

Universidade Federal de Santa Maria
Centro de Ciências Naturais e Exatas
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Superfícies duplamente conexas de curvatura média constante com bordo prescrito em planos paralelos

Rodrigo Barbosa Soares †

Mestrado em Matemática - Santa Maria - RS

Orientador: Prof. Dr. Ari João Aiolfi

†Este trabalho teve apoio financeiro da CAPES.

Superfícies duplamente conexas de curvatura média constante com bordo prescrito em planos paralelos

Este exemplar corresponde à redação final corrigida da dissertação defendida por **Rodrigo Barbosa Soares** e aprovada pela comissão julgadora.

Santa Maria, 12 de dezembro de 2008.

Prof. Dr. **Ari João Aiolfi**.

Orientador

Banca examinadora:

Prof. Dr. Ari João Aiolfi (Orientador, CCNE - UFSM)

Prof. Dr. Pedro Fusieger (CCNE - UFSM)

Prof. Dr. Jaime Bruck Ripoll (PPGMat - UFRGS)

Prof. Dra. Celene Buriol (CCNE - UFSM)

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, UFSM, como requisito parcial para obtenção do título de **Mestre em Matemática**.

Resumo

Neste trabalho apresentamos alguns resultados de existência de superfícies de curvatura média constante em \mathbb{R}^3 com bordo prescrito em planos paralelos, topologicamente um anel, que são obtidos através da resolução de problemas de Dirichlet para a equação das superfícies de curvatura média constante para gráficos ou para gráficos radiais.

Abstract

In this work we presented some existence results about constant mean curvature surfaces in \mathbb{R}^3 with prescribed boundary in parallel planes, topologically an annulus, that are obtained by solving Dirichlet's problems for the constant mean curvature surfaces equation for graphs or for radial graphs.

Sumário

Sumário	iii
Introdução	1
1 Preliminares	3
1.1 Gráficos de Curvatura Média Constante	3
1.1.1 O Método de Perron	5
1.2 Gráficos radiais de curvatura média constante	9
1.2.1 O operador curvatura média constante para gráficos radiais . .	10
1.2.2 Alguns teoremas básicos para gráficos radiais de cmc e o método da continuidade	12
2 Construção de barreiras	23
2.1 O catenóide	23
2.2 A superfície de Delaunay	27
2.3 Alguns lemas básicos	32
3 Superfícies mínimas duplamente conexas com bordo prescrito em planos paralelos	43
3.1 Um resultado de existência para gráficos mínimos	43
3.2 Resultados de existência para gráficos mínimos radiais	48
4 Superfícies duplamente conexas de cmc $H > 0$ com bordo prescrito em planos paralelos	53
4.1 Anéis radiais de cmc $H > 0$	53
4.2 Anéis de cmc $H > 0$ dados como gráficos euclidianos	76

Introdução

Este trabalho foi motivado pela seguinte questão:

Dadas duas curvas de Jordan γ_1 e γ_2 em planos paralelos distintos π_1 e π_2 respectivamente, existe uma superfície de curvatura média constante, topologicamente um anel, que tem por bordo tais curvas?

Antonio Ros e Harold Rosenberg em [14] conjecturaram que, para γ_1 e γ_2 convexas, a resposta seria afirmativa. Ressaltamos que, no entanto, tal questão continua em aberto mesmo para o caso onde γ_1 e γ_2 são convexas.

A existência de superfícies com curvatura média constante, tendo como bordo duas curvas dadas γ_1 e γ_2 , contidas em planos paralelos distintos vem sendo objeto de vários estudos há muito tempo, especialmente o caso $H = 0$. Os catenóides e, mais geralmente, as superfícies mínimas de Riemann, são exemplos famosos nos quais γ_1 e γ_2 são círculos. Shiffman em [15] provou que a intersecção de um anel mínimo cujo bordo são duas curvas convexas γ_1 e γ_2 , com um plano paralelo ao plano que contém γ_1 e γ_2 , é uma curva convexa. No caso particular onde γ_1 e γ_2 são círculos, Shiffman provou que a intersecção também são círculos, mostrando que os exemplos de Riemann são únicos. Meeks e White em [12] provaram que ou $\gamma_1 \cup \gamma_2$ não é o bordo de nenhuma superfície mínima conexa compacta ou $\gamma_1 \cup \gamma_2$ é o bordo de exatamente um anel mínimo ou $\gamma_1 \cup \gamma_2$ é o bordo de exatamente dois anéis mínimos.

Nesta dissertação exploramos uma série de resultados que estabelecem condições sob as quais podemos esperar uma resposta positiva para a questão levantada acima.

De modo geral, os teoremas principais desta dissertação tratam de resultados de existência de superfícies de curvatura média constante em \mathbb{R}^3 , topologicamente um anel, com bordo prescrito e em planos paralelos, obtidos através de aplicações

de técnicas de Equações Diferenciais Parciais Elípticas, quase sempre através da resolução de problemas de Dirichlet para a equação das superfícies de curvatura média constante para gráficos euclidianos ou para gráficos radiais.

Veremos que as hipóteses envolvidas estão relacionadas com a geometria das curvas dadas e a distância entre os planos. Além disso, a escolha da técnica adequada está diretamente relacionada a configuração das curvas γ_1 e γ_2 . Lidaremos com 3 situações distintas: quando a projeção ortogonal γ_1^* de γ_1 sobre o plano que contém γ_2 está contida na região limitada do plano limitada por γ_2 , atacamos a questão via resolução de um problema de Dirichlet para a equação das superfícies de curvatura média constante para gráficos euclidianos; quando γ_1^* coincide com γ_2 , ou quando γ_1^* intercepta o interior da região limitada do plano limitada por γ_2 mas não está contida nesse interior, atacaremos a questão resolvendo um problema de Dirichlet para a equação das superfícies de curvatura média constante para gráficos radiais. O caso onde γ_1^* está contida no exterior da região limitada do plano limitada por γ_2 não será explorado.

Dividimos esta dissertação em 4 capítulos. Durante o Capítulo 1 exibimos os operadores curvatura média constante para gráficos euclidianos e para gráficos radiais e apresentamos um resumo da teoria relativa a estes operadores necessária para o restante do texto, e que tem [10] e [9] como principais referências. No Capítulo 2 tratamos de alguns resultados úteis para a construção de barreiras relativas aos operadores acima citados. No Capítulo 3 exploramos alguns teoremas de existência de superfícies mínimas, topologicamente um anel, com bordo prescrito em planos paralelos, e que tem por referências principais os trabalhos [6] e [9]. Já no Capítulo 4, lidamos com superfícies de curvatura média constante $H > 0$: dadas como gráficos radiais, na Seção 4.1, cujas principais referências são os artigos [3], [2]; dadas como gráficos euclidianos, na Seção 4.2, cuja referência é [6].

Capítulo 1

Preliminares

O estudo de problemas envolvendo existência e unicidade de superfícies com curvatura média constante em \mathbb{R}^3 com bordo prescrito, dadas como gráficos euclidianos verticais ou gráficos radiais, requer o conhecimento de uma série de resultados relacionados à teoria de operadores diferenciais parciais de segunda ordem. Trataremos desta teoria neste capítulo, onde exploraremos com especial interesse o Método de Perron e o Método da Continuidade, devido a sua aplicabilidade às demonstrações dos principais resultados envolvidos neste trabalho.

1.1 Gráficos de Curvatura Média Constante

Seja $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície regular e N um campo de vetores unitários normais a S . Dado $p \in S$, seja $\Phi : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ uma parametrização local de S em torno de p . Pondo $q = \Phi^{-1}(p)$ e

$$N(p) = \frac{-(\Phi_x(q) \wedge \Phi_y(q))}{|\Phi_x(q) \wedge \Phi_y(q)|},$$

o número

$$H(p) = \frac{eG - 2fF + gE}{2(EG - F^2)}(p), \quad (1.1.1)$$

onde $E = \langle \Phi_x, \Phi_x \rangle$, $F = \langle \Phi_x, \Phi_y \rangle$, $G = \langle \Phi_y, \Phi_y \rangle$, $e = \langle N, \Phi_{xx} \rangle$, $f = \langle N, \Phi_{xy} \rangle$ e $g = \langle N, \Phi_{yy} \rangle$, é chamado curvatura média de S em p , relativo a normal N .

Dado $H \in \mathbb{R}$, dizemos que S tem curvatura média constante (cmc) igual a H se, e somente se, $H(p) = H$ para todo $p \in S$.

Dados $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ um domínio (subconjunto aberto e conexo), e uma função $u : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 , que denotaremos por $u \in C^2(\Omega)$, o gráfico (vertical) de u dado por

$$\text{graf}(u) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in \Omega \text{ e } z = u(x, y)\}$$

é uma superfície regular contida no \mathbb{R}^3 .

Proposição 1.1.1. *Dado $H \in \mathbb{R}$ e $u \in C^2(\Omega)$, onde Ω é um domínio limitado, as seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) *graf*(u) tem curvatura média constante H com relação a N , onde $\langle N, e_3 \rangle \leq 0$, $e_3 = (0, 0, 1)$;

(ii) $Q_H(u) = (1 + u_y^2)u_{xx} - 2u_xu_yu_{xy} + (1 + u_x^2)u_{yy} + 2H(1 + |\nabla u|^2)^{3/2} = 0$;

(iii) $\text{div} \left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} \right) + 2H = 0$.

Demonstração. Basta supor H constante em (1.1.1), considerar a parametrização $\Phi : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ do gráfico de u dada por $\Phi(x, y) = (x, y, u(x, y))$ e desenvolver (1.1.1) usando estes dados. \square

Nos resultados que estamos interessados, para dado H , não nos basta encontrar $u \in C^2(\Omega)$ que satisfaça a equação (iii) da Proposição 1.1.1, já que a função u deve assumir um valor prescrito em $\partial\Omega$, isto é, estamos interessados na solução do seguinte sistema

$$\begin{cases} u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega}) \\ Q_H(u) = \text{div} \left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} \right) + 2H = 0 \quad , \\ u|_{\partial\Omega} = \varphi \end{cases} \quad (1.1.2)$$

onde $\varphi \in C^0(\partial\Omega)$ é dada *a priori*.

O problema de determinar a existência e unicidade de (1.1.2) é conhecido como problema de Dirichlet para equação das superfícies de curvatura média constante. Ressaltamos que na maioria dos resultados relacionados com gráficos euclidianos com que trabalharemos, lidaremos com problema (1.1.2) em domínios e dados no

bordo bem comportados (no mínimo de classe $C^{2,\alpha}$, onde $\alpha \in (0, 1)$ é o coeficiente de Hölder).

1.1.1 O Método de Perron

Uma técnica usualmente aplicada à situação em (1.1.2) chama-se Método de Perron, cujo desenvolvimento consiste principalmente em determinar a existência de funções conhecidas como sub e supersoluções, cuja definição segue:

Definição 1.1.2. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ um domínio. Uma função $s \in C^0(\Omega)$ é uma subsolução (supersolução) de Q_H se, dado qualquer subdomínio $D \subset\subset \Omega$, se $v \in C^2(D) \cap C^0(\overline{D})$ satisfaz $Q_H(v) = 0$ em D e $v|_{\partial D} \geq s|_{\partial D}$ ($v|_{\partial D} \leq s|_{\partial D}$), então $v|_D \geq s|_D$ ($v|_D \leq s|_D$).*

A importância dada à obtenção dessas funções (sub-super) justifica-se devido ao fato que uma possível solução para (1.1.2) pode ser vislumbrada através do teorema abaixo.

Teorema 1.1.3. *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ um domínio, $\varphi \in C^0(\partial\Omega)$ e seja $u : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por*

$$u(x) = \sup\{v(x) \mid v \in C^0(\overline{\Omega}) \text{ é subsolução} \quad (1.1.3)$$

$$\text{de } Q_H \text{ e } v|_{\partial\Omega} \leq \varphi\},$$

então $u \in C^2(\Omega)$ e $Q_H(u) = 0$.

Demonstração. Ver Teorema 4.1 de [7]. □

Observe que u estará bem definida se o conjunto formado pelas subsoluções $v \in C^0(\overline{\Omega})$ de Q_H tais que $v|_{\partial\Omega} \leq \varphi$ for não vazio e, além disso, limitado superiormente, o que é possível garantir através da exibição de sub e supersoluções para Q_H . A solução proposta pelo Teorema 1.1.3 não fornece o comportamento da função u em $\partial\Omega$, mas é possível obtê-la através da técnica de barreiras, fundamentada também na noção de sub e supersoluções, de acordo com a seguinte definição:

Definição 1.1.4. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ um domínio e seja $p \in \partial\Omega$. Dizemos que $\varphi \in C^0(\partial\Omega)$ é regular em p (ou que φ admite barreiras em p) relativamente ao operador Q_H , se existem super e subsoluções $S_p, s_p \in C^0(\overline{\Omega})$ de Q_H tais que*

$$s_p \leq \varphi \leq S_p$$

em $\partial\Omega$ e

$$s_p(p) = \varphi(p) = S_p(p).$$

Dizemos que $\varphi \in C^0(\partial\Omega)$ é regular relativamente a Q_H se é regular em p para todo $p \in \partial\Omega$.

Segue-se então um critério de forma a estabelecer o comportamento de (1.1.3) em $\partial\Omega$.

Lema 1.1.5. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ um domínio. Se $\varphi \in C^0(\partial\Omega)$ é regular e se $u \in C^0(\Omega)$ é dada por (1.1.3) então $u \in C^0(\overline{\Omega})$ e $u|_{\partial\Omega} = \varphi$.*

Demonstração. Veja Lema 1.4 de [5]. □

Como consequência do Teorema 1.1.3 e do Lema 1.1.5, obtemos:

Teorema 1.1.6. *Sejam Ω um domínio limitado de classe C^0 em \mathbb{R}^2 , $\varphi \in C^0(\partial\Omega)$ e $H \geq 0$. Suponha que φ seja regular relativamente a Q_H . Então u dada por (1.1.3) satisfaz $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$, $Q_H(u) = 0$ em Ω e $u|_{\partial\Omega} = \varphi$.*

O método dado pelo Teorema 1.1.6, é conhecido por Método de Perron.

Quanto à aplicabilidade de tal método ao problema (1.1.2), duas condições se fazem necessárias:

- i. Dado $x \in \Omega$, existe um aberto $U \subset \Omega$ com $x \in U$ tal que dada $\sigma \in C^0(\partial U)$, existe uma solução $v \in C^2(U) \cap C^0(\overline{U})$ de $Q_H = 0$ em U tal que $v|_{\partial U} = \sigma$
- ii. Se $v_n \in C^2(U)$ é uma sequência de soluções de $Q_H = 0$ em U uniformemente limitada, então existe uma subsequência de v_n convergido uniformemente em compactos de U a uma solução $u \in C^2(U)$ de $Q_H = 0$.

Observamos que a primeira condição acima é satisfeita devido ao Teorema 16.11 e a segunda o é através do Corolário 16.7, ambos de [10].

Portanto, o trabalho maior quando se trata da resolução de sistemas como em (1.1.2), aparece no momento de garantir a regularidade de $\varphi \in C^0(\partial\Omega)$ através da construção de barreiras.

O papel desempenhado pelos resultados abaixo, é o de garantir se uma determinada função, sob certas condições, pode ser definida como sub ou supersolução.

Teorema 1.1.7. *Suponhamos que $u, v \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ são tais que $Q_H(u) \geq Q_H(v)$ no domínio Ω , então*

$$\sup_{\Omega} (u - v) = \sup_{\partial\Omega} (u - v),$$

em particular, se $u \leq v$ em $\partial\Omega$ temos $u \leq v$ em Ω .

Demonstração. Veja [4] p. 20, 27, 28 e também p. 33, 34 de [10]. □

Lema 1.1.8. *Dado $H \in \mathbb{R}$ não negativo, para toda solução $v \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ de $Q_h = 0$ com $h \in [0, H]$, temos $Q_H(v) \geq 0$ em Ω .*

Demonstração. Como $Q_h(v) = 0$, então

$$Q_h(v) = \operatorname{div} \left(\frac{\nabla v}{\sqrt{1 + |\nabla v|^2}} \right) + 2h = 0,$$

logo

$$-2h = \operatorname{div} \left(\frac{\nabla v}{\sqrt{1 + |\nabla v|^2}} \right).$$

Por outro lado

$$\begin{aligned} Q_H(v) &= \operatorname{div} \left(\frac{\nabla v}{\sqrt{1 + |\nabla v|^2}} \right) + 2H = \\ &= -2h + 2H = -2(h - H), \end{aligned}$$

e como $h \leq H$ então $Q_H(v) \geq 0$. □

O resultado específico que segue também é muito utilizado na construção de barreiras.

Lema 1.1.9. *Seja $K \subset \mathbb{R}^3$ um cone com vértice $V = (0, 0, a)$, $a > 0$ e base circular $C \subset \{z = 0\}$ cujo raio é r . Seja $v : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ a função cujo gráfico é a parte do cone K situada acima do plano $z=0$, onde Ω representa o disco aberto limitado por C . Dado $H > 0$, se $a \geq 2Hr^2$ então $Q_H(v) \leq 0$ em $\Omega - \{(0, 0, 0)\}$, onde Q_H é dado por*

$$Q_H = \operatorname{div} \left(\frac{\nabla v}{\sqrt{1 + |\nabla v|^2}} \right) + 2H. \quad (1.1.4)$$

Demonstração. A função $v : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ é escrita da seguinte forma:

$$v(x, y) = -a\sqrt{\left(\frac{x}{r}\right)^2 + \left(\frac{y}{r}\right)^2} + a.$$

Logo

$$v_x = \frac{\frac{-ax}{r^2}}{\sqrt{\left(\frac{x}{r}\right)^2 + \left(\frac{y}{r}\right)^2}} \text{ e } v_y = \frac{\frac{-ay}{r^2}}{\sqrt{\left(\frac{x}{r}\right)^2 + \left(\frac{y}{r}\right)^2}},$$

portanto

$$|\nabla v| = \frac{a}{r}.$$

Substituindo os resultados acima em (1.1.4) temos

$$\begin{aligned} Q_H(v) &= \frac{\frac{-a}{r^2}}{\sqrt{1 + \left(\frac{a}{r}\right)^2}} \cdot \operatorname{div} \left(\frac{x}{\sqrt{\frac{x^2+y^2}{r^2}}}, \frac{y}{\sqrt{\frac{x^2+y^2}{r^2}}} \right) + 2H = \\ &= \frac{\frac{-a}{r}}{\sqrt{1 + \left(\frac{a}{r}\right)^2}} \cdot \operatorname{div} \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) + 2H = \\ &= \frac{-a}{\sqrt{a^2 + r^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} + 2H. \end{aligned}$$

Agora, observe que

$$Q_H(v) = \frac{-a}{\sqrt{a^2 + r^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} + 2H \leq \frac{-a}{r\sqrt{x^2 + y^2}} + 2H,$$

e como $x^2 + y^2 \leq r^2$, então

$$Q_H(v) \leq \frac{-a}{r\sqrt{x^2 + y^2}} + 2H \leq \frac{-a}{r^2} + 2H \leq \frac{-2Hr^2}{r^2} + 2H = 0.$$

□

Outro resultado sobre sub e supersoluções que irá colaborar nas demonstrações posteriores é o seguinte:

Lema 1.1.10. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ um domínio limitado. Dada $f \in C^0(\partial\Omega)$ defina o conjunto das subsoluções relativas a Q_H definidas em $\bar{\Omega}$ tais que $s \leq f$, por $s_f(\bar{\Omega})$ e sejam s_1, s_2, \dots, s_n funções pertencentes a $s_f(\bar{\Omega})$, então $s = \max\{s_1, s_2, \dots, s_n\} \in s_f(\bar{\Omega})$.*

Demonstração. Ver Lema 4.2 de [7].

□

Com estes resultados completamos alguns dos pré-requisitos necessários de forma a atacar o sistema (1.1.2) especialmente via Método de Perron.

Voltaremos a falar mais sobre o Método de Perron quando tratarmos do caso específico desta dissertação para gráficos com bordo em planos paralelos, nos capítulos 3 e 4.

1.2 Gráficos radiais de curvatura média constante

Os resultados principais deste trabalho tratam de problemas sobre existência e unicidade de superfícies com curvatura média constante com bordo prescrito consistindo da união de duas curvas de Jordan em planos paralelos distintos, obtidos através da aplicação de técnicas de EDPs elípticas.

Observamos que exemplos muito simples da posição relativa entre essas curvas, podem gerar grandes complicações do ponto de vista da teoria que temos até então, como por exemplo, o caso onde são dadas γ_1 e γ_2 (curvas de Jordan) posicionadas em planos paralelos distintos π_1 e π_2 com $\gamma_1 \subset \pi_1$ e $\gamma_2 \subset \pi_2$, de tal forma que γ_2 seja a projeção ortogonal de γ_1 no plano π_2 . Nesta situação a superfície M cujo bordo é $\gamma_1 \cup \gamma_2$, não pode ser dada como gráfico euclidiano no sentido usual. Uma maneira

de contornar essa questão é considerar M como gráfico sobre uma região contida em uma esfera unitária, posicionada adequadamente com relação aos dois planos, o que nos remete ao estudo de objetos chamados gráficos radiais, e de toda uma teoria envolvendo estes.

1.2.1 O operador curvatura média constante para gráficos radiais

No desenvolvimento desta seção, faremos principalmente a adaptação da teoria clássica referente ao Problema de Dirichlet para equações das superfícies com curvatura média constante, para o caso onde estas superfícies são dadas como gráficos radiais.

Definição 1.2.1. (*Gráficos radiais*) Uma superfície $G \subset \mathbb{R}^3$ é um gráfico radial sobre um domínio Ω contido na esfera

$$\mathbb{S}^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\},$$

se existe uma função positiva $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$G = \{(f(p))p \mid p \in \Omega\}.$$

Supondo $G \subset \mathbb{R}^3$ gráfico radial, observe que, de acordo com a definição acima, tem sentido falarmos a respeito de curvatura média de G desde que G seja suficientemente regular.

Assim, devemos primeiramente obter uma maneira de parametrizarmos localmente estas superfícies. Para isso é necessário caracterizarmos os pontos do domínio Ω da função f que, como para nossos propósitos o domínio Ω não é todo \mathbb{S}^2 , podemos supor sem perda de generalidade Ω contido em $\mathbb{S}^2 - \{(0, 0, -1)\}$ (neste texto, quando nos referimos a um domínio $\Omega \subset \mathbb{S}^2$, está subentendido $\Omega \subset \mathbb{S}^2 - \{(0, 0, -1)\}$).

Definimos então a seguinte projeção estereográfica $P : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$ como

$$P(x, y) = p \iff p \in \mathbb{S}^2 \cap l - \{(0, 0, -1)\}, \quad (1.2.5)$$

onde l é a reta determinada pelos pontos $(x, y, 1)$ e $(0, 0, -1)$. Após alguns cálculos obtemos

$$P(x, y) = \left(\frac{2x}{1+x^2+y^2}, \frac{2y}{1+x^2+y^2}, \frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2} \right).$$

Portanto, podemos caracterizar os pontos de Ω como imagens pela aplicação P de um subconjunto $\Lambda \subset \mathbb{R}^2$.

Denotando $u(x, y) = f(P(x, y))$, obtemos o gráfico radial G como

$$G = \text{graf}_R(u) = \{[u(x, y)] \cdot P(x, y) \mid (x, y) \in P^{-1}(\Omega) = \Lambda\}.$$

Conseguimos então uma parametrização para a superfície G através de uma função $u(x, y)$ definida em um domínio $\Lambda \subset \mathbb{R}^2$. Logo podemos associar a regularidade de G , ao comportamento da função $u(x, y)$. Para o caso onde u é de classe C^2 temos o seguinte resultado:

Proposição 1.2.2. *Sejam $\Lambda \subset \mathbb{R}^2$, $u \in C^2(\Lambda)$, $u > 0$. Então $M = \text{graf}_R(u)$ é uma superfície regular. Além disso, se N é o campo unitário normal a M tal que $\langle N(p), p \rangle \leq 0 \forall p \in M$, dado $H \in \mathbb{R}$, M tem curvatura média constante H se, e somente se $Q_H^*(u) = 0$ onde*

$$Q_H^*(u) = \text{div} \left(\frac{\nabla u}{\beta^{1/2}} \right) - \frac{2u}{\lambda^2} \left(\frac{2}{\beta^{1/2}} - H \right), \quad (1.2.6)$$

com $\beta = 4u^2 + \lambda^2 |\nabla u|^2$, $\lambda = 1 + x^2 + y^2$, onde ∇ e div são os usuais na métrica do \mathbb{R}^2 .

Demonstração. Ver [8]. □

O problema de Dirichlet associado a (1.2.6) é

$$\begin{cases} Q_H^*(u) = 0 \\ u \in C^2(\Lambda) \cap C^0(\overline{\Lambda}), u > 0, \\ u|_{\partial\Lambda} = \varphi, \varphi > 0 \end{cases}, \quad (1.2.7)$$

onde $\varphi \in C^0(\partial\Lambda)$ é dada *a priori*.

Observe que a segunda linha do sistema acima, exige que u estenda-se continuamente até o fecho de Λ . No entanto, na continuação deste trabalho passamos a procurar soluções de $Q_H^*(u) = 0$ com hipóteses mais "fortes" como por exemplo $u \in C^2(\bar{\Lambda})$, ou ainda $u \in C^{2,\alpha}(\bar{\Lambda})$, ou seja, onde até mesmo as derivadas parciais de segunda ordem estendem-se continuamente à $\bar{\Lambda}$ (aqui, $a \in (0, 1)$ e indica o coeficiente de Hölder). Em geral estamos interessados de fato no sistema

$$\begin{cases} Q_H^*(u) = 0 \\ u \in C^{2,\alpha}(\bar{\Lambda}), u > 0 \\ u|_{\partial\Lambda} = \varphi, \varphi > 0 \end{cases}, \quad (1.2.8)$$

onde $\varphi \in C^{2,\alpha}(\partial\Lambda)$ é dada *a priori* e $\Lambda \subset \mathbb{R}^2$ um domínio de classe $C^{2,\alpha}$.

1.2.2 Alguns teoremas básicos para gráficos radiais de cmc e o método da continuidade

Observamos inicialmente que dizer que um domínio Ω é de classe $C^{2,\alpha}$ em \mathbb{S}^2 , significa que sua fronteira $\partial\Omega$ (relativamente a \mathbb{S}^2) é localmente gráfico de função de classe $C^{2,\alpha}$.

No que segue, para simplificar a notação, para $v \in C^{2,\alpha}(\Omega)$ com $\Omega \subset \mathbb{S}^2$, usaremos a expressão " v é solução de $Q_H^* = 0$ em Ω ", para indicar que $u = v \circ P \in C^{2,\alpha}(\bar{\Lambda})$ é solução de $Q_H^* = 0$ em $P^{-1}(\Omega) = \Lambda$.

Para a situação descrita em (1.2.8), temos três resultados de fundamental importância nesta dissertação. Antes de enunciá-los precisamos de algumas definições que serão usadas no contexto.

Definição 1.2.3. *Seja Ω um domínio em \mathbb{S}^2 . Dada $\phi \in C^{2,\alpha}(\partial\Omega)$, dizemos que ϕ admite barreiras locais relativas à Q_H^* em $p \in \partial\Omega$, se existem uma vizinhança Ω_p de p em \mathbb{S}^2 e funções $s_p^\pm \in C^0(\overline{\Omega_p \cap \Omega})$, diferenciáveis em p , que satisfazem*

$$s_p^-(p) = \phi(p) = s_p^+(p)$$

e

$$s_p^- \leq v|_{\overline{\Omega_p \cap \Omega}} \leq s_p^+,$$

onde $v \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ é uma solução de $Q_H^* = 0$ com $v|_{\partial\Omega} = \phi$. Dizemos que ϕ é H -regular se ϕ admite barreiras locais em todo ponto $p \in \partial\Omega$ relativas a Q_H^* e existe K tal que $|\nabla s_p^\pm(p)| \leq K$ para todo $p \in \partial\Omega$.

Definição 1.2.4. Seja Ω um domínio em \mathbb{S}^2 . Dado $H \geq 0$, dizemos que $\phi, \psi \in C^{2,\alpha}(\partial\Omega)$ são H regularmente homotópicas se existem uma constante $C \geq 0$ e uma aplicação contínua $i : [0, 1] \rightarrow C^{2,\alpha}(\partial\Omega)$ tal que, pondo $\phi_t = i(t)$, tenhamos $\phi_0 = \phi$, $\phi_1 = \psi$ e, dado $p \in \partial\Omega$ e $t \in [0, 1]$, existam uma vizinhança Ω_p de p em \mathbb{S}^2 e funções $s_p^\pm \in C^0(\overline{\Omega_p \cap \Omega})$, diferenciáveis em p , que satisfazem $s_{p,t}^-(p) = \phi_t(p) = s_{p,t}^+(p)$, $|\nabla s_{p,t}^\pm(p)| \leq C$ e $s_{p,t}^- \leq v|_{\overline{\Omega_p \cap \Omega}} \leq s_{p,t}^+$ para cada $v_t \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ solução de $Q_H^* = 0$ em Ω com $v_t|_{\partial\Omega} = \phi_t$.

Os teoremas chaves a que nos referimos acima são os que seguem:

Teorema 1.2.5. Sejam $H \geq 0$ e Ω um domínio de classe $C^{2,\alpha}$ em \mathbb{S}^2 . Assuma que existe $v \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$, $v > 0$, tal que o gráfico radial de v é uma superfície de curvatura média constante H . Se $\psi \in C^{2,\alpha}(\partial\Omega)$ é H regularmente homotópica a $\phi := v|_{\partial\Omega}$, então existe uma superfície com curvatura média constante H que é um gráfico radial de uma função $w \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ com $w|_{\partial\Omega} := \psi$.

Teorema 1.2.6. Sejam Ω um domínio de classe $C^{2,\alpha}$ em \mathbb{S}^2 e $H \in \mathbb{R}$ com $H \geq 0$. Dada $\psi \in C^{2,\alpha}(\partial\Omega)$, assumamos que ψ é H -regular. Se existe uma solução $v_0 \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ de $Q_0 = 0$ tal que $v_0|_{\partial\Omega} = \psi$, então existe uma solução $v \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$, de $Q_H^* = 0$ em Ω tal que $v|_{\partial\Omega} = \psi$.

Teorema 1.2.7. Sejam $H_1, H_2 \geq 0$ com $H_1 \geq H_2$, e Ω um domínio de classe $C^{2,\alpha}$ em \mathbb{S}^2 . Dada $\psi \in C^{2,\alpha}(\partial\Omega)$, assumamos que ψ é H_2 -regular e que existe uma solução $v \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ de $Q_{H_1}^* = 0$ tal que $v|_{\partial\Omega} = \psi$. Se $H_2 > 0$ então existe uma solução $w \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ de $Q_{H_2}^* = 0$ em Ω tal que $w|_{\partial\Omega} = \psi$. Se $H_2 = 0$ e existe $f \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ cujo gráfico radial tem curvatura média não positiva, então existe uma solução $w \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ de $Q_0^* = 0$ em Ω tal que $w|_{\partial\Omega} = \psi$.

As demonstrações dos três últimos teoremas acima serão feitas na sequência, após apresentarmos de maneira resumida e já particularizada para os mesmos, uma técnica chamada Método da Continuidade.

Para nosso contexto, ela consiste primeiramente na definição conveniente de determinados conjuntos como fazemos na sequência.

No caso do Teorema (1.2.5), consideramos o conjunto

$$B = \left\{ t \in [0, 1]; \exists v_t \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega}) \text{ com } Q_H^*(v_t) = 0, v_t > 0 \text{ e } v_t|_{\partial\Omega} = i(t) \right\},$$

onde $i : [0, 1] \rightarrow C^{2,\alpha}(\partial\Omega)$ é uma função de classe $C^{2,\alpha}$ com $i(0) = \phi$ e $i(1) = \psi$.

Para o Teorema 1.2.6, consideramos o conjunto

$$C = \left\{ t \in [0, 1]; \exists v_t \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega}) \text{ com } Q_{tH}^*(v_t) = 0, v_t > 0 \text{ e } v_t|_{\partial\Omega} = \psi \right\},$$

Já para o Teorema 1.2.7, tomamos

$$D = \left\{ t \in \left[\frac{H_2}{H_1}, 1 \right]; \exists v_t \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega}) \text{ com } Q_{tH_1}^*(v_t) = 0, v_t > 0 \text{ e } v_t|_{\partial\Omega} = \psi \right\}.$$

Definidos B , C e D , se pudermos mostrar que eles são não-vazios, B e C abertos e fechados em $[0, 1]$ e D aberto e fechado em $\left[\frac{H_2}{H_1}, 1 \right]$, teremos $B = C = [0, 1]$ e $D = \left[\frac{H_2}{H_1}, 1 \right]$, o que garante a existência das soluções desejadas para cada situação descrita nos últimos três teoremas acima referidos, respectivamente.

No contexto dos teoremas referidos, mostrar que B , C e D são não-vazios não é algo complicado. Já quanto a abertura desses conjuntos é necessária a utilização do Teorema da Função Implícita em Espaços de Banach, juntamente com a teoria de Schauder para operadores lineares elípticos, a qual torna-se imediata (como veremos da demonstração dos respectivos teoremas) após considerarmos a mudança funcional dada pelo lema a seguir.

Lema 1.2.8. *Sejam $\Omega \subset \mathbb{S}^2$, $w \in C^2(P^{-1}(\Omega))$, com $w > 0$. Defina $T_H(w)$ como*

$$T_H(w) = \operatorname{div} \left(\frac{\nabla w}{\delta^{1/2}} \right) - \frac{4}{\lambda^2 \delta^{1/2}} + \frac{2He^w}{\lambda^2},$$

onde $\delta = 4 + \lambda^2 |\nabla w|^2$. Se $u > 0$ pertencente à $C^2(P^{-1}(\Omega))$ é tal que $Q_H(u) = 0$ então $T_H(\ln(u)) = 0$ em $P^{-1}(\Omega)$. Além disso, se $v = \ln(u)$ e $T_H(v) = 0$ temos $Q_H^*(e^v) = 0$, em $P^{-1}(\Omega)$.

Demonstração. Seja $u > 0$. Então, pondo $v = \ln(u)$, e de acordo com a hipótese se $Q_H(u) = 0$ temos

$$\begin{aligned}
\operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{(4u^2 + \lambda^2 |\nabla u|^2)^{1/2}} \right) &= \frac{4u}{\lambda^2 \left((4u^2 + \lambda^2 |\nabla u|^2)^{1/2} \right)} - \frac{2Hu}{\lambda^2} \Rightarrow \\
\operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{u \left(4 + \lambda^2 \left| \frac{\nabla u}{u} \right|^2 \right)^{1/2}} \right) &= \frac{4u}{\lambda^2 u \left(\left(4 + \lambda^2 \left| \frac{\nabla u}{u} \right|^2 \right)^{1/2} \right)} - \frac{2Hu}{\lambda^2} \Rightarrow \\
\operatorname{div} \left(\frac{\frac{\nabla u}{u}}{\left(4 + \lambda^2 \left| \frac{\nabla u}{u} \right|^2 \right)^{1/2}} \right) &= \frac{4}{\lambda^2 \left(\left(4 + \lambda^2 \left| \frac{\nabla u}{u} \right|^2 \right)^{1/2} \right)} - \frac{2Hu}{\lambda^2} \Rightarrow \\
\operatorname{div} \left(\frac{\nabla(\ln(u))}{\left(4 + \lambda^2 |\nabla(\ln(u))|^2 \right)^{1/2}} \right) &= \frac{4}{\lambda^2 \left(\left(4 + \lambda^2 |\nabla(\ln(u))|^2 \right)^{1/2} \right)} - \frac{2Hu}{\lambda^2} \Rightarrow \\
T_H(\ln(u)) &= 0.
\end{aligned}$$

Por outro lado, com $v = \ln(u)$

$$\begin{aligned}
T_H(v) &= 0 \Rightarrow \\
\operatorname{div} \left(\frac{\nabla v}{\left(4 + \lambda^2 |\nabla v|^2 \right)^{1/2}} \right) &= \frac{4}{\lambda^2 \left(\left(4 + \lambda^2 |\nabla v|^2 \right)^{1/2} \right)} - \frac{2He^v}{\lambda^2} \Rightarrow \\
\operatorname{div} \left(\frac{\nabla(\ln(u))}{\left(4 + \lambda^2 |\nabla(\ln(u))|^2 \right)^{1/2}} \right) &= \frac{4}{\lambda^2 \left(\left(4 + \lambda^2 |\nabla(\ln(u))|^2 \right)^{1/2} \right)} - \frac{2Hu}{\lambda^2} \Rightarrow \\
\operatorname{div} \left(\frac{\nabla e^v}{\left(4e^{2v} + \lambda^2 |\nabla e^v|^2 \right)^{1/2}} \right) &= \frac{4e^v}{\lambda^2 \left(\left(4e^{2v} + \lambda^2 |\nabla e^v|^2 \right)^{1/2} \right)} - \frac{2He^v}{\lambda^2} \Rightarrow \\
Q_H(e^v) &= 0.
\end{aligned}$$

□

A importância de tal mudança aparece quando analisamos a derivada de Fréchet do operador Q_H^* . Tendo em vista as dificuldades que aparecem, torna-se muito

mais simples analisar a derivada do operador T_H do que de Q_H^* . Então tratamos de analisar a derivada para T_H e utilizamos a correspondência existente entre as soluções de $T_H = 0$ e $Q_H^* = 0$ para obtermos as informações desejadas para Q_H^* .

Quanto ao fechamento dos conjuntos B , C e D , dificuldades ainda maiores aparecem neste momento. Diretamente ligados a questão do fechamento destes conjuntos está a noção de barreiras locais apresentadas na Definição 1.2.3, que por sua vez envolve os bem conhecidos Princípio da Tangência e Princípio da Comparação. Antes de apresentá-los, precisamos definir alguns conjuntos relacionados a um domínio $\Omega \subset \mathbb{S}^2$, são eles:

$$D(\Omega) = \{tp : t \in \mathbb{R}, t \geq 0, p \in \Omega\},$$

$$C(\Omega) = \{tp : t \in \mathbb{R}, t \geq 0, p \in \partial\Omega\},$$

$$C(\alpha_i) = \{tp : t \in \mathbb{R}, t \geq 0, p \in \alpha_i\},$$

onde $\alpha_i = C(\Omega) \cap \mathbb{S}^2$ (note que $\partial\Omega = \cup_i C(\alpha_i)$). Seja $\gamma \subset C(\alpha_i)$ uma curva fechada simples. Então $C(\alpha_i) \setminus \gamma$ tem duas componentes conexas. Denotamos por $I(\gamma)$ a componente limitada.

Proposição 1.2.9. *Sejam M_1 e M_2 superfícies orientadas em \mathbb{R}^3 , H_1 e H_2 suas respectivas curvaturas médias, com $H_1, H_2 \geq 0$. Seja $p \in M_1 \cap M_2$ um ponto de tangência ($T_p M_1 = T_p M_2$) e N o vetor unitário normal à M_1 em p . Assuma que as curvaturas médias de M_1 e M_2 calculadas com relação a N são H_1 e H_2 respectivamente. Se M_2 está do mesmo lado de $T_p M_1$ para o qual o vetor normal N aponta, em uma vizinhança de p , então $H_2 \geq H_1$ e vale $H_2 = H_1$ se, e somente se, existem vizinhanças U_1 e U_2 de p em M_1 e M_2 tais que $U_1 = U_2$.*

Uma observação importante é que o resultado acima é também válido quando o ponto de tangência das superfícies M_1 e M_2 é um ponto do bordo (Princípio da Tangência no Bordo).

Teorema 1.2.10. *Seja $\Omega \subset \mathbb{S}^2$ um domínio, M_1 e M_2 superfícies compactas mergulhadas em $D(\Omega)$ de curvatura média constante H_1 e H_2 , respectivamente. Se $\partial M_1 \subset I(\partial M_2)$, $\partial M_1 \leq \partial M_2$ e $H_1 \leq H_2 \leq 0$, então $M_1 \subset I(M_2)$, onde $I(M_2) = \{tp : t \in (0, 1), p \in M_2\}$.*

Demonstração. Assuma que existe $p \in \Omega$ tal que $p \in M_1 - I(M_2)$. Dado $t \geq 1$, seja

$$M_t = \{tp : p \in M_2\}$$

e

$$t_0 = \sup \{t \geq 1 : M_t \cap M_1 \neq \emptyset\}.$$

Então $1 < t_0 < \infty$. Como $\partial M_1 \leq \partial M_2 \leq \partial M_{t_0}$, M_1 e M_{t_0} são tangentes em um ponto q interior a ambas M_1 e M_{t_0} . Como $\partial M_1 \subset I(\partial M_2)$, $M_1 \subset I(M_{t_0})$. Seja N_1 o vetor unitário normal a M_1 em q que aponta para $I(M_1)$ e N_{t_0} o vetor unitário normal a M_{t_0} apontando para $I(M_{t_0})$. Logo $N_1 = N_{t_0}$. A curvatura média de M_{t_0} é $\frac{1}{t_0}H_2$. Pela Proposição 1.2.9 (Princípio da Tangência) devemos ter

$$\frac{1}{t_0}H_2 \leq H_1$$

em uma vizinhança de q . Mas por hipótese, $H_1 \leq H_2 \leq 0$ e $t_0 > 1$, logo

$$H_1 \leq \frac{1}{t_0}H_2.$$

Sendo assim deveríamos ter $M_1 = M_{t_0}$ em uma vizinhança de q , o que não acontece, obtendo então uma contradição. Portanto $M_1 \subset I(M_2)$. \square

Um resultado bem semelhante, porém com hipóteses menos restritas quanto à curvatura, pode ser obtido para o caso onde as superfícies são dadas como gráficos radiais.

Teorema 1.2.11. *Seja $\Omega \subset \mathbb{S}^2$ um domínio, M_1 e M_2 gráficos radiais em Ω de funções curvatura média H_1 e H_2 , respectivamente. Suponha que M_1 e M_2 são gráficos de funções $f_1, f_2 : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. Se $f_1|_{\partial\Omega} \leq f_2|_{\partial\Omega}$, $H_1 \circ f_1 \leq 0$ e $H_1 \circ f_1 \leq H_2 \circ f_2$, então $f_1 \leq f_2$.*

Demonstração. A demonstração é praticamente idêntica à anterior. \square

Decorre do Teorema 1.2.11 o seguinte resultado de unicidade.

Corolário 1.2.12. *Seja Ω um domínio em \mathbb{S}^2 , M_1 e M_2 gráficos radiais em Ω com curvatura média constante H tais que $\partial M_1 = \partial M_2$. Se $H \geq 0$, então $M_1 = M_2$.*

Cabe também citar que, de acordo com a técnica utilizada para o fechamento dos conjuntos B , C e D , é muito importante ter em mãos estimativas a respeito da norma do gradiente de soluções $u \in C^{2,\alpha}(\Lambda)$, $\Lambda = P^{-1}(\Omega)$, de $T_H = 0$, para isso, serão muito úteis os seguintes lemas, cujas demonstrações podem ser encontradas em [8].

Lema 1.2.13. *Sejam $\Lambda \subset \mathbb{R}^2$, um domínio limitado de classe C^1 e $u \in C^3(\Lambda) \cap C^1(\bar{\Lambda})$ solução de $T_H = 0$. Suponha que*

$$\sup_{\Lambda} |u| \leq C_0 \text{ e } \sup_{\partial\Lambda} |\nabla u| \leq C_0$$

para uma certa constante C_0 . Então existe $C_1 = C_1(\Lambda, C_0)$ tal que

$$\sup_{\Lambda} |\nabla u| \leq C_1.$$

Lema 1.2.14. *Sejam $\Omega \subset \mathbb{S}^2$, $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1*

$$M = \{(e^{f(p)})p, p \in \Omega\},$$

$N(p)$ normal à M em p , $P : \Lambda \rightarrow \Omega$ a projeção estereográfica definida em (1.2.5). Então

$$|\nabla(f \circ P)(u, v)| = \frac{1}{2\lambda} \tan \alpha(p) \leq \tan \alpha(p)$$

onde $P = P(u, v)$, $\alpha(p)$ é o ângulo entre $N(p)$ e p e $\lambda = 1 + x^2 + y^2$ (lembrando que ∇ denota o gradiente de $(f \circ P)$ na métrica usual do \mathbb{R}^2).

Ainda falando sobre resultados a serem usados no fechamento de B , C e D , têm-se mais dois, estes trazem informações sobre o comportamento de solução da equação $T_H = 0$ quanto à sua extensão ao fecho, e também tem suas demonstrações em [8].

Lema 1.2.15. *Sejam $\Lambda \subset \mathbb{R}^2$ é um domínio limitado e de classe $C^{2,\alpha}$ e $u \in C^2(\Lambda) \cap C^0(\bar{\Lambda})$ solução de $T_H = 0$ em Λ , com $\sup_{\Lambda} |\nabla u| < \infty$ e $u|_{\partial\Lambda} = \varphi|_{\partial\Lambda}$, sendo $\varphi \in C^{2,\alpha}(\bar{\Lambda})$. Então $u \in C^{2,\alpha}(\bar{\Lambda})$.*

Lema 1.2.16. *Sejam $\Lambda \subset \mathbb{R}^2$ um domínio limitado de classe $C^{2,\alpha}$ e $u \in C^{2,\alpha}(\overline{\Lambda})$ solução de $T_H = 0$ em Λ com $u|_{\partial\Lambda} = \varphi|_{\partial\Lambda}$, com $\varphi \in C^{2,\alpha}(\overline{\Lambda})$. Então $u \in C^\infty(\Lambda) \cap C^1(\overline{\Lambda})$.*

Tendo em vista que os principais resultados a serem utilizados durante as demonstrações dos Teoremas 1.2.5, 1.2.6 e 1.2.7, já foram apresentados, passamos a elas.

Demonstração. (Teorema 1.2.5) Seja $v \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$, $v > 0$, solução de $Q_H = 0$ em Ω com $\phi := v|_{\partial\Omega}$, e seja $i : [0, 1] \rightarrow C^{2,\alpha}(\partial\Omega)$ uma função contínua com $i(0) = \phi$ e $i(1) = \psi$. Como i é contínua, existem $\Psi_t \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$, e uma constante C_0 não dependendo de t , tal que $\Psi_t|_{\partial\Omega} = i(t)$ e $|\Psi_t|_{2,\alpha,\Omega} \leq C_0$. Seja $\phi_t = \ln(\Psi_t \circ P)$ e considere o conjunto B definido anteriormente. Temos que $B \neq \emptyset$ pois $t = 0 \in B$. Vamos provar que B é aberto. Seja $t_0 \in B$ e seja $v_{t_0} \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ uma função positiva tal que $T_H(\ln(v_{t_0} \circ P)) = 0$ (que ocorre pela Lema 1.2.8) e $v_{t_0}|_{\partial\Omega} = i(t_0)$. Seja $u_{t_0} = \ln(v_{t_0} \circ P)$. Então $u_{t_0} \in C^{2,\alpha}(\overline{\Lambda})$, onde $\Lambda = P^{-1}(\Omega)$, e é tal que $u_{t_0}|_{\partial\Lambda} = \ln(i(t_0) \circ P)$. Usando a definição da derivada de Fréchet, podemos mostrar que

$$T_H : C^{2,\alpha}(\overline{\Lambda}) \rightarrow C^\alpha(\overline{\Lambda})$$

é de classe C^1 e sua derivada $d(T_H)_u(h)$ é da forma

$$\begin{aligned} & \frac{d}{ds} \operatorname{div} \left(\frac{\nabla(u + sh)}{(4 + \lambda^2 |\nabla(u + sh)|^2)^{\frac{1}{2}}} \right)_{s=0} \\ & - \frac{d}{ds} \left(\frac{4}{\lambda^2 (4 + \lambda^2 |\nabla(u + sh)|^2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{2He^{u+sh}}{\lambda^2} \right)_{s=0} = \\ & = \sum_{i,j=1}^2 a_{ij}(x) D^{ij}h + \sum_{j=1}^2 b_j(x) D^j h - \frac{2He^u}{\lambda^2} h. \end{aligned}$$

(1.2.10)

Como $-2He^u \leq 0$ se $H \geq 0$, segue da teoria de Schauder para operadores lineares elípticos que

$$d(T_H)_u(h)|_{C_0^{2,\alpha}(\bar{\Lambda})} : C_0^{2,\alpha}(\bar{\Lambda}) \rightarrow C^\alpha(\bar{\Lambda})$$

é um isomorfismo linear, onde $C_0^{2,\alpha}(\bar{\Lambda}) = \{\xi \in C^{2,\alpha}(\bar{\Lambda}); \xi|_{\partial\Lambda} = 0\}$. Defina $S : \mathbb{R} \times C_0^{2,\alpha}(\bar{\Lambda}) \rightarrow C^\alpha(\bar{\Lambda})$ por $S(t, \xi) = T_H(\xi + \phi_t)$. Temos que

$$\xi_{t_0} = u_{t_0} - \phi_{t_0} \in C_0^{2,\alpha}(\bar{\Lambda})$$

e

$$S(t_0, \xi_{t_0}) = T_H(\xi_{t_0} + \phi_{t_0}) = T_H(u_{t_0}) = 0.$$

Por outro lado, para $h \in C_0^{2,\alpha}(\bar{\Lambda})$,

$$\begin{aligned} D_2S(t_0, \xi_{t_0})(h) &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{S(t_0, \xi_{t_0} + rh) - S(t_0, \xi_{t_0})}{r} = \\ &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{T_H(\xi_{t_0} + rh + \phi_{t_0}) - T_H(\xi_{t_0} + \phi_{t_0})}{r} = \\ &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{T_H(u_{t_0} + rh) - T_H(u_{t_0})}{r} = d(T_H)_{u_{t_0}}(h). \end{aligned}$$

Agora o Teorema da Função Implícita aplicado a S mostra que a equação $S(t, \xi) = 0$ tem solução em uma vizinhança de (t_0, ξ_{t_0}) , e isto mostra que B é aberto. Para provar que B é fechado, considere $\{t_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset B$ tal que $t_n \rightarrow t_0$. Seja $v_{t_n} \in C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$, $v_{t_n} > 0$, solução de $T_H = 0$ em Ω tal que $v_{t_n}|_{\partial\Omega} = i(t_n)$. Como $i : [0, 1] \rightarrow C^{2,\alpha}(\partial\Omega)$ é contínua e $v > 0$, existem constantes C_1 e C_2 , sendo $0 < C_1 < 1 < C_2$ e tais que

$$0 < C_1 v|_{\partial\Omega} \leq i(t_n) \leq C_2 v|_{\partial\Omega}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $0 \leq H(C_2 v) \leq H(v_{t_n}) \leq H(C_1 v)$, então pelo Teorema 1.2.10 temos

$$0 < C_1 v \leq v_{t_n} \leq C_2 v,$$

e então $\sup_\Omega |\ln(v_{t_n})| \leq K_1$ para alguma constante K_1 que não depende de n . Seja $u_{t_n} = \ln(v_{t_n} \circ P)$. Então $\sup_\Lambda |u_{t_n}| \leq K_1$ e, por definição de homotopia regular, temos $\sup_{\partial\Lambda} |\nabla u_{t_n}| \leq K_2$ para alguma constante K_2 . Pelo Lema 1.2.16 temos $u_{t_n} \in$

$C^3(\Lambda) \cap C^1(\bar{\Lambda})$, e segue então do Lema 1.2.13 que $\sup_{\Lambda} |\nabla u_{t_n}| \leq K_3$ para alguma constante K_3 . Podemos fazer reduções apropriadas para um problema linear elíptico, aplicando as Estimativas de Holder para o gradiente (§12.2 de [10] - Global Estimates) e o Teorema 6.6 de [10], para obter a estimativa uniforme $|\nabla u_{t_n}|_{2,\alpha,\Lambda} \leq K_4$. Segue do teorema de Arzelá-Ascoli que u_{t_n} contém uma subsequência convergindo uniformemente para uma solução $u \in C^2(\bar{\Lambda})$ de $T_H = 0$ em Λ , com $u|_{\partial\Lambda} = \ln(i(t_0) \circ P)$ e $\sup_{\Lambda} |\nabla u| \leq K_2$. segue do Lema 1.2.15 que $u \in C^{2,\alpha}(\bar{\Lambda})$. Deste modo $t_0 \in B$, provando que B é fechado. Isto mostra que $B = [0, 1]$ e conclui a prova. \square

Demonstração. (Teorema 1.2.6) Como a demonstração deste resultado difere muito pouco da anterior, iremos omiti-la. \square

Demonstração. (Teorema 1.2.7) Seja $v \in C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$, $v > 0$, solução de $Q_{H_1}^* = 0$ com $v|_{\partial\Omega} = \psi$. Seja $i : [0, 1] \rightarrow C^{2,\alpha}(\partial\Omega)$ uma função constante $i(t) = \psi$. Suponha $H_1 > H_2$ (se $H_1 = H_2$ é evidente) e considere o conjunto D . Note que $D \neq \emptyset$ pois $t = 1 \in D$. Como feito na demonstração do Teorema 1.2.5, aplicamos o Teorema da Função Implícita para concluir que D é aberto. Para mostrar que D é fechado, considere a sequência $\{t_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset D$ tal que $t_n \rightarrow t_0$. Seja $v_{t_n} \in C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$, $v_{t_n} > 0$, solução de $T_{t_n H_1} = 0$ em Ω tal que $v_{t_n}|_{\partial\Omega} = \psi$. Vejamos separadamente os casos $H_2 > 0$ e $H_2 = 0$. Para $H_2 > 0$, como $v \in C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$, $v > 0$, é uma solução de $Q_{H_1}^* = 0$ com $v|_{\partial\Omega} = \psi$, dada uma constante C_1 tal que $0 < C_1 \leq \frac{H_2}{H_1}$, então $0 < C_1 H_1 \leq t_n H_1 \leq H_1$ e $(1 \setminus C_1)v$ é uma superfície com curvatura média constante $C_1 H_1$ tal que $\psi \leq (1 \setminus C_1)v|_{\partial\Omega}$. Pelo Teorema 1.2.10, como

$$v_{t_n}|_{\partial\Omega} = v|_{\partial\Omega} = \psi \leq (1 \setminus C_1)v|_{\partial\Omega}$$

e $0 < C_1 H_1 \leq t_n H_1 \leq H_1$, temos

$$0 < v \leq v_{t_n} \leq (1 \setminus C_1)v.$$

Para $H_2 = 0$, se existe $f \in C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$ cujo gráfico radial tem curvatura média K_f não positiva, então

$$K_f \leq 0 = H_2 < H_1,$$

e novamente pelo Princípio da Comparação (Teorema 1.2.10)

$$0 < v \leq v_{t_n} \leq f.$$

Então, podemos proceder em ambos os casos conforme feito na demonstração do Teorema 1.2.5, para concluir que D é fechado, encerrando assim a prova. \square

Observe que no teorema acima não são necessárias informações a respeito do comportamento de $f \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ em $\partial\Omega$, pois caso seja conveniente, podemos fazer alterações do tipo (λf) , com $\lambda > 0$ e mesmo assim não alterar o sinal de sua curvatura média.

Note que as hipóteses dos Teoremas 1.2.5, 1.2.6 e 1.2.7 estão relacionadas às definições 1.2.3 e 1.2.4, sendo óbvio que, para que possamos aplicar estes teoremas, devemos garantir que as hipóteses requeridas em seus enunciados sejam satisfeitas, isto é, devemos mostrar que determinadas funções admitem barreiras locais. Este será o objetivo de alguns resultados dos capítulos que seguem. Já no próximo capítulo, apresentaremos algumas funções que aparecem como candidatas a essas barreiras.

Capítulo 2

Construção de barreiras

A técnica utilizada nas demonstrações dos principais resultados desta dissertação consiste, principalmente, do uso adequado de "pedaços" de determinadas superfícies (barreiras locais), tanto para o caso onde aplicaremos o Método de Perron quanto para o caso onde utilizaremos os resultados descritos nos Teoremas 1.2.5, 1.2.6 e 1.2.7 do capítulo anterior. Esses "pedaços" são tomados de maneira conveniente, em geral dados como restrições de superfícies rotacionais com curvatura média constante. Como as hipóteses da maioria dos teoremas a serem explorados estão relacionadas a geometria do domínio (curvatura do bordo do domínio, condição do círculo interior e exterior, por exemplo), e a distância entre os planos paralelos que contém o bordo prescrito, então levando-se isto em conta, consideramos especialmente para esta questão de barreiras locais superfícies cujos bordos sejam formados por dois círculos em planos paralelos, para que assim possamos relacionar esses "pedaços" com as hipóteses apresentadas. Os resultados deste capítulo tratam dessas demandas.

2.1 O catenóide

Começamos falando sobre o catenóide, superfície que será usada principalmente para a demonstração de resultados relativos à superfícies mínimas com bordo prescrito em planos paralelos, tema contemplado por esta dissertação.

Definição 2.1.1. *Seja $K \subset \mathbb{R}^3$ um catenóide e seja r seu eixo de rotação. Sejam Π_1 e Π_2 planos perpendiculares à reta r . Sejam $c_1 = K \cap \Pi_1$, $c_2 = K \cap \Pi_2$, S_{Π_1}*

o semi-espaço fechado determinado por Π_1 e que contém Π_2 e S_{Π_2} o semi espaço fechado determinado por Π_2 e que contém Π_1 . Se Π_1 e Π_2 forem tais que c_1 e c_2 sejam círculos de mesmo raio, chamamos a superfície do \mathbb{R}^3

$$J = K \cap S_{\Pi_1} \cap S_{\Pi_2}$$

de tronco do catenóide K de bases circulares c_1 e c_2 .

O resultado abaixo estabelece condições sobre a altura e o raio de um tronco de cilindro circular reto para que seu bordo seja o bordo de um tronco de catenóide.

Lema 2.1.2. *Seja C um tronco de cilindro circular reto de raio $R > 0$ e altura $2h$. Se $R/h \geq a_0$, $a_0 = \sinh x_0$, onde x_0 é a única raiz positiva de $\cosh x - x \sinh x = 0$, então existe um tronco de catenóide J , cuja intersecção com C são os círculos das bases de C .*

Demonstração. Sem perda de generalidade, podemos supor que o plano π , equidistante dos planos π_1 e π_2 das bases de C , seja o plano $\{z = 0\}$, e que os círculos das bases sejam $c_1 \subset \pi_1$, com centro em $(0, 0, h)$ e $c_2 \subset \pi_2$ com centro em $(0, 0, -h)$. Lembramos que

$$z = \alpha \cosh^{-1} \left(\frac{|(x, y)|}{\alpha} \right)$$

no domínio $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 < \alpha^2\}$ é a equação da parte não negativa do catenóide cujo eixo de rotação é o eixo z e cuja cintura é a circunferência de raio α com centro na origem do \mathbb{R}^3 . Assim se existe um tronco de catenóide cujas intersecções com π_1 e π_2 sejam c_1 e c_2 respectivamente, então a cintura de tal catenóide é um círculo de raio r , $0 < r < R$, com centro em $(0, 0, 0)$, onde r é tal que

$$\frac{R}{r} = \cosh \frac{h}{r}. \quad (2.1.1)$$

A relação acima é estabelecida através da análise da parte não negativa da equação do tronco de catenóide. Vamos analisar quais condições sobre R e h para que a equação acima tenha solução. Tomando $x = \frac{h}{r}$, temos $\frac{R}{r} = \cosh \left(\frac{h}{r} \right)$ se, e somente

se,

$$\frac{R}{h}x = \cosh x.$$

Consideramos as funções

$$f_a(x) = ax, a \in [0, +\infty) \text{ e } g(x) = \cosh x$$

Então é claro que se a é suficientemente grande, os gráficos de $f_a(x)$ e de g tem dois pontos em comum. Seja a_0 o menor $a > 0$ tal que os gráficos das funções f_a e g têm ao menos um ponto em comum. Seja então $x_0 > 0$ tal que

$$a_0x_0 = \cosh x_0.$$

Segue-se que, para $a > a_0$ existem duas soluções para a equação

$$ax = \cosh x, \tag{2.1.2}$$

e que $f_{a_0}(x) = a_0x$ é reta tangente ao gráfico de g no ponto $(x_0, g(x_0))$. Decorre daí que

$$\sinh x_0 = g'(x_0) = f'_a(x_0) = a_0.$$

Como $g(x_0) = f_{a_0}(x_0)$, segue que

$$\cosh x_0 = a_0x_0$$

e, portanto, $\cosh x_0 = x_0 \sinh x_0$. Logo x_0 é a única raiz positiva da equação

$$\cosh x - x \sinh x = 0 \tag{2.1.3}$$

Uma aproximação numérica nos dá

$$x_0 \approx 1,1997$$

de modo que

$$a_0 = \sinh x_0 \approx 1,5089.$$

Assim, como para $a \in [0, a_0)$ evidentemente (2.1.2) não tem solução, concluímos que (2.1.1) tem solução se, e somente se $\frac{R}{h} \geq a_0$, e isto prova o lema. \square

Como neste trabalho será tratado também de superfícies mínimas com bordo prescrito em planos paralelos, dadas como gráficos radiais, é importante estabelecermos um critério para determinar que "pedaço" de um catenóide, situado entre planos paralelos, pode ser dado como gráfico sobre uma esfera unitária.

Sejam π_i , $i = 1, 2$, planos paralelos distintos, e d a distância entre π_1 e π_2 . Assuma que o plano equidistante de π_1 e π_2 é plano $\{z = 0\}$. Seja U a região do \mathbb{R}^3 entre π_1 e π_2 . Dado $\alpha > 0$ e um ponto C no plano $z = 0$, defina

$$K_{\alpha,C} = \left\{ \left(\alpha \cosh \frac{v}{\alpha} \cos \frac{\theta}{\alpha}, \alpha \cosh \frac{v}{\alpha} \sin \frac{\theta}{\alpha}, v \right) + C \in \mathbb{R}^3 \right\},$$

onde $\theta \in [0, 2\pi\alpha]$ e $v \in [-\frac{d}{2}, \frac{d}{2}]$. Então $K_{\alpha,C}$ é uma parte de um catenóide em U com $\partial K_{\alpha,C} = c \cup c^* \subset \pi_1 \cup \pi_2$, onde

$$c = \left\{ \left(\alpha \cosh \frac{d}{2\alpha} \cos \frac{\theta}{\alpha}, \alpha \cosh \frac{d}{2\alpha} \sin \frac{\theta}{\alpha}, \frac{d}{2} \right) + C \in \mathbb{R}^3 : \theta \in [0, 2\pi\alpha] \right\}$$

e c^* é a projeção ortogonal de c em π_2 .

Dizemos que $K_{\alpha,C}$ é radial se $K_{\alpha,C}$ é um gráfico radial sobre uma esfera unitária centrada em C . Usando a notação acima, o Lema 2.1.3 abaixo exhibe o critério procurado para que $K_{\alpha,C}$ seja um gráfico radial em termos da distância entre os planos, lembrando que x_0 é a única raiz positiva de $\cosh x - x \sinh x = 0$ ($x_0 \approx 1,1997$) e $b = \sinh x_0$.

Lema 2.1.3. *Se r é raio de c , então $r \geq \frac{bd}{2}$. Portanto, se $\frac{d}{2\alpha} < x_0$ então $K_{\alpha,C}$ é radial.*

Demonstração. Sem perda de generalidade assuma que $C = (0, 0, 0)$ e defina $K_\alpha = K_{\alpha,C}$. Então

$$r = \alpha \cosh \frac{d}{2\alpha}$$

é o raio de c . Considere a função $f(x) = \cosh x - x \sinh x$, cuja derivada é $f'(x) = \sinh x - \sinh x_0$, e sendo assim x_0 é um ponto crítico. Como $f''(x) = \cosh x > 0$

para todo x , então x_0 é um ponto de mínimo. Portanto $f(x) \geq f(x_0) = 0$, logo $\cosh x - x \sinh x_0 \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, o que nos leva a

$$\cosh \frac{d}{2\alpha} \geq \frac{d}{2\alpha} \sinh x_0 = \frac{db}{2\alpha}$$

e

$$r = \alpha \cosh \frac{d}{2\alpha} \geq \frac{db}{2}.$$

Se $q \in K_\alpha$ é dado por

$$q = \left(\alpha \cosh \frac{v}{\alpha} \cos \frac{\theta}{\alpha}, \alpha \cosh \frac{v}{\alpha} \sin \frac{\theta}{\alpha}, v \right)$$

então podemos escolher $N(q)$ como a normal à K_α em q de forma que

$$\langle N(q), q \rangle = \alpha - v \tanh \frac{v}{\alpha}.$$

Segue que K_α é radial se $\langle N(q), q \rangle \geq 0$, ou $\alpha - v \tanh \frac{v}{\alpha} \geq 0$, que é equivalente a $\cosh \frac{v}{\alpha} - \frac{v}{\alpha} \sinh \frac{v}{\alpha} \geq 0$. E isto ocorre se $\frac{d}{2\alpha} \leq x_0$ e $v \in \left[-\frac{d}{2}, \frac{d}{2}\right]$, o que conclui a prova. \square

2.2 A superfície de Delaunay

Para o caso onde procuramos soluções de $Q_H^* = 0$ ($Q_H = 0$), para $H > 0$, cujos gráficos radiais (verticais) possuem bordo em planos paralelos, é frequente o uso de barreiras locais dadas através de Superfícies de Delaunay. No que segue veremos alguns resultados que nos permitem garantir a existência de "pedaços" muito úteis contidos nessas superfícies.

Observamos que o nome *Superfície de Delaunay* é devido a um astrônomo e matemático chamado Charles Delaunay, que no ano de 1841 provou que toda superfície de revolução com curvatura média constante é dada como rotação de uma curva descrita pelo foco de uma cônica que rola (sem escorregar) ao longo do eixo de rotação.

Lema 2.2.1. Dados $r > 0$ e $H > 0$. Então, para qualquer R tal que

$$r < R \leq r + \frac{1}{H},$$

existe um anel rotacional com curvatura média constante H , dado como o gráfico de uma função real u definida em um anel no plano $z = 0$ cujo bordo consiste de dois círculos concêntricos c_r e C_R de raios r e R respectivamente, e tal que $u|_{c_r} = 0$ e $u|_{C_R} = h(R)$, onde

$$h(R) = \int_r^R \frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{x}{r(1+rH)-Hx^2}\right)^2 - 1}} \quad (2.2.4)$$

se

$$r < R \leq \sqrt{\frac{r(1+rH)}{H}},$$

e

$$h(R) = \int_r^{\sqrt{\frac{r(1+rH)}{H}}} \frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{x}{r(1+rH)-Hx^2}\right)^2 - 1}} - \int_{\sqrt{\frac{r(1+rH)}{H}}}^R \frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{x}{r(1+rH)-Hx^2}\right)^2 - 1}} \quad (2.2.5)$$

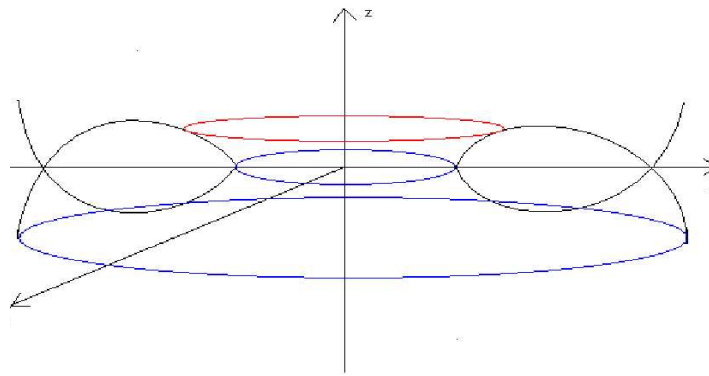
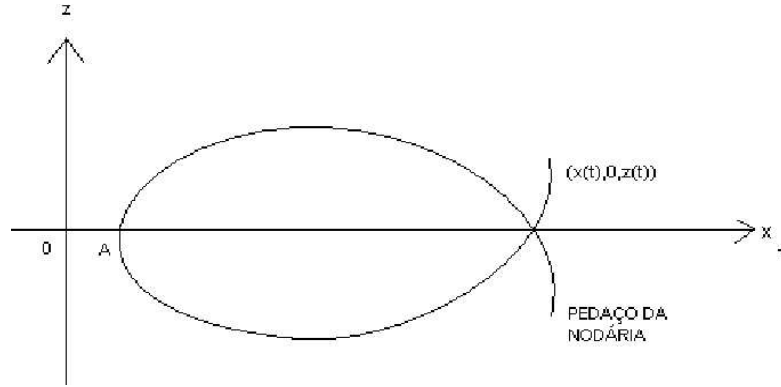
se

$$\sqrt{\frac{r(1+rH)}{H}} \leq R \leq r + \frac{1}{H}.$$

Demonstração. É bem conhecida a existência de uma curva N_r (nodária) no plano $\{y = 0\}$, $x > 0$, gerando por rotação ao redor do eixo z uma superfície de cmc H (com auto-intersecção) imersa, completa mas não mergulhada, cuja distância ao eixo z é r . Conforme mostram as figuras na sequência. Assuma $A = (r, 0, 0)$ como sendo um ponto de N_r . Se N_r é dada pelas equações paramétricas $x = x(t)$ e $z = z(t)$, então essas funções satisfazem o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = 1 - \left(Hx - \frac{a}{x}\right)^2 \\ \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = 1 \end{cases} \quad (2.2.6)$$

onde a é uma constante. Observe que r é um valor de mínimo para $x = x(t)$. Se X denota o valor máximo de $x = x(t)$, então segue que dado $r < R \leq X$, existe



uma superfície com cmc H (pedaço de um nodóide) tendo como bordo os círculos c_r de raio r no plano $z = 0$ e C_R de raio R em um plano à alguma altura h com relação a $z = 0$. Provaremos que $X = r + \frac{1}{H}$ e que h á dada por (2.2.4) ou (2.2.5). Através da primeira linha de (2.2.6) temos que $\frac{dx}{dt} = 0$ se, e somente se $x = \bar{x}_1 = r$ ou $x = \bar{x}_2 = X$, onde

$$\bar{x}_1 = \frac{-1 + \sqrt{1 + 4aH}}{2H}, \bar{x}_2 = \frac{1 + \sqrt{1 + 4aH}}{2H}.$$

De fato,

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = 1 - \left(Hx - \frac{a}{x}\right)^2 = 0$$

implica

$$1 - \left(Hx - \frac{a}{x}\right)^2 = 0 \text{ e } \left(Hx - \frac{a}{x}\right) = \pm 1,$$

resolvendo as duas equações e desconsiderando as raízes negativas obtemos \bar{x}_1 e \bar{x}_2 como acima. Segue que $X - r = \bar{x}_2 - \bar{x}_1 = \frac{1}{H}$. Considerando os pontos onde $x = x(z)$ e utilizando (2.2.6) temos

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx}{dz} \cdot \frac{dz}{dt}$$

o que implica que

$$\begin{aligned} \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 &= \left(\frac{dx}{dz}\right)^2 \cdot \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = \left(\frac{dx}{dz}\right)^2 \cdot \left(1 - \left(\frac{dx}{dt}\right)^2\right) = \\ &= \left(\frac{dx}{dz}\right)^2 \cdot \left(\frac{Hx^2 - a}{x}\right)^2. \end{aligned}$$

Logo

$$\left(\frac{dx}{dz}\right)^2 = \frac{x^2}{(Hx^2 - a)^2} \cdot \left(\frac{dx}{dt}\right)^2,$$

e substituindo $\left(\frac{dx}{dt}\right)^2$ por $1 - \left(Hx - \frac{a}{x}\right)^2$ segue que

$$\left(\frac{dx}{dz}\right)^2 = \left(\frac{x}{Hx^2 - a}\right)^2 - 1.$$

Seja $x_1 = x(t_1)$ o primeiro valor maior que r tal que $z'(t_1) = 0$. Podemos determinar, explicitamente, x_1 em termos de r e H . De fato, de

$$\frac{dz}{dt} = \frac{dz}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}$$

vem que

$$\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 = \frac{\left(\frac{dz}{dt}\right)^2}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2} = \frac{1 - \left(\frac{dx}{dt}\right)^2}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2} = \frac{(Hx^2 - a)^2}{x^2 - (Hx^2 - a)^2}.$$

Logo

$$\frac{dz}{dx} = \pm \frac{\sqrt{(Hx^2 - a)^2}}{\sqrt{x^2 - (Hx^2 - a)^2}} = \pm \frac{1}{\sqrt{\frac{x^2 - (Hx^2 - a)^2}{(Hx^2 - a)^2}}} = \pm \frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{(Hx^2 - a)^2} - 1}},$$

e, portanto

$$z'(x) = \frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{(Hx^2-a)^2} - 1}} \text{ para } r \leq x \leq x_1, \quad (2.2.7)$$

e

$$z'(x) = -\frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{(Hx^2-a)^2} - 1}} \text{ para } x_1 \leq x \leq X, \quad (2.2.8)$$

onde $x_1 \in (r, X)$ é tal que $z'(x_1) = 0$. Como $z'(r) = \infty$, segue que

$$\frac{r^2}{(Hr^2 - a)^2} = 1.$$

Após efetuar alguns cálculos temos $a = r(Hr + 1)$ ou $a = r(Hr - 1)$. No caso dos nodóides, sabemos que $x'(z_1) = \infty$, onde $z_1 = z(x_1)$. Logo, $a = Hx_1^2$ já que

$$\left(\frac{x_1}{Hx_1^2 - a}\right)^2 - 1 = \infty.$$

Assim $a = Hx_1^2 \geq Hr^2$ donde $a = r(Hr + 1)$. Obtemos então que

$$x_1 = \sqrt{\frac{a}{H}} = \sqrt{\frac{r(1+rH)}{H}}.$$

Integrando ambos os lados da derivada de $z(x)$ no intervalo $[r, R]$, com $r < R \leq \sqrt{\frac{r(1+rH)}{H}}$ e substituindo $a = r(Hr + 1)$ tem-se

$$z(R) - z(r) = \int_r^R \frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{x}{r(1+rH)-Hx^2}\right)^2 - 1}}.$$

Agora, integrando a derivada de $z(x)$ em $[r, R]$, para $r < \sqrt{\frac{r(1+rH)}{H}} \leq R \leq r + \frac{1}{H}$, temos

$$\begin{aligned} & [z(x_1) - z(r)] + [z(R) - z(x_1)] = \\ & = \int_r^{\sqrt{\frac{r(1+rH)}{H}}} \frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{x}{r(1+rH)-Hx^2}\right)^2 - 1}} - \int_{\sqrt{\frac{r(1+rH)}{H}}}^R \frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{x}{r(1+rH)-Hx^2}\right)^2 - 1}} \end{aligned}$$

onde devemos considerar duas integrais, pois a definição da derivada de $z(x)$ em $r < \sqrt{\frac{r(1+rH)}{H}} \leq R \leq r + \frac{1}{H}$, muda conforme a posição de R com relação à x_1 . Lembrando que $z(r) = 0$ segue os resultado desejados, bastando em ambos os casos definir $h(R)$ como $z(R)$. \square

2.3 Alguns lemas básicos

Um ponto importante com relação ao Lema 2.2.1, é que através de uma restrição da superfície obtida nele, podemos obter uma outra, cujo bordo é formado por dois círculos de mesmo raio em planos paralelos distintos, um sendo a projeção ortogonal do outro.

Esse por sua vez, é o conteúdo do Lema 2.3.2 abaixo, mas antes vejamos um outro resultado:

Lema 2.3.1. *Dados r e R dois números reais positivos tais que*

$$0 < r < R \leq \sqrt{r(r+1)}, \quad (2.3.9)$$

então definindo

- (a) $k = \frac{\sqrt{2r+1}}{r+1}$, temos $k < 1$;
- (b) $D = \frac{\sqrt{R^2-r^2}}{Rk}$, obtemos $D \leq 1$;

Demonstração. Para (a) basta notar que caso tivéssemos $k \geq 1$ então

$$\frac{\sqrt{2r+1}}{r+1} \geq 1,$$

logo

$$2r+1 \geq r^2+2r+1$$

que implica $r^2 \leq 0$, o que é uma contradição pois $r > 0$. A prova de (b) já é um pouco mais complicada pois, antes de tudo devemos mostrar que $R \leq r+1$. Para isso, suponha por absurdo que, com as hipóteses de (2.3.9) tenhamos $R > r+1$. Logo

$$R^2 > (r+1)^2 = r^2 + r + r + 1$$

mas

$$r^2 + r \geq R^2,$$

portanto

$$R^2 > r^2 + r + r + 1 \geq R^2 + r + 1$$

o que é uma contradição. Feita esta observação, note que

$$R \leq r + 1 \implies \frac{R}{r} \leq \frac{r + 1}{r}$$

mas

$$\frac{r + 1}{r} = \frac{1}{\frac{r}{r+1}} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{r}{r+1}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - k^2}}$$

onde k é dado por (a). Logo

$$\frac{R}{r} \leq \frac{r + 1}{r} \implies \frac{R}{r} \leq \frac{1}{\sqrt{1 - k^2}} \implies R\sqrt{1 - k^2} \leq r \implies R^2(1 - k^2) \leq r^2,$$

e desenvolvendo o restante dos cálculos temos

$$D = \frac{\sqrt{R^2 - r^2}}{Rk} \leq 1,$$

como queríamos. □

Passamos agora ao lema citado.

Lema 2.3.2. *Dado $r > 0$, seja R tal que $r \leq R \leq \sqrt{r(r + 1)}$. Sejam π_1 e π_2 planos paralelos e assumamos que a distância d entre π_1 e π_2 é dada por*

$$d = 2 \int_0^x \frac{-1 + (r + 1)k^2 \sin^2 \alpha}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \alpha}} d\alpha + \frac{2}{R} \sqrt{((r + 1)^2 - R^2)(R^2 - r^2)}.$$

Seja c_i um círculo de raio R contido no plano π_i , $i = 1, 2$, e assumamos que c_2 é a projeção ortogonal de c_1 em π_2 . Então existe um anel rotacional mergulhado $A_{r,R}$ de curvatura média constante 1 tal que

$$\partial A_{r,R} = c_1 \cup c_2$$

Demonstração. Considere aqui, uma nodária N_r como aquela do Lema 2.2.1. Seja D_{\min} o conjunto dos pontos de N_r tais que a distância de N_r ao eixo z seja r . Considere $P \in D_{\min}$ e faça com que $N_r \cap \langle e_1 \rangle = P$. Logo $P = (r, 0, 0)$. Observe que é possível considerar um trecho da curva N_r de forma que $z = z(x)$, com $z \geq 0$. Considere este trecho iniciando em P . De acordo com o Lema 2.2.1, para $r \leq x \leq \sqrt{r(r+1)}$, o trecho citado é o gráfico da função:

$$z(r, x) = \int_r^x \frac{dt}{\sqrt{\left(\frac{t}{r(r+1)-t^2}\right)^2 - 1}}. \quad (2.3.10)$$

Deste modo, para $r \leq R \leq \sqrt{r(r+1)}$, temos

$$\begin{aligned} z(r, R) &= \int_r^R \frac{dt}{\sqrt{\left(\frac{t}{r(r+1)-t^2}\right)^2 - 1}} = \\ &= \int_r^R \frac{r(r+1) - t^2}{\sqrt{(t^2 - r^2)[(r+1)^2 - t^2]}} dt. \end{aligned}$$

A sequência da demonstração consiste em analisar a derivada da seguinte função:

$$E(t) = \frac{\sqrt{(t^2 - r^2)[(r+1)^2 - t^2]}}{t}$$

donde

$$E'(t) = \frac{r^2(r+1)^2 - (r^2+r)t^2}{\sqrt{t^2[(r+1)^2 - t^2]}(t^2 - r^2)}$$

que pode ser escrita como

$$E'(t) = \frac{r^2(r+1)^2 - (r^2+r)t^2}{t^2 \sqrt{[(r+1)^2 - t^2]}(t^2 - r^2)} - \frac{t^2 - (r+1)r}{\sqrt{(t^2 - r^2)[(r+1)^2 - t^2]}}.$$

Note que a segunda parcela é igual ao integrando de (2.3.10), logo

$$\begin{aligned}
z(r, R) &= - \int_r^R \frac{r^2 (r+1)^2 - (r^2+r)t^2}{t^2 \sqrt{[(r+1)^2 - t^2](t^2 - r^2)}} dt + \int_r^R E'(t) dt = \\
&= - \int_r^R \frac{r^2 (r+1)^2 - (r^2+r)t^2}{t^2 \sqrt{[(r+1)^2 - t^2](t^2 - r^2)}} dt + E(R) - E(r) = \\
&= - \int_r^R \frac{r^2 (r+1)^2 - (r^2+r)t^2}{t^2 \sqrt{[(r+1)^2 - t^2](t^2 - r^2)}} dt + \frac{\sqrt{(R^2 - r^2)[(r+1)^2 - R^2]}}{R}.
\end{aligned}$$

Note que

$$- \int_r^R \frac{r^2 (r+1)^2 - (r^2+r)t^2}{t^2 \sqrt{[(r+1)^2 - t^2] \sqrt{(t^2 - r^2)}}} dt$$

é igual a

$$\int_r^R \left(\frac{k [t^2 (r^2+r) - r^2 (r+1)^2]}{rt\sqrt{2r+1}} \right) \frac{r\sqrt{2r+1}}{kt\sqrt{(t^2 - r^2)[(r+1)^2 - t^2]}} dt.$$

Considerando então a mudança de variável

$$\alpha = \arcsin \left(\frac{1}{tk} \sqrt{t^2 - r^2} \right), \quad r \leq t \leq \sqrt{r(r+1)},$$

temos

$$d\alpha = \frac{r\sqrt{2r+1}}{tk\sqrt{[(r+1)^2 - t^2](t^2 - r^2)}}.$$

e, além disso, $\alpha = 0$ se $t = r$ e $\alpha = \chi$ se $t = R$. Usando agora que

$$\chi = \arcsin \left(\frac{\sqrt{R^2 - r^2}}{Rk} \right)$$

obtemos

$$\int_0^\chi \frac{k [t^2 (r^2+r) - r^2 (r+1)^2]}{rt\sqrt{2r+1}} d\alpha = \int_0^\chi \frac{1 - (1+r)k^2 \sin^2 \alpha}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \alpha}} d\alpha$$

Segue então que

$$z(r, R) = \int_0^x \frac{-1 + (r+1)k^2 \sin^2 \alpha}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \alpha}} d\alpha + \frac{\sqrt{(R^2 - r^2)[(r+1)^2 - R^2]}}{R}. \quad (2.3.11)$$

Claramente, o pedaço $N_{r,A}$ de N_r dado por

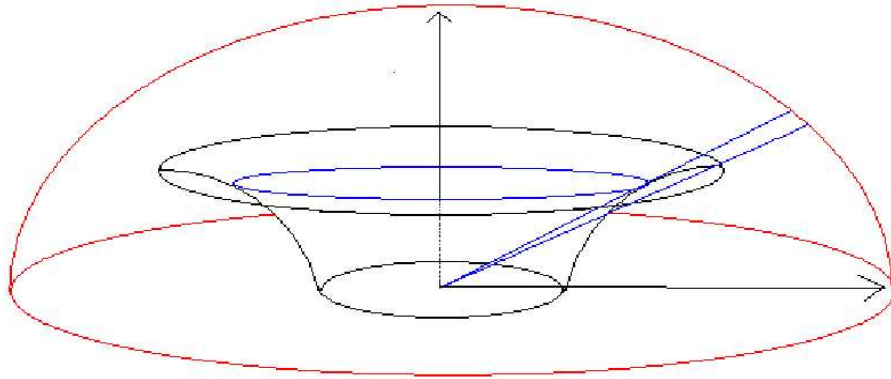
$$N_{r,A} = \{(t, 0, z(r, t)) : r \leq t \leq R\} \cup \{(t, 0, -z(r, t)) : r \leq t \leq R\}$$

gera, após uma rotação em torno do eixo z , um anel $A_{r,R}$ com curvatura média constante $H = 1$ (onde usamos novamente (2.2.1)) cujo bordo consiste de dois círculos c_1 e c_2 de raio R contidos em planos paralelos cuja distância d entre esses planos é

$$d = 2z(r, R).$$

E isto prova o Lema. □

Analisando a construção abaixo,



e tendo em vista o comportamento da curva que gera a superfície obtida no Lema 2.3.2, note que é possível considerar um trecho $N_{r,R}$ dessa curva de forma que existam semi-retas partindo da origem e contidas no mesmo plano que a curva, interceptando $N_{r,R}$ em um único ponto. Consequentemente a rotação de $N_{r,R}$ será uma parte de $A_{r,R}$, que pode ser dada como gráfico radial sobre um domínio contido em uma esfera. Como o raio dos círculos que determinam o bordo está diretamente ligado ao

trecho considerado da curva, veremos no Lema 2.3.4 abaixo, que hipóteses devemos ter sobre o raio desses círculos para garantir que a superfície obtida seja um gráfico radial. Primeiramente precisamos garantir mais duas desigualdades:

Lema 2.3.3. *Assuma que $r \leq R \leq \sqrt{r(r+1)}$ e que $0 \leq \alpha \leq \chi$, onde*

$$\chi = \arcsin \left(\frac{\sqrt{R^2 - r^2}}{Rk} \right). \quad (2.3.12)$$

Então

$$0 \leq \frac{1 - (1+r)k^2 \sin^2 \alpha}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \alpha}} \leq \cos \alpha \quad (2.3.13)$$

e

$$-\sin \chi \leq \int_0^\chi \frac{-1 + (r+1)k^2 \sin^2 \alpha}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \alpha}} d\alpha < 0 \quad (2.3.14)$$

onde, como antes, k é dado por $\frac{\sqrt{2r+1}}{r+1}$.

Demonstração. Para a primeira desigualdade de (2.3.13) é suficiente provar que

$$f(\alpha) := (1+r)k^2 \sin^2 \alpha \leq 1, \quad 0 \leq \alpha \leq \chi.$$

Como $0 \leq \chi \leq \frac{\pi}{2}$ segue que

$$f'(\alpha) = \frac{2r+1}{r+1} \sin 2\alpha \geq 0, \quad 0 \leq \alpha \leq \chi.$$

A afirmação segue então de $\chi \leq \arcsin \left(\sqrt{\frac{r+1}{2r+1}} \right) < \frac{\pi}{2}$, pois $f(0) = 0$ e

$$f(\chi) \leq f \left(\arcsin \left(\sqrt{\frac{r+1}{2r+1}} \right) \right) = 1$$

Para a segunda desigualdade de (2.3.13), observe que, como $k < 1$ e $(1+r)k^2 > 1$, temos

$$\frac{1 - (1+r)k^2 \sin^2 \alpha}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \alpha}} < \frac{1 - (1+r)k^2 \sin^2 \alpha}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}} < \frac{1 - \sin^2 \alpha}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}} = \cos \alpha.$$

Observamos agora que a segunda desigualdade de (2.3.14) segue de (2.3.13). Para a primeira de (2.3.14) note que

$$-\sin \chi = \int_0^x (-\cos \alpha) d\alpha \leq \int_0^x \frac{-1 + (r+1)k^2 \sin^2 \alpha}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \alpha}} d\alpha$$

E isto conclui a prova deste Lema. □

Lema 2.3.4. *Dado $R > 0$, se r é tal que*

$$\sqrt{\frac{R^2 + R\sqrt{R^2 + 4}}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2}} \leq r < R,$$

então

a) $r < R < \sqrt{r(r+1)}$.

b) $A_{r,R}$ é um gráfico radial, onde $A_{r,R}$ é a superfície obtida no Lema 2.3.2.

Demonstração. A parte a) é imediata. Para a parte b) devemos analisar a primeira construção, abaixo baseada na curva do Lema 2.2.1. Observe que para termos um "trecho radial" na geratriz, dado $R > 0$, r deve ser de tal forma que evitemos aqueles pontos da curva onde a inclinação da semi-reta secante (partindo da origem) é maior que a inclinação da tangente à curva (considerando o mesmo ponto), ou seja, r deve estar próximo de R , da forma como mostra a segunda ilustração, que em termos de equações é equivalente a

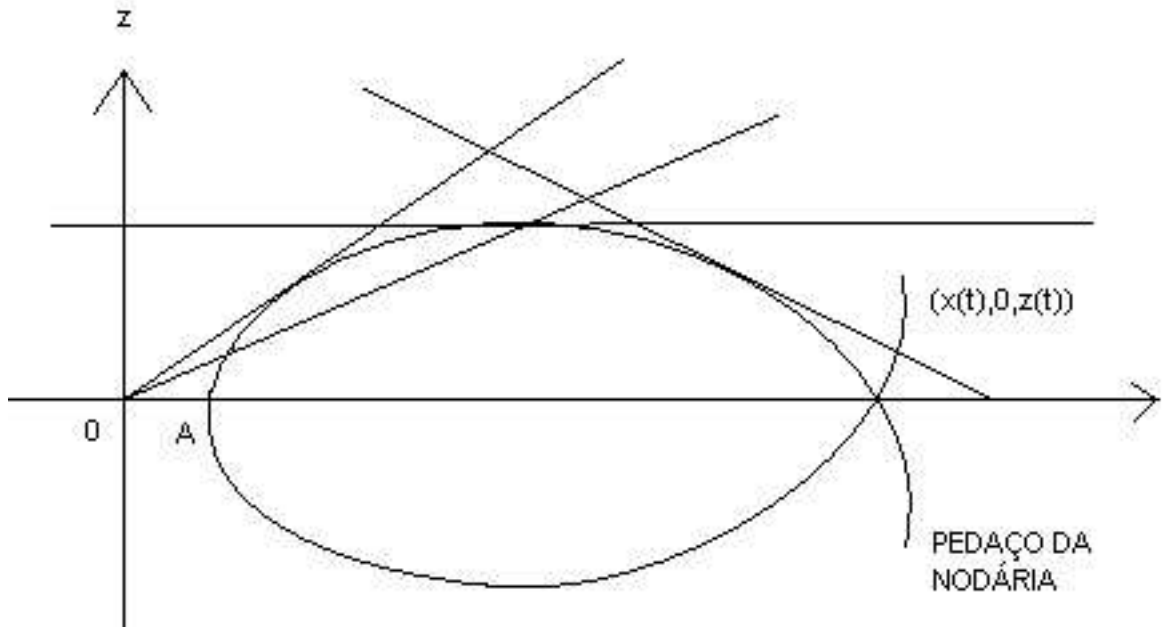
$$tg_R \theta \leq z'(r, R).$$

onde θ é ângulo que a secante faz com a parte positiva do eixo x . Sendo assim, como

$$tg_R \theta = \frac{z(r, R)}{R}$$

devemos ter

$$z(r, R) \leq R[z'(r, R)] = R \frac{r(r+1) - R^2}{\sqrt{(R^2 - r^2)[(r+1)^2 - R^2]}}. \quad (2.3.15)$$



Observe que, para garantirmos (2.3.15) basta mostrarmos que

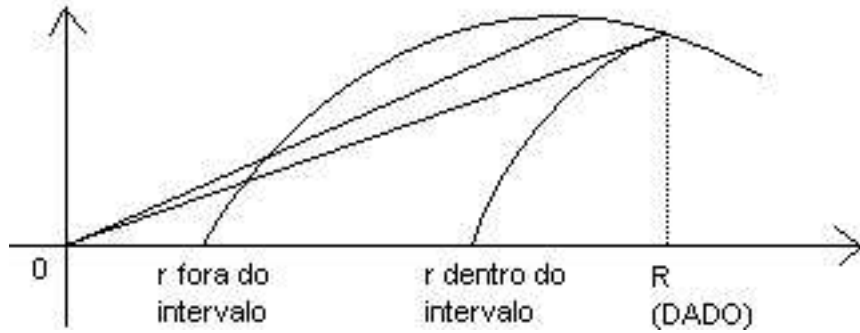
$$\frac{\sqrt{(R^2 - r^2)[(r+1)^2 - R^2]}}{R} \leq R \frac{r(r+1) - R^2}{\sqrt{(R^2 - r^2)[(r+1)^2 - R^2]}}$$

tendo em vista que a primeira parcela de $z(r, R)$ é negativa. Por hipótese

$$\sqrt{\frac{R^2 + R\sqrt{R^2 + 4}}{2}} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \leq r \leq R.$$

Logo

$$\sqrt{\frac{R^2 + R\sqrt{R^2 + 4}}{2}} + \frac{1}{4} \leq r + \frac{1}{2} \Leftrightarrow$$



$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \sqrt{2\left(R^2 + R\sqrt{R^2 + 4}\right)} + 1 \leq 2r + 1 \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow 2\left(R^2 + R\sqrt{R^2 + 4}\right) \leq 4r^2 + 4r \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow R\sqrt{R^2 + 4} \leq 2r(r + 1) - R^2 \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow R^2(4 + 4r(r + 1)) \leq 4r^2(r + 1)^2 \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow R^2(r^2 + r + 1) \leq r^2(r + 1)^2 \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow R^2[2r^2 + 2r + 1 - R^2 - r^2 + R^2 - r] \leq r^2(r + 1)^2 \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow R^2[2r^2 + 2r + 1 - R^2] - R^2[r(r + 1) - R^2] \leq r^2(r + 1)^2 \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow R^2[2r^2 + 2r + 1 - R^2] - r^2(r + 1)^2 \leq R^2[r(r + 1) - R^2] \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \frac{\sqrt{(R^2 - r^2)[(r + 1)^2 - R^2]}}{R} \leq R \frac{r(r + 1) - R^2}{\sqrt{(R^2 - r^2)[(r + 1)^2 - R^2]}}
\end{aligned}$$

o que conclui a prova. □

Um dos principais motivos de apresentarmos todos esses lemas neste capítulo, é que procuramos estabelecer um critério de existência para superfícies cmc com bordo formado por dois círculos em planos paralelos (um sendo a projeção ortogonal do outro), dadas como gráficos radiais, critério este que dependa somente do raio dos círculos dados e da distância entre os planos. Este critério permitirá que encontramos as barreiras desejadas para nossos principais resultados a partir de hipóteses relacionadas com a curvatura do bordo prescrito e a distância entre os planos paralelos que contenham estes bordos.

Combinando adequadamente os resultados dos lemas anteriores deste capítulo,

obtemos o principal resultado deste capítulo e que está compilado na proposição abaixo.

Proposição 2.3.5. *Dado $R > 0$. Sejam π_1 e π_2 planos paralelos equidistantes do plano $\{z = 0\}$ e assumamos que a distância d entre π_1 e π_2 satisfaz*

$$d < 2 \left(\sqrt{\frac{r(r+1)}{r^2+r+1}} - \sqrt{\frac{r}{2r+1}} \right) \quad (2.3.16)$$

com

$$r = \sqrt{\frac{R^2 + R\sqrt{R^2 + 4}}{2}} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2}. \quad (2.3.17)$$

Sejam c_1 um círculo de raio R em π_1 centrado em $(C_1, C_2, \frac{d}{2})$ e seja c_2 a projeção ortogonal de c_1 no plano π_2 . Então existe $r_0 \geq r$ e um gráfico radial $A_{r_0, R}$ de curvatura média constante $H = 1$, sobre uma esfera unitária centrada em $(C_1, C_2, 0)$ tal que $\partial A_{r_0, R} = c_1 \cup c_2$.

Demonstração. Não há perda de generalidade em assumirmos $C_1 = C_2 = 0$. Pela primeira desigualdade de (2.3.14) e usando (2.3.11) obtemos

$$z(r, R) \geq -\sin \chi + \frac{\sqrt{(R^2 - r^2)[(r+1)^2 - R^2]}}{R}.$$

De (2.3.12) obtemos

$$z(r, R) \geq -\frac{1}{Rk} \sqrt{R^2 - r^2} + \frac{\sqrt{(R^2 - r^2)[(r+1)^2 - R^2]}}{R}.$$

Isolando R em (2.3.17) temos

$$R = \frac{r(r+1)}{\sqrt{r^2+r+1}},$$

e substituindo no lado direito da desigualdade imediatamente acima temos

$$z(r, R) \geq \sqrt{\frac{r(r+1)}{r^2+r+1}} - \sqrt{\frac{r}{2r+1}},$$

que é uma estimativa de $z(r, R)$ em termos somente de R . Segue de (2.3.16) que $d/2 < z(r, R)$. Além disso, como $\lim_{t \rightarrow R} z(t, R) = 0$, existe r_0 tal que $z(r_0, R) = d/2$ com

$$\sqrt{\frac{R^2 + R\sqrt{R^2 + 4}}{2}} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \leq r_0 < R. \quad (2.3.18)$$

Segue então de (2.3.18) que $r_0 \leq R \leq \sqrt{r_0(r_0 + 1)}$ e podemos aplicar o Lema 2.3.2 para afirmar a existência de um anel rotacional mergulhado $A_{r_0, R}$ com curvatura média constante $H = 1$ tal que $\partial A_{r_0, R} = c_1 \cup c_2$. Pelo Lema 2.3.4 $A_{r_0, R}$ é um gráfico radial. E isto conclui a prova. \square

Em geral, durante as demonstrações dos teoremas dos próximos capítulos (resultados principais), só serão usadas pequenas faixas contidas nessas superfícies. No entanto, isso não as torna menos importante do que até mesmo os próprios teoremas, pois conforme dito anteriormente, na prova destes usamos diretamente a existência dessas superfícies.

Capítulo 3

Superfícies mínimas duplamente conexas com bordo prescrito em planos paralelos

Neste capítulo mostraremos alguns resultados de existência de superfícies mínimas com bordo prescrito e em planos paralelos, via resolução de problemas de Dirichlet para a equação das superfícies mínimas de curvatura média constante, tanto para o caso de gráficos euclidianos como para o caso de gráficos radiais.

3.1 Um resultado de existência para gráficos mínimos

Dado um catenóide, considere um "pedaço" dele entre dois planos distintos ortogonais a seu eixo de rotação que o interceptem de um mesmo lado em relação ao plano que contém sua cintura. Note que as intersecções com os planos produzirão dois círculos de raio distintos, cuja projeção daquele de raio menor sobre o plano que contém o outro estará contida na região limitada pelo outro círculo. Segue-se que tal pedaço é então um gráfico euclidiano sobre a região limitada do plano que contém o círculo de raio maior.

Quando tais curvas dadas não são necessariamente como as descritas acima, um

resultado importante nesta direção é o Teorema 2.1 de [6] (Teorema 3.1.1 abaixo), o qual quando posto para o nosso contexto de superfícies duplamente conexas responde a seguinte pergunta: dadas duas curvas fechadas γ_1 e γ_2 em planos paralelos distintos π_1 e π_2 , com $\gamma_1 \subset \pi_1$ e $\gamma_2 \subset \pi_2$, sob quais hipóteses envolvendo a geometria de tais curvas, a distância entre os planos etc, é possível garantir a existência de um gráfico mínimo tendo como bordo $\gamma_1 \cup \gamma_2$?

O teorema citado responde esta pergunta e, além disso, estende este resultado para um número finito de curvas. A técnica utilizada é o já apresentado Método de Perron.

Teorema 3.1.1. *Sejam $\Gamma_1, \dots, \Gamma_k, \Gamma$ curvas fechadas no plano $z = 0$ tais que cada curva Γ_i , $i = 1, \dots, k$ está contida no interior da região limitada por Γ e tais que os domínios limitados pelas curvas Γ_i sejam disjuntos. Assuma que cada $\Gamma_1, \dots, \Gamma_k$ satisfaz a condição do círculo interior com algum raio $0 < R_1 < \infty$ (isto é, dado qualquer ponto p em Γ_i existe um círculo de raio R_1 passando por p e contido no fecho da região limitada por Γ_i , $i = 1, \dots, k$), que Γ satisfaz a condição do círculo exterior com algum raio $0 < R_2 \leq \infty$ (isto é, dado qualquer ponto p em Γ existe um círculo de raio R_2 passando por p e contido no fecho do exterior de Γ). Denote por Ω o domínio multiplamente conexo limitado por Γ_i, Γ , $i = 1, \dots, k$. Sendo*

$$d = d(\cup_{i=1}^k \Gamma_i, \Gamma) = \inf \{|p_1 - p_2| : p_1 \in \cup_{i=1}^k \Gamma_i, p_2 \in \Gamma\},$$

se $h \geq 0$ é tal que

$$\cosh\left(\frac{h}{R_i}\right) \leq \frac{R_i + d}{R_i}, \quad i = 1, 2, \quad (3.1.1)$$

então existe $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ solução de $Q_0 = 0$ em Ω tal que $u|_{\Gamma} = 0$ e $u|_{\Gamma_i} = h$, $i = 1, \dots, k$.

Note que $R_2 = \infty$ se e somente se Γ é convexa. Neste caso, a condição (3.1.1) é automaticamente satisfeita para $i = 2$.

Demonstração. Segue do Método de Perron que a função u definida em Ω , que a cada $p \in \Omega$ associa

$$u(p) = \sup\{s(p) \mid s \text{ é uma subsolução de } Q_0 = 0 \text{ em } \Omega \text{ com } 0 \leq s \leq h\}$$

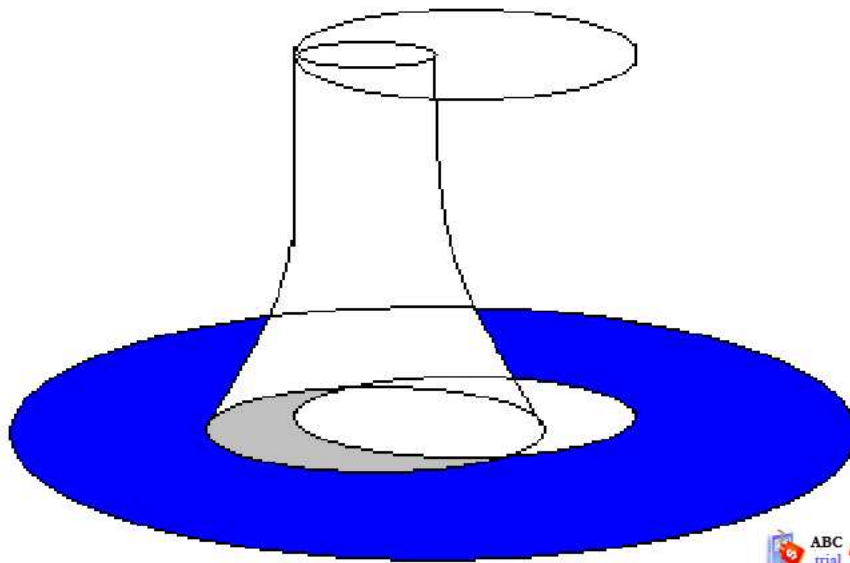
é de classe C^2 e satisfaz a equação $Q_0 = 0$ em Ω . Para provar que u satisfaz as condições $u|_{\Gamma} = 0$ e $u|_{\Gamma_i} = h$, $i = 1, \dots, k$, vamos construir barreiras apropriadas em todo ponto de $\partial\Omega$, isto é, dado $p \in \partial\Omega$ vamos garantir a existência de sub e supersoluções $v_p, w_p \in C^0(\overline{\Omega})$ para $Q_0 = 0$ em Ω tais que $0 \leq v_p \leq w_p \leq h$, $0 = v_p(p) = w_p(p)$ se $p \in \Gamma$ e $h = v_p(p) = w_p(p)$ se $p \in \cup\Gamma_i$. Como o teorema consiste em garantir a existência de uma determinada superfície mínima, candidatas à barreiras v_p serão construídas através de pedaços de catenóides, da seguinte maneira. Dado $i \in \{1, \dots, k\}$ e $p \in \Gamma_i$, podemos considerar um círculo C_p de raio R_1 passando por (p, h) e contido na região do plano $z = h$ limitada por $\Gamma_i + he_3$. Seja c_p o centro de C_p . Observe que o pedaço J_p do catenóide

$$J_p(x) = -R_1 \cosh^{-1} \left(\frac{|x - c_p|}{R_1} \right) + h$$

com

$$R_1 \leq |x - c_p| \leq R_1 \cosh \left(\frac{h}{R_1} \right),$$

tem como bordo dois círculos $C_{1,p} = C_p$ e $C_{2,p} = J_p \cap \{z = 0\}$.



Note que $C_{2,p}$ tem raio $R_1 \cosh\left(\frac{h}{R_1}\right)$, pois

$$-R_1 \cosh^{-1}\left(\frac{|x - c_p|}{R_1}\right) + h = 0$$

implica

$$\cosh^{-1}\left(\frac{|x - c_p|}{R_1}\right) = \frac{h}{R_1}.$$

Logo

$$|x - c_p| = R_1 \cosh\left(\frac{h}{R_1}\right).$$

Além disso, $C_{2,p}$ está contido no fecho da região limitada por Γ , visto que, por (3.1.1) temos

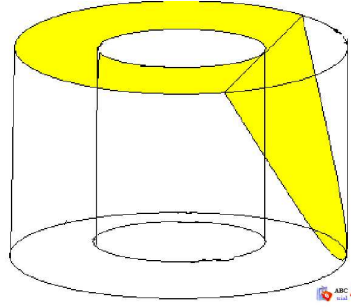
$$|x - c_p| = R_1 \cosh\left(\frac{h}{R_1}\right) \leq R_1 + d$$

e $(C_{1,p})^* \subset C_{2,p}$, onde $(C_{1,p})^*$ representa a projeção ortogonal de $C_{1,p}$ em $\{z = 0\}$. Defina então a seguinte função

$$v_p(q) = \begin{cases} J_p(q) & \text{se } q \in \Omega_1 \\ 0 & \text{se } q \in \Omega_2, \text{ onde } \Omega_2 = \overline{\Omega} - \Omega_1 \end{cases}, \quad (3.1.2)$$

onde $\Omega_1 = D_{2,p} \cap \overline{\Omega}$ e $D_{2,p}$ é o disco fechado limitado por $C_{2,p}$. Observe que $v_p|_{\partial\Omega_1} \leq u|_{\partial\Omega_1}$, para qualquer u solução de $Q_0 = 0$ em $\overline{\Omega}$ com $u|_{\Gamma} = 0$ e $u|_{\Gamma_i} = h$, e, além disso, $Q_0(J_p) = 0$. Portanto $v_p \leq u$ em Ω_1 . Para $q \in \Omega_2$, com um raciocínio análogo ao anterior, obtemos $v_p \leq u$ em Ω_2 . Como $\Omega_1 \cup \Omega_2 = \overline{\Omega}$, então $v_p \leq u$ em $\overline{\Omega}$ e, de acordo com a definição de v_p , temos $v_p \in C^0(\overline{\Omega})$, $v_p(p) = 0$ se $p \in \Gamma$ e $v_p(p) = h$ se $p \in \cup\Gamma_i$. Portanto v_p é subsolução. Passamos agora à construção de supersoluções de $Q_0 = 0$ em $\overline{\Omega}$. Vamos tratar primeiro do caso que Γ é convexa, isto é, $R_2 = \infty$. Seja Σ uma curva convexa contida no plano $\{z = h\}$ cuja projeção ortogonal no plano $\{z = 0\}$ está contida em Ω e limita uma região que contém $\cup\Gamma_i$. Então, existe uma linha reta l_p passando por p e que divide o plano $\{z = 0\}$ em dois semi-planos fechados, um deles contendo Ω . Seja P_p o plano contendo l_p e que intercepta o plano $\{z = h\}$ em uma linha reta L_p tal que $L_p \cap \Sigma \neq \emptyset$ e tal que uma das componentes fechadas de $\{z = h\} \setminus L_p$ contém Σ . Note que P_p é o gráfico de uma função linear u_p

definida em todo o plano $z = 0$. Denote também por u_p sua restrição à Ω . Defina $w_p = \min \{u_p, h\}$.



Note que a projeção ortogonal de L_p no plano $z = 0$ divide Ω em duas regiões uma delas, digamos Ω_{Γ_i} , contendo $\cup \Gamma_i$. Observe que o gráfico de w_p sobre Ω_{Γ_i} é um plano cuja equação é $z = h$, e no restante de Ω é um pedaço de P_p . Aplicando o Teorema 1.1.7 à cada uma das regiões Ω_{Γ_i} e $\Omega - \Omega_{\Gamma_i}$, temos que w_p é uma supersolução de $Q_0 = 0$ em Ω satisfazendo $0 \leq w_p \leq h$, $w_p(p) = 0$ se $p \in \Gamma$ e $w_p(p) = h$ se $p \in \cup \Gamma_i$. Vejamos agora o caso onde $R_2 < \infty$. Por hipótese, podemos considerar um círculo D_p de raio R_2 passando por p e contido no fecho do exterior de Γ . Seja d_p o centro de D_p . O pedaço K_p do catenóide

$$K_p(x) = R_2 \cosh^{-1} \left(\frac{|x - d_p|}{R_2} \right)$$

com

$$R_2 \leq |x - d_p| \leq R_2 \cosh \left(\frac{h}{R_2} \right)$$

tem como bordo dois círculos $D_{1,p} = D_p$ e $D_{2,p}$, onde $D_{2,p}$ é um círculo no plano $z = h$ que, tendo em vista (3.1.1) está no exterior de Γ_i , $i = 1, \dots, k$. Defina uma supersolução w_p em Ω , como sendo

$$w_p(q) = \begin{cases} K_p(q) & \text{se } q \text{ está contido em } D_{2,p}^* \\ h & \text{se } q \text{ não está contido em } D_{2,p}^*, q \in \Omega, \end{cases}$$

onde $D_{2,p}^*$ denota a projeção ortogonal de $D_{2,p}$ no plano $z = 0$. Por uma construção semelhante àquela feita em (3.1.2), fica evidente o fato de que w_p é uma supersolução

satisfazendo $0 \leq w_p \leq h$, $w_p(p) = 0$ se $p \in \Gamma$. Se $p \in \Gamma_i$, para algum Γ_i , simplesmente definimos $w_p \equiv h$. Portanto, foram obtidas sub e supersoluções para $Q_0 = 0$ em Ω , concluindo assim a prova do Teorema. \square

3.2 Resultados de existência para gráficos mínimos radiais

Vejamos agora um teorema contido no artigo [9] (com maiores detalhes pode ser visto em [8]) a respeito da existência de um anel mínimo, dado como gráfico radial sobre um domínio anelar contido em uma esfera unitária, tendo como bordo prescrito curvas fechadas convexas em planos paralelos.

A mudança com relação ao Teorema 3.1.1 é que neste caso $\gamma_2 = \gamma_1^*$ e γ_1 convexa.

Teorema 3.2.1. (ANEL-MÍNMO) *Sejam γ_1 e γ_2 curvas convexas fechadas suaves contidas em planos paralelos distintos π_1 e π_2 de \mathbb{R}^3 . Assuma que γ_2 é a projeção ortogonal de γ_1 no plano π_2 e que a distância entre os planos π_1 e π_2 satisfaz*

$$d < \frac{2}{bk_{\max}}$$

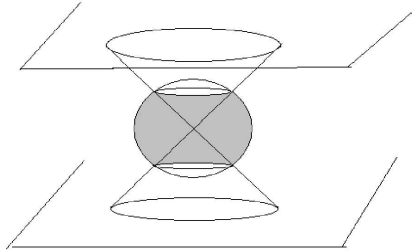
onde k_{\max} denota o máximo da curvatura de γ_1 , $b = \sinh x_0$, e x_0 é a única raiz positiva de $\cosh x - x \sinh x = 0$ ($x_0 \approx 1.19965$ e $b \approx 1.5089$). Então existe um anel mínimo mergulhado tendo como bordo $\gamma_1 \cup \gamma_2$.

Demonstração. Note que as curvas γ_i com $i = 1$ e 2 , são gráficos radiais sobre uma esfera unitária centrada em um ponto equidistante do plano π_i , que podemos assumir como sendo a origem. A projeção radial α_i de γ_i em \mathbb{S}^2 é o bordo de um domínio Ω em \mathbb{S}^2 e γ_i é o gráfico radial de uma função ψ_i definida em α_i .

Denote por $C(\Omega)$ o cone radial sobre Ω , isto é

$$C(\Omega) = \{rp; r > 0, p \in \Omega\}.$$

Como k_{\max} é o máximo da curvatura de γ_i , podemos considerar um círculo c_i de raio $R = \frac{1}{k_{\max}}$ totalmente contido no interior da região limitada por γ_i . Façamos com



que o centro desses círculos pertençam a uma reta perpendicular a π_i passando pela origem. Por hipótese

$$d < \frac{2}{bk_{\max}},$$

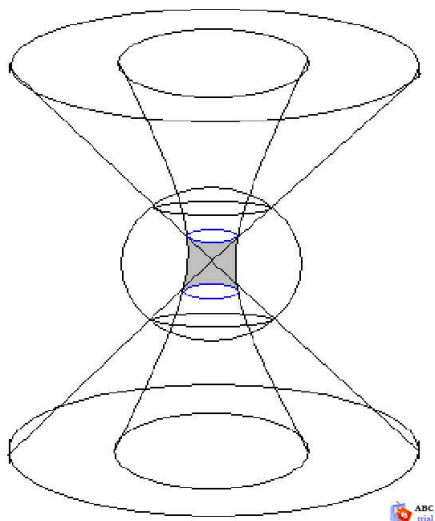
donde

$$d < \frac{2R}{b}$$

e portanto

$$\frac{R}{d\sqrt{2}} > b.$$

Note que o raio de c_i e a distância entre os planos satisfazem as condições de existência para um catenóide dados pelo Lema 2.1.2. Sendo assim podemos considerar um catenóide K (superfície mínima) com bordo $c_1 \cup c_2$. Ver ilustração abaixo.

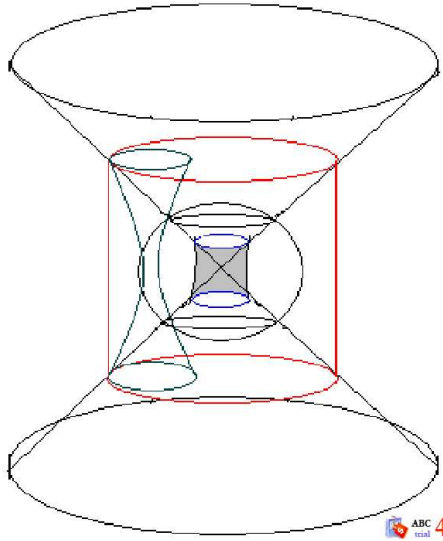


Observe que $K \cap C(\Omega)$ é um gráfico radial de uma função $v \in C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$, e sendo

$\phi_i = v|_{\alpha_i}$ temos $\phi_i < \psi_i$. Defina então a seguinte homotopia

$$(\Psi_i)_t = (1 - t)\phi_i + t\psi_i, \quad t \in [0, 1], \quad i = 1, 2,$$

provaremos que $(\Psi_i)_t$ satisfaz as condições da definição de homotopia regular para $H = 0$. Vamos começar obtendo barreiras por dentro (no sentido radial) para cada imagem da homotopia acima. Para isso considere $t \in [0, 1]$ e, em cada ponto p do gráfico radial $(\gamma_1)_t$ de $(\Psi_i)_t$, um catenóide K_p^t passando por este ponto com bordo circular contido em um plano paralelo a π_i e tangente a $(\gamma_i)_t$ em p . Observe que, K_p^t é gráfico radial sobre uma faixa em $\bar{\Omega}$. Considere EK_p^t a superfície envelope da família de catenóides obtidos quando p percorre $(\gamma_1)_t$. Note que $\partial EK_p^t = (\gamma_1)_t \cup (\gamma_2)_t$ e EK_p^t tem curvatura média constante menor ou igual a zero. Além disso EK_p^t é um gráfico radial sobre $\bar{\Omega}$. Então aplicando o Teorema 1.2.11 segue o resultado desejado. Como uma barreira por fora (no sentido radial), tome um cilindro M sobre $(\gamma_1)_t \cup (\gamma_2)_t$.



Tendo em vista que a curvatura média de M é positiva quando o vetor normal satisfaz $\langle N(p), p \rangle \leq 0$, então o cilindro serve como barreira por fora. Sendo assim, obtemos funções $s_{p,t}^-(p)$ e $s_{p,t}^+(p)$ cujos gráficos são EK_p^t e M respectivamente, que satisfazem os itens da Definição 1.2.4, provando assim que os caminhos $(\Psi_i)_1$ e $(\Psi_i)_0$ são regularmente homotópicos. Segue do Teorema 1.2.5 a conclusão. \square

Ainda falando sobre o caso das superfícies mínimas, em que o bordo é formado por curvas em planos paralelos e onde uma é projeção ortogonal da outra, temos um resultado que aparece em [2] (Teorema 3.2.4 abaixo), onde essas curvas não são necessariamente convexas, porém existindo uma relação entre a condição do círculo interior e a condição do círculo exterior dessas curvas. Assim como no Teorema 3.2.1, neste resultado também temos a distância entre planos dependendo somente do raio relativo à condição do círculo interior.

Deixaremos a demonstração deste teorema para ser feita juntamente com o caso H positivo, visto que trata-se de um resultado válido para $H \geq 0$. No entanto, apresentaremos aqui o enunciado do caso $H = 0$ devidamente adaptado, observando a seguinte definição:

Definição 3.2.2. Dizemos que duas curvas γ_1 e γ_2 são curvas cilíndricas se são curvas de Jordan, suaves, situadas em planos paralelos, e são gráficos cilíndricos sobre o mesmo cilindro ortogonal a esses planos.

Definição 3.2.3. Dizemos que uma curva é uma curva cilíndrica (ou curva de Jordan suave star shape) se ela é uma curva de Jordan suave (plana) que é um gráfico cilíndrico sobre um cilindro reto ortogonal ao plano que a contém.

Teorema 3.2.4. Seja γ_1 uma curva cilíndrica em um plano $\pi_1 \subset \mathbb{R}^3$ satisfazendo a condição do círculo interior com raio R e γ_2 a projeção ortogonal de γ_1 em um plano π_2 paralelo a π_1 . Assuma que a distância d entre os planos π_1 e π_2 satisfaz

$$d \leq \frac{2f[r; R^2]}{R},$$

e que γ_1 satisfaz a condição do círculo exterior com raio

$$R_e \geq \max \left\{ \frac{1}{R} \left(R^2 - r + \frac{1}{2} \right), \frac{bf[r; R^2]}{R} \right\},$$

onde

$$f[r; R^2] = f(r(R^2)) = \frac{(r+2)r^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{(r^2+r+1)(2r+1)}(\sqrt{2r^2+3r+1} + \sqrt{r^2+r+1})}$$

para

$$r = r(R^2) = \sqrt{\frac{R^4 + R^2\sqrt{R^4 + 4}}{2}} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2}$$

e b é dado pelo Teorema 3.2.1. Então, existe um anel mínimo mergulhado A tendo $\gamma_1 \cup \gamma_2$ como bordo. Além disso, A é um gráfico radial sobre uma esfera unitária.

Encerramos este capítulo observando que como tratamos de superfícies mínimas, então não faz diferença qual orientação escolhemos, para confirmar isto basta analisar a equação tendo em vista as duas orientações possíveis.

Capítulo 4

Superfícies duplamente conexas de cmc $H > 0$ com bordo prescrito em planos paralelos

Dando continuidade a proposta do trabalho, passamos agora a tratar do Problema de Dirichlet para a equação das superfícies cmc no caso $H > 0$ (para gráficos radiais e também para gráficos euclidianos) cujo bordo, prescrito em planos paralelos distintos, é formado por duas curvas de Jordan suaves γ_1 e γ_2 . Veremos que a diferença principal entre os resultados deste capítulo, consiste na posição relativa entre as curvas dadas. Aqui exploraremos o maior número possível de situações.

4.1 Anéis radiais de cmc $H > 0$

Começamos com o Teorema 4.1.1, onde são as curvas γ_1 e γ_2 são convexas, com $\gamma_1^* = \gamma_2$ e hipóteses relacionando à curvatura de γ_1 e γ_2 com a distância entre os planos que contém tais curvas. Na sequência, retiramos a hipótese de convexidade das curvas, e passamos a uma noção mais geral onde é possível incluir o caso não necessariamente convexo, conforme vemos no Lema 4.1.2 e no Teorema 4.1.3, onde neste último ainda consideramos $\gamma_1^* = \gamma_2$. No entanto, entre os resultados deste capítulo um chama mais atenção que os demais, trata-se da Proposição 4.1.5, onde consideramos agora o caso em que uma das curvas não é necessariamente a projeção

ortogonal da outra.

Observamos que a curvatura média do gráficos radial A , está sendo calculada com relação ao campo de vetores unitários normais satisfazendo $\langle N(p), p \rangle \geq 0$ para todo $p \in A$.

Teorema 4.1.1. *Dado $H > 0$. Sejam γ_1 e γ_2 curvas convexas fechadas suaves em planos paralelos distintos π_1 e π_2 de \mathbb{R}^3 , γ_2 sendo a projeção ortogonal de γ_1 no plano π_2 . Seja k_{\max} o máximo da curvatura de γ_1 e seja*

$$r = \frac{1}{2} \left(\sqrt{1 + \frac{2 + 2\sqrt{1 + 4\left(\frac{k_{\max}}{H}\right)^2}}{\left(\frac{k_{\max}}{H}\right)^2}} - 1 \right). \quad (4.1.1)$$

Assuma que a distância d entre os planos π_1 e π_2 satisfaz

$$d < \frac{2(r+2)r^{\frac{3}{2}}}{H\sqrt{(r^2+r+1)(2r+1)}(\sqrt{2r^2+3r+1} + \sqrt{r^2+r+1})}. \quad (4.1.2)$$

Então existe um anel mergulhado A com curvatura média constante H tendo como bordo $\gamma_1 \cup \gamma_2$. Além disso, A é um gráfico radial sobre uma esfera unitária.

Observamos que para a prova do teorema acima, basta considerar o caso $H = 1$. De fato: Assuma que o Teorema acima é válido para o caso $H = 1$. Suponha agora $H > 0$ e sejam γ_1 e γ_2 como no enunciado do Teorema. Então as curvas $H\gamma_1$ e $H\gamma_2$ estão em planos paralelos π'_1 e π'_2 , a distância entre π'_1 e π'_2 é Hd , e o máximo da curvatura de $H\gamma_1$ é k_{\max}/H . Como as hipóteses do Teorema são satisfeitas, existe um anel mergulhado A , tendo $H\gamma_1 \cup H\gamma_2$ como bordo, com cmc 1, dado como gráfico radial sobre um domínio anelar Ω . Seja $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ a função cujo gráfico radial é A . Como $Q_1^*(u) = 0$ então para todo $H > 0$ temos $Q_H^*\left(\frac{u}{H}\right) = 0$. De fato, $Q_1^*(u) = 0$ é equivalente a

$$\operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{\beta^{1/2}} \right) - \frac{2u}{\lambda^2} \left(\frac{2}{\beta^{1/2}} - 1 \right) = 0,$$

$\beta = 4u^2 + \lambda^2 |\nabla u|^2$, $\lambda = 1 + x^2 + y^2$. Multiplicando e dividindo ambos os lados da

equação por $\frac{1}{H}$ temos

$$\operatorname{div} \left[\frac{\nabla \left(\frac{u}{H} \right)}{\left(4 \left(\frac{u}{H} \right)^2 + \lambda^2 \left| \nabla \left(\frac{u}{H} \right) \right|^2 \right)^{1/2}} \right] - \frac{2 \left(\frac{u}{H} \right)}{\lambda^2} \left(\frac{2}{\left(4 \left(\frac{u}{H} \right)^2 + \lambda^2 \left| \nabla \left(\frac{u}{H} \right) \right|^2 \right)^{1/2}} - H \right) = 0,$$

o que nos dá $Q_H^* \left(\frac{u}{H} \right) = 0$. Além disso, $\frac{u}{H}|_{\partial\Omega} = \gamma_1 \cup \gamma_2$ e portanto podemos considerar somente o caso $H = 1$.

Seja γ uma curva (plana) de Jordan. No restante do texto denotaremos por $\operatorname{int}(\gamma)$ o interior da região limitada por γ e por $\operatorname{clos}(\gamma)$ o fecho da região limitada por γ .

Demonstração. Seja π um plano paralelo equidistante de π_1 e π_2 e assuma que a origem O de \mathbb{R}^3 pertence a π . Seja $R = \frac{1}{k_{\max}}$. Escolha um ponto A em $\operatorname{int}(\gamma_1)$ cuja distância a γ_1 é maior ou igual a R . Assuma que a projeção ortogonal de A em π coincide com O . Seja \mathbb{S}^2 a esfera unitária centrada na origem. Note que γ_1 e γ_2 são gráficos radiais sobre \mathbb{S}^2 . Seja

$$\alpha_i = \mathbb{S}^2 \cap \{tp : p \in \gamma_i, t \geq 0\}, \quad i = 1, 2.$$

Considere Ω como a componente anelar de $\mathbb{S}^2 \setminus (\alpha_1 \cup \alpha_2)$. Temos então que γ_1 e γ_2 são gráficos radiais de uma função $\psi \in C^{2,\alpha}(\partial\Omega)$. O decorrer da demonstração consiste em garantir que Ω e ψ estão nas hipóteses do Teorema 1.2.6. Como $R = \frac{1}{k_{\max}}$ e $H = 1$ então (4.1.1) toma o seguinte formato:

$$r = \sqrt{\frac{R^2 + R\sqrt{R^2 + 4}}{2}} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2},$$

ou seja,

$$R = \frac{r(r+1)}{\sqrt{r^2 + r + 1}},$$

e portanto,

$$\frac{1}{k_{\max}} = \frac{r(r+1)}{\sqrt{r^2 + r + 1}}.$$

Por hipótese temos que (já considerando $H = 1$)

$$d < \frac{2(r+2)r^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{(r^2+r+1)(2r+1)}(\sqrt{2r^2+3r+1} + \sqrt{r^2+r+1})},$$

donde

$$d < 2 \left(\sqrt{\frac{r(r+1)}{r^2+r+1}} - \sqrt{\frac{r}{2r+1}} \right).$$

Mas

$$\begin{aligned} 2 \left(\sqrt{\frac{r(r+1)}{r^2+r+1}} - \sqrt{\frac{r}{2r+1}} \right) &= \frac{2}{k_{\max}} \left(\frac{1}{\sqrt{r(r+1)}} - \sqrt{\frac{r}{2r+1}} \frac{\sqrt{r^2+r+1}}{r(r+1)} \right) = \\ &= \frac{2}{k_{\max}} \left(\frac{\sqrt{2r^2+3r+1} - \sqrt{r^2+r+1}}{\sqrt{r}(r+1)\sqrt{2r+1}} \right), \end{aligned}$$

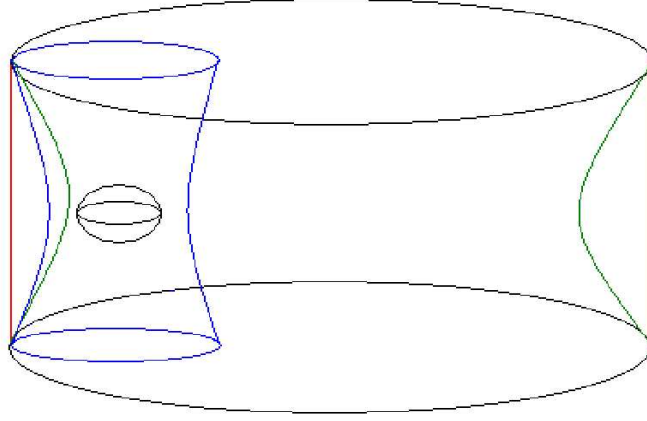
e como

$$\frac{\sqrt{2r^2+3r+1} - \sqrt{r^2+r+1}}{\sqrt{r}(r+1)\sqrt{2r+1}} \leq \frac{1}{2} \leq \frac{1}{b},$$

então

$$d < 2 \left(\sqrt{\frac{r(r+1)}{r^2+r+1}} - \sqrt{\frac{r}{2r+1}} \right) \leq \frac{2}{bk_{\max}}.$$

Sendo assim, estamos nas hipóteses do Teorema 3.2.1, e podemos portanto garantir a existência de uma superfície mínima tendo como bordo $\gamma_1 \cup \gamma_2$. Devemos agora garantir que ψ é 1-regular. Para isso devemos obter barreira locais referentes à Q_1^* que possuam gradiente limitado, e para tal, de acordo com o Lema 1.2.14, é suficiente obter uma limitação positiva inferior para o termo $\langle N(q), q \rangle$ onde q pertence à barreira a ser obtida e N é o vetor unitário normal em q . Dado $p \in \gamma_1$, seja $c_p^1 \subset \pi_1$ um círculo tangente à γ_1 em p de raio $R = \frac{1}{k_{\max}}$ e contido no fecho da região limitada por γ_1 . Note que podemos aplicar o Lema 2.3.5 para garantir a existência de $r_0 > r$ não dependendo de p e um anel rotacional $A_{r_0, R}^p$ de curvatura média constante $H = 1$ com $\partial A_{r_0, R}^p = c_p^1 \cup c_p^2$, onde c_p^2 é a projeção ortogonal de c_p^1 em π_2 . Além disso, $A_{r_0, R}^p$ é um gráfico radial suave sobre um domínio Δ_p contido na esfera unitária centrada em algum ponto $C_p \in \pi$ tal que $d(C_p, \gamma) = R$ e $d(C_p, q)$, onde γ é a projeção ortogonal de γ_1 no plano π e q é a projeção ortogonal de p em π .



Seja N_p o vetor unitário normal à $A_{r_0, R}^p$ apontando para o exterior da região limitada por π_1, π_2 e $A_{r_0, R}^p$. Note que

$$\langle N_p(p), p \rangle = \langle N_p(p), \overrightarrow{Op} \rangle = \langle N_p(p), \overrightarrow{C_p p} \rangle + \langle N_p(p), \overrightarrow{OC_p} \rangle,$$

onde $\overrightarrow{C_p p}$ é o vetor posição de p com relação à esfera centrada em C_p . Na tentativa de estimar o produto interno acima, vamos analisar a relação entre o vetor normal e o vetor posição da curva geratriz. Observe que os pontos pertencente ao trecho de N_r tais que sua rotação gera $A_{r_0, R}^p$, todos tem altura menor que $z(r, R)$. Como o vetor \overrightarrow{F} de coordenadas $(R, z(r, R))$ é o único que, ao mesmo tempo, é vetor-posição e vetor tangente, temos que, ao considerarmos semi-retas partindo da origem na direção de N_r , essas serão secantes à curva. Logo os vetores-posição não coincidem com os vetores tangentes no trecho considerado, donde o vetor normal e o vetor posição satisfazem $\langle N_p(p), \overrightarrow{C_p p} \rangle > 0$ neste trecho. Para provar que $\langle N_p(p), \overrightarrow{OC_p} \rangle \geq 0$ vamos considerar o plano η determinado por C_p, p e q . Como $A_{r_0, R}^p$ é a rotação de $A_{r_0, R}^p \cap \eta$ em torno de uma reta L em η ortogonal a π e passando por C_p , temos $N_p(p) \in \eta$. Seja $\overrightarrow{U_p}$ a projeção ortogonal de $\overrightarrow{OC_p}$ no plano η . Note que o ângulo α entre $\overrightarrow{OC_p}$ e $N_p(p)$ é igual ao ângulo entre $N_p(p)$ e $\overrightarrow{U_p}$. Seja β o ângulo entre $\overrightarrow{OC_p}$ e $\overrightarrow{U_p}$. Temos $0 \leq \beta \leq \frac{\pi}{2}$. Primeiramente note que para o caso $\beta = \frac{\pi}{2}$ a afirmação é

trivialmente satisfeita, suponhamos então $0 \leq \beta < \frac{\pi}{2}$. Observe que

$$\langle N_p(p), \overrightarrow{OC_p} \rangle = (\cos \alpha) \cdot |\overrightarrow{OC_p}|$$

mas

$$\cos \alpha = \frac{\langle N_p(p), \overrightarrow{U_p} \rangle}{|\overrightarrow{U_p}|} \text{ e } |\overrightarrow{OC_p}| = \frac{|\overrightarrow{U_p}|}{\cos \beta}$$

logo

$$\langle N_p(p), \overrightarrow{OC_p} \rangle = \frac{\langle N_p(p), \overrightarrow{U_p} \rangle}{|\overrightarrow{U_p}|} \cdot \frac{|\overrightarrow{U_p}|}{\cos \beta} = \frac{\langle N_p(p), \overrightarrow{U_p} \rangle}{\cos \beta}.$$

Vamos analisar agora o sinal da expressão $\langle N_p(p), \overrightarrow{U_p} \rangle$. Para isso é importante observar que $\overrightarrow{U_p}$ deve ser um múltiplo de $\overrightarrow{C_pq}$, isto é, $\overrightarrow{U_p} = \lambda \overrightarrow{C_pq}$, com $\lambda \geq 0$ pois $d(O, q) \geq R = d(C_p, q)$, logo

$$\langle N_p(p), \overrightarrow{U_p} \rangle = \langle N_p(p), \lambda \overrightarrow{C_pq} \rangle = \lambda \langle N_p(p), \overrightarrow{C_pq} \rangle.$$

Pela construção $\overrightarrow{C_pq}$ é um vetor entre $\overrightarrow{C_pp}$ e $N_p(p)$, portanto $\langle N_p(p), \overrightarrow{C_pq} \rangle > 0$. Sendo assim

$$\langle N_p(p), \overrightarrow{U_p} \rangle = \lambda \langle N_p(p), \overrightarrow{C_pq} \rangle \geq 0$$

e

$$\frac{\langle N_p(p), \overrightarrow{U_p} \rangle}{\cos \beta} \geq 0, \text{ tendo em vista que } 0 \leq \beta < \frac{\pi}{2}.$$

Logo

$$\langle N_p(p), \overrightarrow{OC_p} \rangle \geq 0.$$

Disto segue que $\langle N_p(p), p \rangle > 0$ e, por continuidade, existem $\delta_p > 0$ e uma vizinhança Z_p de p em γ_1 tal que $\langle N_q(q), q \rangle \geq \delta_p$ para todo $q \in Z_p$. Por compacidade, podemos cobrir γ_1 por um número finito de vizinhanças Z_{p_1}, \dots, Z_{p_n} . Sendo $\delta = \min \{\delta_{p_1}, \delta_{p_2}, \dots, \delta_{p_n}\}$, segue que $\langle N_q(q), q \rangle \geq \delta$ para todo $q \in \gamma_1$. Aplicando diretamente o Teorema 1.2.11 verifica-se que qualquer gráfico radial $A_{r_0, R}^p$ fornece uma barreira suave s_p^- (por dentro) em qualquer $p \in \gamma_1$, com $|\nabla s_p^-|$ limitada. Para

obter uma barreira acima s_p^+ tomamos o cilindro sobre $\gamma_1 \cup \gamma_2$, que de acordo com a orientação escolhida tem curvatura média (não necessariamente constante) negativa. Aplicando novamente o Teorema 1.2.11 temos que s_p^+ serve aos propósitos do problema e além disso $|\nabla s_p^+|$ é limitada. Sendo assim provamos que ψ é 1-regular, e podemos aplicar o Teorema 1.2.6. Concluindo assim a demonstração. \square

Dado $R > 0$ defina

$$f[r, R] = \frac{(r+2)r^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{(r^2+r+1)(2r+1)}(\sqrt{2r^2+3r+1} + \sqrt{r^2+r+1})} = (4.1.3)$$

$$= \sqrt{\frac{r(r+1)}{r^2+r+1}} - \sqrt{\frac{r}{2r+1}}, \quad (4.1.4)$$

onde

$$r = r(R) = \sqrt{\frac{R^2 + R\sqrt{R^2 + 4}}{2}} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2}.$$

Vejamos agora, um resultado do artigo [2], que abre caminho para o caso onde tratamos a situação γ_1 e γ_2 não necessariamente convexas e $\gamma_1^* = \gamma_2$.

Lema 4.1.2. *Seja γ_1 uma curva cilíndrica no plano π_1 satisfazendo a condição do círculo interior e exterior com raios R e R_e respectivamente, e seja γ_1^* sua projeção ortogonal no plano π_2 paralelo a π_1 . Assuma que $d = d(\pi_1, \pi_2) \leq f[r, R]$ onde f é dada por (4.1.3). Se*

$$R_e \geq R - r + \frac{1}{2},$$

então existe um anel A de curvatura média constante $H = 1$ cujo bordo é $\gamma_1 \cup \delta_1$, onde $\delta_1 \subset \text{int}(\gamma_1^)$ é uma curva de Jordan paralela à γ_1^* , com*

$$d(\gamma_1^*, \delta_1) = R - \rho \leq R - r,$$

satisfazendo a condição do círculo interior com raio ρ . Além disso, A é um gráfico radial sobre uma esfera unitária centrada em um ponto que pertence ao $\text{int}(\delta_1)$.

Demonstração. Podemos supor, sem perda de generalidade, π_1 como sendo o plano $z = d$, π_2 o plano $z = 0$ e γ_1 uma curva cilíndrica sobre um cilindro que contém a origem do \mathbb{R}^3 . Então γ_1 é um gráfico radial sobre a esfera unitária \mathbb{S}^2 . Considere um círculo $C \subset \text{int}(\gamma_1)$ com raio menor ou igual a $r = r(R)$ e centro $b = (0, 0, d)$. Note que isto é possível pois γ_1 satisfaz a condição do círculo interior com raio R e

$$r = \sqrt{\frac{R^2 + R\sqrt{R^2 + 4}}{2}} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} < R.$$

Seja Θ o cilindro sobre C . Então Θ contém a origem e γ_1 é um gráfico cilíndrico sobre Θ . Seja C_0 um círculo em π_1 , de raio R , contido em $\text{clos}(\gamma_1)$ e tal que $C \subset \text{int}(C_0)$. Então existem funções contínuas $w, w_0 : C \rightarrow \mathbb{R}$ tais que:

$$\gamma_1 = \left\{ b + w(p) \cdot \vec{bp}; p \in C \right\}$$

e

$$C_0 = \left\{ b + w_0(p) \cdot \vec{bp}; p \in C \right\}.$$

Observe que w transforma C em γ_1 , ampliando o círculo na direção da normal, o mesmo se dá com C e C_0 . Considere agora, a seguinte homotopia:

$$\gamma_t = \left\{ b + \left[(1-t) w_0(p) \cdot \vec{bp} + t w(p) \cdot \vec{bp} \right]; p \in C, t \in [0, 1] \right\},$$

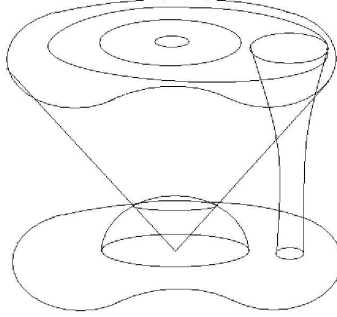
que inicia em C_0 ($t = 0$) e termina em γ_1 ($t = 1$), de forma que γ_t satisfaça a condição círculo interior e exterior com raios R e R_e respectivamente, para todo $t \in [0, 1]$. Observe que γ_t é um gráfico cilíndrico sobre Θ , e também um gráfico radial sobre \mathbb{S}^2 para todo $t \in [0, 1]$. Deste modo, dado $t \in [0, 1]$, para cada $p \in \gamma_t$ podemos considerar o círculo $C_p \subset \text{clos}(\gamma_t)$ com raio R , tangente a γ_t em p , e como $d = d(\pi_1, \pi_2) \leq f[r, R]$, existe, pela Proposição 2.3.5, um anel M_p com curvatura média constante $H = 1$ tal que $\partial M_p = C_p \cup C'_p$, onde C'_p é um círculo em π_2 de raio ρ , com

$$r \leq \rho < R \leq \sqrt{r(r+1)}$$

tal que

$$z(r, R) - d = z(r, \rho),$$

onde z é dada por (2.3.10). Uma descrição do exposto acima pode ser visto na figura que segue (observação - figura fora de escala).



Além disso, M_p é um gráfico radial suave sobre um domínio Δ_p contido na esfera unitária centrada em um ponto $S_p \in \{z = 0\}$, onde S_p é a projeção ortogonal do centro de C_p em $\{z = 0\}$. Seja N_p o vetor unitário normal à M_p , como vimos no Teorema 4.1.1, existe $\sigma > 0$ tal que $\langle N_p(p), p \rangle > \sigma$ para todo $p \in \gamma_t$. Considere agora a superfície envelope Σ_t de M_p obtida quando p varia em γ_t . Tem-se $\partial\Sigma_t = \gamma_t \cup \delta_t$, onde $\delta_t = \Sigma_t \cap \pi_2$. Temos que δ_t é um gráfico cilíndrico sobre Θ e, como $\gamma_{t_1} \subset \text{clos}(\gamma_{t_2})$, pois a homotopia amplia cada curva, então se $t_1 < t_2$, para $t_1, t_2 \in [0, 1]$, temos

$$\delta_{t_1} \subset \text{clos}(\delta_{t_2}) \subset \text{clos}(\delta_1).$$

Note que

$$R - \rho = d(\gamma_t^*, \delta_t)$$

para todo $t \in [0, 1]$, onde γ_t^* é a projeção ortogonal de γ_t em π_2 e, por construção, δ_t satisfaz a condição do círculo com raio ρ . Alguns cálculos mostram que

$$k_{\delta_t} = \frac{k_{\gamma_t^*}}{1 - \lambda k_{\gamma_t^*}},$$

ou seja,

$$k_{\delta_t} = \frac{k_{\gamma_t^*}}{1 - (R - \rho) k_{\gamma_t^*}} \quad (4.5)$$

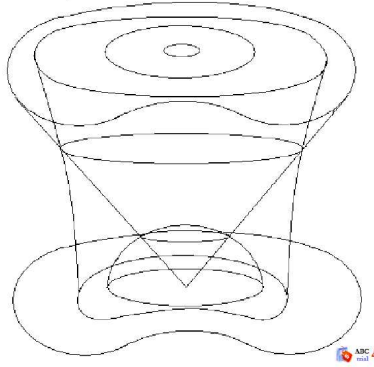
(λ sendo a distância entre γ_t^* e δ_t). Então, como γ_t satisfaz condição do círculo exterior com raio R_e , temos

$$\begin{aligned} \rho_e &= \frac{1}{k_{\delta_t}} = \frac{1 - (R - \rho) k_{\gamma_t^*}}{k_{\gamma_t^*}} = \frac{1}{k_{\gamma_t^*}} - (R - \rho) = \\ &= R_e - (R - \rho) \geq R_e - (R - r). \end{aligned}$$

Por construção, Σ_t é um gráfico cilíndrico sobre Θ e um gráfico radial sobre \mathbb{S}^2 com $\langle N_a(a), a \rangle \geq \sigma > 0$ para todo $a \in \Sigma_t$, visto que $\langle N_p(p), p \rangle \geq \sigma > 0$ para todo $p \in \gamma_t$. Em particular, Σ_0 é um gráfico radial de curvatura média constante $H = 1$ tal que $\gamma_0 = C_0$ e $\delta_0 = C_0^*$ é um círculo de raio ρ . Seja

$$C(\gamma_1) = \{sp : p \in \gamma_1, s \geq 0\},$$

$\Gamma_t = \Sigma_t \cap C(\gamma_1)$, $\alpha = C(\gamma_1) \cap \mathbb{S}^2$, $\beta = \pi_2 \cap \mathbb{S}^2$ e Ω a componente anelar de $\mathbb{S}^2 - (\alpha \cup \beta)$. Considere a componente conexa fechada A_t de Σ_t tal que $\partial A_t = \Gamma_t \cup \delta_t$.



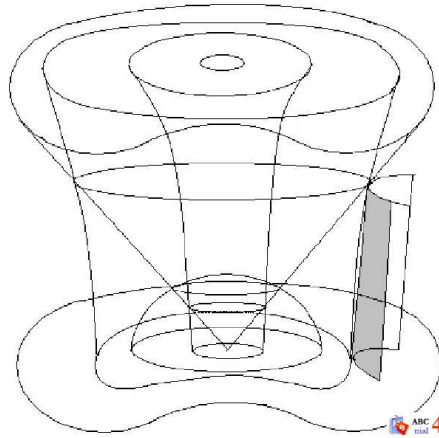
Deste modo, A_t é um gráfico radial de uma função $v_t : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ com $|\nabla v_t| \leq K$ não dependendo de t pois $\langle N_a(a), a \rangle \geq \sigma > 0$ para todo $a \in A_t$ e todo $t \in [0, 1]$. Seja $\phi_t : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\phi_t = v_t|_{\partial\Omega}$, isto é, ϕ_t é a função gráfico radial de $\Gamma_t \cup \delta_t$, em particular, $\phi_1 = \gamma_1 \cup \delta_1$. Afirmamos que ϕ_t é 1-regular para todo $t \in [0, 1]$. De fato, a função v_t fornece uma barreira abaixo (no sentido radial) para ϕ_t relativa ao operador Q_1^* . Como uma barreira acima (no sentido radial), procedemos como segue. Relacionamos o ponto $p \in \gamma_t$ com o ponto $p^* \in \delta_t$ da seguinte maneira: tome o semi plano π_p determinado pelo eixo central de M_p e p , e que contém p . Seja $l_p^t = \pi_p \cap M_p$, então $l_p^t \subset \Sigma_t$ é uma curva plana ligando $p \in \gamma_t$ à $p^* \in \delta_t$, $p^* = l_p^t \cap \pi_2$. Deste modo, dado $q \in \Gamma_t$, por construção, existe um único l_p^t tal que $q \in l_p^t \cap \Gamma_t$. Defina $q^* = l_p^t \cap \delta_t$ e considere o segmento L_q ligando q e q^* . Então L_q está no exterior da região limitada por Σ_t (e também de A_t). Como δ_t satisfaz a condição do círculo exterior com raio ρ_e e, por hipótese, $R_e \geq R - r + \frac{1}{2}$, segue que

$$\rho_e \geq R_e - (R - r) \geq R - r + \frac{1}{2} - (R - r) = \frac{1}{2}.$$

Note ainda que, se π é um plano paralelo à π_1 entre π_1 e π_2 , temos por (4.5) que $\Sigma_t \cap \pi$ satisfaz a condição do círculo exterior com raio

$$\begin{aligned} \rho_e^t &= R_e - d(\gamma_t^*, [\Sigma_t \cap \pi]^*) \geq R_e - d(\gamma_t^*, [\Sigma_t \cap \pi_2]) = \\ &= R_e - d(\gamma_t^*, \delta_t) = R_e - (R - r) = \rho_e \geq \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

onde $[\dots]^*$ indica a projeção ortogonal daquela curva no plano π_2 . Seja π_q^Γ o plano ortogonal a L_q que contém q , π_q^δ o plano ortogonal a L_q que contém q^* . Como $\rho_e^t \geq \frac{1}{2}$ para todo $t \in [0, 1]$ e L_q está no exterior da região limitada por Σ_t (e também de A_t), podemos tomar o pedaço do cilindro Θ_q de raio $1/\sqrt{2}$ e diretriz L_q , com $L_q \subset \Theta_q$ e tal que Θ_q está entre π_q^Γ e π_q^δ e no exterior da região limitada por A_t . Por outro lado, a curvatura média de Θ_q é $H \leq 1$. Tendo em vista que $\langle N_a(a), a \rangle \geq \sigma > 0$ para todo $a \in A_t$, onde N_a é o vetor unitário normal à A_t apontando para o exterior da região limitada por A_t (e portanto apontando para o interior da região limitada por Θ_q), segue disto e dos mesmos argumentos sobre compacidade usados acima, que existem vizinhanças $U_q \subset \Omega$ com $\phi_t^{-1}(q) \in \overline{U_q}$, e $V_q \subset \Theta_q$ com $q \in \overline{V_q}$ tal que $\overline{V_q}$ é o gráfico radial de uma função suave $s_q : \overline{U_q} \rightarrow \mathbb{R}$, com $|\nabla s_q| \leq G_{q,t}$. Se $q \in \delta_t$ usamos o mesmo argumento.



Sendo assim as funções s_q fornecem barreiras locais (acima) para ϕ_t relativas ao operador Q_1^* , e, pela compacidade de $\partial\Omega$ e de $[0, 1]$ segue que

$$|\nabla s_q| \leq \max \{K, G\} = F \tag{4.6}$$

onde

$$G = \max \{G_{q,t}, q \in \partial\Omega \text{ e } t \in [0, 1]\},$$

e isto conclui a afirmação. Além disso, como uma consequência da prova deste fato, temos que ϕ_0 é Q_1 regularmente homotópico a ϕ_1 . Portanto, do fato de que existe $v_0 \in C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$, $v_0 > 0$, tal que o gráfico radial de v_0 é A_0 com $v_0|_{\partial\Omega} = \phi_0$, $A_0 \subset \Sigma_0$, uma superfície com curvatura média constante $H = 1$, e da regularidade homotópica entre ϕ_0 e ϕ_1 , pelo Teorema 1.2.5 existe uma superfície A com curvatura média constante $H = 1$ que é gráfico radial de uma função $u \in C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$ com $u|_{\partial\Omega} = \phi_1 = \gamma_1 \cup \delta_1$. \square

A demonstração do próximo Teorema difere da prova do lema acima em poucos detalhes, portanto optamos por resumi-la à apenas alguns comentários.

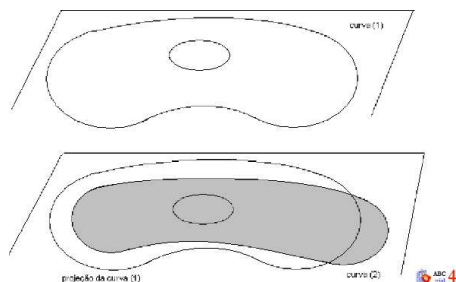
Teorema 4.1.3. *Seja γ_1 uma curva cilíndrica no plano π_1 e seja γ_2 sua projeção ortogonal no plano π_2 paralelo a π_1 . Assuma que γ_1 satisfaz a condição do círculo interior e exterior com raios R e R_e respectivamente. Se $d = d(\pi_1, \pi_2) \leq 2f[r, R]$ onde f é dada por (4.1.3) e*

$$R_e \geq R - r + \frac{1}{2},$$

então existe um anel C de curvatura média constante $H = 1$ cujo bordo é $\gamma_1 \cup \gamma_2$. Além disso, C é um gráfico radial sobre uma esfera unitária.

Demonstração. Em resumo, a demonstração deste Teorema consiste em considerar a mesma estrutura do Lema acima com relação a notação, homotopia e construção de barreiras, lembrando que, como $d(\pi_1, \pi_2) \leq 2f[r, R]$, podemos considerar para todo $p \in \gamma_t$, uma superfície definida da seguinte forma $M'_p = \{M_p\} \cup \{-M_p\}$, onde $\{-M_p\}$ representa o conjunto formado por todos os pontos da superfície M_p , porém com a coordenada z substituída por $(-z)$. A envelope Σ_t , da superfície M'_p é tal que $\partial\Sigma_t = \gamma_t \cup \gamma_t^*$, com $\gamma_t^* \subset \pi_2$. Considerando $\Gamma_t = \Sigma_t \cap C(\gamma_1)$, $\Gamma_t^* = \Sigma_t \cap C(\gamma_2)$, A_t a componente conexa fechada de Σ_t cujo bordo é $\partial A_t = \Gamma_t \cup \Gamma_t^*$, definindo $\phi_t : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ como a função cujo gráfico é $\Gamma_t \cup \Gamma_t^*$, onde Ω é a componente anelar de $\mathbb{S}^2 - (\alpha \cup \beta)$, com $\alpha = C(\gamma_1) \cap \mathbb{S}^2$, $\beta = C(\gamma_2) \cap \mathbb{S}^2$, e trabalhando como no Lema acima, garantimos que ϕ_0 é Q_1^* regularmente homotópica à ϕ_1 , usando então Teorema 1.2.5 segue o resultado. \square

Ainda dentro da situação de curvas cilíndricas, após tratarmos o caso $\gamma_1^* = \gamma_2$, vejamos uma outra (possível) posição relativa entre γ_1 e γ_2 , através da figura que segue



Observe que o deslocamento de γ_2 (curva 2), com relação à γ_1^* (projeção da curva 1) faz com que a região limitada por γ_2 intercepte o complementar da região limitada por γ_1^* , o que torna essa situação diferente das outras apresentadas até então.

O próximo resultado refere-se à duas curvas posicionadas de forma bem semelhante ao gráfico acima. No entanto, devido a necessidade do uso de barreiras locais, durante a demonstração é preciso, de certa forma, "controlar" o deslocamento de uma com relação à projeção da outra. E isto é feito através da seguinte:

Definição 4.1.4. *Sejam γ_1 e γ_2 duas curvas de Jordan coplanares que são star shape com relação ao mesmo P . Sejam B_1 o fecho da região limitada por γ_1 e B_2 o fecho da região limitada por γ_2 . Defina $A_1 = B_1 \setminus B_2$ e $A_2 = B_2 \setminus B_1$ e $A = A_1 \cup A_2$. Dizemos que o "deslocamento" $d^* = d^*(\gamma_1, \gamma_2)$ entre γ_1 e γ_2 é menor ou igual a δ , com $\delta \geq 0$, se o diâmetro do maior círculo contido em A é menor ou igual δ .*

Já de posse dessa definição, passamos a seguinte proposição

Proposição 4.1.5. *Sejam γ_1 e γ_2 curvas cilíndricas em planos paralelos π_1 e π_2 respectivamente e seja γ_1^* a projeção ortogonal de γ_1 no plano π_2 . Assuma que γ_1 satisfaz a condição do círculo interior com raio R_1 e*

$$d = d(\pi_1, \pi_2) \leq \frac{f[r, R_1]}{2},$$

onde f é dada por (4.1.3). Seja $\rho > r$ definido por $z(r, \rho) = z(r, R_1) - d$, onde z é dada por (2.3.10), e suponha que γ_2 satisfaz a condição do círculo interior com raio $R_2 > r$ tal que $z(r, R_2) = d$. Se γ_1 e γ_2 satisfazem a condição do círculo exterior com raios R_1^e e R_2^e respectivamente tais que

$$R_1^e \geq R_1 - r + \frac{1}{2}, \quad R_2^e \geq \frac{1}{2}$$

e

$$d^* = d^*(\gamma_1^*, \gamma_2) \leq \min \{R_2 - r, R_1 - \rho\}, \quad (4.7)$$

então existe um anel B com curvatura média constante $H = 1$ tendo como bordo $\gamma_1 \cup \gamma_2$. Além disso, B é um gráfico radial sobre uma esfera unitária.

Demonstração. Mais uma vez, podemos supor π_1 o plano $z = d$, π_2 o plano $z = 0$ e que o cilindro Θ sobre o qual γ_1 e γ_2 são gráficos cilíndricos contém o ponto $O = (0, 0, 0)$ e tem raio menor ou igual a r . Então γ_1 e γ_2 são gráficos radiais sobre \mathbb{S}^2 . Como $d \leq \frac{f[r, R_1]}{2}$ e

$$R_1^e \geq R_1 - r + \frac{1}{2}.$$

Então pelo Lema 4.1.2, existe um anel A com curvatura média constante $H = 1$, gráfico radial sobre \mathbb{S}^2 e gráfico cilíndrico sobre Θ , cujo bordo é $\gamma_1 \cup \delta_1$, sendo $\delta_1 \subset \text{int}(\gamma_1^*)$ uma curva de Jordan paralela à γ_1^* , satisfazendo a condição do círculo interior com raio ρ onde $r < \rho < R_1$ e, também $d(\gamma_1^*, \delta_1) = R_1 - \rho$. Observamos também que δ_1 satisfaz a condição do círculo exterior com raio $\rho_e \geq \frac{1}{2}$. Usando (4.7) temos que $\delta_1 \subset \text{clos}(\gamma_2)$ e, além disso, como

$$z(r, \rho) = z(r, R_1) - d$$

e

$$\frac{d}{2} \leq \frac{f[r, R_1]}{4} \leq \frac{f[r, R_1]}{2} \leq \frac{z(r, R_1)}{2},$$

logo

$$d \leq \frac{f[r, R_1]}{2} \leq \frac{z(r, R_1)}{2}.$$

Então

$$z(r, \rho) = z(r, R_1) - d \geq z(r, R_1) - \frac{z(r, R_1)}{2} \geq \frac{z(r, R_1)}{2} \geq d.$$

Juntando isso com o fato de que γ_2 satisfaz a condição do círculo interior com raio R_2 tal que $z(r, R_2) = d$, temos que γ_2 e δ_1 satisfazem a condição do círculo interior com raio R_2 . Além disso, ambas satisfazem a condição do círculo exterior com raio $R^e \geq \frac{1}{2}$. Seja $C = \Theta \cap \pi_2$. Então existem funções $w, w_0 : C \rightarrow \mathbb{R}$ tais que:

$$\gamma_2 = \left\{ w(p) \cdot \vec{bp}; p \in C \right\}$$

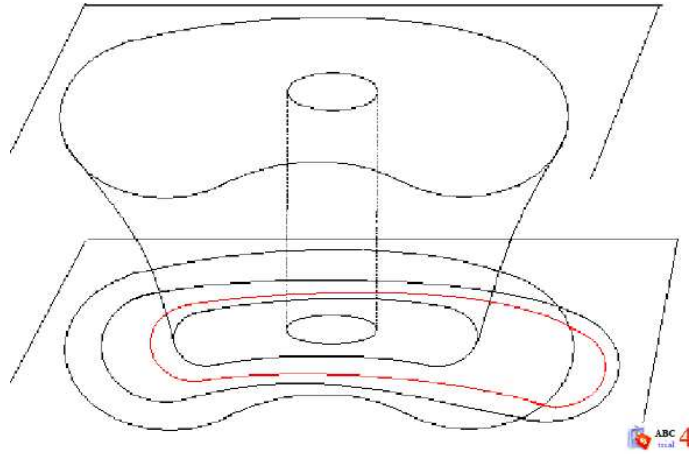
e

$$\delta_1 = \left\{ w_0(p) \cdot \vec{bp}; p \in C \right\}.$$

Considerando a homotopia natural

$$\xi_t = \left\{ \left[(1-t) w_0(p) \cdot \vec{bp} + t w(p) \cdot \vec{bp} \right]; p \in C, t \in [0, 1] \right\},$$

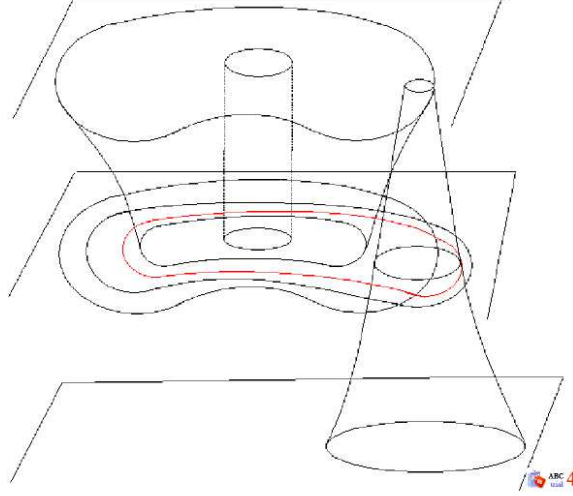
de tal forma que cada imagem ξ_t satisfaça a condição do círculo interior e exterior com raios R_2 e R^e respectivamente, para todo $t \in [0, 1]$.



Dado $p \in \xi_t$, seja $\widetilde{C}_p \subset \text{clos}(\xi_t)$ o círculo de raio R_2 tangente a ξ_t em p . Seja p_r e p_R as projeções do centro de \widetilde{C}_p nos planos $z = d$ e $z = -z(r, R_1) + d$ respectivamente. Seja C_p um círculo de raio R_1 no plano $z = -z(r, R_1) + d$ cujo centro é p_R . Como

$$d \leq \frac{f[r, R]}{2} \leq z(r, R_1)$$

existe um anel rotacional M_p com curvatura média constante $H = 1$ tal que $\partial M_p = C_p \cup C_p^*$. Além disso, $M_p \cap \pi_2 = \widetilde{C}_p$ pois $z(r, R_2) = d$, e como $d^*(\gamma_1^*, \gamma_2) \leq \min \{R_2 - r, R_1 - \rho\}$ então $C_p^* \subset \text{clos}(\gamma_1)$. Observe a ilustração abaixo.



Seja \widetilde{M}_p o pedaço de M_p entre \widetilde{C}_p e C_p^* ($\partial \widetilde{M}_p = \widetilde{C}_p \cup C_p^*$) e seja Σ_t a superfície envelope de \widetilde{M}_p quando p varia em ξ_t . Então $\partial \Sigma_t = \xi_t \cup \zeta_t$ onde $\zeta_t = \Sigma_t \cap \pi_1$ é então uma curva de Jordan fechada contida no $\text{clos}(\gamma_1)$, satisfazendo a condição do círculo interior com raio r , e

$$\zeta_{t_1} \subset \text{clos}(\zeta_{t_2}) \subset \text{clos}(\zeta_1) \subset \text{clos}(\gamma_1)$$

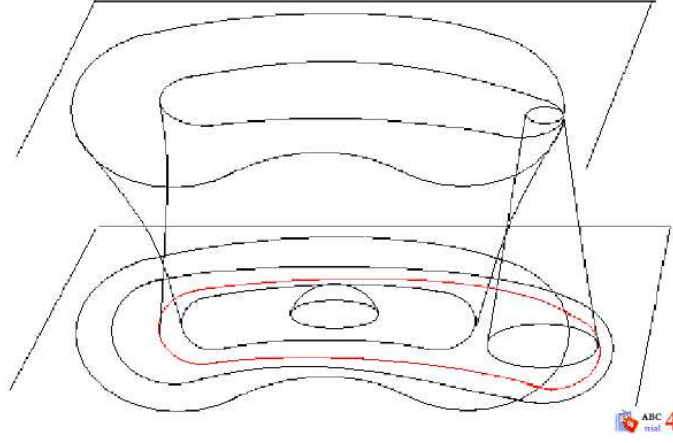
para todo $0 \leq t_1 < t_2 \leq 1$.

Seja

$$C(\zeta_t) = \{sp : p \in \zeta_t, s \geq 0\},$$

$\beta_t = C(\zeta_t) \cap \mathbb{S}^2$ e Ω_t a componente conexa de $\mathbb{S}^2 - (\alpha \cup \beta_t)$, onde $\alpha = \mathbb{S}^2 \cap \pi_2$. Note que $\Omega_{t_2} \subset \Omega_{t_1}$ se $t_1 < t_2$. Pelos mesmos argumentos já usados no Lema 4.1.2, concluímos que Σ_t é o gráfico radial de uma função suave $v_t : \overline{\Omega_t} \rightarrow \mathbb{R}$ com $|\nabla v_t| \leq K^*$, $K^* > 0$, para todo $t \in [0, 1]$. Além disso, Σ_t é um gráfico cilíndrico sobre Θ . Seja $\beta = C(\gamma_1) \cap \mathbb{S}^2$ e denote por Ω a componente conexa de $\mathbb{S}^2 - (\alpha \cup \beta)$. Note que, como

$$\delta_1 \subset \text{clos}(\xi_t) \subset \text{clos}(\gamma_2),$$

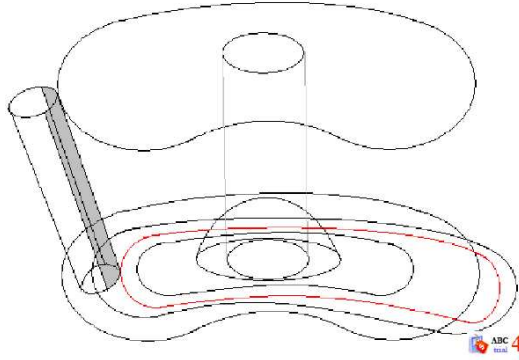


segue $\Omega \subset \Omega_t$, para todo $t \in [0, 1]$. Além disso, Ω é o domínio em \mathbb{S}^2 sobre o qual A é gráfico radial de uma função $v \in C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$. Agora, considere a função $u_t : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$u_t(p) = \max \{v(p), v_t(p)\}.$$

Seja $G(u_t)$ o gráfico radial de u_t ($G(u_t)$ é também gráfico cilíndrico sobre Θ). Temos $\xi_t = G(u_t) \cap \pi_2$ e $\gamma_1 = G(u_t) \cap \pi_1$. Seja $\varphi_t : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ a função tal que o gráfico radial de φ_t é $\gamma_1 \cup \xi_t$. Em particular, o gráfico radial de φ_0 é $\gamma_1 \cup \delta_1 \subset A$, e o gráfico radial de φ_1 é $\gamma_1 \cup \gamma_2$. Então u_t é uma barreira local abaixo (no sentido radial) para φ_t , pois de acordo com o Corolário (1.2.12), aplicado numa vizinhança suficientemente pequena $W_x \subset G(u_t)$ de um ponto $x \in \partial G(u_t)$, temos que $G(u_t)$ coincide com qualquer superfície de cmc $H = 1$ que possua bordo $\gamma_1 \cup \xi_t$ e além disso $|\nabla u_t|_{\partial\Omega} \leq \max \{K^*, F\}$ para todo $t \in [0, 1]$, onde F é dado por (4.6). Vamos construir agora, uma barreira acima. Dado $p \in \xi_t$, considere o semi plano π_p determinado pelo eixo central de Θ e p e que contém p . Então, como γ_1 é um gráfico cilíndrico sobre Θ , existe um único $p^* = \pi_p \cap \gamma_1$. Considere o segmento L_p ligando p e p^* e sejam $\pi_p^{\xi_t}, \pi_p^{\gamma_1}$ planos ortogonais à L_p passando por p e p^* respectivamente. Como ξ_t e γ_1 satisfazem a condição do círculo exterior com raio $\frac{1}{2}$, podemos considerar o pedaço de um cilindro circular reto Θ_p de raio $\frac{1}{2}$, com diretriz L_p e $L_p \subset \Theta_p$, situado entre $\pi_p^{\xi_t}$ e $\pi_p^{\gamma_1}$, com $\pi_p^{\xi_t} \cap \Theta_p$ ($\pi_p^{\gamma_1} \cap \Theta_p$) no exterior da região limitada por $G(u_t)$. Sendo assim este pedaço do cilindro Θ_p está no exterior da região limitada por $G(u_t)$. Além disso Θ_p possui curvatura média $H \leq 1$. Segue do fato de que, $\langle N_a(a), a \rangle \geq \sigma > 0$ para todo $a \in \Sigma_t$

(ou A_t), onde N_a é o vetor unitário normal à superfície Σ_t (ou A_t) apontando para o exterior da região limitada por Σ_t (ou A_t), que $\langle N_a(a), a \rangle \geq \sigma > 0$ para todo $a \in \partial G(u_t)$. Então pelos mesmos argumentos já usados no Lema 4.1.2 existem vizinhanças $U_p \subset \Omega$ com $\varphi_t^{-1}(p) \in \overline{U_p}$, e $V_p \subset \Theta_p$ com $p \in \overline{V_p}$ tal que $\overline{V_p}$ é gráfico radial de uma função suave $s_p : \overline{U_p} \rightarrow \mathbb{R}$, com $|\nabla s_p| \leq L^*$ onde L^* não depende de p e $t \in [0, 1]$. Logo, a função $s_p : \overline{U_p} \rightarrow \mathbb{R}$ fornece uma barreira local acima para φ_t relativa ao operador Q_1^* em p .



Como

$$|\nabla v|, |\nabla s_p| \leq \max \{K^*, F, L^*\}$$

para todo $p \in \gamma_1 \cup \xi_t$ e $t \in [0, 1]$, segue que φ_t é 1-regular para todo $t \in [0, 1]$, e como consequência direta deste fato temos que φ_1 é Q_1^* regularmente homotópica à φ_0 . Como $u_0 = v$ e o gráfico radial de u_0 é uma superfície com curvatura média constante $H = 1$ (a superfície A) com $u_0|_{\partial\Omega} = \varphi_0 = \gamma_1 \cup \delta_1$, segue do Teorema 1.2.5 a existência de uma superfície B com curvatura média constante $H = 1$ que é gráfico radial de uma função $u \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ com $u|_{\partial\Omega} = \varphi_1 = \gamma_1 \cup \gamma_2$. \square

Os próximos Teoremas generalizam a situação $H > 0$ através de determinados ajustes com relação as hipóteses dos resultados para o caso $H = 1$, onde usamos basicamente o já exposto no início desta mesma seção.

Teorema 4.1.6. *Dado $H > 0$. Seja γ_1 uma curva cilíndrica em um plano $\pi_1 \subset \mathbb{R}^3$ satisfazendo a condição do círculo interior com raio R e γ_2 a projeção ortogonal de γ_1 em um plano π_2 paralelo a π_1 . Assuma que a*

distância d entre os planos π_1 e π_2 satisfaz

$$d \leq \frac{2f[r; HR]}{H},$$

e γ_1 satisfaz a condição do círculo exterior com raio R_e tal que

$$R_e \geq \frac{1}{H} \left(HR - r + \frac{1}{2} \right)$$

onde f é dada por (4.1.3). Então existe um anel mergulhado B com curvatura média constante H e $\partial B = \gamma_1 \cup \gamma_2$. Além disso, B é um gráfico radial sobre uma esfera unitária.

Demonstração. As curvas $\gamma'_1 = H\gamma_1$ e $\gamma'_2 = H\gamma_2$ estão contidas em planos paralelos π'_1 e π'_2 respectivamente, cuja distância entre eles satisfaz

$$d^* = Hd \leq 2f[r; HR].$$

De fato, supondo sem perda de generalidade $\gamma_1 \subset \{z = d\}$ e $\gamma_2 \subset \{z = 0\}$ e ambas gráficos radiais sobre a esfera unitária \mathbb{S}^2 , então a curva $\gamma'_1 = H\gamma_1 \subset \{z = Hd\}$ e $\gamma'_2 = H\gamma_2 \subset \{z = 0\}$. Além disso, afirmamos que

$$\max |k_{\gamma'_1}| = \left(\frac{1}{H} \right) \cdot \max |k_{\gamma_1}|.$$

De fato, (façamos o caso $H > 1$ pois o caso restante é análogo) observe que $\gamma_1 \subset \text{int}((\gamma'_1)^*)$ onde $(\gamma'_1)^*$ é a projeção ortogonal de γ'_1 no plano $\{z = d\}$. Logo γ_1 e $(\gamma'_1)^*$ são curvas paralelas, portanto

$$\max |k_{\gamma_1}| = \frac{\max |k_{(\gamma'_1)^*}|}{1 - d \max |k_{(\gamma'_1)^*}|} = \frac{\max |k_{\gamma'_1}|}{1 - d \max |k_{\gamma'_1}|}, \quad (4.8)$$

onde d é a distância entre γ_1 e $(\gamma'_1)^*$. Seja $p \in \gamma_1$ e C_p um círculo de raio $\frac{1}{\max |k_{\gamma_1}|}$ tangente à γ_1 em p e $C_p \subset \text{clos}(\gamma_1)$, e considere q o centro de C_p . Se $\vec{v} = p - q$ então a extremidade do vetor \overrightarrow{Hv} pertence à curva $(\gamma'_1)^*$, e sendo assim d é dada por

$$d = \left| \overrightarrow{Hv} - \vec{v} \right| = |(H - 1) \vec{v}| = (H - 1) |\vec{v}| = (H - 1) \cdot \frac{1}{\max |k_{\gamma_1}|}.$$

substituindo d em (4.8) temos

$$\begin{aligned} \frac{1}{\max |k_{\gamma_1}|} &= \frac{1 - d \max |k_{(\gamma'_1)^*}|}{\max |k_{(\gamma'_1)^*}|} = \frac{1}{\max |k_{(\gamma'_1)^*}|} - d = \\ &= \frac{1}{\max |k_{(\gamma'_1)^*}|} - (H - 1) \cdot \frac{1}{\max |k_{\gamma_1}|}. \end{aligned}$$

Logo

$$\frac{H}{\max |k_{\gamma_1}|} = \frac{1}{\max |k_{(\gamma'_1)^*}|}$$

e

$$\max |k_{\gamma'_1}| = \left(\frac{1}{H} \right) \cdot \max |k_{\gamma_1}|,$$

o que conclui a afirmação. Então γ'_1 é uma curva cilíndrica que satisfaz a condição do círculo interior e exterior de raios $R' = HR$ e

$$R'_e = HR_e \geq HR - r + \frac{1}{2}$$

respectivamente (lembrando que $r = r(HR)$). Logo, pela Proposição 4.1.3 existe um anel mergulhado A com cmc $H = 1$ tendo $\gamma'_1 \cup \gamma'_2$ como bordo, e que é um gráfico radial sobre uma esfera unitária, portanto

$$B = (H)^{-1} \cdot A$$

é um anel mergulhado B com cmc H tendo $\gamma_1 \cup \gamma_2$ como bordo. Além disso, B é um gráfico radial sobre uma esfera unitária. \square

Teorema 4.1.7. *Dado $H \geq 0$. Seja γ_1 uma curva cilíndrica em um plano $\pi_1 \subset \mathbb{R}^3$ satisfazendo a condição do círculo interior com raio R e γ_2 a projeção ortogonal de γ_1 em um plano π_2 paralelo a π_1 . Assuma que a distância d entre os planos π_1 e π_2 satisfaz*

$$d \leq \frac{2f[r; R^2]}{R},$$

e que γ_1 satisfaz a condição do círculo exterior com raio

$$R_e \geq \max \left\{ \frac{1}{R} \left(R^2 - r + \frac{1}{2} \right), \frac{bf[r; R^2]}{R} \right\},$$

onde f é dada por (4.1.3) e b é dado pelo Teorema 3.2.1. Então, se $H \leq R$, existe um anel mergulhado A com curvatura média constante H tendo $\gamma_1 \cup \gamma_2$ como bordo. Além disso, A é um gráfico radial sobre uma esfera unitária.

Demonstração. Suponha que π_1 é o plano $z = d\sqrt{2}$, e $\pi_2 = -d\sqrt{2}$, e γ_1 e γ_2 gráficos radiais sobre \mathbb{S}^2 . Sendo

$$\gamma'_1 = R\gamma_1, \gamma'_2 = R\gamma_2,$$

essas curvas estão contidas em planos paralelos π'_1 e π'_2 respectivamente, cuja distância entre eles é

$$d(\pi'_1, \pi'_2) = Rd \leq 2f[r; R^2].$$

Segue que γ'_1 satisfaz a condição do círculo interior e exterior com raios R' e R'_e respectivamente, onde $R' = R^2$ e

$$R'_e = RR_e \geq R^2 - r + \frac{1}{2},$$

pois

$$\max |k_{\gamma'_1}| = \left(\frac{1}{R} \right) \cdot \max |k_{\gamma_1}|,$$

e $r = r(R^2)$. Além disso, γ'_1 é uma curva cilíndrica. Então, pela Proposição 4.1.3, temos que existe um anel mergulhado A com curvatura média constante $H = 1$ tendo como bordo $\gamma'_1 \cup \gamma'_2$ e que é um gráfico radial sobre \mathbb{S}^2 . Então $B = (R)^{-1}A$ é um anel mergulhado com curvatura média constante $H = R$ tendo como bordo $\gamma_1 \cup \gamma_2$ que é um gráfico radial sobre a componente anelar Ω de

$$\mathbb{S}^2 - \{(C(\gamma_1) \cap \mathbb{S}^2) \cup (C(\gamma_2) \cap \mathbb{S}^2)\},$$

onde $C(\gamma_i) = \{tp : p \in \gamma_i, t \geq 0\}$. Para o caso $0 \leq H < R$, vamos utilizar o Teorema 1.2.7 da seguinte forma, primeiramente, temos que provar a H -regularidade de ψ onde $\psi \in C^{2,\alpha}(\partial\Omega)$ é a função cujo gráfico é $\gamma_1 \cup \gamma_2$. Como B tem curvatura média constante R e é o gráfico radial de uma função $v \in$

$C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ tal que $v|_{\partial\Omega} = \psi$, com $|\nabla v|_{\partial\Omega} \leq \bar{\delta}$, $\bar{\delta} > 0$ (pois A é o gráfico radial de uma função $w \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ com $|\nabla w|_{\partial\Omega}$ limitada (decorre de argumento ao usado na prova do Lema 4.1.2), portanto, aplicando o Teorema 1.2.11 temos que B fornece uma barreira abaixo para ψ . Por outro lado, como γ_1 satisfaz a condição do círculo exterior com raio

$$R_e \geq \frac{bf[r; R^2]}{R},$$

então, para cada $p \in \gamma_1$ podemos considerar o círculo β_p de raio R_e em π_1 tangente à π_1 em p e tal que β_p está contido no exterior da região limitada por γ_1 . Como

$$d \leq \frac{2f[r; R^2]}{R} \leq \frac{bf[r; R^2]}{R}$$

onde $b = \sinh x_0$ e x_0 é a única raiz positiva da equação

$$\cosh x - x \sinh x = 0$$

($x_0 \approx 1.19965$ e $b \approx 1.5089$), então pelo Teorema 3.2.1, existe um anel mínimo M_p mergulhado tal que $\partial M_p = \beta_p \cup \beta_p^*$, onde β_p^* é a projeção ortogonal β_p em π_2 . Note que, como γ_1 é uma curva cilíndrica, para cada $p \in \gamma_1$, existe uma vizinhança V_p de M_p com $p \in \overline{V_p}$, tal que $\overline{V_p}$ é gráfico radial de uma função s_p^+ definida em $\Omega_p \subset \overline{\Omega}$, com $|\nabla s_p^+| \leq K$, onde K não depende de p . A prova deste fato é semelhante à prova do fato de que o anel Σ_p com curvatura média constante $H = 1$ do Lema 4.1.2 fornece uma barreira abaixo em cada ponto $p \in \gamma_1$ (apenas notando que, agora, N_p é vetor unitário normal à M_p apontando para o interior da região limitada por π_1 , π_2 e M_p). Então cada M_p fornece uma barreira s_p^+ acima para ψ relativa ao operador Q_H^* . Garantindo assim a H -regularidade de ψ . Quando $0 < H < R$, usando B , como nas hipóteses de 1.2.7 obtemos a conclusão. Se $H = 0$, considere o "convex hull" de γ_1 e o cilindro reto R_c sobre este "convex hull". Visto que γ_1 é um gráfico cilíndrico, temos que $C(\gamma_1) \cap R_c$ e $C(\gamma_2) \cap R_c$ são curvas fechadas suaves que são gráficos radiais sobre a $\partial\Omega$, e o pedaço de R_c entre essas curvas é o gráfico radial de uma função $f \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ e sua curvatura média é não positiva. Sendo assim, estamos nas hipóteses do Teorema 1.2.7, donde existe um anel mergulhado A com curvatura média constante $H = 0$ tendo $\gamma_1 \cup \gamma_2$ como bordo. Além disso, A é um gráfico radial sobre uma esfera unitária. \square

Teorema 4.1.8. *Dado $H > 0$. Sejam γ_1 e γ_2 curvas cilíndricas em planos paralelos π_1 e π_2 respectivamente e seja γ_1^* a projeção ortogonal de γ_1 em π_2 . Assuma que γ_1 satisfaz a condição do círculo interior com raio R_1 e*

$$d = d(\pi_1, \pi_2) \leq \frac{f[r; HR_1]}{2H},$$

onde f é dada por (4.1.3). Seja $\rho > r$ definido por

$$z(r, \rho) = z(r, HR_1) - Hd,$$

onde z é dada por (2.3.10), e suponha que γ_2 satisfaz a condição do círculo interior com raio $R_2 > \frac{r}{H}$ tal que $z(r, HR_2) = Hd$. Se γ_1 e γ_2 satisfazem a condição do círculo exterior com raio R_1^e e R_2^e respectivamente tais que

$$R_1^e \geq \frac{1}{H} \left(HR_1 - r + \frac{1}{2} \right), \quad R_2^e \geq \frac{1}{2H} \quad (4.9)$$

e

$$d^* \leq \frac{1}{H} \min \{ HR_2 - r, HR_1 - \rho \}, \quad (4.10)$$

então existe um anel B com curvatura média constante H tendo $\gamma_1 \cup \gamma_2$ como bordo. Além disso, B é um gráfico radial sobre uma esfera unitária.

Demonstração. Note que as curvas $\gamma'_1 = H\gamma_1$ e $\gamma'_2 = H\gamma_2$ estão contidas em planos paralelos π'_1 e π'_2 respectivamente tais que

$$d = d(\pi'_1, \pi'_2) = Hd \leq \frac{f[r; HR_1]}{2}.$$

Segue de (4.9) que a curvas γ'_1 satisfaz a condição do círculo interior e exterior com raios HR_1 e $HR_1 - r + \frac{1}{2}$ respectivamente, e a curva γ'_2 satisfaz a condição do círculo interior e exterior com raios HR_2 e $\frac{1}{2}$ respectivamente. Além disso, o deslocamento d^* entre elas é dada por $d^* = \min \{ HR_2 - r, HR_1 - \rho \}$. Então, podemos usar a Proposição 4.1.5 para concluir que existe um anel A com curvatura média constante $H = 1$, gráfico radial sobre uma esfera unitária, com $\partial A = \gamma'_1 \cup \gamma'_2$. Segue que

$$B = (H)^{-1} . A$$

é um anel com cmc H e $\partial B = \gamma_1 \cup \gamma_2$. Além disso, B é um gráfico radial sobre uma esfera unitária. \square

É importante lembrar que, no capítulo anterior, havíamos deixado sem demonstração o Teorema 3.2.4 para que essa fosse feita juntamente com o caso $H > 0$. Tendo em vista, a prova do Teorema 4.1.7, tem-se então, automaticamente, a prova do Teorema 3.2.4.

4.2 Anéis de cmc $H > 0$ dados como gráficos euclidianos

A base desta seção são os resultados do artigo [6] para o caso de superfícies cmc $H > 0$, dadas como gráficos sobre domínios anelares e cujo bordo (formado por curvas convexas) está contido em planos paralelos. A técnica utilizada é o Método de Perron, que como vimos no Capítulo 1, baseia-se na construção adequadas de sub e supersoluções.

Quanto à posição das curvas prescritas γ_1 e γ_2 em planos paralelos, os resultados deste capítulo tratam do caso onde a projeção de γ_1 no plano que contém γ_2 , é paralela a γ_2 . Além disso, a distância entre os planos que contém o bordo depende de H . Vejamos então dois teoremas que relatam essa situação.

Teorema 4.2.1. *Dado $H > 0$, seja α uma curva convexa fechada de classe C^2 no plano $z = 0$ e assumamos que*

$$H < k < 2H, \quad (4.11)$$

onde k denota a curvatura de α . Ponha $k_M = \max k$. Dado qualquer $\lambda \in \mathbb{R}$ satisfazendo

$$0 < \lambda < \frac{1}{k_M} \left(1 - \sqrt{\frac{k_M}{2H}} \right), \quad (4.12)$$

denote por β a curva paralela interior à α , cuja distância até α é λ , isto é

$$\beta = \{p + \lambda n(p); p \in \alpha\}$$

onde $n(p)$ é o vetor unitário normal interior a α em p . Se

$$h = \sqrt{\lambda \left(\frac{2}{H} - \lambda \right)}, \quad (4.13)$$

então existe uma solução $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ de $Q_H = 0$ em Ω tal que $u|_\alpha = 0$ e $u|_\beta = h$, onde Ω é o anel planar com bordo $\alpha \cup \beta$.

Demonstração. Por (4.12) temos que

$$0 < \lambda < \frac{1}{k_M} \left(1 - \sqrt{\frac{k_M}{2H}} \right).$$

Mas

$$0 < H < k_M.$$

Logo

$$\frac{1}{H} > \frac{1}{k_M}$$

e

$$0 < \lambda < \frac{1}{H} \left(1 - \sqrt{\frac{1}{2}} \right) = \frac{1}{H} \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \right).$$

Utilizando (4.13) temos

$$h^2 = \lambda \left(\frac{2}{H} - \lambda \right) < \frac{1}{H} \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \left(\frac{2}{H} - \frac{1}{H} + \frac{\sqrt{2}}{2H} \right) \leq \frac{1}{2H^2},$$

onde, para obter a primeira desigualdade acima, analisamos o sinal da função $F(\lambda) = \frac{2\lambda}{H} - \lambda^2$ no intervalo $[0, \frac{1}{H}]$, donde

$$h < \frac{1}{H\sqrt{2}} < \frac{1}{H}.$$

Sendo assim, dado $p \in \alpha$ ao considerarmos uma esfera S_p de raio $\frac{1}{H}$ centrada em $p + \left(\frac{1}{H}\right)n(p)$, temos que $\{z = h\} \cap S_p \neq \emptyset$. Seja $T_p = \{z = h\} \cap S_p$. Note que $C_p = \{z = 0\} \cap S_p = \partial D_p$ é um círculo de raio $\frac{1}{H}$ tangente a α em p e segue de (4.11) que o disco D_p contém Ω . Afirmamos que $\beta + he_3$, onde $e_3 = (0, 0, 1)$, é a curva envelope da família de curvas T_p , $p \in \alpha$. De fato, seja $\alpha : [0, a] \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma parametrização pelo comprimento de arco para α . Observe que, para cada $t \in [0, a]$ temos um $p \in \alpha$ e portanto uma

$T_{\alpha(t)}$ associada a t . Note que os pontos da curva $T_{\alpha(t)}$ são todos da forma $q = (x, y, h)$ com q satisfazendo

$$\underbrace{\left| q - \alpha(t) - \frac{1}{H}n(t) \right|^2 - \frac{1}{H^2}}_{\Phi(q,t)} = 0,$$

pois os pontos $q \in T_{\alpha(t)}$ devem pertencer simultaneamente ao plano $\{z = h\}$ e à esfera de centro $\alpha(t) + \frac{1}{H}n(t)$ e raio $\frac{1}{H}$. Logo a curva $\gamma(t)$, envelope da família $T_{\alpha(t)}$, é dada pelas equações

$$\Phi(q, t) = 0 \text{ e } \Phi_t(q, t) = 0.$$

Com o intuito de explicitar $\gamma(t)$, vamos analisar a seguinte curva

$$c(t) = \alpha(t) + \frac{1}{H}n(t).$$

Note que $c(t)$ é regular pois

$$\begin{aligned} c'(t) &= \alpha'(t) + \frac{1}{H}n'(t) = \\ &= \alpha'(t) - \frac{1}{H}k\alpha'(t) = \\ &= \left(1 - \frac{k}{H}\right)\alpha'(t), \end{aligned}$$

portanto

$$|c'(t)| = \left| \left(1 - \frac{k}{H}\right)\alpha'(t) \right| = \left| 1 - \frac{k}{H} \right| > 0,$$

onde na última desigualdade usamos (4.11). Observe que $n(t)$ é ortogonal à $c'(t)$ pois

$$\langle n(t), c'(t) \rangle = \left\langle n(t), \left(1 - \frac{k}{H}\right)\alpha'(t) \right\rangle = 0.$$

Sendo assim podemos escrever

$$\gamma(t) = \alpha(t) + u(t)c'(t) + v(t)n(t) + he_3$$

para algumas funções $u(t)$ e $v(t)$. Portanto

$$\begin{aligned} \gamma(t) &= \alpha(t) + u(t) \left[\alpha'(t) - \frac{1}{H}k\alpha'(t) \right] + v(t)n(t) + he_3 = \\ &= \alpha(t) + u(t) \left[1 - \frac{k}{H} \right] \alpha'(t) + v(t)n(t) + he_3. \end{aligned}$$

Note que

$$\begin{aligned}
\Phi_t &= 2 \left\langle \gamma(t) - \alpha(t) - \frac{1}{H}n(t), \gamma'(t) - \alpha'(t) - \frac{1}{H}n'(t) \right\rangle = \\
&= 2 \left\langle \gamma(t) - \alpha(t) - \frac{1}{H}n(t), \gamma'(t) \right\rangle - 2 \left\langle \gamma(t) - \alpha(t) - \frac{1}{H}n(t), \alpha'(t) + \frac{1}{H}n'(t) \right\rangle = \\
&= -2 \left\langle \gamma(t) - \alpha(t) - \frac{1}{H}n(t), \alpha'(t) + \frac{1}{H}n'(t) \right\rangle,
\end{aligned}$$

pois $[\gamma(t) - \alpha(t) - \frac{1}{H}n(t)] \perp [\gamma'(t)]$. Logo $\Phi_t(q, t) = 0$ implica

$$\begin{aligned}
0 &= \left\langle \gamma(t) - \alpha(t) - \frac{1}{H}n(t), \alpha'(t) + \frac{1}{H}n'(t) \right\rangle = \\
&= u(t) \left[1 - \frac{k}{H}\right]^2
\end{aligned}$$

para todo $t \in [0, a]$ e, portanto, por (4.11) temos $u(t) = 0$ para todo $t \in [0, a]$.
Então

$$\gamma(t) = \alpha(t) + v(t)n(t) + he_3,$$

e substituindo $\gamma(t)$ em $\Phi(q, t) = 0$ temos

$$\left| \left(v(t) - \frac{1}{H} \right) n(t) + he_3 \right|^2 = \frac{1}{H^2},$$

isto é,

$$v(t) = \frac{1}{H} \pm \sqrt{\frac{1}{H^2} - h^2}.$$

Observe que existem duas curvas envelope para a família $T_{\alpha(t)}$. No entanto, a curva mencionada na afirmação aparece quando substituimos $v(t) = \frac{1}{H} - \sqrt{\frac{1}{H^2} - h^2}$ em $\gamma(t)$, ou seja,

$$\begin{aligned}
\gamma(t) &= \alpha(t) + \left[\frac{1}{H} - \sqrt{\frac{1}{H^2} - h^2} \right] n(t) + he_3 = \\
&= \alpha(t) + \frac{1}{H}n(t) - \left(\sqrt{\frac{1}{H^2} - h^2} \right) n(t) + he_3,
\end{aligned}$$

e usando (4.13) temos

$$\begin{aligned}
\gamma(t) &= \alpha(t) + \frac{1}{H}n(t) - \left(\sqrt{\frac{1}{H^2} - \left(\frac{2\lambda}{H} - \lambda^2 \right)} \right) n(t) + he_3 = \\
&= \alpha(t) + \frac{1}{H}n(t) - \left(\sqrt{\left(\lambda - \frac{1}{H} \right)^2} \right) n(t) + he_3 = \\
&= \alpha(t) + \frac{1}{H}n(t) - \left| \left(\lambda - \frac{1}{H} \right) \right| n(t) + he_3 = \\
&= \alpha(t) + \lambda n(t) + he_3 = \beta + he_3.
\end{aligned}$$

Agora vamos garantir que $\beta + he_3$ é a curva envelope interior da família $T_{\alpha(t)}$. Para isso observe que

$$k_\beta(t) = \frac{k(t)}{1 - \lambda k(t)}$$

e

$$\min k_\beta = \frac{\min k}{1 - \lambda \min k}.$$

Usando (4.13) temos

$$\begin{aligned}
\min k_\beta &= \frac{\min k}{1 - \lambda \min k} \geq \frac{H}{1 - \lambda H} = \\
&= \frac{H}{1 - \left(\frac{1}{H} - \sqrt{\frac{1}{H^2} - h^2} \right) H} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{H^2} - h^2}},
\end{aligned}$$

logo

$$\min k_\beta \geq \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{H^2} - h^2}}.$$

Observando que $T_{\alpha(t)}$ é um círculo de curvatura

$$\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{H^2} - h^2}},$$

podemos concluir que $\gamma(t) = \beta + he_3$ é a curva paralela interior da família $T_{\alpha(t)}$, isto é, qualquer círculo da família $T_{\alpha(t)}$ contém $\gamma(t)$. Segue que dado qualquer $p \in \alpha \cup \beta$, existe uma semi-esfera S_p com curvatura média constante

H , que é gráfico de uma função u_p definida em um disco contendo Ω tal que $u_p(p) = 0$ se $p \in \alpha$ e $u_p(p) = h$ se $p \in \beta$. Além disso, a restrição $\overline{u_p}$ de u_p à $\overline{\Omega}$ cumpre $Q_H(\overline{u_p}) = 0$ e $\overline{u_p}|_{\partial\Omega} \geq v|_{\partial\Omega}$ onde $v \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ é qualquer solução de $Q_H = 0$ com bordo $\alpha \cup \beta$, e como $\overline{u_p} \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$, utilizando o Teorema 1.1.7, temos que $\overline{u_p} \geq v \geq w$ em $\overline{\Omega}$, onde w é qualquer subsolução de $Q_H = 0$. Agora vamos construir barreiras abaixo para todo ponto da fronteira de Ω . Observe que, decorre da condição (4.12) que

$$\max k_\beta = \frac{k_M}{1 - \lambda k_M} < 2H,$$

logo podemos considerar, em cada ponto $p \in \beta$, um círculo C_p de raio estritamente maior que $\frac{1}{2H}$, tangente a β em p e contido na região limitada por β . Considere M o cilindro sobre C_p . Segue da construção e da Proposição 1.2.9, que o cilindro $\beta \times \mathbb{R}$ contém M e possui curvatura média estritamente menor que H . Seja $(x, y, 0)$ um ponto qualquer no interior da região limitada por β . Dado $a > h$, vamos considerar o pedaço do cone K_a dado por

$$K_a = \left\{ t(x, y, a) + (1 - t)(q + (0, 0, h)); t \in \left[\frac{h}{h - a}, 0 \right], \in \beta \right\}. \quad (4.14)$$

Note que o bordo ∂K_a consiste de duas curvas, uma delas sendo $\beta + he_3$ e a outra, digamos β_a , no plano $z = 0$. Como K_a aproxima-se do cilindro sobre β , para $0 \leq z \leq h$, quando $a \rightarrow +\infty$, segue que a curvatura média de K_a é menor que H para a suficientemente grande. No entanto, também por uma escolha suficientemente grande de a , podemos ter a curva β_a contida no domínio limitado por α . Como a curvatura média de K_a é menor que H tem-se $Q_H(f) > 0$ em Ω' , onde f é a função cujo gráfico é (4.14), e Ω' é o domínio limitado por β e β_a . Definimos então uma subsolução para $Q_H = 0$ em Ω como sendo uma função $w \in C^0(\overline{\Omega})$ cujo gráfico é $K_a \cup P_a$, onde P_a é o anel no plano $z = 0$ limitado pelas curvas α e β_a . Então $w|_\alpha = 0$ e $w|_\beta = h$. Pelo método de Perron, dado $p \in \Omega$, sabemos que

$$u(p) = \sup \{ w(p); w|_\alpha \leq 0, w|_\beta \leq h, w \text{ subsolução de } Q_H = 0 \text{ em } \Omega \}$$

pertence a $C^2(\Omega)$ e é uma solução de $Q_H = 0$ em Ω . As barreiras construídas nos permitem concluir que $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ e $u|_\alpha = 0$, $u|_\beta = h$, encerrando assim a prova. \square

Denotando por S o bloco determinado pelos planos $z = 0$ e $z = h$, por G a superfície obtida no Teorema acima e por G^+ a componente conexa ilimitada

de $S \setminus G$. Então a curvatura média de G está sendo calculada com relação ao campo de vetores unitários normais apontando para $S \setminus G^+$.

Teorema 4.2.2. *Dado $H > 0$, seja α uma curva convexa limitada no plano $z = 0$ tal que*

$$\frac{1}{k_{\min}} - \frac{1}{k_{\max}} \leq \frac{1}{4H}$$

onde k é a curvatura de α , e seja

$$r = \frac{1}{\max k}.$$

Dado

$$r < R \leq R_m$$

onde

$$R_m = \min \left\{ \sqrt{\frac{r(2+rH)}{H}}, r + \frac{1}{4H} \right\},$$

seja $\beta \subset \{z = 0\}$ a curva paralela exterior à α cuja distância até α é $R - r$, isto é

$$\beta = \{p + (R - r)n(p) \mid p \in \alpha\}$$

onde $n(p)$ é o vetor unitário normal exterior à α em p . Ponha

$$h(R) = \int_r^R \frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{x}{r(1+rH)-Hx^2}\right)^2 - 1}} \quad (4.15)$$

se

$$r < R \leq \sqrt{\frac{r(1+rH)}{H}}$$

e

$$h(R) = \int_r^{\sqrt{\frac{r(1+rH)}{H}}} \frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{x}{r(1+rH)-Hx^2}\right)^2 - 1}} - \int_{\sqrt{\frac{r(1+rH)}{H}}}^R \frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{x}{r(1+rH)-Hx^2}\right)^2 - 1}} \quad (4.16)$$

se

$$\sqrt{\frac{r(1+rH)}{H}} \leq R \leq R_m,$$

e denote por $\Omega \subset \{z = 0\}$ o anel limitado por α e β . Então existe uma solução $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ de $Q_H = 0$ em Ω tal que $u|_{\alpha} = 0$ e $u|_{\beta} = h(R)$.

Demonstração. Dado qualquer ponto $p \in \alpha$ podemos considerar um círculo c_p de raio r passando por p e contido no fecho da região planar limitada que é limitada por α . Note que

$$R_m \leq r + \frac{1}{4H} \leq r + \frac{1}{H}.$$

Logo, pelo Lema 2.2.1, existe D_p , uma superfície de Delaunay, gráfico de uma função u_p definida em um domínio anelar no plano $z = 0$, tendo como bordo o círculo c_p e um círculo C_p de raio $R = r + \frac{1}{H}$ no plano $z = h(R)$. A família de círculos C_p no plano $z = h(R)$ tem como curva envelope interior a curva $\beta + h(R)e_3$. Isto pode ser provado usando a mesma técnica já usada no resultado anterior. Provaremos, que se O denota o centro do círculo c_p então o círculo C centrado em O e com raio $r + \frac{1}{H}$ contém β . Em particular, segue que o domínio anelar onde u_p está definida contém Ω . Tomando $q_1 \in \beta$ tal que

$$|Oq_1| = \max \{|Oq| \mid q \in \beta\},$$

vamos mostrar que $|Oq_1| \leq r + \frac{1}{H}$. Seja

$$r_M = \frac{1}{k_{\min}}$$

e seja $d \in (0, \frac{1}{H})$ dado. Seja q_2 o ponto de intersecção entre β e a linha reta passando por q_1 e O e cuja distância até O é $d + r$. Como

$$D = \text{diâmetro}(\beta) = \sup \{|pq| \mid p, q \in \Gamma\}$$

então

$$D := \text{diâmetro}(\beta) \geq |q_1q_2|.$$

Utilizando a igualdade

$$\min k_\alpha = \frac{\min k_\beta}{1 - d \min k_\beta}$$

obtemos

$$\frac{1}{\min k_\beta} = \frac{1}{\min k_\alpha} + d = r_M + d.$$

Lembrando que, para todo $p \in \beta$, ao considerarmos um círculo C_β centrado em $p + \left(\frac{1}{\min k_\beta}\right) n_\beta(t)$ e com raio $\left(\frac{1}{\min k_\beta}\right)$, teremos β contida no fecho da região limitada por C_β , obtemos

$$D := \text{diâmetro}(\beta) \leq \text{diâmetro}(C_\beta) = \left(\frac{2}{\min k_\beta}\right) = 2(r_M + d),$$

portanto

$$D \leq 2(r_M + d).$$

Tendo em vista que

$$|Oq_1| + r + d \leq |q_1q_2| \leq D,$$

devido à construção de $\overline{q_1q_2}$, então

$$|Oq_1| \leq 2r_M + d - r$$

e, como $d \leq \frac{1}{2H}$, $2(r_M - r) \leq \frac{1}{2H}$, segue que

$$\begin{aligned} |Oq_1| &\leq 2r_M + d - r - r + r = 2(r_M - r) + d + r \leq \\ &\leq r + \frac{1}{2H} + \frac{1}{2H} = r + \frac{1}{H}, \end{aligned}$$

provando que o círculo C contém β . Observe que, se F representa qualquer solução de $Q_H = 0$ em Ω com $F|_\alpha = 0$ e $F|_\beta = h(R)$ então $F|_{\partial\Omega} \leq (u_p)|_{\partial\Omega}$, e pelo Teorema 1.1.7 $F \leq u_p$ em Ω . Temos então que qualquer subsolução s de $Q_H = 0$ em Ω tal que $s|_\alpha \leq 0$ e $s|_\beta \leq h(R)$ satisfaz

$$s \leq u_p|_\Omega. \quad (4.17)$$

Logo está bem definida a função u em Ω dada, para todo $q \in \Omega$, por

$$u(q) = \sup \{s(q) \mid s \text{ é uma subsolução de } Q_H = 0 \text{ em } \Omega, s|_\alpha \leq 0 \text{ e } s|_\beta \leq h(R)\}.$$

Portanto, de acordo com a técnica de Perron, $u \in C^2(\Omega)$ e $Q_H(u) = 0$. Para garantir que podemos estender u continuamente até $\partial\Omega$, observe que, por (4.17), dado $p \in \partial\Omega$,

$$\lim_{q \rightarrow p} u(q) \leq \lim_{q \rightarrow p} u_p(q) = u_p(p)$$

logo

$$\lim_{q \rightarrow p} u(q) \leq u_p(p) = \begin{cases} 0 & \text{se } p \in \alpha \\ h(R) & \text{se } p \in \beta \end{cases},$$

portanto, podemos definir $u(p)$, $p \in \partial\Omega$, como 0 se $p \in \alpha$ e $h(R)$ se $p \in \beta$. Sendo assim, para concluir que u satisfaz as condições desejadas em $\partial\Omega$, é suficiente construir, em cada ponto de $\partial\Omega$, uma barreira abaixo em p (subsolução). Esta barreira será um gráfico mínimo, o qual será obtido através de uma aplicação do Teorema 3.1.1. Para garantir a existência de $w \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ solução de $Q_0(w) = 0$ em Ω com $w|_\alpha = 0$ e $w|_\beta = h(R)$, devemos verificar que a desigualdade abaixo ocorre, ou seja

$$\cosh\left(\frac{|h(R)|}{r}\right) \leq \frac{r+d}{r},$$

Neste caso, $d = R - r$, logo devemos provar que

$$|h(R)| \leq r \cosh^{-1}\left(\frac{R}{r}\right) = f(R). \quad (4.18)$$

O lado direito de (4.18) descreve uma catenária na variável R , e o lado esquerdo representa a função $h(R)$ ($= z(R)$) em (4.15) ou (4.16). Note que $h(R)$ cresce para $r \leq R \leq \sqrt{\frac{r(1+rH)}{H}}$, e decresce para $R \geq \sqrt{\frac{r(1+rH)}{H}}$. logo podemos analisar (4.18) somente para valores de R tais que $R \in \left[r, \sqrt{\frac{r(1+rH)}{H}}\right]$. Primeiramente, observe que $f(r) > 0 = h(r)$, logo se pudermos mostrar que $h'(R) \leq f'(R)$ em

$$\left[r, \sqrt{\frac{r(1+rH)}{H}}\right]$$

teremos (4.18). Lembrando que

$$f'(R) = \frac{r}{\sqrt{R^2 - r^2}},$$

e

$$\begin{aligned} h'(R) &= \frac{\sqrt{(HR^2 - a)^2}}{\sqrt{R^2 - (HR^2 - a)^2}} = \frac{\sqrt{(HR^2 - r(1+rH))^2}}{\sqrt{R^2 - (HR^2 - r(1+rH))^2}} = \\ &= \frac{\sqrt{[H(R^2 - r^2) - r]^2}}{\sqrt{R^2 - [H(R^2 - r^2) - r]^2}}, \end{aligned}$$

onde $a = r(1 + rH)$, e como

$$0 < r \leq R \leq \sqrt{\frac{r(1 + rH)}{H}},$$

obtemos

$$HR^2 \leq r(1 + rH) \leq 2r + Hr^2.$$

Assim

$$|HR^2 - Hr^2 - r| \leq r. \quad (4.19)$$

Usando (4.19) obtemos a seguinte estimativa

$$h'(R) = \frac{\sqrt{[H(R^2 - r^2) - r]^2}}{\sqrt{R^2 - [H(R^2 - r^2) - r]^2}} \leq \frac{r}{\sqrt{R^2 - [H(R^2 - r^2) - r]^2}}.$$

Mas

$$\frac{r}{\sqrt{R^2 - [H(R^2 - r^2) - r]^2}} \leq \frac{r}{\sqrt{R^2 - r^2}} = f'(R),$$

portanto

$$h'(R) \leq f'(R)$$

como queríamos, e sendo assim, estamos nas hipóteses do Teorema 3.1.1, garantindo então a existência de $w \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ solução de $Q_0 = 0$ em Ω com $w|_\alpha = 0$ e $w|_\beta = h(R)$, e subsolução de $Q_0 = 0$ em Ω , o que conclui a prova deste Teorema. \square

Observamos que quando $h(R) > 0$ a curvatura média do gráfico de w está sendo calculada com relação ao campo de vetores unitários normais apontando para $\mathbb{R}^3 \setminus G^+$, e quando $h(R) < 0$ o oposto ocorre.

No caso dos Teoremas acima, tem-se $\gamma_1^* \subset \text{int}(\gamma_2)$, γ_1^* paralela à γ_2 e ambas convexas, no entanto, ainda com $\gamma_1^* \subset \text{int}(\gamma_2)$, passamos a uma situação mais geral (sem a questão do paralelismo), onde temos γ_2 convexa, γ_1 não necessariamente convexa, e cuja distância entre os planos não depende do $H > 0$ dado. Além disso, o resultado é generalizado para um número finito de curvas.

Teorema 4.2.3. *Dado $H > 0$. Sejam $\Gamma_1, \dots, \Gamma_k, \Gamma$ curvas fechadas no plano $z = 0$ tais que cada curva Γ_i , $i = 1, \dots, k$ está contida no interior da região limitada por Γ e tais que $\text{clos}(\Gamma_i) \cap \text{clos}(\Gamma_j) = \emptyset$, $i \neq j$. Assuma que cada $\Gamma_1, \dots, \Gamma_k$ satisfaz a condição do círculo interior com algum raio $0 < r < \infty$, que Γ é de classe C^2 e tem curvatura $k > 2H$. Denote por D o diâmetro de Γ , isto é*

$$D = \sup \{|p - q|; p, q \in \Gamma\},$$

e seja

$$d = d(\cup_{i=1}^k \Gamma_i, \Gamma) = \inf \{|p_1 - p_2|; p_1 \in \cup_{i=1}^k \Gamma_i, p_2 \in \Gamma\}.$$

Vamos requerer que

$$d \geq D + r - 2\sqrt{r\left(r + \frac{1}{H}\right)}. \quad (4.20)$$

Seja Ω o domínio multiplamente conexo limitado por $\Gamma_1, \dots, \Gamma_k, \Gamma$, $i = 1, \dots, k$. Dado $h \geq 0$, se existe uma solução $v \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ de $Q_0 = 0$ em Ω tal que $v|_{\Gamma} = 0$ e $v|_{\Gamma_i} = h$, $i = 1, \dots, k$, então existe uma solução $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ de $Q_H = 0$ em Ω tal que $u|_{\Gamma} = 0$ e $u|_{\Gamma_i} = h$, $i = 1, \dots, k$.

Note que:

1) Claramente, o Teorema 3.1.1 pode ser usado junto com o Teorema 4.2.3 para obter um resultado de existência de gráficos com curvatura média constante com bordo planar, com hipóteses à respeito da geometria do domínio e a distância entre os planos que contém os bordos.

2) Uma situação especial no Teorema 4.2.3 é quando $h = 0$, isto é, a solução de $Q_H = 0$ em Ω tem que satisfazer $u|_{\partial\Omega} = 0$. Neste caso, a existência de um gráfico mínimo é automaticamente satisfeita por $v \equiv 0$ e as condições de existência do Teorema 4.2.3 reduzem-se à (4.20).

Demonstração. Dado $p \in \partial\Omega$, é suficiente construir uma supersolução não negativa u_p de $Q_H = 0$ em Ω , satisfazendo $u_p|_{\cup\Gamma_i} \geq h$, e tal que $u_p(p) = h$, se $p \in \cup\Gamma_i$, e $u_p(p) = 0$ se $p \in \Gamma$ pois, tendo em vista a hipótese da já existência de um gráfico mínimo, temos uma barreira abaixo (subsolução) para o problema de Dirichlet

$$\begin{cases} \operatorname{div}\left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}}\right) + 2H = 0, u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega}) \\ u|_{\cup\Gamma_i} = h, u|_{\Gamma} = 0 \end{cases}. \quad (4.21)$$

Portanto, a prova deste Teorema segue do método de Perron, como antes. Pela Proposição 2.1 de [13], como cada Γ_i satisfaz a condição do círculo interior com raio r , dado $p \in \cup \Gamma_i$ existe um gráfico rotacional w_p não negativo com curvatura média constante H definido em um anel no plano $z = 0$ tendo como bordo os círculos $C_{p,1}$ e $C_{p,2}$ onde $C_{p,1}$ tem centro O , raio r , contém p e está contido na região limitada por Γ_i e $C_{p,2}$ tem o mesmo centro que $C_{p,1}$, mas com raio R satisfazendo

$$R \geq 2\sqrt{\frac{r(1+rH)}{H}} - r = 2\sqrt{r\left(r + \frac{1}{H}\right)} - r. \quad (4.22)$$

Segue de (4.22) e de (4.20) que

$$D \leq d + R.$$

Seja $q_1 \in \Gamma$ tal que

$$|Oq_1| = \max \{|Oq|; q \in \Gamma\}.$$

Então

$$|Oq_1| + d \leq D \leq d + R$$

e

$$|Oq_1| \leq R.$$

Logo o disco com bordo $C_{p,2}$ contém Ω . Definimos então $u_p = w_p + h$. Claramente, $u_p|_{\cup \Gamma_i} \geq h \geq 0$, $u_p(p) = h$, donde u_p é supersolução. Agora, assuma que foi dado $p \in \Gamma$ e seja $\epsilon > 0$ tal que $k < 2H + \epsilon$. Seja C_p um círculo tangente a Γ em p , que limita um disco de raio

$$\frac{1}{2H + \epsilon},$$

contendo Γ . Seja $(x_p, y_p, 0)$ o centro de C_p e, dado $z_p > 0$, seja K_p o cone circular com vértice (x_p, y_p, z_p) e cuja base é o círculo C_p . Se K_p é o gráfico de uma função v_p definida no disco que tem C_p como bordo, por uma escolha suficientemente grande de z_p , podemos garantir que $v_p|_{\cup_j \Gamma_j} \geq h$, e que $Q_H(v_p|_{\Omega}) \leq 0$, conforme podemos ver através do Lema 1.1.9. Portanto temos que $u_p = v_p|_{\Omega}$ é uma supersolução para Q_H , pertencente a $C^0(\Omega)$. Isto prova o Teorema. \square

Referências Bibliográficas

- [1] AIOLFI, A. J. **O problema de Dirichlet para a equação das superfícies mínimas em domínios não necessariamente convexos.** Tese de Doutorado, Instituto de Matemática, UFRGS, Porto alegre, 2003.
- [2] AIOLFI, A. J.; FUSIEGER, P. **Some existence results about radial graphs of constant mean curvature with boundary in parallel planes.** Annals of Global Analysis and Geometry, vol 34, 415-430 (2008).
- [3] AIOLFI, A. J.; FUSIEGER, P.; RIPOLL, J. **A note on doubly connected surfaces of constant mean curvature with prescribed boundary.** Annals of Global Analysis and Geometry. Journal, Vol. 29, 145-156, 2006.
- [4] BONOW, I. C. **O problema de Dirichlet para equação das superfícies de curvatura média constante.** Dissertação de Mestrado, Instituto de Matemática, UFRGS, Porto alegre, 2007.
- [5] DANESI, M. M. **Uma caracterização das superfícies de curvatura média constante de bordo planar convexo.** Dissertação de Mestrado, Instituto de Matemática, UFRGS, Porto alegre, 2007.
- [6] ESPÍRITO-SANTO, N.; RIPOLL, J. **Some existence and non existence theorems for compact graphs of constant mean curvature with boundary in parallel planes.** Journal of Geometric Analysis, Vol. 11, 601-617, 2001.
- [7] FIGUEIREDO, E. S. **O Método de Perron: Aplicações e Extensões.** Dissertação de Mestrado, Instituto de Matemática, UFRGS, Porto alegre, 2000.

- [8] FUSIEGER, P. **Gráficos Radiais de Curvatura Média Constante.** Tese de Doutorado, Instituto de Matemática, UFRGS, Porto alegre, 2001.
- [9] FUSIEGER, P.; RIPOLL, J. **Radial graphs of constant mean curvature and doubly connected minimal surfaces with prescribed boundary.** Annals of Global Analysis and Geometry. Journal, Vol. 23, 373-400, 2003.
- [10] GILBARG, D.; TRUDINGER, N. S. **Elliptic Partial Differential Equations of Second Order,** Springer Verlag, Berlim, 1998.
- [11] IKEDA J.; GOMES A. **Projeto de Pesquisa para Iniciação Científica:** Superfícies de Delaunay. Universidade de São Paulo, www.ime.usp.br/~cpq/home/arquivos/Juliana%20Ikeda.pdf
- [12] MEEKS III, W. H.; WHITE, B. **Minimal surfaces bounded by convex curves in parallel planes.** Comment Math. (1991), 265-278.
- [13] RIPOLL, J. **Some characterization, uniqueness and existence results for Euclidean graphs of constant mean curvature with planar boundary.** Pacific Journal of Mathematics, Vol 198, No. 1, 175-196, 2001.
- [14] ROSS, A. e ROSENBERG, H. **Constant mean curvature surface in a half-space of R^3 with boundary in the boundary of the half-space.** *J. Diff. Geom.*, (1996) 807-817.
- [15] SHIFFMAN, M. **On surfaces of stationary area bounded by two circles, or convex curves, in parallel planes.** Ann. of Math. (1956), 77-90.