delta_2$ . Obtém-se que:

$$p(\delta - \delta_0) = (H - p)\delta_2', \quad (4.166)$$

$$\frac{p(\delta - \delta_0)}{(H - p)} = \delta_2'. \quad (4.167)$$

Definido o valor da profundidade de compensação  $H$ , é possível conhecer o valor da densidade de compensação  $\delta_2'$  e a correção isostática. A profundidade de compensação é admitida como sendo  $H = 113,7\text{km}$ .

#### 4.5.5.2 Sistema de Airy-Heiskanen

Ao contrário do sistema Pratt-Hayford, o modelo Airy, aplicado por Heiskanen, não considera as variações de densidade, mas trata a variação da profundidade da litosfera. Para manter o equilíbrio, a litosfera deverá ser mais espessa sob um relevo topográfico de maior altitude e deverá ser mais fina sob os oceanos. Novamente, como no caso do sistema Pratt-Hayford, a litosfera será fracionada e blocos independentes (CATALÃO, 2000, p. 80).

O sistema Airy-Heiskanen preconiza um equilíbrio isostático baseado na igualdade das massas topográficas e de compensação. O equilíbrio isostático no Sistema Airy-Heiskanen é atingido de maneira distinta daquela de Pratt-Hayford. A densidade da litosfera para este sistema é considerada constante e a profundidade de compensação variável, conforme Figura (4.16).

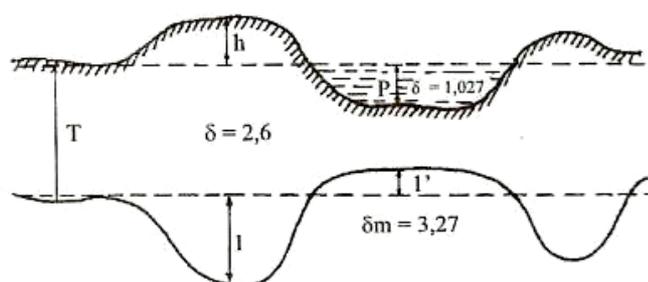


Figura 4.16 – Profundidade de compensação  
Fonte: (GEMAEL, 1999, p.204)

De acordo com o mesmo autor, tem-se também densidade constante para o magma, no qual a litosfera é suposta flutuar. Conclui-se então que, tanto mais saliente a irregularidade topográfica, tanto maior a sua raiz. Isto quer dizer que, é maior a parte que mergulha no magma como ocorre com os corpos flutuantes em equilíbrio hidrostático. Sob os oceanos o Sial se adelgaça, apresentando uma anti-raiz. Fica determinado assim, o mecanismo de compensação de Airy:

A raiz que penetra no magma substitui material pesado (3,27) por outro mais leve (2,67), de modo a compensar o excesso da montanha. Sob os oceanos, é a anti-raiz (magma) que ocupa lugar de material mais leve compensando as deficiências oceânicas (GEMAEL, 1999, p. 203-204).

Consideram-se, então, prismas de seção unitária e designam-se por T a espessura da litosfera e por t a espessura da raiz ou da anti-raiz, obtém-se a seguinte expressão:

$$h\delta = -t(3,27 - 2,67), \quad (4.168)$$

$$t = -4,45h. \quad (4.169)$$

Admitindo a espessura normal da litosfera  $T = 30\text{km}$ , a espessura da litosfera no Brasil não atingiria 41 km.

Considera-se  $T = 30\text{km}$  o valor da profundidade da litosfera que concorda relativamente bem com a profundidade determinada pela sismologia. Porém, a necessidade de se ter a litosfera fragmentada em blocos independentes flutuantes é claramente esquemático e não corresponde ao real. A litosfera é em sua maioria contínua, com exceção das regiões fronteiras de alguns grandes blocos (CATALÃO, 2000, p. 81).

A espessura  $t'$  para um prisma oceânico é calculada com um raciocínio análogo (GEMAEL, 1999, p. 204):

$$p(2,67 - 1,027) = t'(3,27 - 2,67) \quad (4.170)$$

$$t' = 2,74p. \quad (4.171)$$

Inicialmente Heiskanen utilizou as fórmulas  $t = -4,45h$  e  $t' = 2,74 p$  que comprometem a premissa inicial da igualdade das massas, pois estas fórmulas negligenciam a convergência das verticais e a variação da gravidade  $g$  com a profundidade. Os cálculos foram refeitos em 1938 com expressões mais rigorosas para as espessuras  $t$  e  $t'$ , e das tabelas fundamentais de Cassinis. Em 1959 o Instituto Isostático Internacional publicou cartas de redução topoisostática que engloba o efeito de todas as zonas numeradas, com espessura normal da litosfera  $T = 20$  km e  $T = 30$  km, o que cobre o Oceano Atlântico Norte. Em 1961 as cartas foram estendidas para o mundo todo utilizando a espessura  $T = 30$  km (GEMAEL, 1999, p. 204).

#### 4.5.5.3 Sistema Regional de Vening-Meinesz

No seu modelo Vening-Meinesz retoma o problema tratado por Pratt-Hayford e por Airy-Heiskanen, propondo uma modificação na teoria de Airy. Sua proposta foi substituir a compensação local por um sistema regional. Este sistema regional considera a topografia como uma carga sobre uma crosta contínua, porém deformável (Figura 4.17) (VANÍČEK & KRAKIWSKY, 1986).

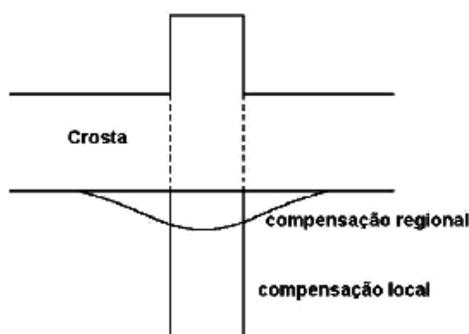


Figura 4.17 – Modelo isostático de Vening-Meinesz  
Fonte: (LOBIANCO, 2005)

Substanciado pela proposta de Airy de um sial que flutua sobre o magma fluido e mais denso, Vening-Meinesz encarou as proeminências topográficas como cargas capazes de flexionar a litosfera. Vening-Meinesz baseando-se nos estudos de Hertz e atribuindo valores médios à espessura e às características elásticas da crosta terrestre estabeleceu a curva de flexão da litosfera. Assumiu que as massas de compensação se estendem horizontalmente até uma distância  $R$  da estação e que a densidade de compensação, máxima na vertical da estação, diminui proporcionalmente às ordenadas da curva de flexão anulando-se à distância  $R$  (GEMAEL, 1999, p. 205).

#### 4.5.5.4 Efeito Indireto das Reduções Gravimétricas

As reduções isostáticas são de certa forma um artifício matemático, no qual se obtém os valores da gravidade  $g$  produzidos pela Terra fictícia. Esta Terra fictícia é resultante da eliminação das massas topográficas e compensadoras. A superfície de nível obtida dessa Terra fictícia é denominada co-geóide. Note-se que, existirão tantos co-geóides quantos forem os sistemas de redução (GEMAEL, 1999, p. 205).

O processo de condensação das massas topográficas faz variar o potencial gravitacional, o que provoca uma variação da ondulação do geóide  $N$ . A variação de  $N$  tem como conseqüência mudanças na superfície geoidal, dando origem a uma superfície ligeiramente diferente, o co-geóide (Figura 4.18). Esta variação no geóide é um efeito indireto das reduções gravimétricas. A cada redução da gravidade corresponde um co-geóide (HOFMANN-WELLENHOF & MORITZ, 2005, p. 149).

Denotando a ondulação do co-geóide por  $N^c$ , então a ondulação  $N$  do geóide é dada pela seguinte expressão:

$$N = N^c + \delta N \quad (4.172)$$

O efeito indireto que altera o valor de  $N$  é dado por

$$\delta N = \frac{\delta W}{\gamma}, \quad (4.173)$$

sendo  $\delta W$  a variação do potencial no geóide. A expressão (4.173) é obtida diretamente do teorema de Bruns.

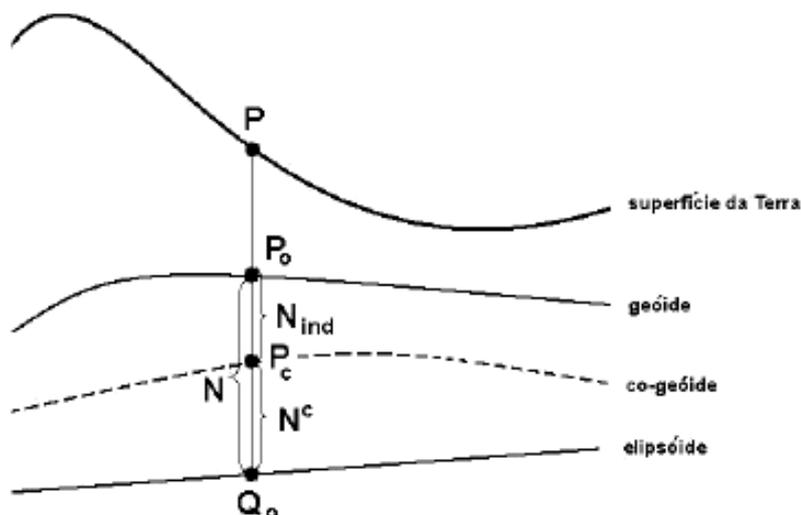


Figura 4.18 – Relação entre geóide, co-geóide, elipsóide e efeito indireto  
Fonte: (LOBIANCO, 2005)

A variação do potencial  $\delta W$  na redução de Bouguer é dada por

$$\delta W_B = U_T, \quad (4.174)$$

onde  $U_T$  é o potencial correspondente à atração da topografia e do platô de Bouguer.

Para as reduções isostáticas a variação do potencial é

$$\delta W_{TI} = U_T - U_C, \quad (4.175)$$

onde  $U_C$  é o potencial correspondente à atração da compensação.

Para a determinação prática de  $U_T$  e  $U_C$ , pode-se utilizar o método da partilha, caracterizado pela subdivisão por círculos concêntricos e seus raios, obtendo-se assim:

$$U = \sum \Delta U. \quad (4.176)$$

Para  $U_T$  usa-se  $U_0$ , com  $b = h$  e densidade  $\rho_0$ . Para  $U_C$  no caso de regiões continentais usa-se  $U_e$ , admitindo os seguintes valores:

Pratt-Hayford:

$$b = c = D, \text{ densidade } \frac{h}{D} \rho_0;$$

Airy-Heiskanen:

$$b = t, c = t + T, \text{ densidade } \rho_1 - \rho_0.$$

O efeito indireto utilizando as anomalias de Bouguer é na ordem de dez vezes a ondulação do geóide. Este efeito indireto é considerado muito grande. O valor máximo é 440m. Conseqüentemente, as anomalias de Bouguer não podem ser usadas para a determinação do geóide (HOFMANN-WELLENHOF & MORITZ, 2005, p. 150).

De acordo com o mesmo autor, o efeito indireto utilizando as anomalias isostáticas é menor que a ondulação  $N$  do geóide, na ordem de 10m. É necessário ainda o cálculo do efeito indireto  $\delta N_i$  cuidadosamente, usando o mesmo modelo isostático para as reduções da gravidade.

Para a aplicação da fórmula de Stokes, as anomalias isostáticas da gravidade devem ser reduzidas do geóide para o co-geóide. Isto pode ser feito utilizando a redução ao ar-livre, encontrando a seguinte expressão para a correção:

$$\delta = +0,3086\delta N \text{ mGal}, \quad (4.177)$$

onde  $\delta N$  está em metros. Esta correção  $\delta$  é o efeito indireto sobre a gravidade e é da ordem de 3 mGal.

O efeito indireto sobre o desvio da vertical é dado então pelas seguintes expressões:

$$\delta\xi = -\frac{1}{R} \frac{\partial\delta N}{\partial\varphi}, \quad (4.178)$$

$$\delta\eta = -\frac{1}{R \cos\varphi} \frac{\partial\delta N}{\partial\lambda}. \quad (4.179)$$

O resultado procurado determina o tipo de redução a ser aplicado às observações de gravidade. Considerando que as medidas gravimétricas são realizadas sobre a superfície topográfica, ou então referida a ela, há duas possibilidades de tratamento das massas acima do geóide. A primeira possibilidade sugere a utilização da superfície física terrestre como uma superfície de contorno. A segunda objetiva reduzir a superfície da Terra ao geóide, permitindo a aplicação direta da integral de Stokes (FORSBERG & TSCHERNING, 1997 apud LOBIANCO, 2005, p. 54).

O mesmo autor expõe resumidamente que, a anomalia de Ar-livre apenas corrige a elevação do ponto de observação. A anomalia de Helmert condensa as massas sobre a superfície do geóide. A anomalia de Bouguer considera os efeitos das massas entre o ponto de observação e a superfície de referência. A anomalia isostática lida com o efeito do relevo e das variações de densidade segundo a teoria da isostasia.

## 5 DETERMINAÇÃO GRAVIMÉTRICA DAS ONDULAÇÕES DO GEÓIDE

O geóide é comumente utilizado como referencial altimétrico e é usado para a representação da topografia terrestre e do mar.

O conhecimento das ondulações ou deformações geoidais pode contribuir para a definição das estruturas geodinâmicas, como por exemplo, as observações das anomalias geoidais podem fornecer uma importante injunção para o modelamento e análise das propriedades da litosfera continental e oceânica e a atmosfera (ANDERSON & CAZENAVE, 1986 apud SANTOS & ESCOBAR, 2000).

Quase todas as observações do tipo geodésico dependem fundamentalmente do campo da gravidade. Quando estas observações tomam uma distância relativamente pequena entre elas, de forma que se pode tomar o discreto pelo contínuo, então se pode resolver um problema de contorno. As incógnitas deste problema são: o campo da gravidade e a superfície física da Terra. Fica expressa assim o problema da Geodésia Física: a determinação da superfície física da Terra e o seu campo gravitacional externo (CATALÃO, 2000, p. 62).

De acordo com o mesmo autor, esta determinação torna-se possível tomando uma superfície estável próxima da superfície topográfica de tal forma que sobre essa superfície se conheça o campo da gravidade. O termo “próxima” sugerido acima é entendido de forma que as oscilações entre a superfície física e a superfície topográfica, no espaço e no tempo, são tais que produzem sobre a superfície física variações do campo menores que os erros de observação, ou variações menores que a precisão com que se pretende conhecer o campo da gravidade, de modo que as hipóteses de que o campo não tenha massas externas à superfície física e seja estacionário. Esses itens são contemplados pela definição de superfície geoidal, com a diferença única de que as massas exteriores ao geóide não são desprezíveis e as observações da gravidade não são feitas sobre o geóide. Uma solução para este problema consiste na remoção das massas exteriores ao geóide. Esta solução é contemplada na aplicação da fórmula de Stokes.

A fórmula da Stokes foi publicada em 1849 e leva o nome de seu autor. George Gabriel Stokes deduziu a fórmula que também é chamada integral de Stokes (SJÖBERG, 1994, P.34). A integral de Stokes é a fórmula mais importante da

Geodésia física, pois torna possível a determinação do geóide a partir de dados gravimétricos. A função  $S(\Psi)$  é conhecida como função de Stokes (HOFMANN-WELLENHOF & MORITZ, 2005, p. 103-104).

De acordo com o mesmo autor, a expressão que define o potencial anômalo ou potencial perturbador, deduzida por Pizzetti em 1911 e mais tarde por Vening-Meinesz em 1928, permite calcular o potencial anômalo  $T$  em qualquer ponto fora da Terra. Dividindo o potencial anômalo  $T$  pela gravidade da Terra normal no ponto  $P$ , obtém-se a separação entre a superfície geopotencial e a correspondente superfície esferopotencial.

As determinações relativas da gravidade, que foram simplificadas com o advento dos gravímetros, permitem chegar às anomalias da gravidade e com estas é possível o cálculo das componentes do desvio da vertical e das ondulações do geóide (GEMAEL, 1999, p. 143).

De acordo com o mesmo autor, a determinação da ondulação geoidal é feita mediante a fórmula de Stokes. As ondulações do geóide são determinadas utilizando as anomalias da gravidade  $\Delta g$ . Na determinação do geóide inclui ainda a determinação do desvio da vertical em suas componentes  $\xi$  e  $\eta$ .

As redes geodésicas horizontais (conjunto de pontos com coordenadas geodésicas curvilíneas) e as redes geodésicas verticais (conjunto de pontos com altitudes ortométricas) requerem, em seus modelos, grandezas que provêm da determinação do geóide.

Nesta circunstância, os avanços científicos se traduzem pelo constante aprimoramento do modelo na tentativa de cada vez mais aproximá-lo da realidade.

Para que as altitudes elipsoidais ou geométricas  $h$  (referidas ao elipsóide), oriundas de levantamentos com GPS, possam ser utilizadas nestas áreas, é necessário que elas sejam convertidas em altitudes "ortométricas"  $H$  (referidas ao geóide), conforme Figura 2.1. Para isso, precisa-se conhecer a altura ou ondulação geoidal  $N$ , ou seja, a separação entre as duas superfícies de referência, o geóide e o elipsóide.

A determinação das ondulações geoidais segundo Santos & Escobar (2000), é obtida através da aplicação da fórmula de Stokes, definida em função das anomalias da gravidade para o modelo esférico da Terra. No sentido de um posicionamento planimétrico, a superfície do geóide não é útil, pois o geóide é uma

superfície que não está definida matematicamente. No entanto, sendo uma superfície de nível é ideal como referencial altimétrico e é usada para a representação da topografia terrestre e do mar.

A seguinte expressão fornece as ondulações geoidais em função da anomalia da gravidade:

$$N = \frac{R}{4\pi G} \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \Delta g' S(\Psi) \cos \varphi' d\varphi' d\lambda'. \quad (5.1)$$

O posicionamento altimétrico de um ponto na superfície topográfica é dado por sua distância ao geóide contada ao longo da linha vertical (altitude ortométrica). Por outro lado, o posicionamento planimétrico de um ponto na superfície está vinculado à distância ao elipsóide de revolução. O método tradicional de determinação da altitude ortométrica envolve a determinação do modelo do geóide a partir de marégrafos e de operações geodésicas de nivelamento geométrico, onde os valores das altitudes são transportados dos marégrafos de origem até o ponto considerado.

### 5.1 Integral de Stokes

A superfície geoidal tem sido a superfície de referência das altitudes. A solução para o problema do valor de contorno, apresentada por Stokes em 1849, torna possível a determinação das ondulações do geóide. As ondulações do geóide (Figura 5.1) são definidas também como a separação entre o geóide e o elipsóide de referência em um ponto por meio do conhecimento das anomalias sobre toda a superfície da Terra (STOKES, 1849 apud LOBIANCO, 2005):

$$N = \frac{R}{4\pi\gamma} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} S(\Psi) \Delta g \operatorname{sen} \Psi d\Psi d\alpha, \quad (5.2)$$

onde  $R$  é o raio médio da Terra;  $\gamma$  é a gravidade da Terra normal na superfície do elipsóide de referência geocêntrico;  $\psi$  é o ângulo geocêntrico, ou distância esférica, entre um ponto de interesse e o ponto utilizado na integração;  $S(\Psi)$  é o núcleo esférico da integral de Stokes;  $\alpha$  é o azimute em torno do ponto de cálculo;  $g$  é a gravidade da Terra real sobre o geóide;  $\Delta g$  é a anomalia da gravidade.

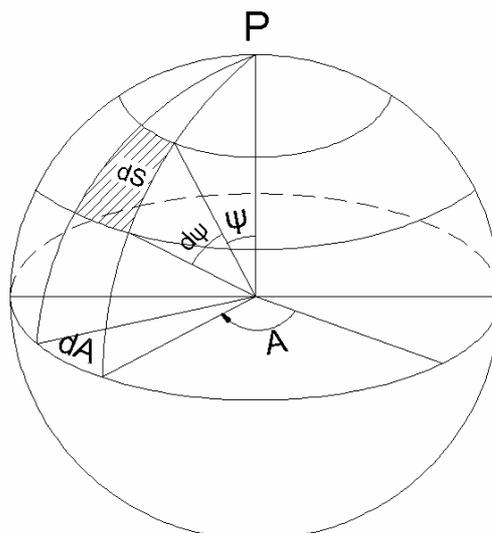


Figura 5.1 – Relação entre  $\Psi$ ,  $d\Psi$ ,  $dA$  e  $dS$

O núcleo esférico de Stokes pode ser representado por uma expansão em série:

$$S(\cos \Psi) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(2n+1)}{(n-1)} P_n(\cos \Psi), \text{ para } 0 \leq \Psi \leq \pi, \quad (5.3)$$

onde  $P_n(\cos \Psi)$  é o  $n$ -ésimo grau do polinômio de Legendre.

Stokes utilizou uma aproximação esférica e considerou inexistentes as massas externas à superfície equipotencial.

A formulação de Stokes para determinação das ondulações geoidais não possuía solução quando na sua apresentação, pois havia muitas áreas onde não existiam medições de gravidade. Estes locais eram principalmente nos oceanos. Na prática a integral de Stokes era resolvida a partir do truncamento do cálculo além de uma determinada calota de integração em torno do ponto de interesse.

A ondulação  $N$  é obtida pela soma da componente da ondulação geoidal calculada  $N_c$  com o erro de truncamento  $\delta N$ :

$$N = N_c + \delta N. \quad (5.4)$$

Foram propostas algumas modificações na fórmula de Stokes para reduzir o erro de truncamento. Estes erros são resultantes da utilização dos dados gravimétricos em uma área limitada. Alguns fatores fizeram crescer o interesse pelas modificações na integral de Stokes, representador por disponibilidade das informações de longos comprimentos de onda do campo gravitacional global, derivadas da análise das órbitas dos satélites artificiais da Terra e representadas pelos modelos de geopotencial (LOBIANCO, 2005, p. 41-42).

O mesmo autor explica que os chamados modelos geopotenciais são expressos em termos de coeficientes das funções harmônicas esféricas plenamente normalizados, combinados com dados terrestres de gravidade na integral de Stokes. Aqui a integral de Stokes é truncada pelo chamado esquema generalizado de Stokes. Este processo minimiza o erro de truncamento devido ao fato de que sua expansão em série começa em um grau mais alto onde os coeficientes de truncamento são menores em magnitude.

Utiliza-se o esquema generalizado de Stokes para o cálculo da separação entre o geóide e o elipsóide. Este esquema foi proposto por Vaníček & Sjöberg (1991) e satisfaz a solução do problema de valor de contorno da Geodésia quando é formulado para um modelo de referência da figura da Terra mais elevado do que o de segunda ordem (MARTINEC & VANÍČEK, 1996 apud LOBIANCO, 2005, p. 42).

De acordo com (GEMAEL, 1999, p. 144), Laplace e posteriormente Dirichlet demonstraram que uma função de posição sobre uma esfera pode ser expressa através de uma série de harmônicos esféricos:

$$F(v', \lambda') = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{4\pi} \int_{\sigma} P_n(\Psi) F(v, \lambda) d\sigma, \quad (5.5)$$

sendo que  $d\sigma$  é um elemento de superfície de uma esfera de raio igual a um. Escolhe-se a função anomalia da gravidade e considera-se uma esfera  $S$  de raio  $R$ :

$$\Delta g = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{4\pi R^2} \int_S P_n(\Psi) \Delta g_s dS, \quad (5.6)$$

onde  $\Delta g_s$  é a anomalia da gravidade e  $\Psi$  é a distância angular sobre  $S$ , entre os pontos  $P(v', \lambda')$  e o elemento de área  $dS(v, \lambda)$ .

Fazendo algumas operações, encontra-se a expressão para a ondulação total:

$$N = \frac{1}{4\pi R G} \int_S \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n+1}{n-1} P_n(\Psi) \Delta g_s dS. \quad (5.7)$$

O termo

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n+1}{n-1} P_n(\Psi) = S(\Psi) \quad (5.8)$$

é conhecido como função de Stokes e depende somente de  $\Psi$ , sendo  $\Psi$  a distância esférica do elemento de área  $dS$  ao ponto de cálculo.  $S(\Psi)$  pode ser expresso por

$$S(\Psi) = \operatorname{cosec} \frac{\Psi}{2} + 1 - 6 \operatorname{sen} \frac{\Psi}{2} - 5 \cos \Psi - 3 \cos \Psi \log_e \left[ \operatorname{sen} \frac{\Psi}{2} + \operatorname{sen}^2 \frac{\Psi}{2} \right] \quad (5.9)$$

Assim a expressão (5.3), fica representada:

$$N = \frac{1}{4\pi R G} \int_s S(\Psi) \Delta g_s dS \quad (5.10)$$

A expressão acima pode também ser escrita:

$$N = \frac{R}{4\pi G} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \Delta g_s S(\Psi) \operatorname{sen} \Psi d\Psi dA. \quad (5.11)$$

com

$$dS = R^2 \operatorname{sen} \Psi d\Psi dA \quad (5.12)$$

Pode-se utilizar coordenadas geográficas  $(\varphi, \lambda)$  e obtém-se:

$$dS = R^2 \cos \varphi' d\varphi' d\lambda' \quad (5.13)$$

Desta forma, a expressão (5.6), pode ser escrita:

$$N = \frac{R}{4\pi G} \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \Delta g' S(\Psi) \cos \varphi' d\varphi' d\lambda'. \quad (5.14)$$

Na expressão (5.14),  $N$  representa a ondulação do geóide no ponto  $P(\Psi, \lambda)$  e  $(\varphi', \lambda')$  são as coordenadas do elemento de área associado à anomalia da gravidade  $\Delta g'$ .

A integral de Stokes apresenta algumas dificuldades com relação a sua aplicação, assim, algumas modificações, restrições e aproximações devem ser feitas para que a integral de Stokes pudesse ser efetivamente aplicada. A primeira modificação refere-se ao modelo utilizado por Stokes. Stokes utiliza um modelo de aproximação esférico. O elipsóide de referência é tratado como uma esfera gerando um erro relativo no valor absoluto da altura geoidal na ordem de 0,003N, sabendo que o elipsóide e o modelo esférico diferem de uma quantidade da ordem do achatamento terrestre ( $\cong 0,003$ ). Como a ondulação  $N$  dificilmente excede o valor de 100 m em todo o globo terrestre, a aproximação pelo modelo esférico produzirá um erro não superior a um metro na altura geoidal (HEISKANEN & MORITZ, 1985, p. 94).

A segunda modificação diz que a integração deve ser estendida por toda superfície terrestre, mas existem várias lacunas nas áreas oceânicas e em certas regiões continentais com relação ao conhecimento das anomalias da gravidade. Os levantamentos gravimétricos, em maioria, conduzem a uma distribuição geográfica

não-homogênea das estações de gravidade. Esta restrição é resolvida aproximando-se a integral de superfície por um somatório discreto dos valores da gravidade (HEES, 1986 apud SANTOS & ESCOBAR, 2000).

Uma outra restrição estabelece que para a aplicação do método de Stokes é necessário que o potencial anômalo seja uma função harmônica no espaço exterior às massas topográficas. Assim as massas externas ao geóide devem ser removidas. O efeito da topografia pode ser minimizado através dos métodos de redução dos valores da gravidade ao nível do geóide. Por outro lado, baseando-se na lei da gravitação de Newton, Stokes (1849) não assumiu nenhuma hipótese a respeito da distribuição interna das massas no geóide (SANTOS & ESCOBAR, 2000).

A quarta refere-se à consideração do erro, causado pelo relevo acentuado. Em regiões de relevo acentuado o efeito indireto deve ser considerado, levando a determinações geoidais precisas. A não consideração deste efeito pode produzir erros de até 10 vezes a altura geoidal (HEISKANEN & MORITZ, 1985, p. 94);

Por último, considera-se o elipsóide como o modelo de forma da Terra, Stokes adotou como hipóteses dinâmicas e geométricas, que haja coincidência dos respectivos eixos de rotação, centros de gravidade de massa e volume, potenciais de gravidade na superfície, e das massas. O elipsóide adotado baseia-se na teoria de um elipsóide equipotencial que engloba a massa total da Terra (incluindo a massa atmosférica), com a mesma velocidade de rotação da Terra e atende às exigências requeridas para a aplicação da teoria de Stokes (SANTOS & ESCOBAR, 2000).

De acordo com (HEISKANEN & MORITZ, 1985, p. 101), a forma generalizada da fórmula de Stokes refere o geóide a um elipsóide de referência menos particular, apenas geocêntrico. A expressão é apresentada por:

$$N = \frac{K\Delta M}{RG} - \frac{\Delta W}{G} + \frac{R}{4\pi G} \int_{\sigma} \Delta g S(\Psi) d\sigma, \quad (5.15)$$

em que

$$\frac{K\Delta M}{R} = T_0. \quad (5.16)$$

representa o termo de grau zero no desenvolvimento do potencial perturbador.  $\Delta M = M_T - M_E$  é a diferença entre a massa terrestre e a massa do elipsóide.  $\Delta W = W_0 - U_0$  indica a diferença entre o geopotencial no geóide e o esferopotencial no elipsóide.

O potencial perturbador é representado por:

$$T = \frac{k\Delta M}{R} + \frac{R}{4\pi} \int_{\sigma} \Delta g S(\Psi) d\sigma. \quad (5.17)$$

## 5.2 Desvio da vertical: fórmulas de Vening-Meinesz

A fórmula de Stokes permite o cálculo das ondulações do geóide a partir das anomalias da gravidade. Em 1928, Vening-Meinesz propôs formulas similares para o cálculo das componentes do desvio da vertical, a partir das anomalias da gravidade (HOFMANN-WELLENHOF & MORITZ, 2005, p.116).

Na Figura (5.2) pode-se notar um esboço da superfície geoidal, do elipsóide de referência, plano vertical e a normal elipsóidica. Se  $\varepsilon$  é a componente do desvio da vertical neste plano, então:

$$dN = -\theta ds. \quad (5.18)$$

A expressão (5.18) pode também ser escrita da seguinte forma

$$\theta = -\frac{dN}{ds}. \quad (5.19)$$

Na direção norte-sul, tem-se:

$$\theta = \xi, \quad ds = ds_{\varphi} = R d\varphi; \quad (5.20)$$

e na direção leste-oeste, tem-se:

$$\theta = \eta, \quad ds = ds_{\lambda} = R \cos \varphi d\lambda; \quad (5.21)$$

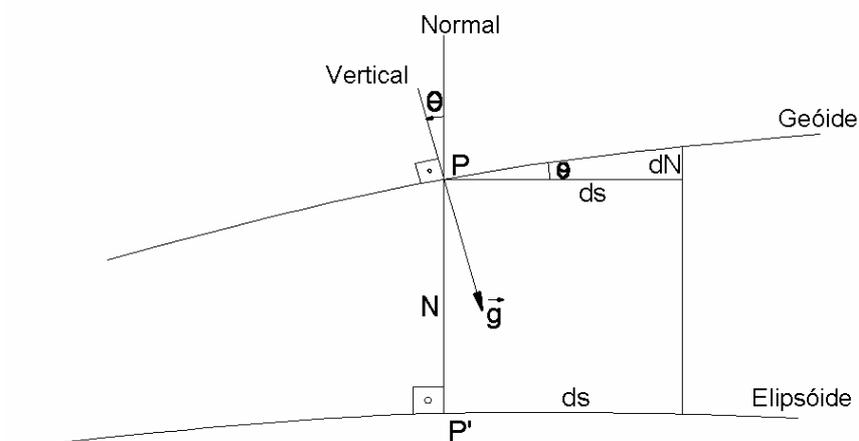


Figura 5.2 – Relação entre a ondulação do geóide e o desvio da vertical

Para os termos  $ds_\varphi$  e  $ds_\lambda$ , será usada a aproximação esférica. Fazendo a transformação de coordenadas esféricas para coordenadas elipsóidicas e com o elemento de arco sobre a esfera  $r = R$ , obtém-se para o elemento de arco  $ds$ , a seguinte expressão:

$$(ds)^2 = (Rd\varphi)^2 + (R \cos \varphi d\lambda)^2. \quad (5.22)$$

Reescreve-se agora  $\xi$  e  $\eta$ , obtém-se:

$$\xi = -\frac{dN}{ds_\varphi} = -\frac{1}{R} \frac{\partial N}{\partial \varphi}, \quad (5.23)$$

e

$$\eta = -\frac{dN}{ds_\lambda} = -\frac{1}{R \cos \varphi} \frac{\partial N}{\partial \lambda}, \quad (5.24)$$

que fornecem a relação entre a ondulação  $N$  do geóide e as componentes  $\xi$  e  $\eta$  do desvio da vertical.

### 5.3 Aplicação

Em princípio, todas as reduções da gravidade são equivalentes e devem fornecer o mesmo geóide, incluindo o efeito indireto. Mas, existem restrições para o número de reduções. As principais restrições são (HEISKANEN & MORITZ, 1985, p. 151):

- a) as reduções devem fornecer anomalias da gravidade pequenas e suaves, de modo que se pode interpolar facilmente;
- b) as reduções devem corresponder a um modelo com significado geofísico, de modo que as anomalias resultantes possam também ser utilizadas para fins de interpolações geológicas e geofísicas;
- c) o efeito indireto não deve ser indiscriminadamente grande.

De acordo com o mesmo autor, as anomalias de Bouguer possuem propriedades satisfatórias para interpolação. As interpolações são grandes, mas são suaves, e são geofisicamente expressivas. Porém, a redução de Bouguer deve ser excluída pelo fato de que o efeito indireto é excessivamente grande.

Ao analisar a redução de Rudzki, vê-se que esta redução não possui efeito indireto sobre o geóide, porém muda o potencial fora da Terra. As anomalias de Rudzki não possuem significado geofísico.

As reduções que envolvem condensação de massas são simples de calcular, pois possuem efeito indireto desprezível. As anomalias de ar-livre são pequenas, porém dependentes da topografia, tornam assim sua interpolação muito imprecisa. As anomalias isostáticas cumprem as três restrições indicadas. Estas anomalias são pequenas, suaves e independentes da topografia, de modo que são ideais pra a interpolação e extrapolação e também são bem representativas. O efeito indireto das anomalias isostáticas é moderado (HEISKANEN & MORITZ, 1985, p. 151-152).

A partir da análise feita acima, é possível concluir que as anomalias de ar-livre e as anomalias isostáticas são as mais convenientes para os cálculos. As duas anomalias oferecem vantagem e desvantagens. As anomalias de ar-livre são fáceis de calcular e a desvantagem é que são difíceis de interpolar. Ocorre o contrário com as anomalias isostáticas.

De acordo com o mesmo autor, o trabalho para obter as reduções isostáticas não é excessivamente pesado. Porém, os dados gravimétricos são escassos. Estes dados devem ser processados que modo que forneçam a maior quantidade possível de informações e que sejam bem representativos.

A primeira aplicação em escala mundial da fórmula de Stokes, de acordo com (GEMAEL, 1999, p. 151), foi efetuada em 1934 pelo finlandês Hirvonen. Em 1948, seguiram-se as investigações de outro finlandês, conhecido como Tanni. As investigações de Tanni estavam baseadas em uma grande quantidade de medidas gravimétricas. Em 1952, Zongolovicii calculou o geóide, introduzindo, nas regiões gravimétricas desconhecidas, anomalias teóricas. O geóide calculado por Zongolovicii leva o seu nome. Cita-se o trabalho de outro finlandês, Heiskanen, que se valeu de observações e medições gravimétricas em todas as partes do mundo. Pode-se também lembrar sobre a existência de muitos outros trabalhos, cuja direção está voltada para a aplicação da integral de Stokes.

Dentre os trabalhos realizados na determinação do geóide para a América do Sul pode-se citar (BLITZKOW & SÁ, 1982), (BLITZKOW, 1996), (FONTE, et al. 1997), (FISCHER, 1969) e (SÁ, 1993).

### 5.3.1 Cálculo das Ondulações do Geóide pelo método dos zonais

De acordo com (GEMAEL, 1999, p. 151), algumas considerações devem ser aplicadas. Considera-se a superfície terrestre dividida em zonas esféricas que admitam como pólo e estação gravimétrica P na qual se quer calcular a ondulação geoidal N. Denomina-se por  $\Delta N$  a cota de ondulação nessa estação. O parametro  $\Delta N$  é resultante da influência de uma zona esférica delimitada pelas distâncias polares  $\Psi_1$  e  $\Psi_2$ .

$\Delta N$  é dada pela expressão:

$$\Delta N = \frac{R}{G} \Delta g \int_{\Psi_1}^{\Psi_2} F(\Psi) d\Psi \quad (5.25)$$

Resolve-se a integral:

$$\int_{\Psi_1}^{\Psi_2} F(\Psi) d\Psi = \Phi(\Psi_2) - \Phi(\Psi_1). \quad (5.26)$$

Portanto,

$$\Delta N = \frac{R}{G} \Delta g [\Phi(\Psi_2) - \Phi(\Psi_1)]. \quad (5.27)$$

A função  $\Phi(\Psi)$  foi tabelada por Lambert e Darling, desde  $\Psi = 0$  até  $\Psi = 180^\circ$ , e é representada por:

$$\begin{aligned} \Phi(\Psi) = \int_0^\Psi F(\Psi) d\Psi = \frac{1}{2} \left[ 1 + 4 \operatorname{sen} \frac{\Psi}{2} - \cos \Psi - 6 \operatorname{sen}^2 \frac{\Psi}{2} - \frac{7}{4} (\operatorname{sen}^2 \Psi) + \right. \\ \left. - \frac{3}{2} \operatorname{sen}^2 \Psi \log_e \left( \operatorname{sen} \frac{\Psi}{2} + \operatorname{sen}^2 \frac{\Psi}{2} \right) \right] \quad (5.28) \end{aligned}$$

A contribuição em P das n zonas é dada

$$N = \frac{R}{G} \sum_{i=1}^n \Delta g_i [\Phi(\Psi_{i+1}) - \Phi(\Psi_i)], \quad (5.29)$$

onde  $\Delta g_i$  representa a anomalia média de uma zona.

O método das zonas, apesar de oferecer a vantagem de estar a função  $\Phi(\Psi)$  tabelada, oferece um inconveniente representado pelo fato de que, as anomalias médias representativas de cada zona são peculiares a cada estação na qual se quer calcular a ondulação geoidal N.

### 5.3.2. Cálculo da ondulação do geóide pelo método dos quadrados

O procedimento adotado no método dos quadrados, de acordo com (GEMAEL, 1999, p. 153), busca contornar o inconveniente do método das zonas. O método dos quadrados, no qual a superfície da Terra é dividida por paralelos e meridianos em quadrados. Quando se faz  $S(\Psi) = 2f(\Psi)$ , a ondulação do geóide pode ser escrita da seguinte forma:

$$N = \frac{R}{2\pi G} \int_{\sigma} \Delta g f(\Psi) d\sigma. \quad (5.30)$$

Substituindo a integral por uma soma infinita de termos, temos que

$$N = \frac{R}{2\pi G} \sum_{i=1}^n f_i(\Psi) \Delta g_i q_i, \quad (5.31)$$

em que  $\Delta g_i$  representa a anomalia média do quadrado,  $\Psi$  a distância angular do ponto no qual se quer calcular  $N$  ao centro do quadrado,  $q_i$  a área desse quadrado e  $n$  o número de quadrados.

Fazendo a seguinte substituição:

$$\frac{Rq_i f_i(\Psi)}{2\pi G} = C_i, \quad (5.32)$$

$C_i$  é chamado coeficiente de Stokes.

O coeficiente de Stokes independe do campo da gravidade e pode ser calculado a priori para cada ponto em estudo.

Adotando valores médios para  $R$  e  $G$ , obtém-se

$$C_i = 1035 q_i f_i(\Psi) \quad (5.33)$$

A área do quadrado pode ser calculada usando a seguinte expressão:

$$q = 2\Delta\lambda \text{sen}\Delta\varphi \cos \varphi_m, \quad (5.34)$$

com  $\Delta\varphi$  e  $\Delta\lambda$  definindo a amplitude do quadrado de latitude média  $\varphi_m$ .

A função  $f(\Psi)$  é obtida, calculando-se a distância esférica do ponto em estudo ao centro de cada quadrado. Essa distância pode ser obtida graficamente ou analiticamente.

### 5.3.3 Produto final dos cálculos da ondulação geoidal

A superfície da Terra é dividida por paralelos e meridianos; assim uma representação do mapa-mundi adota a divisão em quadrados. Neste mapa-mundi são inscritos os coeficientes de Stokes previamente calculados. Tendo como base os dados gravimétricos observados e medidos, avalia-se a anomalia média da gravidade de cada quadrado. O produto proporciona a contribuição de cada quadrado e a somatória destas conduz à ondulação do geóide no ponto considerado. É possível fazer atualizações permanentes.

### 5.3.4 Truncamento da Integral de Stokes

Os fatores que caracterizam o campo gravitacional da Terra são fundamentais e essenciais na determinação do geóide através da gravimetria (GEMAEL, 1999, p. 156). As medições gravimétricas conduzem ao conhecimento detalhado do campo da gravidade. Mas o campo da gravidade ainda não é bem conhecido, pois existem grandes lacunas nos oceanos e em certas áreas continentais. Mesmo em regiões onde os dados gravimétricos são abundantes, depara-se com o inconveniente da irregularidade na distribuição das estações. Portanto, nas aplicações da integral de Stokes, limita-se a integração a uma calota  $\sigma_0$  de raio esférico  $\Psi_0$ . Os valores da ondulação geoidal  $N$  são distorcidos na parte da região que foi negligenciada. Representa-se por  $dN$  a influencia das zonas negligenciadas.

$$N = \frac{R}{4\pi G} \int_0^{\Psi_0} \int_0^{2\pi} \Delta g S(\Psi) \text{sen}\Psi \, d\Psi \, dA + dN \quad (5.35)$$

com

$$dN = \frac{R}{4\pi G} \int_{\Psi_0}^{\pi} \int_0^{2\pi} \Delta g S(\Psi) \text{sen}\Psi \, d\Psi \, dA. \quad (5.36)$$

Este erro  $dN$  pode ser estimado. Molodenskii (1936) deduziu a seguinte fórmula para estimativa desse erro de truncamento da integral

$$dN = \frac{R}{2G} \sum_{n=k+1}^{\infty} Q_n \Delta g_n, \quad (5.37)$$

onde  $\Delta g_n$  é harmônico de superfície de grau  $n$  no desenvolvimento da anomalia da gravidade no ponto de cálculo e  $k$  o grau de truncamento de  $S(\Psi)$ :

$$\Delta g = \sum \Delta g_n \quad (5.38)$$

$$Q_n = \int S(\Psi) P_n(\Psi) \sin \Psi \, d\Psi, \quad (5.39)$$

onde  $Q_n$  são conhecidos como coeficientes de Molodenski e só dependem de  $\Psi_0$ , raio esférico da calota  $\sigma_0$  e podem ser calculados por vários processos.

O erro médio quadrático de um valor médio de  $dN$  é estimado por:

$$\overline{dN}^2 = E\{\Delta g^2\} = \frac{R^2}{4G^2} \sum_{n=2}^{\infty} Q_n^2 c_n, \quad (5.40)$$

onde  $c_n$  é a variância de grau da anomalia, e é representada pela seguinte expressão:

$$c_n = E\{\Delta g^2\} = \sum_{m=0}^n \left( \bar{a}_{nm}^2 + \bar{b}_{nm}^2 \right), \quad (5.41)$$

$\bar{a}$  e  $\bar{b}$  representam os coeficientes plenamente normalizados no desenvolvimento de  $\Delta g$  em harmônicos esféricos.

#### 5.4 Requisitos dos Dados Gravimétricos

Teoricamente as anomalias de gravidade devem ser conhecidas em todos os pontos da superfície terrestre, porém, na prática, basta uma rede gravimétrica densa ao redor dos pontos de cálculo e uma distribuição uniforme de medidas da gravidade. Outro requisito é que as anomalias da gravidade devem ser levadas ao mesmo sistema (HEISKANEN & MORITZ, 1985, p.152).

As medidas absolutas da gravidade por meio de pêndulos são muito laboriosas. Prefere-se, então, as medidas relativas da gravidade que podem ser encontradas com precisão de  $\pm 1\mu\text{Gal}$  ou mais, e com gravímetros. As medidas relativas de gravidade devem ser tomadas de tal forma que se refiram a um sistema gravimétrico mundial uniforme.



Atualmente são utilizados quatro métodos de determinação do desvio da vertical. O método astro-geodésico é o mais conhecido. Neste método as componentes do desvio da vertical são obtidas através de coordenadas astronômicas e geodésicas em um mesmo ponto. Inicialmente restrito a áreas continentais, mais tarde permitiu-se a revitalização do método com o desenvolvimento da tecnologia em sensores de imagem (CCD). Usando esta tecnologia de visualização de estrelas e um receptor GPS é possível determinar o desvio da vertical, em tempo real, através de uma câmera digital zenital. Este método é capaz de trazer resultados absolutos (HIRT, 2004 apud ZANETTI, 2006, p. 21).

Outro método para a determinação do desvio da vertical é o método gravimétrico, onde o desvio da vertical é obtido em função das anomalias da gravidade, através da fórmula de Vening-Meinesz. Ao contrário do desvio astro-geodésico, o desvio gravimétrico independe das coordenadas do *datum*. O método gravimétrico leva ao desvio da vertical através de medições da gravidade valendo-se das fórmulas de Vening-Meinesz.

Um terceiro método de determinação do desvio da vertical é o método astro-gravimétrico que conjuga determinações astrogeodésicas do desvio da vertical com as correspondentes determinações gravimétricas. O método astro-geodésico determina o desvio da vertical necessário para obter N, comparando coordenadas geodésicas com astronômicas. Este método acha-se restrito às áreas continentais (GEMAEL, 1999, p. 177).

Um quarto método para a obtenção do desvio da vertical é através da utilização de Sistemas de Posicionamento Global e Sistemas de Posicionamento Local (GPS e LPS) em se aplica o Problema de Proustes simples para o cálculo do desvio da vertical (GRAFAREND & AWANGE, 2000).

### **6.1 Integral de Vening-Meinesz**

O método gravimétrico proporciona o desvio da vertical através da integral de Vening-Meinesz, derivadas da integral de Stokes (GEMAEL, 1999, p. 149).

O desvio da vertical em um ponto mede a inclinação do geóide em relação ao elipsóide de referência. Consideram-se dois pontos P e P' cujas ondulações difiram de  $\Delta N = N' - N$ ; se a distância s, que separa os dois pontos for convenientemente

pequena, pode-se definir um “desvio médio” entre ambos:  $\frac{\Delta N}{s}$ ; ou, quando P' tende para P, um “desvio local”:  $\frac{dN}{ds}$ , de acordo com a Figura (6.2). Nota-se que nesta figura n' é a projeção da normal de P sobre o plano vertical de P que contém P' e de azimute A. O ângulo  $\theta$  representa a coordenada do desvio sobre o mencionado plano.

Fazendo o azimute  $A = 0^\circ$ , tem-se (figura 6.2):

$$\theta = \xi = -\frac{dN}{dx}, \quad (6.1)$$

onde dx está sendo contado positivamente para o norte; o sinal negativo é convencional, visando apenas a coerência com a definição astrogeodésica do desvio.

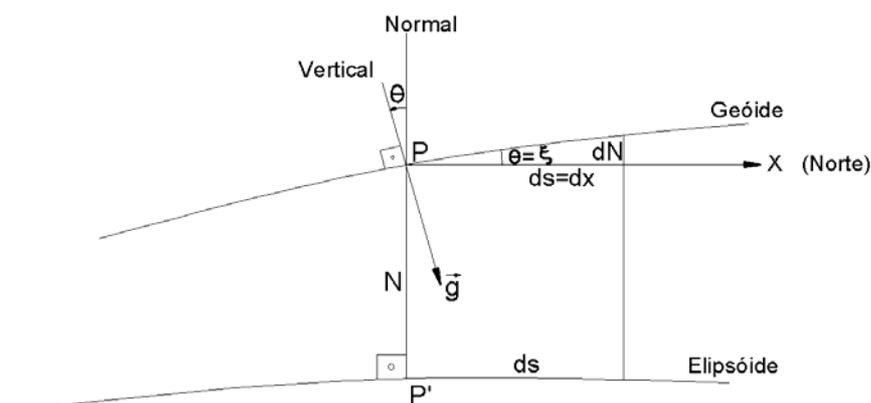


Figura 6.2 – Componente norte-sul ou componente meridiana

Introduzindo a expressão que representa a fórmula de Stokes:

$$N = \frac{1}{4\pi R G} \int_S S(\Psi) \Delta g_s dS, \quad (6.2)$$

e substituindo na (6.1), tem-se:

$$\xi = -\frac{dN}{dx} = -\frac{1}{4\pi R G} \int_S \Delta g_s \frac{dS(\Psi)}{dx} dS. \quad (6.3)$$

Da figura (6.2):

$$dx = R d\Psi \sec A, \quad (6.4)$$

escreve-se:

$$\xi = -\frac{dN}{dx} = -\frac{1}{4\pi R^2 G} \int_S \Delta g_s \frac{dS(\Psi)}{d\Psi} \cos A dS. \quad (6.5)$$

Procede-se da mesma forma com  $A = 90^\circ$ , figura (6.3):

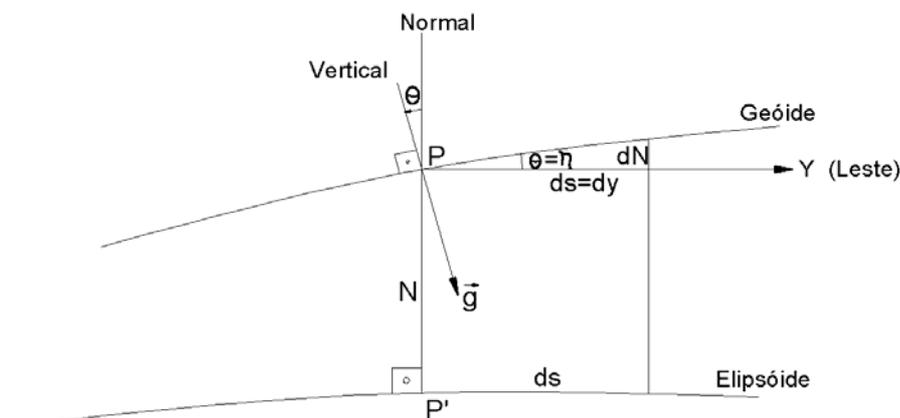


Figura 6.3 – Componente leste-oeste ou componente 1º vertical

$$\eta = -\frac{dN}{dy} = -\frac{1}{4\pi R^2 G} \int_S \Delta g_s \frac{dS(\Psi)}{d\Psi} \operatorname{sen} A \, dS. \quad (6.6)$$

Exprimem-se as componentes do desvio da vertical  $\xi$  e  $\eta$  em segundos de arco (introduzindo o fator  $\rho = 206.264,8$ ), fazendo

$$S(\Psi) = 2f(\Psi), \quad (6.7)$$

$$S'(\Psi) = \frac{dS(\Psi)}{d(\Psi)} = 2 \frac{df(\Psi)}{d\Psi} = 2f'(\Psi), \quad (6.8)$$

e lembrando a expressão:

$$dS = R^2 \operatorname{sen} \Psi \, d\Psi \, dA, \quad (6.9)$$

obtém-se:

$$\xi'' = -\frac{\rho''}{2\pi G} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \Delta g f'(\Psi) \operatorname{sen} \Psi \, d\Psi \, \cos A \, dA, \quad (6.10)$$

e

$$\eta'' = -\frac{\rho''}{2\pi G} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \Delta g f'(\Psi) \operatorname{sen} \Psi \, d\Psi \, \operatorname{sen} A \, dA. \quad (6.11)$$

O sinal (") nas expressões (6.10) e (6.11) significam que as medidas estão em segundos.

As fórmulas são conhecidas com o nome de fórmulas de Vening-Meinesz. Estas expressões também podem ser escritas em função de coordenadas geográficas, utilizando a expressão:

$$dS = R^2 \cos \varphi' \, d\varphi' \, d\lambda', \quad (6.12)$$

Sendo  $(\varphi', \lambda')$  as coordenadas da estação de anomalia  $\Delta g$ :

$$\xi'' = -\frac{\rho''}{2\pi G} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \Delta g(\varphi', \lambda') f'(\Psi) \cos A \cos \varphi' d\varphi' d\lambda', \quad (6.13)$$

$$\eta'' = -\frac{\rho''}{2\pi G} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \Delta g(\varphi', \lambda') f'(\Psi) \sin A \cos \varphi' d\varphi' d\lambda'. \quad (6.14)$$

As integrais de Vening-Meinesz, ao contrário da fórmula clássica de Stokes, não impõem restrições ao elipsóide de referência.

## 6.2 Aplicação

As determinações gravimétricas do desvio da vertical obtidas nos últimos anos não se valeram do campo da gravidade estendido a total superfície terrestre. No século passado, o problema da determinação da gravidade nos oceanos era encarado como praticamente insolúvel. Somente após as expedições de Vening-Meinesz é que a fórmula da Stokes adquiriu funcionalidade (GEMAEL, 1999, p. 158).

### 6.2.1 Contribuição da Região Vizinha

Na fórmula de Stokes, têm-se as funções:

$$S(\Psi) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n+1}{n-1} P_n(\Psi) \quad (6.15)$$

e

$$F(\Psi) = \frac{1}{2} \sin \Psi S(\Psi). \quad (6.16)$$

A derivada de (6.16):

$$f'(\Psi) = \frac{1}{2} \left[ -\frac{\cos \frac{\Psi}{2}}{2 \sin^2 \frac{\Psi}{2}} - 3 \cos \frac{\Psi}{2} + 5 \sin \Psi + 3 \sin \Psi \log \sin \frac{\Psi}{2} \right]$$

$$\left. + \left[ \sin^2 \frac{\Psi}{2} - \cotg \frac{\Psi}{2} \cos \Psi \frac{3 \left( 1 + 2 \sin \frac{\Psi}{2} \right)}{2 \left( 1 + \sin \frac{\Psi}{2} \right)} \right] \right] \quad (6.17)$$

A expressão (6.17) é utilizada nas integrais de Vening-Meinesz.

Na primeira aproximação, para valores pequenos de  $\Psi$ , resulta:

$$f'(\Psi) \approx \frac{-1}{\Psi^2}; \quad (6.18)$$

$$f'(\Psi) \sin \Psi \approx \frac{-1}{\Psi}. \quad (6.19)$$

As expressões (6.18) e (6.19) tendem para o infinito quando  $\Psi$  tende para zero; assim, as integrais de Vening-Meinesz não podem ser aplicadas nas regiões vizinhas da estação, e devem ser substituídas por

$$\Delta \xi'' = \frac{\rho''}{2G} \left( r_0 + \frac{3r_0^2}{4R} \right) \frac{\partial(\Delta g)}{\partial y}, \quad (6.20)$$

$$\Delta \eta'' = \frac{\rho''}{2G} \left( r_0 + \frac{3r_0^2}{4R} \right) \frac{\partial(\Delta g)}{\partial x}, \quad (6.21)$$

sendo,  $r_0$  raio de um círculo;  $\frac{\partial(\Delta g)}{\partial y}$  e  $\frac{\partial(\Delta g)}{\partial x}$  os gradientes horizontais da anomalia

da gravidade dentro do círculo de raio  $r_0$ . O gradiente  $\frac{\partial(\Delta g)}{\partial y}$  está na direção leste-

oeste e  $\frac{\partial(\Delta g)}{\partial x}$  está na direção norte-sul.

Tem-se então:

$$\frac{\partial(\Delta g)}{\partial x} = \frac{\Delta_{gs} - \Delta_{gn}}{2r_0} \quad (6.22)$$

e

$$\frac{\partial(\Delta g)}{\partial y} = \frac{\Delta_{go} - \Delta_{gL}}{2r_0}. \quad (6.23)$$

Substituindo (6.22) e (6.23) em (6.21) e (6.20), respectivamente; e substituindo o valor de  $G$  por um valor médio (por exemplo: 980 000 mGal) e ainda desprezando o segundo termo do colchete:

$$\Delta \xi'' = \frac{0,1055 r_0 \partial(\Delta g)}{\partial x}, \quad (6.24)$$

$$\Delta\eta'' = \frac{0,1055r_0\partial(\Delta g)}{\partial y}. \quad (6.25)$$

A precisão das expressões (6.24) e (6.25) pressupõe que o gradiente horizontal no interior do círculo de raio  $r_0$  é constante. Em cada caso adota-se uma média ponderada dos gradientes calculados. Observando a figura (6.4), obtém-se para o gradiente horizontal da anomalia da gravidade na direção norte-sul:

$$\frac{\partial(\Delta g)}{\partial x} = \left( \frac{\Delta_{gS} - \Delta_{gN}}{2r_0} p + \frac{\Delta_{gSE} - \Delta_{gNE}}{1,414r_0} p' + \frac{\Delta_{gSO} - \Delta_{gNO}}{1,414r_0} p' \right) \frac{1}{p + p' + p'}. \quad (5.26)$$

Adotando os seguintes pesos  $p = 1$  (gradiente central) e  $p = 0,5$  (gradiente lateral), e substituindo na expressão (6.26), as expressões (6.24) e (6.25) podem ser rescritas da seguinte forma:

$$\Delta\xi'' = 0,02625(\Delta_{gS} - \Delta_{gN}) + 0,01856(\Delta_{gSE} - \Delta_{gNE} + \Delta_{gSO} - \Delta_{gNO}), \quad (6.27)$$

$$\Delta\eta'' = 0,02625(\Delta_{gO} - \Delta_{gE}) + 0,01856(\Delta_{gSO} - \Delta_{gSE} + \Delta_{gNO} - \Delta_{gNE}). \quad (6.28)$$

Portando, uma rede gravimétrica densa em torno da estação e um raio suficientemente pequeno fornecem uma maior precisão para a contribuição da região vizinha (GEMAEL, 1999, p.160).

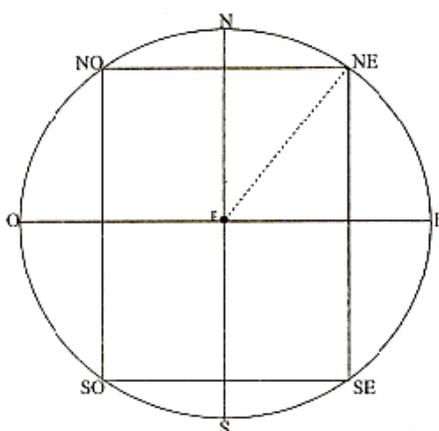


Figura 6.4 - Método dos três gradientes

Fonte: (GEMAEL, 1999, p.160)

### 6.2.2 Contribuição da região próxima

A realização dos cálculos para a contribuição da região próxima deve obedecer um limite de 350 km. A contribuição para o desvio da vertical será calculado através das fórmulas de Vening-Meinesz (GEMAEL, 1999, p. 161).

Relembrando as fórmulas:

$$\xi'' = -\frac{\rho''}{2\pi G} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \Delta g f'(\psi) \operatorname{sen} \psi d\psi \cos A dA \quad (6.29)$$

e

$$\eta'' = -\frac{\rho''}{2\pi G} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \Delta g f'(\psi) \operatorname{sen} \psi d\psi \operatorname{sen} A dA. \quad (6.30)$$

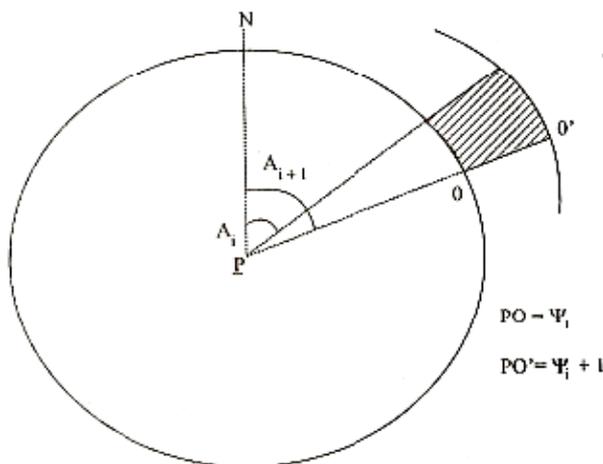


Figura 6.5 – Raios de Azimute  $A_i$  e  $A_{i+1}$ .  
Fonte: (GEMAEL, 1999, p.161)

A figura (6.5) permite a reformulação das integrais de Vening-Meinesz. Considerando a região próxima dividida em compartimentos por meio de círculos concêntricos e radiais que partem desse centro, tem-se:

$$d\xi'' = -\frac{\rho''}{2\pi G} \int_{A_i}^{A_{i+1}} \cos A dA \int_{\Psi_i}^{\Psi_{i+1}} \Delta g f'(\psi) \operatorname{sen} \psi d\psi, \quad (6.31)$$

$$d\eta'' = -\frac{\rho''}{2\pi G} \int_{A_i}^{A_{i+1}} \operatorname{sen} A dA \int_{\Psi_i}^{\Psi_{i+1}} \Delta g f'(\psi) \operatorname{sen} \psi d\psi, \quad (6.32)$$

onde,

$\Delta g$  anomalia média da gravidade do compartimento;

$d\xi''$  e  $d\eta''$  representa a contribuição de um compartimento da zona de amplitude  $(\Psi_{i+1}, \Psi_i)$ , delimitado por raios de azimute  $A_i$  e  $A_{i+1}$ .

O método de Rice considera a componente meridiana  $\xi''$  do desvio da vertical de acordo com a direção radial de azimute  $A$ :

$$\bar{\xi}'' = \frac{\xi''}{\cos A} = -\left(\frac{\rho''}{2\pi G}\right) \int dA \int \Delta g f'(\psi) d\psi. \quad (6.33)$$

Para perceber a contribuição de um compartimento, fixa-se os limites da primeira integral de expressão (6.33), de forma que  $A_{i+1} + A_i = 10^\circ$ . Assim, a primeira parte da expressão:

$$\left(\frac{\rho''}{2\pi G}\right) \int dA = \left(\frac{\rho''}{2\pi G}\right) \left(\frac{10\pi}{180}\right) = 0,00584055. \quad (6.34)$$

Substituindo (6.34) em (6.33), resulta:

$$d\bar{\xi} = 0,00584055 \int_{\psi_1}^{\psi_{i+1}} \Delta g f'(\Psi) \text{sen} \Psi d\Psi. \quad (6.35)$$

Fazendo:

$$\Delta g = 1\text{mGal}; \quad (6.36)$$

$$d\bar{\xi} = 0,001'', \quad (6.37)$$

Obtém-se o seguinte resultado:

$$\Delta f'(\psi) \text{sen} \Psi d\Psi = 0,1712168. \quad (6.38)$$

É possível avaliar a anomalia média de cada compartimento radial do desvio ( $d\bar{\xi}$ ) da vertical. Para isto, Rice (1951) calculou tabelas que fornecem valores em material transparente representando as zonas e os compartimentos. Sobrepondo estes valores em uma carta de isoanômalas na mesma escala, avalia-se  $d\bar{\xi}$ . Multiplicando  $d\bar{\xi}$  por  $\cos(A)$ , obtém-se  $d\xi$ .  $d\xi$  é a contribuição do compartimento à componente meridiana do desvio da vertical. Mas, multiplicando  $d\bar{\xi}$  por  $\text{sen}(A)$ , tem-se a contribuição do compartimento à componente primeiro vertical  $d\eta$ .

O método de Kasanski propõe uma divisão que fornece as contribuições  $d\xi = 0,001''$  por miligal da anomalia média. Ao contrário do método de Rice, Rasanski adotou linhas radiais que não são igualmente espaçadas.

As linhas radiais no método de Kasanski respeitam à condição:

$$\text{sen}(A_{i+1}) - \text{sen}(A_i) = \frac{1}{8}. \quad (6.39)$$

Os raios dos círculos seguem a definição de uma progressão geométrica de razão  $\frac{127}{100}$ . Para obter um outro raio em função do primeiro ( $r_1$ ), adota-se a seguinte expressão:

$$r_i = r_1 \left( \frac{127}{100} \right)^{i-1} . \quad (6.40)$$

O método de Kasanski possui uma desvantagem em relação ao método de Rice. Aquele exige a avaliação da anomalia média dos compartimentos duas vezes, pois para o cálculo da componente primeiro vertical  $\eta$  o gabarito deve ser invertido (GEMAEL, 1999, p.163).

### 6.2.3 Contribuição da região distante

O cálculo do desvio da vertical pelo método gravimétrico na maioria das vezes, não leva em consideração as regiões distantes (GEMAEL, 1999, p.164).

O método gravimétrico leva ao desvio da vertical através de medições da gravidade e utiliza as integrais de Vening-Meinesz. As medições da gravidade devem compreender a total superfície terrestre, para que o erro seja ainda menor e forneça resultados de confiança (GEMAEL, 1999, p.177).

Utilizar-se-á aqui o método astrogravimétrico, que representa uma poderosa ferramenta para a interpolação quando se aplica as fórmulas de Vening-Meinesz. O método astrogravimétrico representa uma combinação dos métodos astrogeodésico e gravimétrico.

Para o cálculo do desvio, levando em consideração as regiões distantes, consideremos uma região  $s$  gravimetricamente conhecida e no seu interior delimita-se uma sub-região  $s_0$ , conforme figura (6.6).

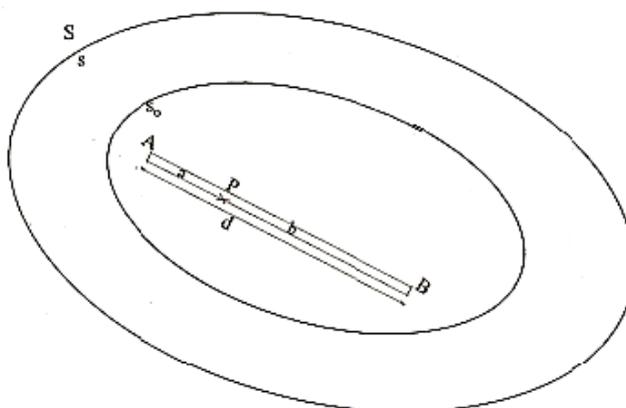


Figura 6.6 – Regiões  $S$ ,  $s$ , sub-região  $s_0$ , estações  $A$  e  $B$   
Fonte: (GEMAEL, 1999, p.178)

Definido-se por S a região exterior a s, tem-se que em S o campo da gravidade é desconhecido, impossibilitando perceber a influência sobre as estações A e B situadas na sub-região  $s_0$ . Admitindo-se que a influência da região S seja semelhante sobre ambas; ou admitir que tal influência varie linearmente no interior da sub-região  $s_0$ .

Considera-se então, que a influência da região distante S é semelhante a influência total (s + S), menos a influência da região s, determináveis por via astrogeodésica e gravimétrica, respectivamente (GEMAEL, 1999, p.178).

A fórmula que proporciona o desvio interpolado ou astrogravimétrico no ponto P:

$$\dot{i}_p = i_p(s) + \frac{[i'_B - i_B(s)]a}{d} + \frac{[i'_A - i_A(s)]b}{d}. \quad (6.41)$$

A expressão (6.41) está em função dos desvios gravimétricos nos pontos P, A e B, considerando apenas a influência da região próxima s e em função dos desvios astrogeodésicos em A e B.

Generalizando, para um ponto qualquer P(x,y) localizado na sub-região  $s_0$ , tem-se:

$$i_p(S) = i'_p - i_p(s) = Ax + By + Cz. \quad (6.42)$$

Ocorrendo mais de três pontos ( $n > 3$ ), na sub-região  $s_0$ , os parâmetros A, B e C podem ser estimados pelo método dos mínimos quadrados que proporciona as equações:

$$\sum x_i^2 A + \sum x_i y_i B + \sum x_i C + \sum x_i l_i = 0, \quad (6.43)$$

$$\sum y_i B + \sum y_i C + \sum y_i l_i = 0, \quad (6.44)$$

$$nC + \sum l_i = 0, \quad (6.45)$$

onde

$$l_i = i'_i - i_i(s); \quad \text{com } i = (1, 2, \dots, n).$$

Obtém-se então:

$$\dot{i}_p = i_p(s) + Ax + By + C, \quad (6.46)$$

sendo os parâmetros A, B e C são considerados constantes na sub-região s (GEMAEL, 1999, p.179).

## 7 CONCLUSÃO E RECOMENDAÇÕES

### 7.1 Conclusão

O desenvolvimento do trabalho oferece um embasamento teórico, pois a literatura Geodésica não dispõe de trabalhos de fácil compreensão para o ensino de Geodésia Física nesses cursos.

O trabalho contribui metodologicamente no ensino da Geodésia Física dos cursos de graduação, pois promove a apresentação dos conceitos de forma sistematizada e organizada.

O estudo detalhado dos conceitos e propriedades que envolvem a determinação do geóide proporcionam o entendimento progressivo do assunto.

Os métodos para a determinação das ondulações do geóide possuem vantagens e desvantagens. Uma possibilidade a ser considerada é que estes métodos devem ser encarados como complementares. Portanto, é importante verificar os princípios de cada um e verificar as melhores condições de aplicabilidade. Além disso, é coerente estudar as possíveis combinações desses métodos.

Os conceitos relacionados à teoria do potencial representam base fundamental para o entendimento e determinação das ondulações geoidais.

Os conceitos relacionados ao campo gravitacional da Terra real, o campo gravitacional da Terra normal, potencial perturbador, anomalia da gravidade e reduções gravimétricas são fundamentais na elaboração da estrutura que define os passos para a determinação das ondulações geoidais.

As ondulações geoidais são obtidas por meio da aplicação da fórmula de Stokes, definida em função das anomalias da gravidade para o modelo esférico da Terra. No sentido de um posicionamento planimétrico, a superfície do geóide não é útil, pois o geóide é uma superfície que não está definida matematicamente. No entanto, sendo uma superfície de nível é ideal como referencial altimétrico e é usada para a representação da topografia terrestre e do mar.

Vening-Meinesz propôs fórmulas similares para o cálculo das componentes do desvio da vertical, a partir das anomalias da gravidade. O cálculo do desvio da

vertical não é feito diretamente. Utilizam-se suas componentes  $\xi$  e  $\eta$ , chamadas respectivamente de componente meridiana e componente 1º vertical. O método gravimétrico proporciona o desvio da vertical através da integral de Vening-Meinesz, derivadas da integral de Stokes.

## 7.2 Recomendações

Recomenda-se o estudo detalhado da superfície do co-geóide, que neste trabalho somente foi citado superficialmente.

Recomenda-se o estudo do erro de truncamento. A diminuição do erro de truncamento pode ser conseguida através da redução da magnitude ou o aumento da taxa de convergência dos coeficientes de truncamento. Os métodos para a redução do erro de truncamento nos cálculos do geóide, consistem na modificação do núcleo da integral de Stokes e podem ser definidos como: determinísticos, estatísticos e estocásticos. Este estudo pode ser aprimorado com o auxílio das seguintes obras: Wenzel (1982), Sjöberg (1991), VANÍČEK e Sjöberg (1991).

Recomenda-se a efetiva realização dos cálculos relacionados à aplicação prática da determinação do geóide pela integral de Stokes.

Recomenda-se a efetiva realização dos cálculos relacionados à aplicação prática das ondulações do geóide através das fórmulas de Vening-Meinesz.

## REFERÊNCIAS

ANDERSON, A. J.; CAZENAVE, A. **Space geodesy and geodynamics**. Academic press, London, 1986. 490 p.

ARANA, J. M. **Determinação da ondulação do geóide por GPS/nivelamento e modelos geopotenciais**. Presidente Prudente. Faculdade de Ciências e Tecnologia. Departamento de Cartografia. São Paulo, 1999, 53 p.

ARANA, J. M. **O uso do GPS nas determinações de altitudes geométricas**. IN: Geodésia online. São Paulo: UNESP, 2005. Disponível em: <<http://geodesia.ufsc.br/Geodesia-online/arquivo/2005/02.1/Arana2005.htm>>. Acesso em: 27 fev. 2007.

BLITZKOW, D. **O problema de valor de contorno da Geodésia: Resultados práticos para a América do Sul**. 1996. 81f. Tese (Doutorado em Engenharia de Transportes) – Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, São Paulo, 1996.

BLITZKOW, D.; SÁ, N. C. **Determinação das alturas geoidais a partir de dados heterogêneos**. IAG – USP, relatórios teóricos. 1982.

BOMFORD, G. **Geodesy**. 3<sup>ta</sup>ed. Oxford: Clarendon Press, 1971, 731 p.

CALVERT, J. **Spherical Harmonics**. 2001. Disponível em: <<http://www.du.edu/~jcalvert/math/harmonic/harmonic.htm>>. Acesso em: 20 jan. 2007.

CATALÃO, J. **Geodésia física**. Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa. Lisboa, 2000, 87p.

CATALÃO, J. **Modelação do Campo Gravítico na Região da Atlântico Oriental (Açores- Portugal Continental)**. 1999. 188f. Tese (Doutorado em Engenharia Geográfica) – Faculdade de Ciências de Lisboa, Portugal, 1999.

DALAZOANA, R. **Estudos dirigidos à análise temporal do datum vertical brasileiro**. 2006. 204f. Tese (Doutorado em Ciências Geodésicas) – Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2006.

DIREEN, N. Application of terrain Corrections in Australia. 2001. Disponível em: <[http://www.ga.gov.au/rural/projects/terr\\_corrts.jsp](http://www.ga.gov.au/rural/projects/terr_corrts.jsp)>. Acesso em: 12 jan. 2007.

DREWES, H. **Sistemas de referência – Cálculo del geóide/cuasigeoide**. 2003. Notas de aula.

FISCHER, L. The geoid in south America referred to various reference systems. **Revista cartografica IPGH**, año XVIII - n. 18, p. 1-39. 1969.

FONTE, G.; PACINO, M. C.; BLITZKOW, D.; TOCHO, C.; GUARACINO, L. **Um modelo de geóide gravimétrico para la republica Argentina**. Universidade Nacional de San Juan. San Juan. 1997.

FORSBERG, R.; Tscherning, C. Topographic effects in gravity field modeling for BVP. In: SANSO, F.; RUMMEL, R. (ed.). **Geodetic Boundary Value Problems in view of the Centimeter Geoid**. Berlin: Springer, 1997, (Lecture Notes in Earth Sciences, v. 65). p. 241-272.

FREITAS, S. R. C. et al. **Concepção dos levantamentos gravimétricos para o estabelecimento de rede gravimétrica de alta precisão no estado do Paraná**. Curitiba, v. 2, p. 41-56. 2002.

GEMAEL, C. **Geodésia física**. Curitiba: UFPR, 1999. 302 p.

GEMAEL, C. **Introdução à Geodésia Geométrica**. 2. parte. Curitiba. Curso de Pós-graduação em Ciências Geodésicas. Universidade Federal do Paraná, Curitiba. 1987.

GRAFAREND, E. W.; AWANGE, J. L. Determination of vertical deflections by GPS/LPS measurements. **Zeitschrift für Vermessungswesen**, v. 125, n. 8, p. 279-288, 2000.

GRAFAREND, E. W. What is a geoid? In: VANÍČEK, P.; CHRISTOU, N. T. (ed). **Geoid and its geophysical interpretations**. Boca Raton: CRC Press, 1994, p.3-32, 1994.

GROTEN, E. Model refinements in the solution of the boundary value problem of physical geodesy. In: **Local gravity field approximation**. Summer School. 1984. ed. K. P. Schwarz. Calgary.

HECK, B. The non-linear geodetic boundary value problem in quadratic approximation. **Manuscripta geodaetica**. v. 13, p. 337-348. 1988.

HEES, G. S. **Precision of the geoid, computed from terrestrial gravity measurements**. Manusc. Geoid. 1986. p. 86-98.

HEISKANEN, W. A.; MORITZ, H. **Geodesia física**. Madrid: Instituto Geográfico nacional, 1985.

HOFMANN-WELLENHOF, B.; MORITZ, H. **Physical geodesy**. Wien: Springer, 2005, 403 p.

Intergovernmental Oceanographic Commission. **Manual on sea level measurement and interpretation**. Volume 1 – Basic Procedures. IOC – Intergovernmental Oceanographic Commission. Manual and Guides, n. 14, UNESCO, 1985. 75p.

JEFFREY, A. **Advanced engineering mathematics**. [S.1.]: Harcourt/Academic Press, 2002.

KUHN, M. **Geoidbestimmung unter Verwendung verschiedener Dichtehypothesen**. Deutsche Geodätische Kommission bei der Bayerischen Akademie der Wissenschaften, Reihe C, Heft 520, 2000.

LOBIANCO, M. C. B. **Determinação das alturas do geóide no Brasil**. 2005. 165 f. Tese (Doutorado em Engenharia) – Escola Politécnica – Universidade de São Paulo, São Paulo, 2005.

MARTINEC, Z.; VANÍČEK, P. Formulation of the boundary-value problem for geoid determination with a higher-degree reference field. **Geophysical Journal International**, v. 126, p. 219-228, 1996.

MONICO, J. F. G. **Posicionamento pelo NAVSTAR-GPS: Descrição, fundamentos e aplicações**. São Paulo: UNESP, 2000.

MORITTIN, P. A. **Ondas e Ondaletas: da análise de Fourier à análise de ondaletas**. São Paulo: EDUSP, 1999.

MORITZ, H. Least-squares collocation. In: **Advances in Geodesy: Selected papers from Reviews of Geophysics and Space Physics**, v. 16, n. 3, p. 27-36, 1984.

MORITZ, H. Geodetic Reference System 1980. *Bulletin Géodésique*, v. 58, n. 3, p.338-398, 1994.

PUGH, D. T. **Tides, surges and mean sea level**. New York: J. Wiley, 1987, 472p.

ROLAND, M.; DENKER, H. Stokes Integration Versus Wavelet techniques for regional Geoid Modelling. **International Union of Geophysical and Geodesy General Assembly**, 2003.

SÁ, N. C. **Um geóide para aplicação do GPS em geociências**. Congresso Internacional da SGBF. 1993.

SACERDOTE, F.; SANSONO, F. Overdetermined boundary value problems in physical geodesy. **Manuscripta Geodaetica**. v. 10, p. 195-207. 1985.

SANTOS, N. P.; ESCOBAR, I. P. **Determinação gravimétrica do geóide na região do município do Rio de Janeiro**. In: Scientific Electronic Library Online. São Paulo. 2000. Disponível em <<http://www.scielo.br>>. Acesso em: 02 mai. 2005.

SANTOS, N. P.; ESCOBAR, I. P. Determinação gravimétrica do geóide na região do município do Rio de Janeiro. **Brazilian Journal of Geophysics**, v. 18, n. 1, p. 49-62, 2000.

SIDERIS, M. **The gravity field in surveying and Geodesy**. Calgary, CA, 1993.

SILVA, M. A. **Obtenção de um modelo geoidal para o Estado de São Paulo**. 2002. 90 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia) – Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, São Paulo, 2002.

SJÖBERG, L. E. Refined least squares modification of Stokes's formula. **Manuscripta Geodaetica**, v.16, p.36-375. 1991.

SJÖBERG, L. E. Techniques for Geoid Determination. In: VANÍČEK, P.; CHRISTOU, N. T. (ed). **Geoid and its geophysical interpretations**. Boca Raton: CRC Press, 1994, p.33-56, 1994.

STOKES, G. On the variation of gravity on the surface of the Earth. **Transactions of the Cambridge Philosophical Society**, v. 8, p. 672-695, 1849.

TORGE, W. **Geodesy**. 3rd ed. Berlin: W. de Gruyter, 2001, 416 p.

TORGE, W. **Gravimetry**. Berlin: W. de Gruyter, 1989.

VANÍČEK, P.; SJÖBERG, L. Reformulation of Stokes's theory for higher than second-degree reference field and modification of integration kernels. **Journal of Geophysical Research**, v. 96, n.B4, p. 6529-6539. 10 abr. 1991.

VANÍČEK, P.; KRAKIWSKY, E. **Geodesy: the concepts**. 2nd. ed. Amsterdam: North Holland, 1982.

WENZEKL, H. G. **Geoid computation by least squares spectral combination using integral kernels**. Tokyo. Japan, p. 438-456, 1982.

ZAKATOV, P. S. **Curso de Geodésia Superior**. Madrid: Rubiños-1860, 635 p. 1997.

ZANETTI, M. A. Z. **Métodos Geodésicos**. 2006. 27f, Notas de aula, Setor de Ciências da Terra Universidade Federal do Paraná. Curitiba, 2006.

## DEMAIS OBRAS CONSULTADAS

ARDALAN, A. A.; GRAFAREND, E. W. High-resolution regional geoid computation without applying Stokes' formula: a case study of the Iranian geoid. **Journal of Geodesy**, Berlin, v. 78, n. 1-2, p.138–56, 2004.

HWANG, C.; HSIAO, Y. –S. Orthometric corrections from leveling, gravity, density and elevation data: A case study in Taiwan. **Journal of Geodesy**, Berlin, v. 77, n. 5-6, p. 279–291, 2003.

HECK, B. **Rechenverfahren und Auswertemodelle der Landesvermessung**: Klassische und moderne Methoden. 3., neu bearbeitete und erweiterte Auflage. Heidelberg: H. Wichmann, 2003.

HUANG, J.; VERONNEAU, M.; PAGIATAKIS, S. D. On the ellipsoidal correction to the spherical Stokes solution of the gravimetric geoid. **Journal of Geodesy**, Berlin, v. 77, n. 3-4, p. 171–181, 2003.

JEKELI, C.; SERPAS, J. G. Review and numerical assessment of the direct topographical reduction in geoid determination. **Journal of Geodesy**, Berlin, v. 77, n. 3-4, p. 226–239, 2003.

LOCH, C.; CORDINI, J. **Topografia contemporânea**: Planimetria. Florianópolis: UFSC, 1995.

NOVAK, P. Geoid determination using one-step integration. **Journal of Geodesy**, Berlin, v. 77, n. 3-4, p. 193–206, 2003.

RAPP, R.; SANSONO, F. (ed.). **Determination of the Geoid**: present and future. Berlin: Springer, 1991.

SANSONO, F. **Theory of satellite Geodesy and gravity field determination**. v. 25. Berlin: Springer, 1990.

SEVILLA, M. J.; GIL, A. J.; SANZO. The gravimetric geoid in Spain: first results. In: **Determination of the geoid. Present and future**. Ed. By R. H. Rapp and F. Sanso. IAG Symp. 106, p. 276-285. Springer.

SIIDERIS, M. G. The Role of the Geoid in one-, two-, and three-dimensional Network Adjustments. **CISM journal ACSGC**, v. 44, n. 1, p. 9 -18, 1990.

SJOBORG, L. E. A general model for modifying Stokes' formula and its least-squares solution. **Journal of Geodesy**, Berlin, v. 77, n. 7-8, p. 459– 464, 2004.

SWOKOWSKI, E. W. **Cálculo com geometria analítica**. São Paulo. Makron Books. 1994.

VANÍČEK, P.; KRAKIWSKY, E. J. **Geodesy**: the concepts. 2nd. ed. Amsterdam: Elsevier Science, 1986.