



UFSM

Dissertação de Mestrado

**ORDENAÇÃO DOS PARÂMETROS PARA
AJUSTAMENTO E ANÁLISE DA QUALIDADE DE
REDES GEODÉSICAS ALTIMÉTRICAS GEOMÉTRICAS**

Adriano Luis Schünemann

PPGG

Santa Maria, RS, Brasil

2005

**ORDENAÇÃO DOS PARÂMETROS PARA
AJUSTAMENTO E ANÁLISE DA QUALIDADE DE
REDES GEODÉSICAS ALTIMÉTRICAS GEOMÉTRICAS**

por

Adriano Luis Schünemann

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado do
Programa de Pós-Graduação em Geomática,
Área de Concentração em Mensuração, da
Universidade Federal de Santa Maria (UFSM, RS),
como requisito parcial para obtenção do grau de
Mestre em Geomática

PPGG

Santa Maria, RS Brasil

2005

**Universidade Federal de Santa Maria
Centro de Ciências Rurais
Programa de Pós-Graduação em Geomática**

A Comissão Examinadora, abaixo assinada,
aprova a Dissertação de Mestrado

**ORDENAÇÃO DOS PARÂMETROS PARA
AJUSTAMENTO E ANÁLISE DA QUALIDADE DE
REDES GEODÉSICAS ALTIMÉTRICAS GEOMÉTRICAS**

elaborada por
Adriano Luis Schünemann

como requisito parcial para obtenção do grau de
Mestre em Geomática

COMISSÃO EXAMINADORA:

Prof. Dr. Julio Cesar Farret
(Presidente/Orientador)

Prof. Dr. Attus Pereira Moreira

Prof. Dr. Carlito Vieira de Moraes

Prof. Dr. Eno Darci Saatkamp

Santa Maria, 04 de março de 2005

AGRADECIMENTOS

O autor agradece:

à Universidade Federal de Santa Maria a disponibilidade de toda a sua estrutura, tanto física como intelectual;

ao CNPq pela ajuda financeira concedida através de bolsa de estudos;

ao professor orientador Dr. Julio Cesar Farret a aceitação em assumir tal tarefa;

ao professor Dr. Carlito Vieira de Moraes o empréstimo de grande número de exemplares de sua bibliografia particular e pelos ensinamentos;

aos meus professores a convivência e o aprendizado;

à minha família o apoio em todos os momentos;

às estagiárias Gisele Noal e Marta Deprá e aos amigos Alessandro e Márcio de Andrade o auxílio na obtenção dos dados de campo;

ao colega Luiz Roberto Bevilacqua o auxílio intelectual;

aos meus colegas de mestrado a convivência e o carinho dispensados ao longo do curso.

SUMÁRIO

	Página
LISTA DE FIGURAS	x
LISTA DE QUADROS	xi
LISTA DE REDUÇÕES	xii
RESUMO	xv
ABSTRACT	xvii
1. INTRODUÇÃO	1
1.1. OBJETIVOS.....	1
1.1.1. Objetivo geral.....	1
1.1.2. Objetivos específicos.....	2
1.2. IMPORTÂNCIA.....	2
2. AMPARO CONCEITUAL E MATEMÁTICO	4
2.1. ESTUDO DOS ERROS.....	4
2.2. AJUSTAMENTO.....	5
2.3. MODELO PARAMÉTRICO DE AJUSTAMENTO.....	6
2.3.1. Modelo Matemático e Linearização.....	6
2.3.2. Equações Normais.....	9
2.3.3. Matrizes Covariâncias.....	11
2.3.3.1. Matriz covariância do vetor de parâmetros ajustados.....	14
2.3.3.2. Matriz de covariância do vetor de valores observados ajustados.....	14
2.3.3.3. Matriz covariância do vetor dos resíduos.....	15
2.4. REDE GEODÉSICA.....	15
2.5. ANÁLISE DA QUALIDADE DE REDES GEODÉSICAS.....	16

2.6. ANÁLISE DOS DADOS ADVINDOS DAS MENSURAÇÕES DO TRABALHO DE CAMPO – FUNDAMENTAÇÃO BÁSICA.....	17
2.6.1. Organização dos dados advindos das medidas.....	19
2.6.2. Estimativas obtidas a partir da Matriz de Dados.....	20
2.7. ORDENAÇÃO DAS ESTIMATIVAS APÓS O AJUSTAMENTO DAS OBSERVAÇÕES GEODÉSICAS PELO MÉTODO DOS MÍNIMOS QUADRADOS.....	20
2.8. MEDIDAS DE ACURÁCIA.....	25
2.8.1. Estimativa de Medidas Locais de Acurácia.....	26
2.8.1.1. Semi-eixos da Elipse de Erro de Ponto, quantidades obtidas da Curva Podaria e semi-eixos da Elipse de Confiança.....	26
2.8.1.2. Acurácia de Ponto.....	29
2.8.1.3. Acurácia de Função das coordenadas obtida pela lei de propagação das covariâncias.....	30
2.8.1.4. Intervalo da Medida de Acurácia de uma função das coordenadas obtido pelo quociente Rayleigh.....	31
2.8.2. Estimativa de Medidas Globais de Acurácia.....	32
2.8.2.1. Semi-eixos do hiperelipsóide de erro e do hiperelipsóide de confiança.....	32
2.8.2.2. Quociente Rayleigh.....	33
2.8.2.3. Critérios de Optimalidade.....	37
2.9. MEDIDAS DE CONFIABILIDADE.....	40
2.9.1. Estatística para detecção de erros grosseiros.....	40

2.9.2. Redundância.....	41
2.9.3. Medida de confiabilidade interna.....	44
2.9.3.1. Localização de erros grosseiros nas observações.....	46
2.9.4. Medida de confiabilidade externa.....	47
3. MATERIAL E METODOLOGIA.....	49
3.1. MATERIAL.....	49
3.2. METODOLOGIA.....	50
3.2.1. O experimento.....	50
3.2.2. As medidas.....	52
3.2.3. Matriz \mathbf{A}	53
3.2.4. Vetor ${}_u \bar{x}_1^0$ dos parâmetros iniciais.....	55
3.2.5. O vetor ${}_n \bar{l}_1^0$ das observações calculadas em função dos valores iniciais dos parâmetros.....	56
3.2.6. O vetor ${}_n \bar{l}_1$ dos valores observados.....	57
3.2.7. A matriz ${}_n \mathbf{P}_n$ dos pesos.....	58
3.2.8. O vetor ${}_n \bar{x}_1$ de correções.....	61
3.2.9. O vetor ${}_n \bar{x}_1^a$ dos parâmetros observados ajustados.....	62
3.2.10. O vetor ${}_n \bar{v}_1$ dos resíduos para as observações.....	62
3.2.11. O vetor ${}_{17} \bar{l}_1^a$ dos valores observados ajustados.....	63
3.2.12. A variância da unidade de peso a <i>posteriori</i> $\hat{\sigma}_0^2$	64
3.2.13. A matriz de covariâncias ${}_u \left(\sum_{\bar{x}^a} \right)_u$ dos parâmetros ajustados.....	65
3.2.14. A matriz de covariância ${}_n \left(\sum_{\bar{l}^a} \right)_n$ dos valores observados ajustados.....	66

3.2.15.	A matriz de covariância $\left(\sum_{\bar{v}^a}\right)_n$ do vetor dos resíduos	66
3.2.16.	Comparação da variância <i>a priori</i> σ_0^2 com a variância <i>a posteriori</i> $\hat{\sigma}_0^2$	66
3.2.17.	Localização de erros nas observações pelo teste <i>data snooping</i> de Baarda	67
4.	ANÁLISE DOS RESULTADOS	69
4.1.	RESULTADOS DO EXPERIMENTO ILUSTRATIVO PARA A ORDENAÇÃO DA METODOLOGIA DE AJUSTAMENTO E ANÁLISE DA QUALIDADE	69
4.1.1.	Vetor dos parâmetros aproximados iniciais	69
4.1.2.	O vetor das observações calculadas em função dos valores iniciais dos parâmetros	70
4.1.3.	O vetor dos valores observados	71
4.1.4.	A matriz dos pesos	72
4.1.5.	Vetor das correções aos valores iniciais	72
4.1.6.	Vetor das coordenadas ajustadas	73
4.1.7.	Vetor dos resíduos	74
4.1.8.	Vetor dos valores observados ajustados	75
4.1.9.	A variância $\hat{\sigma}_0^2$ de unidade de peso <i>a posteriori</i>	76
4.1.10.	A matriz de covariância $\left(\sum_{\bar{x}^a}\right)_u$ dos parâmetros ajustados	77
4.1.11.	A matriz de covariância $\left(\sum_{\bar{l}^a}\right)_n$ dos valores observados ajustados	78

4.1.12.	A matriz de covariância $\left(\sum_{\bar{v}^a}\right)_n$ do vetor dos resíduos.....	80
4.1.13.	Comparação da variância <i>a priori</i> σ_0^2 com a variância <i>a posteriori</i> $\hat{\sigma}_0^2$	81
4.1.14.	Localização de erros nas observações pelo teste <i>data snooping</i> de Baarda :.....	81
4.2.	RESULTADO DA IMPLEMENTAÇÃO DAS ROTINAS PROPOSTAS.....	83
5.	CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES	84
5.1.	CONCLUSÕES.....	84
5.1.1.	Conclusões em relação aos resultados do experimento ilustrativo – valores estimados e indicadores de qualidade.....	84
5.1.2.	Conclusões em relação à implementação em sistemas programáveis.....	85
5.2.	RECOMENDAÇÕES.....	85
6.	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	87
7.	BIBLIOGRAFIA CONSULTADA	92
	ANEXOS	94

LISTA DE FIGURAS

FIGURA 2.1 – Conceitos da teoria clássica dos erros.....	18
FIGURA 2.2 – Medidas de qualidade de Rede Geodésica.....	24
FIGURA 2.3 – Elipse de erro de sua curva podária.....	28
FIGURA 2.4 – Representação dos vetores próprios.....	39
FIGURA 3.1 – Croqui do experimento com a identificação dos pontos e das medidas.....	52
FIGURA 3.2 – Croqui da área experimental com as setas indicando o sentido do aclave das linhas.....	54

LISTA DE QUADROS

QUADRO 2.1. - Intervalos recomendados para a orientação da decisão sobre a controlabilidade de observações.....	46
---	----

LISTA DE REDUÇÕES

MVC	: matriz Variância-Covariância;
UFSM	: Universidade Federal de Santa Maria;
diag	: diagonal;
CNPq	: Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico;
MMQ	: Método dos mínimos quadrados;
WGS-84	: <i>World Geodetic Datum 1984</i> ;
SAD-69	: <i>South American Datum of 1969</i> ;
Navstar	: <i>Navigation Satellite with Time And Ranging</i> ;
GPS	: <i>Global Positioning System</i> ;
Glonass	: <i>Global Navigation Satellite System</i> ;
x_i	: valor medido diretamente;
\tilde{x}	: valor considerado verdadeiro;
η	: desvio verdadeiro;
E	: esperança matemática;
μ	: média aritmética populacional;
ε_i	: desvio aleatório;
\bar{x}	: valor médio;
x^{*2}	: valor calculado para teste qui-quadrado;
x^2	: qui-quadrado teórico;
δ	: desvio sistemático;
δ_c	: desvio sistemático conhecido;
δ_d	: desvio sistemático desconhecido;

S_x^2	: variância de um valor x qualquer;
S_y^2	: variância de um valor y qualquer;
Δh	: diferenças de alturas;
$S_{x,y}$: covariância de dois valores x e y;
$\sigma_{\delta hi}$: variância de cada segmento;
$\sum_{i=1}^n$: somatório de valores com i variando de 1 a n;
r	: correlação entre dois valores;
l_{ij}	: observação ij;
l_j	: observação j;
\vec{l}_a	: vetor dos valores observados ajustados;
\vec{l}_b	: vetor dos valores observados;
\vec{m}_i	: vetores próprios;
l_v	: nivelamento ;
l_r	: contranivelamento;
\vec{v}	: vetor dos resíduos;
\vec{x}_0	: vetor dos valores aproximados dos parâmetros;
\vec{x}	: vetor correção;
\vec{x}_a	: vetor dos parâmetros ajustados;
n	: número de observações;
u	: número de parâmetros;
\in	: pertence a;
\mathbf{I}^T	: vetor aleatório multivariado;
\mathbf{L}	: matriz de dados amostrais;

$\bar{\mathbf{I}}$: vetor médio populacional;
\mathbf{S}	: matriz covariância populacional;
$\hat{\mathbf{x}}$: vetor das coordenadas estimadas;
$\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}}$: matriz de cofatores de covariância das incógnitas;
\mathbf{Q}_v	: matriz de cofatores de covariância dos resíduos;
\mathbf{N}	: equações normais;
\mathbf{A}	: matriz que compreende as derivadas parciais das equações de observação;
\mathbf{y}°	: vetor dos valores aproximados das incógnitas;
$\partial \mathbf{y}$: derivada de \mathbf{y} ;
$\partial \mathbf{x}$: derivada de \mathbf{x} ;
\dagger	: deve ser;
\sim	: segue a distribuição;
\mathbf{P}	: matriz dos pesos;
W_i	: estatística calculada do teste <i>data snooping</i> de Baarda ;
σ_0^2	: variância de uma observação de peso unitário (variância a priori);
$\mathbf{K}_{\hat{\mathbf{x}}}$: matriz covariância das incógnitas;
\mathbf{e}_i	: i-ésima coluna de uma matriz identidade;
$f(x)$: função matemática.

RESUMO

Dissertação de Mestrado
Programa de Pós-Graduação em Geomática
Universidade Federal de Santa Maria, RS, Brasil

**ORDENAÇÃO DOS PARÂMETROS PARA
AJUSTAMENTO E ANÁLISE DA QUALIDADE DE
REDES GEODÉSICAS ALTIMÉTRICAS GEOMÉTRICAS**

AUTOR: ADRIANO LUIS SCHÜNEMANN

ORIENTADOR: JULIO CESAR FARRET

DATA E LOCAL DA DEFESA: SANTA MARIA, 04 DE MARÇO DE 2005.

Em levantamentos geodésicos altimétricos, de acordo com o tipo de aplicação a que se destina, se faz necessário conhecer a qualidade das altitudes estimadas. Para isso, em Geodésia, se utiliza o ajustamento das medidas e parâmetros estimados, utilizando-se o Método dos Mínimos Quadrados, com o modelo paramétrico ou o modelo dos correlatos ou o modelo combinado. É comum na literatura o desenvolvimento conceitual e metodológico do ajustamento pelo Método dos Mínimos Quadrados. O desenvolvimento para casos específicos pode não ser uma tarefa trivial para os não familiarizados diretamente com o assunto, como é o caso de programadores de sistemas de informática. O presente trabalho objetiva ordenar de forma didática os procedimentos necessários ao ajustamento de redes geodésicas altimétricas pelo modelo paramétrico do Método dos Mínimos Quadrados, de forma a facilitar a implementação de rotinas programáveis. Baseando-se naqueles procedimentos, implementou-se rotinas de processamento em Matlab 5.1 visando verificar sua funcionabilidade em um teste prático com dados reais. Para tal, realizou-se o levantamento altimétrico de uma rede geodésica de 10 pontos, com um Nível NI2 da KARL ZEISS. Desses pontos, 8 desejava-se conhecer as suas

coordenadas altimétricas, ou cotas, e em 2 deles conhecia-se as suas cotas, que são os pontos aqui chamados de injuncionais, *PA1* e *PA2*, aos quais amarrou-se o levantamento. Do nivelamento desses pontos obteve-se 17 desníveis. Com os dados levantados a campo realizou-se o ajustamento desta rede pelo modelo paramétrico do método dos mínimos quadrados. Após o ajustamento realizou-se a análise do mesmo através das estatísticas do teste qui-quadrado para detecção de erros grosseiros, onde comparou-se as variâncias de unidade de peso *a priori* e *a posteriori*. Nesta avaliação, observou-se a dificuldade de enquadramento do ajustamento dentro da área de aceitação, necessitando-se alterar o desvio padrão inicial (nominal) do instrumento. Isto demonstrou a necessidade de se realizar aferições dos instrumentos utilizados para que se conheçam seus reais valores de precisão ao longo da vida útil dos mesmos, de modo que os dados obtidos com auxílio dos mesmos possam ser utilizados com segurança. Ainda, realizou-se o cálculo da matriz redundância e de seu traço, da redundância e do teste *data snooping* de Baarda. Os dados, valores calculados e rotinas programadas são apresentadas.

Palavras chave: rotinas programáveis, redes altimétricas, modelo paramétrico.

ABSTRACT

Master Dissertation
Programa de Pós-Graduação em Geomática
Universidade Federal de Santa Maria, RS, Brasil

**ORDENAÇÃO DOS PARÂMETROS PARA
AJUSTAMENTO E ANÁLISE DA QUALIDADE DE
REDES GEODÉSICAS ALTIMÉTRICAS GEOMÉTRICAS**

(ORDERING OF PARAMETERS FOR ADJUSTMENT AND ANALYSIS OF
QUALITY IN ALTIMETRIC GEODETIC NETS)

AUTHOR: ADRIANO LUIS SCHÜNEMANN

ADVISER: JULIO CESAR FARRET

DATE AND PLACE OF DEFENSE: SANTA MARIA, 04 OF MARCH OF 2005.

In altimetric geodetic surveys, according to the kind of its usage, it is necessary to know the quality of those estimated altitudes. In order to do so, in Geodesy, the adjustment of estimated measurements and/or parameters is used, being the criterion of minimum squares used, not only for the Parametric Model but also the Correlate one or the Combined one. It is common the concept and the methodological development in literature in general cases of adjustment. The development for specific cases might not be a trivial task for the ones who are not directly familiar with this matter, like computing system programmers. This paper aims to order, in a didactic way, the necessary procedures of altimetric geodetic nets adjustment and quality analysis by using the Parameter Model in order to facilitate the implementation of programmable routines. Based on those procedures, processing routines in Matlab 5.1 have been implemented aiming to verify their functioning in a practical test provided with real data. To do so, an altimetric assessment of a geodetic net of ten points, with a level NI2 of KARL ZEISS was carried out. Eight out of these points

needed to know their altimetric coordinates and in two out of these points their heights were already known, points which are called here as injunction ones, PA1 and PA2, from which the assessment was attached to. From the leveling of these points seventeen (17) unevenness were obtained. By using those data taken in the field, an adjustment of this net was made by the parametrical model of the minimum square method. After the adjustment, analysis of the adjustment itself was made through the statistics of the qui-square test for the detection of gross mistakes, where the variants of weight unit were compared before and after it. In this evaluation, a difficulty of framing the adjustment inside the area of acceptance was observed and it was needed to alter the initial standard deviation (nominal) of the instrument. This demonstrated the necessity of having checking of those instruments used in order to know their real values of precision during their useful lives so that the data taken from them can be used in safety. Also, a calculus of the redundancy matrix and its trace and the snooping data test of Baarda were carried out. The data, the values calculated and the routines are shown here.

Key words: programmable routines, altimetric nets, parametrical model.

1. INTRODUÇÃO

Em levantamentos geodésicos altimétricos, de acordo com o tipo de aplicação a que se destina, faz-se necessário conhecer a qualidade das altitudes estimadas. Para isso, em Geodésia, se utiliza o ajustamento das medidas e parâmetros estimados utilizando-se o MMQ com o modelo paramétrico ou modelo dos correlatos ou modelo combinado. É comum na literatura o desenvolvimento conceitual e metodológico do ajustamento pelo MMQ. O desenvolvimento para casos específicos pode não ser uma tarefa trivial para os não familiarizados diretamente com o assunto, como é o caso de programadores de sistemas informatizados. Com o objetivo de aplicar os procedimentos necessários ao ajustamento e à análise da qualidade de redes geodésicas altimétricas pelo modelo paramétrico do MMQ, realizou-se o processo completo, do levantamento à análise da qualidade, em uma rede altimétrica de 10 pontos dentro do campus da UFSM, sendo 2 desses pontos injuncionados.

1.1. OBJETIVOS

1.1.1. Objetivo Geral

O presente trabalho tem como objetivo geral ordenar de forma didática os procedimentos a serem observados quando do ajustamento e da análise da qualidade de redes geodésicas altimétricas geométricas, principalmente em apoio à elaboração de rotinas programáveis e especialmente quando for adotado o ajustamento pelo modelo paramétrico

do MMQ. Esta análise é realizada após o ajustamento. Salienta-se que o caráter gravimétrico das altitudes não está presente neste trabalho, mas somente o caráter geométrico, como pode ser verificado nos modelos matemáticos.

1.1.2. Objetivos Específicos

- a) proceder o nivelamento geodésico geométrico de uma rede existente, ajustando-a pelo MMQ com equações escritas na forma paramétrica;
- b) desenvolver um exemplo numérico para a análise da qualidade de redes geodésicas altimétricas geométricas;
- c) propor uma forma didática de ajustamento e de análise da qualidade de redes geodésicas altimétricas geométricas;
- d) disponibilizar uma forma didática de programação do ajustamento e análise de qualidade de redes geodésicas altimétricas geométricas.

1.2. IMPORTÂNCIA

A codificação de rotinas programáveis envolvendo processamento de dados com finalidades geodésicas, geralmente não é uma tarefa trivial para os não familiarizados com os conceitos e amparo matemático e estatístico, empregados nas ciências geodésicas. Esse fato dificulta a elaboração de algoritmos, dentro da melhor lógica técnica e científica, especialmente na realidade atual em que, cada vez mais, as rotinas de cálculos geodésicos

não são elaboradas por profissionais diretamente ligados à Geodésia, como é o caso dos programadores. É importante a elaboração de material que, mesmo sem deixar de ser bem amparado conceitual e matematicamente, facilite e até mesmo viabilize, em alguns casos, a programação. É nesse contexto que se insere o presente trabalho, tratando do caso específico dos nivelamentos geodésicos diretos, seu ajustamento e controle de qualidade, esperando-se que possa auxiliar na generalização para outros casos.

2. AMPARO CONCEITUAL E MATEMÁTICO

2.1. ESTUDO DOS ERROS

Em medições os erros podem ser classificados em três tipos: erros grosseiros, erros sistemáticos e erros acidentais.

Os erros grosseiros são aqueles que ocorrem em sua maioria devido à distração do operador e podem ser evitados, desde que o operador tome o máximo cuidado na aquisição dos dados. Para DALMOLIN (2002, p.47) os erros grosseiros são aqueles superiores a 3 vezes o desvio padrão. No presente trabalho as observações foram testadas pelo teste *data sooping* de BAARDA, para localização de erros grosseiros. Como erros grosseiros citam-se: engano na leitura indicada no instrumento; engano na notação do número que expressa o valor da grandeza da medição; engano nas unidades de medida em uma fórmula matemática; não verticalização da mira sobre o alvo (ponto) a ser visado; não-horizontalização da trena ao medir uma linha poligonal (catenária).

Os erros sistemáticos se repetem com a mesma magnitude e sinal algébrico, em igualdade de condições. Esse tipo de erro pode ser corrigido comparando-se o instrumento utilizado com um instrumento padrão. Citam-se como exemplos: trena com comprimento diferente do especificado no certificado de calibração; ausência da parte inicial graduada de uma trena. No presente trabalho consideraram-se as medidas isentas de erros sistemáticos, como exige um processo de ajustamento. Salienta-se, porém, que eventuais dificuldades encontradas para situar o valor do teste qui-quadrado dentro do intervalo de aceitação da hipótese

básica, podem sugerir a presença de pequenos erros sistemáticos nas medidas, apesar da dificuldade em caracterizá-los, ou seja, as características predominantes foram realmente de erros acidentais (aleatórios), estatisticamente tratáveis.

Os erros acidentais assumem maior importância, pois se devem a causas desconhecidas e são impossíveis de serem previstos e eliminados, restando apenas o fato de poderem ser estimados por métodos estatísticos. Normalmente os erros acidentais menores são mais frequentes que os maiores; caso contrário eles podem tomar característica de erros grosseiros. Como os erros acidentais são impossíveis de serem eliminados dos valores de grandeza de uma medição, esses erros estarão presentes nos valores das grandezas estimadas a partir dessas medidas. Resta procurar o valor mais provável, do ponto de vista estatístico, tanto das medidas como dos parâmetros estimados a partir delas. Em Geodésia isso é buscado no ajustamento, através do estudo da lei de propagação das covariâncias.

2.2. AJUSTAMENTO

Observações conduzidas pelo homem se caracterizam por possuírem erros de medida, que podem ocorrer por falha humana, imperfeição de equipamentos e por variações ambientais, caracterizando assim os erros citados anteriormente. Para ter-se uma medida de confiança, faz-se necessária a superabundância das observações. Cria-se assim um novo problema: a partir da superabundância das observações extrair um resultado único que represente com maior confiança a grandeza medida e os parâmetros estimados a partir dela.

O ajustamento das observações tem como finalidade resolver esse problema, ou seja, propor uma forma de extrair um resultado único e que represente com maior confiança a grandeza medida e, por consequência, o parâmetro estimado a partir dela, indicando a estimativa de precisão na solução adotada (GEMAEL, 1994, p. 11). O ajustamento fornece o valor único, independentemente do caminho percorrido.

2.3. MODELO PARAMÉTRICO DE AJUSTAMENTO

2.3.1. Modelo Matemático e Linearização

O modelo de ajustamento é uma forma matemática de se expressar uma realidade física com a melhor aproximação possível (DALMOLIN, 2002, p. 2). O ajustamento objeto do presente trabalho se processa pelo modelo paramétrico, quando os valores observados ajustados podem ser expressos explicitamente como função dos parâmetros ajustados, o que pode ser verificado no modelo matemático:

$$\vec{l}_a = f(\vec{x}_a), \quad (2.1)$$

O vetor dos valores observados ajustados \vec{l}_a vem da soma do vetor dos valores observados \vec{l}_b com o vetor dos resíduos \vec{v} e é expresso da seguinte forma:

$$\vec{l}_a = \vec{l}_b + \vec{v}. \quad (2.2)$$

O vetor dos parâmetros ajustados \vec{x}_a é obtido pela soma do vetor dos valores aproximados dos parâmetros \vec{x}_0 com o vetor correção \vec{x} que é a solução do sistema de equações normais. Os valores aproximados dos parâmetros são obtidos em função de \vec{l}_b . No presente trabalho, eles foram calculados em função de valores aproximados, adotados para as medidas e as medidas propriamente ditas representam os desníveis, resultantes das médias entre as leituras de ida e de vinda em cada linha da rede de nivelamento. Os valores das correções aos valores iniciais são as incógnitas buscadas no ajustamento que, uma vez somadas a esses valores iniciais, resultarão nos valores finais ajustados, expressos por:

$$\vec{x}_a = \vec{x}_0 + \vec{x}. \quad (2.3)$$

Quando o modelo não for linear, deve-se proceder a linearização para que posteriormente se possa realizar o ajustamento, pois a linearidade do modelo matemático é um pré-requisito dele. Essa linearização é feita utilizando-se a fórmula de Taylor (GEMAEL, 1994, p.47):

$$f(x) = f(a) + f'(a) \frac{(x-a)}{1!} + f''(a) \frac{(x-a)^2}{2!} + \dots \quad (2.4)$$

O sistema de equações lineares formado é superabundante, ou seja, o número de observações é maior que o número de incógnitas ou $n > u$ (DALMOLIN, 2002, p. 89).

Designando a função do vetor dos parâmetros aproximados por \vec{l}_0 ,

$$\vec{l}_0 = f(\vec{x}_0), \quad (2.5)$$

e a matriz das derivadas parciais por \mathbf{A} ,

$$\mathbf{A} = \left. \frac{\partial f}{\partial x_a} \right|_{x_0}, \quad (2.6)$$

e substituindo o primeiro membro da (2.1) pela (2.2) e linearizando o segundo membro, obtém-se:

$$\vec{l}_b + \vec{v} = f(\vec{x}_0 + \vec{x}) = f(\vec{x}_0) + \left. \frac{\partial f}{\partial x_a} \right|_{x_a=x_0} \vec{x}, \quad (2.7)$$

$$\vec{l}_b + \vec{v} = \vec{l}_0 + \mathbf{A}\vec{x}. \quad (2.8)$$

Como

$$\vec{l} = \vec{l}_0 - \vec{l}_b \quad (2.9)$$

obtém-se o modelo linearizado do método dos parâmetros (GEMAEL, 1994, p.118):

$${}_n \vec{v}_1 = {}_n \mathbf{A}_{uu} \vec{x}_1 + {}_n \vec{l}_1. \quad (2.10)$$

Nos casos em que o modelo matemático utilizado é linear, não há necessidade de ocorrer o processo de linearização descrito acima. Nesse

caso, tem-se apenas a matriz dos coeficientes das incógnitas das equações de observação ao invés da matriz das derivadas parciais, ambas denotadas por \mathbf{A} . Esse é o caso do presente trabalho.

2.3.2. Equações Normais

Aqui utiliza o princípio do MMQ, o qual estabelece que a soma dos quadrados dos resíduos deve ser mínima (DALMOLIN, 2002, p. 85).

$$\phi = \vec{v}^T \mathbf{P} \vec{v} \equiv \text{mín} \quad (2.11)$$

Minimizando a forma quadrática fundamental obtém-se (GEMAEL, 1994, p. 119):

$$\phi = \vec{v}^T \mathbf{P} \vec{v} = (\mathbf{A}\vec{x} + \vec{l})^T \mathbf{P} (\mathbf{A}\vec{x} + \vec{l}) = \text{mín}, \quad (2.12)$$

$$\phi = (\vec{x}^T \mathbf{A}^T + \vec{l}^T) \mathbf{P} (\mathbf{A}\vec{x} + \vec{l}) = \text{mín},$$

$$\phi = \vec{x}^T \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A} \vec{x} + \vec{x}^T \mathbf{A}^T \mathbf{P} \vec{l} + \vec{l}^T \mathbf{P} \mathbf{A} \vec{x} + \vec{l}^T \mathbf{P} \vec{l} = \text{mín}.$$

Simplificando-se:

$$\phi = \vec{x}^T \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A} \vec{x} + 2\vec{x}^T \mathbf{A}^T \mathbf{P} \vec{l} + \vec{l}^T \mathbf{P} \vec{l} = \text{mín},$$

Igualando a zero a derivada primeira em relação a \vec{x} obtém-se:

$$\frac{\partial \phi}{\partial \vec{x}} = 2\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A} \vec{x} + 2\mathbf{A}^T \mathbf{P} \vec{l} = 0,$$

$$\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A} \vec{x} + \mathbf{A}^T \mathbf{P} \vec{l} = 0, \quad (2.13)$$

$$\vec{x} = -(\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{P} \vec{l}. \quad (2.14)$$

Considerando-se:

$$\mathbf{N} = \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A}, \quad (2.15)$$

$$\vec{u} = \mathbf{A}^T \mathbf{P} \vec{l}, \quad (2.16)$$

a (2.13) é escrita na forma

$$\mathbf{N} \vec{x} + \vec{u} = 0. \quad (2.17)$$

A equação matricial (2.13) ou a (2.17) representa um sistema de u equações normais cuja solução é dada pelo vetor:

$$\vec{x} = -\mathbf{N}^{-1} \vec{u}, \quad (2.18)$$

e cujas componentes convertem os parâmetros aproximados em ajustados:

$$\vec{x}_a = \vec{x}_0 + \vec{x}. \quad (2.19)$$

2.3.3. Matrizes Covariâncias

Para GEMAEL (1994, p. 120), antes do ajustamento se necessita estimar a precisão das medidas efetuadas para compor a matriz covariâncias dos valores observados \sum_{l_b} e, a partir da variância de unidade de peso a priori σ_0^2 , chegar à matriz dos pesos:

$${}_n P_n = \sigma_0^2 \left(\sum_{l_b} \right)_n^{-1}. \quad (2.20)$$

Como as covariâncias para um nivelamento geralmente são admitidas nulas (como no presente trabalho), \sum_{l_b} é diagonal e, portanto, a matriz dos pesos também o será.

$$\mathbf{P} = \sigma_0^2 \begin{bmatrix} d_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d_n \end{bmatrix}^{-1}. \quad (2.21)$$

Alguns pesquisadores lançam algumas dúvidas acerca do pressuposto de independência entre as observações, como LUCHT (1972), MÜLLER & SCHNEIDER (1968) e REMMER (1975) apud FARRET (1998), o que mudaria a variância $\sigma_{\Delta H}^2$, podendo ser dada como o somatório das variâncias dos segmentos $\sigma_{\delta \Delta i}$:

$$\sigma_{\Delta h}^2 = \sum_i \sigma_{\delta h_i}^2. \quad (2.22)$$

Segundo esses autores, esse pressuposto é um dos causadores da significativa diferença entre o desvio-padrão real e o tomado como *a priori*, a qual se reflete na rejeição da hipótese básica do teste qui-quadrado, que ocorre em alguns casos. Análises específicas sobre o sério problema das matrizes de peso nos ajustamentos geodésicos fogem aos objetivos desse trabalho, mas são fartos na literatura específica, onde podem ser aprofundadas, como em VANÍČEK & GRAFARREND¹ (1980) apud FARRET (1998). Esses autores citam várias possíveis explicações para estes pressupostos como: real desvio-padrão por unidade de comprimento maior que o esperado, efeitos pouco ou não modelados ou sistemáticos nos desníveis medidos, pressuposto de independência estatística entre os desníveis medidos não ser totalmente correto ou, ainda, a soma desses fatores.

No presente trabalho usou-se o pressuposto de SCHMIDT (2000, p. 305), segundo o qual a distância em quilômetros utilizada na matriz peso sofre influência da acurácia do instrumento utilizado no nivelamento, como mostrado em \sum_{l_b} a seguir:

¹ VANÍČEK, P.; GRAFAREND, E.W.:(1980). **On the Weight Estimation in Leveling**. NOAA Technical Report NOS-86 NGS-17.

$$\Sigma_{l_b} = \begin{bmatrix} 4\sigma_I^2 d_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4\sigma_I^2 d_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4\sigma_I^2 d_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4\sigma_I^2 d_n \end{bmatrix}. \quad (2.23)$$

Sendo que σ_I^2 obtém-se elevando o desvio padrão nominal do instrumento σ_I ao quadrado:

$$\sigma_I^2 = (\sigma_I)^2. \quad (2.24)$$

Esse pressuposto tornou-se adequado para o presente trabalho, uma vez que permite levar em conta a pressuposição do desgaste temporal do aparelho, o qual afeta diretamente a precisão nominal do mesmo, com reflexo na matriz de pesos. O equipamento aqui utilizado tem muitos anos de uso, possuindo um desvio padrão diferente daquele indicado pelo fabricante. A melhor opção para minimizar-se esse efeito seria realizar os procedimentos de campo para análise de acurácia de instrumentos geodésicos – Níveis, como é descrito na DIN 18.723(Teil 2), para se obter a acurácia do aparelho dentro de um valor mais correto. Esse fato mostra a importância de normas como a DIN para a correta classificação dos equipamentos e, principalmente, do reenquadramento dos mesmos em termos de precisão.

2.3.3.1. Matriz covariância do vetor de parâmetros ajustados

A MVC do vetor de parâmetros ajustados se obtém multiplicando a variância a priori σ_0^2 pelo inverso da matriz \mathbf{N} , e se escreve:

$$\left(\sum_{\bar{x}_a} \right)_u = \sigma_0^2 \mathbf{N}^{-1}. \quad (2.25)$$

2.3.3.2. Matriz covariância do vetor dos valores observados ajustados

Segundo GEMAEL (1994, p. 121),

$$\vec{l}_a = \vec{l}_b + \vec{v} = \vec{l}_b + \mathbf{A}\vec{x} + \vec{l} = \vec{l}_b + \mathbf{A}\vec{x} + \vec{l}_0 - \vec{l}_b,$$

$$\vec{l}_a = \mathbf{A}\vec{x} + \vec{l}_0. \quad (2.26)$$

A matriz covariância do vetor dos valores observados é obtida pela lei de propagação das covariâncias na (2.26), que resulta

$$\sum_{\vec{l}_a} = \mathbf{A} \sum_{\vec{x}} \mathbf{A}^T.$$

Como $\sum_{\vec{x}} = \sum_{\bar{x}_a}$, então $\sum_{\vec{l}_a}$ é escrita na forma

$$\sum_{\vec{l}_a} = \sigma_0^2 \mathbf{A} \mathbf{N}^{-1} \mathbf{A}^T. \quad (2.27)$$

2.3.3.3. Matriz covariância do vetor dos resíduos

O vetor dos resíduos é obtido da diferença entre o vetor dos valores observados ajustados e o vetor valores observados (GEMAEL, 1994, p. 121):

$$\vec{v} = \vec{l}_a - \vec{l}_b, \quad (2.28)$$

$$n(\Sigma_{\vec{v}})_n = \sigma_{0\ 17}^2 \mathbf{P}_{17}^{-1} - \Sigma_{\vec{l}_a}. \quad (2.29)$$

2.4. REDE GEODÉSICA

De acordo com a definição clássica de HELMERT² apud TORGE (2001, p.1), a Geodésia é a ciência que tem como objetivo medir e mapear a superfície da Terra.

Na atualidade se sabe que o campo gravitacional da Terra tem influência na modelagem de sua superfície, sendo necessário acrescentar na definição acima a determinação do campo da gravidade terrestre. A definição clássica foi estendida para incluir o mapeamento das variações temporais da superfície da Terra e seu campo gravitacional (TORGE, 2001, p. 1).

As redes geodésicas são um conjunto de pontos de controle devidamente monumentados que servem para a determinação de posicionamento em todas as escalas desejadas. Estes pontos estão

² HELMERT, F.R. (1880/1884): **Die mathematischen und physikalischen Theorien der höheren Geodäsie**. Teubner, Leipzig.

amarrados a sistemas locais ou globais, determinados por levantamentos geodésicos. Em redes planimétricas, essas amarrações são feitas: por séries de leituras de ângulos em todos os vértices da rede, no caso da triangulação; séries de leituras de distâncias em todos os lados dos triângulos, no caso das trilateração; e séries de leituras de ângulos e distâncias de todos os lados e vértices dos triângulos formadores da rede, no caso da poligonação. Para o caso de redes altimétricas tanto pode ser usada a forma geométrica direta (com a utilização de níveis óticos ou eletrônicos), como através da utilização de ângulos verticais, como no caso trigonométrico (com a utilização de taquímetros, geralmente eletrônicos).

Estas estruturas, ou monumentos, são os vértices dos triângulos da rede e servem de apoio para os levantamentos locais, quando se deseja orientar o levantamento segundo um sistema de referência geodésico, como por exemplo: WGS-84, SAD-69, Astro-Chuá, Córrego Alegre. Atualmente, a determinação de coordenadas geodésicas também pode ser feita pela utilização de sistemas globais de posicionamento que se utiliza, principalmente, de satélites artificiais como, por exemplo, o sistema norte-americano Navstar/GPS ou o sistema russo Glonass.

2.5. ANÁLISE DA QUALIDADE DE REDES GEODÉSICAS

A análise da qualidade de uma rede geodésica é uma série de procedimentos matemáticos e estatísticos através dos quais são obtidas as estimativas de qualidade dessas redes. Isto assume importância pelo fato de que as estimativas de qualidade são uma parte dos elementos aprimoradores da caracterização de estemas, presentes no memorial da

caracterização de extremas da matrícula imobiliária (MORAES, 2001, p.179).

2.6. ANÁLISE DOS DADOS ADVINDOS DAS MENSURAÇÕES DO TRABALHO DE CAMPO – FUNDAMENTAÇÃO BÁSICA

A fim de caracterizar uma grandeza de mensuração, a teoria clássica de erros faz a distinção entre o valor medido x_i e o valor verdadeiro \tilde{x} de uma grandeza. A diferença entre esse dois valores é chamada de desvio verdadeiro η que permanece desconhecido. A diferença entre o i -ésimo valor medido x_i de uma amostra composta de n valores medidos $x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n$ sobre a grandeza x e seu valor esperado $E(x) = \mu$ é chamado desvio aleatório ε_i , que se estima a partir da realização do valor esperado que é efetuada pelo valor médio \bar{x} dos n valores medidos. A diferença entre o valor esperado e o valor verdadeiro é chamado desvio sistemático (“*bias*”) δ , que possui uma parte conhecida δ_c e outra parte desconhecida δ_d . Estes conceitos podem ser ilustrados pela figura 2.1 e formulados.

$$\varepsilon_i = x_i - \mu . \quad (2.30)$$

$$\delta = \mu - \tilde{x} = \delta_c + \delta_d . \quad (2.31)$$

Comporá a realização da grandeza de mensuração x_i as partes:

$$x_i = \varepsilon_i + \mu = \varepsilon_i + \delta + \tilde{x}. \quad (2.32)$$

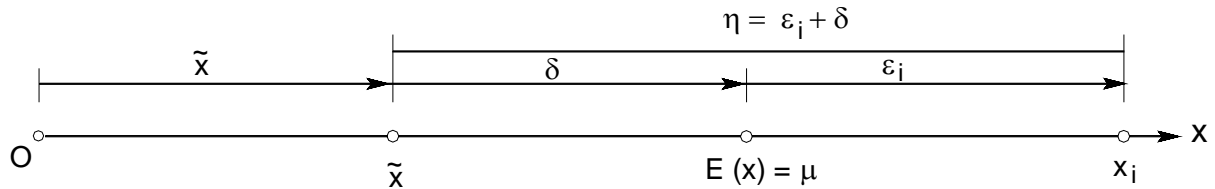


Figura 2.1 – Conceitos da teoria clássica dos erros.

Fonte: SCHMIDT (1994, p. 10)³ apud MORAES (2001, p. 180).

Os valores estimados de variância, de covariância e, por conseguinte, de correlação não são influenciados pelos desvios sistemáticos, pois

$$S_x^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n [(x_i + \delta_x) - (\bar{x} + \delta_x)]^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2, \quad (2.33)$$

$$S_y^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n [(y_i + \delta_y) - (\bar{y} + \delta_y)]^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2, \quad (2.34)$$

$$S_{x,y} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n [(x_i + \delta_x) - (\bar{x} + \delta_x)][(y_i + \delta_y) - (\bar{y} + \delta_y)] = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n [(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})] \text{ e} \quad (2.35)$$

³ SCHMIDT, H. (1994) **Meßunsicherheit und Vermessungstoleranz bei Ingenieurmessungen**. Veröffentlichung des Geodätischen Instituts der Rheinisch-Westfälischen Technischen Hochschule Aachen, Nr. 51.

$$r = \frac{S_{x,y}}{S_x S_y}. \quad (2.36)$$

2.6.1. Organização dos dados advindos das medidas

A finalidade das observações geodésicas é determinar os parâmetros incógnitos, como as coordenadas dos pontos e, mais especificamente no caso desse trabalho, o elemento altimétrico (cota – H , altitude elipsoidal ou a coordenada altimétrica cartesiana Z). O termo mensuração vem de medida e designa o processo pelo qual um número é associado à variável aleatória. A medida é o resultado numérico de uma certa medição. Cada valor numérico l_{ij} é entendido como a realização da variável aleatória l_j . Doravante, esta notação é utilizada. Nas ciências experimentais, freqüentemente, há um conjunto de variáveis a serem medidas, o qual pode ser expresso pelo vetor aleatório multivariado, como:

$$\vec{l}^T = [l_1 \quad l_2 \quad \cdots \quad l_j \quad \cdots \quad l_n]. \quad (2.37)$$

Uma amostra do vetor aleatório \vec{l} , na qual cada uma das n variáveis é medida m vezes, denomina-se matriz de dados amostrais ou, simplesmente, matriz de dados, a qual é denotada pelo símbolo \mathbf{L} , e é expressa como:

$$\mathbf{L} = [l_{ij}]_{m \times n} = \begin{bmatrix} l_{11} & l_{12} & \cdots & l_{1j} & \cdots & l_{1n} \\ l_{21} & l_{22} & \cdots & l_{2j} & \cdots & l_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{i1} & l_{i2} & \cdots & l_{ij} & \cdots & l_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{m1} & l_{m2} & \cdots & l_{mj} & \cdots & l_{mn} \end{bmatrix}. \quad (2.38)$$

2.6.2. Estimativas obtidas a partir da matriz de dados

Da matriz de dados \mathbf{L} vem o vetor médio amostral – que estima o vetor médio populacional μ – denotado pelo símbolo \bar{l} , a matriz covariância amostral – que estima a matriz covariância populacional Σ – denotada pelo símbolo \mathbf{S} , os semi-eixos do hiperelipsóide obtidos através da decomposição espectral de \mathbf{S} , a matriz correlação amostral e a distância quadrática de Mahalanobis amostral.

2.7. ORDENAÇÃO DAS ESTIMATIVAS APÓS O AJUSTAMENTO DAS OBSERVAÇÕES GEODÉSICAS PELO MÉTODO DOS MÍNIMOS QUADRADOS

A análise de rede geodésica depende do conhecimento das coordenadas dos pontos, do plano das medições e da acurácia. No ajustamento das observações geodésicas em que é empregado o modelo Gauss-Markov (WELSCH et al. 2000, p. 140-141), tem-se:

$$E(\mathbf{I}) = \mathbf{Ax} \text{ ou } I = \mathbf{Ax} + \varepsilon, \quad E(\varepsilon) = 0,$$

$$E(\varepsilon\varepsilon^T) = \text{cov}(\varepsilon) = \text{cov}(I). \quad (2.39)$$

As coordenadas estimadas encontram-se no vetor $\hat{\mathbf{x}}$ e suas acurácias na matriz de cofatores de covariância das incógnitas $\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}}$ que é a inversa da matriz dos coeficientes das incógnitas das equações normais \mathbf{N} .

$$\mathbf{N} = (\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1}. \quad (2.40)$$

Na (2.40) a matriz \mathbf{A} compreende as derivadas parciais das equações de observação $y = f(x)$, sendo avaliada com o vetor dos valores aproximados \mathbf{y}° das incógnitas, de forma:

$$\mathbf{A} = [\mathbf{a}_{ij}]_{n \times u} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial y_1}{\partial x_j} & \dots & \frac{\partial y_1}{\partial x_u} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial y_2}{\partial x_j} & \dots & \frac{\partial y_2}{\partial x_u} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial y_i}{\partial x_1} & \frac{\partial y_i}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial y_i}{\partial x_j} & \dots & \frac{\partial y_i}{\partial x_u} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial y_n}{\partial x_1} & \frac{\partial y_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial y_n}{\partial x_j} & \dots & \frac{\partial y_n}{\partial x_u} \end{bmatrix}. \quad (2.41)$$

No presente trabalho não é necessário realizar a derivação citada, pois as equações são lineares, compondo a matriz \mathbf{A} os coeficientes das incógnitas das equações de observação assumem os valores serão -1 , 0 e 1 .

(2.2) – pode ser interpretado mediante o teorema da decomposição espectral da matriz covariância das incógnitas.

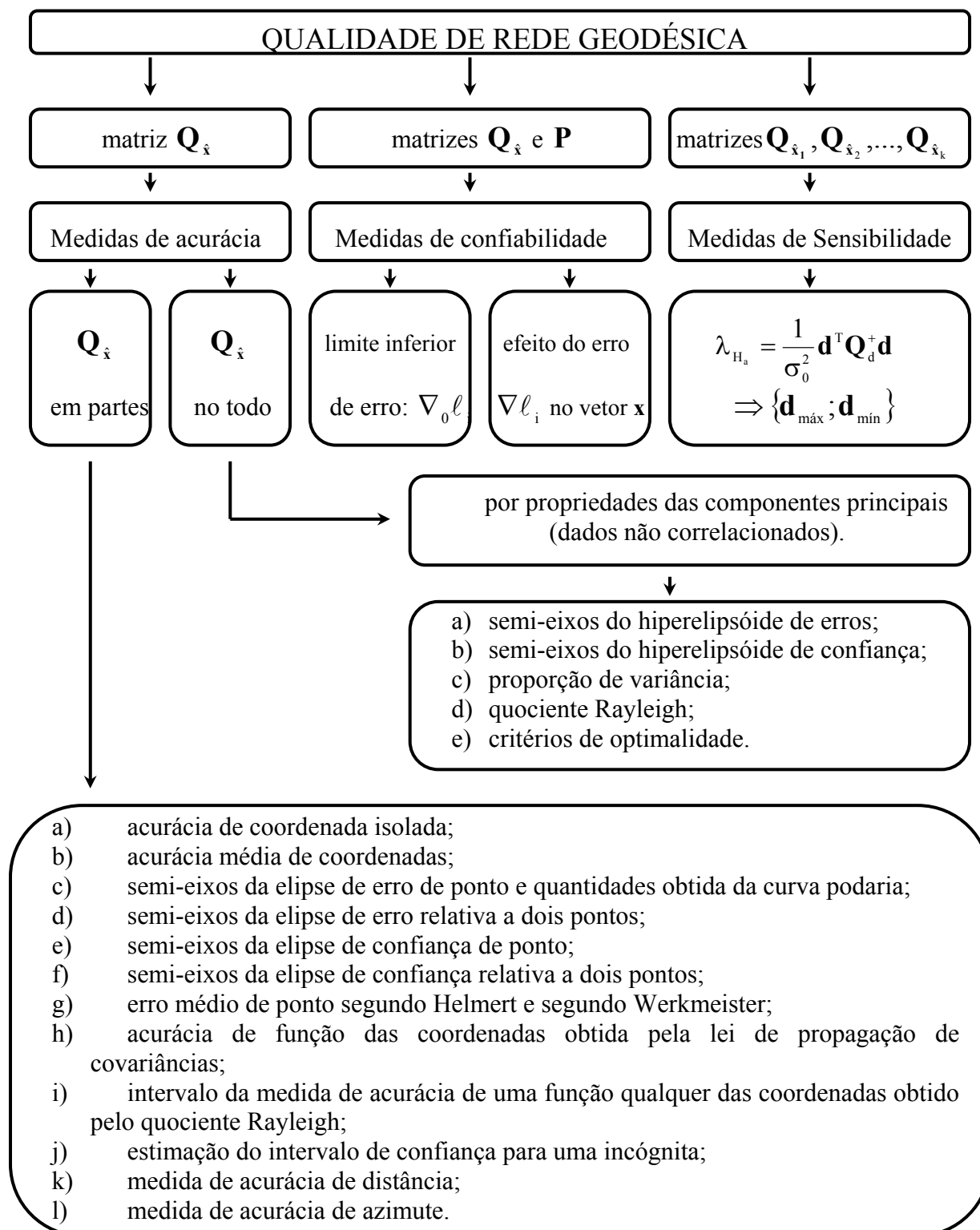


Figura 2.2 – Medidas de qualidade de rede geodésica.

Fonte: MORAES, 2001, p. 184.

2.8. MEDIDAS DE ACURÁCIA

O termo acurácia (lat. *accuratio*; al. *Genauigkeit*) é a designação qualitativa para o tamanho da aproximação proveniente do resultado da determinação para o valor de referência. Este valor pode estar em conformidade com a definição ou convenção do valor verdadeiro, do valor correto ou do valor esperado (DIN⁴, 1987, p. 3 apud MORAES, 2001, p.180).

Neste sentido, a acurácia é o grau de conformidade de um resultado com um padrão no que diz respeito à qualidade. Segundo o padrão de referência, os atributos absoluto, relativo, interno e externo podem objetivar o termo acurácia (WENDERLEIN⁵, 1988, p. 147, apud MORAES, 2001, p. 180).

A medida de acurácia depende de dois critérios: a precisão e a correção, em que a precisão é medida de dispersão das observações em torno de um valor esperado (geralmente médio) e a correção é a medida do afastamento deste valor médio em relação ao valor verdadeiro (teórico).

A qualidade de um ajustamento de rede é caracterizado pelas medidas de acurácia e pelas medidas de confiabilidade. Estas medidas definem a região em que o valor verdadeiro ou o valor de referência se situa com uma probabilidade pretendida. O conceito de confiabilidade vincula a detecção dos erros grosseiros, que podem falsificar os resultados das observações geodésicas (MORAES, 2001, p. 185).

⁴ DIN 55 350: Teil 13: **Begriffe der Qualitätssicherung und Statistik** – Begriffe zur Genauigkeit von Ermittlungsverfahren und Ermittlungsergebnisse, Berlin.

⁵ WENDERLEIN, W.(1988); **Zum Begriff Genauigkeit in der Geodäsie**. Allgemeine Vermessungs-Nachrichten, Karlsruhe, v. 95, n. 4, p.147-148.

Segundo o modo de a matriz \mathbf{Q}_x ser empregada, são distinguidas as medidas de acurácia, para uma rede, em medidas locais e em medidas globais (LEONHARD & NIEMEIER, 1980, p. 488-489; DUPRAZ & NIEMEIER, 1981, P. 394; NIEMEIER, 1985a, P. 160; JÄGER & BILL, 1986, p. 75-79; MARSHAL, 1989, p. 98-112).

As medidas locais de acurácia são aquelas obtidas das submatrizes da matriz de cofatores de covariância das incógnitas, conforme ilustra a figura (2.2) e cada submatriz utilizada é a portadora das informações de acurácia das incógnitas de um ponto ou de dois pontos da rede geodésica.

As medidas globais de acurácia são aquelas obtidas da matriz completa de cofatores das incógnitas, a qual é a portadora das informações de acurácia da rede geodésica como um todo.

2.8.1. Estimativa de Medidas Locais de Acurácia

Nesta seção apresentam-se os conceitos para rede do espaço de duas dimensões. Nas estimativas de medidas locais de acurácia sob o nível de significância α , a variância de uma observação de peso unitário *a priori*, denotada pelo símbolo α_0^2 , é igual à variância de uma observação de peso unitário *a posteriori*, denotada pelo símbolo $\hat{\alpha}_0^2$. Esta última é obtida do ajustamento.

2.8.1.1. Semi-eixos da Elipse de Erro de Ponto, quantidades obtidas da Curva Podária e semi-eixos da Elipse de Confiança

A expressão dos semi-eixos a e b , e o ângulo de orientação θ da elipse são dadas por:

$$a = \hat{\sigma}_{\max} = \hat{\sigma}_0 \sqrt{\frac{1}{2}(q_{y_i y_i} + q_{x_i x_i} + w)} = \hat{\sigma}_0 \sqrt{\lambda_{\max}}, \quad (2.44)$$

$$b = \hat{\sigma}_{\min} = \hat{\sigma}_0 \sqrt{\frac{1}{2}(q_{y_i y_i} + q_{x_i x_i} - w)} = \hat{\sigma}_0 \sqrt{\lambda_{\min}}, \quad (2.45)$$

em que

$$w = \sqrt{(q_{y_i y_i} - q_{x_i x_i})^2 + 4q_{y_i x_i}^2}, \quad (2.46)$$

$$\theta = \frac{1}{2} \arctan \frac{2q_{y_i x_i}}{q_{x_i x_i} - q_{y_i y_i}}. \quad (2.47)$$

O ângulo $\theta \leq \pi$ é o azimute da direção do semi-eixo a e $\theta + \pi/2$ é o azimute da direção do semi-eixo b .

A interpretação geométrica da elipse de erro, na hipótese da distribuição normal de erros, é que ela delimita a porção do plano que, com 39% de probabilidade, contém a posição verdadeira do ponto (SURACE⁶, 1995, p. 185 apud MORAES, 2001, p. 186).

A condição de isotropicidade de erros sob um nível de significância α é a equivalência entre a curva podaria e a elipse do erro. Quanto mais esta elipse se aproxima de uma circunferência, tanto mais a curva podaria e elipse tendem a se equivaler.

⁶ SURACE, L. (1995).; **Analisi delle precisioni della rete geodetica fondamentale nel sistema IGM 83**. Bolletino di Geodesia e Scienze Affini, Firenze, v. 54, n. 2, p. 177-208.

Define-se matematicamente a curva podária – também denominada curva pedal (al. *Fußpunktskurve*) e curva de erro de um ponto – de uma curva em relação a um ponto P_i , como o lugar geométrico dos pés das perpendiculares (P) traçadas pelo ponto P_i às tangentes a curva, conforme a figura (2.3).

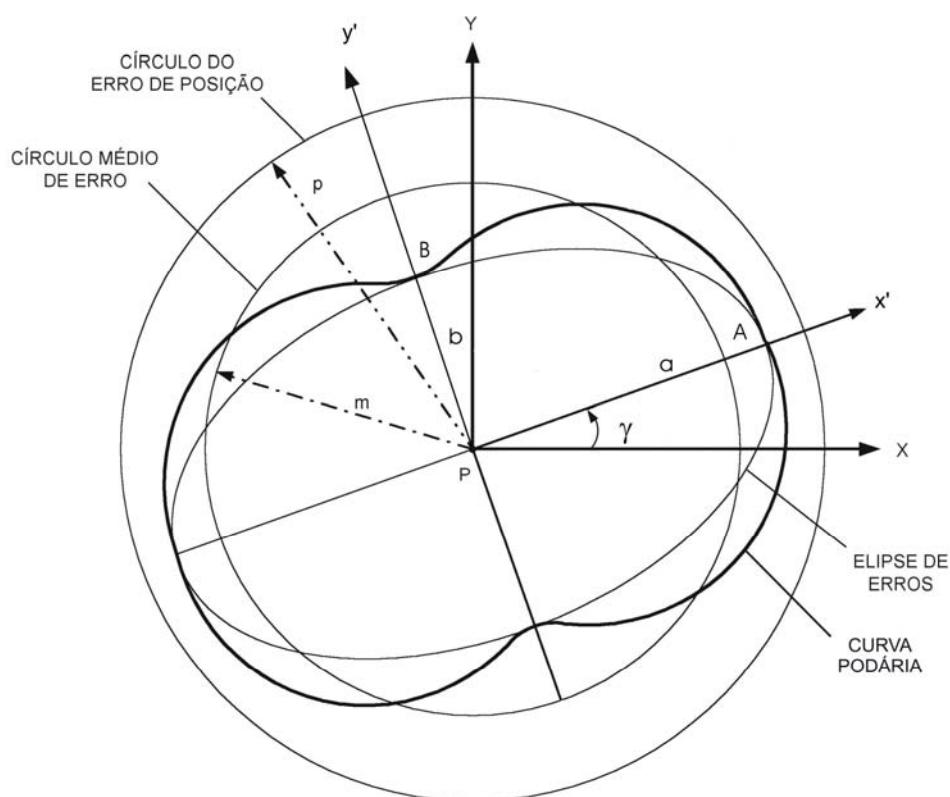


Figura 2.3 – Elipse de erro e sua curva podária.

Fonte: VERESS, 1973, p. 436.

A equação da curva podária em coordenadas polares (JORDAN-EGGERT, 1962a, p. 444; PROCHÁZKA, 1966, p. 143) é

$$\hat{\sigma}_{ij} = \sqrt{a^2 \cos^2(A_{ij} - \theta_i) + b^2 \sin^2(A_{ij} - \theta_i)}, \text{ com } 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad (2.48)$$

em que os símbolos a e b designam os semi-eixos maior e menor da elipse de erro, respectivamente, A_{ij} é o azimute da direção ij e θ_i é o ângulo de direção da elipse. Para qualquer direção dada por A_{ij} , a (2.51) fornece a medida de acurácia das coordenadas do ponto. Se A_{ij} for igual a θ_i , então $\hat{\sigma}_{ij}$ será igual ao semi-eixo maior da elipse; se $(A_{ij} - \theta_i)$ for igual a $\pi/2$, então $\hat{\sigma}_{ij}$ será igual ao semi-eixo menor da elipse.

O quadrado dos semi-eixos da elipse de erro de ponto por quantil da distribuição de probabilidade de qui-quadrado central sob o nível de confiança $1-\alpha$ (MORAES, 2001, P. 187). Deste modo obtém-se

$$a_c = a \sqrt{\chi_{2,1-\alpha}^2}, \quad (2.49)$$

$$b_c = b \sqrt{\chi_{2,1-\alpha}^2}. \quad (2.50)$$

2.8.1.2. Acurácia de Ponto

Crítérios escalares para as medidas de acurácia de ponto são o traço e o determinante da matriz covariância $\mathbf{K} = \hat{\sigma}_0^2 \mathbf{Q} = \hat{\sigma}_0^2 [q_{ij}]_{2 \times 2}$, os quais são designados por acurácia de ponto segundo HELMERT e segundo WERKMEISTER, respectivamente:

$$\hat{\sigma}_i^H = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{\hat{\lambda}_{m\acute{a}x} + \hat{\lambda}_{m\acute{i}n}} = \hat{\sigma}_0 \sqrt{q_{y_i y_i} + q_{x_i x_i}}, \quad (2.51)$$

$$\hat{\sigma}_i^W = \sqrt{a^2 b^2} = \sqrt{\hat{\lambda}_{m\acute{a}x} \times \hat{\lambda}_{m\acute{i}n}} = \hat{\sigma}_0 \sqrt{q_{y_i y_i} q_{x_i x_i} - q_{y_i x_i}^2}. \quad (2.52)$$

2.8.1.3. Acurácia de Função das coordenadas obtida pela lei de propagação das covariâncias

A lei da propagação de covariâncias freqüentemente recebe o nome de lei geral da propagação de erros (PELZER, 1985a, p.57). Se n incógnitas y_i forem funções de u variáveis x_j , as quais são escritas nas formas:

$$y_i = f(x_j), \quad i \in \{1, 2, \dots, n\}, \quad j \in \{1, 2, \dots, u\}, \quad (2.53)$$

$$\mathbf{y} = f(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_i \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(x_1, x_2, \dots, x_j, \dots, x_u) \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_j, \dots, x_u) \\ \vdots \\ f_i(x_1, x_2, \dots, x_j, \dots, x_u) \\ \vdots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_j, \dots, x_u) \end{bmatrix}. \quad (2.54)$$

De acordo com a lei de propagação de covariâncias, a matriz covariância das n incógnitas y_i é escrita assim:

$$\mathbf{K}_y = \mathbf{A} \mathbf{K}_x \mathbf{A}^T. \quad (2.55)$$

Se houver somente uma incógnita y como função de u variáveis, a qual é expressa por $y = f(x_1, x_2, \dots, x_j, \dots, x_u)$, a lei de propagação de covariâncias fornece o escalar $\hat{\sigma}_y^2$, o qual é expresso na forma matricial:

$$\hat{\sigma}_y^2 = \mathbf{a}^T \mathbf{K}_{\hat{\mathbf{x}}} \mathbf{a}, \quad (2.56)$$

na qual

$$\mathbf{a}^T = \left[\frac{\partial y}{\partial x_1} \quad \frac{\partial y}{\partial x_2} \quad \dots \quad \frac{\partial y}{\partial x_j} \quad \dots \quad \frac{\partial y}{\partial x_u} \right]. \quad (2.57)$$

O produto matricial (2.56) desenvolvido mostra a fórmula da propagação de covariâncias:

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_y^2 &= \left(\frac{\partial y}{\partial x_1} \right)^2 \hat{\sigma}_{x_1}^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial x_2} \right)^2 \hat{\sigma}_{x_2}^2 + \dots + \left(\frac{\partial y}{\partial x_u} \right)^2 \hat{\sigma}_{x_u}^2 + 2 \frac{\partial y}{\partial x_1} \frac{\partial y}{\partial x_2} \hat{\sigma}_{x_1 x_2} \\ &+ 2 \frac{\partial y}{\partial x_1} \frac{\partial y}{\partial x_3} \hat{\sigma}_{x_1 x_3} + \dots + 2 \frac{\partial y}{\partial x_1} \frac{\partial y}{\partial x_u} \hat{\sigma}_{x_1 x_u} + \dots + 2 \frac{\partial y}{\partial x_2} \frac{\partial y}{\partial x_3} \hat{\sigma}_{x_2 x_3} + \dots \\ &+ 2 \frac{\partial y}{\partial x_2} \frac{\partial y}{\partial x_u} \hat{\sigma}_{x_2 x_u} + \dots + 2 \frac{\partial y}{\partial x_{u-1}} \frac{\partial y}{\partial x_u} \hat{\sigma}_{x_{u-1} x_u} \end{aligned} \quad (2.58)$$

As derivadas parciais são calculadas com os valores aproximados das variáveis $x_1, x_2, \dots, x_j, \dots, x_u$.

2.8.1.4. Intervalo da Medida de Acurácia de uma função das coordenadas obtido pelo quociente Rayleigh

O quociente Rayleigh para uma função $y = f(x_1, x_2, \dots, x_j, \dots, x_u)$ é

$$0 \leq \hat{\lambda}_{\min} \hat{\sigma}_0^2(\mathbf{a}^T \mathbf{a}) \leq \hat{\lambda}_{\max} \hat{\sigma}_0^2(\mathbf{a}^T \mathbf{a}), \quad (2.59)$$

em que o vetor \mathbf{a} é dado pela (2.57).

Para um conjunto de funções $y_i = f(\mathbf{x}_j)$, $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, $j \in \{1, 2, \dots, u\}$, este quociente é escrito

$$0 \leq \hat{\lambda}_{\min} \hat{\sigma}_0^2(\mathbf{a}^T \mathbf{Q}_x \mathbf{a}) \leq \hat{\lambda}_{\max} \hat{\sigma}_0^2(\mathbf{a}^T \mathbf{Q}_x \mathbf{a}). \quad (2.60)$$

2.8.2. Estimativa de Medidas Globais de Acurácia

2.8.2.1. Semi-eixos do hiperelipsóide de erro e do hiperelipsóide de confiança

Com a decomposição espectral de \mathbf{Q}_x , os vetores próprios e p valores próprios são ordenados conforme mostrado a seguir:

$$(\bar{m}_1, \lambda_1), (\bar{m}_2, \lambda_2), \dots, (\bar{m}_i, \lambda_i), \dots, (\bar{m}_p, \lambda_p). \quad (2.61)$$

Os semi-eixos são calculados pela seguinte expressão:

$$|a_i| = \bar{m}_i \sqrt{c^2 \lambda_i}, i \in \{1, 2, \dots, p\}. \quad (2.62)$$

Pela propriedade da decomposição da variância em componentes principais, podem ser considerados somente os semi-eixos representativos.

Neste hiperelipsóide, pode ser aplicado o teste de esfericidade dado pela expressão a seguir:

$$H_0 : \hat{\lambda}_{k+1} = \hat{\lambda}_{k+2} = \dots = \hat{\lambda}_{k+b}. \quad (2.63)$$

A matriz $\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}}$ define um elipsóide de dimensão u , no qual os semi-eixos são calculados pela raiz quadrada positiva dos valores próprios, e a orientação é dada pelos vetores próprios.

O valor próprio máximo ($\lambda_{máx}$) pode ser associado com o vetor próprio que o corresponde na decomposição espectral.

A região de confiança para a incógnita x_i pode ser generalizada para o vetor \mathbf{x} que contém as u incógnitas da rede geodésica, como:

$$\Pr\left[(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}})^T \mathbf{K}_{\hat{\mathbf{x}}}^+ (\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}) < \chi_{r,1-\alpha}^2\right] = 1 - \alpha. \quad (2.64)$$

na qual r é o posto de $\mathbf{K}_{\hat{\mathbf{x}}}^+$, a qual pode ser calculada por decomposição espectral, e $\chi_{r,1-\alpha}^2$ é o valor crítico da distribuição qui-quadrado central (MORAES,2001, p. 192).

2.8.2.2. Quociente Rayleigh

Seja $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ um vetor qualquer de ordem $n \times 1$ e $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{n \times n}$ uma matriz simétrica com os valores próprios $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_i \geq \dots \geq \lambda_n$ e

respectivos vetores próprios normalizados $\vec{m}_1, \vec{m}_2, \dots, \vec{m}_i, \dots, \vec{m}_n$. A expressão a seguir é denominada quociente Rayleigh (ZURMÜHL⁷ apud MORAES, 2001, p. 192):

$$R_h = \frac{\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}}{\mathbf{x}^T \mathbf{x}}. \quad (2.65)$$

Procura-se os valores extremos de R_h para a variável \mathbf{x} ,

ou seja, $\lambda_n \leq \frac{\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}}{\mathbf{x}^T \mathbf{x}} \leq \lambda_1$ (MATHAI & PROVOST⁸ apud MORAES, 2001, p. 192). A condição necessária é que a primeira derivada da função R_h em relação a variável \mathbf{x} seja nula:

$$\frac{\partial R_h}{\partial \mathbf{x}} = 0. \quad (2.66)$$

Desenvolvendo essa expressão, tem-se:

$$\frac{\partial R_h}{\partial \mathbf{x}} = \frac{1}{\mathbf{x}^T \mathbf{x}} 2\mathbf{A} \mathbf{x} - \frac{\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}}{(\mathbf{x}^T \mathbf{x})^2} 2\mathbf{x} = \frac{2}{\mathbf{x}^T \mathbf{x}} (\mathbf{A} \mathbf{x} - R_h \mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x}^T \mathbf{x} \neq 0, \quad (2.67)$$

$$\mathbf{A} \mathbf{x} - R_h \mathbf{x} = 0. \quad (2.68)$$

⁷ ZURMÜHL, R. (1950).; **Matrizen**: eine Darstellung für Ingenieure. Berlin: Springer.

⁸ MATHAI, A.M.; PROVOST, S.B. (1992).; **Quadratic forms in random variables: theory and applications**. New York: Dekker.

O número real R_h pode ser escrito com base no valor próprio λ , o que toma a forma de um problema de valor próprio especial:

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})\mathbf{x} = \mathbf{0}. \quad (2.69)$$

Os valores extremos do quociente Rayleigh procurados são o valor próprio máximo $\lambda_{\text{máx}}$ e o valor próprio mínimo $\lambda_{\text{mín}}$. Pré-multiplicando a (2.68) por \mathbf{x}^T , tem-se:

$$R_h = \frac{\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}}{\mathbf{x}^T \mathbf{x}}. \quad (2.70)$$

Da (2.70) extraem-se os extremos do quociente Rayleigh, que podem ser escritos nas formas (KLEIN⁹ apud MORAES, 2001, p. 193):

$$R_h \begin{cases} \text{máx} \\ \text{mín} \end{cases} \text{ se } \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} = \begin{cases} \text{máx} \\ \text{mín} \end{cases} \text{ para } \mathbf{x}^T \mathbf{x} = 1, \quad (2.71)$$

ou

$$R_h \begin{cases} \text{máx} \\ \text{mín} \end{cases} \text{ se } \mathbf{x}^T \mathbf{x} = \begin{cases} \text{mín} \\ \text{máx} \end{cases} \text{ para } \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} = 1. \quad (2.72)$$

⁹ KLEIN, U. (1997).; **Analyse und Vergleich unterschiedlicher Modelle der dreidimensionalen Geodäsie**. Deutsche Geodätische Kommission bei der Bayerischen Akademie der Wissenschaften, München, série C, n. 479.

Para uma função linear ou não linear $\varphi = \mathbf{f}^T \mathbf{x}$ ou $\varphi = f(\mathbf{x})$ resulta a variância σ_φ^2 pela lei da propagação de covariâncias (REISSMANN, 1980, p. 82, 177):

$$\sigma_\varphi^2 = \mathbf{f}^T \mathbf{Q}_x \mathbf{f}, \quad (2.73)$$

em que

$$f = f(x, y, z) = f(x_0, y_0, z_0) + \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz = f_0 + \mathbf{f}^T \mathbf{x}, \quad (2.74)$$

$$\mathbf{f}^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \end{bmatrix}, \quad (2.75)$$

$$\mathbf{x}^T = [dx \quad dy \quad dz], \quad (2.76)$$

$$\mathbf{Q}_x = \begin{bmatrix} q_{xx} & & \\ q_{xy} & q_{yy} & \\ q_{xz} & q_{yz} & q_{zz} \end{bmatrix}_{\text{Simétrica}}, \quad (2.77)$$

$$f_0 = f(x_0, y_0, z_0). \quad (2.78)$$

Uma estimativa de σ_φ^2 é obtida com ajuda do quociente Rayleigh pela expressão

$$\mathbf{f}^T \mathbf{f} \lambda_{\text{mín}} \leq \sigma_\varphi^2 \leq \mathbf{f}^T \mathbf{f} \lambda_{\text{máx}}. \quad (2.79)$$

A expressão fornece o limite superior para a variância da função φ , o qual depende do valor próprio máximo de $\mathbf{Q}_{\hat{x}}$, de onde decorre a exigência de que o valor próprio máximo deve ser mínimo. Quanto menor for $\lambda_{máx}$, melhor será a acurácia das funções e, por conseguinte, da rede sob apreciação.

2.8.2.3. Critérios de Optimalidade

A acurácia de uma rede é tanto mais alta quanto menor for o máximo valor próprio obtido da matriz $\mathbf{K}_{\hat{x}}$. Geometricamente, calcula-se pela (2.65) um elipsóide de confiança de dimensão \mathbf{p} que contém a posição do vetor \mathbf{x} de todos os pontos com uma probabilidade conhecida $(1 - \alpha)$. Alguns dos mais importantes critérios de optimalidade para a rede geodésica (DUPRAZ e NIEMEIER, 1979, p. 70-71; PELZER, 1980b, p. 57; DUPRAZ e NIEMEIER, 1981, p. 387-389) são:

$$\text{a) } \det(\mathbf{Q}_{\hat{x}}) = \lambda_1 \times \lambda_2 \times \dots \times \lambda_i \times \dots \times \lambda_u = \prod_{i=1}^u \lambda_i = \text{mín}; \quad (2.80)$$

$$\text{b) } \text{tr}(\mathbf{Q}_{\hat{x}}) = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_i + \dots + \lambda_u = \sum_{i=1}^u \lambda_i = \text{mín}; \quad (2.81)$$

$$\text{c) } \lambda_{máx} = \text{mín}; \quad (2.82)$$

$$\text{d) } \frac{\lambda_{máx}}{\lambda_{mín}} = 1; \quad (2.83)$$

$$e) \lambda_{m\acute{a}x} - \lambda_{m\acute{i}n} = m\acute{i}n; \quad (2.84)$$

$$f) \mathbf{p}_1 = \mathbf{m}_1 \sqrt{\lambda_{m\acute{a}x}}. \quad (2.85)$$

A (2.80) é denominada critério volume de confiança, e seu valor deve ser o mínimo. O volume do elipsóide de confiança é proporcional ao produto de seus semi-eixos e, por isso, é empregado como uma das medidas de acurácia (PELZER apud MORAES, 2001, p. 195). A expressão (2.81) significa que a soma dos quadrados dos semi-eixos deve ser mínima; a (2.82) significa que o quadrado do semi-eixo maior deve ser mínimo; a (2.83) é a condição de isotropia, isto é, a medida de acurácia do ponto é a mesma em todas as direções; a (2.84) é a condição de homogeneidade, isto é, as elipses têm a mesma forma, o mesmo semi-eixo maior e o mesmo semi-eixo menor e a (2.85), na qual \mathbf{m}_1 é o vetor próprio, correspondente a $\lambda_{m\acute{a}x}$ e tem as componentes que representam o comprimento da projeção do semi-eixo maior no eixo das variáveis.

As componentes do vetor dado pela (2.85) é uma representação unidimensional (projeção nos eixos das coordenadas originais, conforme ilustra a figura 2.4) do semi-eixo maior do elipsóide dimensão \mathbf{u} nas quais $\sqrt{\lambda_1}$ é o comprimento do semi-eixo maior e as componentes do vetor \mathbf{m}_1 são os cossenos diretores e, por conseguinte, os ângulos diretores podem ser calculados.

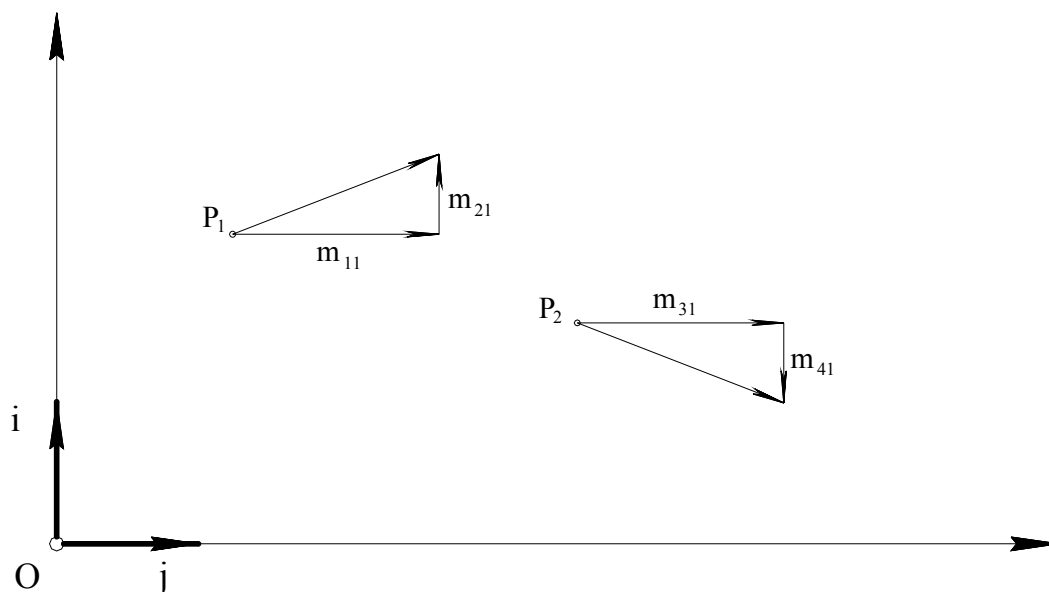


Figura 2.4 – Representação dos vetores próprios.

Fonte: MORAES, 2001, p. 195.

No caso de uma rede geodésica horizontal, à cada coordenada é associada uma componente do vetor $\mathbf{p}_1 = \mathbf{m}_1 \sqrt{\lambda_{máx}}$ (BAIXIANG & MINYI¹⁰ apud MORAES, 2001, p. 195). Por exemplo, da (2.98) retiram-se as componentes $\mathbf{m}_1 \sqrt{\lambda_{máx}}$ que é a projeção do semi-eixo do elipsóide de dimensão \mathbf{p} no eixo x, $\mathbf{m}_1 \sqrt{\lambda_{máx}}$ que é a projeção do semi-eixo desse elipsóide no eixo y e assim sucessivamente para os demais pontos. A resultante dessas projeções indica a direção ao longo da qual existe “fraqueza” na rede geodésica.

Os valores próprios representam a medida para juízo quantitativo de rede geodésica e seus vetores próprios representam as grandezas geométricas qualitativas correspondentes (JÄGER, 1988, p. 83). Se o

¹⁰ BAIXING, L.; MINYI, C. (1993).; **A problem in the application of the error ellipsoid.** Survey review, Gristol, v. 32, n .250, p. 239-243.

$\det(\mathbf{Q}_{\hat{x}})$ for nulo, o critério utilizará o produto das $\lambda_i \neq 0$ (KUANG, 1996, p. 154).

2.9. MEDIDAS DE CONFIABILIDADE

A teoria da confiabilidade serve para a decisão se um erro é detectável e qual influência tem o erro-detectável nos resultados do ajustamento. Portanto é parte de um conceito para a avaliação da qualidade do resultado do ajustamento.

Os erros que não foram eliminados das observações ocasionam a alteração dos resultados, alterando também as coordenadas. Por isso são necessárias medidas que representam o quanto são confiáveis as observações. A essas medidas dá-se o nome de medidas de confiabilidade.

O conceito de medidas de confiabilidade introduzido por BAARDA (1967, 1968) se subdivide em confiabilidade interna e confiabilidade externa. A primeira quantifica a menor porção do erro existente na observação que pode ser localizado com uma dada probabilidade. A segunda quantifica a influência dos erros não-detectáveis nas coordenadas dos pontos. Na seqüência, os conceitos de estimativas de confiabilidade interna e confiabilidade externa são apresentados resumidamente.

2.9.1. Estatística para detecção de erros grosseiros

A fim de empregar o modelo estocástico, calcula-se a estatística

$$T = \frac{\mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v}}{\sigma_0^2} = \frac{\hat{\sigma}_0^2}{\sigma_0^2} (n - u) \sim \chi_r^2, \quad (2.86)$$

para a detecção de erros grosseiros, em que $(n - u)$ é o número de graus de liberdade do ajustamento, da mesma forma o número de equações superabundantes do sistema de equações normais. A variância de uma observação de peso unitário a priori σ_0^2 , sob o nível de significância α , deve ser testada estatisticamente com a variância de uma observação de peso unitário a posteriori $\hat{\sigma}_0^2$.

No presente trabalho foi aplicada esta estatística, obtendo-se um valor dentro do nível de significância de 5%, tendo-se utilizado um valor para variância nominal do instrumento superior à fornecida pelo fabricante.

2.9.2. Redundância

O número de equações superabundantes \mathbf{r} do sistema de equações normais oriundas do modelo linear $\vec{l} + \vec{v} = \mathbf{A}\vec{x}$ é a diferença entre o número de observações \mathbf{n} , que é igual ao número de equações de observação, e o número de parâmetros \mathbf{u} , que estão sendo estimados. Ao número $r = n - u$ (graus de liberdade) dá-se o nome de redundância do sistema. A contribuição de cada observação l_i à redundância \mathbf{r} recebe o nome de redundância parcial r_i (FÖRSTNER¹¹ apud MORAES, 2001, p.197) e é expresso pela relação:

¹¹ FÖRSTNER, W. (1979).; **Das program TRINA zur Ausgleichung und Gütebeurteilung geodätischer Lagenetze**. Zeitschrift für Vermessungswesen, Stuttgart, v. 104, n. 2, p. 61-72.

$$r_i = (\mathbf{Q}_v \mathbf{P})_{ii}, \quad (2.87)$$

em que \mathbf{Q}_v é a matriz de cofatores de covariância dos resíduos v_i contidos no vetor \mathbf{v} , \mathbf{P} é a matriz dos pesos das observações l_i contidas no vetor \vec{l} , e o sub-índice ii indica o i -ésimo elemento da diagonal.

O produto matricial $\mathbf{Q}_v \mathbf{P}$ resulta em uma matriz idempotente cujo traço é a redundância r (MORAES, 2001, p. 197):

$$tr(\mathbf{Q}_v \mathbf{P}) = \sum_{i=1}^n r_i = r. \quad (2.88)$$

A (2.88) é obtida mediante a matriz dos cofatores de covariância dos resíduos:

$$\mathbf{Q}_v = \mathbf{Q}_I - \mathbf{A}(\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T, \quad (2.89)$$

a qual é pós-multiplicada pela matriz \mathbf{P}

$$\mathbf{Q}_v \mathbf{P} = \mathbf{Q}_I \mathbf{P} - \mathbf{A}(\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{P} = \vec{l} - \mathbf{A}(\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{P} \quad (2.90)$$

e, pela propriedade do traço, tem-se

$$\begin{aligned} tr(\mathbf{Q}_v \mathbf{P}) &= tr(\vec{l}) - tr\left[\mathbf{A}(\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{P}\right] \\ &= n - tr\left[(\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{P}\right] = n - u = r. \end{aligned} \quad (2.91)$$

Os elementos da diagonal do produto $\mathbf{Q}_v\mathbf{P}$, os quais são denotados por $r_i = (\mathbf{Q}_v\mathbf{P})_{ii}$, mostram a distribuição da redundância nas observações (FÖRSTNER apud MORAES, 2001, p.198). O número r_i é positivo porque a matriz dos pesos é diagonal, situa-se no intervalo $0 \leq r_i \leq 1$ e chama-se redundância parcial. Este intervalo é obtido da (2.89), somando os seus membros por $-\mathbf{P}^{-1}$:

$$\mathbf{Q}_v - \mathbf{P}^{-1} = \mathbf{Q}_I - \mathbf{P}^{-1} - \mathbf{A}(\mathbf{A}^T\mathbf{P}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^T \quad (2.92)$$

$$= -\mathbf{A}(\mathbf{A}^T\mathbf{P}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^T \quad (2.93)$$

Multiplicando a (2.94) por \mathbf{P} , tem-se

$$\mathbf{Q}_v\mathbf{P} - \vec{l} = \mathbf{A}(\mathbf{A}^T\mathbf{P}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^T\mathbf{P}. \quad (2.94)$$

Na (2.95), o i -ésimo elemento da diagonal é escrito

$$(\mathbf{Q}_v\mathbf{P})_{ii} - 1 = -\left[\mathbf{A}(\mathbf{A}^T\mathbf{P}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^T\mathbf{P}\right]_{ii}. \quad (2.95)$$

Os elementos da diagonal do produto $\mathbf{Q}_v\mathbf{P}$ são todos positivos. O produto $\mathbf{A}(\mathbf{A}^T\mathbf{P}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^T$ é matriz de cofatores de covariância e, por isso, os elementos de sua diagonal são todos positivos. Os elementos da diagonal \mathbf{P}

também são todos positivos. Então, a (2.95) fornece a seguinte desigualdade (MORAES, 2001, p. 198):

$$0 \leq (\mathbf{Q}_v \mathbf{P})_{ii} \leq 1 \text{ ou } 0 \leq r_i \leq 1. \quad (2.96)$$

A partir da solução

$$\bar{x} = (\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{P} \bar{l}, \quad (2.97)$$

obtem-se a expressão do vetor dos resíduos

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \mathbf{A} \hat{\mathbf{x}} - \bar{l} = \mathbf{A} (\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{P} \bar{l} - \bar{l} = (\mathbf{Q}_I - \mathbf{Q}_v) \mathbf{P} \bar{l} - \bar{l} \\ &= -\mathbf{Q}_v \mathbf{P} \bar{l} + \mathbf{Q}_I \mathbf{P} \bar{l} - \bar{l} = -\mathbf{Q}_v \mathbf{P} \bar{l}. \end{aligned} \quad (2.98)$$

2.9.3. Medida de confiabilidade interna

Sob o conceito de confiabilidade interna de uma rede geodésica são reunidos todos os critérios que servem para a detecção de erros grosseiros. A confiabilidade interna indica o erro mínimo que se encontra em uma observação (GRIMM¹² *et al* apud MORAES, 2001, p. 199) que é sensível ao teste.

Para o erro grosseiro ∇l_i , presente na i -ésima observação l_i , que o teste pode detectar corretamente com segurança mínima, a confiabilidade é descrita pela quantidade

¹² GRIMM-PITZINGER, A.; HANKE, K. (1988).; **Zur äußere Zeverlässigkeit in ingenieurgeodätischen Netze**. Zeitschrift für Vermessungswesen, Stuttgart, v. 113, n. 3, p. 134-137.

$$\nabla_0 l_i. \quad (2.99)$$

O valor limite inferior depende (FÖRSTNER, 1979, p. 66; BENNING, 1983, p. 221):

- a) da acurácia das observações, a qual é descrita pelo desvio-padrão σ_i ;
- b) da geometria da rede juntamente com as observações, a qual é descrita pela redundância parcial r_i ;
- c) do nível de significância α ;
- d) da qualidade ou poder do teste, ou seja, da probabilidade para detectar a observação com erro grosseiro;
- e) do parâmetro de não-centralidade δ .

O valor limite inferior é definido pela expressão:

$$\nabla_0 l_i = \sigma_i \frac{\delta_0}{\sqrt{r_i}}. \quad (2.100)$$

Essa expressão indica que, quanto menor for a redundância parcial r_i , tanto maior será o erro grosseiro. A redundância parcial é calculada a partir do resíduo q_{vv_i} e do peso da observação p_i :

$$r_i = q_{vv_i} p_i. \quad (2.101)$$

No quadro 2.1 estão os intervalos recomendados para a orientação da decisão sobre a controlabilidade de observações mediante as redundâncias parciais.

Quadro 2.1 – Controle de observações por redundâncias parciais.

INTERVALO	CONTROLABILIDADE
$0,00 \leq r_i < 0,01$	não há
$0,01 \leq r_i < 0,10$	ruim
$0,10 \leq r_i < 0,30$	suficiente
$0,30 \leq r_i < 1,00$	boa

Fonte: MÜRLE & BILL, 1984, p. 48.

O valor específico do nível de significância α adotado, $1 - \alpha$ indica a região específica que permite estimar a qualidade ou poder do teste para a detecção de erros grosseiros, e é designado por **k**:

- a) os erros grosseiros são detectados em $100(1 - \alpha)\%$ dos casos;
- b) os erros grosseiros permanecem não detectados em $100\alpha\%$ dos casos.

No presente trabalho o valor de **k** utilizado foi o de 1,96, sendo os erros grosseiros detectados em 95% dos casos.

2.9.3.1. Localização de erros grosseiros nas observações

A estatística do teste de erros grosseiros para a *i*-ésima observação – teste *data snooping* de BAARDA – é designada por w_i e tem a expressão:

$$w_i = \frac{v_i}{\alpha_{l_i} \sqrt{q_{v_i}}}, \quad (2.102)$$

com $w_i \sim$:

$$\sqrt{F_{1,\alpha}} = N(0,1) \text{ sob } H_0, \quad (2.103)$$

$$\sqrt{F'_{1,\infty;\lambda_0}} = N(\lambda_0,1) \text{ sob } H_a. \quad (2.104)$$

Sob a hipótese nula, segundo a qual nenhum erro grosseiro existe na observação l_i , a estatística $(w_i)^2$ possui distribuição **F** central, caso contrário, a hipótese alternativa, segundo a qual existe erro na observação l_i , é correta, a estatística $(w_i)^2$ possui distribuição **F** não central (HAHN et al., 1989, p. 237).

2.9.4. Medida de confiabilidade externa

Os efeitos de erros grosseiros sobre os parâmetros incógnitos e sobre as funções destes parâmetros são averiguados sob o conceito de confiabilidade externa.

O vetor das correções \bar{x} (que é a solução das equações normais no ajustamento de observações geodésicas) na presença de um erro grosseiro ∇l_i é expresso por:

$$\hat{\bar{x}} = -\mathbf{N}\mathbf{A}^T \mathbf{P}(\mathbf{I} - \mathbf{e}_i \nabla l_i) = -\mathbf{N}\mathbf{A}^T \mathbf{P}\mathbf{I} + \mathbf{N}^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{P}\mathbf{e}_i \nabla l_i = -\bar{x} + \nabla \bar{x}, \quad (2.105)$$

em que \mathbf{N} é a matriz dos coeficientes das equações normais, \mathbf{A} é a matriz das derivadas das equações de observação em relação às incógnitas, \mathbf{P} é a matriz dos pesos das observações, \mathbf{I} é o vetor da diferença entre o vetor dos valores calculados e vetor dos valores observados e \mathbf{e}_i é a i -ésima coluna de uma matriz identidade $n \times n$. Portanto, o efeito do erro grosseiro ∇l_i no vetor solução, é dado por:

$$\nabla \bar{x} = \mathbf{N}^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{e}_i \nabla l_i. \quad (2.106)$$

3. MATERIAL E METODOLOGIA

3.1. MATERIAL

- a) O Serviço de comutação Bibliográfica (COMUT) que providencia referências bibliográficas de outras bibliotecas brasileiras e internacionais;
- b) Acervo da biblioteca setorial do Centro de Ciências Rurais da Universidade Federal de Santa Maria;
- c) Arquivos disponíveis pela Internet;
- d) Nível Ni2 da CARL ZEISS;
- e) Micrômetro de placas planas;
- f) Régua de Invar, com graduação de 5 mm;
- g) Sapata para apoio da mira;
- h) Recursos computacionais de *software* e *hardware* do setor de Geodésia do DER/UFSM;
- i) Programa computacional Matlab 5.1;
- j) Programa computacional Autocad 2000;
- k) Programa computacional Posição 2003;
- l) Estação Total Leica TC-307 com precisão de 1mm + 1ppm.

3.2. METODOLOGIA

Para a confecção de uma ordenação didática dos procedimentos de ajustamento e a análise da qualidade de uma rede geodésica altimétrica geométrica, partiu-se de dados reais de campo, de forma a gerar um exemplo para facilitar o acompanhamento e o entendimento dos conceitos e da lógica envolvida. Para isso, realizou-se uma rede de dez pontos devidamente monumentados no campus da Universidade Federal de Santa Maria, os quais foram nivelados como descrito a seguir.

3.2.1. O experimento

O experimento constou de 10 pontos monumentados, no interior do campus da UFSM, sendo que 8 desses pontos (numerados de 1 a 8) tiveram suas cotas (aqui chamadas de H) estimadas no ajustamento. O vetor das incógnitas, portanto, tem dimensão 8×1 e é designado por \vec{x} . O levantamento foi amarrado a dois pontos fixos cujas coordenadas altimétricas foram injuncionadas no ajustamento. São eles o ponto $PA1 = 92,01541$ m e o ponto $PA2 = 86,03135$ m.

As distâncias horizontais entre os pontos (necessária para a confecção da matriz dos pesos) foram medidas com uma estação total eletrônica Leica TC307, cuja precisão linear é de $1 \text{ mm} + 1 \text{ ppm}$. O vetor d das distâncias horizontais é mostrado a seguir:

$$d = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \\ d_5 \\ d_6 \\ d_7 \\ d_8 \\ d_9 \\ d_{10} \\ d_{11} \\ d_{12} \\ d_{13} \\ d_{14} \\ d_{15} \\ d_{16} \\ d_{17} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,17531 \\ 0,16131 \\ 0,23637 \\ 0,07701 \\ 0,11637 \\ 0,05869 \\ 0,06315 \\ 0,11983 \\ 0,25307 \\ 0,29045 \\ 0,12445 \\ 0,26683 \\ 0,13317 \\ 0,14924 \\ 0,17932 \\ 0,17118 \\ 0,12913 \end{bmatrix}_{(km)}$$

Os desníveis medidos foram chamados de l e, sendo em número de 17, foram numerados de l_1 a l_{17} . A figura 3.1 mostra um croqui do experimento com a identificação dos pontos e das medidas.

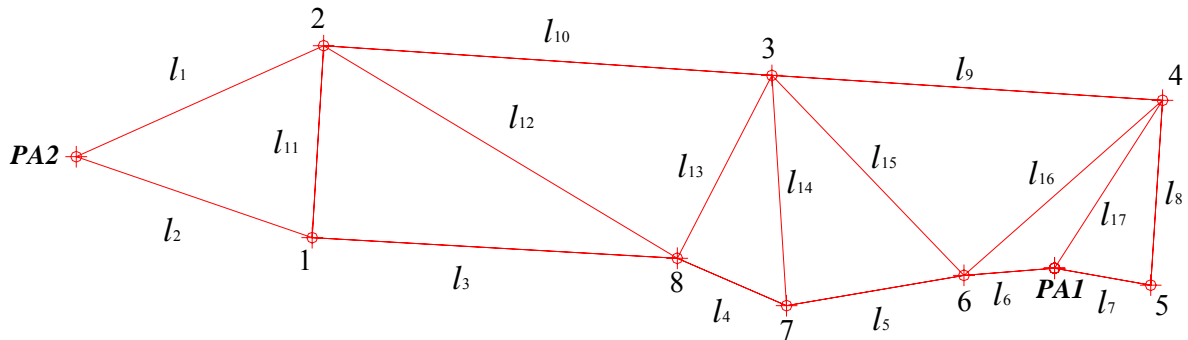


Figura 3.1. Croqui da área experimental com os pontos numerados de 1 à 8, as linhas de desnível (l_1, l_2, \dots, l_{17}) e os pontos de junção ($PA1$ e $PA2$).

3.2.2. As medidas

Procedeu-se a medição dos desníveis usando-se um nível NI2-ZEISS com micrômetro de placas planas e mira de Ínvar, graduada de 5 em 5 mm. Utilizou-se sapata de régua para o transporte da cota de um ponto a outro. Para minimizar fontes primárias de erros (principalmente curvatura terrestre), as visadas foram sempre inferiores à 30 m. Obtiveram-se 17 desníveis, sendo aceitas diferenças até 0,8 mm/km entre o nivelamento e o contra-nivelamento, limite este que diz respeito à precisão nominal do equipamento utilizado. A partir dessas medidas é montado o vetor das observações simbolizado por \vec{l}_b . Para compor o mesmo, realizou-se a média aritmética entre o nivelamento e o contra-nivelamento, dado por:

$$l_b = \frac{l_v + l_r}{2} \quad (3.1)$$

O vetor \vec{l}_b dos desníveis obtidos, em metros, é mostrado a seguir:

$${}_{17}\vec{l}_1^b = \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \\ l_4 \\ l_5 \\ l_6 \\ l_7 \\ l_8 \\ l_9 \\ l_{10} \\ l_{11} \\ l_{12} \\ l_{13} \\ l_{14} \\ l_{15} \\ l_{16} \\ l_{17} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,20927 \\ 4,16175 \\ 5,25809 \\ 2,86069 \\ 1,42555 \\ 0,59014 \\ 0,68125 \\ 2,01661 \\ 5,65493 \\ 0,47189 \\ 5,35384 \\ 0,10453 \\ 0,57397 \\ 2,28818 \\ 3,71184 \\ 1,94812 \\ 1,34614 \end{bmatrix}_{(m)}$$

O número de medidas representa o número de equações de observação possíveis de serem utilizadas, representado por n . No caso do presente trabalho $n = 17$.

3.2.3. A matriz **A**

A matriz **A** é composta pelos coeficientes das incógnitas das equações de observações que são obtidas, no caso do exemplo do presente trabalho, subtraindo-se algebricamente a cota de maior valor da cota de menor valor em cada linha. Para tanto lança-se mão da figura 3.2. Nesta figura, as setas indicam o sentido do aclave do terreno, com os valores

medidos resultando sempre positivos. Salienta-se que, se o modelo matemático empregado (equações de observação) não fosse linear, haveria a necessidade de linearização, pela série de Taylor, como é mais comum em Geodésia.

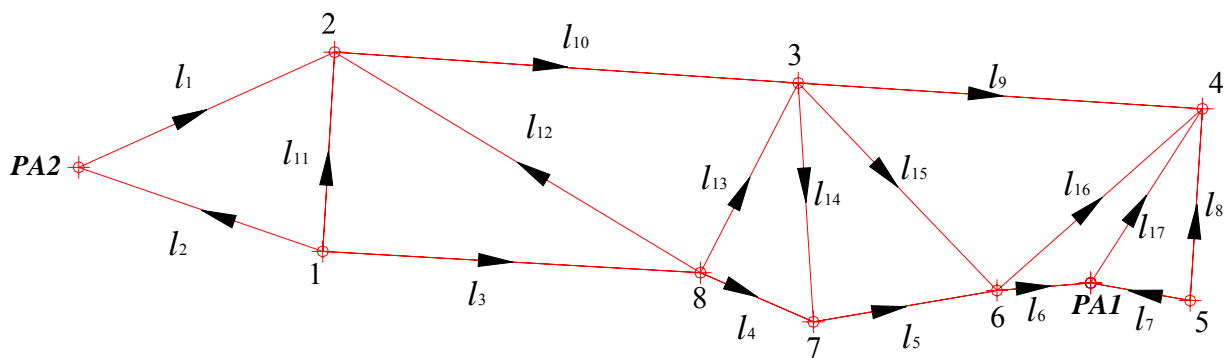


Figura 3.2. Croqui da rede experimental com as setas indicando o sentido do aclave das linhas.

As equações de observações são escritas da seguinte forma:

$$l_1^a = H_2^a - H_{PA2}^a;$$

$$l_2^a = H_{PA2}^a - H_1^a;$$

$$l_3^a = H_8^a - H_1^a;$$

$$l_4^a = H_7^a - H_8^a;$$

$$l_5^a = H_6^a - H_7^a;$$

$$l_6^a = H_{PA1}^a - H_6^a;$$

$$l_7^a = H_{PA1}^a - H_5^a;$$

$$l_8^a = H_4^a - H_5^a;$$

$$l_9^a = H_4^a - H_3^a;$$

$$l_{10}^a = H_3^a - H_2^a;$$

$$l_{11}^a = H_2^a - H_1^a;$$

$$l_{12}^a = H_2^a - H_8^a;$$

$$l_{13}^a = H_3^a - H_8^a;$$

$$l_{14}^a = H_7^a - H_3^a;$$

$$l_{15}^a = H_6^a - H_3^a;$$

$$l_{16}^a = H_4^a - H_6^a;$$

$$l_{17}^a = H_4^a - H_{PA1}^a.$$

simplesmente arbitrar-se esses valores, sem grande cuidado com a proximidade aos valores verdadeiros. Isso não gera maiores problemas, a não ser aumentar os valores incrementais dos valores iniciais. O vetor dos valores iniciais dos parâmetros é mostrado a seguir.

$${}_8 \vec{x}_1^0 = \begin{bmatrix} H_1^0 \\ H_2^0 \\ H_3^0 \\ H_4^0 \\ H_5^0 \\ H_6^0 \\ H_7^0 \\ H_8^0 \end{bmatrix}_{(m)}$$

3.2.5. O vetor ${}_n \vec{l}_1^0$ das observações calculadas em função dos valores iniciais dos parâmetros

O vetor ${}_{17} \vec{l}_1^0$ é composto pelos desníveis obtidos pela diferença entre as cotas arbitradas para cada um dos pontos da rede, conforme as equações de observação (nesse caso, lineares), como mostrado a seguir.

$${}_{17}\vec{l}_1^0 = f(x_0) = \begin{bmatrix} l_1^0 \\ l_2^0 \\ l_3^0 \\ l_4^0 \\ l_5^0 \\ l_6^0 \\ l_7^0 \\ l_8^0 \\ l_9^0 \\ l_{10}^0 \\ l_{11}^0 \\ l_{12}^0 \\ l_{13}^0 \\ l_{14}^0 \\ l_{15}^0 \\ l_{16}^0 \\ l_{17}^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_2^0 - HPA2 \\ HPA2 - H_1^0 \\ H_8^0 - H_1^0 \\ H_7^0 - H_8^0 \\ H_6^0 - H_7^0 \\ HPA1 - H_6^0 \\ HPA1 - H_5^0 \\ H_4^0 - H_5^0 \\ H_4^0 - H_3^0 \\ H_3^0 - H_2^0 \\ H_2^0 - H_1^0 \\ H_2^0 - H_8^0 \\ H_3^0 - H_8^0 \\ H_7^0 - H_3^0 \\ H_6^0 - H_3^0 \\ H_4^0 - H_6^0 \\ H_4^0 - HPA1 \end{bmatrix}$$

3.2.6. O vetor ${}_n\vec{l}_1$ dos valores observados

É comumente designado somente por \mathbf{L} e é obtido efetuando-se a diferença entre os valores dos desníveis calculados em função dos valores iniciais dos parâmetros e os desníveis efetivamente medidos, como mostrado a seguir.

$${}_{17}\vec{l}_1 = {}_{17}\vec{l}_1^0 - {}_{17}\vec{l}_1^b = \begin{bmatrix} l_1^0 \\ l_2^0 \\ l_3^0 \\ l_4^0 \\ l_5^0 \\ l_6^0 \\ l_7^0 \\ l_8^0 \\ l_9^0 \\ l_{10}^0 \\ l_{11}^0 \\ l_{12}^0 \\ l_{13}^0 \\ l_{14}^0 \\ l_{15}^0 \\ l_{16}^0 \\ l_{17}^0 \end{bmatrix}_{(m)} - \begin{bmatrix} l_1^b \\ l_2^b \\ l_3^b \\ l_4^b \\ l_5^b \\ l_6^b \\ l_7^b \\ l_8^b \\ l_9^b \\ l_{10}^b \\ l_{11}^b \\ l_{12}^b \\ l_{13}^b \\ l_{14}^b \\ l_{15}^b \\ l_{16}^b \\ l_{17}^b \end{bmatrix}_{(m)} = \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \\ l_4 \\ l_5 \\ l_6 \\ l_7 \\ l_8 \\ l_9 \\ l_{10} \\ l_{11} \\ l_{12} \\ l_{13} \\ l_{14} \\ l_{15} \\ l_{16} \\ l_{17} \end{bmatrix}_{(m)}$$

3.2.7. A matriz ${}_n\mathbf{P}_n$ dos pesos

A escolha da matriz peso traz grande influência na qualidade do ajustamento e é objeto de muitos trabalhos científicos. Muitas vezes uma matriz mal condicionada ou erroneamente ponderada pode prejudicar o ajustamento, superestimando ou subestimando os parâmetros a serem ajustados. A matriz dos peso está diretamente relacionada com a matriz de covariância das medidas realizadas, motivo pelo qual a determinação de Σ_{l_b} é um pré-requisito para a determinação da matriz peso. Para a escolha

da matriz peso neste trabalho, foi levada em conta a variância admitida na diferença de nivelamento e contra-nivelamento, contida no manual do instrumento. Salieta-se que o mesmo encontra-se em condições diferentes daquelas existentes quando do aparelho em perfeitas condições, nos primeiros tempos de vida útil, por tratar-se de um aparelho bastante antigo. Portanto a precisão nominal do instrumento que é 0,50 a 0,80 mm/km, pode não ser a mesma, obtida com o aparelho novo. Como utilizando-se a precisão nominal não se conseguiu enquadrar o teste qui-quadrado dentro da área de aceitação da hipótese básica para as variâncias *a priori* e *a posteriori*, alterou-se a precisão do instrumento chegando-se a um valor intermediário, que ficasse dentro da região de aceitação. Para a montagem da matriz de covariância dos pesos utilizou-se portanto um valor superior a precisão nominal do instrumento. Utilizou-se então:

$$\sigma_i = 6 \text{ mm},$$

$$\sigma_i^2 = 6^2 = 36 \text{ mm}^2$$

Como as covariâncias são admitidas nulas, Σ_b é diagonal e ${}_n P_n$ também será diagonal. A partir disso, pode-se montar a matriz de covariância das medidas realizadas, mostrada a seguir.

$$(\Sigma_{l_b}) = \text{diag} \begin{bmatrix} 4\sigma_i^2 d_1 \\ 4\sigma_i^2 d_2 \\ 4\sigma_i^2 d_3 \\ 4\sigma_i^2 d_4 \\ 4\sigma_i^2 d_5 \\ 4\sigma_i^2 d_6 \\ 4\sigma_i^2 d_7 \\ 4\sigma_i^2 d_8 \\ 4\sigma_i^2 d_9 \\ 4\sigma_i^2 d_{10} \\ 4\sigma_i^2 d_{11} \\ 4\sigma_i^2 d_{12} \\ 4\sigma_i^2 d_{13} \\ 4\sigma_i^2 d_{14} \\ 4\sigma_i^2 d_{15} \\ 4\sigma_i^2 d_{16} \\ 4\sigma_i^2 d_{17} \end{bmatrix} = \text{diag} \begin{bmatrix} 4 * 36 * 0,175319 \\ 4 * 36 * 0,161306 \\ 4 * 36 * 0,236376 \\ 4 * 36 * 0,077013 \\ 4 * 36 * 0,116378 \\ 4 * 36 * 0,058698 \\ 4 * 36 * 0,063147 \\ 4 * 36 * 0,119826 \\ 4 * 36 * 0,253067 \\ 4 * 36 * 0,290451 \\ 4 * 36 * 0,124458 \\ 4 * 36 * 0,266834 \\ 4 * 36 * 0,133177 \\ 4 * 36 * 0,149241 \\ 4 * 36 * 0,179322 \\ 4 * 36 * 0,171181 \\ 4 * 36 * 0,129133 \end{bmatrix}$$

Uma vez determinada a matriz Σ_{l_b} , pode-se, finalmente, determinar a matriz dos pesos das medidas, através de um determinado critério. No presente trabalho (como na maioria dos trabalhos desse tipo), estabeleceu-se como critério o inverso das distâncias entre os pontos, ou seja, nas distâncias maiores (onde é mais provável de ter ocorrido maior erro) os pesos são menores, ou seja, há necessidade de inversão da matriz Σ_{l_b} . A variância a priori também entra no cálculo da matriz dos pesos multiplicando essa inversa, embora não a altere muito na maioria dos casos, pois pode ser fixada com valor 1, sem maiores prejuízos do processo como

um todo, como pode ser visto em GEMAEL (1994, p. 121) e DALMOLIN (2002, p. 93). A expressão da matriz peso é mostrada a seguir.

$${}_{17}\mathbf{P}_{17} = \sigma_0^2 {}_{17}(\sum_{l_b})^{-1}. \quad (3.2)$$

Como fixou-se a variância a priori σ_0^2 em $1mm^2$, a expressão (3.2) fica:

$${}_{17}\mathbf{P}_{17} = {}_{17}(\sum_{l_b})^{-1}. \quad (3.3)$$

3.2.8. O vetor ${}_n\vec{x}_1$ de correções

Esse vetor pode ser calculado pela seguinte expressão:

$$\vec{x} = -\left({}_{17}\mathbf{A}_8^T {}_{17}\mathbf{P}_{17} {}_{17}\mathbf{A}_8\right)^{-1} {}_{17}\mathbf{A}_8^T {}_{17}\mathbf{P}_{17} \vec{l}_1. \quad (3.4)$$

É comum, por questões de praticidade no manejo de matrizes, escrever a expressão acima a partir de duas partes denotadas por \mathbf{N} e \vec{u} .

$$\mathbf{N} = {}_{17}\mathbf{A}_8^T {}_{17}\mathbf{P}_{17} {}_{17}\mathbf{A}_8 \quad (\text{Anexo 1})$$

$$\vec{u} = {}_{17}\mathbf{A}_8^T {}_{17}\mathbf{P}_{17} \vec{l}_1 \quad (\text{Anexo 2})$$

Observa-se que tais produtos de matrizes só são possíveis quando o número de colunas da primeira for igual ao número de linhas da segunda, resultando numa matriz cuja dimensão é igual ao número de linhas da primeira pelo número de colunas da segunda.

3.2.9. O vetor ${}_n \vec{x}_1^a$ dos parâmetros observados ajustados

Obtém-se o vetor dos valores observados ajustados ${}_8 \vec{x}_1^a$ somando-se algebricamente o vetor dos valores iniciais ${}_8 \vec{x}_1^0$ com vetor das correções ${}_8 \vec{x}_1$, como mostrado abaixo.

$${}_8 \vec{x}_1^a = {}_8 \vec{x}_1^0 + {}_8 \vec{x}_1 = \begin{bmatrix} H_1^0 \\ H_2^0 \\ H_3^0 \\ H_4^0 \\ H_5^0 \\ H_6^0 \\ H_7^0 \\ H_8^0 \end{bmatrix}_{(m)} + \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \end{bmatrix}_{(m)} = \begin{bmatrix} H_1^a \\ H_2^a \\ H_3^a \\ H_4^a \\ H_5^a \\ H_6^a \\ H_7^a \\ H_8^a \end{bmatrix}_{(m)}$$

3.2.10. O vetor ${}_n \vec{v}_1$ dos resíduos para as observações

Obtém-se esse vetor multiplicando-se o vetor das correções ${}_8 \vec{x}_1$ pela matriz \mathbf{A} e somando-se a esse produto o vetor ${}_{17} \vec{l}_1$.

$${}_{17}\vec{v}_1 = ({}_{17}\mathbf{A}_{88}\vec{x}_1) + {}_{17}\vec{l}_1 \quad (3.5)$$

$${}_{17}\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \end{bmatrix}_{(m)} + \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \\ l_4 \\ l_5 \\ l_6 \\ l_7 \\ l_8 \\ l_9 \\ l_{10} \\ l_{11} \\ l_{12} \\ l_{13} \\ l_{14} \\ l_{15} \\ l_{16} \\ l_{17} \end{bmatrix}_{(m)} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \\ v_7 \\ v_8 \\ v_9 \\ v_{10} \\ v_{11} \\ v_{12} \\ v_{13} \\ v_{14} \\ v_{15} \\ v_{16} \\ v_{17} \end{bmatrix}_{(m)}$$

3.2.11. O vetor ${}_{17}\vec{l}_1^a$ dos valores observados ajustados

Obtém-se o vetor dos valores observados ajustados da soma algébrica entre o vetor dos valores observados ${}_{17}\vec{l}_1^b$ (obtidos do nivelamento) e o vetor dos resíduos ${}_{17}\vec{v}_1$.

$${}_{17}\vec{l}_1^a = {}_{17}\vec{l}_1^b + {}_{17}\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} l_1^b \\ l_2^b \\ l_3^b \\ l_4^b \\ l_5^b \\ l_6^b \\ l_7^b \\ l_8^b \\ l_9^b \\ l_{10}^b \\ l_{11}^b \\ l_{12}^b \\ l_{13}^b \\ l_{14}^b \\ l_{15}^b \\ l_{16}^b \\ l_{17}^b \end{bmatrix}_{(m)} + \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \\ v_7 \\ v_8 \\ v_9 \\ v_{10} \\ v_{11} \\ v_{12} \\ v_{13} \\ v_{14} \\ v_{15} \\ v_{16} \\ v_{17} \end{bmatrix}_{(m)} = \begin{bmatrix} l_1^a \\ l_2^a \\ l_3^a \\ l_4^a \\ l_5^a \\ l_6^a \\ l_7^a \\ l_8^a \\ l_9^a \\ l_{10}^a \\ l_{11}^a \\ l_{12}^a \\ l_{13}^a \\ l_{14}^a \\ l_{15}^a \\ l_{16}^a \\ l_{17}^a \end{bmatrix}_{(m)}$$

3.2.12. A variância da unidade de peso *a posteriori* $\hat{\sigma}_0^2$

A partir dos resíduos e da matriz peso, pode-se calcular a variância da unidade de peso *a posteriori*, cujo valor informa a variância das unidades de peso após o ajustamento, o que teoricamente deveria ser igual à variância *a priori*. Ela é obtida multiplicando-se a matriz transposta do vetor dos resíduos pela matriz dos pesos e pelo próprio vetor dos resíduos e posteriormente divide-se esse resultado pelo número de graus de liberdade. O número de graus de liberdade GL é obtido subtraindo-se o número de

parâmetros (igual ao número de incógnitas no ajustamento) u do número de equações envolvidas (igual ao número de observações ou medidas) n .

$$\hat{\sigma}_0^2 = \left({}_{17}\vec{v}_1^T {}_{17}\mathbf{P}_{1717} {}_{17}\vec{v}_1 \right) / GL \quad (3.6)$$

$GL = n - u = 17 - 8 = 9$ graus de liberdade

$$\left({}_{17}\vec{v}_1^T {}_{17}\mathbf{P}_{1717} {}_{17}\vec{v}_1 \right) \quad (3.7)$$

A expressão (3.7) é desenvolvida no anexo 3, observando-se que nela, o vetor dos resíduos ${}_{17}\vec{v}_1$ deve ser colocado em milímetros, diferentemente do cálculo do vetor dos valores observados ajustados onde o vetor dos resíduos é colocado em metros. Isso se deve à necessidade de expressar a variância da unidade de peso *a posteriori* em mm^2 . Portanto deve-se multiplicar o resultado da (3.5) por 1000 para efetuar o cálculo da (3.7).

3.2.13. A matriz de covariâncias $\left(\sum_{\bar{x}^a} \right)_u$ dos parâmetros ajustados

A matriz de covariância dos parâmetros ajustados se obtém multiplicando a variância *a priori* σ_0^2 , que neste caso é 1, pela inversa da matriz \mathbf{N} .

$$\left(\sum_{\bar{x}^a} \right)_8 = \sigma_0^2 \mathbf{N}^{-1} \quad (3.8)$$

3.2.14. A matriz de covariância ${}_n(\Sigma_{\bar{I}^a})_n$ dos valores observados ajustados

A matriz de covariância dos valores observados ajustados se obtém pelo produto entre a variância da unidade de peso *a priori* (σ_0^2), a matriz dos coeficientes das incógnitas das equações de observação (\mathbf{A}), a inversa de \mathbf{N} e a transposta de \mathbf{A} , como segue:

$${}_{17}(\Sigma_{\bar{I}^a})_{17} = \sigma_{0\ 17}^2 \mathbf{A}_{8\ 8} \mathbf{N}_{8\ 17}^{-1} \mathbf{A}_8^T \quad (3.9)$$

3.2.15. A matriz de covariância ${}_n(\Sigma_{\bar{v}})_n$ do vetor dos resíduos

$${}_n(\Sigma_{\bar{v}})_n = \sigma_{0\ 17}^2 \mathbf{P}_{17}^{-1} - \Sigma_{\bar{I}^a} \quad (3.10)$$

3.2.16. Comparação da variância *a priori* σ_0^2 com a variância *a posteriori* $\hat{\sigma}_0^2$

$H_0 : \sigma_0^2 = \hat{\sigma}_0^2$ - As variâncias *a priori* e *a posteriori* não diferem estatisticamente no nível de significância α ;

$H_1 : \sigma_0^2 \neq \hat{\sigma}_0^2$ - As variâncias *a priori* e *a posteriori* diferem estatisticamente no nível de significância α .

a) Estatística do teste χ^{*2}

$$\chi^{*2} = \frac{\hat{\sigma}_0^2}{\sigma_0} (n - u) \quad (3.11)$$

b) χ^2 teórico com $\alpha = 5\%$ e $n - u =$ graus de liberdade

$$\frac{\alpha}{2} = 0,025 \quad - \text{Tabela} - \chi^2_{n-u;0,025} = 2,70$$

$$1 - \frac{\alpha}{2} = 0,975 \quad - \text{Tabela} - \chi^2_{n-u;0,975} = 19,02$$

c) Teste da Hipótese Básica

Se $(\chi^2_{n-u;0,025} < \chi^{*2} < \chi^2_{n-u;0,975})$ a hipótese básica não é rejeitada ao nível de significância $\alpha = 5\%$.

3.2.17. Localização de erros nas observações pelo teste *data snooping* de **Baarda**:

a) Números-redundância r_i

$$R = \frac{1}{\sigma_0^2} \sum_{\bar{v} 17} \mathbf{P}_{17} \quad (3.12)$$

$r_i =$ cada elemento da diagonal da matriz de covariância dos resíduos.

$$tr(R) = n - u = \sum_{i=1}^n r_{ii} .$$

b) Estatística do teste

Para cada uma das observações, realiza-se o teste *data snooping* individualmente, dividindo-se o resíduo de cada observação pelo produto do desvio padrão das medidas (obtido da matriz de covariância) e à raiz quadrada da variância de cada resíduo.

$$W_1 = \frac{v_1}{\sigma_{l_i} \sqrt{r_1}}, W_2 = \frac{v_2}{\sigma_{l_i} \sqrt{r_2}}, \dots, W_{17} = \frac{v_{17}}{\sigma_{l_i} \sqrt{r_{17}}}$$

c) Teste da hipótese básica H_0

H_0 : nenhum erro existe na observação l_i ;

H_1 : existe algum erro na observação l_i .

H_0 é rejeitada se $|W_i| > k$, onde k é um valor crítico conforme um nível de confiança específico.

$$1 - \alpha = 95\% \Rightarrow k = 1,96$$

$$1 - \alpha = 99\% \Rightarrow k = 2,57$$

4. RESULTADOS

4.1. RESULTADOS DO EXPERIMENTO ILUSTRATIVO PARA A ORDENAÇÃO DA METODOLOGIA DE AJUSTAMENTO E ANÁLISE DA QUALIDADE

4.1.1. Vetor dos parâmetros aproximados iniciais

$${}_8\vec{x}_1^0 = \begin{bmatrix} 81,86958 \\ 87,24065 \\ 87,71263 \\ 93,36159 \\ 91,34501 \\ 91,42526 \\ 89,99971 \\ 87,13901 \end{bmatrix}_{(m)}$$

4.1.2. O vetor das observações calculadas em função dos valores iniciais dos parâmetros

$${}_{17}\vec{l}_1^0 = \begin{bmatrix} 1,20930 \\ 4,16177 \\ 5,26943 \\ 2,86069 \\ 1,42555 \\ 0,59015 \\ 0,67040 \\ 2,01658 \\ 5,64896 \\ 0,47198 \\ 5,37107 \\ 0,10164 \\ 0,57362 \\ 2,28707 \\ 3,71262 \\ 1,93633 \\ 1,34618 \end{bmatrix}_{(m)}$$

4.1.3. O vetor dos valores observados

$${}_{17}\vec{l}_1 = {}_{17}\vec{l}_1^0 - {}_{17}\vec{l}_1^b = \begin{bmatrix} 1,20930 \\ 4,16177 \\ 5,26943 \\ 2,86069 \\ 1,42555 \\ 0,59015 \\ 0,67040 \\ 2,01658 \\ 5,64896 \\ 0,47198 \\ 5,37107 \\ 0,10164 \\ 0,57362 \\ 2,28707 \\ 3,71262 \\ 1,93633 \\ 1,34618 \end{bmatrix}_{(m)} - \begin{bmatrix} 1,20927 \\ 4,16175 \\ 5,25809 \\ 2,86069 \\ 1,42555 \\ 0,59014 \\ 0,68125 \\ 2,01661 \\ 5,65493 \\ 0,47189 \\ 5,35384 \\ 0,10453 \\ 0,57397 \\ 2,28818 \\ 3,71184 \\ 1,94812 \\ 1,34614 \end{bmatrix}_{(m)} = \begin{bmatrix} 0,00003 \\ 0,00002 \\ 0,01134 \\ 0,00001 \\ 0,00000 \\ 0,00001 \\ -0,01085 \\ -0,00003 \\ -0,00597 \\ 0,00009 \\ 0,01723 \\ -0,00289 \\ -0,00035 \\ -0,00110 \\ 0,00079 \\ -0,01179 \\ 0,00004 \end{bmatrix}_{(m)}$$

4.1.4. A matriz dos pesos

$${}_{17}\mathbf{P}_{17} = \text{diag} \begin{bmatrix} 3,96103 \\ 4,30513 \\ 2,93788 \\ 9,01723 \\ 5,96714 \\ 11,83080 \\ 10,99726 \\ 5,79544 \\ 2,74411 \\ 2,39091 \\ 5,57974 \\ 2,60253 \\ 5,21444 \\ 4,65317 \\ 3,87261 \\ 4,05678 \\ 5,37774 \end{bmatrix} * 10^{-2}$$

4.1.5. Vetor das correções aos valores iniciais

Esse vetor representa as incógnitas primárias do sistema, buscadas no processo de estimação. Elas significam os valores que faltam aos valores iniciais dos parâmetros para torná-los ajustados. Por esse motivo, eles devem ser somados aos parâmetros iniciais. O vetor de correções estimado no presente trabalho é mostrado a seguir.

$${}_8\bar{x}_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,006601 \\ -0,005301 \\ -0,004941 \\ -0,000381 \\ -0,007247 \\ -0,003813 \\ -0,004465 \\ -0,005209 \end{bmatrix}_{(m)}$$

4.1.6. Vetor das coordenadas ajustadas

Como resultado da aplicação da soma entre o vetor das correções e o vetor dos parâmetros iniciais, obtém-se o produto final buscado no processo de estimação, que são as coordenadas (nesse caso, altimétricas) dos marcos, mostradas abaixo.

$${}_8\bar{x}_1^a = {}_8\bar{x}_1^0 + {}_8\bar{x}_1 = \begin{bmatrix} H_1^a \\ H_2^a \\ H_3^a \\ H_4^a \\ H_5^a \\ H_6^a \\ H_7^a \\ H_8^a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 81,86958 \\ 87,24065 \\ 87,71263 \\ 93,36159 \\ 91,34501 \\ 91,42526 \\ 89,99971 \\ 87,13901 \end{bmatrix}_{(m)} + \begin{bmatrix} 0,006601 \\ -0,005301 \\ -0,004941 \\ -0,000381 \\ -0,007247 \\ -0,003813 \\ -0,004465 \\ -0,005209 \end{bmatrix}_{(m)} = \begin{bmatrix} 81,87618 \\ 87,23534 \\ 87,70768 \\ 93,36120 \\ 91,33776 \\ 91,42144 \\ 89,99524 \\ 87,13380 \end{bmatrix}_{(m)}$$

4.1.7. Vetor dos resíduos

$${}_{17}\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 0,006601 \\ -0,005301 \\ -0,004941 \\ -0,000381 \\ -0,007247 \\ -0,003813 \\ -0,004465 \\ -0,005209 \end{bmatrix}_{(m)} + \begin{bmatrix} 0,00003 \\ 0,00002 \\ 0,01134 \\ 0,00001 \\ 0,00000 \\ 0,00001 \\ -0,01085 \\ -0,00003 \\ -0,00597 \\ 0,00009 \\ 0,01723 \\ -0,00289 \\ -0,00035 \\ -0,00110 \\ 0,00079 \\ -0,01179 \\ 0,00004 \end{bmatrix}_{(m)} = \begin{bmatrix} -0,00527 \\ -0,00658 \\ -0,00047 \\ 0,00075 \\ 0,00065 \\ 0,00382 \\ -0,00360 \\ 0,00683 \\ 0,00141 \\ 0,00045 \\ 0,00532 \\ -0,00298 \\ -0,00008 \\ -0,00062 \\ 0,00191 \\ -0,00835 \\ -0,00034 \end{bmatrix}_{(m)}$$

4.1.8. Vetor dos valores observados ajustados

$${}_{17}\vec{l}_1^a = {}_{17}\vec{l}_1^b + {}_{17}\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1,20927 \\ 4,16175 \\ 5,25809 \\ 2,86069 \\ 1,42555 \\ 0,59014 \\ 0,68125 \\ 2,01661 \\ 5,65493 \\ 0,47189 \\ 5,35384 \\ 0,10453 \\ 0,57397 \\ 2,28818 \\ 3,71184 \\ 1,94812 \\ 1,34614 \end{bmatrix}_{(m)} + \begin{bmatrix} -0,00527 \\ -0,00658 \\ -0,00047 \\ 0,00075 \\ 0,00065 \\ 0,00382 \\ -0,00360 \\ 0,00683 \\ -0,00141 \\ 0,00045 \\ 0,00532 \\ -0,00298 \\ -0,00008 \\ -0,00062 \\ 0,00191 \\ -0,00835 \\ -0,00034 \end{bmatrix}_{(m)} = \begin{bmatrix} 1,20399 \\ 4,15516 \\ 5,25761 \\ 2,86144 \\ 1,42620 \\ 0,59396 \\ 0,67764 \\ 2,02344 \\ 5,65351 \\ 0,47234 \\ 5,35916 \\ 0,10154 \\ 0,57388 \\ 2,28755 \\ 3,71375 \\ 1,93976 \\ 1,34579 \end{bmatrix}_{(m)}$$

4.1.9. A variância $\hat{\sigma}_0^2$ de unidade de peso *a posteriori*

$$\hat{\sigma}_0^2 = \left(\begin{array}{c} -5,27192 \\ -6,58162 \\ -0,47156 \\ 0,75411 \\ 0,65262 \\ 3,82319 \\ -3,60241 \\ 6,83584 \\ -1,41035 \\ 0,45054 \\ 5,32644 \\ -2,98198 \\ -0,08144 \\ -0,62444 \\ 1,91818 \\ -8,35853 \\ -0,34173 \end{array} \right)^T \begin{array}{c} \left[\begin{array}{c} 3,96103 \\ 4,30513 \\ 2,93788 \\ 9,01723 \\ 5,96714 \\ 11,83080 \\ 10,99726 \\ 5,79544 \\ 2,74411 \\ 2,39091 \\ 5,57974 \\ 2,60253 \\ 5,21444 \\ 4,65317 \\ 3,87261 \\ 4,05678 \\ 5,37774 \end{array} \right] \\ * \textit{diag} \\ * 10^{-2} * \end{array} \left(\begin{array}{c} -5,27192 \\ -6,58162 \\ -0,47156 \\ 0,75411 \\ 0,65262 \\ 3,82319 \\ -3,60241 \\ 6,83584 \\ -1,41035 \\ 0,45054 \\ 5,32644 \\ -2,98198 \\ -0,08144 \\ -0,62444 \\ 1,91818 \\ -8,35853 \\ -0,34173 \end{array} \right)_{(mm)} \Big/ (17 - 8) = 1,532115$$

4.1.10. A matriz de covariância $\left(\sum_u \bar{x}^a\right)_u$ dos parâmetros ajustados

$$\left(\sum_u \bar{x}^a\right)_u = 1mm^2 * \begin{bmatrix} 0,12822 & -0,05579 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0,02937 \\ -0,05579 & 0,14534 & -0,02390 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0,02602 \\ 0 & -0,02390 & 0,18875 & -0,02744 & 0 & -0,03872 & -0,04653 & -0,05214 \\ 0 & 0 & -0,02744 & 0,17974 & -0,05795 & -0,04056 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0,05795 & 0,16792 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0,03872 & -0,04056 & 0 & 0,25727 & -0,05967 & 0 \\ 0 & 0 & -0,04653 & 0 & 0 & -0,05967 & 0,19637 & -0,09017 \\ -0,02937 & -0,02602 & -0,05214 & 0 & 0 & 0 & -0,09017 & 0,19772 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$\left(\sum_u \bar{x}^a\right)_u = \begin{bmatrix} 11,52634 & 5,90447 & 3,48928 & 0,98484 & 0,33998 & 1,51773 & 3,60971 & 5,05637 \\ 5,90447 & 10,80148 & 4,33567 & 1,19251 & 0,41165 & 1,76305 & 3,97658 & 5,25608 \\ 3,48928 & 4,33567 & 10,59911 & 2,73739 & 0,94478 & 3,60896 & 6,81994 & 6,99479 \\ 0,98484 & 1,19251 & 2,73739 & 7,25595 & 2,50411 & 2,06909 & 2,21119 & 2,03369 \\ 0,33998 & 0,41165 & 0,94478 & 2,50411 & 6,81927 & 0,71404 & 0,76318 & 0,70182 \\ 1,51773 & 1,76305 & 3,60896 & 2,06909 & 0,71404 & 5,70586 & 4,09322 & 3,27617 \\ 3,60971 & 3,97658 & 6,81994 & 2,21119 & 0,76318 & 4,09322 & 11,71864 & 8,20286 \\ 5,05637 & 5,25608 & 6,99479 & 2,03369 & 0,70182 & 3,27617 & 8,20286 & 12,08649 \end{bmatrix}$$

4.1.11. A matriz de covariância $\left(\sum_{\bar{t}^a}\right)_n$ dos valores observados ajustados

$$\begin{aligned}
 {}_{17}\left(\sum_{\bar{t}^a}\right)_{17} &= 1mm^2 * \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 0,12822 & -0,05579 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0,02937 \\ -0,05579 & 0,14534 & -0,02390 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0,02602 \\ 0 & -0,02390 & 0,18875 & -0,02744 & 0 & -0,03872 & -0,04653 & -0,05214 \\ 0 & 0 & -0,02744 & 0,17974 & -0,05795 & -0,04056 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0,05795 & 0,16792 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0,03872 & -0,04056 & 0 & 0,25727 & -0,05967 & 0 \\ 0 & 0 & -0,04653 & 0 & 0 & -0,05967 & 0,19637 & -0,09017 \\ -0,02937 & -0,02602 & -0,05214 & 0 & 0 & 0 & -0,09017 & 0,19772 \end{bmatrix}^{-1} * \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1}
 \end{aligned}$$

$${}_{17}(\Sigma_{\bar{I}^a})_{17} = \begin{bmatrix} 10.8014 & -5.9044 & -0.6484 & -1.2795 & -2.2135 & -1.7630 & -0.4116 & 0.7810 & -3.1431 & -6.4658 & 4.8970 & 5.5454 & -0.9204 & -0.3591 & -2.5726 & -0.5704 & 1.1925 \\ -5.9044 & 11.5263 & 6.4701 & 1.4466 & 2.0920 & 1.5177 & 0.3399 & -0.6450 & 2.5043 & 2.4152 & 5.6220 & -0.8481 & 1.5671 & -0.1205 & 1.9715 & 0.5329 & -0.9848 \\ -0.6484 & 6.4701 & 13.5002 & -2.4371 & -2.8347 & -1.7583 & -0.3619 & 0.6868 & -2.4568 & 4.1539 & 5.8217 & -7.6785 & -3.5246 & 1.0875 & -1.7472 & -0.7096 & 1.0488 \\ -1.2795 & 1.4466 & -2.4371 & 7.3995 & -2.6987 & -0.8171 & -0.0613 & 0.1162 & 0.3523 & 1.1047 & 0.1671 & 2.6041 & 3.7089 & 3.6906 & 0.9919 & -0.6396 & 0.1775 \\ -2.2135 & 2.0920 & -2.8347 & -2.6987 & 9.2380 & -1.6125 & 0.0490 & -0.0931 & 3.0690 & -0.9975 & -0.1216 & 2.7132 & 1.7156 & -4.4143 & 4.8236 & -1.7546 & -0.1421 \\ -1.7630 & 1.5177 & -1.7583 & -0.8171 & -1.6125 & 5.7058 & 0.7140 & -1.3550 & 1.5399 & -1.8459 & -0.2452 & 1.5131 & -0.3328 & -0.4844 & -2.0969 & 3.6368 & -2.0690 \\ -0.4116 & 0.3399 & -0.3619 & -0.0613 & 0.0490 & 0.7140 & 6.8192 & 4.3151 & -1.5594 & -0.5331 & -0.0717 & 0.2903 & -0.2429 & 0.1816 & 0.2306 & -1.7901 & -2.5041 \\ 0.7810 & -0.6450 & 0.6868 & 0.1162 & -0.0931 & -1.3550 & 4.3151 & 9.0668 & 2.9591 & 1.0117 & 0.1360 & -0.5508 & 0.4608 & -0.3446 & -0.4377 & 3.3968 & 4.7517 \\ -3.1431 & 2.5043 & -2.4568 & 0.3523 & 3.0690 & 1.5399 & -1.5594 & 2.9591 & 12.3804 & -4.7188 & -0.6387 & 1.8180 & -2.9007 & 3.2530 & 6.3220 & 6.0584 & 4.5186 \\ -6.4658 & 2.4152 & 4.1539 & 1.1047 & -0.9975 & -1.8459 & -0.5331 & 1.0117 & -4.7188 & 12.7293 & -4.0506 & -8.2045 & 4.5248 & -3.4201 & -4.4176 & -0.3011 & 1.5448 \\ 4.8970 & 5.6220 & 5.8217 & 0.1671 & -0.1216 & -0.2452 & -0.0717 & 0.1360 & -0.6387 & -4.0506 & 10.5190 & 4.6973 & 0.6467 & -0.4796 & -0.6012 & -0.0375 & 0.2077 \\ 5.5454 & -0.8481 & -7.6785 & 2.6041 & 2.7132 & 1.5131 & 0.2903 & -0.5508 & 1.8180 & -8.2045 & 4.6973 & 12.3758 & 4.1713 & -1.5672 & 1.1460 & 0.6720 & -0.8411 \\ -0.9204 & 1.5671 & -3.5246 & 3.7089 & 1.7156 & -0.3328 & -0.2429 & 0.4608 & -2.9007 & 4.5248 & 0.6467 & 4.1713 & 8.6961 & -4.9872 & -3.2716 & 0.3709 & 0.7037 \\ -0.3591 & -0.1205 & 1.0875 & 3.6906 & -4.4143 & -0.4844 & 0.1816 & -0.3446 & 3.2530 & -3.4201 & -0.4796 & -1.5672 & -4.9872 & 8.6779 & 4.2635 & -1.0106 & -0.5262 \\ -2.5726 & 1.9715 & -1.7472 & 0.9919 & 4.8236 & -2.0969 & 0.2306 & -0.4377 & 6.3220 & -4.4176 & -0.6012 & 1.1460 & -3.2716 & 4.2635 & 9.0871 & -2.7652 & -0.6683 \\ -0.5704 & 0.5329 & -0.7096 & -0.6396 & -1.7546 & 3.6368 & -1.7901 & 3.3968 & 6.0584 & -0.3011 & -0.0375 & 0.6720 & 0.3709 & -1.0106 & -2.7652 & 8.8236 & 5.1869 \\ 1.1925 & -0.9848 & 1.0488 & 0.1775 & -0.1421 & -2.0690 & -2.5041 & 4.7517 & 4.5186 & 1.5448 & 0.2077 & -0.8411 & 0.7037 & -0.5262 & -0.6683 & 5.1869 & 7.2559 \end{bmatrix}$$

4.1.12. A matriz de covariância $\left(\sum_{\bar{v}^a}\right)_n$ do vetor dos resíduos

$${}_{17}\left(\sum_{\bar{v}^a}\right)_{17} = \begin{bmatrix} 14.4446 & 5.9044 & 0.6484 & 1.2795 & 2.2135 & 1.7630 & 0.4116 & -0.7810 & 3.1431 & 6.4658 & -4.8970 & -5.5454 & 0.9204 & 0.3591 & 2.5726 & 0.5704 & -1.1925 \\ 5.9044 & 11.7017 & -6.4701 & -1.4466 & -2.0920 & -1.5177 & -0.3399 & 0.6450 & -2.5043 & -2.4152 & -5.6220 & 0.8481 & -1.5671 & 0.1205 & -1.9715 & -0.5329 & 0.9848 \\ 0.6484 & -6.4701 & 20.5380 & 2.4371 & 2.8347 & 1.7583 & 0.3619 & -0.6868 & 2.4568 & -4.1539 & -5.8217 & 7.6785 & 3.5246 & -1.0875 & 1.7472 & 0.7096 & -1.0488 \\ 1.2795 & -1.4466 & 2.4371 & 3.6904 & 2.6987 & 0.8171 & 0.0613 & -0.1162 & -0.3523 & -1.1047 & -0.1671 & -2.6041 & -3.7089 & -3.6906 & -0.9919 & 0.6396 & -0.1775 \\ 2.2135 & -2.0920 & 2.8347 & 2.6987 & 7.5205 & 1.6125 & -0.0490 & 0.0931 & -3.0690 & 0.9975 & 0.1216 & -2.7132 & -1.7156 & 4.4143 & -4.8236 & 1.7546 & 0.1421 \\ 1.7630 & -1.5177 & 1.7583 & 0.8171 & 1.6125 & 2.7468 & -0.7140 & 1.3550 & -1.5399 & 1.8459 & 0.2452 & -1.5131 & 0.3328 & 0.4844 & 2.0969 & -3.6368 & 2.0690 \\ 0.4116 & -0.3399 & 0.3619 & 0.0613 & -0.0490 & -0.7140 & 2.2740 & -4.3151 & 1.5594 & 0.5331 & 0.0717 & -0.2903 & 0.2429 & -0.1816 & -0.2306 & 1.7901 & 2.5041 \\ -0.7810 & 0.6450 & -0.6868 & -0.1162 & 0.0931 & 1.3550 & -4.3151 & 8.1881 & -2.9591 & -1.0117 & -0.1360 & 0.5508 & -0.4608 & 0.3446 & 0.4377 & -3.3968 & -4.7517 \\ 3.1431 & -2.5043 & 2.4568 & -0.3523 & -3.0690 & -1.5399 & 1.5594 & -2.9591 & 24.0613 & 4.7188 & 0.6387 & -1.8180 & 2.9007 & -3.2530 & -6.3220 & -6.0584 & -4.5186 \\ 6.4658 & -2.4152 & -4.1539 & -1.1047 & 0.9975 & 1.8459 & 0.5331 & -1.0117 & 4.7188 & 29.0956 & 4.0506 & 8.2045 & -4.5248 & 3.4201 & 4.4176 & 0.3011 & -1.5448 \\ -4.8970 & -5.6220 & -5.8217 & -0.1671 & 0.1216 & 0.2452 & 0.0717 & -0.1360 & 0.6387 & 4.0506 & 7.4030 & -4.6973 & -0.6467 & 0.4796 & 0.6012 & 0.0375 & -0.2077 \\ -5.5454 & 0.8481 & 7.6785 & -2.6041 & -2.7132 & -1.5131 & -0.2903 & 0.5508 & -1.8180 & 8.2045 & -4.6973 & 26.0483 & -4.1713 & 1.5672 & -1.1460 & -0.6720 & 0.8411 \\ 0.9204 & -1.5671 & 3.5246 & -3.7089 & -1.7156 & 0.3328 & 0.2429 & -0.4608 & 2.9007 & -4.5248 & -0.6467 & -4.1713 & 10.4814 & 4.9872 & 3.2716 & -0.3709 & -0.7037 \\ 0.3591 & 0.1205 & -1.0875 & -3.6906 & 4.4143 & 0.4844 & -0.1816 & 0.3446 & -3.2530 & 3.4201 & 0.4796 & 1.5672 & 4.9872 & 12.8128 & -4.2635 & 1.0106 & 0.5262 \\ 2.5726 & -1.9715 & 1.7472 & -0.9919 & -4.8236 & 2.0969 & -0.2306 & 0.4377 & -6.3220 & 4.4176 & 0.6012 & -1.1460 & 3.2716 & -4.2635 & 16.7352 & 2.7652 & 0.6683 \\ 0.5704 & -0.5329 & 0.7096 & 0.6396 & 1.7546 & -3.6368 & 1.7901 & -3.3968 & -6.0584 & 0.3011 & 0.0375 & -0.6720 & -0.3709 & 1.0106 & 2.7652 & 15.8264 & -5.1869 \\ -1.1925 & 0.9848 & -1.0488 & -0.1775 & 0.1421 & 2.0690 & 2.5041 & -4.7517 & -4.5186 & -1.5448 & -0.2077 & 0.8411 & -0.7037 & 0.5262 & 0.6683 & -5.1869 & 11.3393 \end{bmatrix}$$

4.1.13. Comparação da variância *a priori* σ_0^2 com a variância *a posteriori* $\hat{\sigma}_0^2$

a) Estatística do teste qui-quadrado x^{*2}

$$x^{*2} = \frac{\hat{\sigma}_0^2}{\sigma_0} (n - u) = \frac{1,53211 \text{ mm}^2}{1 \text{ mm}^2} * (17 - 8) = 13,78904$$

b) x^2 teórico com $\alpha = 5\%$ e $n - u =$ graus de liberdade

$$\frac{\alpha}{2} = \frac{0,5}{2} = 0,025 \quad - \text{Tabela} - x^2_{17-8;0,025} = x^2_{9;0,025} = 2,70$$

$$1 - \frac{\alpha}{2} = \frac{0,5}{2} = 0,975 \quad - \text{Tabela} - x^2_{17-8;0,975} = x^2_{9;0,975} = 19,02$$

c) Teste da Hipótese Básica

Como $(2,70 < 13,79 < 19,02)$ a hipótese básica não é rejeitada ao nível de significância $\alpha = 5\%$.

4.1.14. Localização de erros nas observações pelo teste *data snooping* de **Baarda**:

a) Números-redundância r_i

$$R = \frac{1}{\sigma_0^2} \sum_{\bar{v} 17} \mathbf{P}_{17}$$

r_i = cada elemento da diagonal.

$$t_r(R) = \begin{pmatrix} 0,57215 + 0,50377 + 0,60338 + 0,33276 + 0,44875 + 0,32496 + \\ 0,25007 + 0,47453 + 0,66026 + 0,69565 + 0,41306 + 0,67791 + \\ 0,54654 + 0,59620 + 0,64809 + 0,64204 + 0,60979 \end{pmatrix}$$

$$t_r(R) = 9,00$$

$$n - u = 17 - 8 = 9$$

Não existe erro no cálculo, pois $t_r(R) = n - u \Rightarrow 9,00 = 9$.

b) Estatística do teste

$$W_1 = -0,03501$$

$$W_7 = -0,02172$$

$$W_{13} = -0,00048$$

$$W_2 = -0,04469$$

$$W_8 = 0,04122$$

$$W_{14} = -0,00374$$

$$W_3 = -0,00354$$

$$W_9 = -0,01047$$

$$W_{15} = 0,01210$$

$$W_4 = 0,00435$$

$$W_{10} = 0,00349$$

$$W_{16} = -0,05179$$

$$W_5 = 0,00398$$

$$W_{11} = 0,03508$$

$$W_{17} = -0,00188$$

$$W_6 = 0,01949$$

$$W_{12} = -0,02245$$

c) Teste da hipótese básica H_0

H_0 : nenhum erro existe na observação l_i ;

H_1 : existe algum erro na observação l_i .

H_0 é rejeitada se $|W_i| > k$, onde k é um valor crítico conforme um nível de confiança específico.

$$1 - \alpha = 95\% \Rightarrow k = 1,96$$

$$1 - \alpha = 99\% \Rightarrow k = 2,57$$

Estipulando-se $\alpha = 5\%$ ou $\alpha = 1\%$, observa-se que $|W_1|, |W_2|, \dots, |W_{17}| < k$, portanto aceita-se H_0 , ou seja, nenhum erro existe nas observações l_1 a l_{17} .

4.2. RESULTADO DA IMPLEMENTAÇÃO DAS ROTINAS PROPOSTAS

A metodologia de ajustamento e análise da qualidade do ajustamento de redes geodésicas altimétricas geométricas apresentada neste trabalho foi implementada em diferentes ferramentas como Excel e Matlab. A elaboração dos algoritmos se deu de forma rápida pelo uso da seqüência proposta e o desempenho se deu de forma altamente satisfatória, com processamentos rápidos.

5. CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES

5.1 CONCLUSÕES

5.1.1. Conclusões em relação aos resultados do experimento ilustrativo – valores estimados e indicadores de qualidade

Os resultados do experimento ilustrativo montado para subsidiar a elaboração do ordenamento das rotinas de ajustamento e análise da qualidade desse trabalho, permitem observar a riqueza de informações oriundas de um processo de ajustamento e mostram como esses indicadores podem ser analisados. Embora não sendo a meta precípua do presente trabalho, faz-se algumas análises em relação a eles. Primeiramente em relação ao teste *data snooping*, os resultados indicam que não houve erro grosseiro nas medidas de desnível efetuadas. Em caso positivo, o teste permitiria apontar quais dessas medidas estariam com erro, permitindo a verificação em separado delas. Observação interessante também pode ser feita em relação à aceitação da hipótese básica do teste qui-quadrado para a comparação da variância da unidade de peso *a priori* com a variância da unidade de peso *a posteriori*. Observa-se que, sem o uso do pressuposto de SCHMIDT (2000), há dificuldade no enquadramento do teste na zona de aceitação, tendo havido a necessidade de aumentar a tolerância do aparelho em termos de precisão, traduzida na sua variância nominal. Isso demonstra a importância da existência de uma estrutura de calibração e classificação de instrumentos de medição geodésica, que permitam a reavaliação e reclassificação deles, de forma a possibilitar uma análise mais realista dos

processos. Exemplos dessas estruturas de classificação de qualidade são a norma alemã DIN 18.723 (Teil 2) e a norte-americana ISO.

5.1.2. Conclusões em relação à implementação em sistemas programáveis

A facilidade de implementação das rotinas, conseguidas com o ordenamento dos parâmetros apresentados neste trabalho, permite concluir da importância desse tipo de ordenamento para os envolvidos com programação, especialmente em sistemas geodésicos. O mesmo pode ser dito em relação à capacidade de generalização do mesmo para outros casos de ajustamento encontrados em Geodésia. A rapidez de desempenho dos computadores ao rodar as rotinas demonstra que não há limitações técnicas que inviabilizem a implementação da metodologia aqui sugerida.

5.2. RECOMENDAÇÕES

A dificuldade de enquadramento da hipótese básica do teste qui-quadrado na zona de aceitação sugere a necessidade da realização de trabalhos com variáveis em dois sentidos: primeiramente, enquadrando melhor a precisão dos aparelhos utilizados dentro de uma classificação mais condizente com seu estado no momento do trabalho e, preferentemente, de acordo com normas sérias como, por exemplo, a alemã DIN 18.723 (Teil 2). Em segundo lugar, sugerir avaliações alternativas para a variância das medidas e, conseqüentemente, da matriz dos pesos, parecendo ser este um ponto crucial para o sucesso da qualidade desse tipo

de trabalho. Sugere-se também a generalização da esquematização aqui apresentada, para outros casos que exijam ajustamento e análise da qualidade em Geodésia como, por exemplo, nivelamentos com inclusão de gravimetria e casos planimétricos. Finalmente, sugere-se a implementação dessas rotinas em diferentes linguagens de programação, o que confirmaria finalmente a viabilidade técnica e científica dos conceitos aqui repassados e ordenados.

6. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BENNING, W.; **Tunneldurchschlagsprognosen mittels Pseudostrecken.** Zeitschrift für Vermessungswesen, Stuttgart, v. 108, n. 6, p. 220-226, 1983.

DALMOLIN, Q.; **Ajustamento por Mínimos Quadrados.** Edição Revisada. UFPR, Curitiba-PR, 2002.

DIN 18.723 Teil 2.; **Feldverfahren zur Genauigkeitsuntersuchung geodätischer Instrumente (Nivelliere).** Alemanha, 1990.

DUPRAZ, H. & NIEMEIER, W.; **Um critère pour l' analyse dès réseax géodésiques de contrôle.** Revista Mensuration, Photogrammétrie. França, 1979.

_____ ; **Beurteilungskriterien für geodätischer Netze.** In: Internationalen Simposium über Deformationsmessungen mit Geodätischen Methoden, 2., Bonn. Beitrage zum. Stuttgart: K. Wittwer, p. 386-400, 1981.

FARRET, J.C.; **Estimativa do peso em nivelamento.** Seminário da disciplina de ajustamento avançado. Curitiba-Paraná, 1998.

GEMAEL, C.; **Introdução ao Ajustamento de Observações.** Curitiba: Editora da UFPR, 1994.

HAHN, VON M. et al.; **Ein Verfahren zur Abstimmung der Signifikanzniveaus für allgemeine $F_{m,n}$ - verteilte Teststatistiken.** – Teil I: Theorie. Zeitschrift für Vermessungswesen, Stuttgart, v. 114, n. 5, p. 234-248, 1989.

JÄGER, R.; **Analyse und Optimierung geodätischer Netze nach spektralen Kriterien und mechanische Analogien.** Deutsche Geodätische Kommission bei der Bayerischen Akademie der Wissenschaften, München, série C, n. 342, 1988.

JÄGER, R.; BILL, R.; **Genauigkeits- und Zuverlässigkeitsmasse in Verdichtungsnetzen.** In: Universität Karlsruhe. Geodätisches Institut. Beurteilung geodätischer Netze. Stuttgart, p. 70-98, 1986.

JORDAN-EGGERT.; **Jordan's handbook of Geodesy (Jordan-Eggert: Handbuch der Vermessungskunde).** Washington: Corps of engineers, U.S. Army- Army Map Service. English translation by Martha W. Carta, v.1, 1962a.

KOCH, K.R.; POPE, A.J.; **Least squares adjustment with zero variances.** Zeitschrift für Vermessungswesen. Stuttgart, v. 94, n.10, p. 390-393, 1969.

KUANG, S.; **Geodetic network analysis and optimal design: concepts and applications.** Chelsea: Ann Arbor Press, 1996.

LEONHARD, T.; NIEMEIER, W.; **Diagnosis of Trans-Canada-Levelling nets by principal components analysis**. In: Proceedings Second International Symposium on Problems Related to the Redefinition of North American Vertical Geodetic Networks Ottawa, May 26-30, p. 485-503, 1980.

MARSHALL, R.A.; **Network design and optimization in close range photogrammetry**. Kensington: School of Surveying, University of New Wales. UNISURV, Report S-36, 1989.

MONICO, J.F.G.; **Posicionamento pelo NAVSTAR-GPS – Descrição, fundamentos e aplicações**. São Paulo: Editora da UNESP, 2000.

MORAES, C.V.; **Aprimoramento da Concepção do Modelo Geodésico para a Caracterização de Extremas no Espaço Geométrico**. Curitiba, 2001. Tese (Doutorado em Ciências Geodésicas) – Departamento de Geomática, Universidade Federal do Paraná.

_____ ; **Curso de Georreferenciamento de Imóveis Rurais – Lei N° 10.267/2001- Ajustamento de Observações**. Notas de aula. Universidade Federal de Santa Maria-UFSM, Santa Maria-RS, 2004.

_____ ; **Distância Quadrática de Mahalanobis, Valor Próprio e análise de Componentes Principais como critérios de Acurácia Global à Qualidade de Redes Geodésicas**. Lisboa, n° 10, p. 53-74, 1999.

MÜRLE, M.; BILL, R.; **Zuverlässigkeits- und Genauigkeitsuntersuchung ebener geodätischer Netze.** Allgemeine Vermessungs-Nachrichten, Karlsruhe, v. 91, n. 2, p. 45-62, 1984.

NIEMEIER, W.; **Netzqualität und Optimierung.** In: PELZER, H. (Hrsg.). Geodätische Netze in Landes- und Ingenieurvermessung II. Stuttgart: K. Wittwer, v. 13, p. 153-224, 1985a.

NIEMEIER, W.; TESKEY, W.F.; LYALL, R.G.; **Precision, Reliability and Sensitivity aspects of an open pit monitoring network.** Alberta, Canada, 1982.

PROCHÁZKA, E.; **Die Verschiebungselipse und ihre Beziehungen zur Fehlerellipse und Fehlerkurve.** Studia Geophysica et Geodaetica, v. 10, n. 2, p. 137-146, 1966.

PELZER, H.; Grundlagen der mathematischen Statistik und der Ausgleichsrechnung. **Geodätische Netze in Landes und Ingenieurvermessung II.** Stuttgart: K. Wittwer, v.13, p.3-120, 1985a.

_____ ; **Beurteilung der Genauigkeit und der Zuverlässigkeit geodätischer Netze.** In: PELZER, H. (Hrsg.). Geodätische Netze in Landes- und Ingenieurvermessung. Stuttgart: K. Wittwer, v. 5, p. 273-304, 1980b.

SCHMIDT, H & WITTE, B.; **Vermessungskunde und Grundlagen der Statistik für das Bauwesen**. 4. ed. Stuttgart: Wittwer, 2000.

TORGE, W.; **Geodesy**. 3. ed. Berlin: de Gruyter, 2001.

VERESS, S.A.; **Measures of accuracy for analysis and design of survey - Survey and Mapping**. v.33, n.4, p.435-442, 1973.

WELSCH, H.; HEUNECKE, O; KUHLMANN, H.; **Auswertung geodätischer Übewachtungsmessungen**. Neidelberg: Wichmann, 2000.

7. BIBLIOGRAFIA CONSULTADA

BENNING, W.; **Statistik in Geodäsie, Geoinformation und Bauwesen.** Editora Wichmann, Heidelberg, Alemanha.

COMASTRI, J. A. & GRIP, J.; **Topografia Aplicada- Medição, divisão e demarcação.** Editora UFV, Viçosa-BA, 1998.

GEODÄTISCHES INSTITUT.; **Beurteilung geodätischer Netze.** Universidade de Karlsruhe, Alemanha, 1986.

HECK, V.B.; **Sensitivitätsanalyse geodätischer Deformationsnetze.** Revista Allgemeine Vermessungs-Nachrichten, nº93, caderno 5. Alemanha, 1986.

MICHAELIS.; **Pequeno Dicionário – Alemão-Português.** Editora Melhoramentos, São Paulo, 1994.

MORAES, C.V.; **Ajustamento de Poligonais pelo Método de Variação de Coordenadas.** Revista de Cartografia e Cadastro. Lisboa, 1997.

SPIEGEL, M. R.; **Estatística.** Editora McGraw-Hill do Brasil, Ltda. São Paulo-SP, 1977.

VERESS, S.A.; **Measures of Accuracy for Analysis and Design of Survey**. Revista Surveying and Mapping, vol. 33, n°4. Washington-DC, 1973.

WEBSTER'S.; **Dicionário Inglês-Português**. Editora Record, 12^a ed., Rio de Janeiro-RJ, 2001.

ANEXOS

ANEXO 1

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \quad * \text{diag} \quad \begin{bmatrix} 3,96103 \\ 4,30513 \\ 2,93788 \\ 9,01723 \\ 5,96714 \\ 11,83080 \\ 10,99726 \\ 5,79544 \\ 2,74411 \\ 2,39091 \\ 5,57974 \\ 2,60253 \\ 5,21444 \\ 4,65317 \\ 3,87261 \\ 4,05678 \\ 5,37774 \end{bmatrix} \quad * 10^{-2} * \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ANEXO 2 – Cálculo de $\mathbf{U} = {}_8\mathbf{A}_{1717}^T \mathbf{P}_{1717} \vec{l}_1$

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \begin{matrix} \begin{bmatrix} 3,96103 \\ 4,30513 \\ 2,93788 \\ 9,01723 \\ 5,96714 \\ 11,83080 \\ 10,99726 \\ 5,79544 \\ 2,74411 \\ 2,39091 \\ 5,57974 \\ 2,60253 \\ 5,21444 \\ 4,65317 \\ 3,87261 \\ 4,05678 \\ 5,37774 \end{bmatrix} \\ * \textit{diag} \end{matrix} * 10^{-2} * \begin{bmatrix} 0,00003 \\ 0,00002 \\ 0,01134 \\ 0,00001 \\ 0,00000 \\ 0,00001 \\ -0,01085 \\ -0,00003 \\ -0,00597 \\ 0,00009 \\ 0,01723 \\ -0,00289 \\ -0,00035 \\ -0,00110 \\ 0,00079 \\ -0,01179 \\ 0,00004 \end{bmatrix} (m)$$

