



Dissertação de Mestrado

**GRÁFICOS DE CURVATURA MÉDIA
CONSTANTE COM BORDO
PRESCRITO SATISFAZENDO A
CONDIÇÃO DE DECLIVIDADE
LIMITADA**

Adilson Konrad

PPGMat

Santa Maria, RS, Brasil

2011

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA MARIA

Programa de Pós-Graduação em Matemática

**GRÁFICOS DE CURVATURA MÉDIA
CONSTANTE COM BORDO
PRESCRITO SATISFAZENDO A
CONDIÇÃO DE DECLIVIDADE
LIMITADA ‡**

Adilson Konrad

Dissertação realizada sob a orientação do Prof. Dr. Ari João Aiolfi, apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da USFM, em preenchimento parcial dos requisitos para a obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Santa Maria, RS, Brasil

2011

‡Trabalho financiado pela Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES).

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA MARIA
CENTRO DE CIÊNCIAS NATURAIS E EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

A Comissão Examinadora, abaixo assinada,
aprova a Dissertação de Mestrado

**GRÁFICOS DE CURVATURA MÉDIA CONSTANTE
COM BORDO PRESCRITO SATISFAZENDO A
CONDIÇÃO DE DECLIVIDADE LIMITADA**

elaborada por

Adilson Konrad

como requisito parcial para obtenção do grau de
Mestre em Matemática

COMISSÃO EXAMINADORA:

Ari João Aiolfi, Dr.

(Orientador)

Lisandra de Oliveira Sauer, Dr^a. (UFPel)

Pedro Fusieger, Dr. (UFSM)

Cláudia Candida Pansonato, Dr^a. (UFSM)

Santa Maria, 08 de Abril de 2011.

Agradecimentos

Aos professores que contribuíram na minha formação, em especial ao professor Ari João Aiolfi pela dedicação, paciência, entusiasmo, disponibilidade e valiosa orientação.

Aos professores Lisandra de Oliveira Sauer, Pedro Fusieger e Cláudia Candida Pansonato pelo pronto aceite em participar da banca examinadora e pelas contribuições pertinentes sugeridas a este trabalho.

Aos colegas de Pós-Graduação em Matemática pela amizade.

A CAPES pelo incentivo financeiro.

Aos meus pais, Ervino Carlos Konrad e Janete Hammerschmitt Konrad, pelo apoio, incentivo e amor.

A Raquel Carine Jahn pelo amor, companheirismo e carinho.

Enfim, agradeço a todos que contribuíram direta ou indiretamente na realização deste trabalho.

Resumo

Estudamos problemas de existência e unicidade de superfícies de curvatura média constante com bordo prescrito satisfazendo a condição de declividade limitada (CDL). Tais superfícies são dadas como gráficos euclidianos (verticais) em \mathbb{R}^3 e como gráficos parabólicos em \mathbb{H}^3 , definidos sobre domínios limitados contidos em superfícies totalmente geodésicas destes ambientes, ou ainda como gráficos radiais em \mathbb{R}^3 sobre domínios limitados contidos em \mathbb{S}^2 .

Palavras-chave: Gráficos de curvatura média constante; Condição de declividade limitada; Teorema de Serrin.

Abstract

We study problems of existence and uniqueness of constant mean curvature surfaces with prescribed boundary satisfying the bounded slope condition. The surfaces are given as Euclidean graphs in \mathbb{R}^3 and as parabolic graphs in \mathbb{H}^3 , over bounded domains contained in totally geodesic surfaces in these ambients, or moreover, as radial graphs over bounded domains contained in \mathbb{S}^2 .

Keywords: Graphs of constant mean curvature; bounded slope condition; Serin's theorem.

Sumário

Introdução	7
1 Preliminares	11
1.1 Gráficos de Killing	11
1.1.1 O problema de Dirichlet para a equação das superfícies de curvatura média constante em \mathbb{R}^3	15
1.1.2 Gráficos Parabólicos de curvatura média constante em \mathbb{H}^3	24
1.2 Gráficos Radiais de curvatura média constante em \mathbb{R}^3	30
2 Gráficos de CMC em \mathbb{R}^3 com dado no bordo satisfazendo a CDL	34
2.1 A condição de declividade limitada para gráficos em \mathbb{R}^3	35
2.2 Um resultado de existência e unicidade para gráficos de CMC em \mathbb{R}^2	37
2.3 Solução com gradiente limitado	53
3 Gráficos Parabólicos de CMC em \mathbb{H}^3 com dado no bordo satisfazendo a CDL	61
3.1 A condição de declividade limitada para gráficos parabólicos em \mathbb{H}^3	63
3.2 Resultado de existência e unicidade para gráficos parabólicos de CMC em \mathbb{H}^3	64
3.3 Um exemplo não contemplado na extensão do Teorema de Serrin para gráficos parabólicos	76

4	Gráficos Radiais de CMC em \mathbb{R}^3 com dado no bordo satisfazendo a CDL	80
4.1	A condição de declividade limitada para gráficos radiais em \mathbb{R}^3	81
4.2	Um resultado de existência e unicidade para gráficos radiais de CMC não necessariamente contemplado no Teorema de Serrin	83
	Referências Bibliográficas	100

Introdução

O clássico Teorema de Serrin para $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ limitado e $H \geq 0$, pode ser enunciado como segue:

Teorema 0.0.1 *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ um domínio limitado e de classe C^2 . Dado $H \geq 0$, o problema de Dirichlet*

$$\left\{ \begin{array}{l} u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega}) \\ Q_H(u) := \operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} \right) + 2H = 0 \\ u|_{\partial\Omega} = \varphi \end{array} \right. \quad (1)$$

tem solução única para qualquer $\varphi \in C^0(\partial\Omega)$ dada a priori se, e somente se, a curvatura k de $\partial\Omega$ satisfaz $k \geq 2H$.

No caso em que a condição $k \geq 2H$ não é satisfeita, existe dado contínuo no bordo para a qual o problema (1) não tem solução.

Uma questão natural que se coloca então neste contexto, é a de se caracterizar uma família de domínios e dados no bordo onde ainda podemos garantir a existência de solução do problema de Dirichlet (1), mesmo no caso onde a curvatura do cilindro sobre $\partial\Omega$ seja menor do que H .

No contexto da questão posta acima é que introduzimos uma noção clássica da teoria de equações diferenciais parciais elípticas denominada “a condição de declividade limitada”.

Definição 0.0.1 Dizemos que Ω e φ satisfazem a condição de declividade limitada (CDL) com constante $K \geq 0$, se para todo ponto $p = (z, \varphi(z))$, $z \in \partial\Omega$, existem funções lineares afins π_p^+ e π_p^- definidas em $\{x_3 = 0\}$ satisfazendo:

$$(i) \quad \pi_p^+(p) = \varphi(p) = \pi_p^-(p)$$

$$(ii) \quad \pi_p^-(x) \leq \varphi(x) \leq \pi_p^+(x), \forall x \in \partial\Omega$$

$$(iii) \quad |\nabla \pi_p^\pm| \leq K$$

Observamos que se (Ω, φ) satisfaz a condição da declividade limitada e $H \geq 0$, os planos π_p^\pm fornecem uma maneira natural de se obter barreiras relativamente ao problema (1) (ao menos por “um lado” no caso $H > 0$), especialmente nos casos onde Ω e φ sejam de classe $C^{2,\alpha}$. Além disso, conforme pode ser visto em [18], caso (Ω, φ) satisfaz a CDL e Ω não é convexo, então φ é linear afim. Assim, ao lidarmos com o problema (1) e sob a hipótese de que (Ω, φ) satisfaz a CDL, em geral estaremos considerando domínios convexos.

Nosso objetivo principal neste trabalho é então lidar com o problema de Dirichlet (1), ou com sua versão “suave até o bordo” (descrita em (1.4)), sob a hipótese de que (Ω, φ) satisfaz a CDL, e que permitirá encontrarmos soluções do problema (1) que não estão contempladas pelo Teorema de Serrin. Faremos isso não somente no contexto de gráficos euclidianos em \mathbb{R}^3 como descrito acima (que é abordado no Capítulo 2 e baseado no artigo [26]), mas também no contexto de gráficos parabólicos em \mathbb{H}^3 e de gráficos radiais em \mathbb{R}^3 .

O Teorema de Serrin pode ser estendido para outros ambientes. Em \mathbb{H}^3 , para gráficos parabólicos (ver Definição 1.1.8 e Lema 1.1.3), temos a seguinte versão “suave até o bordo” do clássico Teorema de Serrin, que pode ser encontrada em [17].

Teorema 0.0.2 *Seja \mathbb{P} uma superfície totalmente geodésica contida em \mathbb{H}^3 , $\Omega \subset \mathbb{P}$ um domínio limitado e de classe $C^{2,\alpha}$ e seja $\bar{H} \geq 0$. Suponha que $\bar{H} \leq \bar{H}_C$, onde \bar{H}_C é a curvatura média hiperbólica do cilindro parabólico $C(\partial\Omega)$ sobre $\partial\Omega$ e*

orientando $C(\partial\Omega)$ pelo vetor unitário normal apontando para a componente conexa de $\mathbb{H}^3 \setminus C(\partial\Omega)$. Então, para qualquer $\varphi \in C^{2,\alpha}(\partial\Omega)$ dada a priori, existe uma única função $u \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ tal que o gráfico parabólico de u tem curvatura média constante \overline{H} e $u|_{\partial\Omega} = \varphi$.

Porém, quando não temos $\overline{H} \leq \overline{H}_C$, podemos ainda garantir existência de gráficos parabólicos de curvatura média constante sob algumas hipóteses extras sobre o domínio Ω e sobre o dado no bordo φ . É o que fizemos no Capítulo 3, onde introduzimos a condição de declividade limitada para gráficos parabólicos e exploramos os principais resultados de [2].

No Capítulo 4, lidamos com o contexto de gráficos radiais. O Teorema de Serrin para os gráficos radiais, que pode ser encontrado em [23], é o que segue:

Teorema 0.0.3 *Sejam $\Omega \subset \mathbb{S}^2$ um domínio convexo de classe $C^{2,\alpha}$ cujo fecho está contido em um hemisfério aberto de \mathbb{S}^2 , $\phi \in C^{2,\alpha}(\partial\Omega)$ positiva e H uma constante real não positiva. Se a curvatura geodésica k de $\partial\Omega$ é tal que $k(q) \geq -2H\phi(q)$ para todo $q \in \partial\Omega$, então existe uma única função $u \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ tal que o gráfico radial de u tem curvatura média constante H e $u|_{\partial\Omega} = \phi$.*

Como nos casos anteriores, supondo que a condição $k(q) \geq -2H\phi(q)$ não seja satisfeita, nos perguntamos se ainda assim existem dados no bordo ϕ , para uma certa classe de diferenciabilidade, para os quais ainda podemos garantir $u \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ tal que o gráfico radial de u tem curvatura média constante H e $u|_{\partial\Omega} = \phi$.

Caracterizar tal família de domínios e dados no bordo neste contexto é o que fizemos neste capítulo, a partir da definição que chamamos de condição de declividade limitada radial. Mostramos então um resultado de [15], sobre existência e unicidade para os gráficos radiais de curvatura média constante em \mathbb{R}^3 , com a hipótese extra de o bordo prescrito satisfazer a condição de declividade limitada radial, obtendo assim soluções não contempladas no Teorema de Serrin.

No Capítulo 1 explanamos, de modo sucinto, a teoria concernente aos três contextos acima descritos, que serão úteis na demonstração dos principais resultados

tratados nos capítulos posteriores. A base da teoria exposta nesse capítulo pode ser encontrada em [4], [6], [11], [12], [13], [15], [16], [18], [28] e [29].

A condição de declividade limitada em suas várias versões contextualizadas permeia todo o nosso trabalho e é também nosso objetivo reunir os mais recentes resultados em um único texto.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo caracterizaremos alguns gráficos de Killing de curvatura média constante com os quais trabalharemos, como os gráficos euclidianos (verticais) em \mathbb{R}^3 e os gráficos parabólicos em \mathbb{H}^3 . Também caracterizaremos os gráficos radiais em \mathbb{R}^3 .

Apresentaremos ainda tópicos sobre a teoria de operadores diferenciais parciais elípticos de segunda ordem que utilizaremos em capítulos posteriores no estudo de problemas de existência e unicidade de gráficos de curvatura média constante com bordo prescrito em \mathbb{R}^3 e/ou \mathbb{H}^3 , como o método de Perron e o método da continuidade.

1.1 Gráficos de Killing

Nosso objetivo ao definir gráficos de Killing é visualizar os gráficos euclidianos em \mathbb{R}^3 e os parabólicos em \mathbb{H}^3 como casos especiais de gráficos de Killing.

Começamos com o seguinte resultado.

Teorema 1.1.1 ([9], p. 63) *Seja X um campo suave em um aberto W de uma variedade riemanniana M e seja $p \in W$. Então existem um aberto $U \subset W$, $p \in U$, um número $\epsilon > 0$ e uma aplicação suave $\varphi : (-\epsilon, \epsilon) \times U \rightarrow W$, tais que a curva $t \mapsto \varphi(t, q)$, $t \in (-\epsilon, \epsilon)$, é a única trajetória de X que no instante $t = 0$ passa pelo*

ponto q , para cada $q \in U$, isto é, $\varphi(0, q) = q$ e

$$\frac{d}{dt}\varphi(t, q) = X(\varphi(t, q))$$

para todo $t \in (-\epsilon, \epsilon)$.

Pelo Teorema 1.1.1, fixando t com $|t| < \epsilon$, temos que a função

$$\begin{aligned} \varphi_t : U &\longrightarrow \varphi_t(U) \subset M \\ q &\longmapsto \varphi_t(q) = \varphi(t, q) \end{aligned}$$

é um difeomorfismo e é válido, estando bem definido, que $\varphi_{t_1} \circ \varphi_{t_2} = \varphi_{t_1+t_2}$ (ver [21], página 48). Isto implica que o campo X gera um grupo $\mathbb{G}' = \{\varphi_t\}$ denominado subgrupo (local) a um parâmetro de difeomorfismo locais.

Dizemos que o campo X em M é completo se $\epsilon = \infty$ para todo $p \in M$, onde ϵ é como definido acima. Assim, se X é completo, para todo $t \in \mathbb{R}$ está bem definido um difeomorfismo $\varphi_t : M \longrightarrow M$.

Lembramos que, se M e N são variedades Riemannianas, um difeomorfismo $f : M \longrightarrow N$ é chamado uma isometria se:

$$\langle u, v \rangle_p = \langle df_p(u), df_p(v) \rangle_{f(p)}$$

para todo $p \in M$, $u, v \in T_p(M)$. No que segue, salvo menção em contrário, denotaremos M para uma variedade riemanniana e "suave" para a classe de diferenciabilidade C^∞ , além de ∇ para conexão afim.

Observamos que o conjunto das isometrias de uma variedade riemanniana M forma um subgrupo do grupo dos difeomorfismos de M e, em geral, um subgrupo a um parâmetro de isometrias de M é o fluxo de um campo de Killing, cuja definição está contemplada na proposição que segue.

Proposição 1.1.1 ([21], p. 48) *Seja X um campo de vetores suaves de uma variedade riemanniana M . O campo X é um campo de Killing se, e somente se, X gera um subgrupo (local) a um parâmetro de isometrias locais de M .*

Desta forma, dizemos que um campo de vetores suaves X gera um subgrupo a um parâmetro de isometrias se X , em M , gera uma família a um parâmetro constituída de isometrias.

Observamos que todo campo de Killing em uma variedade Riemanniana M completa é completo.

Seja $\mathbb{G} = \{\Phi_r\}_{r \in \mathbb{R}}$ um subgrupo a um parâmetro de isometrias de uma variedade Riemanniana M completa. Observando a explanação anterior, temos que para todo $r \in \mathbb{R}$, $\Phi_r : M \rightarrow M$ é uma isometria e

$$X(p) = \frac{d}{dr} \Phi_r(p)|_{r=0}$$

é um campo de Killing em M . Além disso, as órbitas de \mathbb{G} são dadas por

$$\mathbb{G}(p) = \{\Phi_r(p); r \in \mathbb{R}\}, p \in M.$$

A seguir definiremos hipersuperfície totalmente geodésica, pois trabalharemos com tais hipersuperfícies no desenvolvimento do texto.

Definição 1.1.1 *Uma hipersuperfície totalmente geodésica é uma hipersuperfície tal que qualquer curva na hipersuperfície que é uma geodésica em relação a métrica induzida na hipersuperfície, também é uma geodésica na variedade em que a hipersuperfície está inserida, ou equivalentemente, é uma hipersuperfície tal que qualquer geodésica que é tangente à hipersuperfície em um ponto permanece na hipersuperfície.*

Relembremos que uma folheação de dimensão n de uma variedade diferenciável M , de dimensão m , é uma decomposição de M em subvariedades conexas de dimensão n chamadas folhas, as quais se aglomeram localmente como os subconjuntos de $\mathbb{R}^m = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n}$. Precisamente:

Seja M uma variedade de dimensão m e classe C^∞ . Uma folheação de classe C^r e dimensão n de M , é um atlas máximo \mathcal{F} de classe C^r em M com as seguintes propriedades:

- (a) Se $(U, \varphi) \in \mathcal{F}$ então $\varphi(U) = U_1 \times U_2 \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n}$, onde U_1 e U_2 são discos abertos de \mathbb{R}^n e de \mathbb{R}^{m-n} , respectivamente.
- (b) Se (U, φ) e $(V, \psi) \in \mathcal{F}$ tais que $U \cap V \neq \emptyset$ então a mudança de coordenadas $\psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \longrightarrow \psi(U \cap V)$ tem a forma $\psi \circ \varphi^{-1}(x, y) = (h_1(x, y), h_2(y))$, $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n}$.

Dizemos também que M é folheada por \mathcal{F} , ou ainda que \mathcal{F} é uma estrutura folheada de dimensão n e classe C^r sobre M .

A partir do exposto no lema a seguir estaremos em condição de definir gráficos de Killing.

Lema 1.1.1 ([20]) *Suponha que X seja um campo de Killing sem singularidades e com distribuição normal integrável. Então as folhas da distribuição normal de X são hipersuperfícies totalmente geodésicas de M .*

Por conseguinte, faz sentido definirmos gráficos de Killing como segue:

Definição 1.1.2 *Sejam X um campo de Killing como no Lema 1.1.1, \mathbb{P} uma folha da distribuição normal de X , $\Omega \subset \mathbb{P}$ um domínio e $u \in C^0(\Omega)$. O cilindro sobre Ω é dado por*

$$C(\Omega) = \{\Phi_r(p); r \in \mathbb{R}, p \in \Omega\},$$

e o gráfico de Killing de u em relação a X é dado por

$$G_X(u) = \{\Phi_{u(p)}(p); p \in \Omega\}.$$

Maiores detalhes relativos a gráficos de Killing podem ser obtidos em [12]. Em [24], há uma classificação detalhada sobre os gráficos de Killing, no entanto estamos interessados somente nos gráficos parabólicos em \mathbb{H}^3 e nos gráficos verticais em \mathbb{R}^3 , que são gráficos de Killing como veremos adiante.

1.1.1 O problema de Dirichlet para a equação das superfícies de curvatura média constante em \mathbb{R}^3

Nesta seção trataremos das principais definições e resultados que serão utilizados no Capítulo 2.

Um gráfico vertical (euclidiano) em \mathbb{R}^3 , doravante chamado apenas de “gráfico”, é uma seção de um fluxo de um subgrupo a um parâmetro de isometrias translacionais $\{\phi_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ de \mathbb{R}^3 .

Notamos que, para $\Omega \subset \{x_3 = 0\} \subset \mathbb{R}^3$, o gráfico de $u \in C^0(\Omega)$ é uma seção sobre Ω do fluxo ϕ_t dada por

$$\phi_t(x) = x + (0, 0, t), x \in \Omega,$$

ou seja, a escolha, para cada $x \in \Omega$, de um ponto que está sobre $\{\phi_t(x); t \in \mathbb{R}\}$.

Segue então que o gráfico de u é dado por

$$\begin{aligned} \text{Gra}_E(u) &= \{\phi_{u(x)}(x); x \in \Omega\} \\ &= \{(x_1, x_2, u(x_1, x_2)) \in \mathbb{R}^3; x = (x_1, x_2, 0) \in \Omega\}. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Desta forma, o campo de Killing associado é então

$$\begin{aligned} X : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow T\mathbb{R}^3 \cong \mathbb{R}^3 \\ x &\longmapsto X(x) \end{aligned}$$

onde

$$X = \frac{d}{dt}\phi_t = \frac{d}{dt}(x_1, x_2, x_3 + t) = (0, 0, 1) = e_3.$$

Lembramos que se $S \subset \mathbb{R}^3$ é uma superfície regular, dados $p \in S$ e $\varphi : \Omega \longrightarrow S$ uma parametrização de S na vizinhança de p , $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ um domínio, pondo $q = \varphi^{-1}(p)$ e

$$N(p) = \frac{-\varphi_x(q) \times \varphi_y(q)}{|\varphi_x(q) \times \varphi_y(q)|},$$

o número

$$H(p) = \frac{1}{2} \left(\frac{eG - 2fF + gE}{EG - F^2} \right) \quad (1.2)$$

onde E, F, G e e, f, g , são os coeficientes da 1ª e da 2ª forma fundamental respectivamente, é chamado de Curvatura Média de S em p relativamente a N .

Assim, dado $H \in \mathbb{R}$, dizemos que a superfície S tem curvatura média constante igual a H com relação a N , se e somente se, $H(p) = H$, para todo $p \in S$.

Notamos que dado um domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ e uma função $u \in C^2(\Omega)$, o gráfico de u dado por (1.1) é uma superfície regular contida em \mathbb{R}^3 .

Proposição 1.1.2 *Dado um domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, $H \in \mathbb{R}$ e $u \in C^2(\Omega)$, as seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) *O $\text{Graf}_E(u)$ tem curvatura média constante H com relação a seu vetor normal unitário N tal que $\langle N, e_3 \rangle \leq 0$.*

(ii) $(1 + u_y^2)u_{xx} - 2u_x u_y u_{xy} + (1 + u_x^2)u_{yy} + 2H\sqrt{(1 + |\nabla u|^2)^3} = 0$

(iii) $\text{div} \left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} \right) + 2H = 0$

A Proposição 1.1.2 é um resultado clássico de EDP elípticas. Em relação a prova deste resultado, a idéia é supor $H = \frac{eG - 2fF + gE}{2(EG - F^2)}$ constante e considerar a parametrização $\varphi : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ do gráfico de u dada por $\varphi(x, y) = (x, y, u(x, y))$.

Notemos que o item (ii) da Proposição 1.1.2 é uma equação diferencial parcial elíptica de segunda ordem, e com ela lidaremos boa parte deste texto. Neste sentido, cabe lembrarmos também mais algumas informações básicas a respeito desta teoria.

Dado $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ temos particular interesse nos operadores diferenciais parciais quase-lineares elípticos de segunda ordem. Estes operadores são da forma $Q : C^2(\Omega) \rightarrow C^0(\Omega)$, onde

$$Qu = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x, u, \nabla u) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + b(x, u, \nabla u) \quad (1.3)$$

com $x \in \Omega$ e com a matriz $[a_{ij}]$ relativa aos coeficientes das derivadas de segunda ordem simétrica, cujo autovalores são positivos.

Dentre os operadores desta natureza, nos concentraremos então naquele que denominaremos “operador curvatura média constante” cuja definição é oriunda da Proposição 1.1.2.

Definição 1.1.3 Dado $H \in \mathbb{R}$ o operador $Q_H : C^2(\overline{\Omega}) \longrightarrow C^0(\overline{\Omega})$ definido por

$$Q_H(u) = \operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} \right) + 2H$$

é chamado operador curvatura média constante em \mathbb{R}^3 .

Estaremos interessados em demonstrar resultados de existência e unicidade de gráficos de curvatura média constante em \mathbb{R}^3 com bordo prescrito, donde constantemente lidamos com o Problema de Dirichlet para a equação das superfícies de curvatura média constante em \mathbb{R}^3 , cuja definição é a que segue.

Definição 1.1.4 Seja $H \in \mathbb{R}$. O Problema de Dirichlet para equação das superfícies de curvatura média constante H em um domínio limitado Ω do \mathbb{R}^2 é caracterizado pelo sistema (1), onde $\varphi \in C^0(\partial\Omega)$ é dado a priori e ∇ e div são o gradiente e divergente usuais do \mathbb{R}^2 .

Cabe salientar que em alguns casos nos atemos a uma restrição do problema acima, considerando o seguinte problema de Dirichlet:

$$\begin{cases} u \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega}) \\ Q_H(u) = 0 \\ u|_{\partial\Omega} = \varphi \end{cases}, \quad (1.4)$$

onde $\varphi \in C^{2,\alpha}(\partial\Omega)$ é dado a priori.

Ao trabalharmos no contexto deste último problema, ou seja, com domínios e dados no bordo bem comportados (no mínimo de classe $C^{2,\alpha}$ onde $\alpha \in (0, 1)$ é o coeficiente de Hölder), nosso objetivo é poder usar ferramentas como o “método da continuidade”.

O teorema a seguir descreve tal método no contexto do problema (1.4) e é um resumo de toda uma teoria que pode ser encontrada em [16]. Para o caso $H \geq 0$ a prova pode ser verificada em [6] e, particularmente, para $H = 0$ em [1], com todos os detalhes.

Teorema 1.1.2 *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ um domínio limitado de classe $C^{2,\alpha}$ e $\varphi \in C^{2,\alpha}(\partial\Omega)$, $\alpha \in (0, 1)$. Seja*

$$V = \{t \in [0, 1]; \exists u_t \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega}), Q_{tH}(u_t) = 0, u_t|_{\partial\Omega} = t\varphi\}. \quad (1.5)$$

Suponha que exista M tal que, dado $t \in [0, 1]$, se $u \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ satisfaz $Q_{tH}(u) = 0$ com $u|_{\partial\Omega} = t\varphi$, tem-se

$$\sup_{\partial\Omega} |\nabla u| \leq M.$$

Então $V = [0, 1]$. Em particular, o problema (1.4) tem solução.

Abaixo elencamos algumas definições e resultados que necessitaremos no contexto do Capítulo 2. Observamos que muitos destes resultados estão diretamente relacionados com a prova do Teorema 1.1.2, mas o objetivo de colocá-los aqui não é este, e sim dar suporte a uma série de afirmações feitas dentro de algumas provas de teoremas do referido capítulo.

Definição 1.1.5 *Dizemos que um operador $L : C^2(\overline{\Omega}) \longrightarrow C^0(\overline{\Omega})$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, é um operador diferencial parcial linear elíptico de segunda ordem se L é da forma*

$$L(u) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n b_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x)u \quad (1.6)$$

com a_{ij} , b_i , $c : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ sendo $[a_{ij}]$ uma matriz simétrica positiva definida, ou seja, seus autovalores são positivos.

Notemos que a elipticidade do operador é caracterizada pelo fato de $[a_{ij}]$ ser positiva definida em Ω , onde $[a_{ij}] = [a_{ji}]$ é a matriz relativa aos coeficientes das derivadas de segunda ordem.

Salientamos ainda que em relação aos autovalores da matriz $[a_{ij}]$, conforme (1.6), cabe definirmos a seguinte classificação:

Definição 1.1.6 Dado $x \in \Omega$, sejam $\lambda = \lambda(x)$ e $\Lambda = \Lambda(x)$ os autovalores, mínimo e máximo de $[a_{ij}]$, como na Definição 1.1.5.

(i) Se existe $\delta_0 > 0$ tal que $\delta_0 \leq \inf_{\Omega} \lambda$, então o operador L é dito **estritamente elíptico**.

(ii) Se existem $\delta_0 > 0$ e $\delta_1 \geq \delta_0$ tal que $\delta_0 \leq \inf_{\Omega} \lambda \leq \sup_{\Omega} \Lambda \leq \delta_1$, então o operador L é dito **fortemente elíptico**.

(iii) Se $\frac{\Lambda}{\lambda}$ é limitado em Ω , ou seja, $\exists \delta_1 > 0$ tal que $1 \leq \frac{\Lambda}{\lambda} \leq \delta_1, \forall x \in \Omega$ (ou ainda, $\exists \delta_0 > 0$ tal que $0 < \delta_0 \leq \lambda \leq \Lambda, \forall x \in \Omega$) então o operador L é dito **uniformemente elíptico**.

Teorema 1.1.3 ([16], p. 32) Seja L um operador elíptico como em (1.6), com $c = 0$. Dada uma função $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$, tem-se:

(a) se $L(u) \geq 0$ então

$$\sup_{\Omega} u = \sup_{\partial\Omega} u$$

(b) se $L(u) \leq 0$ então

$$\inf_{\Omega} u = \inf_{\partial\Omega} u$$

Corolário 1.1.1 Seja L um operador elíptico como em (1.6), com $c \leq 0$. Dada uma função $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$, $u^+ = \max\{u, 0\}$ e $u^- = \min\{u, 0\}$ tem-se:

(a) se $L(u) \geq 0$ então

$$\sup_{\Omega} u \leq \sup_{\partial\Omega} u^+$$

(b) se $L(u) \leq 0$ então

$$\inf_{\Omega} u \geq \sup_{\partial\Omega} u^-$$

(c) se $L(u) = 0$ então

$$\sup_{\Omega} |u| = \sup_{\partial\Omega} |u|$$

O próximo resultado, Teorema 1.1.4, é conhecido como o “princípio do máximo de Hopf”.

Teorema 1.1.4 ([16], p. 35) *Seja $L : C^2(\bar{\Omega}) \rightarrow C^0(\bar{\Omega})$ um operador uniformemente elíptico como em (1.6), em um domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, não necessariamente limitado e seja $u \in C^2(\Omega)$ tal que $L(u) \geq 0$. Então:*

(i) se $c = 0$ e existe $x_0 \in \Omega$ tal que $u(x_0) = \sup_{\Omega} u$ então u é constante.

(ii) se $c \leq 0$ e existe $x_0 \in \Omega$ tal que $u(x_0) = \sup_{\Omega} u \geq 0$ então u é constante.

Frequentemente precisamos de estimativas da norma do gradiente de uma solução a partir de estimativas do gradiente da solução no bordo (observando que trabalhamos com domínios com bordo). Assim, ocuparemos o seguinte resultado, denominado “princípio do máximo para o gradiente”.

Teorema 1.1.5 ([16], p. 362) *Seja Ω um domínio limitado do \mathbb{R}^2 e seja $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ uma solução de $Q_H = 0$. Então*

$$\sup_{\Omega} |\nabla u| = \sup_{\partial\Omega} |\nabla u|. \quad (1.7)$$

O seguinte teorema é usualmente utilizado para demonstrar unicidade de soluções no contexto do problema 1.4.

Teorema 1.1.6 *Seja Ω um domínio limitado do \mathbb{R}^2 e sejam $u, v \in C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$ duas soluções de $Q_H = 0$ em Ω e suponha que $u|_{\partial\Omega} \geq v|_{\partial\Omega}$. Então, $u \geq v$ em Ω .*

A proposição seguinte é utilizada na prova do teorema anterior. Notemos que esta proposição terá importância por si só em algumas situações específicas no contexto do Capítulo 2.

Proposição 1.1.3 *Sejam $u_1, u_2 \in C^2(\Omega)$ tais que $Q(u_1) \geq Q(u_2)$, onde Q é um operador quase linear elíptico. Então, $w = u_1 - u_2$ satisfaz $L(w) \geq 0$, para algum L operador linear elíptico, da forma (1.6), com $c = 0$.*

O próximo resultado será utilizado para garantir que a diferença de duas soluções distintas do operador Q_H , que coincidem na fronteira de um domínio ilimitado, não sejam limitadas.

Teorema 1.1.7 ([10], p. 453) *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ um domínio ilimitado. Sejam u e \bar{u} duas funções distintas definidas em Ω , de classe C^2 e considere a curvatura média do gráfico de u e \bar{u} tais que $H_u(x_1, x_2) = H_{\bar{u}}(x_1, x_2)$ em Ω . Sejam $u|_{\partial\Omega}$ e $\bar{u}|_{\partial\Omega}$ contínuas por partes e coincidentes nos seus pontos de continuidade. Seja $M(r) = \sup_{C_r} |\bar{u} - u|$ com*

$$C_r = \Omega \cap \{x \in \mathbb{R}^2; |x| = r\}.$$

Então, $\lim_{r \rightarrow \infty} \left(\frac{M(r)}{\log r} \right) > 0$. Além disso, se o comprimento do arco C_r é uniforme então temos $\lim_{r \rightarrow \infty} \left(\frac{M(r)}{r} \right) > 0$.

Faremos uso também dos seguintes resultados referente a classe de diferenciabilidade:

Teorema 1.1.8 ([16], p. 109) *Seja $u \in C^2$ uma solução da equação linear elíptica $L(u) = f$ em um aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Suponha que f e os coeficientes de L estão em $C^{k,\alpha}(\Omega)$. Então $u \in C^{k+2,\alpha}(\Omega)$. Se f e os coeficientes de L estão em $C^\infty(\Omega)$ então $u \in C^\infty(\Omega)$.*

Teorema 1.1.9 ([16], p. 111) *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ um domínio $C^{k+2,\alpha}$, com $k \geq 0$, e $\varphi \in C^{k+2,\alpha}(\bar{\Omega})$. Suponha que exista uma função $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ satisfazendo $Lu = f$ em Ω , $u = \varphi$ em $\partial\Omega$, onde f e os coeficientes do operador L (estritamente elíptico) estão em $C^{k+2,\alpha}(\bar{\Omega})$. Então $u \in C^{k+2,\alpha}(\bar{\Omega})$.*

Além disso, de [27], necessitaremos dos seguintes resultados :

Proposição 1.1.4 (Corolário 2 de [27]) *Se $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ é um domínio convexo, limitado e de classe $C^{2,\alpha}$, e suponha que a curvatura k de $\partial\Omega$ satisfaz $k \geq H$. Então existe $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ tal que $Q_H(u) = 0$ com $u|_{\partial\Omega} = 0$. Além disso, se $k > H$ então a solução pertence a $C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$.*

Proposição 1.1.5 (Corolário 3 de [27]) *Seja $H > 0$ dado e $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ um domínio convexo contido entre duas linhas paralelas cuja distância é $1/H$. Então, o sistema (1) é solúvel em Ω .*

A inequação abaixo, que usaremos no Capítulo 2 na demonstração do principal resultado do mesmo (Teorema 2.2.1), pode ser encontrada em [25] (estimativa 3.6) e está no seguinte contexto:

Sejam $D \subset \mathbb{R}^2$, k_{min} a curvatura mínima de ∂D , $H > 0$ e $q^2 := |\nabla u|^2$ onde u satisfaz (1) e $q_{max} = \max_D q = \max_{\partial D} q$. Então,

$$q_{max}^2 \leq \frac{H^2}{k_{min}^2 - H^2}. \quad (1.8)$$

O princípio da tangência é um resultado que estabelece critérios geométricos que permite estabelecer quando duas superfícies de curvatura média constante tangentes em um ponto coincidem em uma vizinhança deste ponto, em termos da curvatura média das mesmas. Vale pontuar que este princípio é válido para pontos de tangência no bordo.

Teorema 1.1.10 (Princípio da Tangência) *Sejam S_1 e S_2 superfícies de curvatura média constante em \mathbb{R}^3 , com $H_1 \geq 0$ e $H_2 \geq 0$, respectivamente. Seja $p \in S_1 \cap S_2$ tal que $T_p S_1 = T_p S_2$ e N a normal a S_1 em p . Suponha que a curvatura média de S_1 calculada com relação a N é H_1 e de S_2 é H_2 . Se S_2 está de um mesmo lado de S_1 em uma vizinhança de p , então $H_1 \leq H_2$. Além disso, $H_1 = H_2$ se, e somente se, existem vizinhanças U_1 e U_2 de p em S_1 e S_2 , respectivamente, tais que $U_1 = U_2$.*

Uma técnica que ocuparemos para lidar com o problema (1), ou seja, quando temos $\varphi \in C^0(\partial\Omega)$, para o nosso contexto no Capítulo 2, é denominada Método de Perron. Segue um resumo do mesmo.

Definição 1.1.7 *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ um domínio. Uma função $s \in C^0(\Omega)$ é uma supersolução (subsolução) de Q_H se, dado qualquer subdomínio $D \subset \Omega$, se $v \in C^2(D) \cap C^0(\overline{D})$ satisfaz $Q_H(v) = 0$ em D e $v|_{\partial D} \leq s|_{\partial D}$ ($v|_{\partial D} \geq s|_{\partial D}$) então $v|_D \leq s|_D$ ($v|_D \geq s|_D$).*

Estas funções são vistas como limites (barreiras locais) em relação ao problema de Dirichlet para a equação das superfícies de curvatura média constante (1), e em muitos casos podem ser obtidas em termos de H , da geometria do domínio e do dado no bordo.

O método de Perron pode ser enunciado como segue:

Teorema 1.1.11 *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ um domínio limitado de classe C^0 , $\varphi \in C^0(\partial\Omega)$ e $H \geq 0$. Suponha que φ seja regular (admite barreiras) relativamente a Q_H . Então, u dada por*

$$u(x) = \text{Sup}\{v(x) \text{ tal que } v \in C^0(\overline{\Omega}) \text{ é subsolução de } Q_H \text{ e } v|_{\partial\Omega} \leq \varphi\}$$

satisfaz (1).

Maiores detalhes podem ser vistos em [13].

Vale ressaltar que o operador Q_H satisfaz as três condições seguintes, visto que a primeira e segunda condições são verificadas via Teorema 16.11 e a terceira condição via Corolário 16.1, ambos de [16]:

- (i) Se $w_1, w_2 \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ tais que $Q_H(w_1) = Q_H(w_2) = 0$ então $\sup_{\Omega} |w_1 - w_2| = \sup_{\partial\Omega} |w_1 - w_2|$.
- (ii) Para cada $x \in \Omega$, existe um conjunto aberto B tal que $x \in B \subset \Omega$, onde dada $\xi \in C^0(\partial B)$, existe uma solução $w \in C^2(B) \cap C^0(\overline{B})$ de $Q_H = 0$ em B tal que $w|_{\partial B} = \xi$.

(iii) Se $w_n \in C^2(B)$ é uma sequência de soluções de $Q_H = 0$ em B uniformemente limitada ($\exists P \in \mathbb{R}$ tal que $\sup_{\Omega} |w_n| \leq P, \forall n \in \mathbb{N}$), então existe uma subsequência w_{n_j} de w_n que converge uniformemente em compacto de B para uma solução $w \in C^2(\Omega)$ de $Q_H = 0$.

Estas condições são suficientes para garantir a aplicabilidade do Método de Peron ao problema (1). Note também que de (i), é imediato a unicidade de (1).

1.1.2 Gráficos Parabólicos de curvatura média constante em

\mathbb{H}^3

Nesta seção nos concentraremos no espaço hiperbólico de dimensão três, denotado por \mathbb{H}^3 , apresentando no modelo do semi-espaço superior de \mathbb{H}^3 as superfícies umbílicas. Após, definiremos os gráficos parabólicos de \mathbb{H}^3 , caracterizando o operador curvatura média constante associado, e veremos alguns resultados sobre estes gráficos que serão úteis posteriormente no Capítulo 3.

Para trabalharmos em \mathbb{H}^3 , adotaremos um modelo conhecido como o modelo do semi-espaço superior de Poincaré para \mathbb{H}^3 , definido por:

$$\mathbb{R}_+^3 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3; x_3 > 0\}$$

munido com a métrica

$$ds^2 = \frac{1}{x_3^2}(dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2).$$

Denotaremos o modelo definido anteriormente por \mathbb{U}^3 .

Enunciaremos e descreveremos a seguir algumas informações em relação ao semi-espaço \mathbb{U}^3 , mais precisamente sobre as superfícies umbílicas em \mathbb{U}^3 :

O bordo do semi espaço superior de Poincaré é dado por

$$\partial\mathbb{U}^3 = (\mathbb{R}^2 \times \{0\}) \cup \{\infty\}.$$

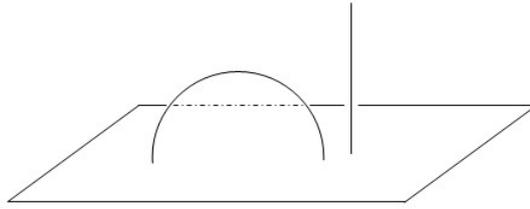


Figura 1.1: Geodésicas de \mathbb{U}^3

As geodésicas em \mathbb{U}^3 (Figura 1.1) são identificadas como as intersecções de \mathbb{R}_+^3 com as retas euclidianas verticais ou os círculos de \mathbb{R}^3 ortogonais a $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$.

As superfícies totalmente geodésicas de \mathbb{U}^3 (Figura 1.2) são identificadas como as intersecções de \mathbb{R}_+^3 com os planos euclidianos verticais de \mathbb{R}^3 ou de esferas euclidianas de \mathbb{R}^3 ortogonais a $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$.

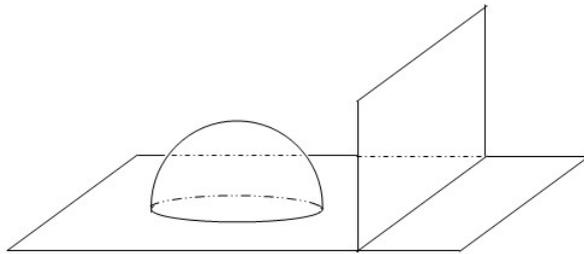


Figura 1.2: Superfícies totalmente geodésicas de \mathbb{U}^3

As superfícies equidistantes de \mathbb{U}^3 (Figura 1.3) são identificadas como a intersecção de \mathbb{R}_+^3 com planos euclidianos de \mathbb{R}^3 não horizontais ou com esferas euclidianas de \mathbb{R}^3 que não estejam inteiramente contidas em \mathbb{R}_+^3 .

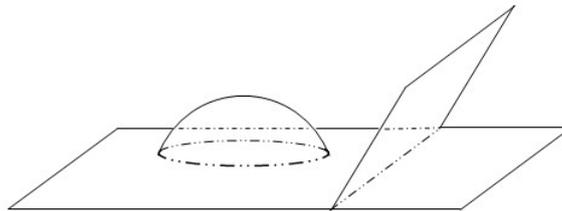


Figura 1.3: Superfícies equidistantes de \mathbb{U}^3

A esfera hiperbólica de \mathbb{U}^3 (Figura 1.4) é o conjunto de pontos que equidistam, na métrica de \mathbb{U}^3 , de um determinado ponto (chamado centro hiperbólico) de \mathbb{U}^3 . Note que são as esferas euclidianas contidas inteiramente em \mathbb{R}_+^3 .

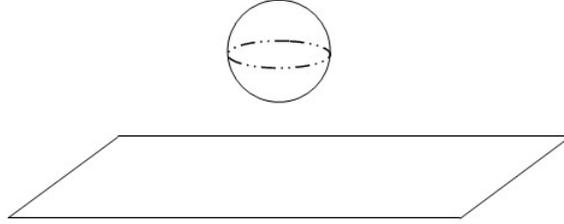


Figura 1.4: Esfera hiperbólica de \mathbb{U}^3

As Horosferas de \mathbb{U}_+^3 (Figura 1.5) podem ser identificadas como as esferas euclidianas de \mathbb{R}_+^3 tangentes a $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$ ou planos horizontais de \mathbb{R}_+^3 , isto é, $R(t) = \{(x_1, x_2, t) \in \mathbb{R}^3; t > 0\}$.

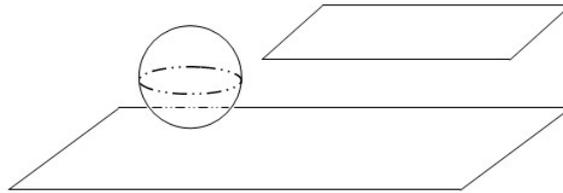


Figura 1.5: Horoesfera de \mathbb{U}^3

Denotemos a curvatura média hiperbólica por \overline{H} , enquanto H continuará denotando a curvatura média euclidiana.

Observamos que as superfícies umbílicas de \mathbb{H}^3 são as horoesferas, as esferas hiperbólicas e as superfícies equidistantes com curvatura média $|\overline{H}| = 1$, $|\overline{H}| > 1$ e $|\overline{H}| \in [0, 1)$, respectivamente.

Notemos também que as superfícies equidistantes de curvatura média nula são exatamente as superfícies totalmente geodésicas.

Tendo em vista que não há distinção entre as superfícies totalmente geodésicas,

a menos de isometrias, trabalharemos, sem perda de generalidade, com a superfície totalmente geodésica $\mathbb{P} = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 ; x_2 = 0 \text{ e } x_3 > 0\}$.

Nosso objetivo no tocante a \mathbb{H}^3 é estudar o caso específico de gráficos parabólicos, tendo como modelo \mathbb{U}^3 e usando basicamente conhecimentos de Geometria Diferencial, tangenciando quando necessário conhecimentos de Geometria Riemanniana.

Neste sentido, é que se dá a escolha de $\mathbb{P} = \{(x_1, x_2, x_3); x_3 > 0 \text{ e } x_2 = 0\}$ bem como da forma do operador Q_H^* , descrito posteriormente em (1.10), que nos é familiar.

Note que $\phi_r : \mathbb{U}^3 \longrightarrow \mathbb{U}^3$ dada por

$$(x, y, z) \longmapsto \phi_r(x, y, z) = (x, y + r, z)$$

são as isometrias a 1-parâmetro de \mathbb{U}^3 , cujo campo de Killing associado é $X = e_2 = (0, 1, 0)$, visto que

$$\frac{d}{dr}\phi_r(x, y, z) = \frac{d}{dr}(x, y + r, z) = (0, 1, 0) = e_2.$$

Estas isometrias são do tipo parabólico (ver [24], seção 1.2.2).

Definição 1.1.8 *Seja $\Omega \subset \mathbb{P}$ um domínio e $u \in C^0(\Omega)$. O gráfico parabólico de u é dado por:*

$$Graf_P(u) = \{(x_1, u(x_1, x_3), x_3); (x_1, 0, x_3) \in \Omega\}. \quad (1.9)$$

Segue daí que os gráficos parabólicos em \mathbb{H}^3 são um caso específico de gráficos de Killing, tendo em vista a definição de gráficos de Killing (Definição 1.1.2).

Proposição 1.1.6 *Dados $\bar{H} \in \mathbb{R}$, um domínio $\Omega \subset \mathbb{P}$ e $u \in C^2(\Omega)$. O gráfico parabólico de u possui curvatura média constante \bar{H} com respeito ao vetor unitário normal η , no sentido euclidiano, tal que $\langle e_2, \eta \rangle \leq 0$ se, e somente se,*

$$Q_{\bar{H}}^*(u) = \operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} \right) - \frac{2}{x_3} \left(\bar{H} + \frac{u_{x_3}}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} \right) \quad (1.10)$$

onde div e ∇ são o divergente e o gradiente em \mathbb{P} , respectivamente, no sentido euclidiano.

A dedução da Proposição 1.1.6 pode ser encontrada em [4].

Neste contexto, temos o Problema de Dirichlet “suave” para a equação das superfícies de curvatura média constante em \mathbb{H}^3 dadas como gráficos parabólicos. Precisamente:

Seja $\Omega \subset \mathbb{P}$ um domínio de classe $C^{2,\alpha}$ e $\bar{H} \geq 0$ dado. O Problema de Dirichlet para equação das superfícies de curvatura média constante \bar{H} em \mathbb{H}^3 é caracterizado pelo sistema

$$\begin{cases} u \in C^{2,\alpha}(\bar{\Omega}) \\ Q_{\bar{H}}^*(u) = 0 \\ u|_{\partial\Omega} = \varphi \end{cases} \quad (1.11)$$

onde $\varphi \in C^{2,\alpha}(\partial\Omega)$ é dado *a priori*.

Em relação aos resultados básicos sobre esta teoria destacaremos alguns na sequência que serão úteis no Capítulo 3.

Seja S uma superfície em \mathbb{H}^3 e seja η o vetor normal unitário à S em \mathbb{H}^3 , no sentido euclidiano. Então a curvatura média de S em \mathbb{H}^3 é dada por

$$\bar{H} = x_3 H + \eta_3$$

onde H é a curvatura média de S no sentido euclidiano e η_3 é a terceira coordenada de η (ver [5]).

Assim, se α é uma curva de Jordan suave em \mathbb{P} ,

$$\bar{k}_\alpha = k_\alpha x_3 + \eta_3^\alpha \quad (1.12)$$

onde \bar{k}_α é a curvatura hiperbólica de α , k_α é a curvatura euclidiana de α e η_3^α é a terceira coordenada do vetor normal unitário a α no sentido euclidiano, apontando para o interior da região limitada por α . Maiores detalhes da relação (1.12) estão disponíveis em [5].

Os seguintes resultados terão implicações importantes na prova do principal resultado de nosso trabalho no tocante a gráficos parabólicos contidos no Capítulo 3.

Teorema 1.1.12 ([4], p. 69) *Seja D um domínio em uma superfície totalmente geodésica de \mathbb{U}^3 tal que $\bar{k}_{\partial D} > a \geq 1$, e seja $h \in C^k$, $h : \bar{D} \rightarrow [-a, a]$, $k \geq 1$. Então existe uma função $g \in C^{k+2,\alpha}$, $0 < \alpha < 1$, $g : \bar{D} \rightarrow \mathbb{R}$, $g|_{\partial D} = 0$, cujo gráfico tem curvatura média h no espaço hiperbólico.*

O primeiro lema que segue, garante estimativas do gradiente das soluções de $Q_{\bar{H}}^*$ no interior do domínio Ω a partir das estimativas do gradiente da mesma no bordo e da norma C^0 . Já o segundo, é conhecido como a estimativa da altura, garante uma limitação da solução do problema de Dirichlet (1.11), em termos do domínio e da curvatura média \bar{H} . Tais lemas encontram-se em [11] para um contexto mais geral (warped product); as versões que seguem são adaptações ao nosso contexto.

Lema 1.1.2 ([11], p. 200) *Seja $\Omega \subset \mathbb{P}$ e seja $u \in C^3(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ uma solução de $Q_{\bar{H}}^* = 0$. Suponha que u é limitada em Ω e que $|\text{grad } u|$ é limitado em $\partial\Omega$. Então, $|\text{grad } u|$ é limitado em Ω por uma constante que depende somente de $|u|_0$ e $\sup_{\partial\Omega} |\text{grad } u|$ (aqui grad é o gradiente em \mathbb{P}).*

Lema 1.1.3 ([11], p. 196) *Seja $\Omega \subset \mathbb{P}$ um domínio $C^{2,\alpha}$, $\varphi \in C^{2,\alpha}(\partial\Omega)$ e $\bar{H} \geq 0$. Suponha que $\bar{H} \leq H'$ onde H' é a curvatura média do cilindro parabólico*

$$C(\partial\Omega) := \{\phi_r(p); p \in \partial\Omega\}$$

orientando $C(\partial\Omega)$ pelo vetor unitário normal apontando para a componente conexa de $\mathbb{H}^3 \setminus C(\partial\Omega)$. Seja $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ satisfazendo $Q_{\bar{H}}^(u) = 0$ e $u|_{\partial\Omega} = \varphi$. Então, existe uma constante $c = c(\Omega, \bar{H})$ tal que*

$$|u|_0 \leq c + |\varphi|_0.$$

Ressaltamos que o método da continuidade dado no Teorema 1.1.2, quando adaptado para este contexto, é também válido tendo em vista que o domínio é limitado e de classe $C^{2,\alpha}$, o dado no bordo também é de classe $C^{2,\alpha}$ e devido as características do operador $Q_{\bar{H}}^*$. Vamos apenas assumir este fato, pois teríamos que fugir muito do eixo que nos orienta se quiséssemos provar esta afirmação.

1.2 Gráficos Radiais de curvatura média constante em \mathbb{R}^3

Nesta seção elencaremos as principais definições e resultados usados no Capítulo 4.

Lembremos inicialmente a noção de gráfico radial, para obtermos na sequência estes em termos de coordenadas locais, por meio da projeção estereográfica.

Uma superfície $M \subset \mathbb{R}^3$ é um gráfico radial sobre um domínio

$$\Omega \subset \mathbb{S}^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

se existe uma função $u : \Omega \rightarrow (0, +\infty)$ tal que

$$M = \{u(p)p \in \mathbb{R}^3; p \in \Omega\}.$$

Vamos parametrizar localmente as superfícies M , ou seja, desejamos obter o gráfico radial em termos de coordenadas locais e, para isto, usaremos a projeção estereográfica.

Tomemos π o plano $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; z = 0\}$ e s a reta determinada pelos pontos $(x, y, 1)$ e $(0, 0, -1)$. Definimos a projeção estereográfica $P : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$ por

$$P(x, y) = p \iff p \in \mathbb{S}^2 \cap (s - \{(0, 0, 1)\}).$$

Temos, ver [14],

$$P(x, y) = \frac{1}{1 + x^2 + y^2}(2x, 2y, 1 - x^2 - y^2).$$

Portanto, dado $\Omega \subset \mathbb{S}^2$, denotando $u(x, y) = u(P(x, y))$, obtemos o gráfico radial em coordenadas locais:

$$M = \text{Graf}_R(u) = \{u(x, y)P(x, y); (x, y) \in P^{-1}(\Omega) = \Lambda\}.$$

Se tomarmos $v = e^u$ no lugar de u , podemos dispensar a condição $u > 0$. Logo

$$\begin{aligned} M = \text{Graf}_R(v) &= \{v(x, y)P(x, y); (x, y) \in P^{-1}(\Omega) = \Lambda\} \\ &= \{e^{u(x, y)}P(x, y); (x, y) \in P^{-1}(\Omega) = \Lambda\} \end{aligned}$$

Observamos que os gráficos radiais em \mathbb{R}^3 não são gráficos de Killing, visto que não são uma seção de um fluxo de um campo de Killing.

Na próxima proposição explicitaremos o operador curvatura média constante relativo à gráficos radiais.

Proposição 1.2.1 ([14], p. 81) *Sejam $\Lambda \subset \mathbb{R}^2$ e $w \in C^2(\Lambda)$, $w > 0$. Então, $M = \text{Graf}_R(w)$ é uma superfície regular do \mathbb{R}^3 . Além disso, se N é o campo normal a M tal que $\langle N(p), p \rangle \leq 0$ para todo $p \in M$ (onde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é o produto interno usual do \mathbb{R}^3) então, dado $H \in \mathbb{R}$, M tem curvatura média H se, e somente se,*

$$Q_H^\bullet(w) = \text{div} \left(\frac{\nabla w}{\sqrt{\beta}} \right) - \frac{2w}{\lambda^2} \left(\frac{2}{\sqrt{\beta}} - H \right) \quad (1.13)$$

onde $\beta = 4w^2 + \lambda^2 |\nabla w|^2$ e $\lambda = 1 + x^2 + y^2$.

Destacamos a mudança funcional que está explicitada no lema a seguir.

Lema 1.2.1 *Sejam $\Omega \subset \mathbb{S}^2$, $w \in C^2(P^{-1}(\Omega))$, com $w > 0$. Defina $T_H(w)$ como*

$$T_H(w) = \text{div} \left(\frac{\nabla w}{\delta^{1/2}} \right) - \frac{4}{\lambda^2 \delta^{1/2}} + \frac{2He^w}{\lambda^2},$$

onde $\delta = 4 + \lambda^2 |\nabla w|^2$. *Se $u > 0$ pertencente à $C^2(P^{-1}(\Omega))$ é tal que $Q_H^\bullet(u) = 0$ então $T_H(\ln(u)) = 0$ em $P^{-1}(\Omega)$. Além disso, se $v = \ln(u)$ e $T_H(v) = 0$ temos $Q_H(e^v) = 0$ em $P^{-1}(\Omega)$.*

A prova deste lema pode ser encontrada em [14].

Embora não trabalharemos diretamente com tal mudança neste texto, destacamos a importância de tal mudança funcional, que aparece quando analisamos a derivada de Frechét do operador Q_H^\bullet . Tendo em vista as dificuldades que aparecem, torna-se muito mais simples analisar a derivada do operador T_H do que de Q_H^\bullet . Então tratamos de analisar a derivada para T_H e utilizamos a correspondência existente entre as soluções de $T_H = 0$ e $Q_H^\bullet = 0$ para obtermos as informações desejadas para Q_H^\bullet .

Do caso euclidiano sabemos que, se G é um gráfico sobre um domínio $W \subset \mathbb{R}^2$ dado por $f : W \rightarrow \mathbb{R}$ então $|\nabla f(p)| = |\tan \alpha|$, onde α é o ângulo formado pelo vetor $(0, 0, 1)$, normal à W , e a normal à G em p .

Para o caso radial, o significado geométrico do módulo do gradiente é o que segue:

Lema 1.2.2 ([14], p. 21) *Sejam $\Omega \subset \mathbb{S}^2$, $\Lambda \subset \mathbb{R}^2$, $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 ,*

$$M = \{e^{f(p)}p; p \in \Omega\},$$

$N(p)$ normal a M em p , $P : \Lambda \rightarrow \Omega$ a projeção estereográfica. Então,

$$|\nabla(f \circ P)(u, v)| = \frac{1}{2\lambda} \tan \alpha(p) \leq \tan \alpha(p)$$

onde $\lambda = 1 + x^2 + y^2$, $p = P(u, v)$, $\alpha(p)$ é o ângulo entre p e $N(p)$ e ∇ denota o gradiente de $f \circ P$ na métrica usual do \mathbb{R}^2 .

Em relação a orientação do vetor normal N de um gráfico radial M de curvatura média constante $H \leq 0$, como já assumido na Proposição 1.2.1, trabalharemos com a orientação $\langle N(p), p \rangle \leq 0$, para todo $p \in M$, isto é, o vetor normal aponta "para fora" da superfície.

Outras definições recorrentes durante o desenvolvimento do Capítulo 4 são as seguintes.

Definição 1.2.1 *Seja $\Omega \subset \mathbb{S}^2$ um domínio. Dada $\phi \in C^{2,\alpha}(\partial\Omega)$, dizemos que ϕ admite barreiras locais em relação ao operador Q_H^\bullet em $p \in \partial\Omega$, se existem uma vizinhança Ω_p de p em \mathbb{S}^2 e funções $s_p^\pm \in C^0(\overline{\Omega_p \cap \Omega})$, diferenciáveis em p , que satisfazem*

$$s_p^-(p) = \phi(p) = s_p^+(p)$$

e

$$s_p^- \leq w|_{\overline{\Omega_p \cap \Omega}} \leq s_p^+$$

onde $w \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ é uma solução de $Q_H^\bullet = 0$ com $w|_{\partial\Omega} = \phi$.

Definição 1.2.2 Dizemos que ϕ é H – regular, se ϕ admite barreira (local) s_p^\pm relativa a Q_H^\bullet em cada ponto $p \in \partial\Omega$. Além disso, requeremos a existência de $C \geq 0$ tal que $|\nabla s_p^\pm(p)| \leq C$, para todo $p \in \partial\Omega$.

Notemos que o caso 0 – regular é chamado, neste contexto, apenas de regular.

Na sequência citamos alguns resultados sobre o contexto radial, que utilizaremos no desenvolvimento do Capítulo 4. O primeiro resultado é denominado Teorema de Serrin para as mínimas, e a prova pode ser verificada em [14], Teorema 17.

Teorema 1.2.1 ([29], p. 485) *Sejam $\Omega \subset \mathbb{S}^2$ um domínio convexo de classe $C^{2,\alpha}$ cujo fecho está contido em um hemisfério aberto de \mathbb{S}^2 e seja $\phi \in C^{2,\alpha}(\partial\Omega)$. Então, existe um único gráfico radial mínimo sobre Ω tendo como bordo o gráfico radial de ϕ .*

Teorema 1.2.2 ([15], p. 386) *Sejam $\Omega \subset \mathbb{S}^2$ um domínio de classe $C^{2,\alpha}$ e H uma constante real não positiva. Dada $\psi \in C^{2,\alpha}(\partial\Omega)$, suponha que ψ é H -regular. Se existe $v \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ cujo gráfico radial tem $CMC H = 0$, com $v|_{\partial\Omega} = \psi$, então existe um gráfico radial $u \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ de $CMC H$ tal que $u|_{\partial\Omega} = \psi$.*

Observamos que para a prova do Teorema 1.2.2 é necessária a mudança funcional do Lema 1.2.1, onde consta que os operadores Q_H^\bullet e T_H são equivalentes. Também notamos que T_H é estritamente elíptico e localmente inversível, e que as soluções de $T_H = 0$ satisfazem o Teorema 1.1.5. Estes fatos permitem a aplicação do Teorema 1.1.2 ao operador T_H , para provar o Teorema 1.2.2.

Particularmente, quando $\phi \equiv 1$, Rafael López em [23] provou o seguinte resultado sobre a existência de gráfico radial de curvatura média constante.

Teorema 1.2.3 *Sejam $\Omega \subset \mathbb{S}^2$ um domínio estritamente convexo de classe $C^{2,\alpha}$ contido em um hemisfério de \mathbb{S}^2 , k a curvatura geodésica de $\partial\Omega$ e $H \leq 0$. Se $k > -H$ então existe um gráfico radial de curvatura média constante H dado por $u \in C^{2,\alpha}(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ tal que $u|_{\partial\Omega} = 1$.*

Capítulo 2

Gráficos de CMC em \mathbb{R}^3 com dado no bordo satisfazendo a CDL

Neste capítulo trataremos da existência e unicidade de gráficos de curvatura média constante em \mathbb{R}^3 com bordo prescrito satisfazendo a CDL, dentre os quais gráficos de soluções do problema de Dirichlet (1) não contempladas no Teorema 0.0.1 (Teorema de Serrin). Além disso, exploramos um resultado que nos dá uma estimativa do gradiente de uma solução do problema (1) sob condições especiais envolvendo a geometria e a classe de diferenciabilidade do domínio.

Em 1970, James Serrin provou em [28] o seguinte resultado, já mencionado na introdução (Teorema 0.0.1).

“Seja $H \geq 0$ e seja $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ um domínio limitado de classe C^2 cujo bordo tem curvatura k satisfazendo

$$k \geq 2H. \tag{2.1}$$

Então, o problema de Dirichlet (1) tem solução única para qualquer $\varphi \in C^0(\partial\Omega)$.”

Notemos que div , ∇ e $|\cdot|$ são o divergente, o gradiente e a norma euclidiana, respectivamente, e do fato de $H \geq 0$ e $k \geq 2H$ temos então que o domínio Ω é

convexo.

Observamos que se (2.1) não ocorre, existem dados contínuos no bordo φ , para os quais o problema (1) não tem solução.

Uma questão natural que se coloca é: Se (2.1) não ocorre, é possível caracterizar uma família de domínios e dados no bordo neste contexto onde ainda podemos garantir a existência de soluções de (1)? Respondemos esta pergunta neste capítulo, através do Teorema 2.2.1.

2.1 A condição de declividade limitada para gráficos em \mathbb{R}^3

A noção da condição de declividade limitada vai de encontro à nossa indagação anterior, ou seja, é uma noção que nos auxilia a encontrar soluções descritas pelo problema (1) que não são possíveis de se obter via Teorema de Serrin (Teorema 0.0.1).

Hartman e Nirenberg utilizaram em vários trabalhos na década de 1960 a definição que ficou conhecida como a “condição da declividade limitada” (Definição 0.0.1). Em [18], podemos obter maiores detalhes em relação as caracterizações e propriedades de uma função que satisfaz a condição de declividade limitada.

No contexto de gráficos em \mathbb{R}^3 a definição é a que foi dada na introdução que relembramos aqui.

Dizemos que Ω e φ satisfazem a condição de declividade limitada (CDL) com constante K , se para todo ponto $p = (z, \varphi(z))$, $z \in \partial\Omega$, existem funções afins lineares π_p^+ e π_p^- definidas em $x_3 = 0$, satisfazendo:

$$(i) \quad \pi_p^+(p) = \varphi(p) = \pi_p^-(p)$$

$$(ii) \quad \pi_p^-(x) \leq \varphi(x) \leq \pi_p^+(x), \forall x \in \partial\Omega$$

$$(iii) \quad |\nabla \pi_p^\pm| \leq K.$$

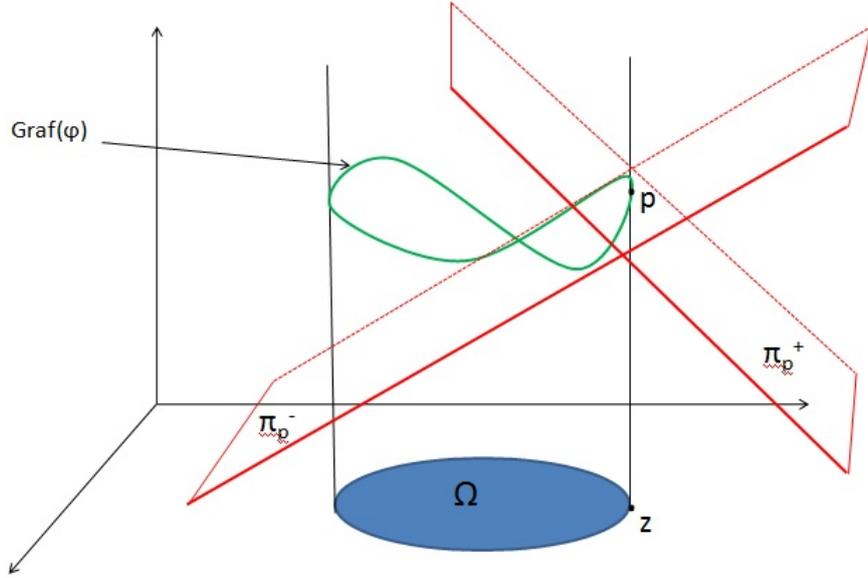


Figura 2.1: CDL - condição de declividade limitada

Neste nosso caso, onde $n = 2$, a condição de declividade limitada é equivalente a condição dos três pontos, que frequentemente aparece na literatura sobre as superfícies mínimas, no cálculo das variações não paramétricas e na teoria das equações diferenciais parciais elípticas.

Definição 2.1.1 *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ um conjunto convexo, aberto e limitado e φ uma função definida em $\partial\Omega$. Dizemos que φ satisfaz a condição dos três pontos (CTP) com constante K , se para cada conjunto de três pontos $p_j = (x_1^j, x_2^j, 0)$, $j = 1, 2, 3$, de $\partial\Omega$, existe um plano*

$$z = \langle a, x \rangle + c = \sum_{i=1}^2 a_i x_i + c$$

onde $a = (a_1, a_2)$, $x = (x_1, x_2)$ que passa pelos pontos $P_j = (x_1^j, x_2^j, \varphi(x_1^j, x_2^j))$, com $j = 1, 2, 3$ e satisfazendo

$$|a| = \sqrt{\sum_{i=1}^2 |a_i|^2} \leq K$$

Suponhamos agora $\partial\Omega$ conexo e que a curva $\Gamma = Graf(\varphi)$ satisfaz a CTP (equivalente a dizer que (Ω, φ) satisfaz a CDL). Tome três pontos distintos de Γ ,

$P_i = (p_i, \varphi(p_i))$, $i = 1, 2, 3$. Notemos que se p_1, p_2, p_3 são colineares, então P_1, P_2, P_3 também são colineares em Γ , caso contrário esses pontos determinam um plano vertical, contradizendo (ii) e (iii) da CDL. Assim, se (Ω, φ) satisfazem a CDL, φ é linear em segmentos de reta contidos $\partial\Omega$. Se Ω é limitado e convexo então a curva Γ satisfaz a condição dos três pontos com constante K , para quaisquer três pontos distintos não colineares de Γ contidos num plano com declividade menor ou igual a K .

Além disso, se Ω é estritamente convexo e $\varphi \in C^{2,\alpha}(\partial\Omega)$ então (Ω, φ) satisfazem a condição de declividade limitada para alguma constante $K \geq 0$ (ver [18], página 505).

2.2 Um resultado de existência e unicidade para gráficos de CMC em \mathbb{R}^2

Tendo por base a definição da condição de declividade limitada, temos o seguinte resultado:

Teorema 2.2.1 *Seja Ω um domínio limitado e convexo $C^{2,\alpha}$ no plano e $\varphi \in C^0(\partial\Omega)$ tal que Ω e φ satisfazem a condição de declividade limitada com constante K . Suponha que*

$$k \geq H(1 + K^2)^2 \quad (2.2)$$

onde k é a curvatura de $\partial\Omega$. Então, dado $t \in [0, 1]$, existe uma solução $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ com $Q_H(u) = 0$ em Ω tal que $u|_{\partial\Omega} = t\varphi$. Além disso, se $\varphi \in C^{2,\alpha}(\partial\Omega)$ então

$$\sup_{\Omega} |\nabla u| \leq \frac{tK \sqrt{k^2 - (1 + t^2 K^2)^3 H^2} + H \sqrt{(1 + t^2 K^2)^3}}{\sqrt{k^2 - (1 + t^2 K^2)^3 H^2} - tKH \sqrt{(1 + t^2 K^2)^3}}. \quad (2.3)$$

Em particular, se $k > H(1 + t^2 K^2)^2$,

$$\sup_{\Omega} |\nabla u| < \infty. \quad (2.4)$$

Observemos que o Teorema 2.2.1 nos fornece situações não contempladas pelo Teorema de Serrin (Teorema 0.0.1).

Notemos ainda que, se para algum ponto $z \in \partial\Omega$ temos $(1 + K^2)^2 < 2$ e $k < 2H$, pelo Teorema de Serrin (Teorema 0.0.1), ainda existe um dado contínuo no bordo (tendo inclinação maior que K), o qual não é restrição a $\partial\Omega$ de qualquer solução de (1).

No que segue, veremos alguns lemas que serão úteis na demonstração do Teorema 2.2.1. O primeiro lema, denominado lema básico, reduz o problema de provar a existência de soluções de (1) em domínios convexos com dado no bordo arbitrário, para a prova da existência de soluções de (1) em domínios convexos, com dado no bordo zero.

Lema 2.2.1 (Lema Básico) *Seja Ω um domínio convexo do plano. Seja $\varphi \in C^0(\partial\Omega)$ tal que Ω e φ satisfazem a condição de declividade limitada com constante $K \geq 0$. Seja $H \geq 0$ dado. Considere $C(\Omega) := \Omega \times \mathbb{R}$ o cilindro sobre Ω . Suponha que existe $L \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ com*

$$0 \leq L \leq \frac{1}{K} \quad (2.5)$$

tal que dado $p = (z, \varphi(z))$, $z \in \partial\Omega$, pondo $\Lambda_p = C(\Omega) \cap \pi_p^+$, existe solução $v_p \in C^2(\Lambda_p) \cap C^0(\bar{\Lambda}_p)$ de $Q_H = 0$ em Λ_p com $v_p|_{\partial\Lambda_p} = 0$ satisfazendo

$$\sup_{\Lambda_p} |\nabla v_p| \leq L. \quad (2.6)$$

Então, existe uma solução de (1). Além disso, existe no máximo uma solução de (1) limitada. Se Ω é um domínio limitado de classe $C^{2,\alpha}$ e $\varphi \in C^{2,\alpha}(\partial\Omega)$, então o gradiente da solução u de (1) é estimado por

$$\sup_{\Omega} |\nabla u| \leq \frac{K + L}{1 - KL}. \quad (2.7)$$

O lema básico nos garante a existência e unicidade de solução de (1) em um domínio convexo Ω desde que (Ω, φ) satisfazem a CDL e exista uma solução v_p em Λ_p , com gradiente limitado em Λ_p . Notemos que a constante L garante que a solução

v_p seja gráfico sobre Ω . Além disso, temos garantido uma estimativa do gradiente da solução u no domínio Ω , desde que Ω e o dado no bordo sejam de classe $C^{2,\alpha}$.

Faremos agora a demonstração do Lema 2.2.1.

Demonstração Lema 2.2.1:

Vamos inicialmente construir uma supersolução relativa ao problema (1), com o propósito de aplicar o Método de Perron (Teorema 1.1.11).

Afirmamos que dado $p = (z, \varphi(z))$, $z \in \partial\Omega$, existe uma solução $u_p \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ de $Q_H = 0$ em Ω tal que $u_p(z) = \varphi(z)$, $u_p|_{\partial\Omega} \geq \varphi$.

Com efeito, se $H = 0$ basta tomar $u_p = \pi_p^+|_{\bar{\Omega}}$.

Suponhamos então $H > 0$ e mostraremos que dado $p = (z, \varphi(z))$, $z \in \partial\Omega$, o gráfico de v_p em Λ_p é também gráfico da função $u_p \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ satisfazendo $Q_H(u_p) = 0$ em Ω , $u_p(z) = \varphi(z)$ e $u_p|_{\partial\Omega} \geq \varphi$.

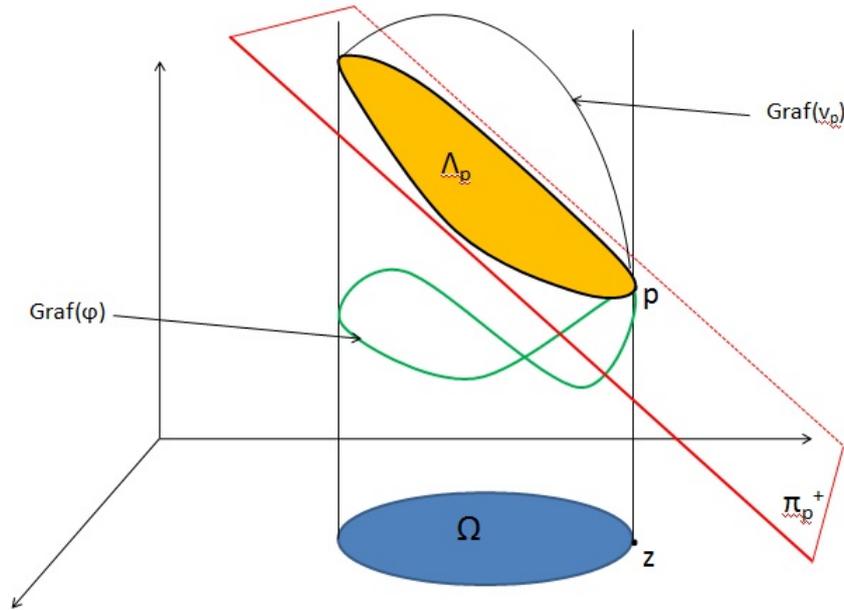


Figura 2.2: Ilustração da situação descrita

Do Teorema 1.1.8, $v_p \in C^3(\Lambda_p) \cap C^1(\bar{\Lambda}_p)$ de modo que $|\nabla v_p|^2 \in C^2(\Lambda_p) \cap C^0(\bar{\Lambda}_p)$. Logo, da demonstração do Teorema 1.1.5 (detalhes em [6], Teorema 3.5) temos que $|\nabla v_p|^2$ satisfaz um operador linear uniformemente elíptico de segunda ordem da

forma (1.6) com $c \leq 0$.

Desta forma, pela parte (c) do Corolário 1.1.1 obtemos

$$\sup_{\Omega} |\nabla v_p|^2 = \sup_{\partial\Omega} |\nabla v_p|^2. \quad (2.8)$$

Logo, pelo Teorema 1.1.4 temos que $|\nabla v_p|^2$ não atinge o máximo no interior de Λ_p , a não ser que $|\nabla v_p|^2 = c$, onde $c = \text{constante}$, já que $v_p|_{\partial\Lambda_p} = 0$.

Suponha que $|\nabla v_p|^2 = c$, ou seja, $|\nabla v_p| = c$. Então, v_p é linear e portanto $H = 0$. O que é um absurdo, pois contradiz a hipótese $H > 0$.

Notemos que esta conclusão é óbvia se Ω é limitado, pois por hipótese $v_p|_{\partial\Lambda_p} = 0$, ou seja, o bordo do gráfico de v_p está sobre o plano π_p^+ .

Agora, suponhamos que Ω é ilimitado, $|\nabla v_p| = c$ e $v_p \in C^2(\Lambda_p) \cap C^0(\overline{\Lambda_p})$ é tal que $Q_H(v_p) = 0$ com $v_p|_{\Lambda_p} = 0$. Então obtemos $\Delta(v_p + HCx_i^2) = 0$, $i = 1$ ou 2 , onde $C = (1 + |\nabla v_p|^2)^{-1/2}$, $(x_1, x_2) \in \Lambda_p$.

Para ver isto, definimos

$$\begin{aligned} w_p &: \Lambda_p \longrightarrow \mathbb{R} \\ w_p(x) &= v_p(x) + HCx_i^2, \end{aligned}$$

com $i = 1$ ou 2 .

Então,

$$\Delta w_p(x) = \frac{\partial^2 v_p}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v_p}{\partial x_2^2} + 2HC = \Delta v_p + 2HC. \quad (2.9)$$

Como $\text{Gra}f_E(v_p)$ tem curvatura média constante H , então

$$Q_H(v_p) := \text{div} \left(\frac{\nabla v_p}{\sqrt{1 + |\nabla v_p|^2}} \right) + 2H = 0.$$

Assim,

$$2H = -\text{div}(C^{-1}\nabla v_p) = -C^{-1}\text{div}(\nabla v_p) = -C^{-1}\Delta v_p.$$

Daí, $2HC = -\Delta v_p$. Logo, por (2.9)

$$\Delta w_p(x) = \Delta v_p - \Delta v_p = 0.$$

Portanto, $\Delta(v_p + HCx_i^2) = 0$, $i = 1, 2$, ou seja, $w_p(x) = v_p(x) + HCx_i^2$ é harmônica. Como $|\nabla v_p| = c$, $c = \text{constante}$, para $i \neq j$ temos

$$D_{x_j}(v_p + HCx_i^2) = \frac{\partial v_p}{\partial x_j} + \frac{\partial HCx_i^2}{\partial x_j} = \frac{\partial v_p}{\partial x_j} + 0 = D_{x_j}v_p.$$

Tendo em vista que $w_p = v_p + HCx_i^2$ é harmônica, pelo Teorema 2.2 de [16] ([16], p. 15), se existe $y \in \Lambda_p$ tal que $u(y) = \sup_{\Lambda_p} w_p$ então w_p é constante, ou seja, $v_p + HCx_i^2 = c_0$.

Como $|D_{x_j}v_p|$ é limitado já que $0 \leq |D_{x_j}v_p| \leq |\nabla v_p| = c$, segue que $D_{x_j}v_p$ é constante, $j = 1, 2$, ou seja, teríamos $Graf_E(v_p)$ um plano.

Portanto, quando $H > 0$, $|\nabla v_p|$ não é constante. Consequentemente $|\nabla v_p(q)| < L$, para todo $q \in \Lambda_p$, e de (2.8) resulta que

$$\sup_{\Lambda_p} |\nabla v_p| \leq L.$$

Neste caso, a condição (2.5) implica então que o gráfico de v_p é também gráfico da função $u_p \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ de $Q_H(u_p) = 0$ em Ω tal que $u_p(z) = \varphi(z)$, $u_p|_{\partial\Omega} \geq \varphi$.

De fato, denotando por Γ o plano normal a $Graf_E(\pi_p^+)$ e tangente a $Graf_E(\varphi)$ em p , seja θ , γ e α os ângulos entre $Graf_E(\pi_p^+)$ e $\{z = 0\}$, Γ e $\{z = 0\}$, Γ e $Graf_E(\pi_p^+)$, respectivamente, então:

$$\gamma \leq \theta + \alpha.$$

Como $\frac{\pi}{2} - \theta < \gamma \leq \frac{\pi}{2}$ e $\frac{\pi}{2} - \alpha < \gamma \leq \frac{\pi}{2}$ obtemos

$$\tan \gamma \leq \tan(\theta + \alpha). \quad (2.10)$$

Tendo em vista que $\tan \theta \leq K$ e $\tan \alpha \leq L$, segue que

$$\tan \gamma = \frac{\tan \alpha + \tan \theta}{1 - \tan \alpha \tan \theta} \leq \frac{L + K}{1 - LK} \leq +\infty.$$

Logo, utilizando (2.6) e 2.5), temos que

$$\tan \gamma = \frac{1}{K} \geq L \geq |\nabla v_p| \quad (2.11)$$

provando, assim, nossa afirmação inicial, já que $|\nabla v_p| < L$ em Λ_p .

Lembramos que $\varphi \in C^0(\partial\Omega)$. Seja $\{z_n\} \subset \partial\Omega$ uma seqüência densa em $\partial\Omega$. Fixe $p_n = (z_n, \varphi(z_n))$ e defina supersoluções w_n de (1) em Ω , colocando $w_1 = u_{p_1}$ e, assumindo que w_n está bem definido para $n \geq 1$, ponha $w_{n+1} = \min\{u_{p_{n+1}}, w_n\}$ (note que a próxima supersolução limita inferiormente as anteriores).

Desde que $u_q|_{\partial\Omega} \geq \varphi$ e $u_q(z) = \varphi(z)$, $\forall q = (z, \varphi(z))$, $z \in \partial\Omega$, temos que

$$\begin{cases} w_n(z_j) = \varphi(z_j), \forall j \in \{1, \dots, n\} \\ w_n|_{\partial\Omega} \geq \varphi. \end{cases} \quad (2.12)$$

Portanto, $\forall n$

$$\inf_{\Omega} w_n \geq \inf_{\partial\Omega} (w_n^- := \min\{w_n, 0\}) \geq \inf_{\partial\Omega} \varphi.$$

Visto que $\{w_n\} \subset C^0(\bar{\Omega})$ é uma seqüência monótona não crescente de supersoluções limitadas por baixo, $\{w_n\}$ converge uniformemente em compactos de $\bar{\Omega}$ para $w \in C^0(\bar{\Omega})$, pois sabemos que toda seqüência monótona limitada é convergente. Por construção, w também é uma supersolução de (1). Logo, por continuidade, desde que $w(z_n) = \varphi(z_n)$, $\forall n$, temos $w|_{\partial\Omega} = \varphi$. Portanto, construímos uma supersolução w de $Q_H = 0$ em Ω com $w = \varphi$ em $\partial\Omega$.

Dado $n \in \mathbb{N}$. Seja D_n o disco centrado na origem com raio n , ou seja $D_n := B(0, n)$, e suponha que $\Omega_n := D_n \cap \Omega \neq \emptyset$, $\forall n \geq n_0$.

Pelo Teorema 1.1.11, a função u_n definida em Ω_n por

$$u_n(z) := \sup\{s(z) | s \text{ é subsolução de (1) em } \Omega_n \text{ e } s|_{\partial\Omega_n} \leq w|_{\partial\Omega_n}\}$$

é solução de (1), para $n \geq n_0$.

Como toda seqüência num conjunto compacto possui subsequência convergente para um ponto do compacto e pelo Teorema de Arzelá-Ascoli (ver [22], p. 244), segue que existe uma subsequência de $\{u_n\}$ convergindo uniformemente em compactos de Ω para uma solução $u \in C^2(\Omega)$ com $Q_H = 0$ em Ω .

Afirmamos que u se estende continuamente à $\partial\Omega$ e $u|_{\partial\Omega} = \varphi$. Com efeito, dado $x_n \in \Omega$, $x_n \rightarrow z \in \partial\Omega$, como π_q^- é uma subsolução de (1), $q = (z, \varphi(z))$, $z \in \partial\Omega$, temos em Ω , $\pi_q^- \leq u \leq w$ e

$$\varphi(z) = \pi_q^-(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \pi_q^-(x_n) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} u(x_n) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} w(x_n) = w(z) = \varphi(z),$$

isto é, $\varphi(z) = u(z) = w(z)$, $\forall z \in \partial\Omega$, daí $u|_{\partial\Omega} = \varphi$. Como $x_n \rightarrow z$ e $u(x_n) \rightarrow u(z)$ resulta que $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$.

Portanto, existe solução $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ de $Q_H = 0$ tal que $u|_{\partial\Omega} = \varphi$.

Mostraremos que existe no máximo uma solução limitada de (1). Se Ω é limitado, tome u, v soluções de $Q_H = 0$, tal que $u|_{\partial\Omega} = v|_{\partial\Omega}$, e ponha $w = u - v$. Então, pela Proposição 1.1.3, $L(w) = 0$, onde L é um operador elíptico como em (1.6) com $c = 0$, e o resultado segue agora do Teorema 1.1.4, já que $\sup_{\Omega} w = \sup_{\partial\Omega} w$.

Se Ω é ilimitado e se u, v são duas soluções de (1) limitadas e coincidentes em $\partial\Omega$ então $|u - v|$ é limitada em Ω , o que é um absurdo, pois contradiz o Teorema 1.1.7, salvo se $u = v$.

Portanto, existe no máximo uma solução limitada de (1).

Suponhamos que Ω é um domínio limitado $C^{2,\alpha}$ e que $\varphi \in C^{2,\alpha}(\partial\Omega)$. Mostraremos que o gradiente de u é estimado por (2.7).

Se

$$\frac{K + L}{1 - KL} = +\infty,$$

incluindo a possibilidade $K = 0$ e $L = +\infty$, então a desigualdade (2.7) é satisfeita, pois é a primeira parte do Lema.

Assim, suponha que $KL < 1$ com $L < +\infty$. Sob esta suposição, provaremos que existe solução de (1) e obteremos uma estimativa de (2.7). Note que se Ω é um domínio de classe $C^{2,\alpha}$ então, para $p = (z, \varphi(z))$, $z \in \partial\Omega$, Λ_p é um domínio de classe $C^{2,\alpha}$.

Como $v_p \in C^2(\Lambda_p) \cap C^0(\bar{\Lambda}_p)$ é uma solução de $Q_H = 0$ em Λ_p com $v_p|_{\partial\Lambda_p} = 0$ satisfazendo

$$\sup_{\Lambda_p} |\nabla v_p| \leq L < +\infty,$$

então $v_p \in C^{2,\alpha}(\bar{\Lambda}_p)$. Para provar isto, consideremos um operador linear elíptico

$$L(w) = (1 + (D_1 v_p)^2) D_{22} w - 2D_1 v_p D_2 v_p D_{12} w + (1 + (D_2 v_p)^2) D_{11} w,$$

$w \in C^2(\bar{\Lambda}_p)$, e observamos que $Q_H(v_p) = 0$ se, e somente se, $L(v_p) = f$ onde

$$f = -2H\sqrt{(1 + |\nabla v_p|^2)^3},$$

já que,

$$\begin{aligned} Q_H(v_p) = 0 &\iff \operatorname{div} \left(\frac{\nabla v_p}{\sqrt{1 + |\nabla v_p|^2}} \right) + 2H = 0 \iff \\ \frac{(1 + (D_1 v_p)^2) D_{22} v_p}{\sqrt{(1 + |\nabla v_p|^2)^3}} - \frac{2D_1 v_p D_2 v_p D_{12} v_p}{\sqrt{(1 + |\nabla v_p|^2)^3}} + \frac{(1 + (D_2 v_p)^2) D_{11} v_p}{\sqrt{(1 + |\nabla v_p|^2)^3}} + 2H &= 0 \iff \\ L(v_p) = -2H\sqrt{(1 + |\nabla v_p|^2)^3} &= f. \end{aligned}$$

Logo, pelo Teorema 1.1.9, temos que $v_p \in C^{2,\alpha}(\overline{\Lambda}_p)$.

Além disso, se $L < \frac{1}{K}$ então a função u_p definida em Ω cujo gráfico é o gráfico de v_p , é $C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ e

$$|\nabla u_p(q)| \leq \frac{K + L}{1 - KL}, \quad \forall q \in \overline{\Omega}.$$

De fato, dado $t \in [0, 1]$, então Ω e $t\varphi$ satisfazem a condição de declividade limitada com constante tK . Por isso, em qualquer ponto $p_t = (z, t\varphi(z))$ do gráfico de $t\varphi$, $z \in \partial\Omega$, podemos tomar planos $\pi_{p_t}^\pm$ através de p_t paralelos com π_p^\pm , $p = p_1 = (z, \varphi(z))$, satisfazendo $\pi_{p_t}^\pm(z) = p_t$ com

$$\pi_{p_t}^-(x) \leq t\varphi(x) \leq \pi_{p_t}^+(x), \quad \forall x \in \partial\Omega.$$

Pelo Teorema 1.1.5, temos uma estimativa *a priori* do gradiente para qualquer solução $u \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ com $Q_{tH} = 0$ em Ω e $u|_{\partial\Omega} = t\varphi$, $t \in [0, 1]$ dada por

$$\sup |\nabla u| \leq \tan \gamma = \tan(\alpha + \theta) = \frac{\tan \alpha + \tan \theta}{1 - \tan \alpha \tan \theta} = \frac{L + K}{1 - LK}$$

onde α, θ e γ são como em (2.10).

Como estamos nas hipóteses do Teorema 1.1.2, segue que para cada $t \in [0, 1]$ existe uma solução $u_t \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ da equação $Q_{tH} = 0$ em Ω com $u_t|_{\partial\Omega} = t\varphi$. Portanto, temos a existência de solução $u \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ de $Q_H = 0$ em Ω com $u|_{\partial\Omega} = \varphi$ e satisfazendo (2.7), como queríamos demonstrar.

□

Necessitamos também do lema abaixo, que denominamos Lema Auxiliar, que estabelece uma relação entre a curvatura da $\partial\Lambda_p$ e a curvatura da $\partial\Omega$, onde $\Lambda_p = t\pi_p^+ \cap C(\Omega)$, em termos de $t \in [0, 1]$ e da constante da condição de declividade limitada K . Notemos que esta relação será fundamental na prova do Teorema 2.2.1, tendo em vista o explicitado no Lema 2.2.1.

Lema 2.2.2 (Lema Auxiliar) *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ um domínio limitado e convexo. Seja k a curvatura de $\partial\Omega$ e $\varphi \in C^0(\partial\Omega)$ tal que Ω e φ satisfazem a condição de declividade limitada com constante $K \geq 0$. Então a curvatura k de $\partial\Lambda_p$ satisfaz:*

$$k_{\partial\Lambda_p} \geq \frac{k}{\sqrt{(1+t^2K^2)^3}} \quad (2.13)$$

onde $\Lambda_p = \text{Graf}_E(t\pi_p^+) \cap C(\Omega)$, $t \in [0, 1]$, $C(\Omega) := \Omega \times \mathbb{R}$ e $\pi_p^+ : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ definido como na Definição 0.0.1.

Demonstração:

Dados $z_0 \in \partial\Omega$ e $t \in [0, 1]$, sejam $p = (z_0, t\varphi(z_0))$, $\Lambda_p = \text{Graf}_E(t\pi_p^+) \cap C(\Omega)$, onde $\text{Graf}_E(t\pi_p^+)$ será denotado por $t\Pi_p^+$.

Seja $\gamma(s)$ uma parametrização por comprimento de arco de $\partial\Omega$, ou seja, $\gamma(s) = (\gamma_1(s), \gamma_2(s), 0)$ tal que $|\gamma'(s)| = 1$. Então

$$\alpha(s) = (\gamma(s), \langle a, (\gamma(s) - z_0) \rangle + t\varphi(z_0)), \quad (2.14)$$

é uma parametrização de $\partial\Lambda_p$, para algum $a \in \mathbb{R}^3$ com $\langle a, (0, 0, 1) \rangle = 0$, onde $\langle \cdot \rangle$ é o produto interno em \mathbb{R}^3 .

De fato, seja $\alpha(s) = (\gamma_1(s), \gamma_2(s), w(s))$ uma parametrização de $\partial\Lambda_p$ para alguma função w .

Se $K = 0$, o resultado é óbvio pois $|\nabla t\pi_p^+| = K = 0$ e $k_{\partial\Lambda_p} = k$.

Suponhamos então $K > 0$ e consideremos a reta $r = t\Pi_p^+ \cap \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3; x_3 = 0\}$.

Sejam $(a, b, 0) \neq (0, 0, 0)$ e (e, f, g) com $g \neq 0$ vetores do \mathbb{R}^3 , paralelos a r e $t\Pi_p^+$ respectivamente, que geram o plano $t\Pi_p^+$.

Notemos que o vetor normal a $t\Pi_p^+$ é dado por

$$N = (a, b, 0) \times (e, f, g) = (bg, -ag, af - be)$$

e, sem perda de generalidade, consideremos a, b, e, f, g tal que

$$|N| = (bg)^2 + (-ag)^2 + (af - be)^2 = 1.$$

Dado $z_0 \in \partial\Omega$,

$$z_0 = \gamma(s_0) = (\gamma_1(s_0), \gamma_2(s_0), 0)$$

temos

$$p = (\gamma_1(s_0), \gamma_2(s_0), t\pi_p^+(z_0)) \in \partial\Lambda_p.$$

Tome $p \in t\Pi_p^+$ e $x \in \mathbb{R}^3$. Então, se o vetor \overline{px} é perpendicular a N , temos a equação do plano $t\Pi_p^+$ dado por $\langle x - p, N \rangle = 0$. Logo,

$$\begin{aligned} 0 &= \langle x, N \rangle - \langle p, N \rangle \\ &= \langle (x_1, x_2, x_3), (bg, -ag, af - be) \rangle - \langle p, N \rangle \\ &= bgx_1 - agx_2 + (af - be)x_3 - \langle p, N \rangle. \end{aligned} \tag{2.15}$$

Assim, $(af - be)x_3 = -bgx_1 + agx_2 + \langle p, N \rangle$, ou seja,

$$x_3 = \frac{-bgx_1 + agx_2 + \langle p, N \rangle}{af - be} = Ax_1 + Bx_2 + D, \tag{2.16}$$

onde $A = \frac{-bg}{af - be}$, $B = \frac{ag}{af - be}$ e $D = \frac{\langle p, N \rangle}{af - be}$.

Como $(z_0, t\pi_p^+(z_0)) \in t\Pi_p^+$, obtemos $t\pi_p^+(z_0) = A\gamma_1(s_0) + B\gamma_2(s_0) + D$. Então,

$$\begin{aligned} D &= t\pi_p^+(z_0) - A\gamma_1(s_0) - B\gamma_2(s_0) \\ &= \langle (-A, -B, 1), (\gamma_1(s_0), \gamma_2(s_0), t\pi_p^+(z_0)) \rangle \\ &= \langle (-A, -B, 1), p \rangle. \end{aligned} \tag{2.17}$$

De (2.16) e (2.17), temos que

$$\begin{aligned}
x_3 &= Ax_1 + Bx_2 + D \\
&= Ax_1 + Bx_2 + \langle (-A, -B, 1), p \rangle \\
&= Ax_1 + Bx_2 + t\pi_p^+(q) - A\gamma_1(s_0) - B\gamma_2(s_0).
\end{aligned} \tag{2.18}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
w(s) &= t\pi_p^+(z_0) + A\gamma_1(s) + B\gamma_2(s) - A\gamma_1(s_0) - B\gamma_2(s_0) \\
&= t\pi_p^+(\gamma(s_0)) + \langle (A, B, 0), \gamma(s) \rangle - \langle (A, B, 0), \gamma(s_0) \rangle \\
&= t\pi_p^+(\gamma(s_0)) + \langle (A, B, 0), \gamma(s) - \gamma(s_0) \rangle.
\end{aligned} \tag{2.19}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\alpha(s) &= (\gamma_1(s), \gamma_2(s), w(s)) \\
&= (\gamma_1(s), \gamma_2(s), t\pi_p^+(\gamma(s_0)) + \langle (A, B, 0), \gamma(s) - \gamma(s_0) \rangle) \\
&= (\gamma_1(s), \gamma_2(s), 0) + (0, 0, t\pi_p^+(\gamma(s_0)) + \langle (A, B, 0), \gamma(s) - \gamma(s_0) \rangle) \\
&= (\gamma(s), \langle J, \gamma(s) - z_0 \rangle + t\varphi(z_0))
\end{aligned} \tag{2.20}$$

onde $J = (A, B, 0)$ e $t\pi_p^+(\gamma(s_0)) \equiv t\varphi(z_0)$.

De 2.20 segue

$$\begin{aligned}
\alpha(s) &= (\gamma_1(s), \gamma_2(s), \langle J, \gamma(s) - z_0 \rangle + t\varphi(z_0)) \implies \\
\alpha'(s) &= (\gamma_1'(s), \gamma_2'(s), \langle J, \gamma'(s) \rangle) \implies \\
\alpha''(s) &= (\gamma_1''(s), \gamma_2''(s), \langle J, \gamma''(s) \rangle).
\end{aligned}$$

Usando o fato que γ é parametrizado por comprimento de arco, temos que $|\gamma'(s)|^2 = 1$, $\langle \gamma'(s), \gamma''(s) \rangle = 0$ (pois $|\gamma'(s)|^2 = 1 \implies \frac{d}{ds} \langle \gamma'(s), \gamma'(s) \rangle = 0 \implies 2\langle \gamma'(s), \gamma''(s) \rangle = 0$), donde

$$\begin{aligned}
\langle \alpha'(s), \alpha'(s) \rangle &= \langle (\gamma_1'(s), \gamma_2'(s), \langle J, \gamma'(s) \rangle), (\gamma_1'(s), \gamma_2'(s), \langle J, \gamma'(s) \rangle) \rangle \\
&= (\gamma_1'(s))^2 + (\gamma_2'(s))^2 + \langle J, \gamma'(s) \rangle^2 \\
&= \|\gamma'(s)\|^2 + \langle J, \gamma'(s) \rangle^2 \\
&= 1 + \langle J, \gamma'(s) \rangle^2,
\end{aligned} \tag{2.21}$$

$$\begin{aligned}
\langle \alpha''(s), \alpha''(s) \rangle &= \langle (\gamma_1''(s), \gamma_2''(s), \langle J, \gamma''(s) \rangle), (\gamma_1''(s), \gamma_2''(s), \langle J, \gamma''(s) \rangle) \rangle \\
&= (\gamma_1''(s))^2 + (\gamma_2''(s))^2 + \langle J, \gamma''(s) \rangle^2 \\
&= \|\gamma''(s)\|^2 + \langle J, \gamma''(s) \rangle^2 \\
&= k^2 + \langle J, \gamma''(s) \rangle^2,
\end{aligned} \tag{2.22}$$

e

$$\begin{aligned}
\langle \alpha'(s), \alpha''(s) \rangle &= \langle (\gamma_1'(s), \gamma_2'(s), \langle J, \gamma'(s) \rangle), (\gamma_1''(s), \gamma_2''(s), \langle J, \gamma''(s) \rangle) \rangle \\
&= \gamma_1'(s)\gamma_1''(s) + \gamma_2'(s)\gamma_2''(s) + \langle J, \gamma'(s) \rangle \cdot \langle J, \gamma''(s) \rangle.
\end{aligned} \tag{2.23}$$

Relembremos que a curvatura de α em \mathbb{R}^3 é dada por

$$k_\alpha := \frac{\sqrt{\langle \alpha', \alpha' \rangle \langle \alpha'', \alpha'' \rangle - \langle \alpha', \alpha'' \rangle^2}}{\sqrt{\langle \alpha', \alpha' \rangle^3}}. \tag{2.24}$$

Assim, de (2.24) resulta que

$$\begin{aligned}
k_\alpha &= \frac{\sqrt{(1 + \langle J, \gamma'(s) \rangle^2)(k^2 + \langle J, \gamma''(s) \rangle^2) - (\langle J, \gamma'(s) \rangle \cdot \langle J, \gamma''(s) \rangle)^2}}{\sqrt{(1 + \langle J, \gamma'(s) \rangle^2)^3}} \\
&= \frac{\sqrt{k^2 + \langle J, \gamma''(s) \rangle^2 + k^2 \langle J, \gamma'(s) \rangle^2 + \langle J, \gamma'(s) \rangle^2 \cdot \langle J, \gamma''(s) \rangle^2 - \langle J, \gamma'(s) \rangle^2 \cdot \langle J, \gamma''(s) \rangle^2}}{\sqrt{(1 + \langle J, \gamma'(s) \rangle^2)^3}} \\
&= \frac{\sqrt{k^2 + \langle J, \gamma''(s) \rangle^2 + k^2 \langle J, \gamma'(s) \rangle^2}}{\sqrt{(1 + \langle J, \gamma'(s) \rangle^2)^3}}.
\end{aligned} \tag{2.25}$$

Notemos que

$$\begin{aligned}
k^2 \langle J, \gamma'(s) \rangle^2 + \langle J, \gamma''(s) \rangle^2 &= k^2 |J|^2 |\gamma'(s)|^2 \cos^2 \theta_1 + |J|^2 |\gamma''(s)|^2 \cos^2 \theta_2 \\
&= k^2 |J|^2 \cos^2 \theta_1 + |J|^2 k^2 \cos^2 \theta_2 \\
&= k^2 |J|^2 (\cos^2 \theta_1 + \cos^2 \theta_2),
\end{aligned} \tag{2.26}$$

onde θ_1 é o ângulo entre J e γ' e θ_2 é o ângulo entre J e γ'' .

Temos que $\gamma' \perp \gamma''$, então quatro possibilidades são possíveis:

$$\begin{aligned}
\theta_1 + \theta_2 &= \frac{\pi}{2} \\
|\theta_1 - \theta_2| &= \frac{\pi}{2} \\
\theta_1 + \theta_2 &= \frac{3\pi}{2} \\
\theta_1 + \theta_2 &= 0.
\end{aligned}$$

Em qualquer caso, usando as relações trigonométricas, ocorre

$$\cos^2 \theta_1 + \cos^2 \theta_2 = 1.$$

Por exemplo, para o caso (i),

$$\cos^2 \theta_1 + \sin^2 \theta_1 = 1 \iff \cos^2 \theta_1 + \cos^2\left(\frac{\pi}{2} - \theta_1\right) = 1 \iff \cos^2 \theta_1 + \cos^2 \theta_2 = 1$$

Daí, de (2.26), obtemos

$$k^2 \langle J, \gamma'(s) \rangle^2 + \langle J, \gamma''(s) \rangle^2 = k^2 |J|^2. \quad (2.27)$$

Como $N = (a, b, 0) \times (e, f, g) = (bg, -ag, af - be)$ é normal unitário a $t\Pi_p^+$ então

$$\frac{(bg, -ag, af - be)}{af - be} = (-A, -B, 1) \quad (2.28)$$

também é normal a $t\Pi_p^+$. Seja θ o ângulo entre $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3; x_3 = 0\}$ e $t\Pi_p^+$, daí

$$\cos \theta = \frac{\langle (0, 0, 1), (-A, -B, 1) \rangle}{|(0, 0, 1)| |(-A, -B, 1)|} = \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + 1}}. \quad (2.29)$$

Da relação trigonométrica $\cos^2 \theta = \frac{1}{1 + \tan^2 \theta}$ e de (2.29) segue

$$\frac{1}{A^2 + B^2 + 1} = \frac{1}{1 + \tan^2 \theta}. \quad (2.30)$$

Por hipótese, Ω e φ satisfazem a condição de declividade limitada com constante $K \geq 0$, logo $|\nabla t\pi_p^+| = tK = \tan \theta$. Assim, usando (2.30), temos

$$\tan \theta = tK = \sqrt{A^2 + B^2} \quad (2.31)$$

e notemos também que

$$|J|^2 = \langle J, J \rangle = \langle (A, B, 0), (A, B, 0) \rangle = A^2 + B^2 = t^2 K^2. \quad (2.32)$$

Segue de (2.27) que $k^2 \langle J, \gamma'(s) \rangle^2 + \langle J, \gamma''(s) \rangle^2 = k^2 t^2 K^2$.

Logo, de (2.25) e (2.32) obtemos

$$\begin{aligned}
k_\alpha &= \frac{\sqrt{k^2 + \langle J, \gamma''(s) \rangle^2 + k^2 \langle J, \gamma'(s) \rangle^2}}{\sqrt{(1 + \langle J, \gamma'(s) \rangle^2)^3}} \\
&= \frac{\sqrt{k^2 + k^2 |J|^2}}{\sqrt{(1 + \langle J, \gamma'(s) \rangle^2)^3}} \\
&= \frac{\sqrt{k^2 + k^2 t^2 K^2}}{\sqrt{(1 + \langle J, \gamma'(s) \rangle^2)^3}} \\
&= \frac{k \sqrt{1 + t^2 K^2}}{\sqrt{(1 + \langle J, \gamma'(s) \rangle^2)^3}}. \tag{2.33}
\end{aligned}$$

Assim, de (2.32), obtemos

$$\cos^2 \theta_1 = \frac{\langle J, \gamma'(s) \rangle^2}{|J|^2 |\gamma'(s)|^2} = \frac{\langle J, \gamma'(s) \rangle^2}{|J|^2} = \frac{\langle J, \gamma'(s) \rangle^2}{t^2 K^2}. \tag{2.34}$$

Então

$$0 \leq \langle J, \gamma'(s) \rangle^2 = t^2 K^2 \cos^2 \theta_1 \leq t^2 K^2. \tag{2.35}$$

Portanto, de (2.33) e (2.35),

$$\begin{aligned}
k_\alpha &= k \sqrt{\frac{1 + t^2 K^2}{(1 + \langle J, \gamma'(s) \rangle^2)^3}} \\
&\geq k \sqrt{\frac{1 + t^2 K^2 - t^2 K^2}{(1 + \langle J, \gamma'(s) \rangle^2)^3}} \\
&\geq k \sqrt{\frac{1}{(1 + t^2 K^2)^3}} \\
&= \frac{k}{\sqrt{(1 + t^2 K^2)^3}},
\end{aligned}$$

provando assim este Lema.

□

Com base no Lema 2.2.1 e Lema 2.2.2 vamos provar o principal resultado deste capítulo.

Demonstração do Teorema 2.2.1:

Dados $z_0 \in \partial\Omega$ e $t \in [0, 1]$, sejam $p = (z_0, t\varphi(z_0))$, $\Lambda_p = (t\Pi_p^+) \cap C(\Omega)$, onde $t\Pi_p^+$ é o plano dado como gráfico de uma função $t\pi_p^+ : \{x_3 = 0\} \longrightarrow \mathbb{R}$, e $\gamma(s)$ uma parametrização por comprimento de arco de $\partial\Omega$.

Então, por (2.20), temos que

$$\alpha(s) = (\gamma(s), \langle J, (\gamma(s) - z_0) \rangle + t\varphi(z_0))$$

é uma parametrização de $\partial\Lambda_p$, para algum $J \in \mathbb{R}^3$ com $\langle J, (0, 0, 1) \rangle = 0$.

Do Lema 2.2.2, temos que

$$k_\alpha \geq \frac{k}{\sqrt{(1 + t^2 K^2)^3}},$$

e da hipótese (2.2), segue que $\forall t \in [0, 1]$ temos $k \geq H(1 + t^2 K^2)^2$.

Logo,

$$k_\alpha \geq \frac{k}{\sqrt{(1 + t^2 K^2)^3}} \geq \frac{H(1 + t^2 K^2)^2}{\sqrt{(1 + t^2 K^2)^3}} = H\sqrt{1 + t^2 K^2} \geq H. \quad (2.36)$$

Pelo Corolário 1.1.4, temos a existência de solução $v_p \in C^2(\Lambda_p) \cap C^0(\bar{\Lambda}_p)$ de (1) em Λ_p com $v_p|_{\partial\Lambda_p} = 0$. Da estimativa (1.8), segue que

$$|\nabla v_p|^2 \leq \frac{H^2}{k_{\alpha_1}^2 - H^2}, \quad (2.37)$$

onde $k_{\alpha_1} = \min k_\alpha$.

De (2.36) e (2.2) obtemos

$$\begin{aligned} |\nabla v_p|^2 &\leq \frac{H^2}{k_{\alpha_1}^2 - H^2} \\ &\leq \frac{H^2}{\frac{k^2}{(1 + t^2 K^2)^3} - H^2} \\ &= L^2. \end{aligned}$$

Em particular,

$$\begin{aligned}
L^2 &\leq \frac{\frac{k^2}{(1+t^2K^2)^4}}{\frac{k^2}{(1+t^2K^2)^3} - \frac{k^2}{(1+t^2K^2)^4}} \\
&= \frac{\frac{k^2}{(1+t^2K^2)^4}}{k^2 \left(\frac{(1+t^2K^2)^4 - (1+t^2K^2)^3}{(1+t^2K^2)^{12}} \right)} \\
&= \frac{(1+t^2K^2)^3}{(1+t^2K^2)^4 - (1+t^2K^2)^3} \\
&= \frac{1}{(1+t^2K^2) - 1} = \frac{1}{t^2K^2}. \tag{2.38}
\end{aligned}$$

Então,

$$|\nabla v_p| \leq L \leq \frac{1}{tK}.$$

Consequentemente,

$$\sup_{\Lambda_p} |\nabla v_p| \leq L.$$

Assim estamos nas hipóteses do Lema 2.2.1 e portanto, dado $t \in [0, 1]$, existe solução $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ com $Q_H(u) = 0$ em Ω tal que $u|_{\partial\Omega} = t\varphi$ (bastando aplicar o lema a cada t).

Suponhamos agora Ω um domínio limitado $C^{2,\alpha}$ e $\varphi \in C^{2,\alpha}(\partial\Omega)$. Mostremos que (2.3) é satisfeito.

Do Lema 2.2.1 temos que o gradiente de u é estimado por (2.7) onde

$$L^2 = \frac{H^2}{\frac{k^2}{(1+t^2K^2)^3} - H^2}.$$

Então

$$L^2 = \frac{H^2}{\frac{k^2}{(1+t^2K^2)^3} - H^2} = \frac{H^2(1+t^2K^2)^3}{k^2 - H^2(1+t^2K^2)^3},$$

o que implica que

$$L = \frac{H(1+t^2K^2)\sqrt{1+t^2K^2}}{\sqrt{k^2-H^2(1+t^2K^2)^3}}. \quad (2.39)$$

Por (2.7) do Lema 2.2.1 temos então que

$$\sup_{\Omega} |\nabla u| \leq \frac{tK+L}{1-tKL}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \sup_{\Omega} |\nabla u| &\leq \frac{tK+L}{1-tKL} \\ &= \frac{tK + \frac{H(1+t^2K^2)\sqrt{1+t^2K^2}}{\sqrt{k^2-H^2(1+t^2K^2)^3}}}{1-tK \frac{H(1+t^2K^2)\sqrt{1+t^2K^2}}{\sqrt{k^2-H^2(1+t^2K^2)^3}}} \\ &= \frac{tK\sqrt{k^2-H^2(1+t^2K^2)^3} + H(1+t^2K^2)\sqrt{1+t^2K^2}}{\sqrt{k^2-H^2(1+t^2K^2)^3} - tKH(1+t^2K^2)^2\sqrt{1+t^2K^2}} \\ &= \frac{tK\sqrt{k^2-(1+t^2K^2)^3H^2} + H\sqrt{(1+t^2K^2)^3}}{\sqrt{k^2-(1+t^2K^2)^3H^2} - tKH\sqrt{(1+t^2K^2)^3}}, \end{aligned}$$

o que conclui a prova deste Teorema.

□

2.3 Solução com gradiente limitado

Do Teorema de Serrin 0.0.1, não obtemos nenhuma informação em relação a limitação ou não do gradiente de uma solução. Veremos em seguida, um resultado que tem como principal contribuição à teoria o fato de nos assegurar que uma solução u advinda do Teorema de Serrin, possui gradiente limitado se o dado no bordo satisfaz a condição de declividade limitada.

Teorema 2.3.1 *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ um domínio limitado $C^{2,\alpha}$ e $\varphi \in C^0(\partial\Omega)$ tal que Ω e φ satisfazem a condição de declividade limitada com constante $K \geq 0$. Dado $H \geq 0$, suponha que $k \geq 2H$, onde k é a curvatura da $\partial\Omega$. Então, existe solução*

$u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ com gradiente limitado tal que $u|_{\partial\Omega} = \varphi$. Além disso, se $k \geq 2H\sqrt{1+K^2}$ então

$$\sup_{\Omega} |\nabla u| < \frac{K\sqrt{k^2 - 4H^2} + 2H}{\sqrt{k^2 - 4H^2} - 2KH}. \quad (2.40)$$

Demonstração:

Dividiremos a demonstração do teorema em dois casos: $\varphi \in C^{2,\alpha}(\partial\Omega)$ e $\varphi \in C^0(\partial\Omega)$.

Suponha $\varphi \in C^{2,\alpha}(\partial\Omega)$. Como Ω é $C^{2,\alpha}$ podemos supor $\varphi \in C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$.

Tomemos $t \in [0, 1]$. Assim, dado $p_t = (z, t\varphi(z))$, $z \in \partial\Omega$, definimos

$$\Lambda_{p_t} = \text{Graf}_E(t\pi_p^+) \cap (\Omega \times \mathbb{R}).$$

Tendo em vista que Ω é $C^{2,\alpha}$ e $\text{Graf}_E(t\pi_p^+)$ é um plano, segue que Λ_{p_t} é um domínio $C^{2,\alpha}$, ou seja, Λ_{p_t} é uma região planar limitada e $C^{2,\alpha}$.

Afirmamos que Λ_{p_t} é um domínio planar limitado situado entre duas retas paralelas l_1, l_2 com

$$d(l_1, l_2) \leq \frac{1}{H}.$$

Com efeito, tome $\bar{z} \in \partial\Omega$ e l_1 a reta tangente a $\partial\Omega$ em \bar{z} . Como $k \geq 2H$ e $H \geq 0$ então Ω é convexo. Da convexidade de Ω implica que $\partial\Omega$ está toda de um mesmo semi-plano de l_1 . Seja C o círculo de raio $1/2H$ tangente a $\partial\Omega$ em \bar{z} e contido no mesmo semi-espaço determinado por l_1 no qual está $\partial\Omega$. Por hipótese $k_{\partial\Omega} \geq 2H$, então $\partial\Omega$ está contida no interior da região delimitada por C . Logo, considerando l_2 reta tangente a $\partial\Omega$ paralela a l_1 , obtemos

$$d(l_1, l_2) \leq 2R = 2\frac{1}{2H} = \frac{1}{H}.$$

Desta forma, segue do Corolário 1.1.5 que dado $h \in [0, H]$, existe uma solução $v_{p_t, h} \in C^{2,\alpha}(\bar{\Lambda}_{p_t})$ com $Q_h = 0$ em Λ_{p_t} e $v_{p_t, h}|_{\partial\Lambda_{p_t}} = 0$.

Seja $G_{p_t, h}$ o gráfico euclidiano de $v_{p_t, h}$. Claramente, $G_{p_t, h}$ é uma superfície suave compacta de curvatura média constante h tendo como bordo um gráfico que coincide com $\text{Graf}_E(t\varphi)$ em p_t , para qualquer $h \in [0, H]$.

Defina,

$$S_{p_t} = \{h \in [0, tH]; G_{p_t, h} \text{ é um gráfico } C^{2,\alpha} \text{ sobre } \overline{\Omega}\}$$

onde $G_{p_t, h}$ é definido como acima.

Mostraremos de modo usual que $S_{p_t} = [0, tH]$, ou seja, $S_{p_t} \neq \emptyset$, aberto e fechado em $[0, tH]$. Como $h = 0 \in [0, tH]$ e $G_{p_t, 0}$ é o próprio Λ_{p_t} que é um gráfico $C^{2,\alpha}$ sobre $\overline{\Omega}$, então $0 \in S_{p_t}$ e por conseguinte $S_{p_t} \neq \emptyset$.

Notemos que $t \in [0, 1]$ e $\varphi \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$, ponha

$$C_0^{2,\alpha}(\overline{\Omega}) = \{v_{p_t, h} \in C^{2,\alpha}(\overline{\Lambda}_{p_t}); v_{p_t, h}|_{\partial\Lambda_{p_t}} = 0\}.$$

Fixe t e defina

$$\begin{aligned} T : [0, tH] \times C_0^{2,\alpha}(\overline{\Omega}) &\longrightarrow C^\alpha(\overline{\Omega}) \\ T(h, v) &= Q_h(v + t\varphi). \end{aligned}$$

Então

$$\begin{aligned} D_2T(h_0, v_0) &= L_h : C_0^{2,\alpha}(\overline{\Omega}) \longrightarrow C^\alpha(\overline{\Omega}) \\ D_2T(h_0, v_0)(v) &= \frac{d}{dt}T(h_0, v_0 + tv)|_{t=0}, \end{aligned}$$

é um homeomorfismo linear. Este é um resultado clássico da teoria de EDP Elípticas (olhar Método da Continuidade). Desta forma, pelo teorema das funções implícitas, concluímos a abertura de S_{p_t} .

Para provarmos o fechamento de S_{p_t} , consideremos $h_n \in S_{p_t}$ uma sequência convergente para $h \in [0, tH]$ e mostremos que $G_{p_t, h}$ é um gráfico $C^{2,\alpha}$ sobre $\overline{\Omega}$.

Como $h_n \in S_{p_t}$, então cada G_{p_t, h_n} é gráfico sobre $\overline{\Omega}$, onde G_{p_t, h_n} está contido no cilindro sólido $\overline{\Omega} \times \mathbb{R}$ sobre Ω , para todo n , e assim $G_{p_t, h}$ também está contido sobre o cilindro.

Pelo teorema da função implícita, segue que a norma C^1 de $v_{p_t, h}$ depende continuamente de h .

É fato que o gráfico de $t\varphi$ divide a superfície $M := \partial(\overline{\Omega} \times \mathbb{R})$ em suas componentes conexas. Defina M^+ a parte do gráfico que contém a terceira coordenada maior.

Afirmamos que M^+ é uma superfície suave tendo como bordo o gráfico de $t\varphi$ e curvatura média maior ou igual a H .

Com efeito, como a curvatura do cilindro na direção de e_3 é nula e $k_{\partial\Omega} \geq 2H$ obtemos

$$H_{M^+} = \frac{k_1 + k_2}{2} \geq \frac{0 + 2H}{2} = H.$$

Notemos que a cada t fixo temos um ponto de tangência entre $G_{p_t, h}$ e M^+ que é dado por p_t . Assim, variando t , pelo princípio da tangência no bordo (Teorema 1.1.10), segue que $G_{p_t, h}$ e M^+ são transversais ao longo do gráfico de $t\varphi$. Isto implica que $G_{p_t, h}$ é um gráfico $C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ tal que $h \in [0, tH]$ com $t \in [0, 1]$, concluindo o fechamento de S_{p_t} .

Portanto, $S_{p_t} = [0, tH]$. Consequentemente, garantimos a existência de $w_{z,t} \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$, $z \in \partial\Omega$ e $t \in [0, 1]$, cujo gráfico é uma superfície $G_{p_t, tH}$, com $p_t = (z, t\varphi(z))$.

Diretamente do teorema da função implícita, temos que a norma C^1 de $w_{z,t}$ depende continuamente de $z \in \partial\Omega$ e $t \in [0, 1]$, tal que

$$T := \sup_{t \in [0,1]} \sup_{z \in \partial\Omega} \sup_{\Omega} |\nabla w_{z,t}| < \infty$$

onde usamos o fato de $\partial\Omega$ e $[0, 1]$ serem compactos. Assim, para um dado domínio Ω , a constante T depende continuamente apenas de H e K .

Assim sendo, dado $z \in \partial\Omega$ e $t \in [0, 1]$ obtemos a solução $w_{z,t} \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ de $Q_{tH} = 0$ em Ω tal que

$$\begin{cases} \sup_{\Omega} |\nabla w_{z,t}| \leq T \\ w_{z,t}(z) = t\varphi(z) \\ w_{z,t}|_{\partial\Omega} \geq t\varphi. \end{cases}$$

Temos $t\pi_p^-$ uma subsolução de $Q_{tH} = 0$, $p = (z, t\varphi(z))$, já que $Q_{tH}(t\pi_p^-) \geq 0$, com $|\nabla t\pi_p^-| \leq tK$.

Pelo princípio do máximo, Teorema 1.1.3, qualquer solução $u \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ de $Q_{tH} = 0$ em Ω , com $u|_{\partial\Omega} = t\varphi$ satisfaz

$$\sup_{\Omega} u = \sup_{\partial\Omega} u$$

e pelo princípio do máximo para a norma do gradiente, Teorema 1.1.5, satisfaz

$$\sup_{\Omega} |\nabla u| = \sup_{\partial\Omega} |\nabla u|.$$

Portanto, dado $t \in [0, 1]$ qualquer solução $u \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ de $Q_{tH} = 0$ tal que $u|_{\partial\Omega} = t\varphi$ satisfaz uniformemente a estimativa C^1 *a priori*. Então, pelo método da continuidade (Teorema 1.1.2), existe uma solução $u \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ de $Q_H = 0$ em Ω tal que $u|_{\partial\Omega} = \varphi$ e

$$\sup_{\Omega} |\nabla u| \leq T.$$

Desta forma, a prova do teorema está concluída para o caso $\varphi \in C^{2,\alpha}(\partial\Omega)$, pois existe solução $u \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega}) \subset C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ com gradiente limitado tal que $u|_{\partial\Omega} = \varphi$.

Suponha agora o caso onde $\varphi \in C^0(\partial\Omega)$.

Consideremos as sequências $\varphi_n^{\pm} \in C^{2,\alpha}(\partial\Omega)$ satisfazendo a condição de declividade limitada com constante K_n tal que

$$\varphi_n^{\pm} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \varphi \text{ e } K_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} K,$$

temos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (|\varphi_n^{\pm} - \varphi|_{0,\partial\Omega} + |K_n - K|) = 0 \quad (2.41)$$

e, $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\varphi_n^- \leq \varphi \leq \varphi_n^+.$$

Dado n , como $\varphi \in C^{2,\alpha}(\partial\Omega)$, pelo caso anterior temos uma solução correspondente u_n de φ_n . Considerando as estimativas uniformes C^1 (gradiente e solução) da sequência (u_n) em todo o domínio Ω , pelo Teorema de Arzelá-Ascoli (ver [22], pg. 244) vemos que existe subsequência de (u_n) convergindo em compactos de Ω a uma solução $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ com $Q_H = 0$ em Ω tal que $u|_{\partial\Omega} = \varphi$.

Desde que a convergência é C^1 em todo ponto de Ω , então a estimativa uniforme do gradiente da sequência u_n garante que u tem gradiente limitado em Ω , o que demonstra o caso C^0 .

Suponha agora que $k \geq 2H\sqrt{1+K^2}$ e mostraremos que (2.40) é satisfeita.

Para mostrar que (2.40) é satisfeita basta provarmos que

$$|\nabla v_p| \leq \frac{2H}{\sqrt{k^2 - 4H^2}}, \quad (2.42)$$

para algum $p = (z, \varphi(z))$, $z \in \partial\Omega$ com $v_p = v_{p_1, H}$, de acordo com a notação usada anteriormente. De fato, por hipótese

$$\begin{aligned} k &\geq 2H\sqrt{1+K^2} \iff \\ k^2 &\geq 4H^2(1+K^2) \iff \\ k^2 - 4H^2 &\geq 4H^2K^2 \iff \\ \sqrt{k^2 - 4H^2} &\geq 2HK \iff \\ \frac{2H}{\sqrt{k^2 - 4H^2}} &\leq \frac{1}{K}, \end{aligned} \quad (2.43)$$

donde,

$$\sup_{\Lambda_p} |\nabla v_p| \leq L := \frac{2H}{\sqrt{k^2 - 4H^2}} \leq \frac{1}{K}$$

e então, do Lema 2.2.1, vem que

$$\begin{aligned} \sup_{\Omega} |\nabla u| &\leq \frac{K+L}{1-KL} \\ &\leq \frac{K + \frac{2H}{\sqrt{k^2 - 4H^2}}}{1 - \frac{2KH}{\sqrt{k^2 - 4H^2}}} \\ &= \frac{K\sqrt{k^2 - 4H^2} + 2H}{\sqrt{k^2 - 4H^2}} \cdot \frac{\sqrt{k^2 - 4H^2}}{\sqrt{k^2 - 4H^2} - 2KH} \\ &= \frac{K\sqrt{k^2 - 4H^2} + 2H}{\sqrt{k^2 - 4H^2} - 2KH}. \end{aligned}$$

Para mostrar (2.42), consideremos o caso onde $\varphi \in C^{2,\alpha}(\partial\Omega)$. A estimativa do caso geral será obtida como o limite das estimativas uniformes do gradiente das soluções (u_n) relativas a sequência de dados no bordo φ_n^\pm de classe $C^{2,\alpha}$, como já mencionado anteriormente.

Como Λ_p é um domínio convexo situado entre duas linhas paralelas l_1 e l_2 , com $d(l_1, l_2) \leq 2R = 2/k$, e considerando a parte do cilindro de curvatura média

constante H tendo como bordo as linhas l_1, l_2 , podemos afirmar que a altura do gráfico G_p de v_p é no máximo

$$\frac{\sqrt{k^2 - 4H^2}}{2Hk}. \quad (2.44)$$

Com efeito, seja θ o ângulo entre os planos $Graf_E(\pi_p^+)$ e $\Pi = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3; x_3 = 0\}$. Então, $\tan \theta \leq K$.

Temos e_3 normal ao plano Π e seja \vec{w} o vetor normal a $Graf_E(\pi_p^+)$. Então, o ângulo entre \vec{w} e e_3 é θ .

Seja $A \in \Lambda_p$ e considere a reta ρ que passa por A e tem a direção de \vec{w} . Seja B um ponto de ρ , tal que $\overline{AB} = R = \frac{1}{k}$. Seja s a reta paralela a $Graf_E(\pi_p^+)$ que passa por B e que intercepta a reta μ que passa por A e tem a direção de e_3 .

Logo fica determinado o triângulo ABC , retângulo em B , tal que $\{C\} = \mu \cap s$.

Seja $h, \delta \in \mathbb{R}$ o comprimento de $\overline{AC}, \overline{CB}$ e \overline{BA} , respectivamente.

Assim, por Pitágoras, $h^2 = \delta^2 + R^2 \implies \delta = \sqrt{h^2 - R^2}$.

Por outro lado,

$$\frac{1}{K} = \cot \theta = \frac{R}{\delta} = \frac{R}{\sqrt{h^2 - R^2}}.$$

Então,

$$\frac{1}{K^2} = \frac{R^2}{h^2 - R^2} \iff h^2 = R^2(K^2 + 1) \leq R^2 K^2. \quad (2.45)$$

De (2.45) e usando (2.43) obtemos

$$h \leq RK = \frac{1}{k}R \leq \frac{\sqrt{k^2 - 4H^2}}{2Hk}$$

Portanto, o gráfico de v_p tem altura máximo dada por (2.44), provando nossa afirmação.

Desta forma, podemos usar a parte do cilindro dado por

$$z(x, y) = \sqrt{\frac{1}{4H^2} - x^2} - \frac{\sqrt{k^2 - 4H^2}}{2Hk}, \quad -\frac{1}{k} \leq x \leq 0,$$

onde (x, y) são coordenadas cartesianas de Λ_p , como barreira em todo ponto da $\partial\Lambda_p$ (bastando tomar partes de cilindro congruente a este).

Consequentemente, para todo $p \in \partial\Lambda_p$,

$$|\nabla v_p| < |\nabla z| = \frac{2H}{\sqrt{k^2 - 4H^2}},$$

provando assim (2.40).

□

Capítulo 3

Gráficos Parabólicos de CMC em \mathbb{H}^3 com dado no bordo satisfazendo a CDL

Neste capítulo introduzimos a definição da condição de declividade limitada para gráficos parabólicos e apresentamos resultados de existência e unicidade de gráficos parabólicos de curvatura média constante em \mathbb{H}^3 com bordo prescrito, não contemplado por uma extensão do Teorema de Serrin para este contexto.

Considere $\mathbb{G}_H = \{\phi_r\}_{r \in \mathbb{R}}$ o subgrupo a 1-paramêtro de isometrias de \mathbb{U}^3 do tipo parabólico cujas órbitas são ortogonais a $\mathbb{P} := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; y = 0 \text{ e } z > 0\}$, e denomine por $C(\Omega)$ o conjunto

$$C(\Omega) := \{\phi_r(p); p \in \Omega\}.$$

Uma extensão do caso suave até o bordo do Teorema 0.0.1 para os gráficos parabólicos, é dado pelo Teorema 0.0.2, que repetimos aqui:

“Seja $\Omega \subset \mathbb{P}$ um domínio de classe $C^{2,\alpha}$ e seja $\bar{H} \geq 0$. Suponha que

$$\bar{H} \leq \bar{H}_C, \tag{3.1}$$

onde \overline{H}_C é a curvatura média do cilindro parabólico $C(\partial\Omega)$ e onde $C(\partial\Omega)$ é orientado pelo vetor unitário normal apontando para a componente conexa de $\mathbb{H}^3 \setminus C(\partial\Omega)$. Então existe uma única função $u \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ tal que

$$\begin{cases} Q_H^*(u) = 0 \\ u|_{\partial\Omega} = \varphi, \end{cases} \quad (3.2)$$

onde $\varphi \in C^{2,\alpha}(\partial\Omega)$ é dada a priori e Q_H^* é dado por (1.10)".

No entanto, se (3.1) não ocorre, ainda assim podem existir soluções do problema (3.2) sob algumas hipóteses extras sobre o domínio Ω e sobre o dado no bordo φ .

Um exemplo que esclarece este comentário anterior é o que segue.

Exemplo 3.0.1 *Seja B a bola euclidiana de centro $(0, 0, 2)$ e raio 1, $B \subset \mathbb{P}$.*

Notemos que a curvatura euclidiana $k_{\partial B} = 1$. Como a curvatura hiperbólica é dada por $\overline{k}_{\partial B} = x_3 k_{\partial B} + \eta_3$, em $(0, 0, 1)$ temos que $\overline{k}_{\partial B} = 1.1 + 1 = 2$. Logo, $\overline{k}_{\partial B} \geq 2$.

Tome $a = 1$. Daí, $\overline{k}_{\partial B} \geq 2 > a = 1$ e considere $h : B \rightarrow [-1, 1]$, $h \in C^l$.

Pelo Teorema 1.1.12, existe uma função $g \in C^{l+2,\alpha}$, $0 < \alpha < 1$, $g : \overline{B} \rightarrow \mathbb{R}$, $g|_{\partial B} = 0$, cujo gráfico é uma superfície de curvatura média h no espaço hiperbólico.

Note que a curvatura média euclidiana $H_{C(\partial B)}$ é $1/2$ e como a curvatura média hiperbólica é dada por $\overline{H}_{C(\partial B)} = x_3 H_{C(\partial B)} + \eta_3$ temos, em $(0, 0, 3)$, $\overline{H}_{C(\partial B)} = 3.1/2 - 1 = 1/2$.

Assim, para $h \in (1/2, 1]$, existe $u \in C^{2,\alpha}(B)$ tal que $Q_H^(u) = 0$, $u|_{\partial B} = 0$ e $\overline{H}_{C(B)} < h$ (pelo Teorema 1.1.12).*

Portanto, mostramos uma solução com bordo nulo que não é contemplada via Teorema 0.0.2.

Logo, pondo \overline{H}_C a curvatura média do cilindro sobre $\Omega \subset \mathbb{P}$, surge mais uma questão: Se $\overline{H} > \overline{H}_C$ e $\varphi \neq 0$, ainda é possível caracterizar uma família de domínios e dados no bordo neste contexto onde ainda podemos garantir a existência de solução de (3.2)?

É natural que nos concentremos então no problema (3.2), onde $\varphi \in C^{2,\alpha}(\partial\Omega)$, já que podemos neste caso usar o Teorema 1.1.2, uma ferramenta poderosa neste contexto.

3.1 A condição de declividade limitada para gráficos parabólicos em \mathbb{H}^3

A noção da condição de declividade limitada do caso euclidiano aponta uma direção para definir uma condição similar no contexto hiperbólico. A esta nova noção de declividade limitada denominaremos por “condição de declividade limitada parabólica”.

Definição 3.1.1 *Seja $\Omega \subset \mathbb{P}$. Dizemos que (Ω, φ) satisfaz a condição da declividade limitada parabólica com constante $K \geq 0$, se para cada ponto $p \in \partial\Omega$, existem superfícies equidistantes Σ_p^\pm dadas como gráficos parabólicos de funções $\pi_p^\pm : \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que*

$$(i) \quad \pi_p^+(p) = \varphi(p) = \pi_p^-(p)$$

$$(ii) \quad \pi_p^-(q) \leq \varphi(q) \leq \pi_p^+(q), \forall q \in \partial\Omega$$

$$(iii) \quad |\text{grad}\pi_p^\pm| \leq K, \text{ em } \bar{\Omega}$$

onde grad denota o gradiente em \mathbb{P} (na métrica de \mathbb{P}).

Observamos que Σ_p^\pm quando visto em \mathbb{U}^3 são intersecções de planos euclidianos não horizontais com \mathbb{R}_+^3 (note que não são intersecções de esferas euclidianas com centro fora de \mathbb{R}_+^3 com \mathbb{R}_+^3).

No que segue, para uma função $u \in C^2(\Omega)$, $|\nabla u|$ denotará o gradiente euclidiano de u e $|\text{gradu}|$ denotará o gradiente no sentido hiperbólico.

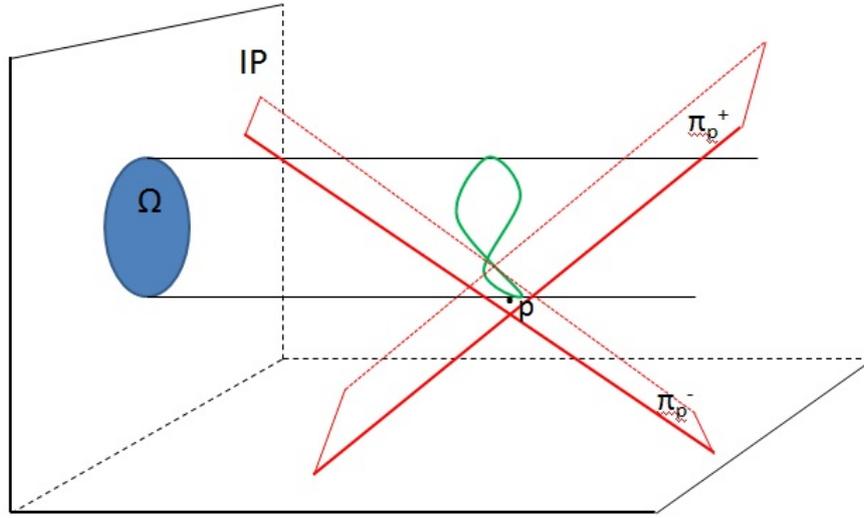


Figura 3.1: CDLP - condição de declividade limitada parabólica

3.2 Resultado de existência e unicidade para gráficos parabólicos de CMC em \mathbb{H}^3

Com base na definição acima enunciaremos o principal resultado deste capítulo, que desejamos demonstrar no desenvolvimento do mesmo:

Teorema 3.2.1 *Seja $\Omega \subset \mathbb{P}$ um domínio limitado, simplesmente conexo de classe $C^{2,\alpha}$ e seja $\varphi \in C^{2,\alpha}(\partial\Omega)$. Suponha que (Ω, φ) satisfaça a condição de declividade limitada parabólica com constante $K \geq 0$. Seja \bar{k} a curvatura da $\partial\Omega$ em \mathbb{H}^3 , no sentido hiperbólico, com respeito a orientação interna. Dado*

$$\bar{H} \geq \frac{K}{\sqrt{K^2 + 1}}$$

se

$$\bar{k} > \delta(\bar{H} + 1)(1 + K^2)^2 + 1$$

então existe $u \in C^{2,\alpha}(\Omega)$ solução de $Q_H^* = 0$ em Ω , com $u|_{\partial\Omega} = \varphi$.

Notemos que este teorema faz uso da condição de declividade limitada e nos capacita solucionar o problema (3.2) para domínios mais gerais do que aqueles dados pela extensão do caso suave do Teorema de Serrin (Teorema 0.0.2).

Um resultado que vamos precisar para demonstrar o teorema acima é similar ao Lema 2.2.1 do contexto euclidiano. No contexto \mathbb{H}^3 é dado pelo seguinte resultado.

Lema 3.2.1 *Seja $\Omega \subset \mathbb{P}$ um domínio convexo no sentido euclidiano e \bar{k} , k as curvaturas hiperbólica e euclidiana de $\partial\Omega$, respectivamente, com respeito a orientação interna. Seja Σ uma superfície equidistante em \mathbb{U}^3 dada como gráfico parabólico de uma função $\pi : \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{R}$, e suponha $|\nabla\pi| = K$. Seja h a curvatura média de Σ e $\Lambda = C(\Omega) \cap \Sigma$. Então, a curvatura euclidiana $k_{\partial\Lambda}$ e a curvatura hiperbólica $\bar{k}_{\partial\Lambda}$ de $\partial\Lambda$ satisfazem:*

$$k_{\partial\Lambda}(p) \geq \frac{k(q)}{\sqrt{(1+K^2)^3}} \quad (3.3)$$

e

$$\bar{k}_{\partial\Lambda}(p) \geq \frac{\bar{k}(q) - \sqrt{(1-h^2)(1+K^2)^3} - 1}{\sqrt{(1+K^2)^3}}, \quad (3.4)$$

onde $q \in \partial\Omega$ e $p = \phi_{r(q)}(q)$.

Demonstração:

A prova de (3.3) é análoga ao Lema 2.2.2 (maiores detalhes Lema 4 em [2]).

Mostremos então (3.4). Dados $q = (x_1, 0, x_3) \in \partial\Omega$ e $p = (x_1, \pi(x_1, x_3), x_3) \in \partial\Lambda$, de (3.3) segue que

$$\begin{aligned} \bar{k}_{\partial\Lambda}(p) &= k_{\partial\Lambda}(p)x_3 + \eta_3^{\partial\Lambda} \\ &\geq \frac{k(q)}{\sqrt{(1+K^2)^3}}x_3 + \eta_3^{\partial\Lambda} \\ &\quad \frac{\bar{k}(q) - \eta_3^{\partial\Omega}}{\sqrt{(1+K^2)^3}} \\ &= \frac{x_3}{\sqrt{(1+K^2)^3}}x_3 + \eta_3^{\partial\Lambda} \\ &= \frac{\bar{k}(q) - \eta_3^{\partial\Omega}}{\sqrt{(1+K^2)^3}} + \eta_3^{\partial\Lambda}. \end{aligned}$$

Como $\partial\Lambda$ é uma curva de Jordan (fechada e sem auto-intersecções) suave contida em Σ , o menor valor que $\eta_3^{\partial\Lambda}$ assume é igual a $-|\sin\sigma|$, onde σ é o ângulo entre Σ e $\{x_3 = 0\}$. Note que $\{x_3 = 0\} \subset \partial_\infty\mathbb{H}^3 := \{x_3 = 0\} \cup \{\infty\}$.

Além disso, $h = \cos \sigma$ então

$$\cos^2 \sigma + \sin^2 \sigma = 1 \iff \sin^2 \sigma = 1 - h^2 \iff |\sin \sigma| = \sqrt{1 - h^2}.$$

Logo, segue que $|\eta_3^{\partial\Omega}| \geq \sqrt{1 - h^2}$.

Tendo em vista que o maior valor possível assumido por $\eta_3^{\partial\Omega}$ é 1, obtemos

$$\begin{aligned} \bar{k}_{\partial\Lambda}(p) &\geq \frac{\bar{k}(q) - \eta_3^{\partial\Omega}}{\sqrt{(1 + K^2)^3}} + \eta_3^{\partial\Lambda} \\ &\geq \frac{\bar{k}(q) - 1}{\sqrt{(1 + K^2)^3}} + \eta_3^{\partial\Lambda} \\ &\geq \frac{\bar{k}(q) - 1}{\sqrt{(1 + K^2)^3}} - \sqrt{1 - h^2} \\ &= \frac{\bar{k}(q) - 1 - \sqrt{1 - h^2}\sqrt{(1 + K^2)^3}}{\sqrt{(1 + K^2)^3}} \\ &= \frac{\bar{k}(q) - \sqrt{(1 - h^2)(1 + K^2)^3} - 1}{\sqrt{(1 + K^2)^3}}, \end{aligned}$$

o que prova (3.4). □

Salientamos que ocuparemos somente a desigualdade (3.3) do lema anterior. Porém provamos (3.4), pois é um resultado interessante que relaciona a curvatura hiperbólica em $\partial\Lambda$ com a curvatura hiperbólica em $\partial\Omega$, em termos da constante K e da curvatura média de Σ .

Outro resultado utilizado na demonstração do teorema 3.2.1 é seguinte proposição:

Proposição 3.2.1 *Seja $\Omega \subset \mathbb{P}$ um domínio limitado, simplesmente conexo e de classe $C^{2,\alpha}$. Seja \bar{k} a curvatura da $\partial\Omega$ com respeito a orientação interna. Seja Σ uma superfície equidistante em \mathbb{U}^3 dada como gráfico parabólico de uma função $\pi : \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{R}$, tal que $|\nabla\pi| = K$ e seja h a curvatura média de Σ . Dado $|h| < \bar{H}$, se*

$$\bar{k} > \delta(\bar{H} + 1)(1 + K^2)^2 + 1 \tag{3.5}$$

onde $\delta = e^{\text{diam}(\Omega)}$, então existe $u \in C^{2,\alpha}(\Omega)$ solução de $Q_{\bar{H}}^*(u) = 0$, tal que $\partial\text{Graf}_P(u) = \partial\Lambda$, onde $\Lambda = C(\Omega) \cap \Sigma$.

Demonstração:

Em \mathbb{U}^3 , temos $\Lambda = (\Omega \times \mathbb{R}) \cap \Sigma$. Sejam k e $k_{\partial\Lambda}$ a curvatura da $\partial\Omega$ e $\partial\Lambda$ em \mathbb{R}^3 ; \bar{k} e $\bar{k}_{\partial\Lambda}$ a curvatura da $\partial\Omega$ e $\partial\Lambda$ em \mathbb{H}^3 ; $\eta^{\partial\Omega} = (\eta_1^{\partial\Omega}, \eta_2^{\partial\Omega}, \eta_3^{\partial\Omega})$ e $\eta^{\partial\Lambda} = (\eta_1^{\partial\Lambda}, \eta_2^{\partial\Lambda}, \eta_3^{\partial\Lambda})$ o vetor unitário normal a $\partial\Omega$ e $\partial\Lambda$ no sentido euclidiano, apontando para Ω e Λ , respectivamente.

Afirmamos que $k > 0$. Com efeito, pondo $d_{\mathbb{H}} : \mathbb{H}^3 \times \mathbb{H}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ a distância hiperbólica, o diâmetro de $\Omega \subset \mathbb{P}$ é definido por

$$diam(\Omega) = Sup\{d_{\mathbb{H}}(p, q); p, q \in \bar{\Omega}\}$$

e considere

$$\delta = e^{diam(\Omega)}. \quad (3.6)$$

Tomando

$$(x_3^{\partial\Omega})^m = min\{x_3; (x_1, 0, x_3) \in \partial\Omega\}$$

e

$$(x_3^{\partial\Omega})^M = max\{x_3; (x_1, 0, x_3) \in \partial\Omega\},$$

então

$$\sigma = \frac{(x_3^{\partial\Omega})^M}{(x_3^{\partial\Omega})^m} \leq \delta,$$

onde δ é dado por (3.6).

De (3.5) e como $k = \frac{\bar{k} - \eta_3^{\partial\Omega}}{x_3}$ então

$$\begin{aligned} k &> \frac{\delta(\bar{H} + 1)(1 + K^2)^2 + 1 - \eta_3^{\partial\Omega}}{x_3} \\ &\geq \frac{(x_3^{\partial\Omega})^M}{(x_3^{\partial\Omega})^m} \frac{(\bar{H} + 1)(1 + K^2)^2 + 1 - \eta_3^{\partial\Omega}}{x_3} \\ &= \frac{(x_3^{\partial\Omega})^M (\bar{H} + 1)(1 + K^2)^2 + (1 - \eta_3^{\partial\Omega})(x_3^{\partial\Omega})^m}{x_3 (x_3^{\partial\Omega})^m} \\ &\geq \frac{(x_3^{\partial\Omega})^M (\bar{H} + 1)(1 + K^2)^2}{x_3 (x_3^{\partial\Omega})^m} \\ &> 0, \end{aligned} \quad (3.7)$$

pois $(1 - \eta_3^{\partial\Omega})(x_3^{\partial\Omega})^m \geq 0$, tendo em vista que $1 > \eta_3^{\partial\Omega}$ e $(x_3^{\partial\Omega})^m > 0$.

Dado $p \in \partial\Lambda$, consideremos o círculo euclidiano C_p em Σ , tangente a $\partial\Lambda$ em p e cuja curvatura em \mathbb{R}^3 é

$$k_p = \frac{k_m}{\sqrt{(1 + K^2)^3}}, \quad (3.8)$$

onde

$$k_m = \mathop{\text{min}}_{\partial\Omega} k.$$

De (3.3), para todo ponto $p = (x_1, \pi(x_1, x_3), x_3) \in \partial\Lambda$

$$k_{\partial\Lambda}(p) \geq \frac{k(q)}{\sqrt{(1 + K^2)^3}} \geq \frac{k_m}{\sqrt{(1 + K^2)^3}} = k_p,$$

onde $q = (x_1, 0, x_3) \in \partial\Omega$. Logo, como $k_{\partial\Lambda}(p) \geq k_p$, podemos escolher o círculo C_p tal que Λ está contido na componente conexa limitada de Σ cujo bordo é C_p .

Seja S_p a esfera euclidiana de raio R cuja interseção com Σ é C_p e tal que $T_p(\partial\Omega \times \mathbb{R})$ é tangente a S_p em p . Note que o plano determinado pelo centro O de S_p , pelo centro O' do círculo C_p em Σ e por p , é ortogonal a Σ e é ortogonal a $T_p(\partial\Omega \times \mathbb{R})$.

Assim, a distância euclidiana entre o centro de S_p e o centro de C_p é dado por

$$\overline{Op}^2 = \overline{OO'}^2 + \overline{pO'}^2. \quad (3.9)$$

Logo,

$$R^2 = d(O, O')^2 + r^2 \implies d(O, O') = \sqrt{R^2 - r^2},$$

onde

$$r = \frac{1}{k_p}.$$

Além disso, considerando θ o ângulo entre Σ e \mathbb{P}

$$K = \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{\frac{\sqrt{R^2 - r^2}}{R}}{\frac{r}{R}} = \frac{\sqrt{R^2 - r^2}}{r},$$

ou seja,

$$\begin{aligned} Kr &= \sqrt{R^2 - r^2} \implies (Kr)^2 = R^2 - r^2 \implies \\ R &= \sqrt{r^2(K^2 + 1)} \implies R = r\sqrt{K^2 + 1} \implies r = \frac{R}{\sqrt{K^2 + 1}}. \end{aligned}$$

Como $k_p = \frac{k_m}{\sqrt{(1 + K^2)^3}}$, $r = \frac{1}{k_p}$ e $R = r\sqrt{K^2 + 1}$ obtemos

$$\begin{aligned} \frac{k_m}{\sqrt{(1 + K^2)^3}} &= \frac{1}{r} \implies \frac{k_m}{\sqrt{(1 + K^2)^3}} = \frac{1}{\frac{R}{\sqrt{K^2 + 1}}} \implies \\ \implies R &= \frac{\sqrt{K^2 + 1}}{k_m} \sqrt{(1 + K^2)^3} = \frac{(1 + K^2)^2}{k_m}. \end{aligned}$$

Denotamos S_p^+ a parte de S_p que está no semi-espaço determinado por Σ para a qual e_2 aponta e por S_p^- a parte de S_p no outro lado de Σ .

Se $\rho \geq R$, denotamos por \mathbb{S}_p a esfera euclidiana de raio ρ cuja interseção com Σ é C_p e tal que \mathbb{S}_p^+ está contido no fecho da região limitada por S_p^+ e Σ , notemos que temos duas esferas euclidianas de raio ρ passando por C_p se $\rho > R$, uma delas com as características mencionadas. Uma ilustração desta situação pode ser observada pela Figura 3.2 abaixo.

Desta forma, $S_p^+ \cap (\bar{\Omega} \times \mathbb{R})$ é gráfico parabólico de uma função real suave s_p^+ sobre $\bar{\Omega}$ tal que $s_p^+(q) = \pi(q)$, isto é,

$$p \in \text{Gra}f_P(s_p^+) = \{(x_1, s_p^+(x_1, x_3), x_3); (x_1, 0, x_3) \in \Omega\}.$$

Além disso, se $R < \rho$ então

$$\text{Sup}_{\bar{\Omega}} |\nabla s_p^+| \leq L_p,$$

onde L_p é uma constante que depende de p , já que o gráfico de S_p^+ é transversal a $C(\partial\Omega)$.

Daí a curvatura média euclidiana H^p de $\text{Gra}f_P(s_p^+)$ satisfaz

$$H^p = \frac{1}{\rho} \leq \frac{1}{R} = \frac{k_m}{(1 + K^2)^2}.$$

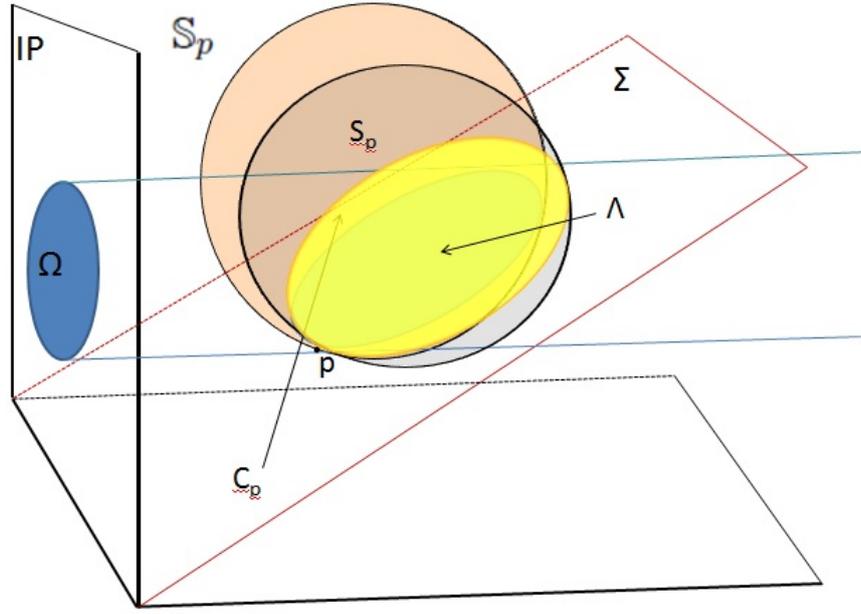


Figura 3.2: Ilustração da situação descrita

Seja \bar{H}^p a curvatura média hiperbólica de $\text{Graf}_P(s_p^+)$. Como $R \leq \rho$ então

$$\frac{1}{\rho} \leq \frac{1}{R}.$$

Então,

$$\bar{H}^p = x_3 \frac{1}{\rho} + \eta_3 \leq x_3 \frac{k_m}{(1 + K^2)^2} + \eta_3 \quad (3.10)$$

onde η_3 é a terceira coordenada do vetor unitário normal a \mathbb{S}_p^+ , apontando para o interior da região limitada por \mathbb{S}_p^+ e x_3 é a terceira coordenada do ponto do gráfico, observe que

$$(x_3^{\partial\Omega})^m \leq x_3 \leq (x_3^{\partial\Omega})^M. \quad (3.11)$$

Pelas hipóteses, temos que

$$\begin{aligned} \bar{k} &> \frac{(x_3^{\partial\Omega})^M}{(x_3^{\partial\Omega})^m} (\bar{H} + 1)(1 + K^2)^2 + 1 \\ &\geq \frac{(x_3^{\partial\Omega})^M}{(x_3^{\partial\Omega})^m} (\bar{H} + 1)(1 + K^2)^2 + \eta_3^{\partial\Omega} \\ &\geq \frac{x_3^{\partial\Omega}}{(x_3^{\partial\Omega})^m} (H + 1)(1 + K^2)^2 + \eta_3^{\partial\Omega}. \end{aligned}$$

Por outro lado, usando (3.11) e como $\bar{k} = kx_3^{\partial\Omega} + \eta_3^{\partial\Omega}$, obtemos

$$\begin{aligned}
kx_3^{\partial\Omega} + \eta_3^{\partial\Omega} &> \frac{x_3^{\partial\Omega}}{(x_3^{\partial\Omega})^m} (\bar{H} + 1)(1 + K^2)^2 + \eta_3^{\partial\Omega} \implies \\
k &> \frac{1}{(x_3^{\partial\Omega})^m} (\bar{H} + 1)(1 + K^2)^2 \implies \\
k \geq k_m &> \frac{(\bar{H} + 1)(1 + K^2)^2}{(x_3^{\partial\Omega})^m} \\
&\geq \frac{(\bar{H} + 1)(1 + K^2)^2}{x_3} \\
&\geq \frac{(\bar{H} - \eta_3)(1 + K^2)^2}{x_3}. \tag{3.12}
\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
k_m &> \frac{(\bar{H} - \eta_3)(1 + K^2)^2}{x_3} \implies \\
\frac{k_m}{(1 + K^2)^2} x_3 &> \bar{H} - \eta_3 \implies \\
\frac{k_m}{(1 + K^2)^2} x_3 + \eta_3 &> \bar{H}.
\end{aligned}$$

Desta forma por (3.10), existe $\rho > R$ tal que

$$\bar{H}^\rho \geq \bar{H}, \tag{3.13}$$

ou seja, $\bar{H}^\rho \geq \bar{H}$.

Então, para tal ρ , $\text{Graf}_P(s_p^+)$ tem curvatura média \bar{H}^ρ tal que $\bar{H}^\rho \geq \bar{H}$. Tomando

$$B = \{t \in [0, 1]; \exists u_t \in C^{2,\alpha}(\Omega), Q_{\bar{H}}^*(u_t) = 0, u_t|_{\partial\Omega} = t\pi\}$$

e considerando $\Sigma_t = \text{Graf}_P(t\pi)$, $\Lambda_t = (\Omega \times \mathbb{R}) \cap \Sigma_t$ então $tK = \tan \theta_t \leq K$ onde θ_t é o ângulo entre Σ_t e \mathbb{P} .

Assim, por (3.3),

$$k_{\partial\Lambda}(p) \geq \frac{k(q)}{\sqrt{(1 + t^2 K^2)^3}} \geq \frac{k_m}{\sqrt{(1 + t^2 K^2)^3}} \geq \frac{k_m}{\sqrt{(1 + K^2)^3}} = k_p.$$

Logo, dado $p_t \in \partial\Lambda_t$, procedemos como acima, tomando o círculo $C_{p,t}$ de raio $1/k_p$ tangente a $\partial\Lambda_t$ em p_t e tal que Λ_t está contido no fecho da componente conexa limitada de Σ_t cujo bordo é $C_{p,t}$.

Assim, segue que existe uma esfera euclidiana $\mathbb{S}_{p,t}$ obtida da mesma forma como foi obtida \mathbb{S}_p , tal que o raio de $\mathbb{S}_{p,t}$ é $\rho' \leq \rho$, e $\mathbb{S}_{p,t}^+ \cap (\bar{\Omega} \times \mathbb{R})$ é o gráfico parabólico de uma função suave $s_{p,t}^+$ sobre Ω , com

$$\sup_{\bar{\Omega}} |\nabla s_{p,t}^+| \leq L_{p,t}$$

Além disso, como $\rho' \leq \rho$, de (3.13) obtemos que a curvatura média \bar{H}_t de $\text{Graf}_P(s_{p,t}^+)$ é maior ou igual a \bar{H} . Pelo princípio do máximo (Teorema 1.1.3) e como $s_{p,t}^+$ é tal que $Q_{\bar{H}_t}(s_{p,t}^+) = 0$, então $Q_{\bar{H}}(s_{p,t}^+) \leq 0$.

Logo, $s_{p,t}^+$ é barreira “por cima” para $Q_{\bar{H}}$ em p_t e, como uma barreira “por baixo”, usamos os planos equidistantes dados por $t\pi$, visto que sua curvatura média h_t satisfaz $|h_t| \leq |h| \leq \bar{H}$.

Como $[0, 1]$ e $\partial\Lambda_t$ são compactos, existe $0 \leq L < \infty$ tal que

$$L = \sup\{L_{p_t}; p_t \in \partial\Lambda_t, t \in [0, 1]\}. \quad (3.14)$$

Pela hipótese (3.5), obtemos

$$\begin{aligned} \bar{k} > (\bar{H} + 1)(1 + K^2)^2 + 1 &\implies \frac{\bar{k} - 1}{(1 + K^2)^2} > \bar{H} + 1 \implies \frac{\bar{k} - 1}{(1 + K^2)^2} - 1 > \bar{H} \\ \therefore \bar{k} > \frac{\bar{k} - 1}{(1 + K^2)^2} - 1 &> \bar{H}. \end{aligned}$$

Como $|h| \leq \bar{H} < \bar{k}$ e $\bar{k} > 1$, pelo Teorema 1.1.12 existe $u_0 \in C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$ tal que $Q_{\bar{H}}^*(u_0) = 0$ em Ω com $u_0|_{\partial\Omega} = 0$. Então, $B \neq \emptyset$.

Para ver que B é aberto basta aplicar o Teorema das Funções Implícitas, tendo em vista que

$$\begin{aligned} T : \mathbb{R} \times C_0^{2,\alpha}(\bar{\Omega}) &\longrightarrow C^\alpha(\bar{\Omega}) \\ (t, w) &\longmapsto Q_{t\bar{H}}(w + t\varphi) \end{aligned}$$

com $\varphi \in C^{2,\alpha}(\partial\Omega)$ dada *a priori*, é de classe C^1 e

$$D_2T(t_0, w_0) = L_{\bar{H}}; C_0^{2,\alpha}(\bar{\Omega}) \longrightarrow C^\alpha(\bar{\Omega})$$

é um homeomorfismo linear ($L_{\overline{H}}$ linear, contínuo e bijetiva com $L_{\overline{H}}^{-1}$ linear e contínua).

Afirmção: B é fechado. Com efeito, usando a teoria de equações diferenciais parciais elípticas de [16], particularmente a resumida no Teorema 1.1.2, temos que o fechamento de B é uma consequência de

$$\sup_{\overline{\Omega}} |\nabla s_{p,t}^+| \leq L, \quad (3.15)$$

para todo $t \in [0, 1]$ e todo $p_t \in \partial\Lambda_t$ e

$$\sup_{\overline{\Omega}} |\nabla(t\pi)| \leq K. \quad (3.16)$$

Desta forma, mostramos que B é não-vazio, fechado e aberto. Então, existe $u \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ tal que $Q_{\overline{H}}^* = 0$ e $u|_{\partial\Omega} = \pi|_{\partial\Omega}$.

Portanto, existe $u \in C^{2,\alpha}(\Omega)$ solução de $Q_{\overline{H}}^* = 0$, tal que $\partial Graf_P(u) = \partial\Lambda$, onde $\Lambda = C(\Omega) \cap \Sigma$.

□

Passamos agora à demonstração do Teorema 3.2.1, que é o nosso principal resultado no contexto hiperbólico.

Demonstração do Teorema 3.2.1:

Suponhamos, sem perda de generalidade, que $(x_3^{\partial\Omega})^m \geq 1$. Se não for o caso, basta reduzir à situação descrita, considerando uma isometria do tipo hiperbólico, ou seja, uma homotetia euclidiana com centro em $(0, 0, 0)$ no modelo em que estamos trabalhando.

Por hipótese, (Ω, φ) satisfazem a condição de declividade limitada com constante K , então para cada $p = (x_1, \varphi(x_1, x_3), x_3) \in Graf_P(\varphi)$ seja $\pi_p^\pm : \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{R}$ conforme a Definição (3.1.1), isto é, neste contexto são funções lineares afins tais que $|\nabla \pi_p^\pm| \leq K$ (Notemos que este gradiente é euclidiano. Sabemos que $|grad \pi_p^+| = x_3 |\nabla \pi_p^+|$ e como $x_3 > 1$, podemos trabalhar com $|\nabla \pi_p^\pm|$).

Afirmamos que para qualquer $p \in \text{Graf}_P(\varphi)$, o ângulo θ entre $\text{Graf}_P(\pi_p^+)$ e \mathbb{P} e o ângulo σ entre $\text{Graf}_P(\pi_p^+)$ e o plano $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3; x_3 = 0\}$, ou equivalentemente, o ângulo θ entre $\text{Graf}_P(\pi_p^-)$ e \mathbb{P} e o ângulo σ entre $\text{Graf}_P(\pi_p^-)$ e o plano $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3; x_3 = 0\}$, satisfaz

$$\frac{\pi}{2} - \theta \leq \sigma \leq \frac{\pi}{2}.$$

Com efeito, tome $\eta_2 = (0, \beta, 0)$ e $\eta_3 = (0, 0, \gamma)$, $\beta, \gamma = \pm 1$, vetores normais a \mathbb{P} e a $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3; x_3 = 0\}$, respectivamente.

Como $\theta \neq \frac{\pi}{2}$, suponhamos $\eta_1 = (A, \alpha, B)$, $\alpha \neq 0$, como o vetor normal a $\text{Graf}_P(\pi_p^\pm)$. Por definição, o ângulo entre dois planos é o menor ângulo entre eles, logo

$$0 \leq \sigma \leq \frac{\pi}{2} \quad (3.17)$$

e

$$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}. \quad (3.18)$$

Se o conjunto $A = \{\eta_1, \eta_2, \eta_3\}$ é linearmente dependente, a afirmação é óbvia.

Suponhamos então que A seja linearmente independente. Assim, é possível escolher α, β e γ tal que os elementos do conjunto A formam um ângulo triedro (que é limitado por três planos), cujas medidas dos ângulos das faces são θ, σ e $\frac{\pi}{2}$.

Das propriedades de um ângulo triedro, temos que qualquer face é menor que a soma das outras duas, desta forma $\frac{\pi}{2} < \theta + \sigma$. Segue que $\frac{\pi}{2} - \theta < \sigma$ e de (3.17)

$$\frac{\pi}{2} - \theta < \sigma \leq \frac{\pi}{2},$$

provando nossa afirmação.

Como $h = \cos \sigma$ e $\tan \theta \leq K$, a curvatura média h de $\text{Graf}_P(\pi_p^\pm)$ é tal que

$$\begin{aligned} 0 \leq |h| = \cos \sigma &\leq \cos \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) \\ &\leq \cos \left(\frac{\pi}{2} - \arctan K \right) \\ &= \sin(\arctan K) \\ &= \sin \left(\arcsin \frac{K}{\sqrt{K^2 + 1}} \right) = \frac{K}{\sqrt{K^2 + 1}}. \end{aligned}$$

Por hipótese, (Ω, φ) satisfazem a condição de declividade limitada com constante $K \geq 0$. Logo, como é fácil ver, $(\Omega, t\varphi)$ também satisfazem a condição de declividade limitada com constante $tK \geq 0$, onde $tK \leq K$. Em particular, as funções $t\pi_p^\pm$ estão de acordo com o contexto da Definição 3.1.1 para $(\Omega, t\varphi)$ nos pontos

$$p_t = (x_1, t\varphi(x_1, x_3), x_3) \in \text{Graf}_P(t\varphi)$$

e satisfazem

$$|\nabla t\pi_p^\pm| \leq tK.$$

Seja $\Lambda_{p,t}^+ = \text{Graf}_P(t\pi_p^+) \cap (\Omega \times \mathbb{R})$ e defina

$$B = \{t \in [0, 1]; \exists u_t \in C^{2,\alpha}(\Omega), Q_{\bar{H}}^*(u_t) = 0, u_t|_{\partial\Omega} = t\varphi\}.$$

Cabe ressaltar que cada $p_t \in \partial\Lambda_{p,t}^+ \subset \text{Graf}_P(t\pi_p^\pm)$ e de (3.5) segue que

$$\begin{aligned} \bar{k} &> \delta(\bar{H} + 1)(1 + K^2)^2 + 1 \\ &\geq \delta(\bar{H} + 1)(1 + t^2 K^2)^2 + 1. \end{aligned}$$

Pela Proposição 3.2.1, temos garantido a existência de uma função $u_{p,t}^+ \in C^{2,\alpha}(\Omega)$ solução de $Q_{\bar{H}}^* = 0$ em Ω com $u_{p,t}^+|_{\partial\Omega} = t\pi_p^+$ e, além disso,

$$\sup_{\bar{\Omega}} |\nabla(u_{p,t}^+)| \leq L_{p,t}.$$

Pela compacidade de $[0, 1]$ e $\text{Graf}_P(\varphi)$ temos que

$$\sup_{\bar{\Omega}} |\nabla(u_{p,t}^+)| \leq L \leq \max\{L, K\} \quad (3.19)$$

para todo $p \in \text{Graf}_P(\varphi)$ e $t \in [0, 1]$.

Por outro lado, a curvatura média $h_{p,t}$ de $\text{Graf}_P(t\pi_p^-)$ satisfaz

$$|h_{p,t}| \leq |h| \leq \frac{K}{\sqrt{K^2 + 1}} := h_0$$

e, além disso, $|\nabla t\pi_p^-| \leq tK$ em $\bar{\Omega}$.

Assim,

$$\sup_{\bar{\Omega}} |\nabla(t\pi_p^-)| \leq K \leq \max\{L, K\} \quad (3.20)$$

para todo $p \in \text{Graf}_P(\varphi)$ e $t \in [0, 1]$.

De (3.19) e (3.20), segue uma estimativa *a priori* para o gradiente no bordo de qualquer solução u de $Q_{\overline{H}}^*(u) = 0$ em Ω com $u|_{\partial\Omega} = t\varphi$, para todo $t \in [0, 1]$, dado por

$$\sup_{\partial\Omega} |\nabla u| \leq \max\{L, K\}. \quad (3.21)$$

Pelo Lema 1.1.2 temos que (3.21) vale em todo Ω , e pelo Lema 1.1.3 obtemos estimativas uniformes C^1 de qualquer solução de $Q_{\overline{H}}^*(u) = 0$ em Ω com $u|_{\partial\Omega} = t\varphi$, para qualquer $t \in [0, 1]$.

Da Proposição 3.2.1 sabemos que $k > 1$ e $|h| \leq \overline{H} < \overline{k}$. Então $h_0 \leq \overline{H} < \overline{k}$ e, pelo Teorema 1.1.12, segue que $B \neq \emptyset$.

Agora é consequência imediata do Método da Continuidade, Teorema 1.1.2, que existe uma solução $u \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ de $Q_{\overline{H}}^* = 0$ satisfazendo $u|_{\partial\Omega} = \varphi$.

A unicidade é uma consequência do Princípio do Máximo para a diferença de duas soluções, Teorema 1.1.6, relativa ao operador (1.10).

Com efeito, tome u_1, u_2 soluções de $Q_{\overline{H}}^* = 0$ satisfazendo $u_1|_{\partial\Omega} = \varphi$ e $u_2|_{\partial\Omega} = \varphi$. Então, pondo $w = u_1 - u_2$, temos pela Proposição 1.1.3 que $L(u) \geq 0$, onde L é um operador linear elíptico da forma (1.6) com $c = 0$.

Como $w|_{\partial\Omega} = (u_1 - u_2)|_{\partial\Omega} = 0$, segue pelo Teorema 1.1.3 que

$$\begin{aligned} \sup_{\Omega} w = \sup_{\partial\Omega} w = 0 &\implies \\ u_1 - u_2 = 0 \text{ em } \Omega &\implies \\ u_1 = u_2 \text{ em } \Omega. & \end{aligned}$$

□

3.3 Um exemplo não contemplado na extensão do Teorema de Serrin para gráficos parabólicos

Com o objetivo de esclarecer o Teorema 3.2.1, exibiremos um exemplo de conjunto $\Omega \subset \mathbb{P}$ que satisfaz as seguintes propriedades:

(i) a curvatura satisfaz $\bar{k} > \delta(\bar{H} + 1)(1 + K^2)^2 + 1$ para algum $K \geq 0$ e

$$\bar{H} \geq \frac{K}{\sqrt{K^2 + 1}}$$

(ii) a curvatura média \bar{H}_C de $C(\partial\Omega)$ satisfaz $\bar{H}_C < \bar{H}$.

Considere o disco euclidiano de centro $c = \left(0, 0, \frac{99}{100}\right)$ com raio euclidiano $\rho = \frac{1}{100}$.

Notemos que

- $x_3^m = c - \rho = \frac{49}{50}$

- $x_3^M = c + \rho = 1$

- a curvatura euclidiana da $\partial\Omega$ é $k_{\partial\Omega} = \frac{1}{\rho} = 100$

- a curvatura média euclidiana de $C(\partial\Omega)$ é

$$H_C = \frac{1}{2}(k_1 + k_2) = \frac{1}{2}(0 + 100) = 50$$

O diâmetro hiperbólico de Ω é dado por,

$$diam(\Omega) = \ln\left(\frac{x_3^M}{x_3^m}\right) = \ln\left(\frac{50}{49}\right)$$

e daí,

$$\delta = e^{diam(\Omega)} = e^{\ln\left(\frac{51}{50}\right)} = \frac{50}{49}$$

Seja $\bar{k}_{\partial\Omega}$ a curvatura da $\partial\Omega$ em \mathbb{H}^3 . Como $\bar{k}_{\partial\Omega} = x_3 k_{\partial\Omega} + \eta_3$, em $(0, 0, 1)$ temos

$$\bar{k}_{\partial\Omega} = 1 \cdot 100 - 1 = 99.$$

Queremos K tal que

$$\frac{K}{\sqrt{K^2 + 1}} \leq \bar{H}$$

e $\delta(\bar{H} + 1)(1 + K^2)^2 + 1 < 99$.

Notemos que de $\delta(\overline{H} + 1)(1 + K^2)^2 + 1 < 99$ resulta

$$\begin{aligned}\overline{H} + 1 &< \frac{98}{\delta(1 + K^2)^2} \\ \overline{H} &< \frac{98}{\frac{(x_3^{\partial\Omega})^M}{(x_3^{\partial\Omega})^m} (1 + K^2)^2} - 1 \\ \overline{H} &< \frac{100}{\frac{50}{\frac{49}{1}(1 + K^2)^2}} - 1 \\ \overline{H} &< \frac{98.49}{50(1 + K^2)^2} - 1\end{aligned}$$

Por exemplo para $K = 1/10$ temos que

$$\frac{98.49}{50(1 + (1/10)^2)^2} - 1 \simeq 93,14763.$$

Assim, para $K = 1/10$ como

$$\frac{K}{\sqrt{K^2 + 1}} = \frac{\sqrt{101}}{101},$$

para qualquer \overline{H} tal que

$$\frac{\sqrt{101}}{101} < \overline{H} < 93,14763,$$

temos $\overline{k}_{\partial\Omega} > \delta(\overline{H} + 1)(1 + K^2)^2 + 1$.

Além disso, como Ω é estritamente convexo no caso euclidiano, dado $K \geq 0$ existe $\varphi \in C^{2,\alpha}(\partial\Omega)$ tal que (Ω, φ) satisfazem a condição de declividade limitada com constante K (basta tomar $\varphi = \pi|_{\partial\Omega}$, onde π é uma função linear afim com declividade K).

Segue do Teorema 3.2.1 que para tais Ω e φ , existe $u \in C^{2,\alpha}(\partial\Omega)$ solução de $Q_{\overline{H}}^* = 0$ em Ω com $u|_{\partial\Omega} = \varphi$.

Notemos também que a curvatura média de $C(\partial\Omega)$ é

$$\overline{H}_C = x_3 H_C + \eta_3 \leq x_3^M H_C + \eta_3^M = 1.50 + 1 = 51$$

onde H_C é a curvatura média euclidiana de $C(\partial\Omega)$.

Então, para \bar{H} tal que $51 < \bar{H} < 93,14763$, por exemplo, temos que $\bar{H}_C < \bar{H}$.

Portanto temos um caso que não é contemplado pelo Teorema 0.0.2 e cujo dado no bordo não é nulo.

Capítulo 4

Gráficos Radiais de CMC em \mathbb{R}^3 com dado no bordo satisfazendo a CDL

Neste capítulo estudamos problemas de existência e unicidade de gráficos radiais de curvatura média constante em \mathbb{R}^3 com bordo prescrito satisfazendo a condição de declividade limitada radial.

Um estudo pioneiro sobre gráficos radiais de curvatura média constante foi o trabalho [29] de James Serrin, cujo principal resultado Teorema 0.0.3, já mencionado na introdução, repetimos a seguir:

“Sejam $\Omega \subset \mathbb{S}^2$ um domínio convexo de classe $C^{2,\alpha}$ cujo fecho está contido em um hemisfério aberto de \mathbb{S}^2 , $\phi \in C^{2,\alpha}(\partial\Omega)$ positiva e H uma constante real não positiva. Se a curvatura geodésica k de $\partial\Omega$ é tal que

$$k(q) \geq -2H\phi(q) \tag{4.1}$$

para todo $q \in \partial\Omega$, então o sistema

$$\begin{cases} u \in C^{2,\alpha}(\bar{\Omega}) \\ Q_H^\bullet(u) = 0 \\ u|_{\partial\Omega} = \phi \end{cases} \quad (4.2)$$

tem única solução, onde Q_H^\bullet é o operador curvatura média constante radial dado por (1.13)".

Notemos que se (4.1) não ocorre, ainda assim existem dados contínuos no bordo φ , para os quais o problema (4.2) não tem solução.

Desta forma, é conveniente questionar: Se (4.1) não ocorre, é possível caracterizar uma família de domínios e dados no bordo neste contexto onde ainda podemos garantir a existência de solução de (4.2)?

Observamos que como $\varphi \in C^{2,\alpha}(\partial\Omega)$ e Ω é de classe $C^{2,\alpha}$, é aplicável ao problema (4.2) a ferramenta dada pelo Teorema 1.1.2, considerando a mudança funcional dada no Lema 1.2.1.

4.1 A condição de declividade limitada para gráficos radiais em \mathbb{R}^3

Com a intenção de responder o nosso questionamento anterior, vamos definir a condição de declividade limitada no contexto radial. Esta condição nos direcionará ao encontro de soluções descritas no problema (4.2) que não estão necessariamente contempladas no Teorema de Serrin (Teorema 0.0.3).

Uma representação gráfica da condição de declividade limitada radial pode ser observada pela Figura 4.1.

Precisamente:

Definição 4.1.1 *Seja Ω um domínio contido em \mathbb{S}^2 , ϕ uma função definida em $\partial\Omega$. Dizemos que Ω e ϕ satisfazem a condição de declividade limitada radial de constante*

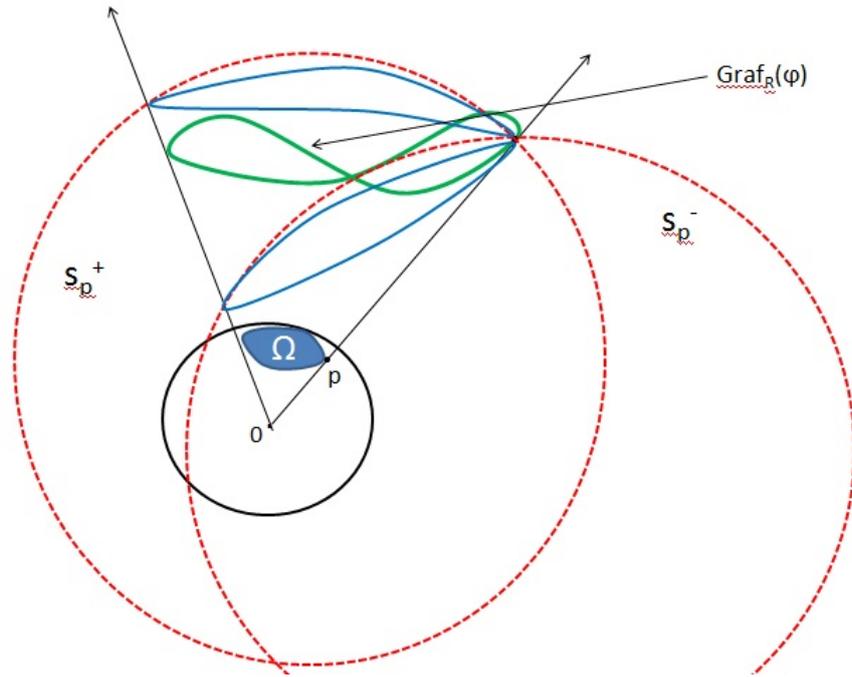


Figura 4.1: CDLR - condição de declividade limitada radial

$K \geq 0$, se para cada ponto $p \in \partial\Omega$ existe funções π_p^+ e π_p^- definidas em \mathbb{S}^2 , cujos gráficos radiais são esferas, tais que:

- (i) $\pi_p^+(p) = \phi(p) = \pi_p^-(p)$
- (ii) $\pi_p^-(q) \leq \phi(q) \leq \pi_p^+(q), \forall q \in \partial\Omega$
- (iii) $|\nabla\pi_p^\pm| \leq K$

Na condição (iii), o gradiente é tomado em relação a métrica de \mathbb{S}^2 .

4.2 Um resultado de existência e unicidade para gráficos radiais de CMC não necessariamente contemplado no Teorema de Serrin

O resultado principal deste capítulo é o teorema abaixo, que responde nosso questionamento anterior.

Teorema 4.2.1 *Sejam $\Omega \subset \mathbb{S}^2$ um domínio estritamente convexo de classe $C^{2,\alpha}$ contido em um hemisfério de \mathbb{S}^2 , k_g a curvatura geodésica de $\partial\Omega$, $H \leq 0$, $K \geq 0$. Suponhamos que $\phi \in C^{2,\alpha}(\partial\Omega)$, $\phi > 0$, satisfaz a condição de declividade limitada radial de constante K . Se*

$$-H\sqrt{(K^2+1)^3} \sup \phi + 2K(K^2+2) < k_g \quad (4.3)$$

então o problema (4.2) tem única solução.

Ressaltemos que este teorema não é uma consequência do Teorema de Serrin (Teorema 0.0.3), tendo em vista que dado $H < 0$, existem $K > 0$ e ϕ satisfazendo a condição de declividade limitada de constante K tal que

$$-H\sqrt{(K^2+1)^3} \sup \phi + 2K(K^2+2) < k_g - 2H\phi \sup.$$

Por outro lado, a condição (4.3) não implica na (4.1) para $K \approx 0$.

Notemos que o Teorema 4.2.1 foi também inspirado no Teorema 1 de [26] e, além disso, note que o domínio não precisa estar contido em um hemisfério aberto de \mathbb{S}^2 , como no Teorema de Serrin .

Para provar o Teorema 4.2.1, começamos com a demonstração do seguinte lema.

Lema 4.2.1 *Sejam $\Omega \subset \mathbb{S}^2$ um domínio estritamente convexo de classe $C^{2,\alpha}$ contido em um hemisfério de \mathbb{S}^2 , k_g a curvatura geodésica de $\partial\Omega$ e $K \geq 0$. Suponhamos que $\phi \in C^{2,\alpha}(\partial\Omega)$ satisfaz a condição de declividade limitada radial de constante K . Então*

$$k_\Gamma \geq \frac{k_g - 2K}{\sup \phi (K^2 + 1)}, \quad (4.4)$$

onde k_Γ denota a curvatura geodésica de $\Gamma = C(\partial\Omega) \cap \mathbb{S}_p^-(R)$, sendo $\mathbb{S}_p^-(R)$ o gráfico radial sobre \mathbb{S}^2 de uma função π_p^- conforme Definição 4.1.1.

Demonstração:

Seja $\gamma(s)$ uma parametrização de $\partial\Omega$ pelo comprimento de arco tal que $\gamma(0) = z_0$ e seja k_γ a curvatura geodésica de γ em \mathbb{S}^2 , ou seja $k_\gamma = k_g$.

Como Γ é gráfico radial sobre $\partial\Omega$, temos que

$$\Gamma(s) = e^{f(\gamma(s))}\gamma(s)$$

para alguma função $f : \partial\Omega \rightarrow (-1, \infty)$. Escolhendo a orientação de Γ para a qual $k_\gamma > 0$ e omitindo os parâmetros, temos da fórmula clássica pra curvatura média que (ver [3], p. 115)

$$\begin{aligned} k_\Gamma &= \frac{1}{|\Gamma'|^3} \langle \Gamma'', N \times \Gamma' \rangle \\ &= \frac{1}{|\Gamma'|^3} \langle \Gamma'', \frac{\vec{b}\Gamma}{|b\Gamma|} \times \Gamma' \rangle \\ &= \frac{1}{|\Gamma'|^3} \langle \Gamma'', \frac{\Gamma - b}{R} \times \Gamma' \rangle \\ &= \frac{-1}{|\Gamma'|^3 R} \langle \Gamma'' \times \Gamma', \Gamma - b \rangle \\ &= \frac{\langle \Gamma' \times \Gamma'', \Gamma - b \rangle}{|\Gamma'|^3 R}, \end{aligned} \tag{4.5}$$

onde $b \in \mathbb{R}^3$ é o centro de $\mathbb{S}_p^-(R)$.

Derivando Γ em relação a s obtemos:

$$\Gamma' = e^f(\gamma' + f'\gamma) \tag{4.6}$$

e, portanto,

$$\Gamma'' = e^f(\gamma'' + \gamma(f'' + f'^2) + 2f'\gamma'). \tag{4.7}$$

Como $\gamma' \times \gamma' = 0$ e $\gamma \times \gamma = 0$ pois são linearmente dependentes, de (4.6) e (4.7) obtemos

$$\begin{aligned}
\Gamma' \times \Gamma'' &= e^f(\gamma' + f'\gamma) \times e^f(\gamma'' + \gamma(f'' + f'^2) + 2f'\gamma') \\
&= e^f e^f [\gamma' \times \gamma'' + (f'' + f'^2)\gamma' \times \gamma + 2f'\gamma' \times \gamma' \\
&\quad + f'\gamma \times \gamma'' + (f'' + f'^2)\gamma \times \gamma + 2f'^2\gamma \times \gamma'] \\
&= e^{2f} [\gamma' \times \gamma'' + (f'' + f'^2)\gamma' \times \gamma + f'\gamma \times \gamma'' + 2f'^2\gamma \times \gamma'] \\
&= e^{2f} [\gamma' \times \gamma'' + (f'' + f'^2)\gamma' \times \gamma + f'\gamma \times \gamma'' - 2f'^2\gamma' \times \gamma] \\
&= e^{2f} [\gamma' \times \gamma'' + (f'' - f'^2)\gamma' \times \gamma + f'\gamma \times \gamma'']. \tag{4.8}
\end{aligned}$$

Observamos que podemos expressar k_γ por $k_\gamma = \langle \gamma'', N \times \gamma' \rangle$ tendo em vista que γ é parametrizada por comprimento de arco. Como a normal unitária à \mathbb{S}^2 é o próprio γ , tendo em vista que

$$N = \frac{\vec{0\gamma}}{|\vec{0\gamma}|} = \frac{\gamma - 0}{|\gamma|} = \frac{\gamma}{1} = \gamma \tag{4.9}$$

então $k_\gamma = \langle \gamma'', \gamma \times \gamma' \rangle$.

Note que

$$\gamma'' = -\gamma + k_\gamma \gamma \times \gamma', \tag{4.10}$$

pois

$$\begin{aligned}
\langle \gamma \times \gamma', \gamma'' \rangle &= \langle \gamma \times \gamma', -\gamma + k_\gamma \gamma \times \gamma' \rangle \\
&= \langle \gamma \times \gamma', -\gamma \rangle + k_\gamma \langle \gamma \times \gamma', \gamma \times \gamma' \rangle \\
&= 0 + k_\gamma |\gamma \times \gamma'|^2 = k_\gamma
\end{aligned}$$

onde, acima, utilizamos o fato de $\gamma \perp \gamma'$ então $\gamma \perp \gamma \times \gamma'$ e $|\gamma \times \gamma'| = \sin \theta |\gamma| |\gamma'|$ com $\theta = \pi/2$.

Segue de (4.8) e (4.10),

$$\begin{aligned}
\Gamma' \times \Gamma'' &= e^{2f}[\gamma' \times \gamma'' + (f'' - f'^2)\gamma' \times \gamma + f'\gamma \times \gamma''] \\
&= e^{2f}[\gamma' \times (-\gamma + k_\gamma \gamma \times \gamma') + (f'' - f'^2)\gamma' \times \gamma \\
&\quad + f'\gamma \times (-\gamma + k_\gamma \gamma \times \gamma')] \\
&= e^{2f}[-\gamma' \times \gamma + k_\gamma \gamma' \times (\gamma \times \gamma') + (f'' - f'^2)\gamma' \times \gamma \\
&\quad - f'\gamma \times \gamma + f'k_\gamma \gamma \times (\gamma \times \gamma')] \\
&= e^{2f}[(-1 + f'' - f'^2)\gamma' \times \gamma + k_\gamma \gamma' \times (\gamma \times \gamma') + f'k_\gamma \gamma \times (\gamma \times \gamma')].
\end{aligned} \tag{4.11}$$

Como $\langle \gamma, \gamma' \rangle = 0$ e $\langle \gamma', \gamma' \rangle = 1$ segue que

$$\begin{aligned}
\gamma' \times (\gamma \times \gamma') &= -(\gamma \times \gamma') \times \gamma' \\
&= -[\langle \gamma, \gamma' \rangle \gamma' - \langle \gamma', \gamma' \rangle \gamma] \\
&= -[0 - \gamma] = \gamma,
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\gamma \times (\gamma \times \gamma') &= -(\gamma \times \gamma') \times \gamma \\
&= -[\langle \gamma, \gamma \rangle \gamma' - \langle \gamma', \gamma \rangle \gamma] \\
&= -[\gamma' - 0] = -\gamma',
\end{aligned}$$

então, aplicando em (4.11), obtemos

$$\begin{aligned}
\Gamma' \times \Gamma'' &= e^{2f}[(-1 + f'' - f'^2)\gamma' \times \gamma + k_\gamma \gamma' \times (\gamma \times \gamma') + f'k_\gamma \gamma \times (\gamma \times \gamma')] \\
&= e^{2f}[(-1 + f'' - f'^2)\gamma' \times \gamma + k_\gamma \gamma' - f'k_\gamma \gamma'].
\end{aligned} \tag{4.12}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\langle \Gamma' \times \Gamma'', \Gamma - b \rangle &= \langle e^{2f}[(-1 + f'' - f'^2)\gamma' \times \gamma + k_\gamma \gamma - f' k_\gamma \gamma'], \Gamma - b \rangle \\
&= e^{2f}[(-1 + f'' - f'^2)\langle \gamma' \times \gamma, \Gamma - b \rangle + k_\gamma \langle \gamma, \Gamma - b \rangle \\
&\quad - f' k_\gamma \langle \gamma', \Gamma - b \rangle] \\
&= e^{2f}[k_\gamma \langle \gamma, \Gamma - b \rangle + (-1 + f'' - f'^2)(\langle \gamma' \times \gamma, \Gamma \rangle \\
&\quad - \langle \gamma' \times \gamma, b \rangle) - f' k_\gamma (\langle \gamma', \Gamma \rangle - \langle \gamma', b \rangle)] \\
&= e^{2f}[k_\gamma \langle \gamma, \Gamma - b \rangle + (-1 + f'' - f'^2)(\langle \gamma' \times \gamma, e^f \gamma \rangle \\
&\quad - \langle \gamma' \times \gamma, b \rangle) - f' k_\gamma (\langle \gamma', e^f \gamma \rangle - \langle \gamma', b \rangle)] \\
&= e^{2f}[k_\gamma \langle \gamma, \Gamma - b \rangle + (-1 + f'' - f'^2)(e^f \langle \gamma' \times \gamma, \gamma \rangle \\
&\quad - \langle \gamma' \times \gamma, b \rangle) - f' k_\gamma (e^f \langle \gamma', \gamma \rangle - \langle \gamma', b \rangle)] \\
&= e^{2f}[k_\gamma \langle \gamma, \Gamma - b \rangle + (-1 + f'' - f'^2)(e^f .0 \\
&\quad - \langle \gamma' \times \gamma, b \rangle) - f' k_\gamma (e^f .1 - \langle \gamma', b \rangle)] \\
&= e^{2f}[k_\gamma \langle \gamma, \Gamma - b \rangle + (1 - f'' + f'^2)\langle \gamma' \times \gamma, b \rangle \\
&\quad + f' k_\gamma \langle \gamma', b \rangle]. \tag{4.13}
\end{aligned}$$

Como Γ é uma curva sobre $\mathbb{S}_p^-(R)$,

$$\langle \Gamma', b - \Gamma \rangle = 0 \tag{4.14}$$

e, portanto,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{ds} \langle \Gamma', b - \Gamma \rangle = 0 &\implies \\
\langle \Gamma'', b - \Gamma \rangle + \langle \Gamma', -\Gamma' \rangle = 0 &\implies \\
\langle \Gamma'', b - \Gamma \rangle = \langle \Gamma', \Gamma' \rangle. &\tag{4.15}
\end{aligned}$$

Então, usando que $\langle \gamma', \Gamma \rangle = \langle \gamma', e^f \gamma \rangle = e^f \langle \gamma', \gamma \rangle = e^f .0 = 0$, temos de $\langle \Gamma', b - \Gamma \rangle = 0$ que $\langle e^f (\gamma' + f' \gamma), b - \Gamma \rangle = 0$.

Logo,

$$e^f [\langle \gamma', b - \Gamma \rangle + f' \langle \gamma, b - \Gamma \rangle] = 0,$$

ou seja,

$$\langle \gamma', b \rangle - \langle \gamma', \Gamma \rangle = -f' \langle \gamma, b - \Gamma \rangle,$$

donde

$$f' = \frac{\langle \gamma', b \rangle}{\langle \gamma, \Gamma - b \rangle} \quad (4.16)$$

e

$$\begin{aligned} f'' &= \frac{\langle b, \gamma' \rangle' \langle \gamma, \Gamma - b \rangle - \langle b, \gamma' \rangle \langle \gamma, \Gamma - b \rangle'}{\langle \gamma, \Gamma - b \rangle^2} \\ &= \frac{\langle b, \gamma'' \rangle \langle \gamma, \Gamma - b \rangle - \langle b, \gamma' \rangle [\langle \gamma', \Gamma - b \rangle + \langle \gamma, \Gamma' \rangle]}{\langle \gamma, \Gamma - b \rangle^2} \\ &= \frac{\langle b, \gamma'' \rangle \langle \gamma, \Gamma - b \rangle - \langle b, \gamma' \rangle [\langle \gamma', e^f \gamma - b \rangle + \langle \gamma, e^f (\gamma' + f' \gamma) \rangle]}{\langle \gamma, \Gamma - b \rangle^2} \\ &= \frac{\langle b, \gamma'' \rangle \langle \gamma, \Gamma - b \rangle + \langle b, \gamma' \rangle^2 - e^f f' \langle b, \gamma' \rangle}{\langle \gamma, \Gamma - b \rangle^2} \\ &= \frac{\langle b, \gamma'' \rangle}{\langle \gamma, \Gamma - b \rangle} + f'^2 - \frac{e^f \langle b, \gamma' \rangle^2}{\langle \gamma, \Gamma - b \rangle^2 \langle \gamma, \Gamma - b \rangle} \\ &= \frac{\langle b, \gamma'' \rangle}{\langle \gamma, \Gamma - b \rangle} + f'^2 - \frac{e^f f'^2}{\langle \gamma, \Gamma - b \rangle} \\ &= \frac{\langle b, \gamma'' \rangle - e^f f'^2}{e^f - \langle \gamma, b \rangle} + f'^2 \\ &= \frac{\langle b, \gamma'' \rangle - e^f f'^2 + f'^2 (e^f - \langle \gamma, b \rangle)}{e^f - \langle \gamma, b \rangle} \\ &= \frac{\langle b, \gamma'' \rangle - f'^2 \langle \gamma, b \rangle}{e^f - \langle \gamma, b \rangle} \\ &= \frac{\langle b, -\gamma + k_\gamma \gamma \times \gamma' \rangle - f'^2 \langle \gamma, b \rangle}{e^f - \langle \gamma, b \rangle} \\ &= \frac{-\langle b, \gamma \rangle + k_\gamma \langle b, \gamma \times \gamma' \rangle - f'^2 \langle \gamma, b \rangle}{e^f - \langle \gamma, b \rangle} \\ &= \frac{-k_\gamma \langle b, \gamma' \times \gamma \rangle - (f'^2 + 1) \langle b, \gamma \rangle}{e^f - \langle b, \gamma \rangle}. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Logo, de (4.13) usando (4.16) e (4.17),

$$\begin{aligned}
\langle \Gamma' \times \Gamma'', \Gamma - b \rangle &= e^{2f} [k_\gamma \langle \gamma, \Gamma - b \rangle + (1 - f'' + f'^2) \langle \gamma' \times \gamma, b \rangle + f' k_\gamma \langle \gamma', b \rangle] \\
&= e^{2f} [(1 - f'' + f'^2) \langle \gamma' \times \gamma, b \rangle + k_\gamma \langle \gamma, \Gamma - b \rangle + f' k_\gamma [f' \langle \gamma, \Gamma - b \rangle]] \\
&= e^{2f} [(1 - f'' + f'^2) \langle \gamma' \times \gamma, b \rangle + (1 + f'^2) k_\gamma \langle \gamma, \Gamma - b \rangle] \\
&= e^{2f} [(1 - f'' + f'^2) \langle \gamma' \times \gamma, b \rangle + (1 + f'^2) k_\gamma \langle \gamma, \Gamma - b \rangle \\
&\quad + 2K(1 + f'^2) \langle \gamma, \Gamma - b \rangle - 2K(1 + f'^2) \langle \gamma, \Gamma - b \rangle] \\
&= e^{2f} [(1 - f'' + f'^2) \langle \gamma' \times \gamma, b \rangle + (k_\gamma - 2K)(1 + f'^2) \langle \gamma, \Gamma - b \rangle \\
&\quad + 2K(1 + f'^2) \langle \gamma, \Gamma - b \rangle]. \tag{4.18}
\end{aligned}$$

Mostraremos que

$$(1 - f'' + f'^2) \langle \gamma' \times \gamma, b \rangle + 2K(1 + f'^2) \langle \gamma, \Gamma - b \rangle \geq 0. \tag{4.19}$$

Usando (4.16) e (4.17) obtemos

$$\begin{aligned}
1 - f'' + f'^2 &= (1 + f'^2) - \frac{-k_\gamma \langle b, \gamma' \times \gamma \rangle - (f'^2 + 1) \langle b, \gamma \rangle}{e^f - \langle b, \gamma \rangle} \\
&= \frac{k_\gamma \langle b, \gamma' \times \gamma \rangle + (f'^2 + 1) \langle b, \gamma \rangle + (1 + f'^2)(e^f - \langle b, \gamma \rangle)}{e^f - \langle b, \gamma \rangle} \\
&= \frac{k_\gamma \langle b, \gamma' \times \gamma \rangle + (f'^2 + 1)e^f}{e^f - \langle b, \gamma \rangle}. \tag{4.20}
\end{aligned}$$

Como $\langle b, \gamma \times \gamma' \rangle = -\langle b, \gamma' \times \gamma \rangle$, de (4.20) obtemos

$$\begin{aligned}
\langle b, \gamma \times \gamma' \rangle (1 - f'' + f'^2) &= \langle b, \gamma \times \gamma' \rangle \frac{k_\gamma \langle b, \gamma' \times \gamma \rangle + (f'^2 + 1)e^f}{e^f - \langle b, \gamma \rangle} \\
&= \frac{-k_\gamma \langle b, \gamma \times \gamma' \rangle^2 + (f'^2 + 1)e^f \langle b, \gamma \times \gamma' \rangle}{e^f - \langle b, \gamma \rangle}. \tag{4.21}
\end{aligned}$$

Tendo em vista que $\beta = \{\gamma, \gamma', \gamma \times \gamma'\}$ é uma base ortonormal orientada de \mathbb{R}^3 e observando que $b = (b_1, b_2, b_3) \implies |b| = \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2} \implies |b|^2 = b_1^2 + b_2^2 + b_3^2$, podemos escrever

$$|b|^2 = \langle b, \gamma' \rangle^2 + \langle b, \gamma \rangle^2 + \langle b, \gamma' \times \gamma \rangle^2. \tag{4.22}$$

Considerando os pontos $0, b, \Gamma = e^f \gamma \in \mathbb{R}^3$ como vértices de um triângulo, pela lei dos cossenos temos

$$\begin{aligned}
\overline{b\Gamma}^2 &= \overline{0b}^2 + \overline{0\Gamma}^2 - 2\overline{0b} \cdot \overline{0\Gamma} \cos \xi \implies \\
R^2 &= |b|^2 + |e^f \gamma|^2 - 2 \cdot |b| \cdot |\Gamma| \cdot \cos \xi \implies \\
R^2 &= |b|^2 + e^{2f} \langle \gamma, \gamma \rangle - 2 \cdot e^f |b| \cdot |\gamma| \cdot \cos \xi \implies \\
R^2 &= |b|^2 + e^{2f} - 2e^f \langle b, \gamma \rangle,
\end{aligned} \tag{4.23}$$

onde ξ é o ângulo entre $\overline{0b}$ e $\overline{0\Gamma}$, e, analogamente,

$$|b|^2 = R^2 + e^{2f} - 2e^f \langle \gamma, \Gamma - b \rangle. \tag{4.24}$$

Como a esfera $\mathbb{S}_p^-(R)$ contém a origem, temos $|b|^2 < R^2$, e de (4.24) segue que

$$\begin{aligned}
e^{2f} - 2e^f \langle \gamma, \Gamma - b \rangle &< 0 \implies \\
e^f &< 2 \langle \gamma, \Gamma - b \rangle.
\end{aligned} \tag{4.25}$$

Como $\langle \gamma, \Gamma - b \rangle = |\gamma| |\Gamma - b| \cos \beta \leq R$, onde β é o ângulo entre γ e $\Gamma - b$, pois $|\gamma| = 1$, $|\Gamma - b| = R$ e $\cos \beta \leq 1$, temos

$$2R \geq 2 \langle \gamma, \Gamma - b \rangle > e^f. \tag{4.26}$$

Denotando por θ o ângulo entre Γ e $\Gamma - b$, e como a constante de declividade limitada radial é $K \geq |\tan \theta|$, pelo Lema 1.2.2 do primeiro capítulo, obtemos

$$\begin{aligned}
\langle \gamma, \Gamma - b \rangle^2 &= |\gamma|^2 |\Gamma - b|^2 \cos^2 \theta \\
&= 1^2 \cdot R^2 \cdot \frac{1}{1 + \tan^2 \theta} \\
&\geq \frac{R^2}{K^2 + 1}.
\end{aligned} \tag{4.27}$$

Como $\langle \gamma, \Gamma - b \rangle^2 = \langle \gamma, e^f \gamma - b \rangle^2$, segue que

$$\begin{aligned}
\langle \gamma, \Gamma - b \rangle^2 &= (e^f \langle \gamma, \gamma \rangle - \langle \gamma, b \rangle)^2 \\
&= (e^f - \langle \gamma, b \rangle)^2 \\
&= e^{2f} - 2e^f \langle \gamma, b \rangle + \langle \gamma, b \rangle^2.
\end{aligned} \tag{4.28}$$

De (4.27) resulta então que

$$\frac{R^2}{K^2 + 1} \leq e^{2f} - 2e^f \langle \gamma, b \rangle + \langle \gamma, b \rangle^2. \quad (4.29)$$

Por outro lado, vem que de (4.23) e (4.29)

$$\frac{R^2}{K^2 + 1} \leq R^2 - |b|^2 + \langle \gamma, b \rangle^2. \quad (4.30)$$

Assim,

$$|b|^2 - \langle \gamma, b \rangle^2 \leq R^2 - \frac{R^2}{K^2 + 1} = \frac{R^2(K^2 + 1) - R^2}{K^2 + 1} = \frac{K^2 R^2}{K^2 + 1}. \quad (4.31)$$

Desta forma, de (4.22) e (4.31)

$$\langle b, \gamma' \rangle^2 + \langle b, \gamma' \times \gamma \rangle^2 = |b|^2 - \langle b, \gamma \rangle^2 \leq \frac{K^2 R^2}{K^2 + 1}.$$

Então

$$\begin{aligned} \langle b, \gamma' \times \gamma \rangle^2 &\leq \frac{K^2 R^2}{K^2 + 1} \implies \\ \langle b, \gamma' \times \gamma \rangle &\leq \frac{\sqrt{K^2 R^2}}{\sqrt{K^2 + 1}} = \frac{KR}{\sqrt{K^2 + 1}}. \end{aligned} \quad (4.32)$$

Também

$$\langle b, \gamma' \rangle^2 \leq \frac{K^2 R^2}{K^2 + 1}. \quad (4.33)$$

De (4.21), (4.32) e (4.25) obtemos

$$\begin{aligned} \langle b, \gamma \times \gamma' \rangle (1 - f'' + f'^2) &= \frac{-k_\gamma \langle b, \gamma \times \gamma' \rangle^2 + (f'^2 + 1) e^f \langle b, \gamma \times \gamma' \rangle}{e^f - \langle b, \gamma \rangle} \\ &\leq \frac{e^f (f'^2 + 1) \langle b, \gamma \times \gamma' \rangle}{e^f - \langle b, \gamma \rangle} \\ &< \frac{2 \langle \gamma, \Gamma - b \rangle (f'^2 + 1) \langle b, \gamma \times \gamma' \rangle}{e^f - \langle b, \gamma \rangle} \\ &= 2(f'^2 + 1) \langle b, \gamma \times \gamma' \rangle \\ &\leq \frac{2(f'^2 + 1) RK}{\sqrt{K^2 + 1}}, \end{aligned} \quad (4.34)$$

onde na primeira desigualdade usamos o fato de $k_g \geq 0$, já que Ω é estritamente convexo.

Assim, de (4.34), (4.27) e observando que $\gamma \times \gamma' = -\gamma' \times \gamma$, vem que

$$\begin{aligned}
\frac{\langle b, \gamma' \times \gamma \rangle (f'' - (1 + f'^2))}{(f'^2 + 1)(e^f - \langle b, \gamma \rangle)} &\leq \frac{1}{(f'^2 + 1)(e^f - \langle b, \gamma \rangle)} \cdot \frac{2RK(f'^2 + 1)}{\sqrt{K^2 + 1}} \\
&\leq \frac{2RK}{(e^f - \langle b, \gamma \rangle)\sqrt{K^2 + 1}} \\
&= \frac{2RK}{\sqrt{K^2 + 1}\langle \gamma, \Gamma - b \rangle} \\
&\leq \frac{2RK}{\sqrt{K^2 + 1} \cdot \frac{\sqrt{R^2}}{\sqrt{K^2 + 1}}} \\
&= 2K,
\end{aligned} \tag{4.35}$$

o que prova (4.19) pois

$$\begin{aligned}
\frac{\langle b, \gamma' \times \gamma \rangle (f'' - (1 + f'^2))}{(f'^2 + 1)(e^f - \langle b, \gamma \rangle)} &\leq 2K \implies \\
\langle b, \gamma' \times \gamma \rangle (f'' - (1 + f'^2)) &\leq 2K(f'^2 + 1)(e^f - \langle b, \gamma \rangle) \implies \\
2K(f'^2 + 1)\langle \gamma, \Gamma - b \rangle - \langle b, \gamma' \times \gamma \rangle (f'' - (1 + f'^2)) &\geq 0 \implies \\
2K(f'^2 + 1)\langle \gamma, \Gamma - b \rangle + \langle b, \gamma' \times \gamma \rangle (-f'' + 1 + f'^2) &\geq 0.
\end{aligned}$$

Logo, por (4.19) e (4.18),

$$\begin{aligned}
\langle \Gamma' \times \Gamma'', \Gamma - b \rangle &= e^{2f}[(1 - f'' + f'^2)\langle \gamma' \times \gamma, b \rangle + (k_\gamma - 2K)(1 + f'^2)\langle \gamma, \Gamma - b \rangle \\
&\quad + 2K(1 + f'^2)\langle \gamma, \Gamma - b \rangle] \\
&\geq e^{2f}(k_\gamma - 2K)(1 + f'^2)\langle \gamma, \Gamma - b \rangle.
\end{aligned} \tag{4.36}$$

De (4.6), obtemos que $|\Gamma'|^3 = |e^f(\gamma' + f'\gamma)|^3$, ou seja,

$$\begin{aligned}
|\Gamma'|^3 &= |e^f(\gamma' + f'\gamma)|^3 \\
&= e^{3f}|\gamma' + f'\gamma|^2|\gamma' + f'\gamma| \\
&= e^{3f}\langle \gamma' + f'\gamma, \gamma' + f'\gamma \rangle |\gamma' + f'\gamma| \\
&= e^{3f}(1 + f'^2)|\gamma' + f'\gamma|.
\end{aligned} \tag{4.37}$$

Além disso

$$|\gamma' + f'\gamma| = \sqrt{\langle \gamma' + f'\gamma, \gamma' + f'\gamma \rangle} = \sqrt{1 + f'^2}.$$

Obtemos então de (4.5) e de (4.36), que

$$\begin{aligned} k_\Gamma &= \frac{\langle \Gamma' \times \Gamma'', \Gamma - b \rangle}{|\Gamma'|^3 R} \\ &\geq \frac{e^{2f}(k_\gamma - 2K)(1 + f'^2)\langle \gamma, \Gamma - b \rangle}{|\Gamma'|^3 R} \\ &= \frac{e^{2f}(k_\gamma - 2K)(1 + f'^2)\langle \gamma, \Gamma - b \rangle}{e^{3f}R(1 + f'^2)|(\gamma' + f'\gamma)|} \\ &= \frac{(k_\gamma - 2K)\langle \gamma, \Gamma - b \rangle}{e^f R \sqrt{1 + f'^2}}. \end{aligned} \tag{4.38}$$

Finalmente, de (4.16), (4.27) e (4.33)

$$f'^2 = \frac{\langle \gamma', b \rangle^2}{\langle \gamma, \Gamma - b \rangle^2} = \frac{\frac{R^2 K^2}{K^2 + 1}}{\frac{R^2}{K^2 + 1}} = K^2. \tag{4.39}$$

Usando novamente (4.27), vem que

$$\begin{aligned} k_\Gamma &\geq \frac{(k_\gamma - 2K)\langle \gamma, \Gamma - b \rangle}{e^f R \sqrt{1 + f'^2}} \\ &= \frac{(k_\gamma - 2K) \frac{R}{\sqrt{K^2 + 1}}}{e^f R \sqrt{1 + K^2}} \\ &= \frac{k_\gamma - 2K}{e^f(1 + K^2)} \\ &\geq \frac{k_\gamma - 2K}{\sup \phi(1 + K^2)}, \end{aligned} \tag{4.40}$$

já que $e^f \leq \sup \phi$.

Portanto, temos demonstrado a desigualdade (4.4).

□

Podemos passar agora à prova do resultado principal deste capítulo.

Demonstração do Teorema 4.2.1:

Se $H = 0$, estamos nas hipóteses do Teorema 1.2.1, então nada temos a mostrar.

Suponhamos $H < 0$. Nossa intenção é aplicar o Teorema 1.2.2, donde temos que mostrar que ϕ é H -regular.

Desta forma precisamos, para cada ponto $p = \phi(z_0)z_0$, com $z_0 \in \partial\Omega$, encontrar funções g_p^- , g_p^+ definidas em Ω tal que o gráfico de g_p^- é de curvatura média H_1 com $H_1 \leq H$ e o gráfico de g_p^+ é de curvatura média H_2 com $H \leq H_2$, $g_p^\pm(z_0) = \phi(z_0)$ e $g_p^-(z) \leq \phi(z) \leq g_p^+(z)$, $\forall z \in \partial\Omega$.

Como devemos ter $H \leq H_2$ então basta tomarmos as funções g_p^+ tais que seus gráficos tenham curvatura média constante $H = 0$ (caso anterior dado pelo Teorema 1.2.1), ou seja, gráficos radiais mínimos. Assim, basta construir as funções g_p^- .

Por hipótese, $\phi \in C^{2,\alpha}(\partial\Omega)$ satisfaz a condição de declividade limitada radial de constante K , logo existe uma esfera $\mathbb{S}_p^-(R)$ gráfico radial sobre \mathbb{S}^2 de uma função π_p^- satisfazendo:

- (i) $\phi(z_0) = \pi_p^-(z_0)$
- (ii) $\pi_p^-(z) \leq \phi(z)$, $\forall z \in \partial\Omega$
- (iii) $|\nabla\pi_p^-| \leq K$,

onde ∇ é o gradiente em \mathbb{S}^2 .

Sejam

$$\begin{aligned} C(\Omega) &= \{tz; t \in \mathbb{R}^+, z \in \Omega\} \\ C(\partial\Omega) &= \{tz; t \in \mathbb{R}^+, z \in \partial\Omega\} \\ \Gamma &= C(\partial\Omega) \cap \mathbb{S}_p^-(R) \end{aligned}$$

e $b \in \mathbb{R}^3$ o centro de $\mathbb{S}_p^-(R)$. Sem perda de generalidade, podemos supor $b \in \mathbb{R}^3 - C(\Omega)$. Denotemos por k_Γ a curvatura geodésica de Γ em $\mathbb{S}_p^-(R)$. Logo, pelo Lema 4.2.1 segue que

$$k_\Gamma \geq \frac{k_\gamma - 2K}{\sup \phi(1 + K^2)}.$$

Sejam $\mathbb{S}_p^-(1)$ a esfera de raio 1 cujo centro é b (b centro de $\mathbb{S}_p^-(R)$), γ_1 a projeção de Γ sobre $\mathbb{S}_p^-(1)$, $\Omega' \subset \mathbb{S}_p^-(1)$ estritamente convexo tal que $\partial\Omega' = \gamma_1$, k_{γ_1} a curvatura geodésica de γ_1 em $\mathbb{S}_p^-(1)$. Tal situação pode ser observada pela Figura 4.2.

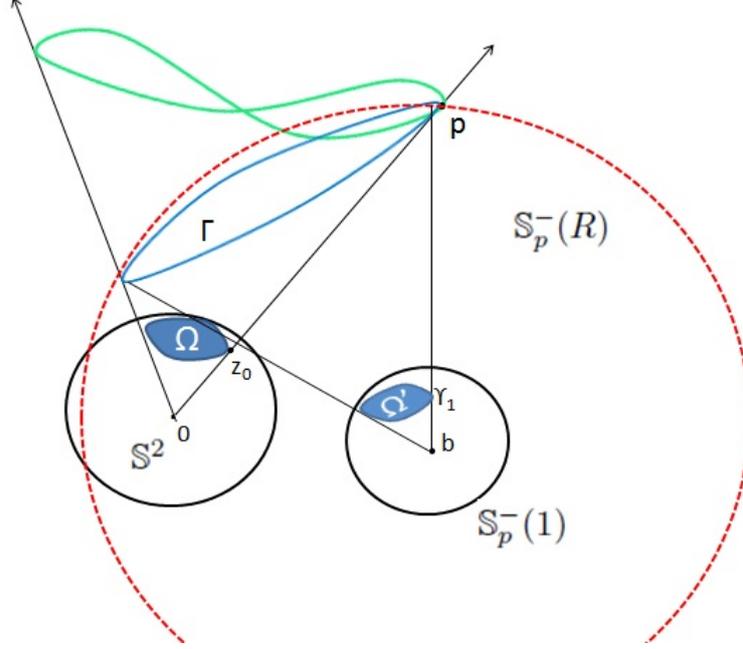


Figura 4.2: Ilustração da situação descrita

Da desigualdade (4.4) e por hipótese (desigualdade 4.3) temos

$$k_{\Gamma} \geq \frac{k_{\gamma} - 2K}{\sup \phi(K^2 + 1)} > -H.$$

Por outro lado, $k_{\gamma_1} = Rk_{\Gamma}$, ou seja, k_{γ_1} é diretamente proporcional a k_{Γ} onde R é dado por $\mathbb{S}_p^-(R)$, já que γ_1 e Γ são gráficos radiais sobre $\partial\Omega' \subset \mathbb{S}_p^-(1)$. Assim, $k_{\gamma_1} > -RH$.

Pelo Teorema 1.2.3, existe M gráfico radial de curvatura média constante H sobre Ω' dado pela função $e^v : \Omega' \rightarrow \mathbb{R}$ com $v|_{\partial\Omega'} = 0$ tal que

$$\sup |\nabla v| \leq \frac{-k_{\gamma_1}RH + \sqrt{k_{\gamma_1}^2 - (RH)^2 + 1}}{k_{\gamma_1}\sqrt{k_{\gamma_1}^2 - (RH)^2 + 1} + RH}.$$

(Note que como $v|_{\partial\Omega'} = 0$ isso implica que $u = e^v|_{\partial\Omega'} = 1$, donde equivale a dizer que $\partial(\text{Graf}_R(u)) = \partial\Omega$. Assim, estamos nas hipóteses do Teorema 1.2.3.)

A mostrar que M é gráfico radial sobre Ω .

Seja N o campo normal unitário de M apontando no sentido contrário ao centro de $\mathbb{S}_p^-(R)$. Dado $q \in M$, temos que mostrar $\langle q, N(q) \rangle \neq 0$. Para isso, basta mostrar que $\tan \alpha(q) < \infty$ onde $\alpha(q)$ é o ângulo entre os vetores q e $N(q)$, que aponta no sentido contrário ao centro de $\mathbb{S}_p^-(R)$.

Seja N_π o campo normal a $\mathbb{S}_p^-(R)$. Se N_π está entre q e $N(q)$ ou coincide com um destes então $\alpha(q) = \widehat{q, N_\pi} + \widehat{N, N_\pi}$, senão $\alpha(q) < \widehat{q, N_\pi} + \widehat{N, N_\pi}$. Desta forma, $\alpha(q) \leq \widehat{q, N_\pi} + \widehat{N, N_\pi}$.

Como $\frac{\pi}{2} - \widehat{q, N_\pi} < \alpha(q) \leq \frac{\pi}{2}$ e $\frac{\pi}{2} - \widehat{N, N_\pi} < \alpha(q) \leq \frac{\pi}{2}$ obtemos

$$\begin{aligned} \tan \alpha(q) &\leq \tan(\widehat{q, N_\pi} + \widehat{N, N_\pi}) \\ &= \frac{\tan(\widehat{q, N_\pi}) + \tan(\widehat{N, N_\pi})}{1 - \tan \widehat{q, N_\pi} \tan \widehat{N, N_\pi}} \\ &\leq \frac{|\nabla v| + K}{1 - K|\nabla v|}. \end{aligned}$$

Logo, $\tan \alpha(q) < \infty$ se $|\nabla v| < \frac{1}{K}$, ou se

$$\sup |\nabla v| \leq \frac{-k_{\gamma_1} RH + \sqrt{k_{\gamma_1}^2 - (RH)^2 + 1}}{k_{\gamma_1} \sqrt{k_{\gamma_1}^2 - (RH)^2 + 1} + RH} < \frac{1}{K}.$$

Vamos mostrar que a hipótese dada por (4.3) implica na expressão acima.

Isolando H obtemos

$$\begin{aligned} \frac{-k_{\gamma_1} RH + \sqrt{k_{\gamma_1}^2 - (RH)^2 + 1}}{k_{\gamma_1} \sqrt{k_{\gamma_1}^2 - (RH)^2 + 1} + RH} &< \frac{1}{K} \iff \\ K(-k_{\gamma_1} RH + \sqrt{k_{\gamma_1}^2 - (RH)^2 + 1}) &< k_{\gamma_1} \sqrt{k_{\gamma_1}^2 - (RH)^2 + 1} + RH \iff \\ -k_{\gamma_1} RHK - RH &< k_{\gamma_1} \sqrt{k_{\gamma_1}^2 - (RH)^2 + 1} - K \sqrt{k_{\gamma_1}^2 - (RH)^2 + 1} \iff \\ -RH(k_{\gamma_1} K + 1) &< (k_{\gamma_1} - K) \sqrt{k_{\gamma_1}^2 - (RH)^2 + 1} \iff \\ R^2 H^2 (k_{\gamma_1} K + 1)^2 &< (k_{\gamma_1} - K)^2 (k_{\gamma_1}^2 - (RH)^2 + 1) \iff \\ R^2 H^2 (k_{\gamma_1} K + 1)^2 &< (k_{\gamma_1} - K)^2 (k_{\gamma_1}^2 + 1) - (RH)^2 (k_{\gamma_1} - K)^2 \iff \\ R^2 H^2 [(k_{\gamma_1} K + 1)^2 + (k_{\gamma_1} - K)^2] &< (k_{\gamma_1} - K)^2 (k_{\gamma_1}^2 + 1) \iff \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R^2 H^2 [k_{\gamma_1}^2 K^2 + 2k_{\gamma_1} K + 1 + k_{\gamma_1}^2 - 2k_{\gamma_1} K + K^2] &< (k_{\gamma_1} - K)^2 (k_{\gamma_1}^2 + 1) \iff \\
R^2 H^2 [k_{\gamma_1}^2 K^2 + 1 + k_{\gamma_1}^2 + K^2] &< (k_{\gamma_1} - K)^2 (k_{\gamma_1}^2 + 1) \iff \\
R^2 H^2 [(k_{\gamma_1}^2 + 1)K^2 + (1 + k_{\gamma_1}^2)] &< (k_{\gamma_1} - K)^2 (k_{\gamma_1}^2 + 1) \iff \\
R^2 H^2 (k_{\gamma_1}^2 + 1)(K^2 + 1) &< (k_{\gamma_1} - K)^2 (k_{\gamma_1}^2 + 1) \iff \\
R^2 H^2 (K^2 + 1) &< (k_{\gamma_1} - K)^2 \iff \\
-RH\sqrt{K^2 + 1} &< (k_{\gamma_1} - K) \iff \\
-H &< \frac{k_{\gamma_1} - K}{R\sqrt{K^2 + 1}}. \tag{4.41}
\end{aligned}$$

Como, de (4.41) temos $k_{\gamma_1} = Rk_{\Gamma}$, então

$$-H < \frac{Rk_{\Gamma} - K}{\sqrt{K^2 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{K^2 + 1}} \left(k_{\Gamma} - \frac{K}{R} \right). \tag{4.42}$$

Substituindo (4.40) em (4.42),

$$\begin{aligned}
-H &< \frac{1}{\sqrt{K^2 + 1}} \left(\frac{k_{\gamma} - 2K}{e^f(1 + K^2)} - \frac{K}{R} \right) \\
-H &< \frac{1}{\sqrt{K^2 + 1}} \left(\frac{k_{\gamma} - 2K - 2K(K^2 + 1) + 2K(K^2 + 1)}{e^f(1 + K^2)} - \frac{K}{R} \right) \\
-H &< \frac{k_{\gamma} - 2K - 2K(K^2 + 1)}{e^f \sqrt{(K^2 + 1)^3}} + \frac{1}{\sqrt{(1 + K^2)}} \left(\frac{2K}{e^f} - \frac{K}{R} \right).
\end{aligned}$$

Por (4.26) temos

$$e^f < 2R \implies \frac{2K}{e^f} > \frac{2K}{2R} = \frac{K}{R} \implies 0 \leq \frac{2K}{e^f} - \frac{K}{R}.$$

Portanto

$$-H < \frac{k_{\gamma} - 2K - 2K(K^2 + 1)}{e^f \sqrt{(K^2 + 1)^3}},$$

donde

$$\begin{aligned}
&-He^f \sqrt{(K^2 + 1)^3} + 2K + 2K(K^2 + 1) \\
&\leq -H \sup_{z \in \partial\Omega} \phi(z) \sqrt{(K^2 + 1)^3} + 2K + 2K(K^2 + 1) \\
&< k_{\gamma},
\end{aligned}$$

que é a nossa hipótese.

Assim, concluímos que ϕ é H -regular. Como para $H = 0$ já temos um gráfico mínimo cujo bordo é $Graf_R(\phi)$ dada pelo Teorema 1.2.1, segue do Teorema 1.2.2 que existe um gráfico radial de curvatura média constante H dado por uma função $u \in C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$ tal que $u|_{\partial\Omega} = \phi$.

□

Destacamos que no Teorema 4.2.1, não foi necessário a hipótese de o domínio Ω estar contido em um hemisfério aberto de \mathbb{S}^2 , como é exigido no Teorema 0.0.3. É suficiente que Ω esteja contido em um hemisfério de \mathbb{S}^2 .

Conclusão

Neste trabalho estudamos alguns resultados de existência e unicidade de gráficos euclidianos, radiais e parabólicos de curvatura média constante com bordo precrito satisfazendo a condição de declividade limitada, em ambientes como \mathbb{R}^3 e \mathbb{H}^3 . As principais contribuições deste trabalho dizem respeito às demonstrações do Teoremas 2.2.1, 3.2.1 e 4.2.1, além do Teorema 2.3.1, onde esclarecemos algumas passagens não triviais. Além disso, reunimos em um único texto e com todos os detalhes contextualizados, os mais recentes resultados sobre o tema.

Em relação a perspectiva de continuidade deste trabalho vislumbramos aplicar os mesmos métodos usados nas demonstrações dos teoremas acima descritos, para resultados similares no contexto de gráficos hiperbólicos no espaço hiperbólico.

Referências Bibliográficas

- [1] AIOLFI, A. J. **O problema de Dirichlet para a equação das superfícies mínimas em domínios não necessariamente convexos.** Tese de Doutorado, Instituto de Matemática, UFRGS, Porto Alegre, 2003.
- [2] AIOLFI, A. J.; MATHIAS, C.V. **Existence and uniqueness of CMC parabolic graphs in \mathbb{H}^3 with boundary data satisfying the bounded slope condition.** Differential Geometry and its Applications 27, 755-765, 2009.
- [3] ARAÚJO, P. V. **Geometria diferencial.** 2º edição. Rio de Janeiro, Coleção Matemática Universitária, IMPA, 2008.
- [4] BARBOSA, J. L. M.; Sa EARP, R. **Prescribed mean curvature hypersurfaces in $\mathbb{H}^{n+1}(-1)$ with convex planar boundary, I.** Geometriae Dedicata, 71, 61-74, 1998.
- [5] BARBOSA, J. L. M.; Sa EARP, R. **Geometric methods and nonlinear analysis in hyperbolic space.** X Escola de Geometria Diferencial - UFMG, 1998.
- [6] BONOW, I. C. **O problema de Dirichlet para a equação das hipersufícies de curvatura média constante.** Dissertação de Mestrado, Instituto de Matemática, UFRGS, Porto Alegre, 2007.
- [7] CAMACHO, C.; NETO, A. L. **Teoria Geométrica das Folheações.** 1º edição. Rio de Janeiro, Coleção Projeto Euclides, IMPA, 1979.

- [8] CARMO, M. P. **Geometria diferencial de curvas e superfícies**. Coleção Textos Universitários, Sociedade Brasileira de Matemática, Rio de Janeiro, 2005.
- [9] CARMO, M. P. **Geometria Riemanniana**. 2^o edição. Rio de Janeiro, Coleção Projeto Euclides, IMPA, 1988.
- [10] COLLIN, P.; KRUST, R. **Le problème de Dirichlet pour l'équation des surfaces minimales sur de domaines non bornés**. Bulletin de la Société Mathématique de France 119, 443-462, 1991.
- [11] DAJCZER, M.; RIPOLL, J. **An extension of a theorem of Serrin to graphs in Warped products**. J. of Geometric Analysis, vol. 15, n. 2, 195-205, 2005.
- [12] DAJCZER, M.; HINOJOSA, P. A.; LIRA, J. H. **Killing graphs with prescribed mean curvature**. Calculus of Variations, 33, 231-248, 2008.
- [13] FIGUEIREDO, E. S. **O Método de Perron: aplicações e extensões**. Dissertação de Mestrado, Instituto de Matemática, UFRGS, Porto Alegre, 2000.
- [14] FUSIEGER, P. **Gráficos Radiais de Curvatura Média Constante**. Tese de Doutorado, Instituto de Matemática, UFRGS, Porto Alegre, 2001.
- [15] FUSIEGER, P.; RIPOLL, J. **Radial graphs of constant mean curvature and doubly connected minimal surfaces with prescribed boundary**. Annals of Global Analysis and Geometry. Journal, vol. 23, 373-400, 2003.
- [16] GILBARG, D.; TRUDINGER, N. S. **Elliptic Partial Differential Equations of Second Order**, Springer Verlag, Berlim, 1998.
- [17] GUIO, E. M; SA EARP, R. **Existence and non-existence for a mean curvature equation in hyperbolic space**, Communications on Pure and Applied Analysis, v. 4, n. 3, 549-568, 2005.

- [18] HARTMAN, P. **On the bounded slope condition.** Pacific Journal of Mathematics, vol. 18, n. 3, 1966.
- [19] HARTMAN, P.; NIRENBERG, L. **On spherical image maps whose jacobians do not change sign.** American Journal of Mathematics, vol. 81, n. 4, 901-920, 1959.
- [20] JOHNSON, D. L.; WHITT, L. B. **Totally Geodesic Foliations.** Journal Differential Geometry, 15, 225-235, 1980.
- [21] JÜRGEN, J. **Riemannian Geometry and Geometric Analysis.** Springer, 1995.
- [22] LIMA, E. L. **Espaços Métricos.** 4ª edição. Rio de Janeiro, Coleção Projeto Euclides, IMPA, 2009.
- [23] LÓPEZ, R. **A note on radial graphs with constant mean curvature.** Manuscripta mathematica, 100, 45-54, 2003.
- [24] MATHIAS, C. V. **Gráficos parabólicos de curvatura média constante em \mathbb{H}^3 com bordo prescrito satisfazendo a condição de declividade limitada.** Tese de Doutorado, Instituto de Matemática, UFRGS, Porto Alegre, 2009.
- [25] PAYNE, L. E.; PHILIPPIN, G. A. **Some maximum principles for nonlinear elliptic equations in divergence form with applications to capillary surfaces and to surfaces of constant mean curvature.** Nonlinear Analysis - theory Methods and Applications, vol. 3, no. 2, 193-211, 1979.
- [26] RIPOLL, J. **Some existence results and gradient estimates of solutions of the Dirichlet problem for the constant mean curvature equation in convex domains.** Journal of Differential Equations 181, 230-241, 2002.

- [27] RIPOLL, J. **Some characterization, uniqueness and existence results for graphs of constant mean curvature with planar boundary.** Pacific Journal of Mathematics, vol. 198, no. 1, 2001.
- [28] SERRIN, J. **The Dirichlet problem for surfaces of constant mean curvature.** Proc. London Math. Soc. (3) 21, 361-384, 1970.
- [29] SERRIN, J. **The problem of Dirichlet for quasilinear elliptic equations with many independent variables.** Philos. Trans. Roy. Soc. London Ser.A 264, 413-496, 1969.
- [30] SOARES, R. B. **Superfícies duplamente conexas de curvatura média constante vom bordo prescrito em planos paralelos.** Dissertação de Mestrado, UFSM, Santa Maria, 2008.