

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA MARIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

O TEOREMA DE CAUCHY NA MECÂNICA DOS FLUIDOS

PAULO CÉSAR ALMEIDA MENEZES

Santa Maria

Dez/2010

PAULO CÉSAR ALMEIDA MENEZES

O TEOREMA DE CAUCHY NA MECÂNICA DOS FLUIDOS

Dissertação apresentada como requisito parcial à obtenção do grau de Mestre em Matemática, curso de Pós-Graduação em Matemática, Centro de Ciências Naturais e Exatas, Universidade Federal de Santa Maria.

Orientador: João Paulo Lukaszczyk

Santa Maria

Dez/2010

**Universidade Federal de Santa Maria
Centro de Ciências Naturais e Exatas
Programa de Pós-Graduação em Matemática**

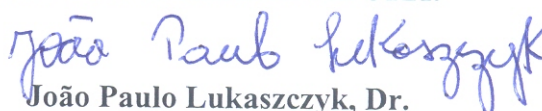
**A Comissão Examinadora, abaixo assinada,
aprova a Dissertação de Mestrado**

O TEOREMA DE CAUCHY NA MECÂNICA DOS FLUIDOS

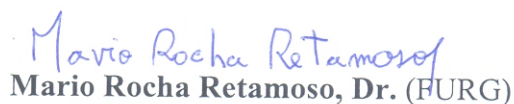
elaborada por
Paulo César Almeida Menezes

como requisito parcial para obtenção do grau de
Mestre em Matemática

COMISSÃO EXAMINADORA:



João Paulo Lukaszczyk, Dr.
(Presidente/Orientador)



Mario Rocha Retamoso, Dr. (FURG)



Celene Buriol, Dra. (UFSM)

Santa Maria, 21 de dezembro de 2010.

Dedicatória

À minha terna ordenada preferida

(Andreara, Carolina, Manoela)

Agradecimentos

Aos meus pais por me concederem o direito à vida e que, mesmo não estando mais aqui neste plano, tenho a certeza de que estariam orgulhosos por esta etapa da minha vida.

Aos professores que se empenharam em implementar este programa de mestrado. Além disso, àqueles que nos ministraram as aulas, emprestando seu saber, pois, afora os saberes matemáticos, suas lições de vida e suas ações docentes ficarão eternizadas no rol das boas lembranças da minha vivência acadêmica.

Ao meu orientador, pois além de aprender muitos resultados matemáticos, aprendi também muitas outras coisas que, em suas ações, foram uma verdadeira escola de vida. Destaco sua competência durante sua orientação, pois isso foi fundamental na realização deste trabalho.

Aos meus colegas da sala de mestrado pela convivência cordial e agradável durante a minha estada em Santa Maria. Em especial, aos colegas Anderson e Eduardo, pois foram grandes parceiros de estudo.

À minha família que, algumas vezes, contribuiu para minha estada em Santa Maria.

Às minhas filhas, pois ao longo e durante esse período de pós-graduação tive que estar ausente em corpo, em afeto, em exemplo. Entretanto, mesmo que o tempo não volte, um dia lhes darei a mercê da minha recompensa.

Por fim, e a mais importante, à minha esposa que foi uma grande parceira em todas as horas durante esse curso. Além de permitir que eu fosse adiante, sempre proporcionou condições para que eu o fizesse. A minha gratidão e todo meu amor por tudo isso é muito mais que aqui, em breves palavras, não poderia descrever.

Epígrafe

Mestre não é quem sempre ensina, mas quem de repente aprende. (Guimarães Rosa)

Resumo

O presente trabalho apresenta o Teorema de Cauchy em sua forma clássica e tem por finalidade enfraquecer as suas hipóteses, proporcionando sua aplicação na mecânica do contínuo. A metodologia empregada é a axiomática, ou seja, é apresentada uma listagem de definições básicas com vistas ao desencadeamento lógico das demonstrações que foram realizadas para atingir os objetivos dessa dissertação. O resultado principal é teorema 15, pois mostra que para um Fluxo de Cauchy Fracamente Balanceado com densidade f existe um campo $T : R \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ tal que f é linear em quase todos os pontos de R . A conclusão obtida é que podemos substituir a hipótese de que a referida função é contínua na variável espacial e obter conclusão semelhante.

Palavras-Chave: Mecânica do Contínuo. Equações de Navier-Stokes. Teorema de Cauchy.

Abstract

The present work shows Cauchy's Theorem on its classical form, and it has the objective of weakening their statements, and provides applications in continuum mechanics. The methodology used here is the axiomatic, that is, a presentation of basic concepts with fundamental results and their proofs. The main result here is Theorem 5, since it shows that for a Cauchy flux weakly balanced with density f there is a field such that f is linear in almost every points of R . The conclusion obtained is we can substitute the statement that f is a continuum function of position and have similar conclusions.

Keywords: Continuum Mechanics. Navier-Stokes Equations. Cauchy's Theorem.

Notação

1. \mathbb{R}^n é o Espaço Euclidiano n -dimensional, com a norma $|x| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$ e $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$
2. Ω é um aberto limitado do \mathbb{R}^n ($n \leq 4$) com fronteira $\partial\Omega$ regular.
3. R é uma região aberta e limitada do espaço n -dimensional, com fronteira ∂R regular.
4. $B(x, \delta)$ é a bola aberta centrada em x e raio δ .
5. $B[x, \delta]$ é a bola fechada centrada em x e raio δ .
6. $D_r(x, \mathbf{n})$ é um disco orientado de raio r , centrado em x e vetor normal unitário \mathbf{n} .
7. $R_r = \{x \in R; R \supset B[x, r]\}$.
8. $S^n = \{\mathbf{n} \in \mathbb{R}^n; |\mathbf{n}| = 1\}$.
9. \mathbf{n} , \mathbf{m} e \mathbf{p} são vetores pertencentes a S^n .
10. $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ é o espaço das transformações lineares de \mathbb{R}^n em \mathbb{R}^m . Em particular $\mathcal{L}(\mathbb{R}^3) = \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$.
11. Dados, $a \in \mathbb{R}^m$ e $b \in \mathbb{R}^n$. Definimos a transformação linear $a \otimes b \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, para todo $u \in \mathbb{R}^n$, por

$$(a \otimes b)u = (b \cdot u)a.$$

Além disso, se $m = n$, então escrevemos

$$a \wedge b = a \otimes b - b \otimes a. \tag{1}$$

12. $L^p(\Omega)$ é o espaço das funções mensuráveis g tais que

$$\|g\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |g(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} < \infty, \quad 1 \leq p < \infty.$$

Sumário

| | |
|---|-----------|
| Dedicatória | 3 |
| Agradecimentos | 4 |
| Epígrafe | 5 |
| Resumo | 6 |
| Abstract | 7 |
| Notação | 8 |
| Introdução | 12 |
| 1 Preliminares | 15 |
| 1.1 Definições Importantes | 15 |
| 1.2 Lemas Técnicos | 22 |
| 1.3 Teoremas Técnicos | 25 |
| 2 Leis de Balanço | 28 |
| 2.1 Introdução | 28 |
| 2.2 Dedução da Lei de Balanço | 29 |
| 2.3 Campo de Equações | 30 |
| 3 Euler e Navier-Stokes | 32 |
| 3.1 Introdução | 32 |
| 3.2 Euler e Navier-Stokes | 32 |

| | | |
|----------|--|-----------|
| 3.3 | Dedução das Equações | 34 |
| 3.3.1 | Conservação de Massa e Fluidos Incompressíveis | 38 |
| 3.3.2 | Conservação do Momento | 41 |
| 3.3.3 | Equação de Euler | 43 |
| 3.3.4 | Equação de Navier-Stokes | 44 |
| 4 | O Teorema de Cauchy na Mecânica dos Fluidos | 46 |
| 4.1 | Introdução | 46 |
| 4.2 | O Clássico Teorema de Cauchy | 46 |
| 4.3 | Propriedades da Densidade | 53 |
| 4.4 | Linearidade da Densidade | 67 |
| | Referências Bibliográficas | 80 |

Introdução

A presente dissertação de mestrado apresenta o Teorema de Cauchy na sua forma Clássica e tem por objetivo enfraquecer as suas hipóteses e apresentar uma versão, matematicamente, mais vantajosa para aplicações físicas. Além disso, para efeito de aplicação dentro do contexto matemático, abordamos a dedução das Equações de Euler e Navier-Stokes, uma vez que tais equações se deduzem a partir da aplicação do referido teorema.

As leis de balanço, na Física Clássica, têm a seguinte forma geral

$$\int_{\partial\Omega} f(x, n(x))dA_x + \int_{\Omega} b(x)dV_x = 0$$

onde $n(x)$ é o vetor unitário normal à fronteira $\partial\Omega$ de Ω . Em nosso estudo, a mecânica do contínuo, vamos nos concentrar em analisar o Teorema de Cauchy em sua forma clássica, bem como revisar conceitos de suas hipóteses e discutir resultados importantes já obtidos sobre esse assunto. Assim, na integral acima, faremos uma análise mais profunda dos significados oriundos da função densidade $f(x, n(x))$.

Na Mecânica dos Fluidos, f representa a força aplicada à superfície $\partial\Omega$, isto é, a força de contato exercida por unidade de área na fronteira de Ω . Mais adiante, veremos que esse resultado está intimamente ligado à conservação de massa e de momento, nos permitindo fazer a dedução das Equações de Euler e Navier-Stokes.

O fulcro deste trabalho, Teorema 9, é um dos mais importantes resultados na mecânica do contínuo, estabelecido em 1823, pelo Matemático Augustin Louis Cauchy. Ele provou que se a função $f(x, \mathbf{n})$, definida numa região R aberta e limitada do espaço material, é uma função contínua da posição para todo vetor normal unitário à fronteira de R e se $b(x)$ é uma função limitada em R , bem como se a lei de balanço acima é satisfeita por

tais funções, então $f(x, \mathbf{n})$ deve ser necessariamente linear em \mathbf{n} , ou seja,

$$f(x, \mathbf{n}) = T(x)\mathbf{n}$$

onde $T(x)$ é uma transformação linear de $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Alem disso, Cauchy provou que se f é balanceado por momento, definição 16, ou seja, satisfaz a forma integral

$$\int_{\partial B} (y - x) \wedge f(y, \mathbf{n}(\mathbf{y})) dA_y + \int_B (y - x) \wedge b(y) dV_y \quad (2)$$

para cada sólido $B \subset R$, então $T(x)$, além de linear, é simétrica.

O embasamento físico desse enfraquecimento vai além do escopo desse trabalho. Entretanto, baseado nos teóricos que estão referenciados, podemos dizer que estudos recentes nos fundamentos da mecânica têm demonstrado que o conceito fundamental não é a função f , mas, sim, a força total por unidade de área, ou seja,

$$F(S) = \int_S f(x, \mathbf{n}) dA_x$$

desde que S seja uma superfície orientável. Em outras palavras, a densidade f é uma grandeza obtida através do cômputo da derivada $\frac{dF}{dA}$ em relação à medida de área de Lebesgue.

Assim, para efetivar o resultado geral que se propõe, surgem naturalmente dois questionamentos. Primeiro, existe alguma hipótese fisicamente razoável que se possa atribuir a F que conseqüentemente gere a continuidade da f ? Segundo, há uma lei de balanço que possa estabelecer, sem hipóteses *ad hoc*, a linearidade da f , pelo menos, quase sempre?

Em resposta a essas questões é apresentada a definição de Fluxo de Cauchy, isto é, uma função vetorial com a propriedade aditividade-contável e de área limitada cujo domínio é a coleção de todos os planos orientados, elementos de superfície em R . Mais especificamente, para a primeira questão, mostramos que uma condição necessária e suficiente para que f seja uma função contínua da posição é que F tenha densidade média uniforme.

A segunda questão é respondida mostrando que para um Fluxo de Cauchy fracamente

Balanceado, definição 11, existe uma densidade linear quase sempre, teorema 15.

Sendo assim, para realizar nosso objetivo, dividimos esta dissertação em quatro capítulos, cada um deles com um objetivo bem específico. No primeiro capítulo constam as preliminares gerais, ou seja, uma listagem de definições e resultados matemáticos para serem consultados isoladamente quando necessários.

No segundo capítulo, abordamos de forma muito geral e superficial as leis de balanço, tal generalidade é devido à complexidade e extensão do assunto. Entretanto, mesmo assim, está elencado no texto, uma vez que esse resultado é a base fundamental para todo o restante do trabalho apresentado aqui.

No terceiro capítulo, apresentamos as equações de Euler e Navier-Stokes, através de algumas hipóteses matemáticas um tanto fortes, como a da existência de um difeomorfismo ϕ apresentado no teorema do transporte. Além disso, supomos que a densidade ρ é no mínimo uma função que tenha derivadas contínuas, sem o que não poderíamos aplicar o referido teorema, e, conseqüentemente, tampouco poderíamos deduzir, de resultados clássicos da física, as equações que, dentro de um contexto geral deste trabalho, configuram a aplicação do Teorema de Cauchy.

Por fim, no quarto e último capítulo, apresentamos os resultados que fundamentam o enfraquecimento das hipóteses do Teorema de Cauchy como discutido na maior parte desta introdução.

Capítulo 1

Preliminares

Neste primeiro capítulo, apresentamos as preliminares gerais, que consistem num pequeno referencial teórico, com vistas a fundamentar os resultados estudados ao longo deste trabalho. A fim de nos referirmos a elas durante as demonstrações realizadas, separamos este capítulo em algumas seções de modo a recorrer à referência de cada definição, lema e teorema respectivamente.

Além disso, algumas observações ou comentários são apresentados, uma vez que não pretendíamos dar uma listagem muito grande de requisitos. Outrossim, surgem algumas consequências do que foi definido anteriormente com a finalidade de ser objetivo naquilo que se pretende mais adiante.

1.1 Definições Importantes

As definições que seguem são, em grande maioria, referentes à parte principal deste trabalho, isto é, são elementos essenciais para compreender os enunciados e demonstrações dos teoremas relativos ao Teorema de Cauchy.

Definição 1 (Derivada Material) *Seja $f : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \times (0, T) \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^1 , chama-se Derivada Material de f , ao longo de um caminho de classe C^1 o número real dado por:*

$$\frac{Df}{Dt}(x, t) = \left(\frac{\partial f}{\partial t} + v \cdot \nabla f \right) (x, t) \quad (1.1)$$

onde x é um ponto do caminho e v é a derivada do caminho.

Definição 2 (CPO) Chamamos de *Conjunto Plano orientado* ao par $S = (P, \mathbf{n})$, onde $P \subset \mathbb{R}^3$ é um conjunto de Borel plano e \mathbf{n} é um vetor normal unitário a P .

A figura a seguir é uma mera ilustração, com caráter intuitivo para as deduções que resultarão a partir dessa definição.

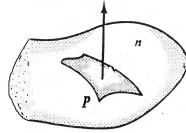


Figura 1.1: CPO

Definição 3 Dizemos que os CPO's, $S_1 = (P_1, \mathbf{n}_1)$ e $S_2 = (P_2, \mathbf{n}_2)$, são *compatíveis* quando P_1 e P_2 estão no mesmo plano e $\mathbf{n}_1 = \mathbf{n}_2$.

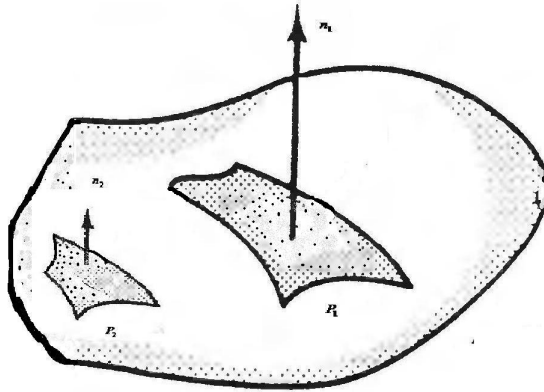


Figura 1.2: CPO - compatíveis

Definição 4 Uma sequência (S_k) de CPO's *tende regularmente* para S , se S_k é compatível com S para todo $k \in \mathbb{N}$ e se a área da diferença simétrica $(S - S_k) \cup (S_k - S)$ tende a zero quando $k \rightarrow \infty$.

Definição 5 Um CPO (S, n) é dito *poligonal* se S é uma região poligonal plana fechada.

Definição 6 Um CPO (S, n) é dito regular se S é fechado no plano e existe uma sequência (S_k) de CPO's poligonais e uma constante $k_0 > 0$ tais que (S_k) tende a S regularmente e $p(S_k) < k_0$, para todo k , onde p denota o perímetro.

Vejamos que nas definições acima usamos S ao invés de P com o mesmo significado. Porém, isso não muda em hipótese alguma a definição inicial de CPO, mas, sim, um abuso de notação dentro da terminologia aqui empregada.

Definição 7 Dizemos que S é um elemento de superfície de um conjunto aberto limitado, $R \subset \mathbb{R}^3$, quando S é um CPO contido em R .

Definição 8 Sejam $R \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto e limitado e

$$G : (\text{Conjunto de Borel de } R) \longrightarrow \mathbb{R}^n.$$

Dizemos que G é limitada por volume, se existe $c > 0$ tal que $|G(D)| \leq c V(D)$.

Definição 9 Sejam $R \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto e limitado e

$$G : (\text{Elementos de Superfície de } R) \longrightarrow \mathbb{R}^n.$$

Dizemos que G é limitada por área, se existe $c > 0$ tal que $|G(S)| \leq c A(S)$ para todo elemento de superfície S .

Definição 10 (Fluxo de Cauchy) Sejam $R \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto e limitado e

$F : (\text{Elementos de Superfície de } R) \longrightarrow \mathbb{R}^n$. Dizemos que F é um Fluxo de Cauchy se:

(CI) F é limitado por área.

(CII) F é aditiva em elementos de superfície compatíveis, ou seja;

$$F(S_1 \cup S_2) = F(S_1) + F(S_2)$$

onde S_1 e S_2 são elementos de superfície compatíveis e disjuntos.

Definição 11 (Fluxo de Cauchy Fracamente Balanceado) Um Fluxo de Cauchy F é dito Fracamente Balanceado se $|F(\partial B)| \leq c V(B)$, onde B é um sólido e $V(B)$ o volume.

Definição 12 (Densidade Média) Chamamos de *Densidade Média* a função $f_r : R_r \times S^2 \rightarrow \mathbb{R}^n$, definida por:

$$f_r(x, \mathbf{n}) = \frac{F(D_r(x, \mathbf{n}))}{A(D_r(x, \mathbf{n}))} \quad (1.2)$$

onde $R_r = \{x \in R; R \supset B[x, r]\}$

Note que decorre trivialmente das definições anteriores o seguinte resultado, isto é, de 1.2 temos

$$F(D_r(x, \mathbf{n})) = A(D_r(x, \mathbf{n}))f_r(x, \mathbf{n})$$

donde pela definição 9 resulta em

$$|F(D_r(x, \mathbf{n}))| \leq c|A(D_r(x, \mathbf{n}))|$$

ou seja,

$$A(D_r(x, \mathbf{n}))|f_r(x, \mathbf{n})| \leq cA(D_r(x, \mathbf{n}))$$

o que implica $|f_r(x, \mathbf{n})| \leq c$. Em outras palavras, vemos que a função densidade média é limitada para todo r . Afora isso, veremos no capítulo 4, teorema 11, que se F é um Fluxo de Cauchy Fracamente Balanceado, então encontramos resultados acerca da densidade média nem tão triviais como o anterior.

Definição 13 (Densidade Média Uniforme) Seja $f_r : A \subset R \rightarrow \mathbb{R}^n$, dizemos que f tem densidade média uniforme se, dado qualquer vetor unitário \mathbf{n} e qualquer compacto $A \subset R$ a família a um parâmetro r é uniformemente convergente em A quando $r \rightarrow 0$:

$$f_r(x, \mathbf{n}) = \frac{F(D_r(x, \mathbf{n}))}{A(D_r(x, \mathbf{n}))} \quad (1.3)$$

Definição 14 (Par de Densidade) Ao par (x, \mathbf{n}) chamamos de *par de densidade* se existe o limite

$$f(x, \mathbf{n}) = \lim_{r \rightarrow 0} f_r(x, \mathbf{n}). \quad (1.4)$$

Além disso, se f está definida sobre o conjunto de pares de densidade, então f é a densidade do fluxo F , como também temos que x é ponto de densidade. Assim, se para todo \mathbf{n} temos que (x, \mathbf{n}) é um par de densidade, então dizemos que F tem densidade quase sempre, isto é, se todo $x \in R$ é ponto de densidade.

Definição 15 Seja F um Fluxo de Cauchy com densidade f . Dizemos que f é linear em x se, x é um ponto de densidade e se, a função $\mathbf{n} \mapsto f(x, \mathbf{n})$ é uma restrição de uma transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ à esfera unitária S^2 , ou seja:

$$f(x, \mathbf{n}) = T(x)\mathbf{n} \quad (1.5)$$

Definição 16 Dizemos que F é balanceado por momento se, dado $x \in R$ e qualquer sequência de cubos (B_k) , com $x \in B_k$ e $V(B_k) \rightarrow 0$ se existir o limite:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{MF_x(\partial B_k)}{V(B_k)} = 0 \quad (1.6)$$

Definição 17 Dizemos que um elemento de superfície S é uma seção transversal quando o conjunto subjacente P é a interseção não-vazia da região R com um plano.

Definição 18 Dizemos que uma família Σ de subconjuntos de X é uma σ -álgebra se forem satisfeitas as seguintes condições:

- i) $\phi \in \Sigma$
- ii) Para todo $E \in \Sigma$, $X \setminus E \in \Sigma$
- iii) Para toda sequência $(E_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \Sigma \Rightarrow \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n \in \Sigma$

Definição 19 Chamamos de σ -álgebra de Borel a σ -álgebra gerada pela família de abertos de \mathbb{R} ou \mathbb{R}^n . Sendo seus elementos os Conjuntos de Borel, também chamados de Borelianos.

Dizemos que um conjunto de Borel é um elemento da chamada σ -álgebra de Borel, a qual na verdade é a menor σ -álgebra que contém todos os abertos e fechados. Por simplicidade, vamos dizer que um Conjunto de Borel é aquele que se obtém de uniões ou intersecções enumeráveis de conjuntos abertos e fechados.

Agora, precisamos definir em linhas gerais o que vem a ser medida. Para tanto, vamos inicialmente argumentar acerca de algumas convenções. Dessa forma, precisamos significar o que se pretende dizer quando uma dada função f assume valores em $[0, \infty]$. Assim, por razões técnicas afirmaremos que $[0, \infty] = [0, \infty) \cup \infty$, atribuindo um outro sentido matemático para o símbolo ∞ .

Nesses argumentos, estaremos levando em conta questões matemáticas relativas à Teoria da Medida. Em outras palavras, estamos falando em comprimento, área e volume infinitos. Portanto, cabe explicitar algumas questões que vão ao encontro dessa abordagem com as definições que se seguem.

Definição 20 Chamamos de Espaço de Medida ao terno (X, Σ, μ) , onde:

1. X é um conjunto
2. Σ é uma σ -álgebra de subconjuntos de X
3. $\mu : \Sigma \rightarrow [0, \infty]$ é uma função que tem as seguintes propriedades:

(a) $\mu(\emptyset) = 0$

(b) Se $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência disjunta em Σ , então: $\mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_n)$

Note que os elementos de Σ são chamados de conjuntos mensuráveis, bem como vale ressaltar que μ é uma medida em X , sendo que a propriedade 3.(b) é chamada de σ -aditividade ou aditividade contável. Além disso, também é importante dizer que uma medida definida numa σ -álgebra de Borel é chamada de Medida de Borel, ou ainda, Função de Borel.

Definição 21 Seja (X, Σ, μ) um espaço de medida. Dizemos que um conjunto $A \subset X$ possui medida nula se, existe um conjunto $E \in \Sigma$, tal que $A \subset E$ e $\mu(E) = 0$.

Em virtude da definição acima, diremos que uma determinada propriedade acerca dos elementos do conjunto X vale quase sempre, abreviadamente *q.s.*, se o conjunto dos pontos onde a propriedade não vale é um conjunto de medida nula.

Definição 22 Seja (X, Σ, μ) um espaço de medida, dizemos que uma medida μ é finita se ela não assume o valor ∞ . Por outro lado, dizemos que μ é σ -finita se existe sequência E_n em Σ tal que:

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = X \quad e \quad \mu(E_n) < \infty \quad (1.7)$$

Definição 23 Sejam μ e λ duas medidas definidas numa σ -álgebra Σ , dizemos que λ é absolutamente contínua com relação à medida μ , o qual denotaremos por $\lambda \ll \mu$, se para todo $E \in \Sigma$ com $\mu(E) = 0$ implica que $\lambda(E) = 0$

Definição 24 Se μ é uma medida de Borel em \mathbb{R}^n , podemos definir a derivada superior e inferior de μ em todo ponto $x \in \mathbb{R}^n$ da seguinte forma. Para algum $r > 0$ assuma

$$\bar{\Delta}(x) = \sup \left\{ \frac{\mu(P)}{m(P)}, x \in P, P \in \Omega \text{ e } \text{diam } P < r \right\} \quad (1.8)$$

onde Ω é uma família de conjuntos abertos dada, m é a medida de Borel em \mathbb{R} . Dessa forma, define-se a derivada superior de μ por

$$(\bar{D}\mu)(x) = \lim_{r \rightarrow 0} \bar{\Delta}(x) \quad (1.9)$$

e este limite existe e é um número em $[-\infty, \infty]$. A derivada inferior é definida analogamente, mudando \sup por \inf , ou seja

$$\underline{\Delta}(x) = \inf \left\{ \frac{\mu(P)}{m(P)}, x \in P, P \in \Omega \text{ e } \text{diam } P < r \right\} \quad (1.10)$$

$$(\underline{D}\mu)(x) = \lim_{r \rightarrow 0} \underline{\Delta}(x) \quad (1.11)$$

Note que μ é diferenciável em x se, e somente se, $(\underline{D}\mu)(x) = \bar{D}\mu(x) < \infty$.

Definição 25 A derivada simétrica de uma medida complexa de Borel μ em \mathbb{R}^n é definida por

$$(D_{sim}\mu)(x) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\mu(B(x, r))}{m(B(x, r))} \quad (1.12)$$

onde $B(x, r)$ é a bola aberta de centro x e raio r , sendo m uma medida de Borel em \mathbb{R} .

1.2 Lemas Técnicos

Lema 1 (Propriedade do Determinante) *Seja (a_{ij}) uma matriz $n \times n$, onde $a_{ij} = a_{ij}(t)$. Denote $(a_{ij}^{k'})_{n \times n}$ a matriz derivada na k -ésima linha, então*

$$\frac{\partial}{\partial t} [\det(a_{ij})_{n \times n}] = \sum_{k=1}^n \det(a_{ij}^{k'})_{n \times n} \quad (1.13)$$

Demonstração: A demonstração é feita por indução, na ordem n da matriz. A dificuldade principal é realizar o passo da indução, isto é, mostrar que o resultado vale para a ordem $n + 1$ a partir da ordem n . Assim, de acordo com os nossos propósitos e, com a finalidade de simplificar a parte computacional deste lema, iremos apresentar apenas a passagem da indução de $n = 2$ para $n = 3$. O caso geral pode ser feito seguindo os mesmos passos conforme os resultados que seguem:

Para $n = 2$ temos que $\det(a_{ij})_{2 \times 2} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$, então:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} [\det(a_{ij})_{2 \times 2}] &= a_{11} \frac{\partial}{\partial t} a_{22} + a_{22} \frac{\partial}{\partial t} a_{11} - a_{12} \frac{\partial}{\partial t} a_{21} - a_{21} \frac{\partial}{\partial t} a_{12} \\ &= a_{22} \frac{\partial}{\partial t} a_{11} - a_{21} \frac{\partial}{\partial t} a_{12} + a_{11} \frac{\partial}{\partial t} a_{22} - a_{12} \frac{\partial}{\partial t} a_{21} \\ &= \det \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial t} a_{11} & \frac{\partial}{\partial t} a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ \frac{\partial}{\partial t} a_{21} & \frac{\partial}{\partial t} a_{22} \end{bmatrix} \\ &= \det(a_{ij}^{1'})_{2 \times 2} + \det(a_{ij}^{2'})_{2 \times 2} = \sum_{k=1}^2 \det(a_{ij}^{k'})_{2 \times 2} \end{aligned} \quad (1.14)$$

Para $n = 3$ temos

$$\begin{aligned} \det(a_{ij})_{3 \times 3} &= a_{11} \det \begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} + a_{12} \det \begin{bmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{bmatrix} + a_{13} \det \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} \\ \det(a_{ij})_{3 \times 3} &= a_{11} \Delta_{11} - a_{12} \Delta_{12} + a_{13} \Delta_{13} \end{aligned}$$

Daí segue

$$\frac{\partial}{\partial t} [\det(a_{ij})_{3 \times 3}] = \frac{\partial}{\partial t} (a_{11} \Delta_{11} - a_{12} \Delta_{12} + a_{13} \Delta_{13})$$

isto é:

$$\begin{aligned}
&= \Delta_{11} \frac{\partial}{\partial t} a_{11} - \Delta_{12} \frac{\partial}{\partial t} a_{12} + \Delta_{13} \frac{\partial}{\partial t} a_{13} + \\
&+ a_{11} \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial t} a_{22} & \frac{\partial}{\partial t} a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial t} a_{21} & \frac{\partial}{\partial t} a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial t} a_{21} & \frac{\partial}{\partial t} a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} + \\
&+ a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ \frac{\partial}{\partial t} a_{32} & \frac{\partial}{\partial t} a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ \frac{\partial}{\partial t} a_{31} & \frac{\partial}{\partial t} a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ \frac{\partial}{\partial t} a_{31} & \frac{\partial}{\partial t} a_{32} \end{vmatrix} = \\
&= \det \begin{bmatrix} a'_{11} & a'_{12} & a'_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a'_{21} & a'_{22} & a'_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a'_{31} & a'_{32} & a'_{33} \end{bmatrix} = \\
&= \sum_{k=1}^3 \det \left(a_{ij}^{k'} \right)_{3 \times 3}
\end{aligned}$$

portanto, para $n = 3$ vale 1.13. \square

Lema 2 *Sejam F um Fluxo de Cauchy, (S_k) uma seqüência de elementos de superfície que tende regularmente para S , então $F(S_k) \rightarrow F(S)$ quando $k \rightarrow \infty$.*

Demonstração: De fato, basta escrevermos $S_k = (S_k - S) \cup (S_k \cap S)$ e $S = (S - S_k) \cup (S_k \cap S)$ de modo que calculando o fluxo F para cada um desses elementos de superfície e usando a propriedade (CII) da definição 10, segue que $F(S_k) = F(S_k - S) + F(S_k \cap S)$ e $F(S) = F(S - S_k) + F(S_k \cap S)$. Agora, fazemos $F(S_k) - F(S)$ e usando a desigualdade triangular juntamente com a propriedade (CI) da definição 10 encontramos:

$$F(S_k) - F(S) = F(S_k - S) - F(S - S_k)$$

$$0 \leq |F(S_k) - F(S)| \leq |F(S_k - S)| + |F(S - S_k)| \leq c[A(S_k - S) + A(S - S_k)]$$

$$0 \leq |F(S_k) - F(S)| \leq cA[(S_k - S) \cup (S_k \cap S)]$$

por último, fazendo $k \rightarrow \infty$ vemos, de acordo com a definição 4 na página 11, que a área da diferença simétrica no lado direito da desigualdade acima tende a zero. Portanto, $F(S_k) \rightarrow F(S)$. \square

Lema 3 *Sejam A, B e C conjuntos não-vazios tal que $A \cap B = C$. Se C é um conjunto de medida nula, isto é, $m(C) = 0$, então:*

$$m(A \cup B) = m(A) + m(B). \quad (1.15)$$

Demonstração: De fato, escrevendo $A \cup B = (A - B) \cup (B - A) \cup (A \cap B)$ temos uma união disjunta, então pelo item 3.(b), da definição 20, na página 20, a medida de uma união disjunta é $m(A \cup B) = m(A - B) + m(B - A) + m(A \cap B)$, mas por hipótese $m(C) = 0$, logo $m(A \cup B) = m(A) + m(B)$ como desejávamos. \square

Seja J uma função não-negativa, com valores reais em $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ que satisfaz as seguintes propriedades:

$$(i) J(x) = 0 \text{ se } |x| \geq 1 \text{ e}$$

$$(ii) \int_{\mathbb{R}^n} J(x) dx = 1 .$$

Por exemplo,

$$J(x) = \begin{cases} k \exp[-1/(1 - |x|^2)], & \text{se } |x| \leq 1 \\ 0, & \text{se } |x| > 1 \end{cases}$$

onde $k > 0$ é escolhida, arbitrariamente, de modo que a condição (ii) seja satisfeita. Assim, dado $\varepsilon > 0$ a função $J_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-1} J(x/\varepsilon)$ é não-negativa, pertence ao $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ e satisfaz:

$$(i) J_\varepsilon(x) = 0 \text{ se } |x| \geq \varepsilon \text{ e}$$

$$(ii) \int_{\mathbb{R}^n} J_\varepsilon(x) dx = 1$$

é chamado de regularizador e a convolução

$$J_\varepsilon * u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} J_\varepsilon(x - y) u(y) dy \quad (1.16)$$

definida para funções u , para as quais o lado direito de 1.16 faça sentido, é chamada de regularização de u , cujas propriedades estão resumidas no lema a seguir.

Lema 4 (Propriedades da Regularização) *Seja u uma função que é definida em \mathbb{R}^n e fora do seu domínio Ω é identicamente nula, então valem as seguintes propriedades:*

1. Se $u \in L_{loc}^1(\overline{\Omega})$, então $J_\varepsilon * u \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

2. Se ainda, o $\text{supp } u \subset\subset \Omega$, então $J_\varepsilon * u \in C_0^\infty(\Omega)$, desde que $\varepsilon < d(\text{supp } u, \partial\Omega)$.

3. Se $u \in L^p(\Omega)$, com $1 \leq p < \infty$, então $J_\varepsilon * u \in L^p(\Omega)$. Além disso,

$$|J_\varepsilon * u|_p \leq |u|_p \quad \text{e} \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} |J_\varepsilon * u - u| = 0$$

4. Se $u \in C(\Omega)$ e $G \subset\subset \Omega$, então o $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} J_\varepsilon u(x) = u(x)$ é uniforme em G .

5. Se $u \in C(\bar{\Omega})$, então o $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} J_\varepsilon u(x) = u(x)$ é uniforme em Ω .

Demonstração: Veja [1], páginas 29-30.

1.3 Teoremas Técnicos

Teorema 1 *Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$. A aplicação $\phi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ é contínua se, e somente se, a imagem inversa $\phi^{-1}(U)$ de todo conjunto aberto $U \subseteq \mathbb{R}^n$ é um subconjunto aberto de Ω .*

Demonstração: Inicialmente, vamos supor que a função ϕ é contínua. Se $U \subseteq \mathbb{R}^n$ é vazio, então decorre obviamente que $\phi^{-1}(U)$ é aberto. Assim, consideremos U como sendo um conjunto aberto não-vazio em \mathbb{R}^n , logo para todo $x \in \phi^{-1}(U)$ existe $\varepsilon > 0$ tal que $B(\phi(x); \varepsilon) \subset U$. Agora, pela continuidade da função ϕ temos que existe $\delta > 0$ tal que $\phi(B(x; \delta)) \subset B(\phi(x); \varepsilon) \subset U$. Dessa forma, vemos $x \in B(x; \delta) \cap \Omega \subset \phi^{-1}(U)$ para todo $x \in \phi^{-1}(U)$ e isso mostra que $\Omega_0 = \phi^{-1}(U)$ é aberto.

Reciprocamente, vamos supor que para todo aberto U contido em \mathbb{R}^n temos que a imagem inversa $\phi^{-1}(U)$ é um aberto Ω e mostremos que a função ϕ é contínua. Sendo assim, dado $x \in \Omega$ e dado $\varepsilon > 0$ vemos que a bola aberta $B(\phi(x); \varepsilon)$ é um aberto em \mathbb{R}^n , daí segue pela hipótese que $\phi^{-1}(B(\phi(x); \varepsilon))$ é um aberto em Ω . Desse fato, se $x \in \phi^{-1}(B(\phi(x); \varepsilon))$, então existe $\delta > 0$ tal que a bola aberta $B(x; \delta) \subset \phi^{-1}(B(\phi(x); \varepsilon))$, ou seja, $\phi(B(x; \delta)) \subset B(\phi(x); \varepsilon)$ o que mostra que a função ϕ é contínua. \square

Teorema 2 (Teorema de Gauss) *Seja τ o fluxo de um campo vetorial de classe C^1 através de uma superfície orientada $\partial\Omega$, cujo campo de vetores normais unitários e exteriores à superfície é denotado por \mathbf{n} , é igual a integral do $\mathbf{div} \tau$ sobre a região Ω delimitada pela superfície $\partial\Omega$.*

$$\int_{\partial\Omega} \tau \mathbf{n} dS = \int_{\Omega} \mathbf{div} \tau dV \quad (1.17)$$

Demonstração: Veja [12].

Teorema 3 (Teorema de Schwarz) *Se $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}$ é de classe C^2 no aberto $U \subset \mathbb{R}^n$ então, para quaisquer $i, j = 1, \dots, n$ e $x \in U$, tem-se:*

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_j \partial x_i} \quad (1.18)$$

Demonstração: Veja [9], páginas 67-68.

Teorema 4 *Seja Ω uma família de abertos de \mathbb{R}^n . Se μ é uma medida complexa de Borel em \mathbb{R}^n , então:*

- a) μ é diferenciável q.s em $[m]$;
- b) $D\mu \in L^1(\mathbb{R}^n)$;
- c) Para todo conjunto de Borel E

$$\mu(E) = \mu_s + \int_E (D\mu)(x) dx$$

onde $\mu_s \perp m$ e $(D\mu_s)(x) = 0$ q.s em $[m]$.

Demonstração: Veja [11], páginas 154-158.

Teorema 5 (Radon-Nikodym) *Sejam μ e λ medidas σ -finitas definidas numa σ -álgebra Σ de subconjuntos de X e suponha que $\lambda \ll \mu$, isto é, λ é absolutamente contínua com relação a μ . Então existe uma função não-negativa $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ mensurável tal que:*

$$\lambda(E) = \int_E f d\mu \quad (1.19)$$

Sendo f única q.s em $[\mu]$

Demonstração: Veja [11], páginas 122-124.

Teorema 6 (Teorema de Fubini) *Sejam $\Omega_1 \subset \mathbb{R}^n$, $\Omega_2 \subset \mathbb{R}^m$ abertos e $f : \Omega_1 \times \Omega_2 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função mensurável. Se $f \in L^1(\Omega_1 \times \Omega_2)$ então*

$$\int_{\Omega_1} \int_{\Omega_2} f(x, y) dy dx = \int_{\Omega_2} \int_{\Omega_1} f(x, y) dx dy = \int_{\Omega_1 \times \Omega_2} f(x, y) dx dy. \quad (1.20)$$

Demonstração: Veja [11], páginas 140-142.

Capítulo 2

Leis de Balanço

2.1 Introdução

As leis de balanço têm uma importância fundamental na mecânica do contínuo. Em razão disso, o presente capítulo apresenta alguns comentários gerais sobre o tema e traz referências sobre esse assunto.

Assim, podemos dizer inicialmente que a conservação de massa, a conservação de momento, momento angular e de energia estão baseadas em tais leis em suas formas integrais. Dessa forma, elas são os princípios fundamentais para deduzirmos as respectivas equações correspondentes, bem como suas condições iniciais, de contorno e regularidade, dos campos de equações que descrevem a evolução em um sistema dinâmico, envolvendo esses exemplos mencionados.

A introdução de uma Lei Geral de Balanço é realizada através do seguinte postulado: *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto e limitado, com fronteira regular. Se existe uma fonte ou um sumidouro de uma quantidade significativa em Ω , então essa quantidade é um fluxo balanceado através da fronteira $\partial\Omega$, que pode ser reduzido a um campo de equações.*

Os campos de equações de um sistema resultante de uma lei de balanço são constituídos de um fluxo, da densidade e de um vetor de estado. Através desses elementos é possível obter um sistema fechado, quase-linear de primeira ordem, de EDP's na forma divergente.

2.2 Dedução da Lei de Balanço

Seja X um conjunto aberto em \mathbb{R}^n . Dizemos que um conjunto D é um domínio próprio em X se esse conjunto é aberto, limitado e tem fronteira de Lipschitz. Além disso, uma lei de balanço em X postula que qualquer fonte de alguma quantidade produzida extensivamente em $D \subset X$ é balanceada pela quantidade de fluxo através da fronteira ∂D de D .

A característica principal de uma quantidade extensiva é que tanto a produção, como o fluxo são funções aditivas em conjuntos disjuntos. Sendo assim, dizemos que a produção em um domínio D é dada por um valor $P(D)$, chamada de medida P de Radon em X . Ourtossim, todo domínio D é associado a um conjunto de funções que tem a propriedade aditiva contável, conforme a definição (20), as quais serão denotadas por Q_D e estão definidas sobre subconjuntos de Borel da fronteira ∂D , tal que o fluxo, dentro ou fora de D atravessa algum subconjunto de Borel C de ∂D e isso será denotado por $Q_D(C)$.

Portanto, dentro deste contexto, temos a lei de balanço em uma forma simplificada, ou seja,

$$Q_D(\partial D) = P(D) \tag{2.1}$$

para todo subconjunto próprio de X .

Nas abordagens que se seguem, vamos assumir que o conjunto Q_D é formado de funções absolutamente contínuas com relação à $(k-1)$ -medida dimensional de Hausdorff \mathcal{H}^{k-1} e, ainda, para algum subconjunto próprio $D \subset X$, é associada à densidade do fluxo $q_D \in L^1(\partial D)$, ou seja,

$$Q_D(C) = \int_C q_D(X) d\mathcal{H}^{k-1} \tag{2.2}$$

para todo conjunto de Borel $C \in \partial D$.

Os referidos conjuntos de Borel de ∂D são orientados pelos vetores normais unitários exteriores a D em pontos de C , conforme a figura a seguir.

Vejamos que o postulado fundamental da teoria das leis de balanço é que o fluxo depende exclusivamente da superfície e de sua orientação. Em outras palavras, se C é um

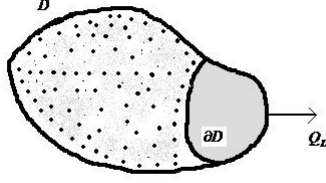


Figura 2.1: Lei de Balanço

conjunto de Borel de dois subconjuntos distintos D_1 e D_2 com a mesma normal em C , então

$$Q_{D_1}(C) = Q_{D_2}(C) \Rightarrow q_{D_1}(X) = q_{D_2}(X) \text{ q.s } x \in C \text{ em } \mathcal{H}^{k-1} \quad (2.3)$$

2.3 Campo de Equações

Em uma primeira análise, a lei de balanço, como foi definida na equação (2.1), parece um pouco artificial e também sem grande utilidade. Porém, o valor de q_D em $x \in \partial D$ está restrito ao fato de depender unicamente em D da normal exterior \vec{n} em x , dependência essa que é linear e, assim, temos que a lei de balanço, ora abstrata por ser postulada, torna-se bastante concreta e, em razão disso, ela se reduz a um campo de equações.

Teorema 7 *Considere a lei de balanço definida em (2.1) em X , onde P é a medida de Radon e as funções Q_P introduzidas em (2.2), onde a densidade do fluxo q_D é uma função limitada para algum $x \in \partial D$ e todo domínio próprio D , então:*

1. *Para cada $\vec{n} \in S^{n-1}$ existe uma função mesurável limitada $a_n \in X$ com a seguinte propriedade. Seja D um domínio próprio qualquer em X e suponha que x é um ponto na fronteira ∂D onde exista a normal unitária exterior \vec{n} a D . Além disso, assuma que x é um ponto de Lebesgue da função q_D em $[\mathcal{H}^{k-1}]$ e que a derivada superior de $|P|$ em x relativa à medida de Lebesgue é finita, então*

$$q_D(x) = a_{\vec{n}}(x). \quad (2.4)$$

2. Existe um campo de vetores $A \in L^\infty(X, M_{1 \times n})$ tal que para algum \vec{n} fixado em S^{n-1}

$$a_{\vec{n}}(x) = A(x)\vec{n} \quad q.s \text{ em } X \quad (2.5)$$

3. A função A satisfaz o campo de equações

$$\mathbf{div} A = P \quad (2.6)$$

Demonstração: Veja [3].

Capítulo 3

Euler e Navier-Stokes

3.1 Introdução

O objetivo principal do presente capítulo é a dedução das Equações de Euler e Navier-Stokes. Para tanto, apresentamos as equações da Conservação de Massa e de Momento, uma vez que estas equações permitem descrever a dinâmica de um fluido incompressível. Cada uma dessas equações se expressa, na *descrição euleriana*, de forma bem peculiar.

A equação da conservação de massa fica caracterizada em tal descrição pela condição de o divergente do campo de velocidades ser nulo. Quanto à equação da conservação do momento, temos a expressão de uma equação diferencial parcial não-linear, mundialmente famosa pelas suas aplicações, chamada de Equação de Navier-Stokes. Esta última concebe a viscosidade como parte do sistema, ao passo que na equação de Euler se considera apenas o fluido ideal.

3.2 Euler e Navier-Stokes

Os matemáticos e físicos Leonhard Paul Euler, Claude Louis Marie Henri Navier e George Gabriel Stokes entre muitos de seus trabalhos e áreas de atuação ficaram famosos pelas suas contribuições à mecânica dos fluidos, sobretudo, pelas equações que levam seus nomes. O último deles, por exemplo, publicou seu trabalho em 1845 acerca da dedução das equações do movimento de fluidos viscosos, cuja terminologia é empregada nos textos

modernos até hoje.

Leonhard Paul Euler nasceu no dia 15 de abril de 1707 em Basiléia, Suíça, e faleceu em 18 de setembro de 1783, aos 76 anos na cidade de São Petersburgo, Rússia. Estudou na Universidade de Basiléia, onde foi orientado por Johann Bernoulli. Suas contribuições à matemática são muitas, em especial, destaca-se o campo das terminologias e notações empregadas até hoje, como, por exemplo, as de função. Em geral, contribuiu, sobremaneira, à análise matemática.



Figura 3.1: Euler

O matemático e físico francês, Claude Louis Marie Henri Navier, nasceu aos dez dias do mês de fevereiro, no ano de 1785, na cidade de Dijon. Sua morte ocorreu em 21 de agosto de 1836, aos 51 anos, em Paris. No ano de 1802, entrou para *École Polytechnique* e lá teve Fourier como seu professor.

A continuidade de sua formação aconteceu na *École Nationale des Ponts et Chaussées* em 1804, onde estudou problemas de engenharia relativos à construção de pontes e, mais tarde, em 1830, foi nomeado professor. No ano seguinte, substituiu Cauchy, então exilado, na *École Polytechnique*, ministrando as disciplinas de cálculo e mecânica.

As suas contribuições principais estão basicamente ligadas a teorias da elasticidade geral e, por isso, muitas vezes é também chamado de pai da análise estrutural. Entretanto, a sua maior contribuição é em função das equações de Navier-Stokes.

Nascido em 13 de agosto de 1819, Sir Georg Gabriel Stokes, matemático e físico Irlandês, distinguido com honras pelas suas contribuições na mecânica dos fluidos, foi premiado com as medalhas Rumford e Copley em 1852, 1893 respectivamente. Em em 1º de fevereiro de 1903, aos 83 anos, faleceu em Cambridge.

Os estudos de Stokes foram realizados inicialmente na *Trinity College Dublin* e logo



Figura 3.2: Navier

após, em 1835, mudou-se para a Inglaterra e ingressou na Faculdade de Bristol em Bristol. Os dois anos seguintes, em Bristol, eram importantes para os estudos em Cambridge.

Entre muitas de suas contribuições, destacam-se o Teorema de Stokes e as equações de Navier-Stokes, que foi o último nome agregado à equação de conservação do momento. Assim, em linhas gerais, podemos dizer que diferentemente de Navier, ele considerou as forças de atração e repulsão entre as moléculas quando publicou seu artigo, em 1822, deduzindo as equações de movimento de fluidos viscosos.



Figura 3.3: Stokes

3.3 Dedução das Equações

A trajetória descrita por uma partícula, no espaço material, pode ser expressa através de uma curva contínua em $\Omega_0 \subseteq \mathbb{R}^3$. Para tanto, seja Ω_0 a região do espaço ocupada por uma porção de um fluido e seja $\phi(x, t)$ uma função fluxo, tal que para todo $x_0 \in \Omega_0$ a curva $t \mapsto \phi(x_0, t)$ indique a posição que a partícula ocupa no espaço em cada instante de tempo. Em particular, $\phi(x_0, t)$ descreve a trajetória da partícula x_0 no instante de tempo t .

Por outro lado, em vez de usarmos a *descrição Lagrangiana*, na qual os pontos de Ω_0 são as chamadas coordenadas materiais de cada uma das partículas, podemos determinar

a velocidade $v(x, t)$ da partícula que, no instante t , ocupa a posição x . Dessa forma, estamos usando a chamada *descrição Euleriana* e os pontos $x \in \Omega_0$ são denominados de coordenadas espaciais.

As descrições mencionadas estão a seguir relacionadas, de modo a proporcionar o uso das técnicas usuais do Cálculo Diferencial e Integral, isto é:

$$v(\phi(x_0, t), t) = \frac{\partial}{\partial t} \phi(x_0, t) \quad (3.1)$$

Esta relação é apenas uma consequência imediata das suposições anteriores e, *a priori*, informa que a velocidade sobre a trajetória nada mais é que a sua derivada em um de seus pontos. Sendo assim, a partir desse fato podemos definir uma série de conceitos importantes que serão imprescindíveis para a dedução das equações de Euler e Navier-Stokes.

Teorema 8 (Teorema do Transporte) *Sejam $\phi : \Omega \times (0, T) \rightarrow \Omega \times (0, T)$ um difeomorfismo, f uma função regular definida em $\Omega \times (0, T)$ e $\Omega_t = \phi(\Omega_0, t)$ uma região onde se pode aplicar o Teorema da Divergência, então:*

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} f(x, t) dx = \int_{\Omega_t} \left(\frac{Df}{Dt} + f \operatorname{div} v \right) (x, t) dx \quad (3.2)$$

Demonstração: Suponha que Ω_0 é um conjunto aberto e limitado contido em \mathbb{R}^3 , tal que a sua fronteira seja suficientemente regular. Então, usando a mudança de variáveis, $x = \phi_t(y)$, obtemos na integral do lado esquerdo, em (3.2), uma integral independente do tempo, isto é:

$$\text{Se } x = \phi_t(y), \text{ então } dx = J(y, t) dy$$

Como estamos trabalhando com instante de tempo $t = 0$, implica $J(y, 0) = 1$, pois

$$J(y, 0) = \begin{vmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial y_1} & \frac{\partial \phi_1}{\partial y_2} & \frac{\partial \phi_1}{\partial y_3} \\ \frac{\partial \phi_2}{\partial y_1} & \frac{\partial \phi_2}{\partial y_2} & \frac{\partial \phi_2}{\partial y_3} \\ \frac{\partial \phi_3}{\partial y_1} & \frac{\partial \phi_3}{\partial y_2} & \frac{\partial \phi_3}{\partial y_3} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad (3.3)$$

Logo, não há necessidade de tomar o valor absoluto do determinante jacobiano na mudança de variáveis da integral (3.2) e, em razão da integral ser independente da variável

t , podemos mudar a ordem de derivação e integração, obtendo, dessa forma, o seguinte resultado:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} f(x, t) dx = \frac{d}{dt} \int_{\Omega_0} f(\phi_t(y), t) J(y, t) dy \quad (3.4)$$

$$= \int_{\Omega_0} \underbrace{\frac{\partial}{\partial t} [f(\phi(y, t), t)]}_{\text{derivada material}} J(y, t) dy + \int_{\Omega_0} f(\phi(y, t), t) \frac{\partial J}{\partial t}(y, t) dy \quad (3.5)$$

$$= \int_{\Omega_0} \frac{Df}{Dt}(\phi_t(y), t) J(y, t) dy + \int_{\Omega_0} f(\phi(y, t), t) \frac{\partial J}{\partial t}(y, t) dy. \quad (3.6)$$

Feito isso, precisamos calcular a derivada do Jacobiano, em relação à variável temporal, para resolver a segunda integral em (3.6), ou seja:

$$\frac{\partial J}{\partial t}(y, 0) = \frac{\partial}{\partial t} \begin{vmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial y_1} & \frac{\partial \phi_1}{\partial y_2} & \frac{\partial \phi_1}{\partial y_3} \\ \frac{\partial \phi_2}{\partial y_1} & \frac{\partial \phi_2}{\partial y_2} & \frac{\partial \phi_2}{\partial y_3} \\ \frac{\partial \phi_3}{\partial y_1} & \frac{\partial \phi_3}{\partial y_2} & \frac{\partial \phi_3}{\partial y_3} \end{vmatrix} \quad (3.7)$$

pelo lema 1, página 22, e omitindo os pontos onde as derivadas são calculadas por questões computacionais, temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial t} &= \sum_{k=1}^3 \det \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \phi_1}{\partial y_1} & \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \phi_1}{\partial y_2} & \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \phi_1}{\partial y_3} \\ \frac{\partial \phi_2}{\partial y_1} & \frac{\partial \phi_2}{\partial y_2} & \frac{\partial \phi_2}{\partial y_3} \\ \frac{\partial \phi_3}{\partial y_1} & \frac{\partial \phi_3}{\partial y_2} & \frac{\partial \phi_3}{\partial y_3} \end{vmatrix} + \sum_{k=1}^3 \det \begin{vmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial y_1} & \frac{\partial \phi_1}{\partial y_2} & \frac{\partial \phi_1}{\partial y_3} \\ \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \phi_2}{\partial y_1} & \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \phi_2}{\partial y_2} & \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \phi_2}{\partial y_3} \\ \frac{\partial \phi_3}{\partial y_1} & \frac{\partial \phi_3}{\partial y_2} & \frac{\partial \phi_3}{\partial y_3} \end{vmatrix} + \\ &+ \sum_{k=1}^3 \det \begin{vmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial y_1} & \frac{\partial \phi_1}{\partial y_2} & \frac{\partial \phi_1}{\partial y_3} \\ \frac{\partial \phi_2}{\partial y_1} & \frac{\partial \phi_2}{\partial y_2} & \frac{\partial \phi_2}{\partial y_3} \\ \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \phi_3}{\partial y_1} & \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \phi_3}{\partial y_2} & \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \phi_3}{\partial y_3} \end{vmatrix}. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Além disso, usando o Teorema de Schwarz e a regra da cadeia em cada linha de (3.8) obtemos:

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \phi_i}{\partial y_j}(y, t) = \frac{\partial}{\partial y_j} \frac{\partial \phi_i}{\partial t}(y, t) = \frac{\partial}{\partial y_j} [v_i(\phi(y, t), t)] = \sum_{k=1}^3 \frac{\partial v_i}{\partial \phi_k} \frac{\partial \phi_k}{\partial y_j} \quad (3.9)$$

$$= J \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \right) =$$

$$\frac{\partial J}{\partial t} = J \mathbf{div} v. \quad (3.10)$$

Note que o jacobiano e a sua respectiva derivada são calculadas no ponto (y, t) , enquanto o $\mathbf{div} v$ é calculado no ponto $\phi((y, t), t)$, os quais foram omitidos pela conveniência da notação. Assim, podemos terminar de calcular a segunda integral em 3.6, isto é:

$$\int_{\Omega_0} f(\phi(y, t)) \frac{\partial J}{\partial t}(y, t) dy = \int_{\Omega_0} f(\phi(y, t)) [(\mathbf{div} v)(\phi(y, t), t)] J(y, t) dy. \quad (3.11)$$

Agora, substituindo (3.11) em (3.6) e retomando a variável $x = \phi_t(y)$, concluímos a demonstração. \square

3.3.1 Conservação de Massa e Fluidos Incompressíveis

A temática central desta seção é a equação da continuidade. A fim de obtê-la para fluidos incompressíveis, admite-se o princípio da conservação de massa, ou seja, “A massa de um fluido varia no interior de uma região Ω , em relação ao tempo, igualmente ao fluxo do fluido através da fronteira $\partial\Omega$ de Ω ”. Para expressar isso de forma matemática, vamos usar uma lei empírica da física:

$$\rho = \frac{M}{V} \quad (3.12)$$

onde ρ é a densidade, M é a massa e V é o volume.

Assim, para nossos propósitos, a massa de uma porção de fluido que, num instante de tempo t , ocupa uma região Ω se traduz na seguinte integral:

$$M(t) = \int_{\Omega} \rho(x, t) dx. \quad (3.13)$$

Note que estamos considerando a massa constante, isto é, não existem fontes nem

sumidouros.

Além disso, podemos escrever a hipótese da conservação de massa a partir da seguinte igualdade:

$$\int_{\Omega_0} \rho(x, 0) dx = \int_{\Omega_t} \rho(x, t) dx. \quad (3.14)$$

Dessa forma, a taxa de variação da massa em relação ao tempo é expressa por:

$$\frac{dM(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} \rho(x, t) dx. \quad (3.15)$$

Por um lado, temos:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} \rho(x, t) dx = 0. \quad (3.16)$$

Por outro lado, supondo que a densidade ρ seja uma função de classe C^∞ , podemos aplicar o teorema do transporte em (3.15) e obter o seguinte resultado:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} \rho(x, t) dx = \int_{\Omega_0} \left(\frac{D\rho}{Dt} + \rho \mathbf{div} v \right) (x, t) dx. \quad (3.17)$$

A continuidade da função densidade pode ser justificada fisicamente, pois ela nos informa o quanto é compacta a substância de que é feito um corpo. Desse fato e, em se tratando de fluidos como um meio contínuo, podemos dizer que temos uma quantidade homogênea de qualquer espécie de matéria que tenha tais características e que esteja limitada materialmente por uma superfície.

Além disso, podemos justificar também a continuidade das derivadas da função ρ , visto que a conservação da massa determina a homogeneidade do fluido e, por resultar em um valor constante ao longo do tempo, podemos derivar infinitamente seus valores.

Entretanto, matematicamente, se Ω é um aberto, então existe um aberto Ω_0 , de acordo com o teorema 1, página 25, tal que $\phi_t(\Omega_0) = \Omega$ e ϕ_t é contínua, ou ainda, pela hipótese ϕ_t é um difeomorfismo. Portanto, como a integral (3.17) é nula, a função integrando é identicamente nula, daí segue a *equação de conservação da massa*.

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \mathbf{div} v = 0. \quad (3.18)$$

Podemos reescrever (3.18) utilizando a definição de derivada material (1.1) e também a identidade vetorial

$$\mathbf{div} (\rho v) = \nabla \rho \cdot v + \rho \mathbf{div} v$$

Segue que

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + v \cdot \nabla \rho + \rho \mathbf{div} v = 0. \quad (3.19)$$

Mas,

$$\rho \mathbf{div} v = \mathbf{div} \rho v - \nabla \rho \cdot v$$

portanto,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{div}(\rho v) = 0. \quad (3.20)$$

Assim, temos que (3.18) e (3.20) são equivalentes e também podem ser denominadas como *equação da continuidade*. Afora isso, se o volume de qualquer porção de fluido é preservado pelo fluxo, então

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} dx = 0. \quad (3.21)$$

Agora, aplicando o teorema do transporte em 3.21, obtemos

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} dx = \int_{\Omega_0} \mathbf{div} v dx = 0. \quad (3.22)$$

Como a integral é nula em todos os pontos de Ω_0 , então o integrando é a função identicamente nula, logo temos:

$$\mathbf{div} v = 0. \quad (3.23)$$

Reciprocamente, se vale (3.23) então vale (3.21) e, conseqüentemente, o fluido é incompressível.

3.3.2 Conservação do Momento

A Física Clássica nos diz empiricamente que a quantidade de momento linear é tal que $P = mv$, onde P é a quantidade de momento, m é a massa do corpo e v é a velocidade. Além disso, vimos que a densidade é uma função de classe C^∞ e sendo a velocidade do fluido uma função contínua, em virtude de (3.1), temos que tal relação empírica fica bem definida através da seguinte integral

$$\int_{\Omega_t} \rho(x, t) v(x, t) dx \quad (3.24)$$

já a variação dessa quantidade, em relação ao tempo, é expressa pela Segunda Lei de Newton. Dessa forma, temos que a derivada do momento linear é igual a resultante das forças internas e externas atuando numa região $\Omega_t \subset \mathbb{R}^3$.

Agora, para que a referida lei faça sentido, vamos admitir certas hipóteses e determinar as forças que agem no fluido e na respectiva região ocupada por ele. Para tanto, suponha, inicialmente, que $f(x, t)$ seja o somatório das forças externas sobre Ω_t e, para as forças internas atuando no fluido, consideremos apenas forças de contato ou tensões.

Portanto, nessas condições, estão desprezados o atrito e quaisquer outros tipos de forças de reação ao movimento das partículas do fluido considerado. Desse modo, vamos denotar $\tau(x, t, n)$ como sendo o campo de tensões das forças de contato que atuam por unidade de área em uma superfície perpendicular ao vetor normal unitário n .

Em outras palavras, se existe um campo de tensões $\tau(x, t, n)$, então a força do restante do fluido sobre o fluido que ocupa a região Ω_t , delimitada pela superfície $\partial\Omega$, cujo o vetor normal unitário exterior é \mathbf{n} , é dada pela integral

$$\int_{\partial\Omega_t} \tau(x, t, \mathbf{n}) dS_x \quad (3.25)$$

portanto, segue pelo Teorema de Cauchy que se o fluido satisfaz a Segunda Lei de Newton, então o campo de tensões τ depende linearmente da normal unitária exterior da superfície $\partial\Omega$, ou seja, existe uma função matricial $S(x, t)$ tal que

$$\tau(x, t, \mathbf{n}) = S(x, t)\mathbf{n}. \quad (3.26)$$

Observação: Como $\tau = Sn$, devemos ter $\partial\Omega_t$ superfície orientável, pois caso contrário o teorema de Cauchy não faria sentido.

Em razão dos fatos mencionados, a Segunda Lei de Newton pode ser representada do seguinte modo:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} \rho v \, dx = \int_{\Omega_t} \rho f \, dx + \int_{\partial\Omega_t} S\mathbf{n} \, dS_x. \quad (3.27)$$

Assim, aplicando o teorema do transporte no lado esquerdo da igualdade acima e utilizando o Teorema de Gauss na integral de superfície que aparece no segundo membro, obtemos:

$$\int_{\Omega_t} \left[\frac{D}{Dt}(\rho v) + \mathbf{div} \, v - \rho f - \mathbf{Div} \, S \right] dx = 0. \quad (3.28)$$

Daí pela continuidade do integrando segue que

$$\frac{D}{Dt}(\rho v) + \rho \mathbf{div} \, v - \rho f - \mathbf{Div} \, S = 0 \quad (3.29)$$

contudo, pela equação da conservação de massa (3.18) e computando a derivada material,

$\frac{D(\rho v)}{Dt} = \frac{D\rho}{Dt}v + \rho \frac{Dv}{Dt}$, encontramos

$$\rho \frac{Dv}{Dt} = \rho f + \mathbf{Div} \, S \quad (3.30)$$

que é a *Equação da Conservação de Momento*.

3.3.3 Equação de Euler

Nesta seção serão feitas algumas hipóteses adicionais para deduzir a Equação de Euler a partir de fluidos não-viscosos. Inicialmente, suponha que as forças internas atuam apenas perpendicularmente à superfície $\partial\Omega_t$. Desprezando, dessa forma, o atrito e a viscosidade do fluido, tem-se que o vetor $S\mathbf{n}$ é paralelo ao normal unitário \mathbf{n} . Analiticamente, dizemos que existe uma função contínua $p(x, t)$ que representa muito bem a situação física e geométrica acima exposta, portanto:

$$S(x, t) = -p(x, t)I \quad (3.31)$$

onde I é a matriz identidade e p é a pressão exercida em $\partial\Omega_t$, na posição x , no instante de tempo t . O sinal negativo que aparece no segundo membro da equação 3.31 é o resultado matemático que traduz a situação física sobre a superfície de contato.

Além disso, suponha que o fluido é incompressível, então, usando as equações da conservação de massa e da conservação do momento, podemos escrever a Equação de Euler, de um fluido cujo $\mathbf{div}v = 0$, isto é, calculando $\mathbf{Div}S$ encontramos

$$\begin{aligned} \mathbf{Div}S &= (\mathbf{div}l_1, \mathbf{div}l_2, \mathbf{div}l_3)^T \\ &= \left(-\frac{\partial p}{\partial x_1}, -\frac{\partial p}{\partial x_2}, -\frac{\partial p}{\partial x_3} \right)^T \\ &= -\nabla p \end{aligned} \quad (3.32)$$

veja que acima omitimos, por simplicidade, os argumentos (x, t) . Agora substituindo esse resultado em (3.30), vamos obter

$$\rho \frac{Dv}{Dt} = \rho f - \nabla p \quad (3.33)$$

a qual, usando a definição de derivada material em cada uma de suas componentes resulta em

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} + \rho (v\nabla)v = \rho f - \nabla p \quad (3.34)$$

$$\mathbf{div}v = 0$$

que é conhecida como *Equação de Euler* para fluidos não-viscosos e incompressíveis.

A equação (3.34) está associada à Segunda Lei de Newton, ou seja, o lado esquerdo da igualdade representa o produto da massa pela aceleração e o lado direito, a resultante das forças que atuam sobre o fluido, dividida em forças internas e externas. Note que na equação surge o termo não-linear $(v\nabla)v$, tal termo é devido à descrição Euleriana utilizada na dedução realizada até aqui.

3.3.4 Equação de Navier-Stokes

A Equação de Euler é resultado das equações de conservação de massa e de momento para o caso de um fluido ideal. Agora, para trabalharmos com fluidos newtonianos, devemos determinar formas para a matriz S de modo a incluir a viscosidade nos cálculos. Sendo assim, vamos supor inicialmente que a matriz em questão fica bem determinada de acordo com a seguinte equação

$$S = -pI + \mu'(\mathbf{div}v)I + \mu(G + G^T) \quad (3.35)$$

onde μ e μ' são constantes associadas à viscosidade do fluido e dependem da temperatura. Afora isso, a matriz G é tal que cada uma de suas linhas é o gradiente em cada uma das direções v_1, v_2 e v_3 respectivamente, ou seja

$$G = \begin{bmatrix} \nabla v_1 \\ \nabla v_2 \\ \nabla v_3 \end{bmatrix}. \quad (3.36)$$

Agora, basta calcular o $\mathbf{Div}S$. No entanto, como estamos trabalhando com fluidos incompressíveis, temos que o segundo termo na equação (3.35) se anula, logo

$$\mathbf{Div}S = -\nabla p + \mu\mathbf{Div}(G + G^t) \quad (3.37)$$

mas, $\mathbf{Div}(G + G^t) = \Delta v$, então

$$\mathbf{Div}S = -\nabla p + \mu\Delta v. \quad (3.38)$$

Substituindo 3.38 na equação da conservação de momento 3.30, vamos encontrar o sistema de equações

$$\rho \frac{Dv}{Dt} = \rho f - \nabla p + \mu \Delta v \quad (3.39)$$

$$\mathbf{div} v = 0$$

conhecido como *Equação de Navier-Stokes* para fluidos viscosos e incompressíveis.

Capítulo 4

O Teorema de Cauchy na Mecânica dos Fluidos

4.1 Introdução

Neste capítulo, apresentamos os resultados mais importantes desse trabalho. Inicialmente, apresentamos o Clássico Teorema de Cauchy e sua respectiva prova. Depois disso, mostramos algumas propriedades não-triviais da densidade, a partir dos teoremas 11, 12 e 13. Por fim, apresentamos uma nova versão do Teorema de Cauchy, e terminamos com a prova do teorema 15, resultado fundamental, uma vez que a partir dele verificamos a existência da linearidade quase em todos os pontos. Em outras palavras, ser fracamente balanceado é condição suficiente para existir linearidade quase sempre.

4.2 O Clássico Teorema de Cauchy

Teorema 9 *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ um conjunto aberto e limitado, suponha que $s : \bar{\Omega} \times S^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é uma função contínua em $x \in \bar{\Omega}$. Além disso, seja $f : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma função limitada que satisfaz a lei de balanço*

$$\int_{\partial\Omega} s(x, \mathbf{n}(x)) dA_x + \int_{\Omega} f(x) dV_x = 0$$

onde $\mathbf{n}(x)$ é o vetor normal exterior a Ω no ponto $x \in \partial\Omega$, então $s(x, \mathbf{n})$ é linear em \mathbf{n} , isto é

$$s(x, n) = S(x)\mathbf{n} \quad (4.1)$$

onde $S : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ é uma transformação linear.

Demonstração: Pelo Teorema do Transporte temos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho v \, dx &= \int_{\Omega} \left(\frac{D}{Dt}(\rho v) + \rho v \operatorname{div} v \right) dx \\ &= \int_{\Omega} \left(\frac{D\rho}{Dt} v + \rho \frac{Dv}{Dt} + \rho v \operatorname{div} v \right) dx \\ &= \int_{\Omega} \left(\rho \frac{Dv}{Dt} + v \left[\frac{D\rho}{Dt} + \rho \operatorname{div} v \right] \right) dx \end{aligned} \quad (4.2)$$

donde, pelo princípio da conservação da massa, vem

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho v \, dx = \int_{\Omega} \rho \frac{Dv}{Dt} \, dx. \quad (4.3)$$

Agora, consideremos a função $g = \rho f - \rho \frac{Dv}{Dt}$. A segunda lei de Newton juntamente com (4.3) nos dá

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \rho \frac{Dv}{Dt} \, dx &= \int_{\Omega} \rho f \, dx + \int_{\partial\Omega} s \, dS_x \\ &= \int_{\Omega} \left(g + \rho \frac{Dv}{Dt} \right) dx + \int_{\partial\Omega} s \, dS_x \\ &= \int_{\Omega} g \, dx + \int_{\Omega} \rho \frac{Dv}{Dt} + \int_{\partial\Omega} s \, dS_x. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Logo

$$\int_{\partial\Omega} s \, dS_x = - \int_{\Omega} g \, dx.$$

Como por hipótese f é limitada segue-se que $|g| \leq k$, para algum k real. Logo,

$$\left| \int_{\partial\Omega} s \, dS_x \right| = \left| \int_{\Omega} g \, dx \right| \leq \int_{\Omega} |g| \, dx \leq \int_{\Omega} k \, dx = k \int_{\Omega} dx = k \operatorname{vol}(\Omega) \quad (4.5)$$

onde $\operatorname{vol}(\Omega)$ é o volume da região Ω .

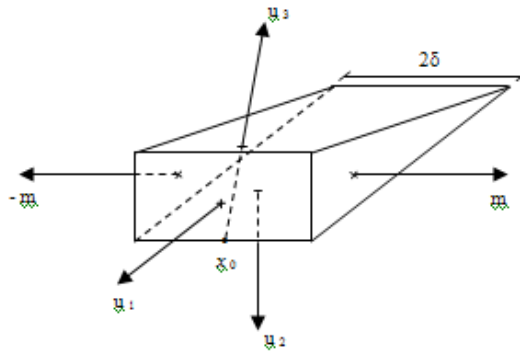
A fim de estender a hipótese de Cauchy a todo vetor de \mathbb{R}^3 consideremos a função

$$s(u, x) = \begin{cases} |u| s\left(\frac{u}{|u|}, x\right), & \text{se } u \neq 0 \\ 0, & \text{se } u = 0 \end{cases}$$

onde o parâmetro t foi omitido para simplificar a notação.

Vamos mostrar que para todo x da região de escoamento a função $s(u, x)$ definida acima é linear em \mathbf{n} . Para tal consideremos um ponto x_0 interior a região de escoamento, os vetores u_1 e u_2 linearmente independentes e os escalares ϵ e δ positivos e suficientemente pequenos. Além disso, consideremos os planos π_1 , com normal u_1 , que passa por x_0 e o plano π_2 , com normal u_2 , passando também por x_0 . Tomemos também o plano π_3 que passa por $x_0 + \epsilon u_3$, com normal $u_3 = -(u_1 + u_2)$.

Seja R a região limitada por estes planos e pelos planos paralelos π_4 e π_5 distantes δ de x_0 , com normais $u_4 = m$ e $u_5 = -m$, respectivamente, conforme figura abaixo.

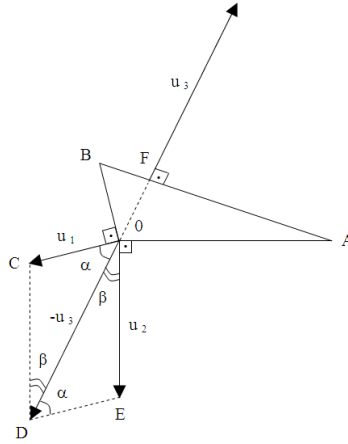


Logo, a fronteira da região R é

$$\partial R = \bigcup_{i=1}^5 S_i$$

onde S_i é a face de R cujo vetor normal é u_i .

Na figura anterior considere um corte transversal produzido por um plano π paralelo a u_1 e u_2 , conforme figura abaixo.



Observe que o ângulo $\frac{\pi}{2} + \beta$ é externo ao ΔAOF , logo $\widehat{A} = \beta$. Por outro lado, o ângulo $\frac{\pi}{2} + \alpha$ é externo ao ΔOBF , logo $\widehat{B} = \alpha$. Portanto

$$\Delta AOB \sim \Delta OCD$$

e daí

$$\frac{|u_1|}{OB} = \frac{|u_2|}{OA} = \frac{|u_3|}{AB} \quad (4.6)$$

donde vem que

$$\frac{|u_1|}{OB \cdot 2\alpha} = \frac{|u_2|}{OA \cdot 2\alpha} = \frac{|u_3|}{AB \cdot 2\alpha} \quad (4.7)$$

ou seja, se α_i é a área da face S_i temos

$$\frac{|u_1|}{\alpha_1} = \frac{|u_2|}{\alpha_2} = \frac{|u_3|}{\alpha_3} \quad (4.8)$$

logo,

$$\alpha_1 = \frac{|u_1|}{|u_3|} \alpha_3 \quad \text{e} \quad \alpha_2 = \frac{|u_2|}{|u_3|} \alpha_3. \quad (4.9)$$

Além disso, as faces paralelas têm áreas

$$\alpha_4 = \alpha_5 = \frac{\alpha_3}{2\delta} \frac{|\epsilon u_3|}{2} = \frac{\epsilon |u_3|}{4\delta} \alpha_3 \quad (4.10)$$

e o volume da região R é dado por

$$\text{Vol}(R) = \frac{\frac{\alpha_3}{2\delta}\epsilon|u_3|}{2}2\delta = \frac{\epsilon|u_3|}{2\delta}\alpha_3. \quad (4.11)$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \int_{\partial R} s(n, x)dS_x &= \sum_{i=1}^5 \int_{S_i} s(n, x)dS_x \\ &= \sum_{i=1}^5 \left(\int_{S_i} s_1(n, x)dS_x, \int_{S_i} s_2(n, x)dS_x, \int_{S_i} s_3(n, x)dS_x \right) \end{aligned} \quad (4.12)$$

onde s_j , $j = 1, 2, 3$, é a componente j de s . Como por hipótese s é contínua em x , cada uma das suas componentes s_j também são. Aplicando o Teorema do Valor Médio (para integrais) à integral

$$\int_{S_i} s_j(n, x)dS_x \quad j = 1, 2, 3 \quad (4.13)$$

no vetor $\frac{u_i}{|u_i|}$ relativo à face S_i e considerando $x_i^j \in S_i$ o ponto onde o Teorema se verifica temos:

$$\begin{aligned} \left| \sum_{i=1}^5 \left(s_1\left(\frac{u_i}{|u_i|}, x_i^1\right)\alpha_1, s_2\left(\frac{u_i}{|u_i|}, x_i^2\right)\alpha_2, s_3\left(\frac{u_i}{|u_i|}, x_i^3\right)\alpha_3 \right) \right| &= \left| \sum_{i=1}^5 s\left(\frac{u_i}{|u_i|}, x_i^*\right)\alpha_i \right| \\ &\leq k \frac{\epsilon|u_3|}{2}\alpha_3 \end{aligned} \quad (4.14)$$

onde $x_i^* = (x_i^1, x_i^2, x_i^3)$.

Substituindo em (4.11) os valores de α_i , $i = 1, \dots, 5$ calculados em (4.9) e (4.10) obtemos

$$\left| \sum_{i=1}^2 s\left(\frac{u_i}{|u_i|}, x_i^*\right) \frac{|u_i|}{|u_3|}\alpha_3 + s\left(\frac{u_3}{|u_3|}, x_3^*\right)\alpha_3 + s(m, x_4^*)\frac{\epsilon|u_3|}{4\delta}\alpha_3 + s(-m, x_5^*)\frac{\epsilon|u_3|}{4\delta}\alpha_3 \right| \leq k \frac{\epsilon|u_3|}{2}\alpha_3. \quad (4.15)$$

Multiplicando ambos os membros da desigualdade acima por $\frac{4\delta}{|u_3|\alpha_3}$ temos

$$\left| s\left(\frac{u_1}{|u_1|}, x_1^*\right) \frac{4\delta|u_1|}{|u_3|^2} + s\left(\frac{u_2}{|u_2|}, x_2^*\right) \frac{4\delta|u_2|}{|u_3|^2} + s\left(\frac{u_3}{|u_3|}, x_3^*\right) \frac{4\delta|u_3|}{|u_3|^2} + s(m, x_4^*)\epsilon + s(-m, x_5^*)\epsilon \right| \leq 2k\delta\epsilon \quad (4.16)$$

e daí

$$\left| \frac{4\delta}{|u_3|^2} \left(|u_1|s\left(\frac{u_1}{|u_1|}, x_1^*\right) + |u_2|s\left(\frac{u_2}{|u_2|}, x_2^*\right) + |u_3|s\left(\frac{u_3}{|u_3|}, x_3^*\right) \right) + \epsilon (s(m, x_4^*) + s(-m, x_5^*)) \right| \leq 2k\delta\epsilon. \quad (4.17)$$

Pela definição da função s temos

$$\left| \frac{4\delta}{|u_3|^2} (s(u_1, x_1^*) + s(u_2, x_2^*) + s(u_3, x_3^*)) + \epsilon (s(m, x_4^*) + s(-m, x_5^*)) \right| \leq 2k\delta\epsilon. \quad (4.18)$$

Fazendo δ tender a zero em 4.18 obtemos

$$|\epsilon (s(m, x_4^*) + s(-m, x_5^*))| = 0. \quad (4.19)$$

Como $\epsilon > 0$ 4.19 nos dá:

$$s(m, x_4^*) = s(-m, x_5^*). \quad (4.20)$$

Agora fazendo $\epsilon \rightarrow x_0$, em 4.20, temos

$$x_4^* \rightarrow x_0 \quad \text{e} \quad x_5^* \rightarrow x_0 \quad (4.21)$$

logo,

$$s(m, x_0) = -s(-m, x_0) \quad \forall m \in \mathbb{R}^3 \quad (4.22)$$

pois, dado $m \in \mathbb{R}^3$ sempre existem x_0 , u_1 e u_2 satisfazendo as condições acima.

Em 4.18 façamos agora o contrário, ou seja, primeiro façamos $\epsilon \rightarrow 0$ depois δ . Assim

$$\epsilon \rightarrow 0 \quad \Rightarrow \quad s(u_1, x_1^*) + s(u_2, x_2^*) + s(u_3, x_3^*) = 0 \quad (4.23)$$

donde vem que

$$s(-(u_1 + u_2), x_3^*) = -s(u_1, x_1^*) - s(u_2, x_2^*). \quad (4.24)$$

Fazendo $\delta \rightarrow 0$, em 4.24, temos

$$s(-(u_1 + u_2), x_0) = -s(u_1, x_0) - s(u_2, x_0). \quad (4.25)$$

Portanto, de 4.22 obtemos

$$s(u_1 + u_2, x_0) = s(u_1, x_0) + s(u_2, x_0) \quad (4.26)$$

e, isso, mostra que s é aditiva para vetores L.I. .

Mostraremos agora que dado $\alpha \in \mathbb{R}$ tem-se $s(\alpha u, x) = \alpha s(u, x)$ para todo $u \in \mathbb{R}^3$. De fato, pela definição da função s temos

$$\alpha = 0 \Rightarrow s(0 \cdot \alpha, x) = s(0, x) = 0 = 0 \cdot s(u, x), \quad (4.27)$$

$$\alpha > 0 \Rightarrow s(\alpha u, x) = |\alpha u| s\left(\frac{\alpha u}{|\alpha u|}, x\right) = \alpha |u| s\left(\frac{u}{|u|}, x\right) = \alpha s(u, x) \quad \text{e} \quad (4.28)$$

$$\alpha < 0 \Rightarrow s(\alpha u, x) = |\alpha u| s\left(\frac{\alpha u}{|\alpha u|}, x\right) = |\alpha| |u| s\left(-\frac{u}{|u|}, x\right) = \quad (4.29)$$

$$= -|\alpha| |u| s\left(\frac{u}{|u|}, x\right) = -|\alpha| s(u, x) = \alpha s(u, x). \quad (4.30)$$

Temos que mostrar ainda que s é aditiva para vetores não necessariamente L.I. . De fato, sejam u_1 e u_2 vetores L.D. . Assim $u_2 = k u_1$ para algum k real. Logo

$$s(u_1 + u_2, x) = s(u_1 + k u_1, x) = s((1 + k) u_1, x) = (1 + k) s(u_1, x) = \quad (4.31)$$

$$= s(u_1, x) + k s(u_1, x) = s(u_1, x) + s(k u_1, x) = \quad (4.32)$$

$$= s(u_1, x) + s(u_2, x). \quad (4.33)$$

Resta-nos mostrar ainda que existe uma função matricial $S(x, t)$. De fato, se $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ é a base canônica de \mathbb{R}^3 então existe uma matriz $S(x, t)$ que representa a transformação linear s , ou seja,

$$s(x, t, \mathbf{n}) = S(x, t) \mathbf{n}$$

o que conclui a prova do teorema. \square

4.3 Propriedades da Densidade

Teorema 10 *Sejam F um Fluxo de Cauchy Fracamente Balanceado, $S \subset R$ um elemento regular de superfície, então $F(S) = -F(-S)$ e a função $x \mapsto F(S+x)$ é contínua.*

Demonstração: Primeiramente, observemos que $F(S+x)$ é calculada nos pontos x tais que $S+x$ é um elemento de superfície contido em R . Caso S seja regular (por exemplo compacto) então para todo $x \in A$, que é o domínio da função $x \mapsto F(S+x)$, existe $\delta > 0$ tal que a $B(x, \delta) \subset A$, já que pequenos deslocamentos de $S+x$ ainda resultarão em um elemento de superfície contido em R . Assumindo que $S \subset R$ é um elemento de superfície poligonal, isto é, $S = (P, \mathbf{n})$ e dado $x \in A$ e $\varepsilon > 0$ dado, definimos os sólidos B_1 , B_2 e B de acordo com as setenças a seguir:

$$B_1 = \bigcup_{a \in [0, \varepsilon]} (P + a\mathbf{n})$$

$$B_2 = \bigcup_{a \in [0, \varepsilon]} (P - a\mathbf{n})$$

e

$$B = B_1 \cup B_2$$

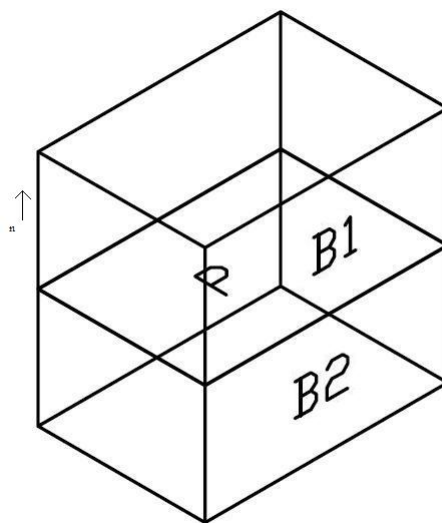


Figura 4.1: cubo

Note que $-S$ e S são faces de B_1 e B_2 , respectivamente. Através da geometria dos Sólidos vemos que as únicas faces de B_1 e B_2 que não coincidem com nenhuma face de B são $-S$ e S , pelo qual decorre a seguinte igualdade:

$$F(\partial B_1) + F(\partial B_2) - F(\partial B) = F(S) + F(-S)$$

Assim, usando a desigualdade triangular e a hipótese de que F é um Fluxo de Cauchy Fracamente Balanceado temos, de acordo com a definição 11, na página 17, o seguinte resultado

$$\begin{aligned} |F(S) + F(-S)| &\leq |F(\partial B_1)| + |F(\partial B_2)| + |F(\partial B)| \\ &\leq cV(B_1) + cV(B_2) + cV(B) \\ &= c[A(P)\varepsilon + A(P)\varepsilon + A(P)2\varepsilon] \\ &\leq c(4\varepsilon A(P)) \end{aligned} \tag{4.34}$$

e fazendo $\varepsilon \rightarrow 0$ vemos que $F(S) = -F(-S)$.

Agora, resta mostrar que a função $x \mapsto F(S + x)$ é contínua. Para tanto, vamos utilizar as seguintes afirmações:

Afirmação 1: Para $x \in A$ e $y \in B(x, \delta) \subset A$, tal que $(y - x) \cdot \mathbf{n}_S = 0$ os elementos de superfície $S + x$ e $S + y$ são compatíveis.

De fato, seja S um CPO, tomemos $x \in A$ e consideremos a bola aberta $B(x, \delta) \subset A$. Dado $y \in B(x, \delta)$, tal que $(y - x) \cdot \mathbf{n}_S = 0$. Para acurarmos que $S + x$ e $S + y$ são compatíveis, basta verificarmos que estão no mesmo plano, uma vez que eles já possuem a mesma normal. Para tanto, vamos mostrar que dados $p_1 \in S + x$, $p_2 \in S + y$ vale $(p_1 - p_2) \cdot \mathbf{n}_S = 0$. Mas $p_1 = s_1 + x$ e $p_2 = s_2 + y$, onde s_1, s_2 pertencem a S . Logo $(p_2 - p_1) \cdot \mathbf{n}_S = ((s_2 - s_1) + (y - x)) \cdot \mathbf{n}_S = (s_2 - s_1) \cdot \mathbf{n}_S + (y - x) \cdot \mathbf{n}_S = 0 + 0 + 0 = 0$.

Afirmação 2: Sejam S_i um elemento de superfície, para $i = 1, 2, \dots, n$. Então $\sum_{i=1}^n F(S_i) \leq c p(S) |x - y|$.

De fato, de acordo com a definição 9, na página 12, temos $|F(S_i)| \leq c A(S_i)$. Dessa forma, pela desigualdade triangular encontramos:

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{i=1}^n F(S_i) \right| &\leq \sum_{i=1}^n |F(S_i)| \\
&\leq \sum_{i=1}^n c A(S_i) \\
&= c \sum_{i=1}^n \text{BASE}(S_i) \text{ALTURA}(S_i) \\
&\leq c |x - y| p(S).
\end{aligned} \tag{4.35}$$

Em virtude da afirmação 1, da definição 9 e da propriedade (CI), da definição dez, segue a desigualdade:

$$\begin{aligned}
|F(S + x) - F(S + y)| &\leq |F(S + x)| + |F(S + y)| \\
&\leq c A(S + x) + c A(S + y) \\
&\leq c [A(S + x) + A(S + y)]
\end{aligned} \tag{4.36}$$

Agora, como temos a norma do fluxo em função das áreas, podemos majorar seu valor, isto é, consideremos $A(\tilde{S})$ como sendo a área formada entre os elementos poligonais de superfície $S + x$ e $S + y$ que também será um elemento poligonal de superfície. Geometricamente, podemos verificar que a soma das áreas desses elementos, $A(S + x) + A(S + y)$, nunca ultrapassa a área de $A(\tilde{S})$. Daí segue a desigualdade:

$$\begin{aligned}
A(S + x) + A(S + y) &\leq A(\tilde{S}) \\
&\leq |x - y| p(S).
\end{aligned} \tag{4.37}$$

Note que, independentemente da forma poligonal de $S + x$ e $S + y$ sempre é possível fazer essa majoração. Assim, substituindo 4.37 em 4.36 obteremos o seguinte resultado:

$$|F(S + x) - F(S + y)| \leq c |x - y| p(S). \tag{4.38}$$

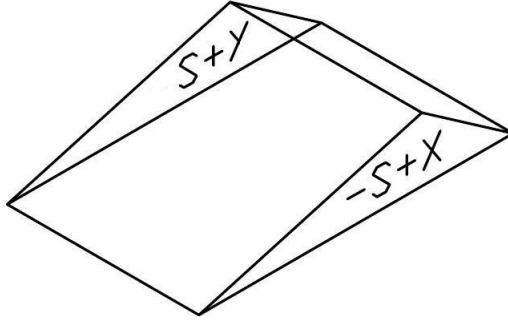


Figura 4.2: Cunha

Feito isso, escolhemos $y \in B(x, \delta) \subset A$, tal que $(y-x) \cdot \mathbf{n}_S > 0$ (para o caso $(y-x) \cdot \mathbf{n}_S < 0$, o resultado a seguir também é válido) e consideremos o sólido B , de acordo com a figura 4.2, cujas faces superior e inferior são $-S+x$, $S+y$ respectivamente e cujas faces laterais são S_1, S_2, \dots, S_n , onde $n \in \mathbb{N}$. Dessa forma, temos:

$$F(\partial B) = F(S+y) + F(-S+x) + \sum_{i=1}^n F(S_i) \quad (4.39)$$

onde o último termo é majorado conforme a afirmação 2. Assim, aplicando a definição 11, é fácil ver:

$$\begin{aligned} |F(\partial B)| &\leq cV(B) \\ |F(S+y) + F(-S+x) + \sum_{i=1}^n F(S_i)| &\leq cV(B) \\ |F(S+y) + F(-S+x)| - \left| \sum_{i=1}^n F(S_i) \right| &\leq cA(S)|x-y| \\ |F(S+y) + F(-S+x)| &\leq cA(S)|x-y| + \left| \sum_{i=1}^n F(S_i) \right| \\ |F(S+y) + F(-S+x)| &\leq cA(S)|x-y| + c|x-y|p(S) \\ |F(S+y) + F(-S+x)| &\leq c|x-y|[A(S) + p(S)]. \end{aligned} \quad (4.40)$$

Além disso, sabemos por definição que $-S+x = -(S+x)$ e, ainda, pela primeira parte desta prova, temos que $F(S+x) = -F(-S+x)$. Em razão desses fatos, a equação

4.40 fica reescrita da seguinte forma:

$$|F(S + y) - F(S + x)| \leq c |x - y|[A(S) + p(S)]. \quad (4.41)$$

Portanto, concluímos por (4.41) que (4.38) é válida par todo $y \in B(x, \delta) \subset A$, o que mostra que essas desigualdades são sempre satisfeitas quando S é um elemento poligonal de superfície.

Por fim, usando a hipótese de que S é um elemento regular de superfície, então, de acordo com a definição 6, existe uma sequência (S_k) de elementos poligonais de superfície S_k que tende regularmente para S , bem como $p(S_k) < k_0$. Assim, segue pelo lema 2 que $F(S_k) \rightarrow F(S)$ e, conseqüentemente, S satisfaz $F(S) = -F(-S)$.

Afora isso, seja $x \in D(S)$ e tome $y \in B(x, \delta) \subset D(S)$, como S e S_k são compatíveis, então é fácil ver que $S_k \subset S \Rightarrow D(S) \subset D(S_k)$ e $B(x, \delta) \subset D(S_k)$. De fato, seja $z \in D(S)$, então $S + z$ é um elemento regular de superfície de R , como $S_k \subset S$ daí segue que $S_k + z \subset S + z \subset R$, pelo que $S_k + z \subset R$, então $z \in D(S_k)$ e, portanto, se $B(x, \delta) \subset D(S)$, então $B(x, \delta) \subset D(S_k)$, o que implica

$$\begin{aligned} |F(S_k + y) - F(S_k + x)| &\leq c |x - y| \{A(S_k) - p(S_k)\} \\ &= c |x - y| \{A(S) + k_0\} \\ &\leq \lambda |x - y| \end{aligned} \quad (4.42)$$

onde $\lambda \in \mathbb{R}$.

Sendo assim, como (S_k) tende regularmente para S , então dado $z \in B(x, \delta)$ implica que $(S_k + z)$ tende regularmente para $S + z$. Daí segue pelo lema dois que $F(S_k + z) \rightarrow F(S + z)$ e, conseqüentemente, para todo $x \in A$, temos

$$|F(S + y) - F(S + x)| \leq \lambda |x - y| \quad (4.43)$$

e isso mostra que a função $x \mapsto F(S + x)$ é contínua. \square

Teorema 11 (Propriedades da Densidade Média) *Seja F um Fluxo de Cauchy Fra-*

amente Balanceado, então a função

$$\begin{aligned} f_r : R_r \times S^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ (x, r, \mathbf{n}) &\longmapsto f_r(x, \mathbf{n}) \end{aligned}$$

é contínua, separadamente, em cada uma das suas variáveis independentes. Além disso, para todo $x \in R_r$ e para qualquer par de vetores normais unitários \mathbf{m}, \mathbf{n} tem-se:

$$|f_r(x, \mathbf{m}) - f_r(x, \mathbf{n})| \leq c\theta(2+r) \quad (4.44)$$

onde $r \in \mathbb{R}$ e θ é o ângulo entre os vetores \mathbf{m}, \mathbf{n} .

Demonstração: Inicialmente, vamos verificar que para todo $x \in R_r$ a função $x \mapsto f_r(x, \mathbf{n})$ é contínua. Assim, consideremos o disco orientado de raio r , centrado em x e normal unitária \mathbf{n} , uma vez que $D_r(x, \mathbf{n})$ é um elemento regular de superfície temos, de acordo com teorema 10, para todo $y \in R_r$, $D_r(x, \mathbf{n}) + y \subset R_r$ é um elemento de superfície e a função $x \mapsto F(D_r(x, \mathbf{n}) + y)$ é contínua e isso, juntamente com a definição 12, mostra que f_r é, separadamente, uma função contínua da posição, uma vez que o quociente de funções contínuas é uma função contínua.

Agora, por simplicidade, escreva D_r para denotar $D_r(x, \mathbf{n})$ e consideremos uma sequência qualquer de números reais (δ_k) , de modo que, se $\delta_k \rightarrow 0$, então $D_{r+\delta_k} \rightarrow D_r$. Daí segue, de acordo com o lema 2 que $F(D_{r+\delta_k}) \rightarrow F(D_r)$ donde segue a continuidade da função $r \mapsto F(D_r)$ e, mais uma vez, de acordo com a definição 12, na página 18, obtemos a continuidade da função $r \mapsto f_r(x, \mathbf{n})$.

Finalmente, para mostrar a continuidade da função $n \mapsto f_r(x, n)$ vamos considerar os elementos regulares de superfície $D(\mathbf{m})$ e $D(\mathbf{n})$, os quais denotam os discos orientados com centro em $x \in R_r$ e raio r , omitidos para facilitarem a notação. Além disso, tais elementos devem ser escolhidos de forma que o par de vetores unitários, \mathbf{m} e \mathbf{n} , forme convenientemente um ângulo $\theta < \frac{\pi}{2}$, de acordo com a figura a seguir.

Dessa forma, temos $D(\mathbf{m}) \cap D(\mathbf{n}) \neq \phi$, denotemos então esta intersecção por $d =$ diâmetro dos discos e, observemos que d delimita os subelementos $D_1(\mathbf{m}), D_2(\mathbf{m}), D_1(\mathbf{n}), D_2(\mathbf{n})$ de $D(\mathbf{m})$ e $D(\mathbf{n})$ respectivamente. Agora, vamos dividir a circunferência de cada

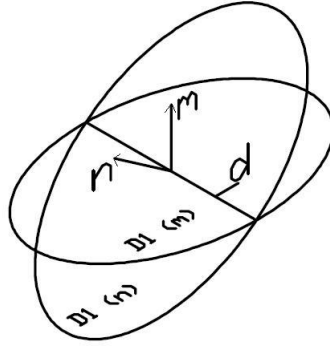


Figura 4.3: Discos Orientados

um dos discos em $2k$ arcos de mesmo comprimento, de modo que, d seja uma diagonal comum dos dois polígonos inscritos em $D(\mathbf{m})$ e $D(\mathbf{n})$ de acordo com a figura a seguir.

Notemos que através da referida divisão teremos as poligonais P_1 em $D(\mathbf{m})$ e P_2 em $D(\mathbf{n})$. Em cada uma destas poligonais obtemos os subelementos $D_{1k}(\mathbf{m}), D_{2k}(\mathbf{m})$ em P_1 e $D_{1k}(\mathbf{n}), D_{2k}(\mathbf{n})$ em P_2 . Por simplicidade, denotemos $p = m, n$ e $D_{ik}(\mathbf{p})$ com $i = 1, 2$ e $k \in \mathbb{N}$, observando que esses subelementos são delimitados por d e têm por conjunto subjacente a intersecação de P_i com $D_i(\mathbf{p})$, isto é, $P_i \cap D_i(\mathbf{p}) = D_{ik}(\mathbf{p})$.

Podemos aplicar o lema dois obtendo:

$$F(D_{ik}(\mathbf{p})) \rightarrow F(D_i(\mathbf{p})) \tag{4.45}$$

para $i = 1, 2$ e $k \in \mathbb{N}$, quando $k \rightarrow \infty$.

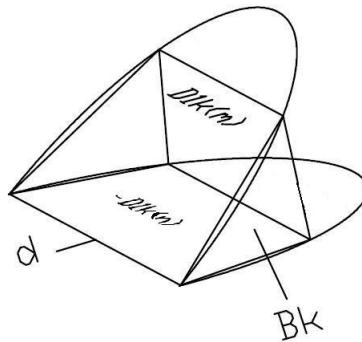


Figura 4.4: Cunha B_k

Feito isso, fixemos $k \in \mathbb{N}$ e consideremos o sólido B_k em formato de cunha, de acordo com a figura 4.4, e suponhamos, sem perda de generalidade, que os elementos de superfície $D_{1k}(m), -D_{1k}(n)$ e $S_1, S_2 \cdots S_k$ são as faces de B_k . Vejamos que o volume da cunha

formada por $D_1(m)$ e $D_1(n)$ é na ordem de $\frac{2}{3}r^3\theta$. De fato, se o volume da esfera é $\frac{4}{3}\pi r^3$, então sendo $\theta < \frac{\pi}{2}$ temos $\alpha + \theta = \frac{\pi}{2}$ e $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \beta = \theta$, daí segue que $V(\text{Cunha}) = \frac{2}{3}r^3\theta$ de sorte que:

$$V(B_k) \leq \frac{2}{3}r^3\theta \leq \frac{\pi}{2}r^3\theta. \quad (4.46)$$

Além disso, $\sum_{i=1}^k A(S_i) \leq \pi r^2\theta$, uma vez que a área do fuso formada por $D_1(m)$ e $D_1(n)$ é de magnitude de $2r^2\theta$, ou seja,

$$\sum_{i=1}^k A(S_i) = \frac{\pi}{2}r^2 + \frac{\pi}{2}r^2 + 2r^2\theta = r^2(\pi + 2\theta) \leq \pi r^2\theta \quad (4.47)$$

de sorte que

$$\sum_{i=1}^k A(S_i) = r^2(\pi + 2) \leq \pi r^2\theta. \quad (4.48)$$

Como $F(\partial B_k) = F(D_{1k}(m)) + F(-D_{1k}(n)) + \sum_{i=1}^k F(S_i)$ e, levando em conta que $|F(\partial B_k)| \leq cV(B_k)$, obtemos, usando a desigualdade triangular e o fato de que $F(-D_{1k}(n)) = -F(D_{1k}(n))$ dado pelo teorema 10, que a norma do fluxo na fronteira do sólido B_k fica determinada pela desigualdade a seguir:

$$|F(D_{1k}(m)) - F(D_{1k}(n))| - \left| \sum_{i=1}^k F(S_i) \right| \leq cV(B_k)$$

Agora, usando (4.46) e (4.48) é fácil ver que:

$$\begin{aligned} |F(D_{1k}(m)) - F(D_{1k}(n))| &\leq \frac{1}{2}\pi r^3\theta c + c\pi r^2\theta \\ &\leq \frac{1}{2}\pi r^2\theta c(2 + r). \end{aligned} \quad (4.49)$$

Aplicando o resultado de (4.45) oriundo do lema dois, a desigualdade anterior resulta em

$$\begin{aligned}
|F(D_1(m)) - F(D_1(n))| &\leq \frac{1}{2}\pi r^3\theta c + c\pi r^2\theta \\
&\leq \frac{1}{2}\pi r^2\theta c(2+r)
\end{aligned}
\tag{4.50}$$

sendo que os elementos $D_{2k}(m)$ e $D_{2k}(n)$ satisfazem uma igualdade idêntica, isto é:

$$\begin{aligned}
|F(D_2(m)) - F(D_2(n))| &\leq \frac{1}{2}\pi r^3\theta c + c\pi r^2\theta \\
&\leq \frac{1}{2}\pi r^2\theta c(2+r).
\end{aligned}
\tag{4.51}$$

Assim, escrevendo $D(m)$ e $D(n)$ como a união disjunta de elementos de superfície como segue, podemos aplicar a propriedade *CII* da definição 10 e, feito isso, verificarmos o resultado esperado, ou seja: $D(m) = (D_1(m) - D_2(m)) \cup (D_2(m) - D_1(m)) \cup d$, daí pelo lema 3 e por *CII* $\Rightarrow F(D(m)) = F(D_1(m) - D_2(m)) + F(D_2(m) - D_1(m)) + F(d)$ e, analogamente, para $D(n) = (D_1(n) - D_2(n)) \cup (D_2(n) - D_1(n)) \cup d$ implica que $F(D(n)) = F(D_1(n) - D_2(n)) + F(D_2(n) - D_1(n)) + F(d)$. Daí, subtraindo $F(D(m)) - F(D(n))$, tomando a norma e usando a desigualdade triangular vamos obter:

$$\begin{aligned}
|F(D(m)) - F(D(n))| &\leq |F(D_1(m)) - F(D_1(n))| + |F(D_2(m)) - F(D_2(n))| \\
&\leq \pi r^2\theta c(2+r).
\end{aligned}
\tag{4.52}$$

Por fim, como $A(D(m)) = A(D(n)) = \pi r^2$, vamos dividir o resultado obtido na desigualdade (4.52) por esse valor e encontrar:

$$\frac{|F(D(m)) - F(D(n))|}{\pi r^2} \leq \theta c(2+r).
\tag{4.53}$$

Desse fato, vemos que somos levados à definição 12 e, conseqüentemente, ao resultado que prova a continuidade da função $n \mapsto f_r(x, n)$, ou seja:

$$\left| \frac{F(D(m))}{\pi r^2} - \frac{F(D(n))}{\pi r^2} \right| = |f_r(x, \mathbf{m}) - f_r(x, \mathbf{n})| \leq \theta c(2 + r) \quad (4.54)$$

porém, tratamos até aqui do caso em que θ é um ângulo agudo.

Sendo assim, consideremos os caso em que $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$. Para tanto, vamos considerar um vetor \mathbf{p} unitário, gerado pelos vetores \mathbf{m}, \mathbf{n} , observando que \mathbf{p} dá a direção da bissetriz do ângulo θ , obtendo, dessa forma, $\theta_1 = \theta_2$ ângulos agudos entre \mathbf{m}, \mathbf{p} e \mathbf{p}, \mathbf{n} respectivamente e, portanto, para cada um desses ângulos vale a desigualdade (4.54), isto é:

$$\begin{aligned} |f_r(x, \mathbf{m}) - f_r(x, \mathbf{n})| &= |f_r(x, \mathbf{m}) - f_r(x, \mathbf{p}) + f_r(x, \mathbf{p}) - f_r(x, \mathbf{n})| \\ &\leq |f_r(x, \mathbf{m}) - f_r(x, \mathbf{p})| + |f_r(x, \mathbf{p}) - f_r(x, \mathbf{n})| \\ &\leq 2 c \theta(2 + r) \end{aligned} \quad (4.55)$$

e isso completa a demonstração. \square

Teorema 12 (Propriedades da Densidade) *Seja F um Fluxo de Cauchy com densidade f , então:*

1. *Para cada seção transversal π a densidade $f(x, \mathbf{n})$ existe quase sempre em $[A]$, sendo $x \in \pi$ e $f(\cdot, \mathbf{n}_\pi) \in L^1(\pi)$.*
2. *Para cada elemento de superfície S temos:*

$$F(S) = \int_S f(x, \mathbf{n}_S) dA_x \quad (4.56)$$

Além disso, se F é fracamente balanceado, então:

3. *Para cada vetor unitário \mathbf{n} e $x \in R$ temos que:*
 - (a) *$f(x, \mathbf{n})$ existe quase sempre em $[V]$ para $x \in R$.*
 - (b) *$f(x, \mathbf{n})$ é uma Função de Borel.*
 - (c) *$f(x, \mathbf{n}) \in L^1(R)$.*

4. Quase todos os pontos $x \in R$ são pontos de densidade.

5. Para todo ponto $x \in R$ que é ponto de densidade, temos que a função $\mathbf{n} \mapsto f(x, \mathbf{n})$ é contínua em S^2 .

Demostração: Para mostrar (1) consideremos qualquer seção transversal π de uma região aberta e limitada $R \subset \mathbb{R}^3$, denotando por $B(\pi)$ os conjunto de Borel de π . Sendo F uma função que associa a cada elemento de superfície S um vetor do \mathbb{R}^3 , temos que sua restrição à seção transversal π fica bem definida por $F_\pi(P) = F(P_\pi)$. Além disso, sendo F um Fluxo de Cauchy temos, por CII, que F é aditiva contável, ou seja, F é uma medida de Borel em π .

Agora, dado $r > 0$, seja $D_r(x)$ o disco centrado em $x \in \pi$ e raio r . De acordo com a definição de densidade média, temos

$$f_r(x, \mathbf{n}_\pi) = \frac{F_\pi(D_r(x))}{A(D_r(x))} \quad (4.57)$$

fazendo $r \rightarrow 0$ obtemos a definição de derivada simétrica de F com relação à medida de área de Borel $[A]$ e, levando em conta a definição (25), na página 16, temos que essa derivada existe para todo $x \in \pi$. Em outras palavras, existe o limite (1.12), sendo $(DF)(x) = f(x, \mathbf{n}_\pi)$ existe quase sempre em $[A]$ como visto no teorema 4 e, além disso, para $x \in \pi$ temos $f(\cdot, \mathbf{n}_\pi) \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e isso mostra (1). A prova do item (2) decorre da continuidade absoluta de F em relação à f e do teorema de Radon-Nikodym, uma vez que F e $[A]$ são medidas de Borel em π .

O item (a) de (3) requer a verificação de que todo ponto $x \in R$ é um ponto de densidade, isto é, para todo vetor \mathbf{n} , o par (x, \mathbf{n}) é um par de densidade e existe o limite (1.4), dado na definição 14. Sendo assim, basta utilizar a continuidade da função $r \mapsto f_r(x, \mathbf{n})$ dada pelo teorema 11.

Em particular, vamos considerar $\mathbf{n}_0 \in S^2$, $r \in \mathbb{R}$, $r' \in \mathbb{Q}$ de modo que:

$$R(\mathbf{n}_0) = \left\{ x \in R; \lim_{r \rightarrow 0} f_r(x, \mathbf{n}_0) = f(x, \mathbf{n}_0) \right\}$$

e

$$R'(\mathbf{n}_0) = \left\{ x \in R; \lim_{r' \rightarrow 0} f_{r'}(x, \mathbf{n}_0) = f(x, \mathbf{n}_0) \text{ e } r' \in \mathbb{Q} \right\}$$

sendo $R'(\mathbf{n}_0) \subset R(\mathbf{n}_0)$, disso segue que

$$\begin{aligned} |f_r(x, \mathbf{n}_0) - L| &= |f_r(x, \mathbf{n}_0) - f_{r'}(x, \mathbf{n}_0) + f_{r'}(x, \mathbf{n}_0) - L| \\ &\leq |f_r(x, \mathbf{n}_0) - f_{r'}(x, \mathbf{n}_0)| + |f_{r'}(x, \mathbf{n}_0) - L| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &\leq \varepsilon \end{aligned} \tag{4.58}$$

ou seja, isso mostra que existe o limite $\lim_{r \rightarrow 0} f_r(x, \mathbf{n}_0)$ para todo $r \in \mathbb{R}$ e todo $x \in R$, então (x, \mathbf{n}_0) é um par de densidade e, como \mathbf{n}_0 é arbitrário, verificamos que f existe $q.s$ em $[V]$.

Quanto ao item (b) de (3) temos que R é um conjunto de Borel, pois é um conjunto aberto, então segue por definição que $f(x, \mathbf{n})$ é uma função de Borel.

Resta mostrar (c) de 3. Para tal, observe que decorre da definição 12 que $|f_r(x, \mathbf{n})| < c$, então tomando o limite desta desigualdade quando $r \rightarrow 0$ temos $|f(x, \mathbf{n})| < c$, disso decorre que f é integrável a Lebesgue, ou seja $\int_R |f(x, \mathbf{n})| dx \leq \int_R c dx = c V(R) < \infty$, então $f \in L^1(R)$.

No item 4 precisamos verificar que quase todos os pontos de R são pontos de densidade. Para isso, precisamos constatar que o conjunto $R - R(\mathbf{n})$ é um conjunto de medida nula, isto é, $V(R - R(\mathbf{n})) = 0$. Em outras palavras, como R é uma região aberta e limitada e para cada direção normal a R dada pelos vetores normais unitários \mathbf{n} temos que $R(\mathbf{n})$ consiste exatamente dos pontos $x \in R$ que são pontos de densidade, então R e $R(\mathbf{n})$ diferem exatamente, um do outro, por uma infinidade de conjuntos de medida nula.

Dessa forma, consideremos μ um subconjunto denso e enumerável em S^2 , isto é, $\bar{\mu} = S^2$. Defina $R(\mu) = \bigcap_{\mathbf{n} \in \mu} R(\mathbf{n})$, então é fácil ver que $V(R - R(\mu)) = 0$. De fato,

$$\begin{aligned}
V(R - R(\mu)) &= V\left(R - \bigcap_{\mathbf{n} \in \mu} R(\mathbf{n})\right) \\
&= V\left(\bigcap_{\mathbf{n} \in \mu} (R - R(\mathbf{n}))\right) \\
&\leq V(R - R(\mathbf{n})) = 0.
\end{aligned} \tag{4.59}$$

Agora, seja $x \in R(\mu)$, então $x \in R(\mathbf{n})$ para todo $\mathbf{n} \in \mu$. Daí segue que para todo $m \in S^2$ temos que (x, \mathbf{m}) é um par de densidade. Assim, dado $\mathbf{n} \in S^2$, existe uma sequência $(\mathbf{m}_i) \subset \mu$, tal que $\lim_{i \rightarrow \infty} \mathbf{m}_i = \mathbf{n}$. Com efeito, seja θ_i o ângulo entre \mathbf{m}_i e \mathbf{n} .

Assim, $i \rightarrow \infty \Leftrightarrow \theta_i \rightarrow 0$. Para tanto, sejam r, l suficientemente pequenos, digamos, $r, l < r_0$ e $x \in R_r \cap R_l$, então usando o resultado de (4.44) segue

$$\begin{aligned}
|f_r(x, \mathbf{n}) - f_l(x, \mathbf{n})| &\leq |f_r(x, \mathbf{n}) - f_r(x, \mathbf{m}_i)| + |f_r(x, \mathbf{m}_i) - f_l(x, \mathbf{m}_i)| + |f_l(x, \mathbf{m}_i) - f_l(x, \mathbf{n})| \\
&\leq |f_r(x, \mathbf{m}_i) - f_l(x, \mathbf{m}_i)| + c\theta_i(4 + r + l).
\end{aligned} \tag{4.60}$$

Como $\theta_i \rightarrow 0$ quando $i \rightarrow \infty$, seja i grande o suficiente para que

$$c\theta_i(4 + r + l) < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{4.61}$$

Além disso, (x, \mathbf{m}_i) é um par de densidade para cada $\mathbf{m}_i \in \mu$, então sabendo que a função $r \mapsto f_r(x, \mathbf{m}_i)$ é contínua, resultado do teorema 11, obtemos

$$|f_r(x, \mathbf{m}_i) - f_l(x, \mathbf{m}_i)| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{4.62}$$

desde que $r, l < \delta < r_0$. Portanto, por (4.61) e (4.62), verificamos que

$$|f_r(x, \mathbf{n}) - f_l(x, \mathbf{n})| < \varepsilon \tag{4.63}$$

e, assim, verificamos que existe o $\lim_{r \rightarrow 0} f_r(x, \mathbf{n})$ e com isso mostramos (4).

Finalmente, para provar (5), suponhamos que (x, \mathbf{n}) e (x, \mathbf{m}) são pares de densidade e que θ seja o ângulo entre \mathbf{n} e \mathbf{m} . Dessa forma, tomando o limite com $r \rightarrow 0$ na desigualdade (4.55) encontramos o seguinte resultado:

$$\begin{aligned} |f_r(x, \mathbf{m}) - f_r(x, \mathbf{n})| &\leq c\theta(2+r) \\ \Rightarrow \lim_{r \rightarrow 0} |f_r(x, \mathbf{m}) - f_r(x, \mathbf{n})| &\leq \lim_{r \rightarrow 0} [c\theta(2+r)] \\ \Rightarrow |\lim_{r \rightarrow 0} f_r(x, \mathbf{m}) - \lim_{r \rightarrow 0} f_r(x, \mathbf{n})| &\leq 2c\theta \\ \Rightarrow |f(x, \mathbf{m}) - f(x, \mathbf{n})| &\leq 2c\theta. \end{aligned}$$

Assim, desde que $|m - n| < \delta$ teremos $\theta < \varepsilon$. De fato, dado $\theta = \varepsilon/2c$, existe $\delta = [2(1 - \cos(\theta))]^{1/2}$ tal que $|f(x, \mathbf{m}) - f(x, \mathbf{n})| \leq \varepsilon$ e, portanto, a função $\mathbf{n} \mapsto f(x, \mathbf{n})$ é contínua.

Teorema 13 *Seja F um Fluxo de Cauchy Fracamente Balanceado, então as seguintes afirmações são equivalentes:*

- (i) F tem densidade média uniforme;
- (ii) F tem densidade f quase sempre e é uma função contínua da posição.

Demonstração: (i) \Rightarrow (ii) é consequência da definição de densidade média uniforme e da continuidade da função $f_r(\cdot, \mathbf{n})$. Para provar a recíproca, seja F um fluxo de Cauchy Fracamente Balanceado que tem densidade f quase sempre e $x \mapsto f(x, \mathbf{n})$ é uma função contínua da posição, então

$$|f(x, \mathbf{n}) - f_r(x, \mathbf{n})| = \left| f(x, \mathbf{n}) - \frac{F(D_r(x, \mathbf{n}))}{A(D_r(x, \mathbf{n}))} \right|. \quad (4.65)$$

O resultado acima provém da definição de densidade média (1.3). Feito isso, utilizamos a equação (4.56) para obter

$$\left| f(x, \mathbf{n}) - \frac{\int_{D_r(x, \mathbf{n})} f(y, \mathbf{n}) dA_y}{A(D_r(x, \mathbf{n}))} \right| = \left| \frac{\int_{D_r(x, \mathbf{n})} f(x, \mathbf{n}) dA_y}{A(D_r(x, \mathbf{n}))} - \frac{\int_{D_r(x, \mathbf{n})} f(y, \mathbf{n}) dA_y}{A(D_r(x, \mathbf{n}))} \right|. \quad (4.66)$$

Agora, usando a desigualdade triangular para integrais e, ainda, o fato de que $|f(x, \mathbf{n}) - f(y, \mathbf{n})| \leq \sup_{y \in D_r(x)} |f(x, \mathbf{n}) - f(y, \mathbf{n})|$ vamos encontrar

$$\begin{aligned}
 |f(x, \mathbf{n}) - f_r(x, \mathbf{n})| &\leq \frac{\int_{D_r(x, \mathbf{n})} \sup_{y \in D_r(x)} |f(x, \mathbf{n}) - f(y, \mathbf{n})|}{A(D_r(x, \mathbf{n}))} \\
 &\leq \sup_{y \in D_r(x)} |f(x, \mathbf{n}) - f(y, \mathbf{n})|. \tag{4.67}
 \end{aligned}$$

Como $f(\cdot, \mathbf{n})$ é contínua em R , então $f(\cdot, \mathbf{n})$ é uniformemente contínua em cada R_l , pois $R_l \subset R$ e R é uma região limitada.

Seja $K \subset R$ um conjunto compacto, logo para $x \in K$, existe r tal que $K \subset R_r$ e $|f(x, \mathbf{n}) - f(y, \mathbf{n})| \leq \sup_{y \in D_r(x, \mathbf{n})} |f(x, \mathbf{n}) - f(y, \mathbf{n})|$, desde que $|y - x| < r < \delta$ e, isso, mostra que F tem densidade média uniforme. \square

4.4 Linearidade da Densidade

Definição 26 (Linearidade) *Seja F um Fluxo de Cauchy com densidade f . Dizemos que f é linear em x , se x é um ponto de densidade e a função*

$$f(x, \cdot) : S^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \tag{4.68}$$

tem a forma $f(x, \mathbf{n}) = T(x)\mathbf{n}$ para todo $\mathbf{n} \in S^2$, onde $T(x) : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ é uma transformação linear.

Entretanto, nem todo fluxo de Cauchy tem densidade linear. Por exemplo, fixe $u \neq 0$, dado $\mathbf{n} \in \mathbb{R}^3$. Seja $f(x, \mathbf{n}) = (u \cdot \mathbf{n})\mathbf{n}$ a densidade do fluxo definido por $F(S) = \int_S f(x, \mathbf{n}) dA_x = A(S) (u \cdot \mathbf{n})\mathbf{n}$. Vejamos que, neste caso, para cada $x \in \mathbb{R}^3$ fixado, temos que $T(x) = u \cdot \mathbf{n}$ e $T(x)$ não é linear. De fato, se considerarmos um cubo

$B \subset R$, com aresta medindo ε e com um par de faces paralelas perpendiculares a u , então:

$$\begin{aligned}
\frac{F(\partial B)}{V(B)} &= \frac{\sum_{i=1}^6 F(S_i)}{\varepsilon^3} \\
&= \frac{\sum_{i=1}^6 A(S_i)(u \cdot \mathbf{n}_{S_i})\mathbf{n}_{S_i}}{\varepsilon^3} \\
&= \frac{(u \cdot \mathbf{n}_{S_1})\mathbf{n}_{S_1}}{\varepsilon} + \frac{(u \cdot \mathbf{n}_{S_2})\mathbf{n}_{S_2}}{\varepsilon}.
\end{aligned} \tag{4.69}$$

Notemos que, no somatório acima, os outros quatro termos, correspondendo às demais faces do cubo resultam no seguinte produto interno $u \cdot \mathbf{n}_{S_i} = 0$. Além disso, observe que $\mathbf{n}_{S_1} = \frac{u}{|u|}$ e $\mathbf{n}_{S_2} = -\frac{u}{|u|}$ e substituindo estes vetores em (4.69) vamos obter:

$$\begin{aligned}
\frac{F(\partial B)}{V(B)} &= \frac{1}{\varepsilon} \left[\left(u \cdot \frac{u}{|u|} \right) \frac{u}{|u|} + \left(u \cdot \left(-\frac{u}{|u|} \right) \right) \left(-\frac{u}{|u|} \right) \right] \\
&= \frac{1}{\varepsilon} (u + u) \\
&= \frac{2u}{\varepsilon}.
\end{aligned} \tag{4.70}$$

Vejamos que F é de fato um fluxo de Cauchy, pois dados S_1, S_2 dois elementos de superfície, tal que $S_1 \cap S_2 = \phi$ teremos $|F(S)| = |A(S)(u \cdot \mathbf{n})\mathbf{n}| = cA(S)$, então F é limitado por área. Porém, F não é fracamente balanceado, uma vez que

$$\frac{F(\partial B)}{V(B)} = \frac{2u}{\varepsilon} \Rightarrow \left| \frac{F(\partial B)}{V(B)} \right| = \frac{2}{\varepsilon} |u| \tag{4.71}$$

ou seja, se a aresta do cubo diminui ($\varepsilon \rightarrow 0$), então $\frac{|F(\partial B)|}{V(B)} \rightarrow \infty$.

Sendo assim, as definições e resultados anteriores não podem ser aplicados para esse fluxo exemplificado. Entretanto, para dar sentido e utilidade ao que até agora foi exposto, veremos que os próximos dois teoremas irão dar esse aporte e, principalmente, mostrar que ser fracamente balanceado é condição suficiente para a existência da linearidade da densidade f em todo ponto, sobretudo, quando f é uma função contínua e linear em quase todo ponto.

Para tanto, seja F um fluxo de Cauchy e $x \in \mathbb{R}^3$ e defina:

$$\begin{aligned} MF_x(S) : S \subset R &\longrightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^3) \\ S &\longmapsto MF_x(S) \end{aligned} \quad (4.72)$$

onde S é um elemento de superfície e $MF_x(S) = \int_S (y - x) \wedge f(y, \mathbf{n}_S) dA_y$ é uma transformação linear, ou seja,

$$\begin{aligned} \int_S (y - x) \wedge f(y, \mathbf{n}_S) dA_y : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ u &\longmapsto \left(\int_S (y - x) \wedge f(y, \mathbf{n}_S) dA_y \right) u \end{aligned} \quad (4.73)$$

e, de acordo com o que foi definido no item 10 da notação, é dada por

$$\left[\int_S (y - x) \wedge f(y, \mathbf{n}_S) dA_y \right] (u) = \int_S [(y - x) \wedge f(y, \mathbf{n}_S)] (u) dA_y \quad (4.74)$$

e

$$\begin{aligned} [(y - x) \wedge f(y, \mathbf{n}_S)] (u) &= [(y - x) \otimes f(y, \mathbf{n}_S)] (u) - [f(y, \mathbf{n}_S) \otimes (y - x)] (u) \\ &= (f(y, \mathbf{n}_S) \cdot u) (y - x) - ((y - x) \cdot u) f(y, \mathbf{n}_S) \end{aligned} \quad (4.75)$$

Teorema 14 (Teorema de Cauchy) *Seja F um Fluxo de Cauchy Fracamente Balanceado. Assumindo que:*

(i) *F tem densidade em todo ponto;*

(ii) *A densidade f é uma função contínua da posição.*

Então f é linear em cada ponto de R . Além disso, se F é balanceado por momento, então f é linear e simétrica em todos os pontos de R .

Demonstração: Seja $\{e_1, e_2, e_3\}$ uma base ortonormal do \mathbb{R}^3 . Dado $x \in R$, vamos transladar em x o triedo formado por esses vetores. Além disso, seja \mathbf{n} um vetor unitário que, ao tomarmos, o produto interno com os vetores da referida base, satisfaça, para

$i = 1, 2, 3$, a seguinte desigualdade:

$$\mathbf{n} \cdot e_i > 0. \quad (4.76)$$

Após considerar a clássica prova do teorema de Cauchy, vamos nos deslocar a partir de x , h unidades na direção do vetor \mathbf{n} , determinando, dessa forma, um plano π que passa pelo ponto $P = x + h\mathbf{n}$, cujo vetor normal é \mathbf{n} . Este plano, intercepta os eixos coordenados nos pontos P_1, P_2, P_3 conforme a figura abaixo.

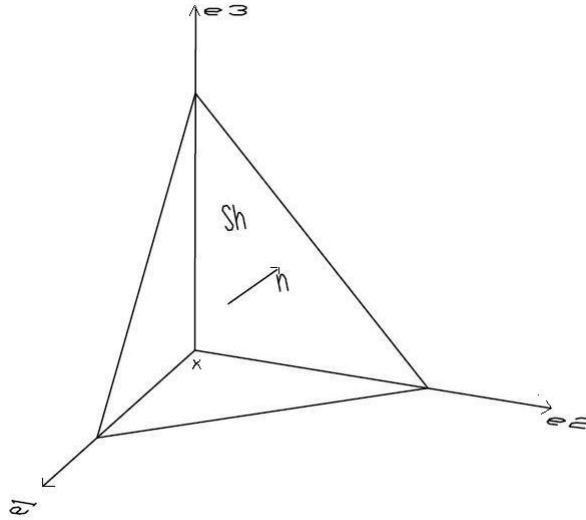


Figura 4.5: Tetraedro de Cauchy

Vamos denotar este tetraedro por B_h . Observemos que este sólido tem o vértice comum $X = (x_1, x_2, x_3)$ em três de suas faces e, ainda, dentro da terminologia usada nas definições iniciais, os elementos de superfície $S_1 = (S_{1h}, -e_2)$, $S_2 = (S_{2h}, -e_1)$, $S_3 = (S_{3h}, -e_3)$, $S_4 = (S_h, \mathbf{n})$. Agora, vamos determinar os pontos P_1, P_2, P_3 , com a finalidade de determinar as áreas associadas a cada conjunto subjacente de cada um desses elementos de superfície.

Dessa forma, vamos determinar inicialmente a equação do plano π

$$\mathbf{n} \cdot X = d \quad (4.77)$$

como $P_h = x + h\mathbf{n} \in \pi$, então a equação do plano π é dada por

$$\mathbf{n} \cdot X = \mathbf{n}(x + h\mathbf{n}) \quad (4.78)$$

mas $P_1 = x + se_1 \in \pi$, temos $\mathbf{n}(x + se_1) = \mathbf{n}(x + h\mathbf{n}) \Rightarrow P_1 = x + \frac{h}{n_1}e_1$. Todavia, os pontos P_2 e P_3 obedecem a uma igualdade idêntica e, portanto, $P_2 = x + \frac{h}{n_2}e_2$ e $P_3 = x + \frac{h}{n_3}e_3$.

Feito isso, estamos aptos a calcular as referidas áreas, ou seja:

$$A(S_h) = \frac{1}{2}|\overrightarrow{P_1P_3} \times \overrightarrow{P_1P_2}| = \frac{h^2}{2n_1n_2n_3}$$

$$A(S_{1h}) = \frac{1}{2}|\overrightarrow{XP_2} \times \overrightarrow{XP_3}| = \frac{h^2}{2n_2n_3} = n_1A(S_h)$$

$$A(S_{2h}) = \frac{1}{2}|\overrightarrow{XP_3} \times \overrightarrow{XP_1}| = \frac{h^2}{2n_3n_1} = n_2A(S_h)$$

$$A(S_{3h}) = \frac{1}{2}|\overrightarrow{XP_2} \times \overrightarrow{XP_1}| = \frac{h^2}{2n_1n_2} = n_3A(S_h)$$

$$A(S_{ih}) = n_iA(S_h). \quad (4.79)$$

Além disso, podemos dizer que B_h é um sólido tão pequeno quanto se queira, isto é, o volume deste tetraedro depende de h . Assim, considerando a hipótese de que F é um fluxo de Cauchy Fracamente Balanceado, vamos encontrar:

$$\begin{aligned} |F(\partial B_h)| &= \left| F(S_h) + \sum_{i=1}^3 F(S_{ih}) \right| \\ &= \left| \int_{S_h} f(x, \mathbf{n}) dA_x + \sum_{i=1}^3 \int_{S_{ih}} f(x, -e_i) dA_x \right| \\ &= \left| \int_{S_h} f(x, \mathbf{n}) dA_x - \sum_{i=1}^3 \int_{S_{ih}} f(x, e_i) dA_x \right|. \end{aligned} \quad (4.80)$$

Por outro lado,

$$\frac{|F(\partial B_h)|}{A(S_h)} \leq c \frac{V(B_h)}{A(S_h)} = \frac{1}{3} \frac{A(S_h)h}{A(S_h)}. \quad (4.81)$$

Dividindo a equação (4.80) por $A(S_h)$ e tomando o limite quando $h \rightarrow 0$ vamos obter:

$$\frac{1}{A(S_h)} \int_{S_h} f(x, \mathbf{n}) dA_x \rightarrow f(x, \mathbf{n}) \quad (4.82)$$

$$\frac{1}{A(S_h)} \int_{S_{ih}} f(x, e_i) dA_x = \frac{n \cdot e_i}{(n \cdot e_i)A(S_{ih})} \int_{S_{ih}} f(x, e_i) dA_x \rightarrow (n \cdot e_i)f(x, e_i). \quad (4.83)$$

Como

$$\left| F(S_h) + \sum_{i=1}^3 F(S_{ih}) \right| = 0 \quad (4.84)$$

então

$$f(x, \mathbf{n}) = \sum_{i=1}^3 (n \cdot e_i)f(x, e_i) \quad (4.85)$$

Observação: Em (4.82) e (4.83) utilizamos o teorema do valor médio e, ainda, $A(S_{ih}) = n_i A(S_h)$ obtida em (4.79).

Além disso, se $\mathbf{n} \cdot e_i < 0$ para algum i a demonstração é análoga, basta, apenas substituir e_i por $-e_i$. Porém, se tivermos $\mathbf{n} \cdot e_i = 0$ para algum i , então \mathbf{n} está em um plano coordenado. Neste caso, devemos encontrar uma sequência $(\mathbf{n}_k) \subset S^2$ para $k \in \pi$, satisfazendo $\lim_{k \rightarrow 0} \mathbf{n}_k = \mathbf{n}$ e $\mathbf{n}_k \cdot e_i \neq 0$.

Dessa forma, (4.85) é válida para todo n_k e como $\mathbf{n} \mapsto f(x, \mathbf{n})$ é contínua, então (4.85) continua valendo para todo \mathbf{n} , visto que

$$f(x, \mathbf{n}_k) = \sum_{i=1}^3 (n_k \cdot e_i)f(x, e_i). \quad (4.86)$$

Assim, tomando o limite quando $k \rightarrow 0$, em 4.86, verificamos, através da continuidade da f em \mathbf{n} dada no item (5) do teorema 12, a seguinte igualdade

$$f(x, \mathbf{n}) = \sum_{i=1}^3 (n \cdot e_i)f(x, e_i). \quad (4.87)$$

A partir disso, defina

$$\begin{aligned} T(x) : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ v &\mapsto T(x)v = \sum_{i=1}^3 (v \cdot e_i)f(x, e_i) \end{aligned} \quad (4.88)$$

então $T(x)$ é linear. De fato, dados $u, v \in \mathbb{R}^3$ e $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
T(x)(\alpha u + v) &= \sum_{i=1}^3 [(\alpha u + v) \cdot e_i] f(x, e_i) \\
&= \sum_{i=1}^3 (\alpha u \cdot e_i) f(x, e_i) + \sum_{i=1}^3 (v \cdot e_i) f(x, e_i) \\
&= \alpha \sum_{i=1}^3 (u \cdot e_i) f(x, e_i) + \sum_{i=1}^3 (v \cdot e_i) f(x, e_i) \\
&= \alpha T(x)u + T(x)v
\end{aligned} \tag{4.89}$$

portanto, por (4.88) e (4.89) temos $f(x, \mathbf{n}) = T(x)\mathbf{n}$ e isso mostra que f é linear em cada ponto de R .

Por fim, vamos supor que F é balanceado por momento, de acordo com a definição (16). Dados $x \in \mathbb{R}^3$ e $B \subset R$ um sólido qualquer, então por (4.72)

$$MF_x(\partial B) = I^T - I \tag{4.90}$$

onde $I = \int_{\partial B} f(y, \mathbf{n}(y)) \otimes (y - x) dA_y$, sendo $\mathbf{n}(y)$ a normal unitária exterior à ∂B em y .

Entretanto, f é linear, então $f(y, \mathbf{n}(y)) = T(y)\mathbf{n}(y)$, disso decorre

$$\begin{aligned}
f(y, \mathbf{n}(y)) \otimes (y - x) &= T(y)\mathbf{n}(y) \otimes (y - x) \\
&= T(y)[\mathbf{n}(y) \otimes (y - x)] \\
&= [T(y) - T(x) + T(x)][\mathbf{n}(y) \otimes (y - x)] \\
&= T(x)[\mathbf{n}(y) \otimes (y - x)] + [T(y) - T(x)][\mathbf{n}(y) \otimes (y - x)]
\end{aligned} \tag{4.91}$$

e a integral I fica com a seguinte forma

$$I = T(x) \underbrace{\int_{\partial B} \mathbf{n}(y) \otimes (y - x) dA_y}_{\Gamma'} + \underbrace{\int_{\partial B} [T(y) - T(x)][\mathbf{n}(y) \otimes (y - x)] dA_y}_{\Gamma'} \tag{4.92}$$

sendo que por (4.73) temos

$$I'(u) = T(x) \left(\int_{\partial B} [\mathbf{n}(y) \otimes (y - x)](u) dA_y \right) \quad (4.93)$$

$$I''(u) = \int_{\partial B} [T(y) - T(x)][\mathbf{n}(y) \otimes (y - x)](u) dA_y. \quad (4.94)$$

Agora, vamos aplicar o teorema da divergência na integral I' . Assim, seja $G = ((y - x) \cdot u, 0, 0)$ um campo vetorial de classe C^1 , então

$$\begin{aligned} I'(u) &= T(x) \left(\int_{\partial B} [\mathbf{n}(y) \otimes (y - x)](u) dA_y \right) \\ &= T(x) \left(\int_{\partial B} [(y - x) \cdot u] \mathbf{n}(y) dA_y \right) \\ &= T(x) \left(\int_B \mathbf{div} \{[(y - x) \cdot u]\} dx \right) \\ &= V(B) T(x)(u). \end{aligned} \quad (4.95)$$

Quanto à integral $I''(u)$, para sua manipulação, vamos supor que B é um cubo cuja aresta mede ε , então

$$\begin{aligned} I''(u) &= \int_{\partial B} [T(y) - T(x)][\mathbf{n}(y) \otimes (y - x)](u) dA_y \\ &= \int_{\partial B} [T(y) - T(x)][(y - x) \cdot u] \mathbf{n}(y) dA_y \end{aligned} \quad (4.96)$$

Tomando a norma deste operador, resulta

$$\begin{aligned} |I''(u)| &= \left| \int_{\partial B} [T(y) - T(x)][(y - x) \cdot u] \mathbf{n}(y) dA_y \right| \\ &\leq \int_{\partial B} |[T(y) - T(x)][(y - x) \cdot u] \mathbf{n}(y)| dA_y \\ &\leq \sup_{y \in B} |[T(y) - T(x)]| \int_{\partial B} |[(y - x) \cdot u] \mathbf{n}(y)| dA_y \end{aligned} \quad (4.97)$$

como x, y são vértices do cubo, vamos tomar $\max_{x, y \in B} |x - y| = \sqrt{3} \varepsilon$ e seguindo a partir de (4.97)

$$\begin{aligned}
|I''(u)| &\leq \sup_{y \in B} |T(y) - T(x)| \int_{\partial B} |[(y - x) \cdot u] \mathbf{n}(y)| dA_y \\
&\leq |u| \sup_{y \in B} |T(y) - T(x)| \int_{\partial B} |(y - x)| |\mathbf{n}(y)| dA_y \\
&\leq |u| \sup_{y \in B} |T(y) - T(x)| \sqrt{3} \varepsilon \int_{\partial B} dA_y \\
&\leq |u| \sup_{y \in B} |T(y) - T(x)| \sqrt{3} \varepsilon 6\varepsilon^2 \\
&\leq |u| \sup_{y \in B} |T(y) - T(x)| 6\sqrt{3} V(B).
\end{aligned} \tag{4.98}$$

Porém, como $I'' \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$, então

$$\begin{aligned}
|I''| &= \sup_{|u|=1} |I''(u)| \\
&\leq \sup_{y \in B} |T(y) - T(x)| 6\sqrt{3} V(B).
\end{aligned} \tag{4.99}$$

Por fim, usemos a convergência da norma em $\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$, ou seja

$$\begin{aligned}
\left| \frac{MF_x(\partial B)}{V(B)} - [T^T(x) - T(x)] \right| &= \left| \frac{I^T - I}{V(B)} - T^T(x) + T(x) \right| \\
&\leq \left| \frac{(I - V(B)T(x))^T}{V(B)} \right| + \left| \frac{V(B)T(x) - I}{V(B)} \right|
\end{aligned} \tag{4.100}$$

pelo que, basta mostrar que $\frac{|V(B)T(x) - I|}{V(B)} \rightarrow 0$ quando $V(B) \rightarrow \infty$.

Assim,

$$\begin{aligned}
\frac{|V(B)T(x) - I|}{V(B)} &= \frac{|V(B)T(x) - I' - I''|}{V(B)} \\
&= \frac{|V(B)T(x) - V(B)T(x) - I''|}{V(B)} \\
&= \frac{|I''|}{V(B)} \\
&\leq \frac{1}{V(B)} \underbrace{6\sqrt{3} \sup_{y \in B} |T(y) - T(x)|}_{V(B) \rightarrow \infty} \rightarrow 0
\end{aligned} \tag{4.101}$$

e portanto, $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{MF_x(\partial B_k)}{V(B_k)} = 0$, logo $T^T(x) - T(x) = 0 \Rightarrow T^T(x) = T(x)$ e isso mostra que f é simétrica em todos os pontos de R . \square

Teorema 15 (Linearidade Quase Sempre) *Seja F um Fluxo de Cauchy Fracamente Balanceado com densidade f . Então f é linear em quase todos os pontos de R , isto é, existe um campo $T : R \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ e, para cada vetor unitário \mathbf{n} , um subconjunto $R_*(\mathbf{n})$ de R tal que*

$$V(R - R_*(\mathbf{n})) = 0 \quad (4.102)$$

$$f(x, \mathbf{n}) = T(x)\mathbf{n} \quad (4.103)$$

para todo $x \in R_*(\mathbf{n})$.

Demonstração: Seja $\rho_\delta : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função não-negativa de classe C^∞ , tal que

(i) $\rho_\delta \geq 0$ se $|x| \leq \delta$

(ii) $\rho_\delta = 0$ se $|x| > \delta$

(iii) $\int_{\mathbb{R}^3} \rho_\delta dx = 1$.

Em virtude da definição acima, dado $\delta > 0$, vamos regularizar a função $f(x, \mathbf{n})$, através da seguinte convolução, de acordo com o lema 4, ou seja

$$f_\delta(x, \mathbf{n}) = \int_{\mathbb{R}^3} \rho_\delta(x - y) f(y, \mathbf{n}) dy. \quad (4.104)$$

Relembrando que $R(\mathbf{n})$, domínio da função $f(\cdot, \mathbf{n})$, é um conjunto de Borel, então ao estendermos essa função de $R(\mathbf{n})$ para todo \mathbb{R}^3 , estamos exigindo que $f(\cdot, \mathbf{n}) = 0$, para todo $x \in \mathbb{R}^3 - R(\mathbf{n})$, pelo que, esta extensão também é uma função Borel.

Dessa forma, a integral (4.104) define uma função $f_\delta : \mathbb{R}^3 \times S^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ e, sendo ρ uma função de suporte compacto, então $f_\delta \in C^\infty$ e, ainda, as aproximações de $f(\cdot, \mathbf{n}) \in L^1(R)$. Logo, pelo item 3, do lema 4, verificamos que $f_\delta \rightarrow f$ em $L^1(R)$.

Em virtude de f ser uma função limitada, isto é, $|f(\cdot, \mathbf{n})| < c$, temos que

$$\begin{aligned}
|f_\delta(x, \mathbf{n})| &= \left| \int_{\mathbb{R}^3} \rho_\delta(x-y) f(y, \mathbf{n}) dy \right| \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^3} |\rho_\delta(x-y)| |f(y, \mathbf{n})| dy. \\
&\leq c \int_{\mathbb{R}^3} |\rho_\delta(x-y)| dy. \\
&= c.
\end{aligned} \tag{4.105}$$

Assim, dado $\varepsilon > 0$, de modo que $R_\varepsilon \neq \emptyset$ e $\delta \in (0, \varepsilon)$, então para todo elemento de superfície $S \subset R_\varepsilon$ temos, por (4.105), que $F_\delta(S) = \int_S f_\delta(x, \mathbf{n}_s) dA_x$ é um fluxo de Cauchy com densidade f_δ e, esta última, é uma função contínua da posição. De fato,

$$\begin{aligned}
|F_\delta(S)| &= \left| \int_S f_\delta(x, \mathbf{n}_s) dA_x \right| \\
&\leq \int_S |f_\delta(x, \mathbf{n}_s)| dA_x \\
&\leq c A(S)
\end{aligned} \tag{4.106}$$

Agora, devemos mostrar que F_δ é um Fluxo de Cauchy Fracamente Balanceado, ou seja, F_δ é limitado por volume, podendo, dessa forma, aplicar o Teorema de Cauchy para a densidade f_δ . Para tanto, seja $\phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^q)$ uma função contínua e S um elemento de superfície em R , de tal forma que tenhamos a seguinte identidade

$$\int_S \phi(x) f_\delta(x, \mathbf{n}_s) dA_x = \int_{\mathbb{R}^3} \rho_\delta(z) \int_{S-z} \phi(x+z) f_\delta(x, \mathbf{n}_s) dA_x dV_z. \tag{4.107}$$

Vamos denotar por I o lado esquerdo da igualdade acima e, por simplicidade, escrever $n_S = n$, então

$$\begin{aligned}
I &= \int_S \int_{\mathbb{R}^3} \rho_\delta(x-y) \phi(x) f_\delta(y, \mathbf{n}) dV_y dA_x \\
&= \int_S \int_{\mathbb{R}^3} \rho_\delta(z) \phi(x) f_\delta(x-z, \mathbf{n}) dV_z dA_x
\end{aligned} \tag{4.108}$$

Pelo teorema de Fubini

$$I = \int_{\mathbb{R}^3} \rho_\delta(z) \int_S \phi(x) f_\delta(x - z, \mathbf{n}) dA_x dV_z \quad (4.109)$$

logo

$$\int_S \phi(x) f_\delta(x - z, \mathbf{n}) dA_x = \int_{S-z} \phi(x + z) f_\delta(x, \mathbf{n}) dA_x. \quad (4.110)$$

Em função disso, consideremos um sólido B e seja S uma face dele, então $n_s = n_{S-z}$ e por (4.107)

$$\int_{\partial B} \phi(x) f_\delta(x, \mathbf{n}_{\partial B}(x)) dA_x = \int_{\mathbb{R}^3} \rho_\delta(z) \int_{\partial B-z} \phi(x + z) f_\delta(x, \mathbf{n}_{\partial B-z}(x)) dA_x dV_z \quad (4.111)$$

agora, em particular, seja $B \subset R_\varepsilon$, se $\delta \in (0, \varepsilon)$ e $B - z \subset R$ sempre que $\rho_\delta(z) \neq 0$, então dada $\phi(x) = I \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^q)$ verificamos que

$$\begin{aligned} \left| \int_{\partial B} f_\delta(x, \mathbf{n}_{\partial B}(x)) dA_x \right| &= \left| \int_{\mathbb{R}^3} \rho_\delta(z) \underbrace{\int_{\partial B-z} f_\delta(x, \mathbf{n}_{\partial B-z}(x)) dA_x}_{F(\partial B-z)} dV_z \right| \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^3} |\rho_\delta(z)| F(\partial B - z) dV_z \\ &\leq c V(B) \int_{\mathbb{R}^3} \rho_\delta(z) dV_z \\ &= c V(B) \end{aligned} \quad (4.112)$$

o que mostra que F_δ é fracamente balanceado.

Dessa forma, pelo teorema de Cauchy temos que existe um campo $T_\delta : R_\varepsilon \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^n)$, tal que

$$f_\delta(x, \mathbf{n}) = T_\delta(x) \mathbf{n} \quad (4.113)$$

para todo par de densidade $(x, \mathbf{n}) \in R_\varepsilon \times S^2$.

Assim, seja $\{e_i\}$ uma base ortonormal do \mathbb{R}^3 . Se $f_\delta(\cdot, \mathbf{n}) \rightarrow f(\cdot, \mathbf{n})$ em $L^1(R)$ quando $\delta \rightarrow 0$, então T_δ converge para o campo

$$T(x) = \sum_{i=1}^3 f(x, e_i) \otimes e_i \text{ em } L^1(R_\varepsilon). \quad (4.114)$$

De fato, dado por (4.113) temos que

$$f_\delta(x, \mathbf{n}) \otimes e_i = T_\delta(x, \mathbf{n}) \otimes e_i. \quad (4.115)$$

Dados, $u \in \mathbb{R}^3$ e $\mathbf{n} = e_1 \in S^2$ obtemos

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i=1}^3 T_\delta(x, e_i) \otimes e_i \right) u &= \sum_{i=1}^3 [e_i \cdot u] T_\delta(x) e_i \\ &= \sum_{i=1}^3 u_i T_\delta(x) e_i \\ &= \sum_{i=1}^3 u_i \text{Col}_i(T_\delta(x)) \\ &= T_\delta(x) u \end{aligned} \quad (4.116)$$

logo

$$\sum_{i=1}^3 T_\delta(x, e_i) \otimes e_i = T_\delta(x). \quad (4.117)$$

Como $f_\delta(\cdot, \mathbf{n}) \rightarrow f(\cdot, \mathbf{n})$ em $L^1(R)$, então

$$\int_R |f_\delta(x, \mathbf{n}) - f(x, \mathbf{n})| dx \rightarrow 0$$

quando $\delta \rightarrow 0$, logo

$$0 \leq \int_{R_\varepsilon} |f_\delta(x, \mathbf{n}) - f(x, \mathbf{n})| dx \leq \int_R |f_\delta(x, \mathbf{n}) - f(x, \mathbf{n})| dx$$

pois $R_\varepsilon \subset R$ e, portanto, $f_\delta(\cdot, \mathbf{n}) \rightarrow f(\cdot, \mathbf{n})$ em $L^1(R_\varepsilon)$.

Vamos mostrar que $T_\delta(x) \rightarrow T(x)$ em $L^1(R_\varepsilon)$ quando $\delta \rightarrow 0$. Com efeito, como

$$f_\delta(x, e_i) \otimes e_i \rightarrow f(x, e_i) \otimes e_i \text{ em } L^1(R_\varepsilon) \quad (4.118)$$

devemos verificar que

$$\int_{R_\varepsilon} |f_\delta(x, e_i) \otimes e_i - f(x, e_i) \otimes e_i|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)} dx \rightarrow 0. \quad (4.119)$$

Mas

$$\begin{aligned} |f_\delta(x, e_i) \otimes e_i - f(x, e_i) \otimes e_i|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)} &= \sup_{|u| \leq 1} |f_\delta(x, e_i) \otimes e_i - f(x, e_i) \otimes e_i|(u) \\ &= \sup_{|u| \leq 1} |(e_i \cdot u)f_\delta(x, e_i) - (e_i \cdot u)f(x, e_i)| \\ &= |f_\delta(x, e_i) - f(x, e_i)| \sup_{|u| \leq 1} |e_i \cdot u| \\ &\leq |f_\delta(x, e_i) - f(x, e_i)| \sup_{|u| \leq 1} |e_i||u| \\ &\leq |f_\delta(x, e_i) - f(x, e_i)| \end{aligned} \quad (4.120)$$

e como, $f_\delta(\cdot, \mathbf{n}) \rightarrow f(\cdot, \mathbf{n})$, quando $\delta \rightarrow 0$, então (4.119) está satisfeita, logo $T_\delta(x) \rightarrow T(x)$

e, portanto, $f(x, \mathbf{n}) = T(x)\mathbf{n}$. \square

Referências Bibliográficas

- [1] ADAMS, R., *Sobolev Spaces*. New York: Academic Press, 1975.
- [2] BRÉZIS, H., *Análisis Funcional – Teoría y Aplicaciones*. Madrid: Alianza Editorial, 1984.
- [3] DAFERMOS, Constantine M. *Hyperbolic Conservation Laws in continuum Physics* 2ª Ed.. Germany: Springer 1999, ISSN 00727830. Notes. Partial Differential Equations, 1993.
- [4] FEIJÓO, R. A., *Introducción a Mecánica del Continuo*. Rio de Janeiro: Notas de Aula, 1977.
- [5] FOX, R. W. & McDONALD, A. T., *Introdução a Mecânica dos Fluidos*. Rio de Janeiro: Guanabara, 1985.
- [6] GURTIN, M. E. & MARTINS, L. C., *Cauchy's Theorem in Classical Physics*. Arch. Rat. Mech. Anal. 60 (305-324), 1976.
- [7] KREYSZIG, E., *Introductory Functional Analysis with Applications*. United States of America: Wiley Classics Library, 1978.
- [8] LIMA, E. L., *Análise Real*. Volume 2. Rio de Janeiro: SBM, 1985.
- [9] LIMA, E. L., *Curso de Análise vol. 2*. Rio de Janeiro: IMPA, 2005.
- [10] MELO, S. T. & NETO, F. M., *Mecânica dos Fluidos e Equações Diferenciais*. Rio de Janeiro: IMPA, 2000.
- [11] RUDIN, Walter., *Real and Complex Analysis*. New York: McGraw-Hill, 1966.
- [12] SWOKOWSKI, E. W., *Cálculo com Geometria Analítica*. Volume 2. São Paulo: Makron Books, 1994.