UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA MARIA
CENTRO DE CIÊNCIAS NATURAIS E EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO MESTRADO EM MATEMÁTICA

EQUAÇÕES DE NAVIER-STOKES: ASPECTOS FÍSICOS E SOLUÇÃO FRACA EM ESPAÇOS DE SOBOLEV

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Paulo Cesar Costa

Santa Maria, RS, Brasil
2008

EQUAÇÕES DE NAVIER-STOKES: ASPECTOS FÍSICOS E SOLUÇÃO FRACA EM ESPAÇOS DE SOBOLEV

por

Paulo Cesar Costa

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação Mestrado em Matemática, da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM, RS), como requisito parcial para obtenção do grau de
Mestre em Matemática

Orientador: Prof. Dr. João Paulo Lukaszczyk

Santa Maria, RS, Brasil
2008

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA MARIA
CENTRO DE CIÊNCIAS NATURAIS E EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO MESTRADO EM MATEMÁTICA

A Comissão Examinadora, abaixo assinada, aprova a Dissertação de Mestrado

EQUAÇÕES DE NAVIER-STOKES: ASPECTOS FÍSICOS E SOLUÇÃO FRACA EM ESPAÇOS DE SOBOLEV

elaborada por

Paulo Cesar Costa

Como requisito parcial para obtenção do grau de

Mestre em Matemática

COMISSÃO EXAMINADORA:

João Paulo Lukaszczyk, Dr.
(Presidente/Orientador)

Celene Buriol, Dra. (UFSM)

Maurício Fronza da Silva, Dr. (UFSM)

Santa Maria, 10 de dezembro de 2008

Agradecimentos

Em primeiro lugar gostaria de agradecer a DEUS por me dar vida, saúde e força para que eu pudesse realizar este trabalho a tanto sonhado.

Agradeço também às pessoas que de uma forma ou de outra colaboraram para a realização desta dissertação, em especial a minha mãe Helena de Nardi Costa que mesmo longe sempre esteve perto de mim mediante suas orações.

Agradeço aos professores do Programa de Pós-Graduação Mestrado em Matemática da UFSM pelo convívio enriquecedor e pela troca de experiência, em particular ao meu orientador Professor Doutor João Paulo Lukaszczyk, pela paciência, persistência, amizade, compreensão e disponibilidade dispensados durante a elaboração desta dissertação.

Agradeço ao comando do CMSM pelo apoio obtido durante a realização de todo curso mediante concessão de horário especial para estudo.

Finalmente gostaria de agradecer de forma especial à minha esposa Élica Torezani Costa e ao meu filho Guilherme Torezani Costa pela compreensão nos momentos que me fiz um presente ausente. Com certeza esse trabalho não se realizaria se não tivesse deles o carinho e amor em todos os momentos difíceis desta longa jornada de trabalho. Angústia, cansaço, vontade de desistir mas eles estavam sempre prontos para recarregar minhas energias. Com muito amor, meu muito obrigado.

Dedico este trabalho a meu pai Lourival José da Costa (in memorian).

Resumo

Neste trabalho, a partir da lei da conservação da massa e da segunda lei de Newton, deduzimos as equações de Navier-Stokes para um fluido incompressível. Em seguida fazemos, de forma detalhada, a formulação variacional destas equações. Para esta formulação, através do método de Galerkin, provamos a existência de solução fraca em espaços de Sobolev em um domínio limitado cuja fronteira seja regular.

Abstract

In this work, based on the Law of conservation of mass and the Newton's second Law, we deducted the equations of Navier-Stokes for the uncompressing fluids. Then we have developed in a detailed way the varying form of these equations. For this formulation, through the Galerkin method, we have proved the existence of weak solutions in Sobolev spaces in a bounded domain whit regular boundary.

Notação

No desenvolvimento deste trabalho procuramos utilizar a notação usual contida em livros dedicados ao estudo de equações diferenciais parciais, como referência ver ADANS [1], conforme descrito abaixo:

- Ω é um aberto limitado do $\mathbb{R}^n$ $\ (n \leq 4)$ com fronteira $\partial\Omega$ regular.
- $\overline{\Omega}$ é fecho do conjunto Ω.
- $D^m u(x) = \frac{\partial^{|m|} u(x)}{\partial x_1^{m_1} \partial x_2^{m_2} \ldots \partial x_m^{m_n}}$ com $|m| = m_1 + m_2 + \ldots + m_n$.
- $L^p(\Omega)$ é o espaço das funções mensuráveis g tais que

$$\big|g\big|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |g(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} < \infty, \quad 1 \leq p < \infty.$$

- Para $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, $p \geq 1$ e $u = \{u_1, u_2, u_3\}$ onde $u_i : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ com $i = 1, 2, 3$ temos:

$$\begin{aligned} |u|_{L^p(\Omega)} &= \left(\sum_{i=1}^{3} \int_\Omega |u_i(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} \\ \big|\nabla u\big|_{L^p(\Omega)} &= \left(\sum_{i,j=1}^{3} \int_\Omega \left| \frac{\partial u_i(x)}{\partial x_j} \right|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \\ b(u, v, w) &= \sum_{i,j=1}^{3} \int_\Omega u_i \frac{\partial v_j}{x_i} w_j \, dx. \end{aligned}$$

No caso de $p = 2$ as normas acima serão denotadas por $|u|$ e $|\nabla u|$.

- $C(\Omega)$, $C^k(\Omega)$, $C_0^k(\Omega)$, $C_0^\infty(\Omega)$ são espaços de funções definidos usualmente em análise, ver LIMA [16].

- $D(\Omega)$ é o espaço da funções de $C^\infty(\Omega)$ com suporte compacto contido em Ω.

- $W_0^{m,p}(\Omega)$ é o fecho de $D(\Omega)$ em $W^{m,p}$ (se $p=2$ escreve-se $H_0^m = W_0^{m,2}$). Em particular, $H_0^1(\Omega)$ é o fecho de $D(\Omega)$ em $H^1(\Omega)$.

- $V^* = \{u \in D(\Omega),\, \operatorname{div} u = 0\}$.

- V é o fecho de V^* em $H_0^1(\Omega)$.

- H é o fecho de V^* em $L^2(\Omega)$.

- B' é o dual do espaço de Banach B, isto é, o conjunto de todos os funcionais lineares contínuos em B.

- $L^p(0,T,X)$ é o espaço da funções L^p no tempo com valores em X, $1 \leq p < \infty$.

- $L^\infty(0,T,X)$ é o espaço da funções L^∞ no tempo com valores em X.

- Para u e v definidas em Ω temos:
$$(u,v) = \int_\Omega u(x)v(x)\,dx.$$

- $((u,v)) = (\nabla u, \nabla v)$.

- $\langle f, u\rangle$ é o funcional linear f aplicado em u.

- $S(\mathbb{R}^n)$ é o espaço das funções $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ tais que $\sup_x |x^\alpha D^\beta u| < \infty,\ \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$, onde para $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ e $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ tem-se $x^\alpha = x_1^{\alpha_1}.x_2^{\alpha_2}. \ldots .x_n^{\alpha_n}$.

- $S' = \{f : S(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{R}; f$ linear e contínuo$\}$ é o espaço das distribuições temperadas.

- δ_o e δ_T são distribuições de Dirac dadas, respectivamente, por

$$\begin{array}{rcl} \delta_o : D(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \phi & \longmapsto & \langle \delta_o, \phi \rangle = \phi(0) \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{rcl} \delta_T : D(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \phi & \longmapsto & \langle \delta_T, \phi \rangle = \phi(T). \end{array}$$

Introdução

As equações de Navier-Stokes foram denominadas assim após Claude Louis Marie Navier (1785-1836) e George Gabriel Stokes (1819-1903) desenvolverem um conjunto de equações que descreveriam o movimento das substâncias fluidas tais como líquidos e gases. Elas constituem um conjunto de equações que descrevem um grande número de fenômenos físicos de grande interesse econômico e acadêmico tais como: clima, correntes oceânicas, fluxo de água em canos, fluxo ao redor de aerofólios (asas), propagação de fumaça em incêndio, fluxo sanguíneo, etc.

As equações de Navier-Stokes são equações diferenciais que descrevem o movimento de um fluido (neste trabalho consideraremos a densidade do fluido $\rho = 1$). As variáveis são o campo de velocidades e a pressão. A formulação clássica para um fluido viscoso e incompressível é a seguinte:
achar uma função vetorial

$$v : \Omega \times [0,T] \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

e uma função escalar

$$p : \Omega \times [0,T] \longrightarrow \mathbb{R}$$

tais que

$$
\begin{cases}
v_t + v \cdot \nabla v - \mu \Delta v + \nabla p = f \ \text{ em } \ \Omega \times (0,T) \\
\operatorname{div} v = 0 \ \text{ em } \ \Omega \times (0,T) \\
v(x,0) = v_0(x) \ \ \forall x \in \Omega \\
v(x,t) = 0 \ \ \forall t \in (0,T) \ \text{ e } \ \forall x \in \partial\Omega
\end{cases}
$$

onde $v(x,t)$ é a velocidade da partícula que ocupa o ponto x no instante t, $p(x,t)$ é a pressão exercida sobre ela no mesmo ponto e no mesmo instante, μ é o coeficiente de viscosidade e $v_0(x)$ é a velocidade inicial.

O trabalho está dividido em quatro capítulos principais. No primeiro capítulo apresentamos os preliminares, resultados básicos de análise funcional que darão suporte para o estudo de soluções fracas em espaços de Sobolev.

No segundo capítulo deduzimos as equações de Navier-Stokes para um fluido viscoso e incompressível. Nesta dedução usamos princípios básicos da Física tais como a conservação da massa e a segunda lei de Newton além do teorema do transporte.

No terceiro capítulo começamos fazendo uma série de considerações a respeito da forma trilinear b que aparece na formulação variacional das equações. Em seguida mostramos de forma detalhada a formulação variacional das equações de Navier-Stokes para um fluido viscoso e incompressível bem como a existência de solução em dimensão finita.

O quarto capítulo é dedicado à existência de solução em um espaço de dimensão infinita. Começamos este capítulo fazendo várias estimativas que darão suporte para a demonstração do teorema 3.1 que é o objetivo maior deste trabalho. Para tal usamos as convergências forte, fraca e fraco-estrela.

Sumário

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo apresentamos uma série de resultados básicos que darão suporte teórico para o estudo da equação a que nos propomos.

A fim de não tornar este trabalho longo e cansativo, os resultados aqui enunciados não serão demonstrados, apenas será indicado uma referência onde se pode encontrar tais demonstrações.

1.1 Teorema da Divergência

Seja Ω uma região em três dimensões delimitada por uma superfície fechada $\partial\Omega$, e denotemos por n o vetor normal unitário exterior a $\partial\Omega$ em (x, y, z). Se F é uma função vetorial dotada de derivadas parciais contínuas em Ω, então

$$\int_{\partial\Omega} F \cdot n \, dS = \int_{\Omega} \operatorname{div} F \, dV.$$

Referência: SWOKOWSKI [25] pág. 616.

1.2 Teorema de Carathéodory

Considere a equação diferencial ordinária $x^{'} = f(t,x)$. Seja f uma função definida numa região R dada por $|t-\tau| \leq a$ e $|x-\xi| \leq b$ tal que f é mensurável em t para cada x fixo e contínua em x para cada t fixo. Se existe uma função m integrável no intervalo $|t-\tau| \leq a$ com

$$|f(t,x)| \leq m(t) \qquad (t,x) \in R$$

então existe uma solução φ satisfazendo a EDO a menos de um conjunto de medida nula.
Referência: CODDINGTON [4] pág. 43.

1.3 Imersões de Sobolev

Se Ω é um aberto limitado do $\mathbb{R}^n$ com fronteira regular então para todo $u \in H_0^1(\Omega)$ e $1 \leq q < \infty$ tem-se:

$$\begin{aligned}
|u|_{L^q(\Omega)} &\leq c(\Omega)|u|_{H_0^1(\Omega)} \qquad se \quad n=2,\\
|u|_{L^6(\Omega)} &\leq c(\Omega)|u|_{H_0^1(\Omega)} \qquad se \quad n=3,\\
|u|_{L^4(\Omega)} &\leq c(\Omega)|u|_{H_0^1(\Omega)} \qquad se \quad n=4,\\
|u|_{L^{\frac{2n}{n-2}}(\Omega)} &\leq c(\Omega)|u|_{H_0^1(\Omega)} \quad se \quad n \geq 3.
\end{aligned}$$

Referência: TEMAM [26] p. 159 ou BRÉZIS [2] p. 168.

1.4 Identidade de Green

Se $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ é um conjunto aberto limitado então

$$\int_\Omega (u\Delta v + \nabla u \nabla v)\, dx = \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial v}{\partial \overrightarrow{n}}\, dS$$

onde $\frac{\partial v}{\partial \overrightarrow{n}}$ é a derivada de v na direção de $\overrightarrow{n}$.

Referência: EVANS [5] p. 559.

1.5 Desigualdade de Hölder

Sejam $1 < p,\, q < \infty$ com $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Se $u \in L^p$ e $v \in L^q$ então $uv \in L^1$ e vale a desigualdade

$$\int |uv| \leq |u|_{L^p}|v|_{L^q}.$$

Referência: BRÉZIS [2] p. 56.

1.6 Teorema de Tonelli

Sejam $\Omega_1 \subset \mathbb{R}^n$, $\Omega_2 \subset \mathbb{R}^m$ abertos e $f : \Omega_1 \times \Omega_2 \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função mensurável. Se

$$\int_{\Omega_2} |f(x,y)|dy < \infty$$

para quase todo $x \in \Omega_1$ e

$$\int_{\Omega_1} dx \int_{\Omega_2} |f(x,y)|dy < \infty$$

então $f \in L^1(\Omega_1 \times \Omega_2)$.

Referência: BRÉZIS [2] p. 55.

1.7 Teorema de Fubini

Sejam $\Omega_1 \subset \mathbb{R}^n$, $\Omega_2 \subset \mathbb{R}^m$ abertos e $f : \Omega_1 \times \Omega_2 \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função mensurável. Se $f \in L^1(\Omega_1 \times \Omega_2)$ então

$$\int_{\Omega_1} \int_{\Omega_2} f(x,y)\, dy\, dx = \int_{\Omega_2} \int_{\Omega_1} f(x,y)\, dx\, dy = \int_{\Omega_1 \times \Omega_2} f(x,y)\, dx\, dy.$$

Referência: BRÉZIS [2] p. 55.

1.8 Desigualdade de Poincaré

Se $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um aberto limitado com fronteira regular então para todo $v \in H_0^1(\Omega)$ tem-se:

$$|v|_{L^2(\Omega)} \leq c|\nabla v|_{L^2(\Omega)}$$

onde c é uma constante que depende de Ω.

Referência: MEDEIROS [21] p. 91.

1.9 Identidade de Parseval

Se $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ é infinitamente diferenciável e tem suporte compacto então

$$|f|^2_{L^2(\mathbb{R})} = |\widehat{f}|^2_{L^2(\mathbb{R})}.$$

Referência: IÓRIO [13] p. 192.

1.10 Teorema da Compacidade

Se X_0, X e X_1 são espaços de Hilbert onde $X_0 \subset X \subset X_1$ com injeções contínuas e a injeção de X_0 em X compacta então para qualquer limitado K e $\gamma > 0$ dados a injeção de $H_K^\gamma(\mathbb{R}, X_0, X_1)$ em $L^2(\mathbb{R}, X)$ é compacta, onde

$$H^\gamma(\mathbb{R}, X_0, X_1) = \{v \in L^2(\mathbb{R}, X_0);\ D_t^\gamma v \in L^2(\mathbb{R}, X_1)\}$$

$$H_K^\gamma(\mathbb{R}, X_0, X_1) = \{u \in H^\gamma(\mathbb{R}, X_0, X_1),\ \operatorname{supp} u \subset K\}.$$

Referência: TEMAM [26] p. 274.

1.11 Teorema da Representação de Riesz

Sejam $1 < p,\, q < \infty$ com $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Se $u \in (L^p(\Omega))'$ então existe uma única função $v \in L^q(\Omega)$ tal que

$$\langle u, f\rangle = \int vf \qquad \forall f \in L^p(\Omega).$$

Referência: BRÉZIS [2] p. 61.

1.12 Definições

- Se $f \in L^1(\mathbb{R})$ a transformada de Fourier de f se define por

$$\widehat{f}(r) = \int_{\mathbb{R}} e^{-2i\pi rt} v(t)\, dt$$

- Se $u \in S'$ a transformada de Fourier $\widehat{u}$ de u se define por

$$\langle \widehat{u}, \phi\rangle = \langle u, \widehat{\phi}\rangle, \quad \forall \phi \in S.$$

Como exemplo calculemos a transformada de Fourier de δ_0 e δ_T:

$$\langle \widehat{\delta_o}, \phi\rangle = \langle \delta_o, \widehat{\phi}\rangle = \widehat{\phi}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2i\pi t.0}\, \phi(t)\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} 1\, \phi(t)\, dt = \langle 1, \phi\rangle.$$

logo $\widehat{\delta_o} = 1$

Analogamente

$$\langle \widehat{\delta_T}, \phi\rangle = \langle \delta_T, \widehat{\phi}\rangle = \widehat{\phi}(T) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2i\pi tT}\, \phi(t)\, dt = \langle e^{-2i\pi tT}, \phi\rangle.$$

Logo $\widehat{\delta_T} = h(r) = e^{-2i\pi rT}$.

1.13 Teorema

Se $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ a transformada $\widehat{f}$ de f como distribuição temperada coincide com a transformada de f como função.

Referência: HOUNIE [12] p. 81.

Capítulo 2

As Equações de Navier-Stokes

2.1 A Função Fluxo

Uma maneira de se descrever o movimento de um fluido [1] é tentando seguir o movimento de suas partículas, atribuindo as coordenadas x, y e z a cada uma delas e especificando estas coordenadas em função do tempo.

Nesse contexto, um modelo matemático para esta descrição é a função ϕ definida da seguinte forma: seja $\Omega_0 \subset \mathbb{R}^3$ uma região aberta limitada ocupada por uma porção de fluido (líquido ou gás) no instante $t = 0$. A função

$$\begin{array}{rcl} \phi \ : \ \Omega_0 \times [0,\, T] & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (a, t) & \longmapsto & \phi(a, t) \end{array}$$

é tal que para cada $a \in \Omega_0$ a curva $t \longmapsto \phi(a, t)$ descreve a trajetória da partícula que ocupava a posição a no instante $t = 0$, ou ainda, considerando o escoamento do fluido, para cada t fixo, $\phi_t(\Omega_0) = \Omega_t$ é a região ocupada pela porção de fluido no tempo t.

[1] Fluido é qualquer substância não sólida capaz de escoar e assumir a forma do recipiente que o contém.

A função ϕ chama-se *função fluxo* e esta é a *descrrição lagrangeana.* Os pontos de Ω_0 são chamados *coordenadas materiais.*

2.2 O Campo de Velocidades

Outra maneira de descrever o movimento de um fluido é abandonar a tentativa de especificar a trajetória de cada partícula e, ao invés, especificar a velocidade do fluido, em cada ponto do espaço, a cada instante de tempo.

Nesse contexto, um modelo matemático para esta descrição é a função v definida da seguinte forma: seja $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ um aberto limitado. A função

$$\begin{array}{rccc} v & : & \Omega \times [0,T] & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & & (x,t) & \longmapsto & v(x,t) \end{array}$$

é tal que para cada x fixo, $v_x = v(x,t)$ nos dá o vetor velocidade da partícula que está passando pela posição x, no instante t. Assim, focaliza-se a atenção no que está acontecendo em um determinado ponto no espaço, num instante particular, ao invés de no que está acontecendo com uma determinada partícula do fluido.

A função v chama-se *campo de velocidades* e esta é a *descrição euleriana.* Os pontos x são chamados *coordenadas espaciais.*

A *função fluxo* e o *campo de velocidades* estão fortemente ligados. Das definições acima segue-se imediatamente a relação

$$v\big(\phi(a,t),t\big) = \frac{d}{dt}\phi(a,t), \qquad a \in \Omega_0 \tag{2.1}$$

isso quer dizer que o vetor velocidade da partícula que está no ponto $\phi(a,t)$ é a derivada do caminho $t \longmapsto \phi(a,t)$.

Portanto, conhecendo-se a função ϕ podemos definir, para cada t, a função $\phi_t(x) = \phi(x,t)$. Essa nova função, para cada t fixado, nos dá a posição da partícula que no instante $t = 0$ ocupava a posição x. Por exemplo, $\phi_0(x) = \phi(x, 0) = x$.

Sabendo-se inverter a função ϕ_t obtemos a função ϕ_t^{-1} tal que $\phi_t^{-1}(x)$ é a posição a em que a partícula se encontrava no instante $t = 0$.

Se $\phi(a, t) = x$ então $\phi_t^{-1}(x) = a$. Assim, da relação 2.1, temos

$$v(x, t) = v\big(\phi(a, t), t\big) = \frac{d}{dt}\big[\phi(\phi_t^{-1}(x), t)\big]$$

ou seja, conhecendo-se ϕ e sabendo-se inverter a função ϕ_t obtemos o campo de velocidades $v(x, t)$. Reciprocamente, se o campo de velocidades $v(x, t)$ for conhecido, obtém-se ϕ resolvendo-se, para cada $a \in \Omega_0$ a equação diferencial ordinária com a condição incial

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \frac{d}{dt}\phi(a, t) & = & v\big(\phi(a, t), t\big) \\ \phi(a, 0) & = & a. \end{array} \right. \tag{2.2}$$

Isso justifica o fato de apenas o *campo de velocidades* ser uma das variáveis nas Equações de Navier-Stokes, como veremos adiante.

No intuito de deduzir as Equações de Navier-Stokes a partir da segunda lei de Newton e do princípio da conservação da massa vamos admitir que a função fluxo ϕ exista e possua todas as propriedades de diferenciabilidade e invertibilidade que forem necessárias. Mais precisamente, se Ω_t é a região do espaço ocupada pelo fluido no instante t, admitiremos que

$$\begin{array}{rcrcl} \phi_t & : & \Omega_0 & \longrightarrow & \Omega_t \\ & & x & \longmapsto & \phi(x, t) \end{array}$$

é diferenciável e possui inversa diferenciável.

2.3 A Derivada Parcial e Material

Dada uma função $f(x,t)$, $x \in \Omega_t \subset \mathbb{R}^3$ e uma trajetória $t \longrightarrow \phi(a,t)$ considere a função composta $f_\phi(t) = f\big(\phi(a,t),t\big)$. Usando a regra da cadeia para derivar f_ϕ e omitindo os argumentos das funções f e ϕ obtemos:

$$\begin{aligned}
f_\phi^{'}(t) &= \frac{d}{dt} f(\phi_1,\phi_2,\phi_3,t) \\
f_\phi^{'}(t) &= \frac{\partial f}{\partial \phi_1}\frac{\partial \phi_1}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial \phi_2}\frac{\partial \phi_2}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial \phi_3}\frac{\partial \phi_3}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial t} \\
f_\phi^{'}(t) &= \left(\frac{\partial f}{\partial \phi_1},\frac{\partial f}{\partial \phi_2},\frac{\partial f}{\partial \phi_3}\right)\cdot\left(\frac{\partial \phi_1}{\partial t},\frac{\partial \phi_2}{\partial t},\frac{\partial \phi_3}{\partial t}\right) + \frac{\partial f}{\partial t} \\
f_\phi^{'}(t) &= \phi^{'} \cdot \nabla f + \frac{\partial f}{\partial t}
\end{aligned}$$

onde a última expressão é a forma reduzida da penúltima, de acordo com as convenções para a utilização dos símbolos $\cdot$ e ∇. Assim, de 2.2, temos:

$$f_\phi^{'}(t) = \left(v \cdot \nabla f + \frac{\partial f}{\partial t}\right)(\phi(a,t),t).$$

A *derivada material* de f, que denotaremos por $\frac{Df}{Dt}$, é definida pela fórmula:

$$\frac{Df}{Dt} = v \cdot \nabla f + \frac{\partial f}{\partial t}. \tag{2.3}$$

Assim, dada uma função $f(x,t)$, a derivada material nos dá a taxa de variação de f ao longo da trajetória de uma partícula que, no instante t, ocupa a posição $x \in \Omega_t$.

Se considerarmos um ponto fixo no espaço a derivada material nos dá a taxa de variação de f em relação ao tempo (descrição Euleriana). Neste caso, $\frac{Df}{Dt} = \frac{\partial f}{\partial t}$ chama-se *derivada parcial.*

2.4 O Teorema do Transporte

Uma função $f : \mathbb{U} \longrightarrow \mathbb{R}^n$, definida no aberto $\mathbb{U} \subset \mathbb{R}^m$, diz-se diferenciável no ponto $a \in \mathbb{U}$ quando, para todo $v = (\alpha_1, ..., \alpha_m)$ tal que $a + v \in \mathbb{U}$ e para cada $i = 1, ..., n$, tem-se

$$f_i(a+v) - f_i(a) = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a).\alpha_j + r_i(v) \qquad \text{com} \qquad \lim_{v \to 0} \frac{r_i(v)}{|v|} = 0.$$

A matriz

$$\left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)\right] \in M(n \times m)$$

chama-se *matriz jacobiana* de f no ponto a e a transformação linear $f'(a) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, cuja matriz em relação às bases canônicas de $\mathbb{R}^m$ e $\mathbb{R}^n$ é a matriz jacobiana de f no ponto a, chama-se a *derivada da aplicação* f no ponto a.

Lema 2.1. *Se a aplicação $f : \mathbb{U} \longrightarrow \mathbb{R}^3$, definida no aberto $\mathbb{U} \subset \mathbb{R}^3$ e diferenciável no ponto $a \in \mathbb{U}$, admite uma inversa $g = f^{-1} : \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida no aberto $\mathbb{V} \subset \mathbb{R}^3$ e diferenciável no ponto $b = f(a)$, então $Jf(a) \neq 0$, onde $Jf(a)$ é o determinante da matriz jacobiana de f no ponto a.*

Demonstração:

Seja $I_d : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ a aplicação identidade, ou seja, $I_d(x) = (x)$, para todo $x \in \mathbb{R}^3$. A transformação linear $I_d' : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, cuja matriz em relação a base canônica é I_3 (matriz identidade de ordem 3) é a derivada de I_d. Assim, $g\,o\,f = I_d$, e portanto, $(g\,o\,f)'(a) = I_d'$. Pela Regra da Cadeia vem que $g'(f(a)).f'(a) = g'(b).f'(a) = I_3$. Analogamente, $f'(g(b)).g'(b) = f'(a).g'(b) = I_3$. Isso mostra que $g'(b) = f'(a)^{-1}$, ou seja, $f'(a)$ possui inversa. Assim, pelas propriedades usuais dos determinantes temos que $Jf(a) \neq 0$.

Mais geralmente, se uma aplicação f admite inversa em todo seu domínio aberto D, então $Jf(x) \neq 0$ para todo $x \in D$.

Teorema 2.1 (Teorema do Transporte). *Satisfeitas as hipóteses sobre a função fluxo ϕ mencionadas nas seções anteriores e sendo Ω_t uma região onde se pode aplicar o Teorema da Divergência de Gauss, vale a seguinte fórmula:*

$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega_t} f(x,t)dx = \int_{\Omega_t}\left(\frac{Df}{Dt} + f\,div\,v\right)(x,t)dx.$$

Demonstração:

Na primeira integral acima, para cada t fixo, façamos a seguinte mudança de variável:

$$x = \phi_t(y)$$

ou seja,

$$(x_1,x_2,x_3) = (\phi_1(y),\phi_2(y),\phi_3(y)) = \big(\phi_1(y_1,y_2,y_3),\ \phi_2(y_1,y_2,y_3),\ \phi_3(y_1,y_2,y_3)\big)$$

assim, o jacobiano $J(y,t)$ é dado por

$$J(y,t) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial\phi_1}{\partial y_1} & \dfrac{\partial\phi_1}{\partial y_2} & \dfrac{\partial\phi_1}{\partial y_3} \\ \dfrac{\partial\phi_2}{\partial y_1} & \dfrac{\partial\phi_2}{\partial y_2} & \dfrac{\partial\phi_2}{\partial y_3} \\ \dfrac{\partial\phi_3}{\partial y_1} & \dfrac{\partial\phi_3}{\partial y_2} & \dfrac{\partial\phi_3}{\partial y_3} \end{vmatrix}$$

onde o argumento y das derivadas foi omitido. Logo,

$$\int_{\Omega_t} f(x,t)dx = \int_{\Omega_0} f(\phi_t(y),t)\big|J(y,t)\big|dy. \tag{2.4}$$

Como, por hipótese, ϕ_t é sempre inversível, pelo Lema 2.1 $J(y,t)$ nunca se anula. Além disso, o jacobiano é contínuo (pois é uma soma de produtos de funções contínuas).

Por outro lado, $t=0 \Rightarrow x=\phi_0(y) \Rightarrow (x_1,x_2,x_3)=\phi_0(y)=y=(y_1,y_2,y_3)$. Neste caso

$$\frac{\partial\phi_i}{\partial y_j}(y) = \begin{cases} 1, & \text{se} \quad i=j \\ 0, & \text{se} \quad i\neq j. \end{cases}$$

Dessa forma, $J(y,0) = det\, I_3 = 1 > 0$. Logo, $J(y,t)$ é sempre positivo e 2.4 pode ser escrito como

$$\int_{\Omega_t} f(x,t)dx = \int_{\Omega_0} f(\phi_t(y),t)J(y,t)dy. \tag{2.5}$$

Pela definição da função ϕ, $\phi_t(y) = \phi(y,t)$ é a posição da partícula que no tempo $t = 0$ ocupava a posição y que não se altera com o passar do tempo. Dessa forma a integral que resultou da mudança de variáveis tem domínio de integração independente do tempo. Podemos, portanto, trocar a ordem de derivação e integração, obtendo

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\int_{\Omega_t} f(x,t)dx &= \frac{d}{dt}\int_{\Omega_0} f(\phi(y,t),t)J(y,t)dy \\
&= \int_{\Omega_0} \left(\frac{d}{dt}\left[f(\phi(y,t),t)J(y,t)\right]\right) dy \\
&= \int_{\Omega_0} \left(\left[\frac{d}{dt} f(\phi(y,t),t)\right] J(y,t) \,+\, f(\phi(y,t),t)\frac{d}{dt}J(y,t)\right) dy \\
&= \int_{\Omega_0} \left[\frac{d}{dt} f(\phi(y,t),t)\right] J(y,t)dy \,+\, \int_{\Omega_0} f(\phi(y),t)\frac{d}{dt}J(y,t)dy.
\end{aligned}$$

Consideremos a primeira integral após a última igualdade acima. A derivada no integrando é a derivada de f calculada ao longo de um caminho, ou seja, a derivada material. Logo

$$\int_{\Omega_0} f(\phi(y),t)\frac{d}{dt}J(y,t)dy \;\;=\;\; \int_{\Omega_0} \left[\frac{Df}{Dt}(\phi(y,t),t)\right] J(y,t)dy.$$

Daí, pela mudança de variável $x = \phi_t(y)$, temos

$$\int_{\Omega_0} \frac{Df}{Dt}(\phi(y,t),t)J(y,t)dy = \int_{\Omega_t} \frac{Df}{Dt}(x,t). \tag{2.6}$$

Consideremos agora a integral

$$\int_{\Omega_0} f(\phi(y),t)\frac{d}{dt}J(y,t)dy.$$

Inicialmente vamos calcular a derivada do jacobiano,

$$\frac{dJ}{dt} = \frac{d}{dt}\begin{vmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial y_1} & \frac{\partial \phi_1}{\partial y_2} & \frac{\partial \phi_1}{\partial y_3} \\ \frac{\partial \phi_2}{\partial y_1} & \frac{\partial \phi_2}{\partial y_2} & \frac{\partial \phi_2}{\partial y_3} \\ \frac{\partial \phi_3}{\partial y_1} & \frac{\partial \phi_3}{\partial y_2} & \frac{\partial \phi_3}{\partial y_3} \end{vmatrix}$$

no ponto (y,t). Pela regra de Sarrus para o cálculo de determinante, obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{dJ}{dt} &= \frac{d}{dt}\Bigg(\frac{\partial \phi_1}{\partial y_1}\frac{\partial \phi_2}{\partial y_2}\frac{\partial \phi_3}{\partial y_3} + \frac{\partial \phi_1}{\partial y_2}\frac{\partial \phi_2}{\partial y_3}\frac{\partial \phi_3}{\partial y_1} + \frac{\partial \phi_1}{\partial y_3}\frac{\partial \phi_2}{\partial y_1}\frac{\partial \phi_3}{\partial y_2} - \\ &- \frac{\partial \phi_1}{\partial y_3}\frac{\partial \phi_2}{\partial y_2}\frac{\partial \phi_3}{\partial y_1} - \frac{\partial \phi_1}{\partial y_1}\frac{\partial \phi_2}{\partial y_3}\frac{\partial \phi_3}{\partial y_2} - \frac{\partial \phi_1}{\partial y_2}\frac{\partial \phi_2}{\partial y_1}\frac{\partial \phi_3}{\partial y_3}\Bigg). \end{aligned}$$

Pela regra do produto, temos:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \phi_1}{\partial y_i}\frac{\partial \phi_2}{\partial y_j}\frac{\partial \phi_3}{\partial y_k}\right) = \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial y_i}\right)'\frac{\partial \phi_2}{\partial y_j}\frac{\partial \phi_3}{\partial y_k} + \frac{\partial \phi_1}{\partial y_i}\left(\frac{\partial \phi_2}{\partial y_j}\right)'\frac{\partial \phi_3}{\partial y_k} + \frac{\partial \phi_1}{\partial y_i}\frac{\partial \phi_2}{\partial y_j}\left(\frac{\partial \phi_3}{\partial y_k}\right)'.$$

Assim, fazendo i, j, k variar no conjunto $A = \{1,2,3\}$, com $i \neq j \neq k \neq i$ obtemos:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \phi_1}{\partial y_1}\frac{\partial \phi_2}{\partial y_2}\frac{\partial \phi_3}{\partial y_3}\right) = \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial y_1}\right)'\frac{\partial \phi_2}{\partial y_2}\frac{\partial \phi_3}{\partial y_3} + \frac{\partial \phi_1}{\partial y_1}\left(\frac{\partial \phi_2}{\partial y_2}\right)'\frac{\partial \phi_3}{\partial y_3} + \frac{\partial \phi_1}{\partial y_1}\frac{\partial \phi_2}{\partial y_2}\left(\frac{\partial \phi_3}{\partial y_3}\right)'$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \phi_1}{\partial y_2}\frac{\partial \phi_2}{\partial y_3}\frac{\partial \phi_3}{\partial y_1}\right) = \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial y_2}\right)'\frac{\partial \phi_2}{\partial y_3}\frac{\partial \phi_3}{\partial y_1} + \frac{\partial \phi_1}{\partial y_2}\left(\frac{\partial \phi_2}{\partial y_3}\right)'\frac{\partial \phi_3}{\partial y_1} + \frac{\partial \phi_1}{\partial y_2}\frac{\partial \phi_2}{\partial y_3}\left(\frac{\partial \phi_3}{\partial y_1}\right)'$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \phi_1}{\partial y_3}\frac{\partial \phi_2}{\partial y_1}\frac{\partial \phi_3}{\partial y_2}\right) = \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial y_3}\right)'\frac{\partial \phi_2}{\partial y_1}\frac{\partial \phi_3}{\partial y_2} + \frac{\partial \phi_1}{\partial y_3}\left(\frac{\partial \phi_2}{\partial y_1}\right)'\frac{\partial \phi_3}{\partial y_2} + \frac{\partial \phi_1}{\partial y_3}\frac{\partial \phi_2}{\partial y_1}\left(\frac{\partial \phi_3}{\partial y_2}\right)'$$

$$\frac{d}{dt}\left(-\frac{\partial \phi_1}{\partial y_3}\frac{\partial \phi_2}{\partial y_2}\frac{\partial \phi_3}{\partial y_1}\right) = -\left(\frac{\partial \phi_1}{\partial y_3}\right)'\frac{\partial \phi_2}{\partial y_2}\frac{\partial \phi_3}{\partial y_1} - \frac{\partial \phi_1}{\partial y_3}\left(\frac{\partial \phi_2}{\partial y_2}\right)'\frac{\partial \phi_3}{\partial y_1} - \frac{\partial \phi_1}{\partial y_3}\frac{\partial \phi_2}{\partial y_2}\left(\frac{\partial \phi_3}{\partial y_1}\right)'$$

$$\frac{d}{dt}\left(-\frac{\partial \phi_1}{\partial y_1}\frac{\partial \phi_2}{\partial y_3}\frac{\partial \phi_3}{\partial y_2}\right) = -\left(\frac{\partial \phi_1}{\partial y_1}\right)'\frac{\partial \phi_2}{\partial y_3}\frac{\partial \phi_3}{\partial y_2} - \frac{\partial \phi_1}{\partial y_1}\left(\frac{\partial \phi_2}{\partial y_3}\right)'\frac{\partial \phi_3}{\partial y_2} - \frac{\partial \phi_1}{\partial y_1}\frac{\partial \phi_2}{\partial y_3}\left(\frac{\partial \phi_3}{\partial y_2}\right)'$$

$$\frac{d}{dt}\left(-\frac{\partial\phi_1}{\partial y_2}\frac{\partial\phi_2}{\partial y_1}\frac{\partial\phi_3}{\partial y_3}\right) = -\left(\frac{\partial\phi_1}{\partial y_2}\right)'\frac{\partial\phi_2}{\partial y_1}\frac{\partial\phi_3}{\partial y_3} - \frac{\partial\phi_1}{\partial y_2}\left(\frac{\partial\phi_2}{\partial y_1}\right)'\frac{\partial\phi_3}{\partial y_3} - \frac{\partial\phi_1}{\partial y_2}\frac{\partial\phi_2}{\partial y_1}\left(\frac{\partial\phi_3}{\partial y_3}\right)'.$$

Observe que cada uma das seis derivadas acima é uma soma de três parcelas. Somando a primeira parcela de cada uma delas obtemos o determinante

$$D_1 = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial\phi_1}{\partial y_1} & \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial\phi_1}{\partial y_2} & \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial\phi_1}{\partial y_3} \\ \frac{\partial\phi_2}{\partial y_1} & \frac{\partial\phi_2}{\partial y_2} & \frac{\partial\phi_2}{\partial y_3} \\ \frac{\partial\phi_3}{\partial y_1} & \frac{\partial\phi_3}{\partial y_2} & \frac{\partial\phi_3}{\partial y_3} \end{vmatrix}$$

Analogamente, a soma das segundas parcelas e das terceiras nos dão, respectivamente, os determinantes

$$D_2 = \begin{vmatrix} \frac{\partial\phi_1}{\partial y_1} & \frac{\partial\phi_1}{\partial y_2} & \frac{\partial\phi_1}{\partial y_3} \\ \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial\phi_2}{\partial y_1} & \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial\phi_2}{\partial y_2} & \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial\phi_2}{\partial y_3} \\ \frac{\partial\phi_3}{\partial y_1} & \frac{\partial\phi_3}{\partial y_2} & \frac{\partial\phi_3}{\partial y_3} \end{vmatrix} \quad \text{e} \quad D_3 = \begin{vmatrix} \frac{\partial\phi_1}{\partial y_1} & \frac{\partial\phi_1}{\partial y_2} & \frac{\partial\phi_1}{\partial y_3} \\ \frac{\partial\phi_2}{\partial y_1} & \frac{\partial\phi_2}{\partial y_2} & \frac{\partial\phi_2}{\partial y_3} \\ \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial\phi_3}{\partial y_1} & \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial\phi_3}{\partial y_2} & \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial\phi_3}{\partial y_3} \end{vmatrix}$$

Por outro lado, pela regularidade da função ϕ, podemos trocar a ordem de derivação e escrever

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial\phi_i}{\partial y_j}(y,t) &= \frac{\partial}{\partial y_j}\left(\frac{\partial\phi_i}{\partial t}(y,t)\right) \\ &= \frac{\partial}{\partial y_j}\left[v_i(\phi(y,t),t)\right] \\ &= \sum_{k=1}^{3}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k}(\phi(y,t),t)\frac{\partial\phi_k}{\partial y_j}(y,t)\right). \end{aligned}$$

Assim, aplicando a propriedade da soma para determinantes, segue que

$$\frac{dJ}{dt} = \sum_{k=1}^{3}\begin{vmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial x_k}\frac{\partial\phi_k}{\partial y_1} & \frac{\partial v_1}{\partial x_k}\frac{\partial\phi_k}{\partial y_2} & \frac{\partial v_1}{\partial x_k}\frac{\partial\phi_k}{\partial y_3} \\ \frac{\partial\phi_2}{\partial y_1} & \frac{\partial\phi_2}{\partial y_2} & \frac{\partial\phi_2}{\partial y_3} \\ \frac{\partial\phi_3}{\partial y_1} & \frac{\partial\phi_3}{\partial y_2} & \frac{\partial\phi_3}{\partial y_3} \end{vmatrix} + \sum_{k=1}^{3}\begin{vmatrix} \frac{\partial\phi_1}{\partial y_1} & \frac{\partial\phi_1}{\partial y_2} & \frac{\partial\phi_1}{\partial y_3} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x_k}\frac{\partial\phi_k}{\partial y_1} & \frac{\partial v_2}{\partial x_k}\frac{\partial\phi_k}{\partial y_2} & \frac{\partial v_2}{\partial x_k}\frac{\partial\phi_k}{\partial y_3} \\ \frac{\partial\phi_3}{\partial y_1} & \frac{\partial\phi_3}{\partial y_2} & \frac{\partial\phi_3}{\partial y_3} \end{vmatrix} +$$

$$+\sum_{k=1}^{3}\begin{vmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial y_1} & \frac{\partial \phi_1}{\partial y_2} & \frac{\partial \phi_1}{\partial y_3} \\ \frac{\partial \phi_2}{\partial y_1} & \frac{\partial \phi_2}{\partial y_2} & \frac{\partial \phi_2}{\partial y_3} \\ \frac{\partial v_3}{\partial x_k}\frac{\partial \phi_k}{\partial y_1} & \frac{\partial v_3}{\partial x_k}\frac{\partial \phi_k}{\partial y_2} & \frac{\partial v_3}{\partial x_k}\frac{\partial \phi_k}{\partial y_3} \end{vmatrix}.$$

Consideremos o primeiro somatório acima. A primeira parcela deste somatório é $\frac{\partial v_1}{\partial x_1}J$. Já a segunda e a terceira parcelas são determinantes formados por linhas proporcionais, portanto iguais a zero. Logo este somatório é igual a

$$\frac{\partial v_1}{\partial x_1}J.$$

De maneira análoga vemos que o segundo e terceiro somatórios acima são iguais, respectivamente, a

$$\frac{\partial v_2}{\partial x_2}J \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial v_3}{\partial x_3}J.$$

Portanto,

$$\frac{d}{dt}J(y,t) = J(y,t)\operatorname{div} v(\phi(y,t),t).$$

Daí,

$$\int_{\Omega_0} f(\phi(y,t),t)\,\frac{dJ}{dt}(y,t) = \int_{\Omega_0} f(\phi(y,t),t)\,[\operatorname{div} v(\phi(y,t),t)]\,J(y,t)dy. \tag{2.7}$$

Logo, através da substituição $x = \phi_t(y)$, temos

$$\int_{\Omega_0} f(\phi(y,t),t)\,\frac{\partial J}{\partial t}(y,t) = \int_{\Omega_t} f(x,t)\operatorname{div} v(x,t)dx. \tag{2.8}$$

Assim,

$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega_t} f(x,t)dx = \int_{\Omega_t}\left(\frac{Df}{Dt} + f\operatorname{div} v\right)(x,t). \tag{2.9}$$

2.5 Conservação da Massa

A lei da *Conservação da Massa* afirma que em qualquer sistema natural a matéria é conservada, ou seja, não se gera nem se destrói matéria. Em qualquer sistema, físico ou químico, nunca se cria nem se elimina matéria, apenas é possível transformá-la de uma forma em outra.

Nesta seção vamos usar a lei da Conservação da Massa para obter uma relação para o movimento de matéria contínua.

Seja Ω uma região ocupada por uma porção de fluido e seja $\rho(x,t)$, ou simplismente ρ, a densidade da partícula de fluido que ocupa o ponto $x \in \Omega$ no instante t. Consideremos também uma partição interior Ω_k de Ω. Escolhendo um ponto x_k em cada sub-região Ω_k, de volume ΔV_k e formando a soma de Riemann

$$\sum_k \rho(x_k)\Delta V_k$$

obtemos o valor aproximado da massa m da porção do fluido que ocupa a região Ω.

Assim, por definição, a massa da porção de fluido que ocupa uma região Ω no instante t é dado por

$$m = \int_\Omega \rho(x,t)dx.$$

Dessa forma, dizer que a massa se conserva significa que para todo $t \geq 0$, com Ω_t a imagem de Ω_0 pela função ϕ_t e Ω_0 arbitrário, tem-se

$$\int_{\Omega_0} \rho(x,0)dx = \int_{\Omega_t} \rho(x,t)dx.$$

Portanto

$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega_0} \rho(x,0)dx = \frac{d}{dt}\int_{\Omega_t} \rho(x,t)dx.$$

Como a primeira integral da igualdade acima independe do tempo temos

$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega_t} \rho(x,t)dx = 0.$$

Assumindo que ρ tem derivadas contínuas e aplicando Teorema do Transporte 2.1 obtemos

$$0 = \frac{d}{dt}\int_{\Omega_t} \rho(x,t)dx = \int_{\Omega_t} \left(\frac{D\rho}{Dt} + \rho\,\mathrm{div}\,v\right)(x,t)dx.$$

Se Ω_t é um aberto qualquer ocupado pelo fluido no instante t, então existe Ω_0 aberto tal que $\phi_t(\Omega_0) = \Omega_t$, já que estamos supondo ϕ_t inversível e contínua (Veja LIMA [16], pág. 22) ou seja, em qualquer instante de tempo t a integral sobre a Ω_t da função contínua

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \operatorname{div} v$$

é sempre nula. Isso só é possível se esta função for identicamente nula. Obtemos assim a *equação da conservação da massa*, também conhecida como *equação da continuidade*

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \operatorname{div} v = 0. \tag{2.10}$$

Pelas hipóteses feitas sobre a função ρ e o campo de velocidades temos

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}(\rho\, v) &= \operatorname{div}(\rho\, v_1, \rho\, v_2, \rho\, v_3) \\
&= \frac{\partial(\rho\, v_1)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho\, v_2)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho\, v_3)}{\partial z} \\
&= \frac{\partial \rho}{\partial x} v_1 + \rho\, \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial \rho}{\partial y} v_2 + \rho\, \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial \rho}{\partial z} v_3 + \rho\, \frac{\partial v_3}{\partial z} \\
&= \frac{\partial \rho}{\partial x} v_1 + \frac{\partial \rho}{\partial y} v_2 + \frac{\partial \rho}{\partial z} v_3 + \rho\, \frac{\partial v_1}{\partial x} + \rho\, \frac{\partial v_2}{\partial y} + \rho\, \frac{\partial v_3}{\partial z} \\
&= \left(\frac{\partial \rho}{\partial x}, \frac{\partial \rho}{\partial y}, \frac{\partial \rho}{\partial z} \right) \cdot (v_1, v_2, v_3) + \rho \left(\frac{\partial v_1}{\partial x}, \frac{\partial v_2}{\partial y}, \frac{\partial v_3}{\partial z} \right) \\
&= v \cdot \nabla \rho + \rho \operatorname{div} v. \qquad (2.11)
\end{aligned}$$

Daí e da equação da continuidade 2.10 temos

$$\frac{D\rho}{Dt} + \operatorname{div}(\rho\, v) - v \cdot \nabla \rho = 0.$$

Assim, usando a definição de derivada material a equação da continuidade pode ser escrita como

$$\frac{d\rho}{dt} + \operatorname{div}(\rho\, v) = 0.$$

2.6 Fluidos Incompressíveis

Um fluido é dito incompressível quando o seu volume não se altera durante o escoamente, ou seja, se no instante $t = 0$ uma porção de fluido ocupa uma região Ω_0 de volume V_0 e no instante t ocupa uma região Ω_t de volume V_t tem-se $V_0 = V_t$ mesmo que a forma das duas regiões sejam diferentes. Consequentemente, devido a lei da conservação da massa, dizer que um fluido é incompressível é equivalente a dizer que a densidade é constante.

Na verdade a maioria dos fluidos são compressíveis, porém em certas condições de temperatura e pressão a compressibilidade é tão pequena que o fluido pode ser considerado como incompressível.

Decorre da definição de integral tripla que se $f(x, y, z) = 1$ em toda uma região Ω então a integral

$$\int_\Omega dx$$

é o valor do volume de Ω. Dessa forma, a condição do volume de qualquer porção de fluido ser preservada pelo fluxo é descrita pela equação:

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega dx = 0.$$

Assim, se um fluido é incompressível, o Teorema do Transporte aplicado a $f = 1$ nos dá

$$0 = \frac{d}{dt}\int_\Omega dx = \int_\Omega \left(\frac{D}{Dt} + \operatorname{div} v\right) dx,$$

ou seja,

$$\int_\Omega \left(v \cdot \nabla f + \frac{\partial f}{\partial t} + \operatorname{div} v\right) dx = \int_\Omega \operatorname{div} v \, dx = 0.$$

Esta relação é válida para todo aberto Ω. Daí se conclui que o divergente da velocidade é nulo em todos os pontos, ou seja,

$$\operatorname{div} v = 0 \tag{2.12}$$

que é a *condição de incompressibilidade.*

2.7 Conservação do Momento Linear

Durante o movimento de um fluido a porção de fluido que ocupa uma região Ω_t interage mecanicamente com o meio externo (ao fluido) e com o resto do fluido.

A interação com o meio externo se dá através das *forças externas* (peso, força de coriólis, forças eletromagnéticas, etc.). A interação com o resto do fluido se dá na fronteira de Ω_t através das *forças internas* (forças de contato ou tensões).

O *momento linear* de um sistema é igual ao produto de sua massa por sua velocidade. Ele mede a quantidade de movimento do sistema e tem o seguinte significado físico: quanto maior o momento de um sistema, mais difícil se torna pará-lo. Por exemplo, dados dois objetos com momentos lineares distintos, se pararem no mesmo intervalo de tempo devido a uma colisão, as consequências (ou seja, os estragos) serão maiores no objeto com maior momento linear.

Nesta seção deduziremos uma equação que envolve este conceito.

Consideremos uma região Ω_t. Decompondo esta região em sub-regiões $\Omega_1, \Omega_2, \ldots \Omega_k$ tal que o interior de Ω_i é disjunto do interior Ω_j, $i, j \in 1, 2, \ldots k$ sempre que $i \neq j$, tomando-se arbitrariamente $x_i \in \Omega_i$ e considerando, respectivamente, m_i e $\Delta \mathrm{V}_i$ a massa e o volume da sub-região Ω_i, o valor aproximado do momento linear relativo a porção do fluido que ocupa a região Ω_i é $M_i = m_i v(x_i, t) = \rho(x_i, t) v(x_i, t) \Delta \mathrm{V}_i$. Assim, o momento linear de uma porção de fluido que ocupa, no instante t, a região Ω_t é, por definição

$$\int_{\Omega_t} \rho(x,t) v(x,t) dx.$$

Se não existem forças agindo no sistema seu momento linear se mantém constante. Porém, se existem forças agindo nele a segunda lei de Newton afirma que a taxa de variação temporal da quantidade de movimento linear (momento linear) é igual a soma total das forças que atuam no sistema, ou seja,

$$\frac{d}{dt}\left(\int_{\Omega_t} \rho v \, dx\right) = \text{FORÇA TOTAL}.$$

Esta, por sua vez, é a soma das forças externas e das forças internas.

Quanto às forças externas suponhamos conhecida a função $f(x,t)$ que dá o somatório das forças externas por unidade de massa. Dessa forma, a força externa total atuando na porção do fluido que, no instante t, ocupa a região Ω_t é, por definição

$$\int_{\Omega_t} \rho(x,t) f(x,t) \, dx.$$

$\Big($Se apenas o peso for considerado, $f(x,t) = \frac{p}{m} = \frac{m.g}{m} = g$ (gravidade)$\Big)$

Trataremos agora das forças internas (forças de contato ou tensões). Um dos mais importantes axiomas da mecânica do contínuo é a hipótese de Cauchy com relação a essas forças. Considerando N o conjunto de todos os vetores unitários de $\mathbb{R}^3$, Cauchy admite a existência de um campo de tensões contínuo em x

$$\begin{array}{rccc} s \;:\; & \mathrm{N} \times \Omega \times [0,\, T] & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (n, x, t) & \longmapsto & s(n, x, t) \end{array}$$

que dá a força de contato por unidade de área atuando numa superfície perpendicular a n, no ponto x, no instane t. Dessa forma, a força exercida pelo resto do fluido na porção do fluido que, no instante t, ocupa a região Ω_t, é dada por

$$\int_{\partial\Omega_t} s(n,x,t) \, dS_x$$

onde n é normal a $\partial\Omega_t$, apontando para fora. Assim,

$$\underbrace{\frac{d}{dt}\int_{\Omega_t} \rho(x,t) v(x,t) \, dx}_{\text{força total}} = \underbrace{\int_{\Omega_t} \rho(x,t) f(x,t) \, dx}_{\text{força externa}} + \underbrace{\int_{\partial\Omega_t} s(n,x,t) \, dS_x}_{\text{força interna}} \qquad (2.13)$$

O teorema seguinte garante que se o fluido satisfizer a segunda lei de Newton então s tem de depender linearmente de n.

Teorema 2.2 (Teorema de Cauchy). *Se $s(n,x,t)$ definida para todo x em uma região aberta Ω e para todo vetor unitário n é contínua em x e se $f(x,t)$ é limitada em Ω então $s(n,x,t)$ é linear em n, isto é,*

$$s(n,x,t) = S(x,t)n.$$

Demonstração:

Pelo Teorema do Transporte temos

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\int_\Omega \rho v\,dx &= \int_\Omega \left(\frac{D}{Dt}(\rho v) + \rho v \operatorname{div} v\right) dx \\
&= \int_\Omega \left(\frac{D\rho}{Dt}v + \rho\frac{Dv}{Dt} + \rho v \operatorname{div} v\right) dx \\
&= \int_\Omega \left(\rho\frac{Dv}{Dt} + v\left[\frac{D\rho}{Dt} + \rho \operatorname{div} v\right]\right) dx
\end{aligned}$$

donde, pelo princípio da conservação da massa, vem

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega \rho v\,dx = \int_\Omega \rho\frac{Dv}{Dt}\,dx. \tag{2.14}$$

Consideremos a função $g = \rho f - \rho\frac{Dv}{Dt}$. A segunda lei de Newton juntamente com 2.14 nos dá

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \rho\frac{Dv}{Dt}\,dx &= \int_\Omega \rho f\,dx + \int_{\partial\Omega} s\,dS_x \\
&= \int_\Omega \left(g + \rho\frac{Dv}{Dt}\right) dx + \int_{\partial\Omega} s\,dS_x \\
&= \int_\Omega g\,dx + \int_\Omega \rho\frac{Dv}{Dt} + \int_{\partial\Omega} s\,dS_x.
\end{aligned}$$

Logo

$$\int_{\partial\Omega} s\,dS_x = -\int_\Omega g\,dx.$$

Como por hipótese f é limitada segue-se que $|g| \leq k$, para algum k real. Logo,

$$\left|\int_{\partial\Omega} s\, dS_x\right| = \left|\int_{\Omega} g\, dx\right| \leq \int_{\Omega} |g| dx \leq \int_{\Omega} k\, dx = k \int_{\Omega} dx = k\, \mathrm{vol}(\Omega)$$

onde $\mathrm{vol}(\Omega)$ é o volume da região Ω.

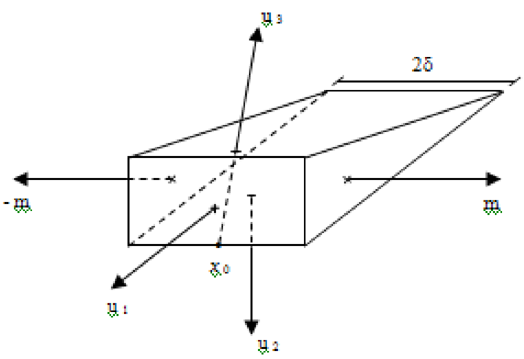
A fim de estender a hipótese de Cauchy a todo vetor de $\mathbb{R}^3$ consideremos a função

$$s(u, x) = \begin{cases} |u|\, s\left(\frac{u}{|u|}, x\right), & \text{se} \quad u \neq 0 \\ 0, & \text{se} \quad u = 0 \end{cases}$$

onde o parâmetro t foi eliminado para simplificar a notação.

Vamos mostrar que para todo x da região de escoamento a função $s(u, x)$ definida acima é linear em n. Para tal consideremos um ponto x_0 interior a região de escoamento, os vetores u_1 e u_2 linearmente independentes e os escalares ϵ e δ positivos e suficientemente pequenos. Além disso, consideremos os planos π_1, com normal u_1, que passa por x_0 e o plano π_2, com normal u_2, passando também por x_0. Tomemos também o plano π_3 que passa por $x_0 + \epsilon\, u_3$, com normal $u_3 = -(u_1 + u_2)$.

Seja R a região limitada por estes planos e pelos planos paralelos π_4 e π_5 distantes δ de x_0, com normais $u_4 = m$ e $u_5 = -m$, respectivamente, conforme figura abaixo.

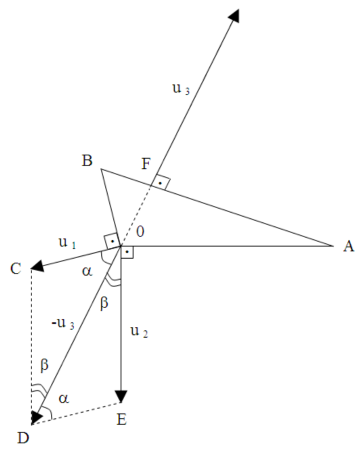


Logo a fronteira da região R é

$$\partial R = \bigcup_{i=1}^{5} S_i$$

onde S_i é a face de R cujo vetor normal é u_i.

Na figura anterior considere um corte transversal produzido por um plano π paralelo a u_1 e u_2, conforme figura abaixo.



Observe que o ângulo $\frac{\pi}{2} + \beta$ é externo ao ΔAOF, logo $\widehat{A} = \beta$. Por outro lado, o ângulo $\frac{\pi}{2} + \alpha$ é externo ao ΔOBF, logo $\widehat{B} = \alpha$. Portanto

$$\Delta AOB \sim \Delta OCD$$

e daí

$$\frac{|u_1|}{\overline{OB}} = \frac{|u_2|}{\overline{OA}} = \frac{|u_3|}{\overline{AB}}$$

donde vem que

$$\frac{|u_1|}{\overline{OB}.2\alpha} = \frac{|u_2|}{\overline{OA}.2\alpha} = \frac{|u_3|}{\overline{AB}.2\alpha}$$

ou seja, se α_i é a área da face S_i temos

$$\frac{|u_1|}{\alpha_1} = \frac{|u_2|}{\alpha_2} = \frac{|u_3|}{\alpha_3}$$

logo,

$$\alpha_1 = \frac{|u_1|}{|u_3|}\alpha_3 \qquad \text{e} \qquad \alpha_2 = \frac{|u_2|}{|u_3|}\alpha_3. \tag{2.15}$$

Além disso, as faces paralelas têm áreas

$$\alpha_4 = \alpha_5 = \frac{\alpha_3}{2\delta}\frac{|\epsilon u_3|}{2} = \frac{\epsilon|u_3|}{4\delta}\alpha_3 \tag{2.16}$$

e o volume da região R é dado por

$$\mathrm{Vol}(R) = \frac{\frac{\alpha_3}{2\delta}\epsilon|u_3|}{2}2\delta = \frac{\epsilon|u_3|}{2\delta}\alpha_3.$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
\int_{\partial R} s(n,x)dS_x &= \sum_{i=1}^{5}\int_{S_i} s(n,x)dS_x \\
&= \sum_{i=1}^{5}\left(\int_{S_i} s_1(n,x)dS_x,\ \int_{S_i} s_2(n,x)dS_x,\ \int_{S_i} s_3(n,x)dS_x\right)
\end{aligned}$$

onde $s_j,\ \ j=1,2,3$, é a componente j de s. Como por hipótese s é contínua em x, cada uma das suas componentes s_j também são. Aplicando o Teorema do Valor Médio (para integrais) à integral

$$\int_{S_i} s_j(n,x)dS_x \qquad j=1,2,3$$

no vetor $\frac{u_i}{|u_i|}$ relativo à face S_i e considerando $x_i^j \in S_i$ o ponto onde o Teorema se verifica temos:

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{i=1}^{5}\left(s_1\left(\frac{u_i}{|u_i|},x_i^1\right)\alpha_1,\ s_2\left(\frac{u_i}{|u_i|},x_i^2\right)\alpha_2,\ s_3\left(\frac{u_i}{|u_i|},x_i^3\right)\alpha_3\right)\right| &= \left|\sum_{i=1}^{5} s\left(\frac{u_i}{|u_i|},x_i^*\right)\alpha_i\right| \\
&\leq k\frac{\epsilon|u_3|}{2}\alpha_3 \qquad (2.17)
\end{aligned}$$

onde $x_i^* = (x_i^1, x_i^2, x_i^3)$.

Substituindo em 2.17 os valores de α_i, $i = 1, ..., 5$ calculados em 2.15 e 2.16 obtemos

$$\left| \sum_{i=1}^{2} s\big(\frac{u_i}{|u_i|}, x_i^*\big) \frac{|u_i|}{|u_3|}\alpha_3 + s\big(\frac{u_3}{|u_3|}, x_3^*\big)\alpha_3 + \right.$$

$$\left. + s(m, x_4^*)\frac{\epsilon|u_3|}{4\delta}\alpha_3 + s(-m, x_5^*)\frac{\epsilon|u_3|}{4\delta}\alpha_3 \right| \quad \leq \quad k\frac{\epsilon|u_3|}{2}\alpha_3.$$

Multiplicando ambos os membros da desigualdade acima por $\frac{4\delta}{|u_3|\alpha_3}$ temos

$$\left| s\big(\frac{u_1}{|u_1|}, x_1^*\big)\frac{4\delta|u_1|}{|u_3|^2} + s\big(\frac{u_2}{|u_2|}, x_2^*\big)\frac{4\delta|u_2|}{|u_3|^2} + s\big(\frac{u_3}{|u_3|}, x_3^*\big)\frac{4\delta|u_3|}{|u_3|^2} + \right.$$

$$\left. + s(m, x_4^*)\epsilon + s(-m, x_5^*)\epsilon \right| \leq 2k\delta\epsilon$$

e daí

$$\left| \frac{4\delta}{|u_3|^2} \left(|u_1| s\big(\frac{u_1}{|u_1|}, x_1^*\big) + |u_2| s\big(\frac{u_2}{|u_2|}, x_2^*\big) + |u_3| s\big(\frac{u_3}{|u_3|}, x_3^*\big) \right) + \right.$$

$$\left. + \epsilon \left(s(m, x_4^*) + s(-m, x_5^*) \right) \right| \leq 2k\delta\epsilon.$$

Pela definição da função s temos

$$\left| \frac{4\delta}{|u_3|^2}\big(s(u_1, x_1^*) + s(u_2, x_2^*) + s(u_3, x_3^*)\big) + \epsilon\big(s(m, x_4^*) + s(-m, x_5^*)\big) \right| \leq 2k\delta\epsilon. \tag{2.18}$$

Fazendo δ tender a zero em 2.18 obtemos

$$|\epsilon \left(s(m, x_4^*) + s(-m, x_5^*) \right)| = 0. \tag{2.19}$$

Como $\epsilon > 0$ 2.19 nos dá:

$$s(m, x_4^*) = s(-m, x_5^*).$$

Agora fazendo $\epsilon \longrightarrow x_0$ temos

$$x_4^* \longrightarrow x_0 \qquad \text{e} \qquad x_5^* \longrightarrow x_0$$

logo,

$$s(m, x_0) = -s(-m, x_0) \qquad \forall\, m \in \mathbb{R}^3 \tag{2.20}$$

pois, dado $m \in \mathbb{R}^3$ sempre existem x_0, u_1 e u_2 satisfazendo as condições acima.

Em 2.18 façamos agora o contrário, ou seja, primeiro façamos $\epsilon \longrightarrow 0$ depois δ. Assim

$$\epsilon \longrightarrow 0 \qquad \Rightarrow \qquad s(u_1, x_1^*) + s(u_2, x_2^*) + s(u_3, x_3^*) = 0$$

donde vem que

$$s(-(u_1 + u_2), x_3^*) = -s(u_1, x_1^*) - s(u_2, x_2^*).$$

Fazendo $\delta \longrightarrow 0$ temos

$$s(-(u_1 + u_2), x_0) = -s(u_1, x_0) - s(u_2, x_0).$$

Portanto, de 2.20 obtemos

$$s(u_1 + u_2, x_0) = s(u_1, x_0) + s(u_2, x_0)$$

Isto mostra que s é aditiva para vetores L.I..

Mostraremos agora que dado $\alpha \in \mathbb{R}$ tem-se $s(\alpha u, x) = \alpha\, s(u, x)$ para todo $u \in \mathbb{R}^3$. De fato, pela definição da função s temos

$$\begin{aligned}
\alpha = 0 \ \Rightarrow \ s(0.\alpha, x) &= s(0, x) = 0 = 0.s(u, x), \\
\alpha > 0 \ \Rightarrow \ s(\alpha u, x) &= |\alpha u| s\big(\frac{\alpha u}{|\alpha u|}, x\big) = \alpha |u| = s\big(\frac{u}{|u|}, x\big) = \alpha\, s(u, x) e \\
\alpha < 0 \ \Rightarrow \ s(\alpha u, x) &= |\alpha u| s\big(\frac{\alpha u}{|\alpha u|}, x\big) = |\alpha||u| s\big(-\frac{u}{|u|}, x\big) = \\
&= -|\alpha||u| s(\frac{u}{|u|}, x) = -|\alpha| s(u, x) = \alpha\, s(u, x).
\end{aligned}$$

Temos que mostrar ainda que s é aditiva para vetores não necessariamente L.I.. De fato, sejam u_1 e u_2 vetores L.D.. Assim $u_2 = ku_1$ para algum k real. Logo

$$\begin{aligned} s(u_1+u_2,x) &= s(u_1+k\,u_1,x) = s((1+k)\,u_1,x) = (1+k)s(u_1,x) = \\ &= s(u_1,x) + k\,s(u_1,x) = s(u_1,x)+s(ku_1,x) = \\ &= s(u_1,x)+s(u_2,x). \end{aligned}$$

Resta-nos mostrar ainda que existe uma função matricial $S(x,t)$. De fato, se $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ é a base canônica de $\mathbb{R}^3$ então existe uma matriz $S(x,t)$ que representa a transformação linear s, ou seja,

$$s(n,x,t) = S(x,t)n$$

o que conclui a prova do teorema.

Assim, omitindo o argumento (x,t) das funções que aparecem no integrando, 2.13 nos dá

$$\underbrace{\frac{d}{dt}\int_{\Omega_t} \rho v\,dx}_{\text{força total}} = \underbrace{\int_{\Omega_t} \rho f\,dx}_{\text{força externa}} + \underbrace{\int_{\partial\Omega_t} Sn\,dS_x}_{\text{força interna}} \tag{2.21}$$

com

$$Sn = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}n_1 + a_{12}n_2 + a_{13}n_3 \\ a_{21}n_1 + a_{22}n_2 + a_{23}n_3 \\ a_{31}n_1 + a_{32}n_2 + a_{33}n_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 \cdot n \\ l_2 \cdot n \\ l_3 \cdot n \end{bmatrix}$$

onde $l_i\,(i = 1,2,3)$ são as linhas da matriz S.

Pelo Teorema da Divergência (preliminar 1.1) temos

$$\begin{aligned}
\int_{\partial\Omega_t} Sn\,dS &= \int_{\partial\Omega_t} (l_1\cdot n, l_2\cdot n, l_3\cdot n)\,dS \\
&= \left(\int_{\partial\Omega_t} l_1\cdot n\,dS, \int_{\partial\Omega_t} l_2\cdot n\,dS, \int_{\partial\Omega_t} l_3\cdot n\,dS\right) \\
&= \left(\int_{\Omega_t} \operatorname{div} l_1\,dx, \int_{\Omega_t} \operatorname{div} l_2\,dx, \int_{\Omega_t} \operatorname{div} l_3\,dx\right) \\
&= \int_{\Omega_t} (\operatorname{div} l_1, \operatorname{div} l_2, \operatorname{div} l_3)\,dx \\
&= \int_{\Omega_t} \operatorname{Div} S\,dx.
\end{aligned}$$

Assim

$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega_t} \rho v\,dx = \int_{\Omega_t} pf\,dx + \int_{\Omega_t} \operatorname{Div} S\,dx.$$

Pelo Teorema do Transporte temos

$$\int_{\Omega_t}\left(\frac{D}{Dt}(\rho v) + \rho v\operatorname{div} v\right)dx = \int_{\Omega_t} pf\,dx + \int_{\Omega_t} \operatorname{Div} S\,dx.$$

Logo

$$\int_{\Omega_t}\left(\frac{D}{Dt}(\rho v) + \rho v\operatorname{div} v - \rho f - \operatorname{Div} S\right)dx = 0$$

Por outro lado

$$\frac{D}{Dt}(\rho v)+\rho v\operatorname{div} v = \rho\frac{Dv}{Dt}+v\,\frac{D\rho}{Dt}+\rho v\operatorname{div} v = \rho\frac{Dv}{Dt}+v\underbrace{\left(\frac{D\rho}{Dt}+\rho\operatorname{div} v\right)}_{=0} = \rho\,\frac{Dv}{Dt}.$$

Daí

$$\int_{\Omega_t}\left(\rho\,\frac{D}{Dt}v - \rho f - \operatorname{Div} S\right)dx = 0. \tag{2.22}$$

Como o integrando em 2.22 é continuo e Ω_t é arbitrário, resulta

$$\rho\,\frac{Dv}{Dt} = \rho\,f + \operatorname{Div} S \tag{2.23}$$

conhecida como a *Equação da Conservação do Momento*.

2.8 Equações de Navier-Stokes

As equações da conservação da massa 2.10 e do momento 2.23 ainda são insuficientes para descrever o movimento de um fluido. Elas consistem de quatro equações escalares e 13 incógnitas: v_1, v_2, v_3, ρ e as nove entradas da matriz S. Para completar a descrição devemos relacionar S com outras variáveis, como por exemplo a *viscosidade*.

A viscosidade desempenha nos fluidos o mesmo papel que o atrito nos sólidos. Ela é a propriedade física de um fluido que exprime sua resistência ao cisalhamento interno, isto é, a qualquer força que tenda produzir o escoamento entre suas camadas.

Newton descobriu que em muitos fluidos, a tensão de cisalhamento é proporcional ao gradiente da velocidade, com constante de proporcionalidade igual a μ (viscosidade). Os fluidos que obedecem esta lei são chamados Fluidos Newtonianos e os que não obedecem são chamados não-Newtonianos. Neste trabalho vamos supor que o fluido seja Newtoniano.

Consideremos inicialmente o caso em que a viscosidade é nula, ou seja, as forças internas atuam apenas perpendicularmente à superfície de Ω_t. Neste caso $S(x,t)n$ deve ser sempre paralelo a n. Isto equivale a afirmar que existe uma função $p(x,t)$ tal que

$$S(x,t) = -p(x,t)I_3 \tag{2.24}$$

onde I_3 denota a matriz identidade de ordem 3, p é a pressão e

$$\operatorname{Div} S = \operatorname{Div}(-pI_3) = \operatorname{Div}\begin{bmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\partial p}{\partial x_1} \\ -\frac{\partial p}{\partial x_2} \\ -\frac{\partial p}{\partial x_3} \end{bmatrix} = -\nabla p.$$

Neste caso a equação da conservação do momento é

$$\rho\frac{Du}{Dt} + \nabla p = \rho f$$

que juntamente com a equação da conservação da massa 2.10 consistem agora de quatro equações escalares e cinco incógnitas: $v_1,\ v_2,\ v_3,\ \rho$ e p. Existem duas saídas para esta situação. A primeira é considerar que o fluido é incompressível, o que é uma boa aproximação para os fluidos em algumas situações, como por exemplo em vôos super-sônicos. Nesta ótica $\rho(x,t) = \rho_0$ é constante e nós temos as *Equações de Euler* para um fluido não-viscoso e incompressível:

$$\rho_0 \frac{Du}{Dt} + \nabla p = \rho_0 f$$

$$\mathrm{Div}\, v = 0.$$

Uma outra maneira é introduzir uma *equação de estado*, ou seja, supor que existe uma função conhecida

$$\begin{array}{rcccc} r & : & (0,\infty) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & \rho & \longmapsto & p = r(\rho). \end{array}$$

Para um gás ideal a temperatura constante, p é diretamente proporcional a ρ.

Consideremos agora o caso viscoso. Neste caso, no sentido de obtermos uma forma para a matriz S, vamos usar os argumentos de KREISS [14].

Experimentos físicos mostram que quando o gradiente dos componentes de v é zero, ou seja, v é constante na variável espacial, a forma para S em 2.24 ainda é apropriada. Para ficar claras as idéis consideremos, em particular, que v seja constante também na variável temporal. Assim é razoável supor que não há tranferência de movimento entre as partículas e portanto o fluido pode ser considerado como invíscido (viscosidade nula).

Então é natural supor que, na forma mais geral de S, $S + pI_3$ dependa dos gradientes das componentes de v.

Numa primeira aproximação podemos supor que tal dependência é linear, isto é, existe uma função $\widetilde{S}$ linear tal que $S + pI_3 = \widetilde{S}(G)$, onde

$$G = G(x,t) = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial x_1} & \frac{\partial v_1}{\partial x_2} & \frac{\partial v_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x_1} & \frac{\partial v_2}{\partial x_2} & \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_3}{\partial x_1} & \frac{\partial v_3}{\partial x_2} & \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \end{bmatrix}.$$

Por outro lado, G pode ser decomposta de maneira única como

$$G(x,t) = \underbrace{\frac{1}{2}(G + G^t)}_{G_S} + \underbrace{\frac{1}{2}(G - G^t)}_{G_A}$$

onde G_S e G_A são, respectivamente, as partes simétrica e antisimétrica de G.

Num corpo sólido não há transferência de momento entre as partes. Além disto, a matriz G é antisimétrica. logo devemos ter $\widetilde{S}(G) = 0$. Portanto, para fluidos, é razoável supor que $\widetilde{S}(G)$ dependa somente da parte simétrica de T.

Também é fisicamente razoável supor que $\widetilde{S}(G_S)$ seja invariante sob rotações do sistema de coordenadas, isto é, em termos matemáticos $\widetilde{S}(UG_SU^t) = U\widetilde{S}(G_S)U^t$.

Usaremos agora o seguinte teorema cuja prova pode ser encontrada em GURTIN & MARTINS [10].

Teorema 2.3. *Seja* $\widetilde{S} = \widetilde{S}(D)$ *uma transformação linear de* $D = (d_{ij})_{3X3}$ *satisfazendo*

$$\widetilde{S}(UDU^t) = U\widetilde{S}(D)U^t$$

para todo U_{3X3} *ortogonal e* D_{3X3} *simétrica. Então*

$$\widetilde{S}(D) = \mu' \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \right) I_3 + 2\mu D$$

onde μ *e* μ' *são constantes independentes de* D.

Fazendo $D = \frac{1}{2}(G + G^t)$ no teorema **??** temos

$$S = -pI + \mu'(\operatorname{div} v)I + \mu(G + G^t) \tag{2.25}$$

onde p é a pressão, μ (viscosidade) e $\mu^{'}$ são constantes, I_3 é a matriz identidade de ordem 3 e G^t é a transposta da matriz

$$G = \nabla\, v = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial x_1} & \frac{\partial v_1}{\partial x_2} & \frac{\partial v_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x_1} & \frac{\partial v_2}{\partial x_2} & \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_3}{\partial x_1} & \frac{\partial v_3}{\partial x_2} & \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \end{bmatrix}.$$

Supondo que o fluido satisfaz 2.12 (condição de incompressibilidade), 2.25 se reduz a

$$S = -pI_3 + \mu(G + G^t).$$

Além disso,

$$G + G^t = \begin{bmatrix} 2\frac{\partial v_1}{\partial x_1} & \frac{\partial v_1}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2}{\partial x_1} & \frac{\partial v_1}{\partial x_3} + \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} & 2\frac{\partial v_2}{\partial x_2} & \frac{\partial v_2}{\partial x_3} + \frac{\partial v_3}{\partial x_2} \\ \frac{\partial v_3}{\partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial x_3} & \frac{\partial v_3}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2}{\partial x_3} & 2\frac{\partial v_3}{\partial x_3} \end{bmatrix}$$

logo,

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Div}(G+G^t) &= \begin{bmatrix} 2\frac{\partial^2 v_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 v_3}{\partial x_1 \partial x_3} \\ \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_1 \partial x_2} + 2\frac{\partial^2 v_2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 v_3}{\partial x_2 \partial x_3} \\ \frac{\partial^2 v_3}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_1 \partial x_3} + \frac{\partial^2 v_3}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_2 \partial x_3} + 2\frac{\partial^2 v_3}{\partial x_3^2} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_3^2} + \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3}\right) \\ \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_3^2} + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3}\right) \\ \frac{\partial^2 v_3}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v_3}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 v_3}{\partial x_3^2} + \frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3}\right) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_3^2} + \frac{\partial}{\partial x_1}\,\mathrm{div}\, v \\ \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_3^2} + \frac{\partial}{\partial x_2}\,\mathrm{div}\, v \\ \frac{\partial^2 v_3}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v_3}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 v_3}{\partial x_3^2} + \frac{\partial}{\partial x_3}\,\mathrm{div}\, v \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_3^2} \\ \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_3^2} \\ \frac{\partial^2 v_3}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v_3}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 v_3}{\partial x_3^2} \end{bmatrix} \\
&= \Delta\, v.
\end{aligned}
$$

Portanto

$$\mathrm{Div}\, S = \mathrm{Div}\,\left(-pI_3 + \mu(G+G^t)\right) = \mathrm{Div}(-pI_3) + \mu \mathrm{Div}(G+G^t) = -\nabla p + \mu \Delta v.$$

Dessa forma a equação da conservação do momento 2.23 se escreve como:

$$\rho \frac{Dv}{Dt} = \rho f - \nabla p + \mu \Delta v$$

que juntamente com a condição de incompressibilidade ($\mathrm{div}\, v$=0) constituem as *Equações de Navier-Stokes* para um fluido viscoso e incompressível.

Capítulo 3

Solução em Dimensão Finita

3.1 Introdução

Neste capítulo daremos a formulação variacional das equações de Navier-Stokes para um fluido viscoso e incompressível. Para esta formulação, através do método construtivo de Galerkin, garantiremos a existência e unicidade de solução em dimensão finita. Começaremos esta seção dando alguns resultados sobre a forma trilinear b.

3.2 A Forma Trilinear b

Como veremos na seção seguinte, o termo não-linear (que é o complicador maior) da formulação clássica das Equações de Navier-Stokes dará origem a forma $b = b(v, v, u)$ da formulação variacional. Em vista disto, nesta seção demonstraremos alguns resultados de suma importância sobre esta forma.

Lema 3.1. *Se $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um aberto limitado e $n \leq 4$ então a forma $b = b(u, v, w)$ é trilinear contínua em $V \times V \times V$.*

Demonstração

Sejam u' e $u'' \in V$ e $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$
\begin{aligned}
b(u' + \alpha u'', v, w) &= \sum_{i,j=1}^{n} \int_{\Omega} (u' + \alpha u'')_i \frac{\partial v_j}{\partial x_i} w_j dx \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} \int_{\Omega} \left(u_i' \frac{\partial v_j}{\partial x_i} w_j + \alpha u_i'' \frac{\partial v_j}{\partial x_i} w_j \right) dx \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} \int_{\Omega} u_i' \frac{\partial v_j}{\partial x_i} w_j dx + \alpha \sum_{i,j=1}^{n} \int_{\Omega} u_i'' \frac{\partial v_j}{\partial x_i} w_j dx \\
&= b(u', v, w) + \alpha b(u'', v, w)
\end{aligned}
$$

isso mostra que a forma b é linear na primeira coordenada. Analogamente mostra-se que b é linear nas outras duas coordenadas. Portanto b é trilinear em $V \times V \times V$. Mostraremos agora a continuidade de b.

Sendo $n \leq 4$ e Ω limitado, prova-se que $V = \{u \in H_0^1(\Omega),\ \operatorname{div} u = 0\}$ (Veja TEMAN [26], p. 18). Assim, se $u = (u_1, ..., u_n) \in V$ então

$$|u|_V = \sqrt{|u_1|_V^2 + \ ... \ + |u_n|_V^2} < \infty$$

donde vem que

$$|u_i|_V < \infty, \ \ 1 \leq i \leq n.$$

Logo, pelas imersões de Sobolev (preliminar 1.3),

$$u_i \in L^{\frac{2n}{n-2}}(\Omega), \ n \geq 3, \ 1 \leq i \leq n.$$

Como em H_0^1 as normas $|\cdot|_V$ e $|\nabla \cdot|$ são equivalentes, se $v \in V$ então

$$
\begin{aligned}
|v|_V &= \sqrt{|v_1|_V^2 + \ ... \ + |v_n|_V^2} \\
&= \sqrt{|\nabla v_1|^2 + \ ... \ + |\nabla v_n|^2}
\end{aligned}
$$

e daí,

$$|\nabla v_j| < \infty, \ 1 \leq j \leq n$$

ou seja

$$\sqrt{\left|\frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right|^2 + ... + \left|\frac{\partial v_j}{\partial x_n}\right|^2} < \infty$$

donde vem que

$$\left|\frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right|^2 < \infty,\ 1 \le i, j \le n$$

o que mostra que

$$\frac{\partial v_j}{\partial x_i} \in L^2(\Omega),\ 1 \le i, j \le n.$$

Além disso, se $w \in V$ então

$$|w|_V = \sqrt{|w_1|_V^2 + ... + |w_n|_V^2} < \infty$$

e daí

$$|w_j|_V < \infty,\ 1 \le j \le n.$$

Assim, pelas imersões de Sobolev (preliminar 1.3), observamos que

$$\begin{aligned} n &= 3 \Rightarrow w_j \in L^6(\Omega) \subset L^3(\Omega) \ \ e \\ n &= 4 \Rightarrow w_j \in L^4(\Omega). \end{aligned}$$

Observe agora que

$$\frac{1}{\frac{2n}{n-2}} + \frac{1}{2} + \frac{1}{n} = 1.$$

Portanto, pela desigualdade de Holder (preliminar 1.5), temos

$$\left|\int_\Omega u_i \frac{\partial v_j}{\partial x_i} w_j dx\right| \le |u_i|_{L^{\frac{2n}{n-2}}} \left|\frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right|_{L^2} |w_j|_V \tag{3.1}$$

onde trocamos a norma $|w_j|_{L^n}$ pela norma $|w_j|_V$ já que $H_0^1 \subset L^n$, quando $n \le 4$.

Por outro lado,

$$|u_i|_{L^{\frac{2n}{n-2}}} \le c|u_i|_V$$

donde vem que

$$|u_i|_{L^{\frac{2n}{n-2}}} \le c(\Omega)|u|_V. \tag{3.2}$$

Também temos

$$\left|\frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right| \leq \sqrt{\left|\frac{\partial v_j}{\partial x_1}\right|^2 + ... + \left|\frac{\partial v_j}{\partial x_n}\right|^2} = |\nabla v_j| \leq |\nabla v| = |v|_V \tag{3.3}$$

e

$$|w_j|_V \leq |w|_V. \tag{3.4}$$

Assim, de 3.1, 3.2, 3.3 e 3.4 obtemos

$$\left|\int_\Omega u_i \frac{\partial v_j}{\partial x_i} w_j dx\right| \leq k|u|_V |v|_V |w|_V.$$

Fazendo i e j variar de 1 a n na desigualdade acima obtemos n^2 parcelas tais que

$$|b(u,v,w)| \leq \sum_{i,j=1}^{n} \left|\int_\Omega u_i \frac{\partial v_j}{\partial x_i} w_j dx\right| \leq c(n)|u|_V |v|_V |w|_V.$$

Portanto, dado $\epsilon > 0$ tome $\delta = \frac{\sqrt[3]{\epsilon}}{\sqrt[3]{c(n)}}$. Assim,

$$\begin{aligned}
|b(u,v,w) - b(u_0,v_0,w_0)| &= |b(u-u_0, v-v_0, w-w_0) \\
&\leq c(n)|u-u_0|_V |v-v_0|_V |w-w_0|_V \\
&< c(n).\frac{\sqrt[3]{\epsilon}}{\sqrt[3]{c(n)}}.\frac{\sqrt[3]{\epsilon}}{\sqrt[3]{c(n)}}.\frac{\sqrt[3]{\epsilon}}{\sqrt[3]{c(n)}} \\
&< \epsilon
\end{aligned}$$

isso mostra que a forma b é trilinear contínua em $V \times V \times V$. No caso em que $n = 2$ basta substituir 3.1 por

$$\left|\int_\Omega u_i \frac{\partial v_j}{\partial x_i} w_j dx\right| \leq |u_i|_{L^4} \left|\frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right|_{L^2} |w_j|_{L^4} \tag{3.5}$$

Lema 3.2. *Seja* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *um aberto limitado. Então*

(i) $b(u,v,v) = 0,\ \forall u \in V,\ \ v \in H_0^1(\Omega) \cap L^n(\Omega)$

(ii) $b(u,v,w) = -b(u,w,v),\ \forall u \in V,\ \ v,w \in H_0^1(\Omega) \cap L^n(\Omega)$

Demonstração:

(i) Pela regra do produto para derivadas temos:

$$\frac{1}{2}u_i\frac{\partial {v_j}^2}{\partial x_i} = u_i\frac{\partial v_j}{\partial x_i}v_j$$

e daí

$$\int_\Omega u_i\frac{\partial v_j}{\partial x_i}v_j\,dx = \frac{1}{2}\int_\Omega u_i\frac{\partial {v_j}^2}{\partial x_i}\,dx.$$

Integrando por partes a segunda integral acima e usando o fato de que u se anula na fronteira temos

$$\int_\Omega u_i\frac{\partial v_j}{\partial x_i}v_j\,dx \;=\; -\frac{1}{2}\int_\Omega \frac{\partial u_i}{\partial x_i}v_j^2\,dx.$$

Logo

$$\begin{aligned}
b(u,v,v) &= -\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\int_\Omega \frac{\partial u_i}{\partial x_i}\,v_j^2\,dx \\
&= -\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\int_\Omega \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \ldots + \frac{\partial u_n}{\partial x_n}\right)v_j^2\,dx \\
&= -\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\int_\Omega \operatorname{div} u\, v_j^2\,dx \\
&= 0
\end{aligned}$$

pois $\operatorname{div} u = 0$ uma vez que $u \in V$.

(ii) Por (i) podemos escrever

$$b(u, v+w, v+w) = 0.$$

Pela linearidade de b provada no lema 3.1 temos

$$b(u,v,v) + b(u,v,w) + b(u,w,v) + b(u,w,w) = 0.$$

Daí, novamente por (i)

$$b(u, v, w) = -b(u, w, v).$$

3.3 Formulação Variacional

O sistema de equações de Navier-Stokes descreve o fluxo de um fluido homogêneo (neste estudo consideraremos $\rho = 1$) em movimento, numa região $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, sem obstáculos, com viscosidade constante, incompressível e sujeito a um campo de forças externas $f(x, t)$ dado, definido em $\Omega \times [0, T]$.

A formulção clássica do problema de valor inicial e de fronteira das equações de Navier-Stokes é a seguinte:
achar uma função vetorial

$$v : \Omega \times [0, T] \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

e uma função escalar

$$p : \Omega \times [0, T] \longrightarrow \mathbb{R}$$

tais que

$$\begin{cases} v_t + v \cdot \nabla v - \mu \Delta v + \nabla p = f \;\text{ em }\; \Omega \times (0, T) \\ \operatorname{div} v = 0 \;\text{ em }\; \Omega \times (0, T) \\ v(x, 0) = v_0(x) \;\; \forall x \in \Omega \\ v(x, t) = 0 \;\; \forall t \in (0, T) \;\text{ e }\; \forall x \in \partial\Omega \end{cases}$$

onde $v(x, t)$ é a velocidade da partícula que ocupa o ponto x no instante t, $p(x, t)$ é a pressão exercida sobre ela no mesmo ponto e no instante , μ é o coeficiente de viscosidade e $v_0(x)$ é a velocidade inicial.

A primeira equação dos sistema descreve a conservação do momento linear, a segunda a incompressibilidade do fluido, a terceira a velocidade no tempo

$t = 0$ ser a velocidade inicial e a quarta o fato de a velocidade na superfície de contato ser nula.

Passemos à formulação variacional. Tomando o produto escalar da primeira equação com uma função $u \in V^*$ e integrando obtemos

$$(v_t + v \cdot \nabla v - \mu \Delta v + \nabla p, u) = (f, u),$$

ou seja

$$(v_t, u) + (v \cdot \nabla v, u) - \mu(\Delta v, u) + (\nabla p, u) = (f, u). \tag{3.6}$$

No primeiro produto interno de 3.6, como $u = u(x)$, podemos escrever

$$(v_t, u) = \int_\Omega \frac{dv}{dt} u \, dx = \frac{d}{dt} \int_\Omega vu \, dx = \frac{d}{dt}(v, u).$$

Tratemos agora do segundo produto interno em 3.6.

$$\begin{aligned} v \cdot \nabla v &= (v_1, v_2, v_3) \begin{bmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial x_1} & \frac{\partial v_1}{\partial x_2} & \frac{\partial v_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x_1} & \frac{\partial v_2}{\partial x_2} & \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_3}{\partial x_1} & \frac{\partial v_3}{\partial x_2} & \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \end{bmatrix}^{\mathrm{t}} \\ &= \left(v_1 \tfrac{\partial v_1}{\partial x_1} + v_2 \tfrac{\partial v_1}{\partial x_2} + v_3 \tfrac{\partial v_1}{\partial x_3},\ v_1 \tfrac{\partial v_2}{\partial x_1} + v_2 \tfrac{\partial v_2}{\partial x_2} + v_3 \tfrac{\partial v_2}{\partial x_3},\ v_1 \tfrac{\partial v_3}{\partial x_1} + v_2 \tfrac{\partial v_3}{\partial x_2} + v_3 \tfrac{\partial v_3}{\partial x_3} \right) \end{aligned}$$

logo,

$$\begin{aligned} (v \cdot \nabla v, u) &= \int_\Omega \left(v_1 \frac{\partial v_1}{\partial x_1} u_1 + v_2 \frac{\partial v_1}{\partial x_2} u_1 + v_3 \frac{\partial v_1}{\partial x_3} u_1 \right) dx \\ &+ \int_\Omega \left(v_1 \frac{\partial v_2}{\partial x_1} u_2 + v_1 \frac{\partial v_1}{\partial x_2} u_2 + v_3 \frac{\partial v_2}{\partial x_3} u_2 \right) dx \\ &+ \int_\Omega \left(v_1 \frac{\partial v_3}{\partial x_1} u_3 + v_2 \frac{\partial v_3}{\partial x_2} u_3 + v_3 \frac{\partial v_3}{\partial x_3} u_3 \right) dx \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega v_i \frac{\partial v_j}{\partial x_i} u_j \, dx \\ &= b(v, v, u). \end{aligned}$$

A fim de obter uma forma mais simples para o terceiro produto interno de 3.6, usaremos a Identidade de Green (preliminar 1.4), ou seja

$$\int_{\Omega}(u\Delta v + \nabla u \nabla v)\, dx = \int_{\partial\Omega} u\frac{\partial v}{\partial \overrightarrow{n}}\, dS_x.$$

Como u se anula na fronteira tem-se

$$\int_{\Omega} u\Delta v\, dx = -\int_{\Omega} \nabla u \nabla v\, dx,$$

ou seja

$$(\Delta v, u) = -((v, u)).$$

Quanto ao quarto produto interno de 3.6 temos

$$\begin{aligned}
(\nabla p, u) &= \int_{\Omega} \nabla p\, u\, dx \\
&= \int_{\Omega} \left(\frac{\partial p}{\partial x_1}, \frac{\partial p}{\partial x_2}, \frac{\partial p}{\partial x_3}\right)(u_1, u_2, u_3)\, dx \\
&= \int_{\Omega} \frac{\partial p}{\partial x_1} u_1\, dx + \int_{\Omega} \frac{\partial p}{\partial x_2} u_2\, dx + \int_{\Omega} \frac{\partial p}{\partial x_3} u_3.
\end{aligned}$$

Integrando por partes as três últimas integrais acima e usando a fato de que u se anula na fronteira temos

$$(\nabla p, u) = \int_{\Omega} p\frac{\partial v_1}{\partial x_1}\, dx + \int_{\Omega} p\frac{\partial v_2}{\partial x_2}\, dx \int_{\Omega} p\frac{\partial v_3}{\partial x_3}\, dx = \int_{\Omega} p\underbrace{\operatorname{div} u}_{=0}\, dx = 0.$$

O último produto interno de 3.6 é uma forma linear contínua no espaço V_m. Logo, existe um elemento pertencente ao dual de V_m tal que

$$(f, u) = \langle f, u\rangle.$$

Portanto, para a formulação clássica das equações de Navier-Stokes, a formulação variacional é a seguinte:
dados

$$f \in L^2(0, T, V^{'}) \ \text{ e } \ v_0 \in H$$

achar v satisfazendo

$$\frac{d}{dt}(v,u)+\mu((v,u))+b(v,v,u)=\langle f,u\rangle \quad \forall u\in V \tag{3.7}$$

$$v\in L^2(0,T,V) \text{ e } v(0)=v_0. \tag{3.8}$$

O teorema seguinte é o objeto principal deste trabalho (Veja TEMAN [26], p. 282).

Teorema 3.1. *Considere $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ limitado e $n\leq 4$. Dados $f\in L^2(0,T,V')$ e $v_0\in H$ existe uma função $v\in L^2(0,T,V)\cap L^\infty(0,T,H)$ tal que*

$$\frac{d}{dt}(v,u)+\mu((v,u))+b(v,v,u)=\langle f,u\rangle \quad \forall u\in V$$

$$v(0)=v_0.$$

3.4 Solução em Dimensão Finita

Nesta seção mostraremos a existência de solução em dimensão finita para a formulação variacional das equações de Navier-Stokes para um fluido viscoso e incompressível. Para tal usaremos o método construtivo de Galerkin. Este método consiste em obter uma solução v por meio de aproximações v_m. Passemos então a descrevê-lo.

Sendo V um espaço de Hilbert separável existe uma subconjunto enumerável e denso $B=\{w_1,w_2,w_3,...\}\subset V$. Além disso, como V^* é denso em V, podemos tomar o conjunto B em V^*. De fato, seja (r_m) uma sucessão de números reais positivos tendendo a zero. Dado $u\in V$, $\exists(w_{n_k})$ tal que

$$\lim_{k\to\infty} w_{n_k}=u.$$

Para simplificar esta notação denominemos (w_n) esta subsequência. Para cada $m\in\mathbb{N}$ $\exists u_{n,m}\in B(u_n,r_m)\cap V^*$. Fazendo m, n variar em $\mathbb{N}$ obtemos uma sequência $(u_{n,m})$ tal que $\lim\limits_{n,m\to\infty} u_{n,m} = u$ pois, dado $\epsilon > 0$ temos

$$\begin{aligned} |u_{n,m} - u| &= |u_{n,m} - w_n + w_n - u| \\ &\leq |u_{n,m} - w_n| + |w_n - u| \\ &< r_m + \epsilon \\ &< \epsilon + \epsilon. \end{aligned}$$

Seja $V_m = [w_1, w_2, ..., w_m]$ o espaço gerado por $\{w_1, w_2, ..., w_m\}$. Sem perda da generalidade podemos supor que o conjunto $\{w_1, w_2, ..., w_m\}$ é L.I.. Definimos a solução aproximada de 3.7 no espaço V_m como segue

$$v_m(x,t) = \sum_{i=1}^{m} g_{im}(t) w_i(x) \tag{3.9}$$

assim, a formulação variacional no espaço V_m é

$$(v_m^{'}(t), w_j) + \mu((v_m(t), w_j)) + b(v_m(t), v_m(t), w_j) = \langle f(t), w_j \rangle \tag{3.10}$$

$$t \in [0,T), \quad j = 1, ..., m$$

$$v_m(0) = v_{0m}$$

onde v_{0m} é a projeção ortogonal em H de $v(0)$ sobre o espaço V_m com $v_{0m} \to v_0$ quando $m \to \infty$. Dessa forma devemos mostrar que existem as funções $g_{1m}, g_{2m}, ..., g_{mm}$ que verificam 3.10.

De fato, escrevendo 3.10 mais explicitamente e omitindo os argumentos das funções temos o seguinte sistema:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} (v_m^{'}, w_1) + \mu((v_m, w_1)) + b(v_m, v_m, w_1) & = & \langle f, w_1 \rangle \\ (v_m^{'}, w_2) + \mu((v_m, w_2)) + b(v_m, v_m, w_2) & = & \langle f, w_2 \rangle \\ \vdots & & \\ (v_m^{'}, w_m) + \mu((v_m, w_m)) + b(v_m, v_m, w_m) & = & \langle f, w_m \rangle \end{array} \right. \tag{3.11}$$

substituindo 3.9 em 3.11 temos:

$$\begin{cases} (g_{1m}^{'}w_1 + g_{2m}^{'}w_2 + \; ... \; + g_{mm}^{'}w_m, \; w_1) + \mu((g_{1m}w_1 + g_{2m}w_2 + \; ... + \; g_{mm}w_m, \; w_1))+ \\ +b(g_{1m}w_1 + g_{2m}w_2 + \; ... + \; g_{mm}w_m, \; g_{1m}w_1 + g_{2m}w_2 + \; ... + \; g_{mm}w_m, \; w_1) = \langle f, w_1 \rangle \\ (g_{1m}^{'}w_1 + g_{2m}^{'}w_2 + \; ... \; + g_{mm}^{'}w_m, \; w_2) + \mu((g_{1m}w_1 + g_{2m}w_2 + \; ... + \; g_{mm}w_m, \; w_2))+ \\ +b(g_{1m}w_1 + g_{2m}w_2 + \; ... + \; g_{mm}w_m, \; g_{1m}w_1 + g_{2m}w_2 + \; ... + \; g_{mm}w_m, \; w_2) = \langle f, w_2 \rangle \\ \vdots \\ (g_{1m}^{'}w_1 + g_{2m}^{'}w_2 + \; ... \; + g_{mm}^{'}w_m, \; w_m) + \mu((g_{1m}w_1 + g_{2m}w_2 + \; ... + \; g_{mm}w_m, \; w_m))+ \\ +b(g_{1m}w_1 + g_{2m}w_2 + \; ... + \; g_{mm}w_m, \; g_{1m}w_1 + g_{2m}w_2 + \; ... + \; g_{mm}w_m, \; w_m) = \langle f, w_m \rangle \end{cases}$$

que é equivalente à

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{i=1}^{m}(w_i, w_1)g_{im}^{'} \; + \; \mu\sum_{i=1}^{m}((w_i, w_1))g_{im} \; + \sum_{i,l=1}^{m} b(w_i, w_l, w_1)g_{im}g_{lm} = \langle f, w_1 \rangle \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{m}(w_i, w_2)g_{im}^{'} \; + \; \mu\sum_{i=1}^{m}((w_i, w_2))g_{im} \; + \sum_{i,l=1}^{m} b(w_i, w_l, w_2)g_{im}g_{lm} = \langle f, w_2 \rangle \\ \vdots \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{m}(w_i, w_m)g_{im}^{'} + \mu\sum_{i=1}^{m}((w_i, w_m))g_{im} + \sum_{i,l=1}^{m} b(w_i, w_l, w_m)g_{im}g_{lm} = \langle f, w_m \rangle \end{cases}$$

que na forma matricial é

$$\begin{bmatrix} (w_1, w_1) & \cdots & (w_m, w_1) \\ \vdots & & \vdots \\ (w_1, w_m) & \cdots & (w_m, w_m) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_{1m}^{'} \\ \vdots \\ g_{mm}^{'} \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} ((w_1, w_1)) & \cdots & ((w_m, w_1)) \\ \vdots & & \vdots \\ ((w_1, w_m)) & \cdots & ((w_m, w_m)) \end{bmatrix} +$$

$$+C = \begin{bmatrix} \langle f, w_1 \rangle \\ \vdots \\ \langle f, w_m \rangle \end{bmatrix} \tag{3.12}$$

onde C é uma matriz $m \times 1$ satisfazendo

$$c_{k1} = \begin{bmatrix} g_{1m} & \cdots & g_{mm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b(w_1, w_1, w_k) & \cdots & b(w_1, w_m, w_k) \\ \vdots & & \vdots \\ b(w_m, w_1, w_k) & \cdots & b(w_m, w_m, w_k) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_{1m} \\ \vdots \\ g_{1m} \end{bmatrix}.$$

A matriz

$$A = \begin{bmatrix} (w_1, w_1) & \cdots & (w_m, w_1) \\ \vdots & & \vdots \\ (w_1, w_m) & \cdots & (w_m, w_m) \end{bmatrix}$$

é não singular pois,

$$\begin{bmatrix} (w_1, w_1) & \cdots & (w_m, w_1) \\ \vdots & & \vdots \\ (w_1, w_m) & \cdots & (w_m, w_m) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

implica

$$\begin{cases} (w_1, w_1)x_1 + & \cdots & +(w_m, w_1)x_m & = & 0 \\ \vdots & & & & \\ (w_1, w_m)x_1 + & \cdots & +(w_m, w_m)x_m & = & 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x_1 w_1, w_1) + & \cdots & +(x_m w_m, w_1) & = & 0 \\ \vdots & & & & \\ (x_1 w_1, w_m) + & \cdots & +(x_m w_m, w_m) & = & 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x_1 w_1 \,+\, \cdots \,+\, x_m w_m, w_1) & = & 0 \\ \vdots & & \\ (x_1 w_1 \,+\, \cdots \,+\, x_m w_m, w_m) & = & 0 \end{cases}.$$

Façamos agora o seguinte: multiplicamos a primeira equação do sistema acima por x_1 e agrupamos este termo a w_1 e repetimos este procedimento em todas as equações do sistema acima. Somando estas m equações resultantes obtemos

$$(x_1 w_1 \,+\, \cdots \,+\, x_m w_m,\, x_1 w_1 \,+\, \cdots \,+\, x_m w_m) = 0.$$

Este produto interno só é zero se,

$$x_1 w_1 \, + \, \cdots \, + \, x_m w_m = 0$$

donde vem que

$$x_1 = \, ... \, = x_m = 0$$

pois $\{w_1, w_2, \, ... \, w_m\}$ é $L.I.$ Isto mostra que a matriz A é não singular, ou seja, admite inversa.

Multiplicando o sistema 3.12 pela inversa de A obtemos o seguinte sistema de equações diferenciais ordinárias não linear escrito na forma vetorial

$$g_{im}^{'}(t) = \sum_{j=1}^{m} \alpha_{ij} \langle f(t), w_j \rangle - \sum_{j=1}^{m} \beta_{ij} g_{jm}(t) - \sum_{j,k=1}^{m} \beta_{ijk} g_{jm}(t) g_{km}(t) \tag{3.13}$$

onde

$$\alpha_{ij}, \, \beta_{ij}, \, \beta_{ijk} \in \mathbb{R}, \ 1 \leq j \leq m$$

$$v_{om} = g_{1m}(0) w_1 \, + \, g_{2m}(0) w_2 \, + \, ... \, + \, g_{mm}(0) w_m. \tag{3.14}$$

O Teorema de Carathéodory (preliminar 1.2) garante que o sistema 3.13 juntamente com a condição inicial 3.14 admite uma solução definida no intervalo $[0, T_m)$, ou seja, a formulação variacional das equações de Navier-Stokes admite solução em dimensão finita.

Na verdade temos $T_m = T$ pois $T_m < T$ implica $|v_m(s)| \to \infty$ quando $s \to T_m$ (Veja SOTOMAYOR [24] p. 17) o que contraria a estimativa 4.1.1 a ser obtida no capítulo seguinte.

Capítulo 4

Solução em Dimensão Infinita

4.1 Estimativas a Priori

Nesta seção, uma vez provada a existência de solução em dimensão finita para a formulação variacional das equações de Navier-Stokes, faremos várias estimativas a respeito desta que serão usadas na demonstração do teorema principal deste trabalho.

4.1.1 A sequência $\{v_m\}$ é limitada em $L^\infty(0, T, H)$

Consideremos novamente a enésima aproximação de Galerkin

$$v_m(x,t) = \sum_{i=1}^{m} g_{im}(t) w_i(x) \tag{4.1}$$

e a formulação variacional

$$(v_m^{'}, w_j) + \mu((v_m, w_j)) + b(v_m, v_m, w_j) = \langle f, w_j \rangle \;\; j = 1, ..., m. \tag{4.2}$$

Multiplicando 4.2 por g_{jm} obtemos

$$(v_m^{'}, g_{jm} w_j) + \mu((v_m, g_{jm} w_j)) + b(v_m, v_m, g_{jm} w_j) = \langle f, g_{jm} w_j \rangle.$$

Fazendo j variar de 1 a m obtemos as m equações abaixo

$$\begin{aligned}
(v_m^{'}, g_{1m}w_1) + \mu((v_m, g_{1m}w_j)) + b(v_m, v_m, g_{1m}w_1) &= \langle f, g_{1m}w_1\rangle \\
(v_m^{'}, g_{2m}w_2) + \mu((v_m, g_{2m}w_2)) + b(v_m, v_m, g_{2m}w_2) &= \langle f, g_{2m}w_2\rangle \\
&\vdots \\
(v_m^{'}, g_{mm}w_m) + \mu((v_m, g_{mm}w_m)) + b(v_m, v_m, g_{mm}w_m) &= \langle f, g_{mm}w_m\rangle.
\end{aligned}$$

Somando essas m equações e usando 3.1 (trilinearidade da forma b) obtemos

$$\left(v_m^{'}, \sum_{j=1}^{m} g_{jm}w_j\right) + \mu\left(\left(v_m, \sum_{j=1}^{m} g_{jm}w_j\right)\right) + b\left(v_m, v_m, \sum_{j=1}^{m} g_{jm}w_j\right) = \left\langle f, \sum_{j=1}^{m} g_{jm}w_j\right\rangle$$

daí, por 4.1 temos

$$(v_m^{'}, v_m) + \mu((v_m, v_m)) + b(v_m, v_m, v_m) = \langle f, v_m\rangle. \tag{4.3}$$

Observamos agora que

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}|v_m|^2 &= \frac{d}{dt}\int_\Omega v_m^2\, dx \\
&= \int_\Omega \frac{d}{dt} v_m^2\, dx \\
&= \int_\Omega 2v_m^{'} v_m\, dx \\
&= 2(v_m^{'}, v_m)
\end{aligned}$$

donde vem que

$$(v_m^{'}, v_m) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}|v_m|^2. \tag{4.4}$$

Assim, de 4.3, 4.4 e do lema 3.2 temos

$$\frac{d}{dt}|v_m(t)|^2 + 2\mu|\nabla v_m(t)|^2 = 2\langle f(t), v_m(t)\rangle. \tag{4.5}$$

Em H_0^1 as normas $|\,.\,|_V$ e $|\nabla\,.\,|$ são equivalentes. Logo,

$$2\langle f(t), v_m(t)\rangle \leq 2|\langle f(t), v_m(t)\rangle| \leq 2|f(t)|_{V'}|v_m(t)|_V = 2|f(t)|_{V'}|\nabla v_m(t)|. \tag{4.6}$$

Por outro lado,

$$\left(\frac{1}{\sqrt{\mu}}|f(t)|_{V'} - \sqrt{\mu}|\nabla v_m(t)|\right)^2 \geq 0$$

donde vem que

$$2|f(t)|_{V'}|\nabla v_m(t)| \leq \frac{1}{\mu}|f(t)|_{V'}^2 + |\nabla v_m(t)|^2. \tag{4.7}$$

Portanto, de 4.5, 4.6 e 4.7 temos

$$\frac{d}{dt}|v_m(t)|^2 + 2\mu|\nabla v_m(t)|^2 \leq \frac{1}{\mu}|f(t)|_{V'}^2 + |\nabla v_m(t)|^2$$

consequentemente

$$\frac{d}{dt}|v_m(t)|^2 + \mu|\nabla v_m(t)|^2 \leq \frac{1}{\mu}|f(t)|_{V'}^2. \tag{4.8}$$

donde vem que

$$\frac{d}{dt}|v_m(t)|^2 \leq \frac{1}{\mu}|f(t)|_{V'}^2$$

e daí, integrando de 0 a s, com $s \in [0, t]$, obtemos

$$|v_m(s)|^2 \leq |v_{om}|^2 + \frac{1}{\mu}\int_0^s |f(t)|_{V'}^2\, dt \tag{4.9}$$

onde v_{om} é a projeção ortogonal de v_o sobre o espaço V_m. Assim,

$$(v_o - v_{om},\, v) = 0 \ \ \forall\, v \in V_m$$

em particular, $v_{om} \in V_m$. Logo,

$$(v_o - v_{om},\, v_{om}) = 0 \Rightarrow (v_o,\, v_{om}) - (v_{om},\, v_{om}) = 0 \Rightarrow (v_{om},\, v_{om}) = (v_o,\, v_{om}).$$

Pela desigualdade de Holder (preliminar 1.5), temos

$$|v_{om}|^2 = (v_{om},\, v_{om}) = (v_o,\, v_{om}) \leq |v_o||v_{om}|$$

donde vem que

$$|v_{om}| \leq |v_o|. \tag{4.10}$$

dai e de 4.9 obtemos

$$|v_m(s)|^2 \leq |v_o|^2 + \frac{1}{\mu}\int_0^T |f(t)|^2_{V'}\, dt$$

Por hipótese $f \in L^2(0,T,V')$. Logo a integral acima é finita e

$$\text{Sup}|v_m(s)|^2 \leq \text{ Constante}, \quad s \in [0,T]$$

o que mostra que a sequência $\{v_m\} \subset L^\infty(0,T,H)$ e é limitada nesse espaço.

4.1.2 A sequência $\{v_m\}$ é limitada em $L^2(0,T,V)$

Integrando 4.8 de 0 a T obtemos

$$|v_m(T)|^2 - |v_{om}|^2 + \mu\int_0^T |\nabla v_m(t)|^2 dt \leq \frac{1}{\mu}\int_0^T |f(t)|^2_{V'} dt$$

ou seja,

$$|v_m(T)|^2 + \mu\int_0^T |\nabla v_m(t)|^2 dt \leq \frac{1}{\mu}\int_0^T |f(t)|^2_{V'} dt + |v_{om}|^2.$$

Daí

$$\mu\int_0^T |\nabla v_m(t)|^2 dt \leq \frac{1}{\mu}\int_0^T |f(t)|^2_{V'} dt + |v_{om}|^2.$$

Dividindo esta desigualdade por μ e usando 4.10 obtemos

$$\int_0^T |\nabla v_m(t)|^2 dt \leq \frac{1}{\mu^2}\int_0^T |f(t)|^2_{V'} dt + \frac{1}{\mu}|v_o|^2.$$

Como as normas $|\nabla v_m|$ e $|v_m|_V$ são equivalentes podemos escrever

$$\int_0^T |v_m(t)|^2_V dt \leq \frac{1}{\mu^2}\int_0^T |f(t)|^2_{V'} dt + \frac{1}{\mu}|v_o|^2 \leq \text{Constante}$$

pois $f \in L^2(0,T,V')$. Isso mostra que a sequência $\{v_m\} \subset L^2(0,T,V)$ e é limitada neste espaço.

4.1.3 Se $0 < \gamma < \frac{1}{4}$ então $\{\widetilde{v}_m\}$ é limitada em $H^\gamma(\mathbb{R}, V, H)$.

Se v é uma função de $[0,T]$ em V, nós denotaremos por $\widetilde{v}$ a função de $\mathbb{R}$ em V tal que

$$\widetilde{v}(t) = \begin{cases} v(t) & \text{se} \quad t \in [0,T] \\ 0 & \text{se} \quad t \in \mathbb{R}\backslash[0,T]. \end{cases} \tag{4.11}$$

Além disso, denotaremos por $\widehat{v}$ a transformada de Fourier de $\widetilde{v}$.

Inicialmente vamos mostrar que

$$\int_{-\infty}^{\infty} |r|^{2\gamma} |\widehat{v}_m(r)|^2 \, dr \leq \text{Constante}. \tag{4.12}$$

A fim de calcular a derivada de $(\widetilde{v}_m, w_j)$ no sentido das distribuições, considere $\phi \in D(\mathbb{R})$ tal que $supp\, \phi \subset [-N, T+N]$. Assim, para ϵ suficientemente pequeno temos

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{d}{dt}(\widetilde{v}_m, w_j), \phi \right\rangle &= -\left\langle (\widetilde{v}_m, w_j), \phi' \right\rangle \\ &= -\int_{-\infty}^{\infty} (\widetilde{v}_m, w_j)\phi' \, dt \\ &= -\lim_{\epsilon \to 0} \left(\int_{-\infty}^{-N} (\widetilde{v}_m, w_j)\phi' \, dt + \int_{-N}^{-\epsilon} (\widetilde{v}_m, w_j)\phi' \, dt + \right. \\ &+ \int_{\epsilon}^{T-\epsilon} (\widetilde{v}_m, w_j)\phi' \, dt + \int_{T+\epsilon}^{T+N} (\widetilde{v}_m, w_j)\phi' \, dt + \\ &+ \left. \int_{T+N}^{\infty} (\widetilde{v}_m, w_j)\phi' \, dt \right). \end{aligned}$$

Como o $supp\, \phi \subset [-N, T+N]$, a primeira e a última integrais acima são iguais a zero. Além disso, como $\widetilde{v}_m$ se anula em $(-N, -\epsilon)$ e em $(T+\epsilon, T+N)$, a segunda e a quarta integrais acima também são iguais a zero. Logo

$$\left\langle \frac{d}{dt}(\widetilde{v}_m, w_j), \phi \right\rangle = -\lim_{\epsilon \to 0} \int_{\epsilon}^{T-\epsilon} (v_m, w_j)\phi' \, dt.$$

Integrando a última igualdade por partes obtemos

$$\begin{aligned}
\left\langle \frac{d}{dt}(\widetilde{v}_m, w_j), \phi \right\rangle &= -\lim_{\epsilon\to 0}\left((v_m, w_j)\phi\Big|_{\epsilon}^{T-\epsilon} - \int_{\epsilon}^{T-\epsilon} \frac{d}{dt}(v_m, w_j)\phi\, dt \right) \\
&= \int_0^T \frac{d}{dt}(v_m, w_j)\phi\, dt - \lim_{\epsilon\to 0}\big[(v_m(T-\epsilon), w_j)\phi(T-\epsilon) - \\
&\quad -(v_m(\epsilon), w_j)\phi(\epsilon)\big] \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{dt}(v_m, w_j)\phi\, dt - (v_m(T), w_j)\phi(T) + (v_m(0), w_j)\phi(0) \\
&= \left\langle \frac{d}{dt}(v_m, w_j), \phi \right\rangle - \Big\langle (v_m(T), w_j)\delta_T, \phi \Big\rangle + \Big\langle (v_m(0), w_j)\delta_o, \phi \Big\rangle \\
&= \left\langle \frac{d}{dt}(v_m, w_j) - (v_m(T), w_j)\delta_T + (v_m(0), w_j)\delta_o,\ \phi \right\rangle.
\end{aligned}$$

No sentido das distribuições isso mostra que

$$\frac{d}{dt}(\widetilde{v}_m, w_j) = \frac{d}{dt}(v_m, w_j) - (v_m(T), w_j)\delta_T + (v_{om}, w_j)\delta_o$$

onde v_{om} é a projeção ortogonal de $v_m(0)$ sobre o espaço V_m e δ_o e δ_T são distribuições de Dirac.

Portanto, da formulação variacional 3.10 temos

$$\frac{d}{dt}(\widetilde{v}_m, w_j) = \langle \widetilde{f}_m, w_j \rangle + \big(v_{om}, w_j\big)\delta_o - \big(v_m(T), w_j\big)\delta_T \tag{4.13}$$

com

$$f_m = f - \mu\, Av_m - Bv_m \tag{4.14}$$

e

$$\widetilde{f}_m = \begin{cases} f_m & \text{em} \quad [0,T] \\ 0 & \text{em} \quad \mathbb{R}\backslash[0,T] \end{cases} \tag{4.15}$$

onde $Av_m,\ Bv_m \in V_m'$ e são tais que

$$\langle Av_m, w_j \rangle = ((v_m, w_j))$$

$$\langle Bv_m, w_j \rangle = b(v_m, v_m, w_j).$$

Calculemos agora a transformada de Fourier de 4.13 no sentido das distribuições. Para $\phi \in S$ temos:

$$\begin{aligned}
\left\langle \widehat{\frac{d}{dr}(\widetilde{v}_m, w_j)}, \phi \right\rangle &= \left\langle \frac{d}{dr}(\widetilde{v}_m, w_j), \widehat{\phi} \right\rangle \\
&= -\left\langle (\widetilde{v}_m, w_j), \frac{d}{dr}\widehat{\phi} \right\rangle \\
&= -\int_{-\infty}^{\infty} (\widetilde{v}_m(r), w_j) \frac{d}{dr}\widehat{\phi}(r)\, dr. \qquad (4.16)
\end{aligned}$$

Mas

$$\widehat{\phi}(r) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi irt}\phi(t)\, dt,$$

donde vem que

$$\frac{d}{dr}\widehat{\phi}(r) = \int_{-\infty}^{\infty} (-2\pi it)e^{-2\pi irt}\phi(t)\, dt. \qquad (4.17)$$

Substituindo 4.17 em 4.16 obtemos

$$\left\langle \widehat{\frac{d}{dr}(\widetilde{v}_m, w_j)}, \phi \right\rangle = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{\Omega}\int_{-\infty}^{\infty} \widetilde{v}_m(r,x)w_j(x)2\pi ite^{-2\pi irt}\phi(t)\, dtdxdr \qquad (4.18)$$

Usando os teoremas de Tonelli (preliminar 1.6) e Fubini (preliminar 1.7) em 4.18 obtemos

$$\begin{aligned}
\left\langle \widehat{\frac{d}{dr}(\widetilde{v}_m, w_j)}, \phi \right\rangle &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{\Omega}\int_{-\infty}^{\infty} \widetilde{v}_m(r,x)w_j(x)2\pi ite^{-2\pi irt}\phi(t)\, drdxdt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{\Omega} \widetilde{v}_m(t,x)w_j(x)2\pi it\phi(t)\, dxdt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} (\widetilde{v}_m(t), w_j)2\pi it\phi(t)\, dt \\
&= \langle 2\pi it(\widetilde{v}_m(t), w_j), \phi \rangle .
\end{aligned}$$

Isso mostra que

$$\widehat{\frac{d}{dr}(\widetilde{v}_m, w_j)} = 2\pi it(\widetilde{v}_m(t), w_j). \qquad (4.19)$$

Façamos algumas considerações antes de considerarmos o termo $\langle \widetilde{f}_m, w_j \rangle$.

Por hipótese $f \in L^2(0,T,V^{'})$. Logo, pela desigualdade de Holder (preliminar 1.5), temos

$$\begin{aligned}\int_0^T \big|f(t)\big|_{V'}\,dt &= \int_0^T \big|f(t).1\big|_{V'}\,dt \\ &\leq \left(\int_0^T \big|f(t)\big|_{V'}^2\,dt\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^T |1|_{V'}^2\,dt\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \text{Constante.} \qquad (4.20)\end{aligned}$$

Isso mostra que

$$f \in L^1(0,T,V^{'}).$$

Novamente pela desigualdade de Holder (preliminar 1.5) temos

$$\begin{aligned}\big|Av_m\big|_{V'} &= \sup_{|w|_V\leq 1}\big|\langle Av_m, w\rangle\big| \\ &= \sup_{|\nabla w|\leq 1}\big|(\nabla v_m, \nabla w)\big| \\ &\leq \sup_{|\nabla w|\leq 1}\big|\nabla v_m\big|\big|\nabla w\big| \\ &\leq \sup_{|\nabla w|\leq 1}\big|\nabla v_m\big| \\ &= \big|\nabla v_m\big|. \qquad (4.21)\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\int_0^T |\nabla v_m(t)|dt &\leq \left(\int_0^T |\nabla v_m(t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^T 1^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \sqrt{T}\left(\int_0^T |\nabla v_m(t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \qquad (4.22)\end{aligned}$$

Pelo lema 3.1 temos

$$\begin{aligned}
\big|Bv_m\big|_{V'} &= \sup_{|w|_V \leq 1} \big|\langle Bv_m, w\rangle\big| \\
&= \sup_{|w|_V \leq 1} \big|b(v_m, v_m, w)\big| \\
&\leq \sup_{|\nabla w| \leq 1} \mathrm{C}|\nabla v_m||\nabla v_m||\nabla w| \\
&\leq \sup_{|\nabla w| \leq 1} \mathrm{C}|\nabla v_m||\nabla v_m| \\
&= \mathrm{C}|\nabla v_m|^2. \qquad (4.23)
\end{aligned}$$

As considerações 4.20, 4.21, 4.22 e 4.23, mostra que $\langle \widetilde{f}_m, w_j\rangle \in L^1(\mathbb{R})$. De fato,

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} |\langle \widetilde{f}_m(t), w_j\rangle| dt &\leq |w_j|_V \int_0^T |f_m(t)|_{V'} dt \\
&= |w_j|_V \int_0^T |f(t) - \mu A v_m(t) - B v_m(t)|_{V'} dt \\
&\leq |w_j|_V \left(\int_0^T |f(t)|_{V'}\, dt + \mu \int_0^T |\nabla v_m(t)| dt + C \int_0^T |\nabla v_m(t)|^2 dt \right) \\
&\leq \text{Constante}
\end{aligned}$$

pois $\{v_m\}$ é limitada em $L^2(0,T,V)$. Assim, podemos usar a preliminar 1.13

e escrever

$$\begin{aligned}
\langle \widehat{f_m, w_j}\rangle(r) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2i\pi tr}\, \langle \widetilde{f}_m(t), w_j\rangle\, dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2i\pi tr} \int_\Omega \widetilde{f}_m(t) w_j\, dx\, dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \int_\Omega e^{-2i\pi tr}\, \widetilde{f}_m(t) w_j\, dx\, dt \\
&\overset{*}{=} \int_\Omega \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2i\pi tr}\, \widetilde{f}_m(t)\, dt\, w_j\, dx \\
&= \int_\Omega \widehat{f}_m(t) w_j\, dx \\
&= \left\langle \widehat{f}_m, w_j \right\rangle
\end{aligned}$$

onde a troca da ordem de integração em $(*)$ justifica-se pelas preliminares 1.6 e 1.7.

Aplicando a tranformada de Fourier em 4.13 e usando os exemplos contidos na preliminar 1.12 obtemos

$$2i\pi r(\widehat{v}_m, w_j) = \langle \widehat{f}_m, w_j\rangle + (v_{om}, w_j) - (v_m(T), w_j)e^{-2i\pi rT} \tag{4.24}$$

onde $\widehat{v}_m$ e $\widehat{f}_m$ são as transformadas de Fourier de $\widetilde{v}_m$ e $\widetilde{f}_m$, respectivamente.

Sejam $\widetilde{g}_{jm}$ e $\widehat{g}_{jm}$ as funções obtidas de g_{jm} (j-ésimo coeficiente de v_m da aproximação de Galerkin em dimensão finita) conforme definições acima. Multiplicando 4.24 por $\widehat{g}_{jm}$ obtemos

$$2i\pi r(\widehat{v}_m, \widehat{g}_{jm} w_j) = \langle \widehat{f}_m, \widehat{g}_{jm} w_j\rangle + (v_{om}, \widehat{g}_{jm} w_j) - (v_m(T), \widehat{g}_{jm} w_j)e^{-2i\pi rT}$$

dai, fazendo j variar de 1 a m obtemos as m equações abaixo:

$$
\begin{aligned}
2i\pi r(\widehat{v}_m, \widehat{g}_{1m} w_1) &= \langle \widehat{f}_m, \widehat{g}_{1m} w_1 \rangle + (v_{om}, \widehat{g}_{1m} w_1) - (v_m(T), \widehat{g}_{1m} w_1) e^{-2i\pi r T} \\
2i\pi r(\widehat{v}_m, \widehat{g}_{2m} w_2) &= \langle \widehat{f}_m, \widehat{g}_{2m} w_2 \rangle + (v_{om}, \widehat{g}_{2m} w_2) - (v_m(T), \widehat{g}_{2m} w_2) e^{-2i\pi r T} \\
&\vdots \\
2i\pi r(\widehat{v}_m, \widehat{g}_{mm} w_m) &= \langle \widehat{f}_m, \widehat{g}_{mm} w_m \rangle + (v_{om}, \widehat{g}_{mm} w_m) - (v_m(T), \widehat{g}_{mm} w_m) e^{-2i\pi r T}
\end{aligned}
$$

cuja soma nos dá

$$2i\pi r(\widehat{v}_m, \widehat{v}_m) = \langle \widehat{f}_m, \widehat{v}_m \rangle + (v_{om}, \widehat{v}_m) - (v_m(T), \widehat{v}_m) e^{-2i\pi r T}$$

em virtude da linearidade da transformada de Fourier. Daí,

$$2i\pi r \left| \widehat{v}_m \right|^2 = \langle \widehat{f}_m, \widehat{v}_m \rangle + (v_{om}, \widehat{v}_m) - (v_m(T), \widehat{v}_m) e^{-2i\pi r T}. \tag{4.25}$$

De 4.20, 4.21, 4.22 e 4.23 segue que

$$
\begin{aligned}
\int_0^T |f_m(t)|_{V'}\, dt &= \int_0^T |f(t) + \mu A v_m(t) - B v_m(t)|_{V'}\, dt \\
&\leq \int_0^T |f(t)|_{V'}\, dt + \mu \int_0^T |A v_m(t)|_{V'}\, dt + \int_0^T |B v_m(t)|_{V'}\, dt \\
&\leq \int_0^T |f(t)|_{V'}\, dt + \mu \int_0^T |\nabla v_m(t)|\, dt + \int_0^T \mathrm{c}\, |\nabla v_m(t)|^2\, dt \\
&\leq \text{Constante}
\end{aligned}
$$

pois $v_m(t)$ é limitada em $L^2(0, T, V)$ (estimativa 4.1.2). Isso mostra que

$$\sup |\widehat{f}_m(r)|_{V'} \leq \text{Constante}, \ \ \forall r \in \mathbb{R} \tag{4.26}$$

pois,

$$
\begin{aligned}
|\widehat{f}_m(r)|_{V'} &= \left|\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi itr}\widetilde{f}_m(t)\,dt\right|_{V'}\\
&\leq \int_{-\infty}^{\infty} \left|e^{-2\pi itr}\widetilde{f}_m(t)\right|_{V'}\,dt\\
&= \int_{-\infty}^{\infty} |e^{-2\pi itr}||\widetilde{f}_m(t)|_{V'}\,dt\\
&= \int_{-\infty}^{\infty} 1.|\widetilde{f}_m(t)|_{V'}\,dt\\
&= \int_{0}^{T} |f_m(t)|_{V'}\,dt.
\end{aligned}
$$

Além disso, pela estimativa 4.1.1 temos

$$|v_{om}| \leq \text{Constante} \quad \text{e} \quad |v_m(T)| \leq \text{Constante}. \tag{4.27}$$

Daí, tomando o módulo em 4.25 obtemos

$$
\begin{aligned}
2\pi|r||\widehat{v}_m(r)|^2 &= \left|\left\langle \widehat{f}_m(r), \widehat{v}_m(r)\right\rangle + \big(v_{om}, \widehat{v}_m(r)\big) - \big(v_m(T), \widehat{v}_m(r)\big)e^{-2i\pi tr}\right|\\
&\leq \left|\left\langle \widehat{f}_m(r), \widehat{v}_m(r)\right\rangle\right| + \left|\big(v_{om}, \widehat{v}_m(r)\big)\right| + \left|\big(v_m(T), \widehat{v}_m(r)\big)\right|\\
&\leq \left|\widehat{f}_m(r)\right|_{V'} |\nabla\widehat{v}_m(r)| + \left|\big(v_{om}, \widehat{v}_m(r)\big)\right| + \left|\big(v_m(T), \widehat{v}_m(r)\big)\right|.
\end{aligned}
$$

Usando a desigualdade de Holder (preliminar 1.5) nas duas últimas parcelas da desigualdade acima e usando 4.26 temos

$$2\pi|r||\widehat{v}_m(r)|^2 \leq \mathrm{c}_1|\nabla\widehat{v}_m(r)| + |v_{om}||\widehat{v}_m(r)| + |v_m(T)||\widehat{v}_m(r)|. \tag{4.28}$$

Dividindo 4.28 por 2π e usando 4.27 temos

$$|r||\widehat{v}_m(r)|^2 \leq \mathrm{c}_2|\nabla\widehat{v}_m(r)| + \mathrm{c}_3|\widehat{v}_m(r)|.$$

Daí, usando a desigualdade de Poincaré (preliminar 1.8), vem que

$$|r||\widehat{v}_m(r)|^2 \leq \mathrm{c}_4|\nabla\widehat{v}_m(r)|. \tag{4.29}$$

Ainda no intuito de provar 4.1.3 considere a função $f_\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$f_\gamma(r) = \frac{|r|^{2\gamma} + |r|}{1 + |r|}, \qquad 0 < \gamma < \frac{1}{4}.$$

Observamos inicialmente que

$$f_\gamma \text{ é par} \qquad \text{e} \qquad f_\gamma(r) \geq 0 \ \ \forall r \in \mathbb{R}. \tag{4.30}$$

Além disso,

$$\begin{aligned}
\lim_{r\to\infty} f_\gamma(r) &= \lim_{r\to\infty} \frac{r^{2\gamma} + r}{1 + r} \\
&= \lim_{r\to\infty} \frac{r(r^{2\gamma-1} + 1)}{r\left(\frac{1}{r} + 1\right)} \\
&= \lim_{r\to\infty} \frac{(r^{2\gamma-1} + 1)}{\left(\frac{1}{r} + 1\right)} \\
&= 1
\end{aligned}$$

pois $0 < \gamma < \frac{1}{4}$. Isso juntamente com 4.30 mostra que f_γ é limitada, ou seja,

$$\frac{|r|^{2\gamma} + |r|}{1 + |r|} \leq \mathrm{c}_5(\gamma)$$

donde vem que

$$|r|^{2\gamma} \leq \mathrm{c}_5(\gamma)\frac{1 + |r|}{1 + |r|^{1-2\gamma}}. \tag{4.31}$$

Multiplicando 4.31 por $|\widehat{v}_m(r)|^2$ podemos escrever

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} |r|^{2\gamma}|\widehat{v}_m(r)|^2\,dr &\leq \mathrm{c}_5(\gamma)\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1+|r|}{1+|r|^{1-2\gamma}}|\widehat{v}_m(r)|^2\,dr\\
&= \mathrm{c}_5(\gamma)\int_{-\infty}^{\infty}\frac{|\widehat{v}_m(r)|^2}{1+|r|^{1-2\gamma}}\,dr+\mathrm{c}_5(\gamma)\int_{-\infty}^{\infty}\frac{|r||\widehat{v}_m(r)|^2}{1+|r|^{1-2\gamma}}\,dr\\
&\leq \mathrm{c}_5(\gamma)\int_{-\infty}^{\infty}|\widehat{v}_m(r)|^2\,dr+\mathrm{c}_5(\gamma)\int_{-\infty}^{\infty}\frac{|r||\widehat{v}_m(r)|^2}{1+|r|^{1-2\gamma}}\,dr
\end{aligned}$$

donde vem, pela identidade de Parseval (preliminar 1.9), que

$$\int_{-\infty}^{\infty} |r|^{2\gamma}|\widehat{v}_m(r)|^2\,dr \leq \mathrm{c}_5(\gamma)\int_{-\infty}^{\infty}|v_m(r)|^2\,dr+\mathrm{c}_5(\gamma)\int_{-\infty}^{\infty}\frac{|r||\widehat{v}_m(r)|^2}{1+|r|^{1-2\gamma}}\,dr.$$

Usando, respectivamente, a desigualdade de Poincaré (preliminar 1.8) e 4.29 na penúltima e última integrais acima obtemos

$$\int_{-\infty}^{\infty} |r|^{2\gamma}|\widehat{v}_m(r)|^2\,dr \leq \mathrm{c}_6(\gamma)\int_{-\infty}^{\infty}|\nabla v_m(r)|^2\,dr+\mathrm{c}_7(\gamma)\int_{-\infty}^{\infty}\frac{|\nabla\widehat{v}_m(r)|}{1+|r|^{1-2\gamma}}\,dr.$$

Pela estimativa 4.1.2 a segunda integral acima é limitada. Logo devemos mostrar que

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{|\nabla\widehat{v}_m(r)|}{1+|r|^{1-2\gamma}}\,dr \leq \text{Constante}.$$

Pela desigualdade de Holder (preliminar 1.5), temos

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{|\nabla\widehat{v}_m(r)|}{1+|r|^{1-2\gamma}}\,dr \leq \left(\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{(1+|r|^{1-2\gamma})^2}\,dr\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^T|\nabla\widehat{v}_m(r)|^2\,dr\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{4.32}$$

Começemos mostrando que a segunda integral em 4.32 é limitada. Fazendo a mudança de variável $s=-r$ temos

$$\int_{-\infty}^{-1}\frac{dr}{(1+|r|^{1-2\gamma})^2}=\int_{\infty}^{1}\frac{-ds}{(1+|s|^{1-2\gamma})^2}=\int_1^{\infty}\frac{ds}{(1+|s|^{1-2\gamma})^2}. \tag{4.33}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dr}{(1+|r|^{1-2\gamma})^2} &= \int_{-\infty}^{-1} \frac{dr}{(1+|r|^{1-2\gamma})^2} + \int_{-1}^{1} \frac{dr}{(1+|r|^{1-2\gamma})^2} + \\
&+ \int_{1}^{\infty} \frac{dr}{(1+|r|^{1-2\gamma})^2} \\
&= 2\int_{1}^{\infty} \frac{dr}{(1+|r|^{1-2\gamma})^2} + \int_{-1}^{1} \frac{dr}{(1+|r|^{1-2\gamma})^2} \\
&\leq 2\int_{1}^{\infty} \frac{dr}{(1+|r|^{1-2\gamma})^2} + \int_{-1}^{1} 1.\, dr \\
&= 2\int_{1}^{\infty} \frac{dr}{(1+r^{1-2\gamma})^2} + 2.
\end{aligned}$$

Observe agora que

$$\begin{aligned}
\int_{1}^{\infty} \frac{dr}{(1+r^{1-2\gamma})^2} &= \int_{1}^{\infty} \frac{dr}{1+2r^{1-2\gamma}+r^{2-4\gamma}} \\
&\leq \int_{1}^{\infty} \frac{dr}{r^{2-4\gamma}} \\
&= \lim_{a\to\infty} \int_{1}^{a} \frac{dr}{r^{2-4\gamma}} \\
&= \lim_{a\to\infty} \left(\frac{a^{4\gamma-1}}{4\gamma-1} - \frac{1}{4\gamma-1} \right).
\end{aligned}$$

Como $0 < \gamma < \frac{1}{4}$ temos que $4\gamma - 1 < 0$. Isso garante que o limite acima existe e é igual a $\frac{1}{1-4\gamma}$. Logo a segunda integral em 4.32 é limitada.

Consideremos agora a terceira integral em 4.32. Observamos inicialmente que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x_i}\widehat{v}_m(r) &= \frac{\partial}{\partial x_i}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi itr}\,\widetilde{v}_m(x,t)\,dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi itr}\,\frac{\partial}{\partial x_i}\widetilde{v}_m(x,t)\,dt \\
&= \widehat{\frac{\partial}{\partial x_i}v_m}(r).
\end{aligned}$$

Pela identidade de Parseval (preliminar 1.9), temos

$$\begin{aligned}
|\nabla\widehat{v}_m(r)|^2 &= \sum_{i=1}^{3}\left|\frac{\partial}{\partial x_i}\widehat{v}_m(r)\right|^2 \\
&= \sum_{i=1}^{3}\left|\widehat{\frac{\partial}{\partial x_i}\widetilde{v}_m}(r)\right|^2 \\
&= \sum_{i=1}^{3}\left|\frac{\partial}{\partial x_i}\widetilde{v}_m(r)\right|^2 \\
&= |\nabla\widetilde{v}_m(r)|^2.
\end{aligned}$$

Portanto, pela estimativa 4.1.2 a terceira integral em 4.32 é limitada. Consequentemente

$$\int_{-\infty}^{\infty} |r|^{2\gamma}|\widehat{v}_m(r)|^2\,dr \leq \text{Constante}.$$

Agora estamos em condições de provar a estimativa 4.1.3. Pela estimativa 4.1.2

$$\begin{aligned}
|\widetilde{v}_m(t)|^2_{L^2(\mathbb{R},V)} &= \int_{-\infty}^{\infty} |\widetilde{v}_m(t)|_V^2\,dt \\
&= \int_0^T |\nabla\widetilde{v}_m(t)|^2\,dt \\
&\leq \text{Constante}.
\end{aligned}$$

Pela identidade de Parseval (preliminar 1.9) temos:

$$
\begin{aligned}
|D_t^\gamma \widetilde{v}_m|^2_{L^2(\mathbb{R},H)} &= \int_{-\infty}^{\infty} |D_t^\gamma \widetilde{v}_m(t)|^2 \, dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \left|\widehat{D_t^\gamma \widetilde{v}_m}(r)\right|^2 \, dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} |2i\pi r|^{2\gamma} |\widehat{v}_m(r)|^2 \, dt \\
&= (2\pi)^{2\gamma} \int_{-\infty}^{\infty} |r|^{2\gamma} |\widehat{v}_m(r)|^2 \, dt \\
&\leq \text{Constante.}
\end{aligned}
$$

Assim, para $0 < \gamma < \frac{1}{4}$

$$
|\widetilde{v}_m|_{H^\gamma(\mathbb{R},V,H)} = \left\{ |\widetilde{v}_m|^2_{L^2(R,V)} + |D_t^\gamma \widetilde{v}_m|_{L^2(\mathbb{R},H)} \right\}^{\frac{1}{2}} \leq \text{Constante.}
$$

Isso mostra que $\{v_m\}$ é limitada em $H^\gamma(\mathbb{R}, V, H)$.

4.2 Solução em Dimensão Infinita

Nesta seção mostraremos o resultado principal desse trabalho. Observamos inicialmente que $L^2(0, T, V)$ é um espaço de Banach reflexivo. Isso, juntamente com a estimativa 4.1.2 garantem a existência de uma subsequência $\{v_{m_k}\} \subset L^2(0, T, V)$ que converge fracamente para v_1 (Ver EVANS [5], p. 570), ou seja,

$$
\{v_{m_k}\} \rightharpoonup v_1 \qquad \text{em} \qquad L^2(0, T, V).
$$

Já $L^\infty(0, T, H)$ é um espaço de Banach (não-reflexivo). Isso, juntamente com a estimativa 4.1.1 garantem a existência de uma subsequência $\{v_{m_k}\} \subset L^\infty(0, T, H)$ que converge fraco-estrela para v_2 (Ver BRÉZIS [2], p. 42), ou seja,

$$
\{v_{m_k}\} \xrightharpoonup[*]{} v_2 \qquad \text{em} \qquad L^\infty(0, T, H).
$$

A estimativa 4.1.3 juntamente com a preliminar 1.10 garantem a existência de uma subsequência $\{v_{m_k}\} \subset L^2(0,T,H)$ que converge fortemente, ou seja,

$$\{v_{m_k}\} \longrightarrow v_3 \qquad \text{em} \qquad L^2(0,T,H).$$

Observe que nas três convergências acima foi usada a mesma subsequência $\{v_{m_k}\}$. Isso é possível pois $V \subset H$. Basta considerar subsequência de subsequência, ou seja, para a subsequência convergente em $L^2(0,T,H)$ considere a subsequência (sequência) convergente em $L^\infty(0,T,H)$ e para esta, considere a sequência (subsequência) convergente em $L^2(0,T,V)$. Por comodidade considereraremos $v_{m_k} = v_m$.

De posse dessas três convergências uma pergunta surge naturalmente: tem-se $v_1 = v_2 = v_3$? A resposta é sim.

De fato, da primeira convergência, dado

$$v \in \left[L^2(0,T,V)\right]^{'} = L^2(0,T,V^{'})$$

tem-se

$$\left\langle v,\, v_m \right\rangle \longrightarrow \left\langle v,\, v_1 \right\rangle$$

donde vem que

$$\int_0^T \left\langle v(t),\, v_m(t) \right\rangle dt \longrightarrow \int_0^T \left\langle v(t),\, v_1(t) \right\rangle dt.$$

Por outro lado, $\langle f,\, u\rangle = (f,\, u),\ \forall f \in H$ e $\forall u \in V$ (Ver TEMAM [26] p. 248). Logo

$$\int_0^T \big(v(t),\, v_m(t)\big)\, dt \longrightarrow \int_0^T \big(v(t),\, v_1(t)\big)\, dt \qquad \forall v \in L^2(0,T,V^{'}). \quad (4.34)$$

A convergência forte em $L^2(0,T,H)$ implica na convergência fraca, ou seja,

$$\int_0^T \big(v(t),\, v_m(t)\big)\, dt \longrightarrow \int_0^T \big(v(t),\, v_3(t)\big)\, dt \qquad \forall v \in L^2(0,T,H). \quad (4.35)$$

Como $V \subset H \equiv H' \subset V'$, de 4.34 e 4.35 tem-se

$$\int_0^T \big(v(t),\, v_1(t)\big)\, dt = \int_0^T \big(v(t),\, v_3(t)\big)\, dt \qquad \forall v \in L^2(0,T,H).$$

Em particular $v_1 \in L^2(0,T,H)$. Assim, tomando $v(t) = v_1(t) - v_3(t)$ tem-se

$$\int_0^T \big|v_1(t) - v_3(t)\big|^2\, dt = 0$$

donde vem que

$$v_1 = v_3. \tag{4.36}$$

Da convergência fraco-estrela, dado $v \in L^1(0,T,H)$, tem-se

$$\big\langle v,\, v_m \big\rangle \longrightarrow \big\langle v,\, v_2 \big\rangle.$$

Daí, como em 4.34, obtem-se

$$\int_0^T \big(v(t),\, v_m(t)\big)\, dt \longrightarrow \int_0^T \big(v(t),\, v_2(t)\big)\, dt \qquad \forall v \in L^1(0,T,H). \tag{4.37}$$

De 4.34 e 4.37 segue-se que

$$\int_0^T \big(v(t),\, v_1(t)\big)\, dt = \int_0^T \big(v(t),\, v_2(t)\big)\, dt \qquad \forall v \in L^2(0,T,H)$$

pois $L^2(0,T,H) \subset L^2(0,T,V')$ e $L^2(0,T,H) \subset L^1(0,T,H)$. Daí, como em 4.36, $v_1 = v_2$.

Portanto

$$\begin{array}{llll} v_m \rightharpoonup v & \text{em} & L^2(0,T,V) \\ v_m \overset{*}{\rightharpoonup} v & \text{em} & L^\infty(0,T,H) \\ v_m \longrightarrow v & \text{em} & L^2(0,T,H). \end{array}$$

Vamos mostrar agora que v é solução da formulação variacional 3.7. Para tal consideramos a função $\psi \in \mathrm{C}^1[0,T]$ tal que $\psi(T) = 0$. Multiplicando 4.2

por $\psi(t)$ e integrando de 0 a T obtemos

$$\int_0^T \frac{d}{dt}(v_m(t),\, \psi(t)w_j)\, dt + \mu \int_0^T ((v_m(t),\, \psi(t)w_j))\, dt +$$

$$+\int_0^T b(v_m(t),\, v_m(t), \psi(t)w_j)\, dt = \int_0^T \langle f(t),\, \psi(t)w_j\rangle\, dt. \tag{4.38}$$

Integrando por partes a primeira integral acima obtemos

$$\begin{aligned}
\int_0^T \frac{d}{dt}\big(v_m(t), \psi(t)w_j\big)\, dt &= (v_m(t),\, \psi(t)w_j)\Big|_0^T - \int_0^T (v_m(t), \psi^{'}(t)w_j)\, dt \\
&= \big(v_m(T), \psi(T)w_j\big) - \big(v_m(0), \psi(0)w_j\big) - \\
&- \int_0^T (v_m(t), \psi^{'}(t)w_j)\, dt \\
&= -\big(v_m(0), \psi(0)w_j\big) - \int_0^T (v_m(t), \psi^{'}(t)w_j)\, dt
\end{aligned}$$

já que $\psi(T) = 0$. Logo 4.38 pode ser escrito como

$$-\int_0^T (v_m(t),\, \psi^{'}(t)w_j)\, dt + \mu \int_0^T (\nabla v_m(t),\, \nabla\psi(t)w_j)\, dt +$$

$$+\int_0^T b(v_m(t),\, v_m(t), \psi(t)w_j)\, dt = \int_0^T \langle f(t),\, \psi(t)w_j\rangle\, dt + \big(v_{0m},\, \psi(0)w_j\big).$$

Fazendo $m \longrightarrow \infty$ devemos mostrar que

$(i) \displaystyle\int_0^T (v_m(t),\, \psi^{'}(t)w_j)\, dt \longrightarrow \int_0^T (v(t),\, \psi^{'}(t)w_j)\, dt.$

De fato, aplicando a desigualdade de Holder (preliminar 1.5) na variável espacial x e depois na variável t obtemos

$$\begin{aligned}
\left|\int_0^T (v_m,\, \psi' w_j)\, dt - \int_0^T (v,\, \psi' w_j)\, dt\right| &= \left|\int_0^T (v_m - v,\, \psi' w_j)\, dt\right| \\
&\leq \int_0^T \int_\Omega \big|(v_m - v)\psi' w_j\big| dx\, dt \\
&\leq \int_0^T \big|v_m - v\big|_{L^2} \big|\psi' w_j\big|_{L^2}\, dt \\
&\leq \left(\int_0^T \big|v_m - v\big|_{L^2}^2\, dt\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^T \big|\psi' w_j\big|_{L^2}^2\, dt\right)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Observamos que, sendo $w_j = w_j(x)$ e $\psi \in \mathrm{C}^1[0,T]$, temos que

$$\left(\int_0^T \big|\psi' w_j\big|_{L^2}^2\, dt\right)^{\frac{1}{2}} = \mathrm{K} \qquad \text{(Constante)}$$

Além disso, pela convergência forte de $\{v_m\}$ em $L^2(0,T,H)$, dado $\epsilon > 0$ existe n_0 tal que, $\forall n > n_0$ tem-se

$$\int_0^T \big|v_m - v\big|_{L^2}^2\, dt < \frac{\epsilon^2}{\mathrm{K}^2}$$

donde vem que

$$\left|\int_0^T (v_m,\, \psi' w_j)\, dt - \int_0^T (v,\, \psi' w_j)\, dt\right| < \epsilon$$

e (i) está provado.

(ii) $\displaystyle\int_0^T \big(\nabla v_m(t), \nabla\psi(t) w_j\big)\, dt \longrightarrow \int_0^T \big(\nabla v(t), \nabla\psi(t) w_j\big)\, dt.$

Inicialmente observe que $\psi w_j \in L^2(0,T,V)$ já que

$$|\psi w_j|_{L^2(0,T,V)} = \int_0^T |\psi w_j|_V^2\, dt = \int_0^T |\psi|^2 |w_j|_V^2\, dt = |w_j|_V^2 \int_0^T |\psi|^2\, dt < \infty$$

pois $w_j \in V$ e $\psi \in \mathrm{C}^1[0,T]$. Assim, como $V \subset V'$ temos que

$$\psi w_j \in \big[L^2(0,T,V)\big]' = L^2(0,T,V').$$

Daí, pela convergência fraca de $\{v_m\}$ em $L^2(0,T,V)$ temos

$$\big\langle \psi w_j,\, v_m \big\rangle \longrightarrow \big\langle \psi w_j,\, v \big\rangle \qquad \text{em} \qquad L^2(0,T,V).$$

Pelo teorema da representação de Riesz (preliminar 1.11) temos

$$\big(v_m(t),\, \psi(t) w_j\big)_{L^2(0,T,V)} \longrightarrow \big(v(t),\, \psi(t) w_j\big)_{L^2(0,T,V)}$$

ou seja,

$$\int_0^T \big(v_m(t),\, \psi(t) w_j\big)_V \, dt \longrightarrow \int_0^T \big(v(t),\, \psi(t) w_j\big)_V \, dt$$

donde vem que

$$\int_0^T \big(\nabla v_m(t),\, \nabla \psi(t) w_j\big) \, dt \longrightarrow \int_0^T \big(\nabla v(t),\, \nabla \psi(t) w_j\big) \, dt.$$

(iii) $\displaystyle\int_0^T b(v_m(t),\, v_m(t), \psi(t) w_j) \, dt \longrightarrow \int_0^T b(v(t),\, v(t), \psi(t) w_j) \, dt.$

Para demonstrar essa convergência vamos usar o seguinte lema:

Lema 4.1. *Se uma sequência $\{v_m\}$ converge para v em $L^2(0,T,H)$ fortemente então para cada vetor w com componentes em $C^1(\overline{Q})$ tem-se,*

$$\int_0^T b(v_m(t),\, v_m(t), w(t)) \, dt \longrightarrow \int_0^T b(v(t),\, v(t), w(t)) \, dt$$

onde $\overline{Q}$ é o fecho de $[0,T] \times \Omega$.

Demonstração:

Pelo lema 3.2 podemos escrever

$$\int_0^T b(v_m,\, v_m,\, w) \, dt = -\int_0^T b(v_m, w,\, v_m) \, dt = -\sum_{i,j=1}^n \int_0^T \int_\Omega (v_m)_i \frac{\partial w_j}{\partial x_i} (v_m)_j \, dx dt.$$

Observamos agora que

$$\left|\int_\Omega (v_m)_i \,\frac{\partial w_j}{\partial x_i}\,(v_m)_j\,dx - \int_\Omega v_i\,\frac{\partial w_j}{\partial x_i}\,v_j\,dx\right| =$$

$$= \left|\int_\Omega \left((v_m)_i \,\frac{\partial w_j}{\partial x_i}\,(v_m)_j - v_i\frac{\partial w_j}{\partial x_i}(v_m)_j\right)dx + \int_\Omega \left(v_i\frac{\partial w_j}{\partial x_i}(v_m)_j - v_i\,\frac{\partial w_j}{\partial x_i}\,v_j\right)dx\right|$$

$$\leq \underbrace{\int_\Omega \left|(v_m)_i \,\frac{\partial w_j}{\partial x_i}\,(v_m)_j - v_i\frac{\partial w_j}{\partial x_i}(v_m)_j\right| dx}_{(*)} + \underbrace{\int_\Omega \left|v_i\frac{\partial w_j}{\partial x_i}(v_m)_j - v_i\,\frac{\partial w_j}{\partial x_i}\,v_j\right| dx}_{(**)}.$$

Consideremos o termo em $(*)$. Agrupando os termos semelhantes e usando a Desigualdade de Holder na variável x obtemos

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \left|(v_m)_i \,\frac{\partial w_j}{\partial x_i}\,(v_m)_j - v_i\frac{\partial w_j}{\partial x_i}(v_m)_j\right| dx &\leq \int_\Omega |(v_m)_i - v_i|\left|\frac{\partial w_j}{\partial x_i}\right| |(v_m)_j| dx \\
&\leq \max_{\substack{1\leq i,j\leq n \\ x\in\Omega}} \left|\frac{\partial w_j}{\partial x_i}\right| \int_\Omega |(v_m)_i - v_i||(v_m)_j| dx \\
&\leq \max_{\substack{1\leq i,j\leq n \\ x\in\Omega}} \left|\frac{\partial w_j}{\partial x_i}\right| \big|(v_m)_i - v_i\big|_{L^2(\Omega)} \big|(v_m)_j\big|_{L^2(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Integrando no tempo e usando a Desigualdade de Holder na variável t temos

$$\begin{aligned}
\left|\int_0^T \int_\Omega \left((v_m)_i \,\frac{\partial w_j}{\partial x_i}\,(v_m)_j - v_i\frac{\partial w_j}{\partial x_i}(v_m)_j\right) dxdt\right| &\leq C\int_0^T \big|(v_m)_i - v_i\big|_{L^2(\Omega)} \big|(v_m)_j\big|_{L^2(\Omega)} dt \\
&\leq C\big|(v_m)_i - v_i\big|_{L^2(0,T,H)} \big|(v_m)_j\big|_{L^2(0,T,H)}.
\end{aligned} \tag{4.39}$$

Considerando o termo em $(**)$ analogamente mostra-se que

$$\left|\int_0^T \int_\Omega \left(v_i\frac{\partial w_j}{\partial x_i}(v_m)_j - v_i\,\frac{\partial w_j}{\partial x_i}\,v_j\right) dxdt\right| \leq C\big|(v_m)_j - v_j\big|_{L^2(0,T,H)} \,|v_i|_{L^2(0,T,H)}. \tag{4.40}$$

Assim de 4.39 e 4.40 temos

$$\int_0^T b(v_m(t),\, v_m(t), w(t))\,dt \longrightarrow \int_0^T b(v(t),\, v(t), w(t))\,dt$$

pois $\{v_m\}$ converge para v em $L^2(0,T,H)$ e é limitada nesse espaço.

Portanto, considerando $w(t) = \psi(t) w_j$ no lema 4.1 (iii) está provado pois $\psi \in C^1[0,T]$ e $w_j \in V^*$.

(iv) $(v_{om},\, w_j)\psi(0) \longrightarrow (v_o,\, w_j)\psi(0)$.

De fato,

$$\begin{aligned}
|(v_{0m},\, w_j)\psi(0) - (v_0,\, w_j)\psi(0)| &= |(v_{0m} - v_0,\, w_j)\psi(0)| \\
&= |\psi(0)||(v_{0m} - v_0,\, w_j)| \\
&\leq |\psi(0)||v_{0m} - v_0||w_j|
\end{aligned}$$

e o resultado se segue pois $\{v_{0m}\}$ converge fortemente para v_0 em H.

Portanto, dado $m,\, j \in \mathbb{N}$, com $m \geq j$ e fazendo $m \longrightarrow \infty$ temos:

$$-\int_0^T (v(t),\, \psi^{'}(t) w_j)\, dt + \mu \int_0^T (\nabla v(t),\, \psi(t) \nabla w_j)\, dt +$$

$$+\int_0^T b(v(t),\, v(t), \psi(t) w_j)\, dt = \int_0^T \langle f(t),\, \psi(t) w_j \rangle\, dt + \big(v_o,\, w_j\big)\psi(0) \quad (4.41)$$

para todo $w_1, \ldots, w_j$.

Por outro lado, a equação 4.41 é linear em $w_j = w_j(x)$. Logo ela é válida para toda combinação linear finita de w_j.

Além disso, $w_j \in V^*$ que é um conjunto denso em V. Daí, $\forall u \in V$, $\exists (w_{n_k})$ subsequência de $\{w_1, w_2, ...\}$ tal que

$$\lim_{k \to +\infty} w_{n_k} = u \qquad \text{em} \qquad V$$

donde podemos escrever

$$-\int_0^T (v(t),\, \psi^{'}(t) u)\, dt + \mu \int_0^T (\nabla v(t),\, \psi(t) \nabla u)\, dt +$$

$$+\int_0^T b(v(t),\, v(t), \psi(t)u)\, dt = \int_0^T \langle f(t),\, \psi(t)u\rangle\, dt + \big(v_o,\, u\big)\psi(0) \qquad \forall u \in V. \tag{4.42}$$

Considere agora $\psi \in D\big((0,T)\big)$. Multiplicando a formulação variacional 3.7 por $\psi(t)$ e integrando de 0 a T obtemos 4.42, isto é, v satisfaz a formulação variacional no sentido das distribuições.

Temos que provar ainda que $v(0) = v_0$. Para isto considere a formulação variacional

$$\frac{d}{dt}(v,u) + \mu((v,u)) + b(v,v,u) = \langle f,u\rangle \quad \forall u \in V.$$

Multiplicando esta equação por $\psi(t)$ e integrando de 0 a T obtemos

$$\int_0^T \frac{d}{dt}(v(t),\psi(t)u)dt + \mu\int_0^T (\nabla v(t),\psi(t)\nabla u)dt +$$

$$+\int_0^T b(v(t),v(t),\psi(t)u)dt = \int_0^T \langle f(t),\psi(t)u\rangle\, dt.$$

Integrando por partes a primeira integral acima temos

$$-\int_0^T (v(t),\psi^{'}(t)u)dt + \mu\int_0^T (\nabla v(t),\psi(t)\nabla u)dt + \int_0^T b(v(t),v(t),\psi(t)u)dt =$$

$$= \int_0^T \langle f(t),\psi(t)u\rangle\, dt + \big(v(0),\, u\big)\psi(0). \tag{4.43}$$

Comparando 4.42 e 4.43 obtemos

$$\big(v(0),\, u\big)\psi(0) = \big(v_0,\, u\big)\psi(0) \qquad \forall u \in V.$$

Seja ψ tal que $\psi(0) \neq 0$. Assim

$$\big(v(0) - v_0,\, u\big) = 0 \qquad \forall u \in V.$$

Observe que $v(0) - v_0$ é um elemento de H. Logo, como V é denso em H, $\exists\, v_m \in V$ tal que

$$v_m \longrightarrow v(0) - v_0 \qquad \text{em} \quad \text{H}$$

donde vem que

$$\lim_{m\to+\infty}(v_m,\, v(0)-v_0) = (v(0)-v_0,\, v(0)-v_0) = 0$$

pois

$$\begin{aligned}\big|(v_m, v(0)-v_0) - (v(0)-v_0, v(0)-v_0)\big| &= \big|(v_m - (v(0)-v_0), v(0)-v_0\big| \\ &\leq \big|v_m - (v(0)-v_0)\big|\big|v(0)-v_0\big|.\end{aligned}$$

Segue daí que

$$\big|v(0)-v_0\big|^2 = 0$$

donde vem que

$$v(0) = v_0$$

e a prova do teorema 3.1 se completa.

Conclusão

Neste trabalho vimos que a função fluxo e o campo de velocidades descrevem matematicamente o movimento de um fluido. De posse destas descrições, através da lei da conservação da massa, da segunda lei de Newton (que são as leis físicas que amparam o uso das equações de Navier-Stokes em modelagem de fenômenos físicos) e do Teorema do Transporte, deduzimos as equações de Navier-Stokes para fluidos incompressíveis.

O objetivo central foi dar a formalação variacional das equações de Navier-Stokes e obter soluções para esta formulção em domínio limitado com fronteira regular. Para a existência desta solução foi usado o método de Galerkin.

Vimos que a solução em dimensão infinita consistiu-se na dificuldade maior deste trabalho. Esta solução só foi possível devido às estimativas a priori obtidas das soluções em dimensão finita.

Procuramos tratar o sistema de equações de forma detalhada e com o rigor que ele merece, porém em momento algum tivemos a intenção de esgotar o assunto. Assim, esperamos que este trabalho sirva como fonte de consulta e forneça subsídios para trabalhos futuros mais avançados na área.

Referências Bibliográficas

[1] ADAMS, R., *Sobolev Spaces*. New York: Academic Press, 1975.

[2] BRÉZIS, H., *Análisis Funcional – Teoría y Aplicaciones*. Madrid: Alianza Editorial, 1984.

[3] CATTANI, M. S. D., *Elementos de Mecânica de Fluidos*. São Paulo: Edgard Blücher Ltda, 1989.

[4] CODDINGTON, E. A., *Theory of Ordinary Differential Equations*. TMH, 1977.

[5] EVANS, L. C., *Berkeley Mathematics Lecture Notes*. Partial Differential Equations, 1993.

[6] FEIJÓO, R. A., *Introducción a Mecánica del Contínuo*. Rio de Janeiro: Notas de Aula, 1977.

[7] FIGUEIREDO, D. G., *Análise de Fourier e Eqauções Diferenciais Parciais*. Rio de janeiro: IMPA, 1977.

[8] FOIAS, C. & TEMAM, R., *Some Analitic and Geometric Properties of the Solutions of Evolution Navier-Stokes Equations*. J. MATH. PURES et APPL. n^o 58, 1979; p. 339-368.

[9] FOX, R. W. & McDONALD, A. T., *Introdução a Mecânica dos Fluidos*. Rio de Janeiro: Guanabara, 1985.

[10] GURTIN, M. E. & MARTINS, L. C., *Cauchy's Theorem in Classical Physics*. Arch. Rat. Mech. Anal. 60 (305-324), 1976.

[11] HÖNIG, C. S., *Análise Funcional e o Problema de Sturm-Liouville*. São Paulo: Edgard Blücher, 1978.

[12] HOUNIE, J., *Teoria Elementar das Distribuições*. Rio de Janeiro: IMPA, 1979.

[13] IÓRIO, V., *EDP, Um Curso de Graduação*, 2^a ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2005.

[14] KREISS, H.O. & LORENZ J., *Initial-Boundary Value Problems and the Navier-Stokes Equations*. Boston: Academic Press, 1989.

[15] KREYSZIG, E., *Introductory Functional Analysis with Applications*. United States of America: Wiley Classics Library, 1978.

[16] LIMA, E. L., *Análise Real*. Volume 2. Rio de Janeiro: SBM, 1985.

[17] LIMA, E. L., *Curso de Análise vol. 2*. Rio de Janeiro: IMPA, 2005.

[18] LIMA, E. L., *Espaços Métricos*. Rio de Janeiro: IMPA, 2005.

[19] LUKASZCZYK, J. P. & FIOREZE, L. A., *Equação de Burgues em um Domínio Arbitrário*. Tendências em Matemática Aplicada e Computacional, 3, N^o 1, 2002.

[20] MEDEIROS, L. A. & MELLO, E. A., *A Integral de Lebesgue*. Paraíba: Universitária.

[21] MEDEIROS, L. A. & MIRANDA, M. M., *Introdução aos Espaços de Sobolev e às Equações Diferenciais Parciais*. Rio de janeiro: Notas de Aula, 1989.

[22] MELO, S. T. & NETO, F. M., *Mecânica dos Fluidos e Equações Diferenciais*. Rio de Janeiro: IMPA, 2000.

[23] SPIEGEL, M. R., *Análise de Fourier*. São Paulo: McGraw-Hill do Brasil, 1977.

[24] SOTOMAYOR, J., *Lições de Equações Diferenciais Ordinárias*. Rio de Janeiro: IMPA, 1979.

[25] SWOKOWSKI, E. W., *Cálculo com Geometria Analítica*. Volume 2. São Paulo: Makron Books, 1994.

[26] TEMAN, R., *Navier-Stokes Equations − Theory and Numerical Analisys*. New York: North-Holland Publishing Company, 1979.

[27] ZYGMUND, A., *Trigonometric Series*. Volumer 1. New York: Cambridge at the University Press, 1959.