Dissertação de Mestrado

# AÇÕES DE CATEGORIAS, SISTEMAS E EQUIVALÊNCIA ENTRE AS CATEGORIAS DE SISTEMAS E SEMIGRUPOS INVERSOS

Katielle de Moraes Bilhan

PPGMat

Santa Maria, RS, Brasil

2011

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA MARIA
Programa de Pós-Graduação em Matemática

# AÇÕES DE CATEGORIAS, SISTEMAS E EQUIVALÊNCIA ENTRE AS CATEGORIAS DE SISTEMAS E SEMIGRUPOS INVERSOS ‡

**Katielle de Moraes Bilhan**

Dissertação realizada sob a orientação do Prof. Dr. João Roberto Lazzarin, apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da USFM, em preenchimento parcial dos requisitos para a obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Santa Maria, RS, Brasil
2011

‡Trabalho financiado pela Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES).

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA MARIA
CENTRO DE CIÊNCIAS NATURAIS E EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

A Comissão Examinadora, abaixo assinada,
aprova a Dissertação de Mestrado

**AÇÕES DE CATEGORIAS, SISTEMAS E EQUIVALÊNCIA ENTRE AS CATEGORIAS DE SISTEMAS E SEMIGRUPOS INVERSOS**

elaborada por

**Katielle de Moraes Bilhan**

como requisito parcial para obtenção do grau de

**Mestre em Matemática**

**COMISSÃO EXAMINADORA:**

João Roberto Lazzarin, Dr.
(Orientador)

Wagner Oliveira Cortes, Dr. (UFRGS)

Daiane Silva de Freitas, Drª. (UFRG)

Pedro Fusieger, Dr. (UFSM)

Santa Maria, 08 de Abril de 2011.

# Agradecimentos

Agradeço a minha família por estar sempre presente. Um especial agradecimento ao meu orientador, Professor Dr. João Lazzarin, pelo auxílio e compreensão durante estes dois anos de estudos.

# Resumo

Mark V. Lawson, no livro "*Inverse Semigroups: The Theory of partial symmetries*", fornece um estudo bastante relevante das caracteristicas dos semigrupos inversos sendo alguns destes, baseados no famoso Teorema da representação de Wagner-Preston, que afirma que todo semigrupo inverso pode ser fielmente representado por um semigrupo inverso de bijeções parciais sobre um conjunto. Um refinamento deste teorema mostra que cada semigrupo inverso é isomorfo a um semigrupo inverso de todas simetrias parciais (de um especifico tipo) de alguma estrutura especifica. Estas estruturas pertencem a uma classe de ações de categorias sobre conjuntos. Nesta dissertação pretendemos compreender cada etapa deste refinamento e ir mais além, conforme o artigo "*Constructing inverse semigroups from category actions*" deste mesmo autor, inicialmente, destacaremos que a partir de ação de categorias sobre um conjunto que satisfazem a chamada condição de órbita, podemos construir um semigrupo inverso com zero e reciprocamente, a cada semigrupo inverso com zero é possível construir uma ação de categoria satisfazendo certas condições. Tais ações são denominadas sistemas, sendo a categoria dos sistemas denotada por $SYS$. A seguir, construiremos funtores entre as categorias $SYS$ e a categoria $INV$ dos semigrupos inversos com zero: $\Theta : SYS \to INV$ e $\Omega : INV \to SYS$, mostrando que a cada semigrupo inverso $S$ de $INV$, temos $\Theta(\Omega(S))$ isomorfo a $S$. No entanto, para

cada sistema $T$ de $SYS$, $\Omega(\Theta(T))$ e $T$ nem sempre são isomorfos. Mesmo assim, é possível mostrar que $INV$ é equivalente a um quociente adequado da categoria $SYS$.

# Abstract

Mark V. Lawson, in the book "*Inverse Semigroups: The Theory of partial symmetries"*, provides a very relevant study of the characteristics of inverse semigroups, including Wagner-Preston Theorem of Representation, which states that every inverse semigroup can be faithfully represented by a inverse semigroup of partial bijections on a set. A refinement of this theorem shows that every inverse semigroup is isomorphic to an inverse semigroup of all partial symmetries (of a specific type) of some structure specifies. These structures belong to a class of category actions on sets. In this work we study each stage of refinement and go further, as the article "*Constructing inverse semigroups from category actions*"of this author, Initially, we point out that based on the actions on a set of categories that satisfy the condition of the orbit we obtain an inverse semigroup with zero. Reciprocally, each inverse semigroup with zero we can obtain a category action that satisfies some conditions. Such actions, called systems, constitute the category $SYS$.

Next, build functors between the categories and category $SYS$ and the category $INV$ of inverse semigroups with zero: $\Theta : SYS \to INV$ and $\Omega : INV \to SYS$, showing that every inverse semigroup $S$ of $INV$, we have $\Theta(\Omega(S))$ isomorphic to $S$. However, for each system $T$ of $SYS$, $\Omega(\Theta(T))$ and $T$ does not always are isomorphic. Still, it is possible to show that $INV$ is equivalent to a proper quotient of the category $SYS$.

# Sumário

# Introdução

Em [8], Mark V. Lawson, fornece um estudo bastante relevante das caracteristicas dos semigrupos inversos sendo alguns destes, baseados no famoso Teorema da representação de Wagner-Preston, que afirma que todo semigrupo inverso pode ser fielmente representado por um semigrupo inverso de bijeções parciais sobre um conjunto. Um refinamento deste teorema mostra que cada semigrupo inverso é isomorfo a um semigrupo inverso de todas simetrias parciais (de um especifico tipo) de alguma estrutura especifica. Estas estruturas pertencem a uma classe de ações de categorias sobre conjuntos.

Nesta dissertação pretendemos compreender cada etapa deste refinamento e ir mais além, pretendemos seguir os passos do artigo "*Constructing inverse semigroups from category actions*"([9]) deste mesmo autor. Iniciamos destacando que a partir de uma ação de categorias (entendemos por categoria o que a literatura chama de small categoria) sobre um conjunto que satisfaz a chamada condição de órbita, podemos construir um semigrupo inverso com zero e reciprocamente, a cada semigrupo inverso com zero é possível construir uma ação de categoria sobre o semigrupo que satisfaz certas condições. A dupla, conjunto e respectiva ação, munida com alguma propriedade adicional, é denominada sistema, tais estruturas, fomam uma categoria que denotamos por $SYS$. A seguir, construimos funtores entre as categorias $SYS$ e a categoria $INV$ dos semigrupos inversos com zero: $\Theta : SYS \to INV$ e

$\Omega : INV \to SYS$, mostrando que a cada semigrupo inverso $S$ de $INV$, temos $\Theta(\Omega(S))$ isomorfo a $S$. No entanto, para cada sistema $T$ de $SYS$, $\Omega(\Theta(T))$ e $T$ nem sempre são isomorfos. Mesmo assim, é possível mostrar que $INV$ é equivalente a um quociente adequado da categoria $SYS$.

Esta dissertação tenta ser autossuficiente, os prérequisitos são apresentados na sua maioria e facilitam a leitura do trabalho. Necessitamos conhecimentos básicos de semigrupos com zero que podem ser encontrados em [8] e [7] e necessitamos também de algum conhecimento sobre categorias que podem ser obtidos de [11], [10] e [12].

No Capítulo 1, apresentamos uma breve revisão dos resultados de grupos, monóides e ações destas estruturas sobre conjuntos. Em seguida falamos dos principais resultados utilizados no texto envolvendo semigrupos inversos com zero e terminamos o capítulo, apresentando o conceito geral de categorias e funtores, conceitos estes que aparecerão na maior parte do texto.

No Capítulo 2, iniciamos apresentando um conceito particular de categoria, que generaliza a estrutura de monóide. Tais categorias são chamadas na literatura de categorias pequenas, que são categorias tais que a união dos objetos e seus morfismos formam um conjunto. Em seguida, com objetivo de generalizar ações de monoídes, definimos uma ação de uma categoria $C$ sobre um conjunto $X$ e com isso, definimos o que chamamos de sistema à esquerda, denotando-o por ${}_CX$. Um refinamento destes sistemas à esquerda serão chamados simplesmente de sistemas e denotados por $(C, X)$. A partir desta nova estrutura, construimos um semigrupo inverso associado, finalizamos o capítulo fazendo o caminho inverso, isto é, construimos, a partir de um semigrupo inverso, um sistema.

No Capítulo 3, começamos definindo morfismos entre sistemas, estabelecendo assim a categoria $SYS$, dos sistemas. Denotando a categoria dos semigrupos inversos por $INV$, construimos funtores $\Theta : SYS \to INV$ e $\Omega : INV \to SYS$. Estando interessados em comparar os semigrupos $S$ com $\Theta \circ \Omega(S)$ e os sistemas $(C, X)$ com $(\Omega \circ \Theta)(C, X)$ faremos, ainda neste capítulo, uma prova de que $S$ e $\Theta \circ \Omega(S)$ são equivalentes.

Finalmente, encerramos o trabalho com o Capítulo 4, estabelecendo uma relação de equivalência entre sistemas, comparamos os sistemas $(C, X)$ e $(\Omega \circ \Theta)(C, X)$, mostrando que estes pertencem a uma mesma classe ampla de sistemas e finalizamos mostrando que a categoria $INV$ é equivalente não a toda categoria $SYS$, mas sim a um quociente desta categoria.

# Capítulo 1

# Preliminares

Iniciamos apresentando algumas notações e resultados sobre semigrupos inversos, alguns não seram provados aqui, outros serão generalizados e provados no decorrer do trabalho. A maior parte foi obtida do Livro [8].

## 1.1 Bijeções parciais

É bem conhecido que um *grupo* $G$ é um conjunto munido com uma operação binária "$\cdot$"satisfazendo:

1. $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$ para todo $x, y, z \in G$;

2. existe $e \in G$ tal que $e \cdot x = x \cdot e = x$ para todo $x \in G$;

3. para cada $x \in G$ existe $x^{-1} \in G$ tal que $x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = e$.

Desta definição podemos obter duas generalizações: dizemos que $G$ é um *monóide* se valer 1. e 2. e dizemos que $G$ é um *semigrupo* se valer apenas 1.

A literatura básica fornece inúmeros exemplos de grupos e monóides, por exemplo o grupo das permutações de um conjunto não vazio e o monóide aditivo dos números naturais. Estamos interessados num caso particular de semigrupo, chamado semigrupo inverso, que mesmo não possuindo um elemento neutro como num monóide, serão considerados uma espécie de inverso a cada elemento deste semigrupo. Antes de introduzir o conceito formal veremos um exemplo clássico que deu origem a este novo conceito.

**Definição 1.1.1** Sejam $X$ e $Y$ dois conjuntos quaisquer, $f$ é uma *função parcial* se $f$ e definida da seguinte forma:
$f : X_1 \subseteq X \longrightarrow Y_1 \subseteq Y$, onde domínio de f e imagem de f são dados por $X_1 = d(f)$, e $Y_1 = r(f) = f(d(f))$, respectivamente.Apartir daí, definimos a composição entre as funções parciais $f : d(f) \longrightarrow r(f)$ e $g : d(g) \longrightarrow r(g)$ por $f \circ g : g^{-1}(r(g) \cap d(f)) \to f(r(g) \cap d(f))$ se $r(g) \cap d(f) \neq \emptyset$ do contrário, $f \circ g = 0 : \emptyset \to \emptyset$ (tal função é chamada de zero).
Funções parciais que induzem bijeções entre seus domínios e imagens, chamaremos de *bijeções parciais.*

Se $f$ é uma bijeção parcial, então $f^{-1}$ também é uma bijeção parcial. Denotamos por $I(X)$ o conjunto de tadas as bijeções parciais da forma $f : X_1 \longrightarrow Y_1$ onde $X_1$ e $Y_1$ são subconjuntos de $X$. Veremos que $I(X)$ pode ser munido com identidades parciais e cada elemento terá um inverso parcial em particular. No que segue, usaremos a notação $1_A$ para denotar a aplicação identidade de $A$ em $A$.

**Proposição 1.1.2** *Sejam $X, Y$ subconjuntos quaisquer de um conjunto $Z$ e $f : X \longrightarrow Y$ uma bijeção parcial, então:*

1. $f^{-1}f = 1_{d(f)}$ *e* $ff^{-1} = 1_{r(f)}$*;*

2. *Para a bijeção parcial* $g : Y \longrightarrow X$*,* $f = fgf$ *e* $g = gfg \Leftrightarrow g = f^{-1}$*;*

3. $(f^{-1})^{-1} = f$;

*4.* $1_X 1_Y = 1_{X\cap Y} = 1_Y 1_X$ *para qualquer identidade parcial* $1_X$ *e* $1_Y$*, onde* $X, Y \subseteq Z$;

*5.* $(fg)^{-1} = g^{-1}f^{-1}$.

**Prova.**

(1) Seja $x \in X$. Então, $x \in (f^{-1}f)$ e por hipótese $x \in d(f)$. Assim os domínios de $f$ e $f^{-1}f$ são os mesmos. Como $f^{-1}f : X \to X$, ou seja, $f^{-1}f$ é uma função identidade $1_{d(f)}$. Logo, $f^{-1}f = 1_{d(f)}$. Analogamente, verifica-se que $ff^{-1} = 1_{r(f)} \in Y$.

(2) ($\Rightarrow$) Suponhamos que $f = fgf$ e $g = gfg$. Consideremos $y \in d(g)$ e $x = g(y)$. Então, $x = (gfg)(y) = gf(g(y)) = g(f(x))$. Como $g$ é uma bijeção parcial e $y = f(x)$. E ainda $x = f^{-1}(y)$, ou seja, $d(g) \subseteq d(f^{-1})$. Agora seja $y \in d(f^{-1})$ e $f$ é uma bijeção barcial,temos que $f(x) = y$. Então, $(fgf)(x)$ e $f(g(y)) = y$. Mas f é bijeção parcial e $g(y) = x$, logo $d(f^{-1}) \subseteq d(g)$. Portanto, $f^{-1} = g$.

($\Leftarrow$) Se $g = f^{-1}$, então, $fgf = ff^{-1}f = f1_{d(f)} = f$ e $gfg = f^{-1}ff^{-1} = f^{-1}1_{r(f)} = f^{-1} = g$.

(3) Por (2) temos que $f^{-1} = g$ e segue que $(f^{-1})^{-1} = (g)^{-1}$.Logo $f = g^{-1}$ e portanto, $(f^{-1})^{-1} = f$.

(4) Seja $x \in d(1_X 1_Y)$. Então, $(1_X 1_Y)(x) = 1_X(1_Y(x)) = x$. Logo $1_X 1_Y$ é uma identidade parcial, ou seja, $d(1_X 1_Y) = 1_{X\cap Y}$. Portanto, $1_X 1_Y = 1_{X\cap Y}$.

(5) Temos que $gf(f^{-1}g^{-1})gf = g(ff^{-1})(g^{-1}g)f = g(g^{-1}g)(ff^{-1})f = gf$, pois pelo item (4), as identidades parciais comutam. E também
$(f^{-1}g^{-1})gf(f^{-1}g^{-1}) = f^{-1}g^{-1}$. Logo, pelo item (2) temos que $(fg)^{-1} = g^{-1}f^{-1}$. ■

A seguir definiremos semigrupos inversos.

**Definição 1.1.3** Seja $S$ um semigrupo. Dizemos que $S$ é um semigrupo inverso se satisfaz as seguintes condições:

1. Para cada $a \in S$ existe um único $a^{-1} \in S$ (chamado inverso de $a$) tal que $a = aa^{-1}a$ e $a^{-1} = a^{-1}aa^{-1}$;

2. Os idempotentes de S comutam.

O Teorema 3 de [1] garante que o item 2 acima é equivalente a

2'. cada elemento de $S$ tem inverso único.

O próximo exemplo mostra que $I(X)$ é um semigrupo inverso.

**Exemplo 1.1.4** $I(X)$ é um semigrupo inverso, pois para cada $f \in I(X)$ existe um único $f^{-1} \in I(X)$ tal que $f = ff^{-1}f$ e $f^{-1} = f^{-1}ff^{-1}$, onde $f : X_1 \longrightarrow Y_1$ e $X_1$ e $Y_1$ são subconjuntos de $X$.
Observamos que para cada $X_1 \subseteq X$ temos que o elemento $1_{X_1} : X_1 \rightarrow X_1$ satisfaz $1_{X_1}1_{X_1} = 1_{X_1}$. Assim os idempotentes de $I(X)$ são os elementos $1_{X_1}$. Pelo item 4 da Proposição 1.1.2 temos que $1_{X_1}$ e $1_{Y_1}$ comutam.
De agora em diante iremos denotar por $E(S)$ ao conjunto de todos os idempotentes de um semigrupo.

**Proposição 1.1.5** *Sejam $S$ um semigrupo inverso e $s \in S$. as seguintes propriedades são válidas:*

1. *Se e é um idempotente em $S$, então, $e^{-1} = e$;*

2. *$s^{-1}s$ e $ss^{-1}$ são idempotentes, $s(s^{-1}s) = s$ e $(ss^{-1})s = s$;*

3. *$(s^{-1})^{-1} = s$;*

4. *Para todo idempotente $e \in E(S)$ e o elemento $s^{-1}es$ é um idempotente;*

5. *Para todo idempotente $e \in E(S)$ e elementos $s$ existe um idempotente $f$ tal que $es = sf$;*

6. *Para todo idempotente $einE(S)$ e $s \in S$ existe um $f \in E(S)$ tal que $se = fs$.*

**Prova.**

(1) Imediato.

(2) Observamos que, por um lado $(s^{-1}s)^2 = s^{-1}ss^{-1}s = s^{-1}(ss^{-1}s) = s^{-1}s$ e com isto $ss^{-1}s = s$. Por outro lado $(ss^{-1})^2 = ss^{-1}ss^{-1} = ss^{-1}$. Logo $ss^{-1}s = s$.

(3) Observamos que $s^{-1}(s^{-1})^{-1}s^{-1} = s^{-1}$ e $(s^{-1})^{-1}s^{-1}(s^{-1})^{-1} = (s^{-1})^{-1}$. Pela unicidade do inverso obtemos $s = (s^{-1})^{-1}$.

(4) Notamos que $(s^{-1}es)^2 = (s^{-1}es)(s^{-1}es) = s^{-1}ess^{-1}es$. Como $e$ e $ss^{-1}$ são idempotentes assim eles comutam, segue que $s^{-1}ess^{-1}es = s^{-1}ss^{-1}ees = s^{-1}es$. Logo, $s^{-1}es$ é um idempotente.

(5) Seja $f = s^{-1}es$. Então, por (4), $f$ é um idempotente. Assim $sf = s(s^{-1}es) = ss^{-1}es = ess^{-1}s = es$. Logo $fs = es$.

(6) É similar a prova do item 5. ■

**Definição 1.1.6** *Sejam $S$ e $S'$ semigrupos. Dizemos que uma aplicação $f : S \to S'$ é um homomorfismo de semigrupos se satisfazer $f(sr) = f(s)f(r)$, para todo $s, r \in S$. É fácil ver que se $S$ e $S'$ são semigrupos inversos, então, $f(s^{-1}) = f(s)^{-1}$, para todo $s \in S$. Dizemos ainda, que $f$ é 0-restrito se $f^{-1}\{0'\} = \{0\}$. Onde $0'$ e $0$ denotam os zeros de $S'$ e $S$, respectivamente.*

## 1.2 Ideais em semigrupos

Sabemos que num grupo $G$ não existem ideais próprios gerados por um elemento $x$ pois $G \cdot x = x \cdot G = G$, para todo $x \in G$, o mesmo não ocorre em semigrupos em geral. A seguir definiremos ideais e ideais gerados em semigrupos.

**Definição 1.2.1** Sejam $S$ um semigrupo e $I$ um subconjunto não-vazio de $S$. Dizemos que $I$ é um ideal à esquerda (direita) se $s.a \in I$ $(a.s \in I)$ para cada $a \in I$ e cada $s \in I$.

**Observação 1.2.2** *Dado $s \in S$, ao menor ideal (à esquerda, direita ou bilateral) que contém $s$ chamamos de ideal principal gerado por $s$.*
*Observamos que $s = s \cdot (s^{-1}s) = (s \cdot s^{-1}) \cdot s$ temos que $s \in S \cdot s$, $s \in s \cdot S$ e ainda $s \in S \cdot s \cdot S$. Assim, não é difícil provar que $S \cdot s, s \cdot S$ e $S \cdot s \cdot S$ são os ideais principais gerados por $s$, respectivamente, à esquerda, à direita e bilateral.*

**Proposição 1.2.3** *Seja $S$ um semigrupo inverso. As seguintes condições são verdadeiras:*

1. *$aS = aa^{-1}S$ para qualquer $a \in S$ e $aa^{-1}$ é único gerador de $aS$;*
2. *$Sa = Saa^{-1}$ para qualquer $a \in S$ e $a^{-1}a$ é único gerador de $Sa$;*
3. *$eS \cap fS = efS$, onde $e$ e $f$ são idempotentes;*
4. *$Se \cap Sf = Sef$, onde $e$ e $f$ são idempotentes.*

**Prova.** (1) Notamos que $aS = aa^{-1}aS = (aa^{-1})aS \subseteq aa^{-1}S$, pois $aS \subseteq S$. Assim $(aa^{-1})aS \subseteq aa^{-1}S \subseteq aS$. Segue que, $aS = aa^{-1}S$. Agora, seja $e$ um idempotente tal que $aS = eS$. Então $aa^{-1}S = eS$. Deste modo, $aa^{-1} = es$ e

$e = aa^{-1}t$ para algum $s, t \in S$. Segue que, $eaa^{-1} = aa^{-1}$ e $aa^{-1}e = e$. Como em um semigrupo inverso os idempotentes comutam, então $e = aa^{-1}$.
(2) Análogo ao item (1).
(3) Seja $a \in eS \cap fS = efS$. Então, $ea = a$ e $fa = a$. Assim, $(ef)a = e(fa) = ea = a$. Segue que $a \in efS$.
Por outro lado, se $a \in efS$, então, $ea = a$ e $fa = a$, pois os idempotentes comutam. Logo, $a \in fS = efS$.
(4) Análogo ao item (3). ■

## 1.3 Uma ordem parcial natural num semigrupo inverso

Usando o Lema 1.2.3, podemos definir uma relação $\leq$ sobre um semigrupo inverso $S$, do seguinte modo: sejam $s, t \in S$, dizemos que $s \leq t$ se existir um idempotente $e \in S$ tal que $s = t \cdot e$.

**Lema 1.3.1** *Seja $S$ um semigrupo inverso. As seguintes condições são equivalentes:*

1. $s \leq t$;
2. $s = ft$ *para algum idempotente* $f$;
3. $s^{-1} \leq t^{-1}$;
4. $s = ss^{-1}t$;
5. $s = ts^{-1}s$.

**Prova.** (1) $\Rightarrow$ (2) Se $s \leq t$, então, $s = te$, e pelo Lema 1.1.5 item (6) temos que $s = te = ft$, logo, $s = ft$ para algum idempotente $f$.

(2) $\Rightarrow$ (3) Se $s = ft$ para algum idempotente $f$, então, $s^{-1} = t^{-1}f$. Assim, por definição $s^{-1} \leq t^{-1}$.

(3) $\Rightarrow$ (4) Se $s^{-1} \leq t^{-1}$, então, $s^{-1} = t^{-1}e$ para algum idempotente $e$. Observamos que $(s^{-1})^{-1} = (t^{-1}e)^{-1}$, ou seja, $s = et$. Por outro lado $es = s$, e segue que $ess^{-1} = ss^{-1}$. Logo $s = ss^{-1}t$.

(4) $\Rightarrow$ (5) Se $s = ss^{-1}t$ e $s = te$, então $s = se$ e $s^{-1}se = s^{-1}s$. Logo, $s = ts^{-1}s$.

(5) $\Rightarrow$ (1) Se $s = ts^{-1}s$, então, $s = te$ para algum idempotente $e$. Logo, $s \leq t$. ■

**Observação 1.3.2** *Agora podemos ver que a relação acima definida é de ordem como segue:*

- *Reflexiva: É imediato da proposição 1.1.5 pois,* $s(s^{-1}s) = s$;

- *Antissimétrica:* $s \leq t$ *e* $t \leq s$, *então,* $s = ts^{-1}s$ *e* $t = st^{-1}t$. *Assim,* $s = ts^{-1}s = st^{-1}ts^{-1}s = st^{-1}t = t$;

- *Transitiva:* $s \leq t$ *e* $t \leq u$, *então,* $s = te$ *e* $t = uf$ *para algum* $e, f \in S$. *Logo,* $s = te = (uf)e = u(fe)$ *e portanto,* $s \leq u$.

**Proposição 1.3.3** *Seja* $S$ *semigrupo inverso. As seguintes afirmações são válidas:*

1. *Para* $e, f \in E(S)$ *temos que* $e \leq f \Leftrightarrow e = ef = fe$;

2. *Se* $s \leq t$ *e* $u \leq v$, *então* $su \leq tv$;

3. *Se* $s \leq t$, *então* $s^{-1}s \leq t^{-1}t$ *e* $ss^{-1} \leq tt^{-1}$ .

4. *Se* $s \leq t$, *então* $asb \leq atb$ *para todo* $a, b \in S$.

**Prova.** (1) Suponhamos que para idempotentes $e, f \in S$ tenhamos $e \leq f$. Desse modo, $e = fi$ para algum idempotente $i$. Como, $fe = ffi = fi$, então $e = fe$. desde que $e, f$ são idempotentes eles comutam, temos que $e = fe = ef$.

(2) Como $s \leq t$, então $s = te$, para algum idempotente $e$ e ainda $u \leq v$, então, $u = vf$ para algum $f$ idempotente. Notamos que $su = te(vf)$ pelo item (6) da Proposição 1.1.5 segue que $ev = vi$, assim $su = tevf = tv(if)$. Logo, $su \leq tv$.

(3) Pelo item (3) da Proposição 1.3.1 segue que $s^{-1} \leq t^{-1}$ e por hipótese $s \leq t$, logo, pelo item (2) temos que $s^{-1}s \leq t^{-1}t$ e $ss^{-1} \leq tt^{-1}$.

(4) Como $s \leq t$, então, $s = te$ para algum idempotente $e$. Sejam $a, b \in S$ qualquer,tais que $asb = ateb$, como $eb = bf$ para algum $f \in E(S)$, então, $asb = atbf$. Logo, $asb \leq atb$ para todo $a, b \in S$. ■

Consideremos a relação $\leq$ em $E(S)$ por $e \leq f \Leftrightarrow e = ef = fe$. É fácil ver que $\leq$ é uma relação de ordem parcial em $E(S)$.

**Exemplo 1.3.4** Dado o semigrupo inverso $I(X)$, consideremos $f : X_1 \to Y_1$ e $g : X_2 \to Y_2$ onde $X_1, X_2, Y_1, Y_2 \subseteq X$ e $X_1 \subseteq X_2$ e $Y_1 \subseteq Y_2$. Tome o idempotente $1_{X_1} : X_1 \to X_1$. Então, $f \leq g$ se, e somente se $g \circ 1_{X_1} : X_1 \to Y_2 \subseteq Y_1$,ou seja, $g \circ 1_{X_1} = f$.

## 1.4 Ações de grupos, monóides e semigrupos

No Capítulo 2 iremos estabelecer o que conceito de ação de uma categoria sobre um conjunto e mostraremos que esta definição generaliza o conceito de ação de monóides sobre conjuntos. Nesta seção vamos estudar ações de grupos, monóides e semigrupos sobre um conjunto.

**Definição 1.4.1** Sejam $G$ um grupo (monóide) e $X$ um conjunto qualquer onde $e$ é a identidade de $G$. *Uma ação do grupo (monóide) $G$ sobre o conjunto $X$* é uma aplicação $G \times X \to X$, com $(a, x) \mapsto a \cdot x$ para todo $a \in G$ e todo $x \in X$ tal que as seguintes conclusões são satisfeitas:

1. $(ab) \cdot x = a \cdot (b \cdot x)$ para todo $a, b \in G$ e todo $x \in X$. (A concatenação representa a operação do grupo (monóide));

2. $e \cdot x = x$ para todo $x \in X$.

Observamos que no caso de $G$ é um grupo a definição equivale a existência de uma aplicação $\varphi : G \to Aut(X)$ com $g \mapsto \varphi(g) : X \mapsto X$, onde $Aut(X)$ denota o conjunto das bijeções sobre $X$, satisfazendo $\varphi(g) \circ \varphi(h)(x) = \varphi(gh)(x)$ e $\varphi(e) = I_X$. No caso em que $G$ é um monóide, então, cada $g \in G$ corresponde a um endomorfismo sobre $X$, ou seja, a definição equivale a a existência de uma aplicação $\varphi : G \to End(X)$ com $g \mapsto \varphi(g) : X \mapsto X$, onde $End(X)$ denota o conjunto das funções de $X$, satisfazendo $\varphi(g) \circ \varphi(h)(x) = \varphi(gh)(x)$ e $\varphi(e) = I_X$.
De fato, se existe $G \times X \to X$ com $(g, x) \mapsto g \cdot x$ onde, para todo $a, b \in G$ e $x \in X$ temos que $(ab) \cdot x = a \cdot (b \cdot x)$ e $e \cdot x = x$. Então, para cada $g \in X$ definiremos a função : $g : X \to X$ com $x \mapsto \varphi(g)(x) = g \cdot x$.

Vale observar que no caso de $G$ ser um grupo $g^{-1}$ é a aplicação inversa de $g$ em $Aut(X)$, enquanto que em monóides $g^{-1}$ não precisa estar definida.

**Exemplo 1.4.2** Sejam $G$ um grupo cíclico de ordem 3 gerado por $g$ e $X = \{1, 2, 3\}$. Definimos $g : X \to X$, por $g(x_1) = x_2; g(x_2) = x_3$ e $g(x_3) = x_1$. É fácil ver que temos uma ação de $G$ sobre $X$.

Vamos agora generalizar este conceito para semigrupos

**Definição 1.4.3** Sejam $S$ um semigrupo e $X$ um conjunto qualquer. Dizemos que $S$ age em $X$ à esquerda se existe uma aplicação $S \times X \longrightarrow X$ denotada por $(a, x) \longmapsto a \cdot x$ tal que $(ab) \cdot x = a \cdot (b \cdot x)$ para todo $a, b \in S$ e $x \in X$. O conjunto $X$ equipado com uma ação à esquerda de $S$ é chamado de *$S$-sistema à esquerda*.

No que segue, usaremos a seguinte notação: Sejam $X$ um $S$-sistema à esquerda, $X' \subseteq X$ e $S' \subseteq S$. Denotamos por $S' \cdot X' = \{a \cdot x : a \in S', x \in X'\}$.

Para as próximas definições consideremos $X$ e $Y$ dois $S$-sistemas à esquerda.

**Definição 1.4.4** Uma aplicação $\theta : X \longrightarrow Y$, $\theta$ é um *$S$-homomorfismo* se $\theta(a \cdot x) = a \cdot \theta(x)$, para todo $a \in S$ e $x \in X$. Se $\theta$ for uma bijeção dizemos que $\theta$ é um $S$-isomorfismo à esquerda.

**Definição 1.4.5** Seja $X_1 \subseteq X$. Dizemos que $X_1$ é S-invariante , se para todo $s \in S$, $s \cdot X_1 \subseteq X_1$, ou seja, $a \cdot x \in X_1$ para qualquer $a \in S$ e $x \in X_1$. Neste caso $X_1$ é um $S$-sistema à esquerda e, que chamarmos de *$S$-Subsistema à esquerda*. Além disso, se $X_1 = S \cdot x := S \cdot \{x\}$ para algum $x \in X$, dizemos que $X_1$ é *cíclico*.

Vejamos uma classe importante de $S$-homomorfismos.

**Exemplo 1.4.6** Consideremos os subsistemas cíclicos $S \cdot x$ para $x \in X$. Para cada $a \in S$ defina $p_a : S \to S$, onde $p_a(x) = x \cdot a$. Para cada $a \in S$, temos que $p_a$ é um $S$-homomorfismo, pois $p_a(s \cdot x) = p_a(sx) = (sx) \cdot a = s \cdot (xa) = s \cdot (xa) = s \cdot p_a(x)$.

**Proposição 1.4.7** *Denotemos por $\tilde{S}$ ao conjunto de todos os $S$-isomorfismos entre ideais principais à esquerda de um semigrupo inverso $S$. Então, $\tilde{S}$ é um* *subsemigrupo inverso de $I(S)$, onde $I(S)$ é o semigrupo inverso das bijeções parciais sobre $S$.*

**Prova.** É claro que $\tilde{S} \subseteq I(S)$. Iremos mostrar que $\tilde{S}$ é fechado em relação a composição de seus elementos e que preserva inversos. De fato, se $\theta : Sa \to Sb \in \tilde{S}$, então, temos que $\theta^{-1} : Sb \to Sa \in \tilde{S}$. Sejam $\theta : Sa \to Sb$ e $\varphi : Sc \to Sd$ em $\tilde{S}$. Então, $\theta \circ \varphi : \varphi^{-1}(Sb \cap Sc) \to \theta(Sb \cap Sc)$. Pela Proposição 1.2.3, podemos considerar $b$ e $c$ idempotentes e ainda $Sb \cap Sc = Sbc$, e com isto resta provar que para todo $f \in \tilde{S}$ e $I$ um ideal à esquerda contido na imagem de $f$, temos $f(I)$ é um ideal principal à esquerda. Primeiramente, temos que todo inverso de um $S$-isomorfismo à esquerda é outro $S$-isomorfismo à esquerda. Sejam $\alpha$ um $S$-isomorfismo à esquerda, $t \in r(\alpha)$ e $r \in S$. Então, $(t)\alpha^{-1} \in d(\alpha)$ tal que $(r(t)\alpha^{-1})\alpha = r((t)\alpha^{-1})\alpha = rt$. Assim, $(rt)\alpha^{-1} = r(t)\alpha^{-1}$.
Por outro lado, observe que se $I$ é um ideal à esquerda que contém $d(\alpha)$, então, $\alpha I$ contém $r(\alpha)$. Sejam $r' \in \alpha I$ e $s \in S$. Então, $r' = (r)\alpha$, para algum $r \in I$. Mas $sr \in I$, tal que $(sr)\alpha \in I\alpha$. Portanto,$(sr)\alpha = \alpha(r)s = r's$.
Agora sejam $\alpha, \beta$ dois $S$-isomorfismos. Suponha que a interseção de $\alpha$ e $\beta$ é não vazia. Observe que $\beta^{-1}(d(\alpha) \cap r(\beta))$ é um ideal que contém $d(\beta)$ e $(d(\alpha) \cap r(\beta))\alpha$ é um ideal que contém a $r(\alpha)$. Assim $\beta\alpha$ é uma bijeção entre estes dois ideais. Observe que $(\beta\alpha)(rs) = \beta(\alpha(rs)) = \beta(\alpha(r)s) = \beta(\alpha(r))s = (\beta\alpha)(r)s$, ou seja, temos um $S$-homomorfismo. Logo $\theta \circ \varphi \in \tilde{S}$. ■

O Próximo resultado que enunciaremos é conhecido como sendo o Teorema de Wagner-Preston que é uma espécie de generalização do Teorema de Cayley para grupos que afirma que todo grupo $G$ é isomorfo a um subgrupo de um grupo de permutações de um conjunto.

**Teorema 1.4.8** *(Teorema de Wagner-Preston) Seja $S$ um semigrupo inverso. Então existe um conjunto $X$ e um homomorfismo injetor $\theta : S \to$*

*$I(X)$ tal que $a \leq b$ se e somente se $\theta(a) \subseteq \theta(b)$.*

**Prova.**

Para cada elemento $a \in S$ defina $\theta_a : a^{-1}aS \to aa^{-1}S$ por $\theta_a(x) = ax$, que está bem definida, pois $aS = a^{-1}aS$.
Observe que $\theta_a^{-1} : aa^{-1}S \to a^{-1}aS$ e que $\theta_a^{-1}\theta_a$ é uma identidade em $a^{-1}aS$ e $\theta_a\theta_a^{-1}$ é uma identidade em $aa^{-1}S$. Assim $\theta_a$ é uma bijeção e $\theta_a^{-1} = \theta_{a_{-1}}$.
Defina $\theta : S \to I(S)$ por $\theta(a) = \theta_a$. Mostremos $\theta_a\theta_b = \theta_{ab}$, assim de um lado temos que $d(\theta_a \cap r(\theta_b)) = a^{-1}aS \cap bb^{-1}S = a^{-1}abb^{-1}S$ e por outro $d(\theta_{ab}) = \theta_b^{-1}(a^{-1}abb^{-1}S) = b^{-1}a^{-1}aS = b^{-1}a^{-1}abS$, então, $d(\theta_{ab}) = d(\theta_a\theta_b)$.
Suponha que $a \leq b$, então, em particular $a^{-1}a \leq b^{-1}b$ tal que $a^{-1}aS \subseteq b^{-1}bS$.
Seja $x \in a^{-1}aS$. Então, $\theta_b(x) = bx = b(a^{-1}ax) = ax = \theta_a$. Assim, $\theta_a \subseteq \theta_b$.
Analogamente, mostra-se que $\theta_b \subseteq \theta_a$. Por definição $a^{-1}aS \subseteq b^{-1}bS$. Agora $a^{-1} \in a^{-1}aS$. Por hipótese, $\theta_a(a^{-1}) = \theta_b(a^{-1})$. Assim, $aa^{-1} = ba^{-1}$ e $a = ba^{-1}a$. Portanto, $a \leq b$. É imediato que $\theta$ é injetiva. ■

## 1.5 Categorias e funtores

Nos próximos capítulos estudaremos ações de categorias sobre conjuntos e construiremos funtores entre certas categorias. Assim finalizamos este capítulo com uma pequena relação de definições que são importantes para os próximos capítulos.

**Definição 1.5.1** Uma *categoria* é formada por: objetos $a, b, c, ...$ e morfismos $f : a \to b$; com uma operação (parcialmente definida) entre os morfismos, ou seja, dados $f : a \to b$ e $g : b \to c$, existe um morfismo $g \circ f : a \to c$.
Esta operação deve ser associativa e para cada objeto $a$ existe um morfismo identidade: $Id_a : a \to a$.

Denotaremos por $Ob(C)$ (ou simplesmente por $C$ se não houver confusão) ao conjunto formado pelos objetos de $C$ e $C(a, b)$ ao conjunto dos morfismos entre $a, b \in C$.

Quanto a subestruturas de uma categoria temos

**Definição 1.5.2** Sejam $C$ e $D$ categorias. Dizemos que $D$ é uma subcategoria de $C$ se as seguintes condições são satisfeitas:

1. *$Ob(D) \subset Ob(C)$;*

2. *dados $a, b \in Ob(Hom)$ temos $Hom(a, b) \in Hom(a, b)$;*

3. *dados $a, b, c \in Ob(Hom)$, $f \in Hom(a, b)$ e $g \in Hom(b, c)$, a composição $g \circ f$ em $D$ coincide com sua composição em $C$.*

Em particular, se $Hom(a, b) = Hom(a, b)$, para todo $a, b \in Ob(D)$ dizemos que $D$ é uma *subcategoria cheia* de $C$.

Em relação aos objetos existem dois tipos que vamos destacar: objetos iniciais e finais. Sejam $a \in Ob(C)$, se $Hom(a, x)$ consiste de um elemento para cada $x \in C$, então $a$ é chamado um *objeto inicial* de $C$. E ainda, se para cada $x \in ob(C)$, $Hom(x, a)$ é um conjunto com um único elemento, então o objeto $x$ é um *objeto terminal*.

Os operadores que associam duas categorias são os chamados funtores que definiremos a seguir.

**Definição 1.5.3** Sejam $C$ e $D$ categorias. Um *funtor* $F : C \to D$ satisfaz as seguintes condições:

1. para todo $a \in Ob(C)$ existe um único $F(a) \in Ob(D)$;

2. para cada $f \in Hom(a, b)$ associamos um único $F(f) \in Hom(F(a), F(b))$ e se $f : a \to b$ e $g : b \to c$, então, $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$;

3. $F(Id_a) = Id_{F(a)}$, para todo $a \in Ob(C)$.

**Definição 1.5.4** Sejam $a, b \in Ob(C)$, $f \in Hom(a, b)$ e $x, y \in Ob(C)$. Definimos $h_x(f) : Hom(x, a) \to Hom(x, b)$ e $h_y(f) : Hom(b, y) \to Hom(a, y)$ por $h_x(f)(g) = f \cdot g$ e $h_y(f)(s) = f \cdot s$, respectivamente. Se existe $v \in Hom(b, a)$ tal que $f \cdot v = 1_a$ e $v \cdot f = 1_b$, então $v$ é chamado de C-isomorfismo.

**Definição 1.5.5** Sejam $F, G$ funtores entre as categorias $C$ e $D$. Se para cada $x \in Ob(C)$ existe um morfismo $\tau_x : F(x) \to G(x)$ de $D$, chamado de componente de $\tau$ em $x$,tal que para cada morfismo $f \in Hom(x, y)$ o seguinte diagrama seja comutativo

$$\begin{array}{ccccc} & F(x) & \xrightarrow{\tau_x} & G(x) & \\ {\scriptstyle F(f)} & \downarrow & & \downarrow & {\scriptstyle G(f)} \\ & F(y) & \xrightarrow{\tau_y} & G(y) & \end{array}$$

*Então, $\tau$ é chamada de uma* transformação natural *do funtor $F$ para o funtor $G$ que é denotada simplesmente por $\tau : F \to G$.*

**Exemplo 1.5.6** *Sejam $C = D = Gr$ a categoria dos grupos, onde os morfismos são os homomorfismos de grupos. Os funtores identidade $I$ e o funtor oposto $H : Gr \to Gr$ que associa o objeto $G$ ao seu grupo oposto $G^op$ são naturalmente transformados por $\tau_G : I(G) \to H(G)$ onde $\tau_G(g) = g^{-1}$ para todo $g \in G$. De fato, desde que $f(g^{-1}) = f(g)^{-1}$ para todo homomorfismo de grupos $f$ e todo $g$ em $G$, temos que $H(f) = f^o = f$, temos que o diagrama abaixo é comutativo*

$$\begin{array}{ccccc} & G & \xrightarrow{\tau_G} & G^o & \\ {\scriptstyle I(f)=f} & \downarrow & & \downarrow & {\scriptstyle G(f)=f.} \\ & H & \xrightarrow{\tau_H} & H^o & \end{array}$$

Iremos definir a seguir o que é uma equivalência entre duas categorias, lembrando que este é o objetivo principal deste trabalho.

**Definição 1.5.7** *Sejam $C$ e $D$ duas categorias. Se existirem os funtores $F : C \to D$ e $G : D \to C$ tais que $G \circ F \cong Id_C$ e $F \circ G \cong Id_D$, dizemos que as categorias $C$ e $D$ são categorias equivalentes. Em particular se $G \circ F = Id_C$ e $F \circ G = Id_D$ temos que as categorias $C$ e $D$ são isomorficas.*

# Capítulo 2

# Ações de Categorias e Semigrupos Inversos

Iniciaremos com um conceito particular de categoria (definição geral está na seção 1.5) que generaliza a estrutura de monóides. Estas categorias são chamadas na literatura de "small"categorias, que são categorias tais que a união dos objetos e seus morfismos formam um conjunto. Em seguida, com objetivo de generalizar as idéias da Seção 1.4, definimos ações de categorias sobre um conjunto. A essa dupla (conjunto e ação) chamamos de sistema à esquerda, e exigindo a este sistema à esquerda alguma condição a mais, teremos o que chamamos simplesmente de um sistema. A partir de um sistema iremos construir um semigrupo inverso associado e finalizamos o capítulo, mostrando que o processo pode ser de alguma forma revertido (é o que veremos nos Capítulos 3 e 4), construindo a partir de um semigrupo inverso, um sistema.

## 2.1 Redefinindo categoria

Vamos trabalhar com uma classe particular de categorias (ver seção 1.4) de tal modo que possamos ver claramente que tal definição generaliza a estrutura de monóide. Estas categorias são chamadas na literatura de "small" categorias.

**Definição 2.1.1** Sejam $C$ um conjunto e $\cdot$ uma operação binária parcialmente definida. Dizemos que $C$ é uma categoria se para todo $x, y, z \in C$ as seguintes condições são satisfeitas:
$C_1$. *$\exists x \cdot (y \cdot z) \Leftrightarrow \exists (x \cdot y) \cdot z$ e se existirem, temos que $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$;*
$C_2$. *$\exists x \cdot (y \cdot z) \Leftrightarrow \exists x \cdot y$ e $\exists y \cdot z$;*
$C_3$. *Existem $e, f \in C$, tal que para qualquer $x \in C$ se existir $x \cdot e$, então, $x \cdot e = x$ e se existir $f \cdot x$, então, $f \cdot x = x$.*

Aos elementos $e, f \in C$ satisfazendo $C_3$, chamaremos de identidades de $C$. Denotamos o conjunto de todas as identidades de $C$, por $C_0$.

Vejamos alguns exemplos

**Exemplo 2.1.2** É fácil ver que um monóide é um exemplo de categoria, pois a operação está sempre definida satisfazendo as condições acima definidas. O conjunto das identidades de um monóide é unitário.

**Exemplo 2.1.3** Sejam $l \in \mathbb{Z}$, com $l$ positivo. Consideremos $\mathtt{M} = \bigcup_{m,n \leq l} M_{n\times m}(\mathbb{R})$, onde $M_{n\times m}(\mathbb{R})$ são matrizes de ordem $m$ por $n$, com entradas em $\mathbb{R}$. Dadas $A \in M_{r\times s}$ e $B \in M_{s\times t}$ dizemos que existe $A \cdot B$ cujo resultado é uma matriz $C \in M_{r\times t}$ obtida pelo produto usual. Dessa maneira, temos que $\mathtt{M}$ é uma categoria onde $\mathtt{M}_0 = \{I_n, n = 1, 2, ..., l\}$, onde $I_n$ denota a matriz identidade de ordem $n$.

Podemos ver que as identidades associadas a um elemento da categoria são únicas

**Lema 2.1.4** *Para cada $x \in C$ existem únicos $e, f$ que satisfazem (C3) da Definição 2.1.1.*

**Prova.** Do item $C_3$ da definição 2.1.1 para qualquer $x \in C$ existem $e, f$ tais que existem $x \cdot e = x$ e $f \cdot x = x$. Suponhamos que exista $e'$ tal que $\exists x \cdot e' = x$. Assim $\exists x \cdot e' = (x \cdot e) \cdot e'$, e segue que $\exists (x \cdot e) \cdot e'$.
Do item $C_2$ obtemos que, $\exists e \cdot e'$. Desde que $e, e' \in C_0$, temos que $e = e \cdot e' = e'$. Analogamente se prova que $f$ é única. ■

De agora em diante, denotaremos por $d(x)$ e $r(x)$ as identidades de $x$ tais que $r(x) \cdot x = x$ e $x \cdot d(x) = x$.

**Proposição 2.1.5** *Seja $C$ uma categoria e $x, y \in C$. Então $\exists x \cdot y$ se, e somente se $d(x) = r(y)$.*

**Prova.** ($\Rightarrow$) Pela Condição $C_3$ da Definição 2.1.1, para $x \in C$ temos $x \cdot d(x) = x$. Assim, se $\exists x \cdot y$, então, $x \cdot y = (x \cdot d(x)) \cdot y$. Por $C_2$ $\exists d(x) \cdot y$, como $d(x)$ é uma identidade $d(x) \cdot y = y$. Por outro lado temos $r(y) \cdot y = y$. Do Lema 2.1.4 sabemos que $e, f$ são únicos, logo $r(y) = d(x)$.
($\Leftarrow$) Se $d(x) = r(y)$, então, $\exists x \cdot d(x)$ e $r(y) \cdot y$. Assim $r(y) \cdot y = d(x) \cdot y$. Por $C_2$ existe $(x \cdot d(x)) \cdot y = x \cdot y$. Portanto, existe $x \cdot y$. ■

**Observação 2.1.6** Esta definição é um caso particular da Definição 1.5.1 da Seção 1.5. Aqui, os objetos são as identidades e os morfismos são dados por $C(e, f) = \{x \in C : d(x) = e \text{ e } r(x) = f\}$ para todo $e, f \in Obj(C)$. Na definição só podemos "compor" $x$ por $y$ quando o domínio de $x$ é igual a imagem de $y$ que é exatamente o que mostra a Proposição 2.1.5.

## 2.2 Ações de categorias, sistemas e morfismos entre sistemas

Vamos agora, definir uma ação de uma categoria sobre um conjunto, generalizando os conceitos da Seção 1.4. Usaremos de agora em diante, a concatenação $ab$ ao invés de $a \cdot b$ para indicar a operação de $a$ por $b$ e que $\exists a \cdot b$.

**Definição 2.2.1** Sejam $C$ uma categoria, $X$ um conjunto, e $p : X \longrightarrow C_0$ uma função. Considere o conjunto

$$C * X = \{(a, x) \in C \times X : d(a) = p(x)\}$$

Consideremos ainda, que exista uma aplicação $C * X \longrightarrow X$ onde

$$(a, x) \longmapsto a \cdot x.$$

Nestas notações, dizemos que $\exists a \cdot x$ se $(a, x) \in C * X$. Dizemos que C é uma *ação* em X à esquerda ou que $C$ age sobre $X$ à esquerda se valem as seguintes condições:

$A_1$. *$\exists p(x) \cdot x$ e $p(x) \cdot x = x$, para todo $x \in X$ ;*

$A_2$. *se $\exists a \cdot x$, então, $p(a \cdot x) = r(a)$;*

$A_3$. *se $\exists ab \in C$ e $\exists (ab) \cdot x$ então $\exists b \cdot x$ e $\exists a \cdot (b \cdot x)$ e $(ab) \cdot x = a \cdot (b \cdot x)$.*

*Neste caso, dizemos que $X$ é um $C$-*sistema à esquerda *e usamos a notação $_CX$ para denotar tal sistema.*

**Exemplo 2.2.2** Toda ação de monóide sobre um conjunto é uma ação de categoria à esquerda. De fato, seja $M$ um monóide agindo sobre um conjunto $X$, pela aplicação $\varphi : M \times X \to X$ (veja seção 1.3). Observando que $M_0 = \{e\}$, onde $e$ é a identidade de $M$, então definimos $p(x) = e = d(x) = r(x)$, para todo $x \in X$. Temos $M * X = M \times X$ e as condições da Definição 2.2.1 são trivialmente satisfeitas, desde que $m \cdot x = \varphi(m, x)$.

**Exemplo 2.2.3** Seja $\mathtt{M} = \bigcup_{m,n \leq l} M_{n\times m}(\mathbb{R})$ a categoria do Exemplo 2.1.3.

1. Consideremos $X = \{1, 2, ..., l\}$. Definimos $p : X \to \mathtt{M}_0$ por $p(n) = I_n$ para todo $n \in 1, 2, ..., l$. Assim $\mathtt{M} * X = \{(A_{s\times k}, k) : \text{para todo} s, k \in X\}$. Definimos $\mathtt{M}*X \to X$ por $(A_{s\times k}, k) \mapsto s$,e que temos $A_1, A_2$ e $A_3$ da Definição 2.2.1 são satisfeitas.

2. Consideremos $Y = \{(a, b)1 \leq a, b \leq l\}$. Definimos $p : Y \to \mathtt{M}_0$ por $p(a, b) = I_a$ para todo $(a, b) \in Y$ e temos $\mathtt{M}*X = \{(A_{s\times k}, (k, t)) : 1 \leq s, k, t \leq l\}$. Seja $\mathtt{M} * X \to X$ definido por $(A_{s\times k}, (k, t)) \mapsto (s, t)$ temos $A_1, A_2$ e $A_3$ da Definição 2.2.1 são também satisfeitas.

Iremos agora, definir subsistemas e subsistemas cíclicos aos moldes das ações definidas na Seção 1.4.

**Definição 2.2.4** Sejam $X$ um $C$-sistema à esquerda e $Y \subseteq X$. Dizemos que $Y$ é $C$-invariante se $C \cdot Y := \{a \cdot y : a \in C, y \in Y\} \subseteq Y$. Neste caso, $Y$ é um C-sistema à esquerda e, que chamamos de *$C$-subsistema à esquerda*. No caso em que $Y = \{x\}$ usamos a notação $C \cdot x$ para denotar $C \cdot Y$ e dizemos que $Y$ é *cíclico*.

**Observação 2.2.5** *Vale observar que $Y = \phi$ é $C$-invariante.*

**Exemplo 2.2.6** No $C$-sistema do Exemplo 2.2.3 item 1. os $\mathtt{M}$-subsistemas cíclicos à esquerda são dados por $\mathtt{M} \cdot x = X$, para todo $x \in X$. Assim, $X$ não possui $C$-subsistemas próprios à esquerda. No $\mathtt{M}$-sistema à esquerda $Y$ do item 2 do mesmo exemplo, os $\mathtt{M}$-subsistemas cíclicos à esquerda são dados por $\mathtt{M} \cdot \{(s, k)\} = \{(t, k) : 1 \leq s \leq l\}$.

No que segue usamos a Definição de funtores dada na Seção 1.5.

**Definição 2.2.7** sejam $C * X \longrightarrow X$ e $D * Y \longrightarrow Y$ dois $C$-Sistemas, munidos com as funções $p : X \to C_0$ e $\acute{p} : X \to D_0$. Um *morfismo* de ${}_CX$

para ${}_DY$ é um par $(F, \theta)$ constituido de um funtor $F : C \longrightarrow D$ e uma função $\theta : X \longrightarrow Y$ que satisfazem as seguintes condições:

$M_1$. $\acute{p}(\theta(x)) = F(p(x))$, para todo $x \in X$;

$M_2$. se $\exists a \cdot .x \in C * X$, então $\theta(a \cdot x) = F(a) \cdot \theta(x)$.

Ainda, se tivermos C=D e F for o funtor identidade, então dizemos que $\theta$ é um $C$-homomorfismo. Se além disso, $\theta$ for uma bijeção, então dizemos que $\theta$ é um $C$-isomorfismo.

**Exemplo 2.2.8** No Exemplo 2.2.6, consideremos $F : \mathtt{M} \to \mathtt{M}$ o funtor identidade e $\theta : Y \to X$ dada por $\theta(a, b) = a$ para todo $(a, b) \in Y$. Neste caso as seguintes condições são satisfeitas

M1. $p(\theta(a, b)) = I_a = p(a)$ para todo $(a, b) \in Y$ e

M2. $\theta(A_{a\times b} \cdot (b, c)) = a = \theta(a, c)$ para todo $a, b, c \in \{1, ..., l\}$.

Logo $(F, \theta)$ é um $\mathtt{M}$-morfismo.

De agora em diante não mais distingueremos $p$ de $\acute{p}$ ao tratarmos com morfismos de sistemas à esquerda.

**Lema 2.2.9** *Sejam ${}_CX$ e ${}_CY$ $C$-sistemas à esquerda e $\theta : X \to Y$ um $C$-isomorfismo. Então $\theta^{-1} : Y \to X$ é um $C$-isomorfismo.*

**Prova.** Como $\theta$ é bijeção, então existe $\theta^{-1}$ que também é uma bijeção, logo basta mostrar que $\theta^{-1}$ satisfaz as condições M1 e M2 da Definição 2.2.7. De fato, sejam $y \in Y$ e $x \in X$ tal que $y = \theta(x)$, como $\theta$ é um isomorfismo, obtemos que $p(y) = p(\theta(x)) = p(x)$. Desde que $\theta^{-1}(y) = x$, então $p(y) = p(\theta^{-1}(y))$ e com isto a propriedade M1 esta provada.

Agora sejam $y = \theta(x)$ e $x = \theta^{-1}(y)$, como acima. Assim $\theta^{-1}(a \cdot y) = \theta^{-1}(a \cdot \theta(x)) = \theta^{-1}(\theta(a \cdot x)) = a \cdot x = a \cdot \theta^{-1}(y)$. Logo, $\theta^{-1}(a \cdot y) = a \cdot \theta^{-1}(y)$.

■

**Lema 2.2.10** *Sejam ${}_CX$ um $C$-sistema à esquerda, $A$ e $B$ subconjuntos $C$-invariantes de $X$ e $\theta : A \to B$ um $C$-isomorfismo. Então as seguintes afirmações são válidas:*

1. *Se $A' \subseteq A$ é $C$-invariante, então $\theta(A')$ é $C$-invariante.*

2. *$A \cap B$ é $C$-invariante.*

3. *Se $B' \subseteq B$ é $C$-invariante, então $\theta^{-1}(B')$ é $C$-invariante.*

4. *Seja $C \cdot x \subseteq A$ um subconjunto $C$-invariante cíclico. Então $\theta(C \cdot x)$ é um $C$-invariante cíclico de $C \cdot \theta(x)$, ou seja, $\theta(C \cdot x) \subseteq C \cdot \theta(x)$.*

5. *Seja $C \cdot y \subseteq B$ um $C$-invariante cíclico. Então, $\theta^{-1}(C \cdot y)$ é um $C$-invariante cíclico de $C \cdot \theta^{-1}(y)$, ou seja, $\theta^{-1}(C \cdot y) \subseteq C \cdot \theta^{-1}(y)$.*

**Prova.** 1. Desde que $A$ é $C$-invariante, temos $C \cdot A' \subseteq A'$, isto significa que $a \cdot x \in A'$ para qualquer $a \in C$ e $x \in A'$. Tomemos $a \cdot y \in C \cdot \theta(A')$, onde $y = \theta(x)$, para algum $x \in A'$. Então $a \cdot \theta(x) \in C \cdot \theta(A')$. Como $\theta$ é um $C$-isomorfismo, $a \cdot \theta(x) = \theta(a \cdot x)$. Logo $a \cdot y = \theta(a \cdot x) \in \theta(A')$, ou seja, $C \cdot \theta(A') \subseteq \theta(A')$, por definição $\theta(A')$ é $C$-invariante.
2. Trivial.
3. Como $B'$ é $C$-invariante, então $C \cdot B' \subseteq B'$, ou seja , para qualquer $a \cdot y \in C \cdot \theta(B') \subseteq B'$. Pelo Lema 2.2.9, $\theta^{-1}(B')$ é $C$-isomorfismo e pelo item 1 e temos que $\theta^{-1}(B')$ é $C$-invariante.
4. A demonstração é direta da definição.
5. A demonstração é direta do Lema 2.2.9 e do Item 4. ■

Na próxima proposição usaremos as notações dadas na seção 1.1 e denotaremos por $I({}_CX)$ ao conjunto de todos os $C$-isomorfismos entre subconjuntos $C$-invariantes de $X$ e veremos que tal conjunto é um subsemigrupo de $I(X)$.

**Proposição 2.2.11** *$I({}_CX)$ é um subsemigrupo inverso de $I(X)$.*

**Prova.** Primeiro provaremos que $I({}_CX) \subseteq I(X)$. De fato, se $\theta \in I({}_CX)$, então, existem $C$-subsistemas à esquerda, $X_1$ e $X_2$ de ${}_CX$, tais que $\theta : X_1 \to X_2$ é uma bijeção, onde $X_1, X_2 \subseteq X$. Portanto $\theta \in I(X)$. Agora, pelo Lema 2.2.10, $\theta^{-1}$ é um $C$-isomorfismo, e segue que $\theta^{-1} \in I({}_CX)$. Assim que $I({}_CX)$ é fechado por seus inversos. Temos que mostrar que se $\theta_1 : X_1 \to X_2$ e $\theta_2 : X_3 \to X_4$ são elementos de $I({}_CX)$, então $\theta_2 \circ \theta_1 \in I(X)$. Mas, por definição, $\theta_2 \circ \theta_1 : \theta_1^{-1}(X_2 \cap X_3) \to \theta_2(X_2 \cap X_3)$ e sendo $X_2$ e $X_3$ $C$-invariantes, temos, pelo Lema 2.2.10, que $\theta_1^{-1}(X_2 \cap X_3)$ e $\theta_2(X_2 \cap X_3)$ são também C-invariantes. ■

## 2.3 Construindo semigrupos a partir de sistemas à esquerda

A cada sistema à esquerda, queremos associar um semigrupo inverso. Esse sistema deverá ter propriedades adicionais que passaremos a discutir agora. Lembrando que o semigrupo inverso $I({}_CX)$ obtido na seção anterior fornece um semigrupo com zero, iniciamos esta seção refinando este semigrupo.

**Definição 2.3.1** Seja $X$ um C-sistema à esquerda. Dizemos que X satisfaz a condição de órbita se para todo $x, y \in X$ existir um $z \in X$ tais que

$$C \cdot x \cap C \cdot y = C \cdot z$$

sempre que $C \cdot x \cap C \cdot y \neq \emptyset$.

Denotamos por $J({}_CX)$ ao subconjunto de $I({}_CX)$ constituidos de todos os C-isomorfismos entre $C$-subsistemas cíclicos à esquerda de $X$ incluindo a função zero. É conveniente lembrar que na função nula o conjuntos de domínio e imagem são vazios.

**Teorema 2.3.2** *Seja $X$ um $C$-sistema á esquerda. Então, $J({}_C X)$ é um subsemigrupo inverso de $I({}_C X)$ se, e somente se, ${}_C X$ satisfaz a condição de órbita.*

**Prova.** ($\Rightarrow$) Sejam $\varphi : C \cdot x \to C \cdot x$ e $\psi : C \cdot y \to C \cdot y$ aplicações identidades. Neste caso, $\varphi$ e $\psi$ estão em $J({}_C X) \subseteq I(X)$. Desde que, por hipótese, $J({}_C X)$ é um subsemigrupo, temos que $\varphi \circ \psi : \psi^{-1}(C \cdot x \cap C \cdot y) \to \varphi(C \cdot x \cap C \cdot y)$ pertence a $J({}_C X)$, e obtemos que $im(\varphi \circ \psi) = \varphi(C \cdot x \cap C \cdot y) = C \cdot z$ ou $\emptyset$ e $dom(\varphi \circ \psi) = \psi^{-1}(C \cdot x \cap C \cdot y) = C \cdot w$ ou $\emptyset$.
Se $\varphi(C \cdot x \cap C \cdot y) = \emptyset$ nada temos a mostrar. Caso contrário, temos $\varphi(C \cdot x \cap C \cdot y) = C \cdot z$. Assim, por hipótese que $\varphi \in J({}_C X)$, que é bijeção parcial. Desta maneira, existe $\varphi^{-1}$ tal que $\varphi^{-1} \circ \varphi(C \cdot x \cap C \cdot y) = \varphi^{-1}(C \cdot z)$ ou seja, $Id(C \cdot x \cap C \cdot y) = \varphi^{-1}(C \cdot z)$. Pelo item 5 do Lema 2.2.10 temos que $\varphi^{-1}(C \cdot z) = C \cdot \varphi^{-1}(z)$, onde $\varphi^{-1}(z) \in X$. Fazendo $\varphi^{-1}(z) = t$, temos que $C \cdot x \cap C \cdot y = C \cdot t$. Logo, $C \cdot x$ satisfaz a condição de órbita.

($\Leftarrow$) Suponhamos que $X$ satisfaça a condição de órbita. Sejam $\varphi : C \cdot u \to C \cdot x$ e $\psi : C \cdot y \to C \cdot v$ elementos $J({}_C X)$, para certos $x, y, u, v \in X$. Notamos que

$$\varphi \circ \psi : \psi^{-1}(C \cdot x \cap C \cdot y) \to \varphi(C \cdot x \cap C \cdot y)$$

Se $C \cdot x \cap C \cdot y = \emptyset$, então $\varphi \circ \psi = 0 \in J({}_C X)$. Caso contrário, $C \cdot x \cap C \cdot y = C \cdot t$, para algum $t \in X$ e $C \cdot t$ é cíclico. Pelo Lema 2.2.10, $\psi^{-1}(C \cdot t) = C \cdot \psi^{-1}(t)$ e $\varphi^{-1}(C \cdot t) = C \cdot \varphi^{-1}(t)$. Logo, $\varphi \circ \psi \in J({}_C X)$. Finalmente, como $\varphi : C \cdot x \to C \cdot y$ pertence a $J({}_C X) \subseteq I(X)$, é uma bijeção, então, pelo Lema 2.2.10, temos o resultado. ■

Na próxima definição exigimos um pouco mais dos $C$-sistemas à esquerda.

**Definição 2.3.3** Seja $X$ um $C$-sistema á esquerda. Dizemos que $X$ satisfaz a *condição forte de órbita* se, para todo $x, y \in X$, existe $z \in X$ tal que

$$C \cdot x \cap C \cdot y = C \cdot z.$$

**Teorema 2.3.4** *Seja $C$ uma categoria agindo em $X$ à esquerda e satisfazendo a condição forte de órbita. Então o produto de dois elementos não nulos de $J({}_C X)$ é não nulo.*

**Prova.** Sejam $\varphi, \psi \in J({}_C X)$, ou seja, $\varphi : C \cdot x \to C \cdot x$ e $\psi : C \cdot u \to C \cdot v$ são $C$-isomofismos. Pelo Teorema 2.3.2 e como $J({}_C X) \subset I(X)$, existe $\varphi \circ \psi$, onde $dom(\varphi \circ \psi) = \psi^{-1}(C \cdot x \cap C \cdot v)$, Por hipótese temos que $(C \cdot x \cap C \cdot v) \neq \emptyset$, ou seja, $\varphi \circ \psi \neq \emptyset$. ■

Denotando por $J^*({}_C X) = J({}_C X) - \{0\}$ obtemos o seguinte corolário imediato

**Corolário 2.3.5** *$J^*({}_C X)$ é um semigrupo inverso.*

**Prova.** Imediata do Teorema 2.3.4. ■

**Exemplo 2.3.6** Consideremos os sistemas do Exemplo 2.2.6. No item 1. temos que todos os cíclicos coincidem com $X$, assim ${}_{\mathtt{M}}X$ satisfaz trivialmente a condição forte de órbita.
No item 2. que temos $\mathtt{M} \cdot (a, b) \cap \mathtt{M} \cdot (c, d)) \neq \emptyset$ se e somente se, $b = d$ e somente neste caso temos $\mathtt{M} \cdot (a, b) \cap \mathtt{M} \cdot (c, d) = \mathtt{M} \cdot (a, b)$. Logo ${}_{\mathtt{M}}Y$ satisfaz a condição de órbita, porém não satisfaz a condição forte de órbita.

**Definição 2.3.7** Seja $X$ um $C$-sistema á esquerda. Definimos uma relação $R^*$ sobre $X$ do seguinte modo:

$$(x, y) \in R^*, \text{ se e somente se, existe } \theta \in I({}_C X) \text{ tal que } \theta(x) = y.$$

**Lema 2.3.8** *$R^*$ é uma relação de equivalência sobre $X$.*

**Prova.** $R^*$ é reflexiva, pois, para cada $x \in X$, seja $\theta : C \cdot x \to C \cdot x$ como sendo a identidade e temos que $\theta(x) = \theta(p(x) \cdot x) = p(x) \cdot x = x$.
$R^*$ é simétrica pois se $\theta \in I({}_CX)$ tal que $\theta(x) = y$, então, pelo Lema 2.2.10, temos que existe $\theta^{-1} \in I({}_CX)$ é tal que $\theta^{-1}(y) = x$.
$R^*$ é transitiva, pois $I({}_CX)$ é fechado em relação a composição. ■

**Lema 2.3.9** *Sejam $X$ um $C$-sistema à esquerda e sejam $x, y \in X$. Então, as seguintes afirmações são equivalentes:*

1. *$(x, y) \in R^*$.*

2. *$p(x) = p(y)$ e para todo $a, b \in C$ tais que $\exists a \cdot x$ e $\exists b \cdot x$, temos que*

$$a \cdot x = b \cdot x \Leftrightarrow a \cdot y = b \cdot y.$$

**Prova.** (1) $\Rightarrow$ (2) Seja $\theta \in I({}_CX)$ tal que $\theta(x) = y$. Então por $M_1$, $p(x) = p(\theta(x)) = p(y)$. Suponhamos que $a \cdot x = b \cdot x$, desde que $a \cdot x$ pertence ao domínio de $\theta$ temos $\theta(a \cdot x) = \theta(b \cdot x)$. Como $\theta$ é um C-homomorfismo, então $a \cdot \theta(x) = b \cdot \theta(x)$. Pelo fato que $\theta(x) = y$, obtemos $a \cdot y = b \cdot y$.

Reciprocamente, obtemos por $\theta^{-1}(y) = x$ e $\theta^{-1} \in I({}_CX)$ que $a \cdot y = b \cdot y$ implica que $a \cdot x = b \cdot x$.

(2) $\Rightarrow$ (1) Definimos a função $\theta : C \cdot x \to C \cdot y$ onde $\theta(a \cdot x) = a \cdot y$. Observe que $\theta$ está bem definida, pois, se $a \cdot x = a' \cdot x$, então $a \cdot y = a' \cdot y$. Claramente, $\theta(x) = y$. Não é difícil de ver que, $\theta$ é injetora pois, se $\theta(a \cdot x) = \theta(b \cdot x)$, então $a \cdot y = b \cdot y$ e $a \cdot x = b \cdot x$. Observamos que $\theta$ também é sobrejetiva, pois se $a \cdot y \in C \cdot y$, então $d(a) = p(y) = p(x)$. Como existe $a \cdot x$, então $\theta(a \cdot x) = a \cdot y$. Mostremos que $\theta$ é um $C$-homomorfismo, mostrando que valem $M_1$ e $M_2$ da Definição 2.2.7.

De fato, seja $x' \in C \cdot x$ onde $x' = a \cdot x$. Então, $p(\theta(x')) = p(\theta(a \cdot x)) = p(a \cdot y) = r(a)$. Desde que $r(a) = p(a \cdot x) = p(x')$ temos que $p(\theta(x')) = p(x')$ e a condição $M_1$ está satisfeita.

Sejam $x' = a \cdot x$ e $a' \in C$ tal que existe $a' \cdot x'$. Então, $\theta(a' \cdot x') = \theta(a' \cdot (ax)) = \theta((a'a) \cdot x)$ e pelo item $A_3$ da Definição 2.2.1 temos que $\theta(a' \cdot x') = (a'a) \cdot y = a' \cdot (a \cdot y) = a' \cdot \theta(a \cdot x) = a' \cdot \theta(x')$. Como $\theta$ satisfaz todas as condições exigidas na Definição de $R^*$, temos que $(x, y) \in R^*$. Logo, a condição $M_2$ está satisfeita. ■

**Lema 2.3.10** *Seja $X$ um $C$-sistema à esquerda satisfazendo a condição de órbita. No conjunto de pares ordenados $R^*$, definimos a relação $\sim$ por:*

$$(x, y) \sim (x', y') \Leftrightarrow \text{existem } u, v \in C \text{ tais que } (x, y) = u \cdot (x', y') \text{ e } (x', y') = v \cdot (x, y),$$

*onde $u \cdot (x', y') = (u \cdot x', u \cdot y')$. Então, $\sim$ é relação de equivalência sobre $R^*$.*

**Prova.** Observemos que $\sim$ é:

Reflexiva: Seja $(x, y) \in R^*$ satisfaz $(x, y) \sim (x, y)$, então, pelo Lema 2.3.9, temos $u = v = p(x) = p(y)$. Assim $(x, y) = p(x)(x, y)$, daí, $(x, y) \sim (x, y)$.

Simétrica: Suponhamos que $(x, y) \sim (x', y')$. Desta maneira $(x, y) = u \cdot (x', y')$ e $(x', y') = v \cdot (x, y)$, para alguns $u, v \in C$. Tome $u = v$ e $v = u$, logo $(x, y) = v \cdot (x', y')$ e $(x', y') = u \cdot (x, y)$, daí, $(x', y') \sim (x, y)$.

Transitiva: Suponhamos que $(x, y) \sim (x', y')$ e $(x', y') \sim (w, z)$. Assim $(x, y) = u \cdot (x', y')$, $(x', y') = v \cdot (x, y)$ e $(x', y') = u' \cdot (w, z)$ e $(w, z) = v' \cdot (x', y')$, para certos $u, v, u', v' \in C$. Desta maneira, $(x, y) = u \cdot (u' \cdot (w, z))$ e $(w, z) = v' \cdot (v \cdot (x, y))$. Logo, existe $u \cdot (u' \cdot (w, z))$ se, e somente se, $(u, (u' \cdot (w, z))) \in C * X$, e isso ocorre, se, e somente se, $d(u) = p(u' \cdot (w, z)) = r(u')$. Segue que $d(u) = r(u')$, ou seja, existe $u \cdot u'$. Analogamente provamos que existe

$v' \cdot v$. Portanto, $(x, y) = (u \cdot u') \cdot (w, z)$ e $(w, z) = (v' \cdot v) \cdot (x, y)$, ou seja, $(x, y) \sim (w, z)$. ■

Nosso próximo objetivo é mostrar que o conjunto quociente $R^*/\sim$ é um semigrupo inverso, antes porém, apresentaremos algumas notações que iremos utilizar nesta prova. Para $x, y \in X$:

1. $(x, y)$ denotará um par em $R^*$.
2. $[x, y]$ denotará a classe de equivalência em $R^*/\sim$ do elemento $(x, y) \in R^*$.
3. Quando $C \cdot x \cap C \cdot y \neq \emptyset$ e a condição de órbita for admitida, denotamos por $x \wedge y$ a um dos elementos de $X$ que satisfaz $C \cdot x \cap C \cdot y = C \cdot (x \wedge y)$.
4. Quando $C \cdot x \cap C \cdot y \neq \emptyset$, denotamos por $y * x$ e $x * y$ à elementos da categoria $C$ que satisfazem $(y * x) \cdot x = (x * y) \cdot y$.

**Definição 2.3.11** Seja $S = R^*/\sim$ o conjunto das $\sim$-equivalências unido com 0. Definimos o seguinte produto em $S$: $[x, y] \otimes [w, z] = [(w * y) \cdot x, (y * w) \cdot z]$, se $C \cdot y \cap C \cdot w \neq \emptyset$ e $[x, y] \otimes [w, z] = 0$, caso contrário.

Nas notações acima, veremos que $\otimes$ está bem definida. Iniciemos com seguinte resultado auxiliar:

**Lema 2.3.12** *Sejam $x, y, z, w \in X$ tais que $(x, y) \sim (w, z)$ e $C \cdot y \cap C \cdot w \neq \emptyset$. Então, $((w * y) \cdot x, (y * w) \cdot z) \in R^*$.*

**Prova.** Vamos mostrar que $((w * y) \cdot x, (y * w).z) \in R^*$. De fato, por hipótese $X$ satisfaz a condição de órbita e portanto, $(w * y) \cdot y = (y * w) \cdot w$. Se existe $(w * y) \cdot y$, então, $p((w * y) \cdot y) = r(w * y)$ e da mesma forma se existe $(y * w) \cdot w$, então $p(y * w) \cdot w = r(y * w)$. Como $(w * y) \cdot y = (y * w) \cdot w$, então $p((w * y) \cdot y) = p(y * w) \cdot w$ e segue que $r(w * y) = r(y * w)$. Notamos que por $M_2$ temos que $p((w * y) \cdot x) = r(w * y)$ e $p((y * w) \cdot z) = r(y * w)$. Deste modo, $p((w * y) \cdot x) = p((y * w) \cdot z)$. Suponhamos que exista $a \cdot ((w * y) \cdot x) = b \cdot ((w * y) \cdot x)$.

Assim, existe $a \cdot ((w * y) \cdot x)$ se, e somente se, $[a, ((w * y) \cdot x)] \in C * X$ se, e somente se $d(a) = p((w * y) \cdot x) = r(w * y)$ se, e somente se, existe $a \cdot (w * y)$. Assim, $a \cdot ((w * y) \cdot x) = (a(w * y)) \cdot x$ e $b \cdot ((w * y) \cdot x) = (b(w * y)) \cdot x$ e segue que, $(a(w*y)) \cdot x = (b(w*y)) \cdot x$. Como $(x, y) \in R^*$, temos que $(a(w*y)) \cdot y = (b(w * y)) \cdot x$ e da Definição 2.2.1, temos, $a \cdot ((w * y) \cdot y) = b \cdot ((w * y) \cdot y)$. Logo, existe

$$a \cdot ((w * y) \cdot x) = b \cdot ((w * y) \cdot x) \tag{2.1}$$

se, e somente se,

$$a \cdot ((w * y) \cdot y) = b \cdot ((w * y) \cdot y) \tag{2.2}$$

Como $(w * y) \cdot y = (y * w) \cdot w$, então, analogamente obtemos

$$a \cdot ((y * w) \cdot w) = b \cdot ((y * w) \cdot w) \tag{2.3}$$

se, e somente se,

$$a \cdot ((y * w) \cdot z) = b \cdot ((y * w) \cdot z) \tag{2.4}$$

Observando que (2.1) $\Leftrightarrow$ (2.2) $=$ (2.3) $\Leftrightarrow$ (2.4), segue-se que, (2.1) $\Leftrightarrow$ (2.4), ou seja, existe

$$a \cdot ((w * y) \cdot x) = b \cdot ((w * y) \cdot x) \Leftrightarrow a \cdot ((y * w) \cdot z) = b \cdot ((y * w) \cdot z),$$

logo $((w * y) \cdot x, (y * w).z) \in R^*$. ■

**Lema 2.3.13** *O produto $\otimes$, da Definição 2.3.11, está bem definido.*

**Prova.** Se $[x, y] = [x', y']$ e $[w, z] = [w', z']$, então, por definição, existem $u, v, a, b \in C$ tais que:

$$\begin{cases} (x, y) = u(x', y') \quad \text{e} \quad (x', y') = v(x, y); \\ (w, z) = a(w', z') \quad \text{e} \quad (w', z') = b(w, z). \end{cases}$$

Observamos que se $y = uy'$ e $y' = vy$ então $C \cdot y = C \cdot y'$. Analogamente temos que $C \cdot w = C \cdot w'$. Deste modo, $C \cdot y \cap C \cdot w \neq \emptyset$ se, e somente se, $C \cdot y' \cap C \cdot w' \neq \emptyset$ e temos duas possibilidades:
(i) Se $[x, y] \otimes [w, z] = 0$, então $C \cdot y \cap C \cdot w = \emptyset$ e isso ocorre se, e somente se, $C \cdot y' \cap C \cdot w' = \emptyset$, daí $[x', y'] \otimes [w', z'] = 0$. E portanto, $[x, y] \otimes [w, z] = [x', y'] \otimes [w', z']$.
(ii) Se $[x', y'] \otimes [w', z'] \neq 0$ então $C \cdot y \cap C \cdot w \neq \emptyset$. Como ${}_C X$ satisfaz a condição de órbita, temos que $C \cdot y \cap C \cdot w = C \cdot (y \wedge w)$ e $C \cdot y' \cap C \cdot w' = C \cdot (y' \wedge w')$. Desde que $y \wedge w = (y * w) \cdot w = (w * y) \cdot y$ e $y' \wedge w' = (y' * w') \cdot w' = (w' * y') \cdot y'$. Como $[x, y] \otimes [w, z] \neq 0$, então, $[x, y] \otimes [w, z] = [(w * y) \cdot x, (y * w) \cdot z]$ e $[x', y'] \otimes [w', z'] \neq 0$, assim $[x', y'] \otimes [w', z'] = [(w' * y') \cdot x', (y' * w') \cdot z']$.

Notemos que:
$C \cdot (y \wedge w) = C \cdot (y' \wedge w')$, então, existe $c, d \in C$ tal que $c \cdot (y \wedge w) = (y' \wedge w')$ e $d \cdot (y' \wedge w') = (y \wedge w)$. Então, $c \cdot (y \wedge w) = (y * w) \cdot w$, daí $y' \wedge w' = c((y \wedge w) \cdot w)$, mas $w = aw'$, portanto $(y' * w') \cdot w' = y' \wedge w' = c \cdot ((y \wedge w)(aw'))$, assim $(y' * w') \cdot w' = (c \cdot (y \wedge w) \cdot a) \cdot w'$.

Sabemos que $(w', z') \in R^*$, assim $(y' * w') \cdot w' = (c(y * w) \cdot a) \cdot w'$ se, e somente se, $(y' * w') \cdot z' = (c(y * w) \cdot a) \cdot z'$. Analogamente, $(w' * y') \cdot x' = (c(w * y) \cdot u) \cdot x'$. Temos $a \cdot z' = z$ e $u \cdot x' = x$, então, $(y' * w') \cdot z' = c(y * w) \cdot z'$ e $(w' * y') \cdot x' = c(w * y) \cdot x$, assim $(y' * w') \cdot z' = (c(y * w) \cdot a) \cdot z' = (c(y * w)) \cdot z$ e $(w' * y') \cdot x' = (c(w * y) \cdot u) \cdot x' = (c(w * y)) \cdot x$.
O resto sai utilizando processo análogo. Portanto, $[(w * y) \cdot x, (y * w) \cdot z] = [(w' * y') \cdot x', (y' * w') \cdot z']$. ■

**Proposição 2.3.14** *Sejam $X$ um $C$-sistema à esquerda satisfazendo a condição de órbita e $S$ o conjunto das classes de equivalência unido com $0$. Então, $(S, \otimes)$ é um semigrupo inverso isomorfo a $J({}_C X)$. Além disso:*

$$[x,y]^{-1} = [y,x], [x,y]^{-1} \otimes [x,y] = [y,y];$$

$$[x,y] \otimes [x,y]^{-1} = [x,x];$$

*os idempotentes são os elementos da forma* $[x,x]$*, para qualquer* $x \in X$*, e a ordem parcial natural é dada por:*
$[x,y] \leq [w,z] \Leftrightarrow (x,y) = u \cdot (w,z)$ *para algum* $u \in C$*.*

**Prova.** Pelos Lemas 2.3.12 e 2.3.13, temos que $\otimes$ está bem definida. Para cada $(x,y) \in R^*$ definimos $\theta_{(x,y)} : C \cdot y \to C \cdot x$, por $\theta_{(x,y)}(a \cdot y) = a \cdot x$. Como $J(_C X) \in I(_C X)$ e pelo Lema 2.3.9 $\theta_{(x,y)} \in I(_C X)$. Assim $\theta_{(x,y)} \in J(_C X)$.
Vamos mostrar que $\theta_{(x,y)} = \theta_{(x',y')}$ se, e somente se, $(x,y) \sim (x',y')$.
De fato,
(i) suponhamos que $\theta_{(x,y)} = \theta_{(x',y')}$, onde $\begin{cases} \theta_{(x,y)} : C \cdot y \to C \cdot x, & (1); \\ \theta_{(x',y')} : C \cdot y' \to C \cdot x', & (2). \end{cases}$

Pelo Lema 2.3.9, temos que $(x,y), (x',y') \in R^*$, elementos $a, b \in C$ tais que $y = a \cdot y'$ e $y' = b \cdot y$. Dessa maneira, $\theta_{(x,y)}(y) = \theta_{(x,y)}(p(y) \cdot y) = x$ e $\theta_{(x',y')}(y) = \theta_{(x',y')}(a \cdot y') = a \cdot x'$ e por hipótese $\theta_{(x,y)} = \theta_{(x',y')}$, então, $\theta_{(x,y)}(y) = \theta_{(x',y')}(y)$, ou seja, $x = a \cdot x'$. Analogamente, temos para $x' = b \cdot x$. Logo, $y = a \cdot y'$ e $x = a \cdot x'$ e com isto $(x,y) = a(x',y')$. Além disso, $x' = b \cdot x$ e $y' = b \cdot y$, daí $(x',y') = b(x,y)$. Portanto, $(x,y) \sim (x',y')$.
Reciprocamente, suponhamos que $(x,y) \sim (x',y')$. Dessa maneira, $(x,y) = a(x',y')$ e $(x',y') = b(x,y)$, para algum $a, b \in C$. Notemos que $y = a \cdot y'$, $x = a \cdot x'$, $x' = b \cdot x$ e $y' = b \cdot y$, então, $C \cdot x = C \cdot x'$ e $C \cdot y = C \cdot y'$.
Seja $d \cdot y = d' \cdot y' \in C \cdot y = C \cdot y'$. Então, $\theta_{(x,y)}(d \cdot y) = d \cdot x$ e $\theta_{(x',y')}(d' \cdot y') = d' \cdot x'$. Como $d \cdot y = d' \cdot y' = (b \cdot y) = (d'b) \cdot y$, então $(x,y) \in R^*$, e segue que existe $d \cdot y = (d'b) \cdot y$ se, e somente se, $d \cdot x = (d'b) \cdot x = d'(b \cdot x) = d' \cdot x'$. Assim, $d \cdot x = d' \cdot x'$. Logo, $\theta_{(x,y)}(d \cdot y) = \theta_{(x',y')}(d' \cdot y')$.

Finalizaremos mostrando que $S$ é isomorfo a $J(_C X)$ como semigrupos. Seja $\varphi : S \to J(_C X)$, onde $\varphi(0)$ é a função nula em $X$ e $\varphi([x,y]) = \theta_{(x,y)}$. Mostremos que $\varphi$ é um isomorfismo. Observemos que foi mostrado anteriormente que $\varphi$ é injetiva, resta mostramos que $\varphi$ é sobrejetiva. Com efeito, seja $\alpha \in J(_C X)$, neste caso, $\alpha : C \cdot y \to C \cdot x$. Desde que os elementos de $J(_C X)$ são isomorfismos, então $C \cdot \alpha(y) = C \cdot x$. E ainda do Lema 2.3.9 temos que, $(y, \alpha(y)) \in R^*$, desta forma $\alpha = \theta_{(\alpha(y),y)}$.

Finalmente mostremos que $\varphi$ é um homomorfismo. Tomemos $\theta_{(x,y)} \circ \theta_{(w,z)}$. Suponha que $C \cdot y \cap C \cdot w \neq \emptyset$, então, $C \cdot y \cap C \cdot w = C \cdot (y \wedge w)$, onde $y \wedge w = (y * w) \cdot w = (w * y) \cdot y$. Como $\theta$ é bijetora existe $\theta^{-1}_{(w,z)}$, então $\theta^{-1}_{(w,z)}(C \cdot (y \wedge w)) = \theta^{-1}_{(w,z)}((y * w) \cdot w) = C \cdot (y * w) \cdot z$ (domínio) e $\theta_{(x,y)}(C \cdot (y \wedge w)) = \theta_{(x,y)}(C \cdot (w * y) \cdot y) = C \cdot (w * y) \cdot x$ (imagem). Dessa maneira, $\theta_{(x,y)} \circ \theta_{(w,z)} : C \cdot (y * w) \cdot z \to C \cdot (w * y) \cdot x$,
$\theta_{(x,y)} \circ \theta_{(w,z)}(a \cdot (y * w) \cdot z) = \theta_{(x,y)}[\theta_{(w,z)}(a \cdot (y * w) \cdot z)] = \theta_{(x,y)}(a \cdot (y * w) \cdot w)$, desde que $a \cdot (y * w) \cdot w = a \cdot (y * w) \cdot y$, então $\theta_{(x,y)} \circ \theta_{(w,z)}(a \cdot (y * w) \cdot z) = \theta_{(x,y)}(a \cdot (y * w) \cdot y) = a \cdot (w * y) \cdot x$. Por outro lado, $(a \cdot (w * y)) \cdot x = \theta_{((w*y)\cdot x,(w*y)\cdot z)}(a \cdot (w * y) \cdot z)$. Então, $\theta_{(x,y)} \circ \theta_{(w,z)} = \theta_{((w*y)\cdot x,(w*y)\cdot z)}$ se $C \cdot y \cap C \cdot w \neq \emptyset$. Se $C \cdot y \cap C \cdot w = \emptyset$, então $\theta_{(x,y)} \circ \theta_{(w,z)}$ é a função nula. ■

## 2.4 Construindo sistemas a partir de semigrupos inversos

Seja $S$ um semigrupo inverso com zero e nosso objetivo agora é construir uma categoria que denotamos por $C'(S)$ que agirá sobre o conjunto $S$ satisfazendo a condição de órbita, ou seja, faremos o caminho inverso da seção anterior.

**Definição 2.4.1** Seja $S$ um semigrupo inverso. Denotamos por

$$C'(S) := \{(s,e) \in S \times E(S) : s^{-1}s \leq e\},$$

onde $E(S)$ denota o conjunto dos idempotentes de $S$. Definimos $d(s,e) = (e,e)$ e $r(s,e) = (ss^{-1}, ss^{-1})$ e o produto parcial $(s,e) \cdot (t,f) := (st,f)$, se $e = tt^{-1}$ e não definido nos outros casos.

Se $S$ é um semigrupo com zero, denotamos por $Z = \{(0,e); e \in E(S)\}$ e consideremos $C(S) = C'(S)/Z$.

Notamos que $C'(S)$ é fechado em relação ao produto parcial, pois, se $(s,e)$ e $(t,f)$ estão em $C'(S)$, então, $s^{-1}s \leq e$ e $t^{-1}t \leq f$.
Se $(s,e) \cdot (t,f) = (st,f)$, então $t^{-1}t \leq e$. Além disso, p $(s,e) \cdot (t,f) \in C'(S)$, pois $(st)^{-1}(st) \leq f$. De fato, $(st)^{-1} \cdot (st) = t^{-1}s^{-1}st \leq t^{-1}et = t^{-1}tt^{-1}t = t^{-1}t \leq f$.

O próximo resultado mostra que $(C'(S), \cdot)$ é de fato uma categoria.

**Proposição 2.4.2** *(i)$(C'(S), \cdot)$ é uma categoria e vale a lei do cancelamento à direita.*
*(ii)Os isomorfismos em $C'(S)$ são os elementos da forma $(s, s^{-1}s)$.*
*(iii) Se $S$ é um semigrupo inverso com zero, então $(0,0)$ é um objeto terminal em $(C'(S)$, e o único morfismo com domínio $(0,0)$ é $(0,0)$.*
*(iv)Se $S$ é um semigrupo inverso com zero, então $C(S)$ é uma subcategoria cheia de $C'(S)$.*

**Prova.** (i) Afim de mostrar que $C'(S)$ é uma categoria, devemos verificar as três condições da Definição 2.1.1, para tanto usaremos livremente os itens do Lema 1.3.1 e da Proposição 1.3.3. Considere $(s,e), (t,f), (x,i) \in C'(S)$.
$(C_1)$ Suponhamos que exista $(s,e)\cdot[(t,f)\cdot(x,i)] = (s,e)\cdot(tx,i)$ e $(s,e)\cdot(tx,i) = (s(tx),i)$ com isto, $f = xx^{-1}$ e $e = (tx)(tx)^{-1} = (tx)(x^{-1}t^{-1}) = t(xx^{-1})t^{-1}$.

Desta maneira, temos que $e = tft^{-1}$ então $et = tft^{-1}t = tt^{-1}tf = tf$. Assim, $ett^{-1} = tft^{-1} = e$, e portanto $e \leq tt^{-1}$.
Por outro lado, $t^{-1}t = tt^{-1} \leq f$, então $t^{-1}t = t^{-1}tf = t^{-1}et$. Assim, $t^{-1}tt^{-1} = t^{-1}ett^{-1} = t^{-1}tt^{-1}e = t^{-1}e$, logo $tt^{-1} = tt^{-1}t^{-1} = tt^{-1}e$. Donde se conclui que $tt^{-1} \leq e$. Como $\leq$ é antissimétrica, segue-se que $e = tt^{-1}$. Desta forma obtemos $f = xx^{-1}$ e $e = tt^{-1}$. Assim, existe $[(s, e) \cdot (t, f)] \cdot (x, i)$. A prova da recíproca é análoga.

$(C_2)$ Por $(C_1)$, se existe $(s, e) \cdot [(t, f) \cdot (x, i)]$, então existe $[(s, e) \cdot (t, f)] \cdot (x, i)$, e com isto $f = xx^{-1}$ e $e = tt^{-1}$. Assim, existem $(t, f) \cdot (x, i)$ e $(s, e) \cdot (t, f)$. Argumentos análogos provam a recíproca.

$(C_3)$ Para cada $(s, e) \in C'(S)$ existem $(s^{-1}s, e)$ e $(ss^{-1}, e)$ tais que $(s, e) \cdot (s^{-1}s, e) = (ss^{-1}s, e) = (s, e)$, $(ss^{-1}, e) \cdot (s, e) = (ss^{-1}s, e) = (s, e)$ e $(s, e).(e, e) = (s, e)$.

Agora vamos mostrar que vale a lei do cancelamento à direita. De fato, sejam $(s, e), (t, f), (u, i) \in C'(S)$ e suponhamos que existam $(s, e) \cdot (t, f)$ e $(u, i) \cdot (t, f)$ onde $(s, e) \cdot (t, f) = (u, i) \cdot (t, f)$. Então, $(st, f) = (ut, f)$. Se existem $(s, e) \cdot (t, f)$ e $(u, i) \cdot (t, f)$, então, $e = tt^{-1}$ e $i = tt^{-1}$,respectivamente. Desta maneira, $e = i$, com isto, $s^{-1}s, u^{-1}u \leq e$. Notemos que $st = ut$ e $stt^{-1} = utt^{-1}$. Assim, $se = ue$. Logo, $s = ss^{-1}s \leq se = ue \leq u$ e $u = u^{-1}u \leq ue = se \leq s$. E pela antissimétrica de $\leq$ temos que $s = u$. Portanto, $(s, e) = (u, i) \in C'(S)$.

(ii) Pela definição 1.5.4, os isomorfismos de $C'(S)$ são elementos $(s, e)$, $(t, f) \in C'(S)$ tais que existem $(s, e) \cdot (t, f) = r(s, e)$ e $(t, f) \cdot (s, e) = d(s, e)$. Assim, temos que $e = tt^{-1}$ e $f = ss^{-1}$. Como $(s, e) \cdot (t, f) = (st, f) = r(s, e) = (ss^{-1}, ss^{-1})$e $(t, f) \cdot (s, e) = (ts, e) = d(s, e) = (e, e)$, então $st = ss^{-1}$ e $ts = e$, ou seja, $sts = ss^{-1}s = se$ e $tst = tt^{-1} = t$. Assim, $sts = s$ e $tst = t$. Pela Proposição 1.1.2, temos $t = s^{-1}$ e $s = t^{-1}$, $s$ e $t$ são inversos em $S$, logo os isomorfismos de $C'(S)$ são da forma $(s, s^{-1}s)$, pois $e = tt^{-1} = s^{-1}s$.

(iii) Observamos que pelo produto definido em $C'(S)$ podemos ver $(0, e)$ como um morfismo de $(e, e)$ para $(0, 0)$. Suponhamos agora que $(s, e)$ seja um morfismo de $(e, e)$ para $(0, 0)$. Então, $r(s, e) = (ss^{-1}, ss^{-1}) = (0, 0)$, segue que $s = 0$. Assim, o morfismo $(0, e)$ é único. Agora, suponhamos que $d(s, e) = (0, 0)$. Desta maneira, $s^{-1}s \leq 0$. Logo $s^{-1}s = 0$ e consequentemente, $s = 0$. Portanto, o único morfismo que tem domínio $(0, 0)$ é $(0, 0)$.

(iv) Consideremos a subcategoria de $C'(S)$ determinada pelas identidades $C'(S)_0/(0, 0)$. Então que $(s, e)$ pertence a esta subcategoria se, e somente se, $d(s, e), r(s, e) \neq (0, 0)$. Para isto basta mostrar que $(s, e)$ pertence a subcategoria definida, se, e somente se, $(s, e) \notin Z$.

($\Rightarrow$) Seja $(s, e)$ pertencente a subcategoria definida inicialmente. Então $d(s, e) \neq (0, 0)$ e $r(s, e) \neq (0, 0)$. Assim, $e \neq 0$ e $s \neq 0$ respectivamente. Logo, se $s \neq 0$, temos que $(s, e) \notin Z$.

($\Leftarrow$) Suponhamos $(s, e) \notin Z$, assim $(s, e) \neq (0, e)$. Então $s \neq 0$ e com isso, $r(s, e) = (ss^{-1}, ss^{-1}) \neq (0, 0)$. Como $e \in E(S)$, temos que $e \neq 0$. Assim $d(s, e) \neq (0, 0)$. Logo, $(s, e)$ não pertence a subcategoria. ■

A partir de $C(S)$ construimos um $C(S)$-sistema à esquerda com propriedades adicionais. Antes, enunciamos algumas propriedades e destacamos algumas notações que são usadas nesta construção.

**Definição 2.4.3** Dizemos que um sistema à esquerda ${}_CX$ satisfaz a *condição de cancelamento à direita* se sempre que $c \cdot x$ e $d \cdot x$ existem e $c \cdot x = d \cdot x$, então $c = d$. O sistema à esquerda ${}_CX$ é chamado de *sistema* se satisfazer as seguintes condições:

($S_1$) *$C$ é uma categoria que é cancelativa à direita;*

($S_2$) *${}_CX$ satisfaz a condição de órbita;*

$(S_3)$ *A função* $p : X \to C_0$ *é sobrejetora;*

$(S_4)$ ${}_CX$ *satisfaz a condição de cancelamento à direita.*

Usamos a notação $(C, X)$ para denotar um sistema à esquerda ${}_CX$ que é um sistema. Construimos, a partir de um semigrupo inverso com zero, uma classe de sistemas.

**Teorema 2.4.4** *Sejam* $S$ *um semigrupo inverso com zero. Tomando* $X_S = S - \{0\}$ *e* $p : X_S \to C(S)_0$ *definida por* $p(x) = (xx^{-1}, xx^{-1})$ *para todo* $x \in X_S$. *Então a aplicação* $C(S) * X_S \to X_S$ *definida por* $(s, e) \cdot x = se$ *sempre que* $d(s, e) = p(x)$, *está bem definida e é uma ação de* $C(S)$ *sobre o conjunto* $X_S$. *Além disso, o par* $(C(S), X_S)$ *é um sistema.*

**Prova.** Vamos mostrar que $C(S) * X_S \to X_S$ está bem definida. De fato, suponhamos que existam $s, e, x \in S$ não nulos tais que $(s, e) \cdot x = sx = 0$. Então, $sxx^{-1} = 0$. Se existe $(s, e) \cdot x$, então, $d(s, e) = p(x)$, ou seja, $(e, e) = (xx^{-1}, xx^{-1})$. Assim, $e = xx^{-1}$ e segue que $sxx^{-1} = 0$, o que explica $se = 0$. Como $s^{-1}s \leq e$, então, $s^{-1}s = s^{-1}se$ e com isto $ss^{-1}s = ss^{-1}se$. Desta maneira, $s = se = 0$. Logo, $s = 0$. O que contradiz o fato que $s \neq 0$. Portanto, $sx \neq 0$ e $(s, e) \cdot x \in X_S$.

Vamos mostrar que $X_S$ é um $C(S)$-sistema à esquerda, mostrando $A_1, A_2$ e $A_3$ da Definição 2.2.1 são válidas.

$A_1$. Para que exista $p(x) \cdot x = (xx^{-1}, xx^{-1}) \cdot x$, temos que $d(p(x)) = p(x)$. Portanto, existe $p(x) \cdot x$ e ainda $p(x) \cdot x = (xx^{-1}, xx^{-1}) \cdot x = xx^{-1}x = x$. Deste modo, $p(x) \cdot x = x$.

$A_2$. Se $\exists (s, e) \cdot x$, então $p((s, e) \cdot x) = p(sx) = (sx(sx)^{-1}, sx(sx)^{-1}) = (sxx^{-1}s^{-1}, sxx^{-1}s^{-1})$. Como $p(x) = d(s, e)$ então $e = xx^{-1}$, e segue que $(xx^{-1}, xx^{-1}) = (e, e)$. Assim $p((s, e) \cdot x) = (ses^{-1}, ses^{-1})$. Desde que $se = s$

temos que $p((s,e)\cdot x) = (ss^{-1}, ss^{-1}) = r(s,e)$ e $p((s,e)\cdot x) = r(s,e)$.

$A_3$. Se $\exists (s,e)\cdot(t,f) \in C(S)$ e $\exists ((s,e)\cdot(t,f))\cdot x$. Então, $e = tt^{-1}$, $s^{-1}s \leq e$ e $t^{-1}t \leq f$. Por hipótese $((s,e)\cdot(t,f))\cdot x = (st)x$ e $d(st,f) = (f,f) = (xx^{-1}, xx^{-1})$, ou seja, $f = xx^{-1}$. Notamos que $d(t,f) = p(x)$. De fato, $d(t,f) = (f,f) = (xx^{-1}, xx^{-1}) = p(x)$.Deste modo, $d(t,f) = p(x)$, e com isto, $(t,f)\cdot x = tx$. Para existir $(s,e)\cdot(tx)$ é preciso que $d(s,e) = p(tx)$, mas $p(tx) = (tx(tx)^{-1}, tx(tx)^{-1}) = (txx^{-1}t^{-1}, txx^{-1}t^{-1}) = (tft^{-1}, tft^{-1}) = (tt^{-1}, tt^{-1}) = (e,e) = d(s,e)$. Portanto, existe $(s,e)\cdot(tx)$. Notemos que, $((s,e)(t,f))\cdot x = (st,f)\cdot x = stx$ e $(s,e)\cdot((t,f)\cdot x) = (s,e)\cdot tx = stx$. Portanto, $((s,e)(t,f))\cdot x = (s,e)\cdot((t,f)\cdot x)$.

Agora, vamos verificar que as condições $S_1, S_2, S_3$ e $S_4$ da Definição 2.4.3 são válidas.

$S_1$. Pela Proposição 2.4.2 temos que $C(S)$ é uma categoria cancelativa à direita.

$S_2$. Os subsistemas cíclicos de $X_S$ são da forma, $C(S)\cdot x := \{(s,e)\cdot x; (s,e) \in C(S)\ \exists (s,e)\cdot x\} = \{sx : s^{-1}s \leq e = xx^{-1}, s, e, x \neq 0\}$. Observamos que $C(S)\cdot x \subseteq Sx - \{0\}$, pois cada elemento de $C(S)\cdot x$ é da forma $sx \in Sx$. Vamos mostrar que $Sx - \{0\} \subseteq C(S)\cdot x$. Sejam $sx \in Sx - 0$ e $e = xx^{-1}$. Então, $sx = sxx^{-1}x = (sxx^{-1})x = (se)x$. Consideremos o par $(se, e)$. Desde que $(se)^{-1}se = e^{-1}s^{-1}se = s^{-1}s \leq e$, então $(se)^{-1}se \leq e$. Logo o par $(se,e) \in C(S)$ e $(se,e)\cdot x = sex = sx$. Então $sx = (se,e) \in C(S)$. Portanto, $Sx - \{0\} \subseteq C(S)\cdot x$. Assim, $C(S)\cdot x = Sx$. Agora, sejam $C(S)\cdot x, C(S)\cdot y$ tais que $C(S)\cdot x \cap C(S)\cdot y \neq \emptyset$, logo $Sx \cap Sy \neq \emptyset$. Para cada $a \in Sx \cap Sy$ com $a \neq 0$, então $a = sx = ty$, onde $s,t \in S$. Observe que $a = sx$, então, $ax^{-1}x = sxx^{-1}x = sx = a$ e $a = ty$, então, $ay^{-1}y = tyy^{-1}y = ty = a$. Note que: $ax^{-1}x = ay^{-1}y$ então $ax^{-1}xy^{-1}y = a$, onde $x^{-1}xy^{-1}y \neq 0$. Então, $a \in Sy = C(S)y$ e também $ay^{-1}y = ax^{-1}x$, assim $ay^{-1}yx^{-1}x = a$. Logo $a \in$

$Sx = C(S)x$, ou seja, $a \in C(S)x \cap C(S)y$ e $a = ax^{-1}xy^{-1}y \in C(S)(x^{-1}xy^{-1}y)$ e $C(S)x \cap C(S)y = C(S)(x^{-1}xy^{-1}y)$.

$S_3$. Se $(e,e) \in C(S)$, então $e \in Sx - 0$ e $p(e) = (e,e)$, pois $d(e,e) = (e,e) = (ee^{-1}, ee^{-1}) = p(e)$ e $p : X_S \to C(S)$ com $e \mapsto p(e) = (e,e)$.

$S_4$. Suponhamos que $(s,e) \cdot x = (t,f) \cdot x$. Então $sx = tx$, e com isto, $sxx^{-1} = txx^{-1}$. Como existe $(s,e) \cdot x$, temos que $d(s,e) = p(x)$, com isso $(e,e) = (xx^{-1}, xx^{-1})$, então $e = xx^{-1}$. Assim de $sxx^{-1} = txx^{-1}$ obtemos $se = te$, logo, $s = t$. Da maneira análoga se existe $(t,f) \cdot x$ obtemos $d(t,f) = p(x)$. Deste modo, $f = xx^{-1}$, portanto $e = f$. Então $s^{-1}s \leq e$, $t^{-1}t \leq f = e$. Logo, podemos concluir que $(s,e) = (t,f)$. ■

A seguir iremos ver que sistema $(C(S), X_S)$ obtido no Teorema 2.4.4 satisfaz uma condição a mais.

**Teorema 2.4.5** *Seja $S$ um semigrupo inverso. Então $(C(S), X_S)$ é um sistema satisfazendo a condição forte de órbita.*

**Prova.** Desde que $(C(S), X_S)$ é um sistema, então por $S_2$ da Definição 2.4.3, basta mostramos que dados $x, y \in X_S$ temos que $x^{-1}xy^{-1}y \neq 0$. De fato, como $x, y \neq 0$, então $x^{-1}xy^{-1}y \neq 0$. Logo $\emptyset \neq C(S)(x^{-1}xy^{-1}y) \subseteq C(S)x \cap C(S)y$. ■

Finalizamos esta seção com uma simplificação das condições de que para um par ordenado $(x,y)$ pertença a relação $R^*$ (veja Lema 2.3.9) e na identificação das classes de equivalência da relação $\sim$ definida no Lema 2.3.10. Estas simplificações serão úteis nos próximos capítulos.

**Lema 2.4.6** *Seja $(C, X)$ um sistema. As seguintes condições são válidas.*

*1. Para qualquer $x, y \in X$ temos que $(x,y) \in R^*$ se, e somente se, $p(x) = p(y)$.*

*2. Na construção da Proposição 2.3.14 temos que:*

$$(x, y) \sim (x', y') \Leftrightarrow (x, y) = u \cdot (x', y'),$$

*para algum isomorfismo $u$ em $C$.*

**Prova.** 1. Se $(x, y) \in R^*$ então $p(x) = p(y)$, pelo Lema 2.3.9. Reciprocamente, Suponha que $x, y \in X$ são tais que $p(x) = p(y)$ e que $ax = bx$. Como $C$ é um sistema, temos $a = b$, logo $ay = by$. A recíproca é análoga. Assim, pelo Lema 2.3.9, $(x, y) \in R^*$.

2.($\Rightarrow$) Se $(x, y) \sim (x', y')$, então por definição existem $u, v \in C$ tais que $(x, y) = u \cdot (x', y')$, então $x = u \cdot x'$ e $y = u \cdot y'$ e ainda, $(x', y') = v \cdot (x, y)$, então $x' = v \cdot x$ e $y' = v \cdot y$. Então, existe $x = u \cdot x' = u \cdot (v \cdot x) = (uv) \cdot x$. Pela definição de ação, temos $x = p(x) \cdot x$, logo $p(x) \cdot x = (uv) \cdot x$, ou seja, $p(x) = (uv)$. Analogamente, $p(x') = vu$. Como $p(x) \cdot x = x$ e $p(x') \cdot x' = x'$. Observe que: $uv : p(x) \to p(x)$ e $vu : p(x') \to p(x')$. Por definição $u$ é um isomorfismo.

($\Leftarrow$) Temos que $(x, y) = u \cdot (x', y')$ logo $x = u \cdot x'$, fazendo $u^{-1} = v$ temos $x' = v \cdot x$. Analogamente, a partir de $y = u \cdot y'$ obtemos $y' = v \cdot y$. Logo $(x, y) \sim (x', y')$. ∎

# Capítulo 3

# Funtores que associam $INV$ e $SYS$

No capítulo anterior associamos cada sistema a um semigrupo inverso e vice-versa. Aqui, queremos provar que estas associações preservam propriedades funtoriais. Iniciaremos esta seção construindo um funtor partindo da categoria dos sistemas para a categoria dos semigrupos inversos. Na segunda parte trilharemos o caminho contrário, estabelecendo um funtor que associa a categoria dos semigrupos inversos a categoria dos sistemas.

## 3.1 Um funtor que associa sistemas a semigrupos inversos

Nesta seção construiremos um funtor que ligará a categoria dos sistemas a categoria dos semigrupos inversos. Para isto, necessitamos estabelecer um morfismo entre sistemas.

**Definição 3.1.1** Sejam $(C, X)$ e $(D, Y)$ sistemas e $(F, \theta)$ um morfismo de

${}_C X$ para ${}_D Y$, tal que, $(F, \theta)$ satisfaz $M_1$ e $M_2$ da definição 2.2.7. Dizemos que $(F, \theta)$ é um *morfismo de sistemas* se satisfaz as seguintes condições, que denotaremos simplesmente por $(M_3)$:

$$C \cdot x \cap C \cdot y = \emptyset \Rightarrow D \cdot \theta(x) \cap D \cdot \theta(y) = \emptyset$$

$$e$$

$$C \cdot x \cap C \cdot y = C \cdot z \Rightarrow D \cdot \theta(x) \cap D \cdot \theta(y) = D \cdot \theta(z)$$

Agora já estamos aptos a descrever as categorias dos sistemas que denotamos por $SYS$ e a categorias dos semigrupos inversos $INV$ que são as duas categorias chaves deste trabalho:

$SYS$: os objetos são sistemas e os morfismos são morfismos de sistemas acima definidos e,

$INV$: os objetos são semigrupos inversos e os morfismos são homomorfismos de semigrupos que são 0-restritos (ver Definição 1.1.6).

Defina $\Theta : SYS \to INV$, associando o sistema $(C, X) \in SYS$ ao semigrupo inverso

$$\Theta(C, X) := J({}_C X).$$

Lembramos que $J({}_C X)$ denota o subsemigrupo inverso de $I(X)$ constituido de todos os $C$-isomorfismos do tipo $\varphi : C \cdot x \to C \cdot y$ ( $C$-isomorfismo entre $C$-subsistemas cíclicos de $X$) unido com a função zero e que pela Proposição 2.3.14 temos que $J({}_C X)$ é isomorfo a $R^*/\sim$ estabelecido na Definição 2.3.7. Façamos $\Theta$ agir sobre os morfismos do seguinte modo: Se $(F, \theta) : (C, X) \to (D, Y)$ é um morfismo de sistemas, então,

$$\Theta(F, \theta) : \Theta(C, X) \longrightarrow \Theta(D, Y)$$

é definida por $\Theta(F, \theta)([x, y]) = [\theta(x), \theta(y)]$ e $\Theta(F, \theta)(0) = 0$. Onde $[x, y]$, denota a bijeção parcial $\varphi : C \cdot x \to C \cdot y$, definida por $\varphi(a \cdot x) = a \cdot y$ de

$J({}_C X)$, ou seja,

$$\Theta(F,\theta) : J({}_C X) \to J({}_D Y)$$

$$(\varphi : C \cdot x \to C \cdot y) \mapsto (\varphi : D \cdot \theta(x) \to D \cdot \theta(y)).$$

**Teorema 3.1.2** *Nas notações acima definidas, $\Theta : SYS \to INV$ é um funtor.*

**Prova.** Iremos mostrar que $\Theta$ satisfaz as condições da Definição 1.5.3. Para $x, y \in X$, temos que $[\theta(x), \theta(y)]$ está bem definido. Consideremos $\Theta(F,\theta) : J({}_C X) \to J({}_D Y)$ e tomemos $[x,y] \in J({}_C X)$. Neste caso $(x,y) \in R^*$, e pela Definição 2.3.11 temos $p(x) = p(y)$, e ainda, pela Definição 2.2.7, $p(\theta(x)) = Fp(x) = Fp(y) = p(\theta(y))$. Pelo Lema 2.3.9 $(\theta(x), \theta(y)) \in R^*$, e portanto, $[\theta(x), \theta(y)] \in J(C_X)$.

A aplicação $\Theta(F,\theta)$ está bem definida, pois se $[x,y], [w,z] \in J({}_C X)$ são tais que $[x,y] = [w,z]$, então, pelo Lema 2.3.10, existe $u \in C$ tal que $(x,y) = u \cdot (x', y')$, portanto, $x = u \cdot x'$ e $y = u \cdot y'$. Assim, $\theta(x) = \theta(u \cdot x') = \theta(u)\theta(x')$, pois $\theta(x) \in J({}_D Y)$ e $\theta(y) = \theta(u \cdot y') = \theta(u)\theta(y')$, pois $\theta(y) \in J(D_Y)$. Consequentemente, $\theta(x) = \theta(u)\theta(x')$ e $\theta(y) = \theta(u)\theta(y')$. Logo, $(\theta(x), \theta(y)) = \theta(u)(\theta(x'), \theta(y'))$.

Agora, iremos mostrar que $\Theta(F,\theta)$ é um homomorfismo em $INV$. Sejam $[x,y], [w,z] \in J({}_C X)$. Se $[x,y] \otimes [w,z] = 0$, então $C \cdot y \cap C \cdot w = \emptyset$ e ainda $\Theta(F,\theta)(0) = 0$. Como $(F,\theta)$ é um morfismo de sistema, temos $D \cdot \theta(y) \cap D \cdot \theta(w) = \emptyset$ e $[\theta(x), \theta(y)] \otimes [\theta(w), \theta(z)] = 0$, assim $\Theta(F,\theta)[x,y] \otimes \Theta(F,\theta)[w,z] = 0$. Portanto, $\Theta(F,\theta)([x,y] \otimes [w,z]) = \Theta(F,\theta)[x,y] \otimes \Theta(F,\theta)[w,z]$. Agora, se $[x,y] \otimes [w,z] \neq 0$ temos $C \cdot y \cap C \cdot w = C \cdot (y \wedge w)$ e $\Theta(F,\theta)([x,y] \otimes [w,z]) \neq 0$. Por definição $C \cdot (y \wedge w) = C \cdot ((w * y) \cdot y) = C \cdot ((y * w) \cdot w)$ e $\Theta(F,\theta)([x,y] \otimes [w,z]) = \Theta(F,\theta)([(w * y) \cdot x, (y * w) \cdot z])$. Sendo $(F,\theta)$ um morfismo de sistemas, temos

$$D \cdot \theta(y) \cap D \cdot \theta(w) = D \cdot \theta(y \wedge w) \tag{3.1}$$

Notemos que,

$$\theta(y \wedge w) = \theta((w * y) \cdot y) = F(w * y) \cdot \theta(y) \text{ e } \theta(y \wedge w) = \theta((y * w) \cdot w) = F(y * w) \cdot \theta(w) \tag{3.2}$$

De (3.1) e (3.2) seja $F(w * y) = \theta(w) * \theta(y)$ e $F(y * w) = \theta(y) * \theta(w)$. Dessa maneira, $D \cdot \theta(y) \cap D \cdot \theta(w) = D \cdot (\theta(w) * \theta(y) \cdot \theta(y))$ e $D \cdot \theta(y) \cap D \cdot \theta(w) = D \cdot ((\theta(y) * \theta(w)) \cdot \theta(w))$.

Assim, $[\theta(x), \theta(y)] \otimes [\theta(w), \theta(z)] = [(\theta(w) * \theta(y)) \cdot \theta(x), (\theta(y) * \theta(w)) \cdot \theta(z)]$.

Ou seja, $\Theta(F, \theta)[x, y] \otimes \Theta(F, \theta)[w, z] = \Theta(F, \theta)[(w * y) \cdot x, (y * w) \cdot z]$. Para ver que $\Theta$ é de fato um funtor, resta verificar os itens 2. e 3. da Definição 1.5.3.

2. Iremos mostrar que $\Theta[(F, \theta) \circ (G, \varphi)] = \Theta[(F, \theta)] \circ \Theta[(G, \varphi)]$. Observamos que $\Theta[(F, \theta) \circ (G, \varphi)][x, y] = \Theta(F \circ G, \theta \circ \varphi)[x, y] = [\theta \circ \varphi(x), \theta \circ \varphi(y)]$ e $\Theta[(F, \theta)] \circ \Theta[(G, \varphi)] = \Theta(F, \theta)[(\varphi(x), \varphi(y))] = [\theta \circ \varphi(x), \theta \circ \varphi(y)]$.

3. Seja $\Theta(I, p(x))[x, y] = [p(x) \cdot x, p(y) \cdot y] = [x, y]$.

Portanto, $\Theta$ é um funtor. $\blacksquare$

## 3.2 Um funtor que associa semigrupos inversos à sistemas

No sentido contrário ao da seção anterior, definimos agora um funtor $\Omega : INV \to SYS$, que associa semigrupos inversos à sistemas do seguinte modo: $\Omega(S) = (C(S), X_S)$, onde $X_S := S - \{0\}$ e $C(S)$ é a categoria dada na Definição 2.4.1, que age sobre $X_S$ do seguinte modo: $p : X_S \longrightarrow C(S)_0 := \{(e, e) : e \in E(S)\}$ é definida por $p(x) = (xx^{-1}, xx^{-1})$ e a ação $C(S) * X_S \to$

$X_S$, definida por $(s,e)\cdot x := sx$ se $d(s,e) = p(x)$. Os morfismos de semigrupos são transformados por $\Omega$ do seguinte modo: se $\theta : S \to T$ é um homomorfismo de semigrupos inversos, então, $\Omega(\theta) : (C(S), X_S) \to (C(T), X_T)$ definido por $\Omega(\theta) = (F_\theta, \theta)$, onde $F_\theta : C(S) \to C(T)$ é dada por $F_\theta(s,e) = (\theta(s), \theta(e))$. Assim, $\Omega(\theta)$ é um morfismo de sistemas.

Nosso próximo resultado é provar que $\Omega$ está bem definido e tem propriedades funtoriais.

**Teorema 3.2.1** *Nas notações acima definidas $\Omega : INV \to SYS$ é um funtor.*

**Prova.** Sejam $S, T \in INV$ e $\theta : S \to T$ um homomorfismo de semigrupos inversos. Iremos mostrar que $(F_\theta, \theta)$ é um morfismo de sistemas. De fato, $(F_\theta, \theta)$ deverá satisfazer $M_1$ e $M_2$ da Definição 2.2.7.
$M_1$. Seja $x \in X_S = S - \{0\}$, então $p(\theta(x)) = (\theta(x)\theta(x)^{-1}, \theta(x)\theta(x)^{-1})$.
Por outro lado,

$$F_\theta(p(x)) = F_\theta(xx^{-1}, xx^{-1}) = (\theta(xx^{-1}), \theta(xx^{-1})) = (\theta(x)\theta(x)^{-1}, \theta(x)\theta(x)^{-1}).$$

Portanto, $p(\theta(x)) = F_\theta(p(x))$.
$M_2$. Suponhamos que exista $(s,e)\cdot x \in (C(S), X_S)$. Sabemos que $(s,e)\cdot x = sx$ e $\theta((s,e)\cdot x) = \theta(sx)$. Por definição, $F_\theta(s,e) = (\theta(s), \theta(e))$. Portanto, $F_\theta(s,e)\cdot\theta(x) = (\theta(s),\theta(e))\cdot\theta(x) = \theta(s)\theta(x) = \theta(sx)$. Logo, $\theta((s,e)\cdot x) = F_\theta(s,e)\cdot\theta(x)$.

Ainda, $(F_\theta, \theta)$ deverá satisfazer $M_3$ da Definição 3.1.1. Na prova do Teorema 2.4.4, no item que demonstra $S_2$, ficou estabelecido que para um sistema $(C(S), X_S)$ temos que $C(S)\cdot x \cap C(S)\cdot y = C(S)\cdot(x^{-1}xy^{-1}y) - \{0\}$. Suponhamos então, que para certos $x, y \in S$, tenhamos $C(T)\cdot\theta(x) \cap C(T)\cdot\theta(y) \neq \emptyset$. Neste caso, $\theta(x^{-1}xy^{-1}y) = \theta(x^{-1})\theta(x)\theta(y^{-1})\theta(y) \in C(T)\cdot$

$\theta(x)^{-1}\theta(x)\theta(y)^{-1}\theta(y) - \{0\}$, implica que $\theta(x^{-1}xy^{-1}y) \neq 0$. Desde que $\theta$ é um homomorfismo de semigrupos, segue que $x^{-1}xy^{-1}y \neq 0$, logo $\emptyset \neq Sx^{-1}xy^{-1}y - \{0\} = C(S) \cdot x \cap C(S) \cdot y$.

De maneira análoga temos que se $C(S) \cdot x \cap C(S) \cdot y = C(S) \cdot z$, para algum $z \in S$, e pelos argumentos acima descritos, temos que $C(T) \cdot \theta(x) \cap C(T) \cdot \theta(y) = C(T) \cdot (xx^{-1}y^{-1}y) = C(T) \cdot \theta(z)$.

Finalmente, vamos verificar que $\Omega$ preserva composição e identidades. Com efeito, sejam $S, T, U$ semigrupos inversos e $\theta_1 : S \to T$ e $\theta_2 : T \to U$ homomorfismos de semigrupos. Então, neste caso, $\Omega(\theta_2 \circ \theta_1) = (F_{\theta_2 \circ \theta_1}, \theta_2 \circ \theta_1)$ é tal que para todo $(s, e) \in C(S)$ temos que $F_{\theta_2 \circ \theta_1}(s, e) = (\theta_2 \circ \theta_1(s), \theta_2 \circ \theta_1(e)) = (\theta_2(\theta_1(s), \theta_2\theta_1(s)) = (F_{\theta_2} \circ F_{\theta_1})(s, e)$. Como homomorfismos de semigrupos preservam identidades tem-se que $F_{\theta_2 \circ \theta_1}(e, e) = (\theta_2(\theta_1(e), \theta_2\theta_1(s))$ é uma identidade, para todo $e \in S_0$. ■

## 3.3 Compondo os funtores $\Theta : SYS \to INV$ e $\Omega : INV \to SYS$

Nas Seções 3.1 e 3.2 construimos os funtores $\Theta : SYS \to INV$ e $\Omega : INV \to SYS$. Estamos agora interessados em comparar os semigrupos $S$ com $\Theta \circ \Omega(S)$ e os sistemas $(C, X)$ com $(\Omega \circ \Theta)(C, X)$. Nesta seção faremos a comparação entre os semigrupos pois já temos pré-requisitos suficientes para isso. A comparação entre os sistemas demanda estabelecermos quando dois sistemas são equivalentes, e isso requer um pouco mais de trabalho, e por isto, deixaremos para o próximo capítulo.

Seja $S$ um semigrupo inverso com zero. Pela Proposição 1.4.7 temos que $\tilde{S}$, que denota o subconjunto de todos os $S$-isomorfismos entre ideais principais à esquerda de $S$, é um semigrupo inverso. Estes ideais serão denotados por $Ss$, para $s \in S$.

Para cada $s \in S$, defina $\Psi : S \to \tilde{S}$ por $\Psi(s) : Ss^{-1}s \to Sss^{-1}$ onde $s \mapsto \Psi(s) = as^{-1}$, para todo $a \in Ss^{-1}s$ .

**Lema 3.3.1** *$\Psi$ é um isomorfismo de $S$ para $\tilde{S}$.*

**Prova.** Pelo Teorema de Wagner Preston (Teorema 1.4.8), temos que $\theta : S \to I(S)$ onde para cada $s \in S$ associamos $\theta_s : Ss^{-1}s \to Sss^{-1}$ definida por $\theta_s(x) = xs$ é um homomorfismo injetor de semigrupos inversos. Desde que $\theta(S) \subseteq \tilde{S}$, podemos observar que a restrição $\Psi : S \to \tilde{S}$ onde para cada $s \in S$, temos $s \mapsto \Psi(s)(a) = as^{-1}$ para todo $a \in S$ é um homomorfismo injetor de semigrupos inversos. Iremos, provar que $\Psi$ é sobrejetora. De fato, seja $\theta : Sx \to Sy$ um isomorfimo em $\tilde{S}$, então existe um único $a \in Sy$, tal que $\phi(x^{-1}x) = a$. Observamos que

$$\phi(sx) = \phi(sxx^{-1}x) = \phi(sx(x^{-1}x)) = sx\phi(x^{-1}x) = sxa$$

e ainda,

$$a = \phi(x^{-1}x) = \phi(x^{-1}xx^{-1}x) = x^{-1}x\phi(x^{-1}x) = x^{-1}xa,$$

então $a = x^{-1}xa$. Mas $a \in Sy = Sy^{-1}y$, tem-se que $a = by^{-1}y$ para certo $b \in S$, daí, $ay^{-1}y = by^{-1}yy^{-1}y = by^{-1}y = a$, ou seja, $a = ay^{-1}y$. Então $a = x^{-1}xay^{-1}y$, e assim, $a \in Sy^{-1}y$. Como $\phi$ é sobrejetora, existe $a' \in Sx$ tal que $\phi(a') = y^{-1}y$. Portanto $y^{-1}y = \phi(a') = \phi(a'x^{-1}x)$, pois $a' \in Sx = Sx^{-1}x$.

Para cada $a \in Sx^{-1}x$ e $a'aa' \in Sx^{-1}x$, então $\phi(a'aa') = a'a\phi(a') = a'ay^{-1}y = y^{-1}yy^{-1}y = y^{-1}y = \phi(a')$, como $\phi$ é injetora, $a' = a'aa'$, ou seja, $a' = a^{-1}$. Em particular, $a^{-1}a = y^{-1}y$ e $\phi(aa^{-1}) = a\phi(a^{-1}) = ay^{-1}y = aa^{-1}a = a$, mas $\phi(x^{-1}x) = a$ e assim $\phi(aa^{-1}) = \phi(x^{-1}x)$. Logo $\phi(sx) = sxa = sxx^{-1}xa = sxaa^{-1}a = sxa = \Psi_a(sx)$. ■

Além de provar que $S$ e $(\Theta \circ \Omega)(S)$ são semigrupos inversos isomorfos, veremos dados $x, y \in S$, a cada $C(S)$-isomorfismo de $C(S) \cdot x$ sobre $C(S) \cdot y$ (ver Definição 2.2.7) podemos induzir um $S$-isomorfismo de semigrupos inversos de $Sx$ sobre $Sy$ e vice-versa.

**Teorema 3.3.2** *Sejam $S$ um semigrupo inverso com zero e $x, y \in S - \{0\}$. As seguintes condições são válidas.*

1. *Os $C(S)$-isomorfismos de $C(S) \cdot x \to C(S) \cdot y$ induzem e são induzidos por $S$-isomorfismos de $Sx \to Sy$.*

2. *$S$ e $(\Theta \circ \Omega)(S)$ são isomorfos.*

**Prova.** 1. Sejam $x, y \in S - \{0\}$. Como vimos na prova do Teorema 2.4.4, um $C(S)$-isomorfismo de $\theta : C(S) \cdot x \to C(S) \cdot y$ satisfaz $C(S) \cdot x = \{sx; s^{-1}s \leq ee\} = Sx - \{0\}$ e $C(S) \cdot y = \{ry; r^{-1}r \leq e\} = Sy - \{0\}$ e $p(\theta(sx)) = p(sx)$ e ainda, se existe $(r, f) \cdot sx$, então $\theta((r, f) \cdot sx) = (r, f) \cdot \theta(sx) = r\theta(sx)$.

Primeiramente, mostramos que $(sx, \theta(sx)) \in R^*$. Considere $sx \in C(S) \cdot x$, se $sx \neq 0$, pela definição de morfismo, $p(\theta(sx)) = p(sx)$, senão, temos $sx = 0$, e assim, $\theta(sx) = 0$. Em qualquer caso, temos, pelo Lema 2.3.9, que $(sx, \theta(sx)) \in R^*$.

Com essa informação podemos mostrar que $\hat{\theta} : Sx \to Sy$, definida como sendo $\hat{\theta} = \theta$ em $Sx - \{0\}$ e $\hat{\theta}(0) = 0$ é um $S$-homomorfismo, ou seja, para qualquer $t \in S$ e $sx \in Sx$ temos $\hat{\theta}(t(sx)) = t\hat{\theta}(sx)$. Suponha que $t(sx) = 0$, com $t, sx \neq 0$. Temos que $(\theta(sx), sx) \in R^*$ e que $R^*$ é uma relação de congruência a esquerda, logo $(t\theta(sx), tsx) \in R^*$ e ainda, $(t\theta(sx), 0) \in R^*$, ou seja, $p(t\theta(sx)) = p(0)$ e $t\theta(sx)(t\theta(sx))^{-1} = 0$, assim $t\theta(sx) = 0$, e então, $t\theta(sx) = \theta(t(sx))$.

Vamos estender $\theta$ a $Sx$ para $Sy$ fazendo $\theta(0) = 0$. Para tanto, suponha que $t(sx) \neq 0$. Se $t(sx)$ existe em $Sx$, então existe $(t, e)sx \in C(S)x$ e

$d(t,e) = p(sx)$, e ainda,

$$(e,e) = (sx(sx)^{-1}, sx(sx)^{-1}) \tag{3.3}$$

ou seja, $e = sx(sx)^{-1}$. Então $t(sx) = tsx(sx)^{-1}sx = t(e(sx))$. Agora considere $(te,e)$. Se $e \neq 0$ então $sx = esx = 0$ o que contradiz a hipótese de $t(sx) \neq 0$, logo $e \neq 0$. E ainda se $te = 0$ temos que $0 = tesx = tsx$ o que contradiz a hipótese de $t(sx) \neq 0$, logo $te \neq 0$. Como $(te,e) \in C(S)$ temos que $(te)^{-1}(te) \leq e$, e assim, $et^{-1}te \leq e$. Observe que por 3.3 temos $d(te,e) = (e,e) = p(sx)$. Então existe $(te,e) \cdot sx$ e $(te,e) \cdot sx = (te) \cdot sx = tesx = tsx$. Como $\theta$ é um $C(S)$-homomorfismo, vale $\theta((te,e)sx) = \theta(tesx) = te\theta(sx) = (te,e)\theta(sx)$. Observe que $\theta(tsx) = te\theta(sx) = t\theta(sx)$. Portanto $\theta$ é um $S$-homomorfismo.

Reciprocamente, seja $\theta : Sx \to Sy$ é um $S$-isomorfismo. Defina $\hat{\theta} : C(S) \cdot x \to C(S) \cdot y$ por $\hat{\theta}((s,e) \cdot x) = \theta(sx)$. Observe que se $(t,f)x = (s,e)x$ então $tx = sx$ e assim, $\hat{\theta}(tx) = \hat{\theta}(sx)$, portanto $\theta$ está bem definida.

Como $\theta$ é $S$-isomorfismo, temos $\hat{\theta}(tsx) = t\hat{\theta}(sx) = (t,f)\theta((s,e) \cdot x)$. Portanto, $\hat{\theta}((t,f) \cdot ((s,x) \cdot x)) = \hat{\theta}((ts,e) \cdot x) = \hat{\theta}(tsx)$, consequentemente $\hat{\theta}((t,f) \cdot ((s,x) \cdot x)) = (t,f) \cdot \hat{\theta}((s,e) \cdot x)$. Com isso, $\theta$ é um $C(S)$-isomorfismo.

2. Definemos a função $\iota : S \to J(X_S)$, onde $\iota(s) = \rho_{s^{-1}} : C(S)(s^{-1}s) \to C(S)(ss^{-1})$ se $s \neq 0$ e $\iota(s) = 0$ se $s = 0$. Pelo Item 1. e pelo Lema 3.3.1, temos que $\iota$ está bem definida e é um $C(S)$-isomorfismo. ■

Finalizamos com o seguinte corolário imediato

**Corolário 3.3.3** *Todo semigrupo inverso é isomorfo a um semigrupo decorrente de uma ação de categorias sobre um conjunto que satisfaz a condição forte de órbita.*

# Capítulo 4

# Equivalência entre sistemas e uma equivâlencia entre categorias

Iniciamos este capítulo, estabelecendo uma relação de equivalência entre sistemas, comparamos os sistemas $(C, X)$ e $(\Omega \circ \Theta)(C, X)$, mostrando que estes pertencem a uma classe ampla de sistemas. Finalizamos, mostrando que a categoria $INV$ é equivalente não a toda categoria $SYS$, mas sim a um quociente desta categoria.

## 4.1 Sistemas Equivalentes

A seguir introduzimos uma classe especial de morfismos de sistemas que vamos chamar de equivalência e um conceito que chamaremos de transformações entre morfismos de sistemas. Para isto, utilizamos as chamadas transformações naturais definidas na seção 1.5 (ver Definição 1.5.5).

**Definição 4.1.1** *Sejam* $(F,\theta)$ *e* $(G,\varphi)$ *morfismos de sistemas de* $(C,X)$ *em* $(D,Y)$*. Uma* transformação entre morfismos de sistemas $\tau:(F,\theta)\to(G,\varphi)$ *é definida pelas seguintes condições:*

$T_1$*.* $\tau: F\to G$ *é uma transformação natural;*

$T_2$*.* $\varphi(x)=\tau_{p(x)}\cdot\theta(x)$*, para todo* $x\in X$*.*

Observemos que $\varphi(x)=\tau_{p(x)}\cdot\theta(x)$ existe pois $d(\tau_{p(x)})=F(p(x))$ e $r(\tau_{p(x)})=G(p(x))$ para todo $x\in X$. Assim, por $M_1$ da Definição 2.2.7, temos que $d(\tau_{p(x)})=F(p(x))=p(\theta(x))$.

Particularmente, se em $T_1$, $\tau=1_F:(F,\theta)\longrightarrow(F,\theta)$ for a transformação natural identidade, dizemos que a transformação $\tau$ é a *transformação identidade*. Se $\tau: F\longrightarrow G$ é um isomorfismo natural, dizemos que $\tau$ é um *isomorfismo*. Neste caso, $\tau^{-1}$ de $G$ para $F$ é definida por $\tau_e^{-1}=(\tau_e)^{-1}$, para cada identidade $e\in C$.

No Próximo resultado usaremos a definição de categorias no sentido da Definição 2.1.1. Lembremos que uma categoria $C$ é uma *préordem* se for uma "small"categoria (isto é, a união de seus objetos com todos os morfismos forma um conjunto); o conjunto dos objetos é ordenado parcialmente e sempre que um objeto A for menor que um objeto B, então existe um único morfismo de A para B.

**Lema 4.1.2** *Sejam* $(C,X),(D,Y)$ *sistemas.*

*(i) As transformações entre morfismos de sistemas de* $(C,X)$ *para* $(D,Y)$ *formam uma categoria no sentido da Definição 2.1.1. Além disso, tal categoria é uma préordem.*

*(ii) Se* $\tau:(F,\theta)\to(G,\varphi)$ *e* $\sigma:(G,\varphi)\to(F,\theta)$ *são transformações, então* $\tau$ *é um isomorfismo e* $\sigma=\tau^{-1}$*.*

**Prova.** $(i)$ Observemos que os objetos e os morfismos desta possível categoria são dados da seguinte maneira:

Objetos: $1_F : (F, \theta) \to (F, \theta)$, onde $F : C \to D$ é um funtor e $\theta : X \to Y$ uma função.

Morfismos: para qualquer $x \in C$, temos que $d(x) = e \in C_0$ e $r(x) = f \in C_0$, onde:

$$\begin{array}{cccc} & F(e) & \xrightarrow{\mu_e} & G(e) \\ {\scriptstyle F(x)} & \downarrow & & \downarrow & {\scriptstyle G(x)} \\ & F(f) & \xrightarrow{\mu_f} & G(f) \end{array}$$

(a) Primeiramente iremos mostrar que composição de transformações é uma transformação. De fato, sejam $\tau_1 : (F, \theta) \to (G, \varphi)$ e $\tau_2 : (G, \varphi) \to (H, \psi)$ transformações, logo por definição sabemos que $\tau_1, \tau_2$ são transformações naturais. Se $A, B$ são objetos e $f : A \to B$ um morfismo, então $G(f) \circ \tau_{1_A} = \tau_{1_B} \circ F(f)$ e $H(f) \circ \tau_{2_A} = \tau_{2_B} \circ G(f)$, pois os diagramas abaixo comutam

$$\begin{array}{cccccccc} & F(A) & \xrightarrow{\tau_{1_A}} & G(A) & \xrightarrow{\tau_{2_A}} & & H(A) \\ {\scriptstyle F(f)} & \downarrow & & \downarrow & {\scriptstyle G(f)} & \downarrow & {\scriptstyle H(f)} \\ & F(B) & \xrightarrow{\tau_{1_B}} & G(B) & \xrightarrow{\tau_{2_B}} & & H(B) \end{array}$$

De $H(f) \circ \tau_{2_A} = \tau_{2_B} \circ G(f)$ podemos obter as seguintes igualdades:

$$(H(f) \circ \tau_{2_A}) \circ \tau_{1_A} = (\tau_{2_B} \circ G(f)) \circ \tau_{1_A}$$

$$H(f) \circ (\tau_{2_A} \circ \tau_{1_A}) = \tau_{2_B} \circ (G(f) \circ \tau_{1_A})$$

$$H(f) \circ (\tau_{2_A} \circ \tau_{1_A}) = \tau_{2_B} \circ (\tau_{1_B} \circ F(f))$$

$$H(f) \circ (\tau_{2_A} \circ \tau_{1_A}) = (\tau_{2_B} \circ \tau_{1_B}) \circ F(f)$$

Portanto, $\tau_{2_A} \circ \tau_{1_A}$ é uma transformação natural.

Iremos mostrar agora que vale a segunda condição da definição de transformação. De fato, para todo $x \in X$, temos $\varphi(x) = \tau_{1_{p(x)}} \cdot \theta(x)$ e $\psi(x) =$

${\tau_2}_{p(x)} \cdot \varphi(x)$, assim $\psi(x) = {\tau_1}_{p(x)} \cdot {\tau_1}_{p(x)} \cdot \theta(x) = (\tau_2 \circ \tau_1)_{p(x)} \cdot \theta(x)$. Portanto, ${\tau_2}_A \circ {\tau_1}_A$ é uma transformação.

(b) Iremos mostrar que as transformações de um morfismo de sistemas formam uma categoria (cujos objetos são as equivalências de sistemas). Para isto, veremos que são satisfeitas as condições $C_1, C_2$ e $C_3$ da Definição 2.1.1.

$C_1$. Primeiramente vamos mostrar que a composição destes morfismos (transformações) é associativa. Sejam $\tau_1, \tau_2, \tau_3$ transformações. Onde $\tau_1 : (F.\theta) \to (G, \varphi), \tau_2 : (G, \varphi) \to (H, \psi), \tau_3 : (H, \psi) \to (I, \alpha)$.

Pelo item (a), $\tau_2 \circ \tau_1$ é uma transformação. Do mesmo modo $(\tau_2 \circ \tau_1) \circ \tau_3$ é uma transformação. Como $\tau_1 : F \to G$ e $F : C \to D$; $G : C \to D$, assim para qualquer $a \in C$, $\tau_a \in D$, logo $(\tau_2 \circ \tau_1) \circ \tau_3 = \tau_2 \circ (\tau_1 \circ \tau_3)$. Como existe $({\tau_2}_A \circ {\tau_1}_A) \circ \tau_3$, então existem ${\tau_2}_A \circ {\tau_1}_A$ e ${\tau_1}_A \circ \tau_3$.

$C_2$. Como existe $(\tau_2 \circ \tau_1) \circ \tau_3$, temos do item (a) que existem $\tau_2 \circ \tau_1$ e $\tau_1 \circ \tau_3$. O resto é análogo.

$C_3$. Consideramos $1_F : (F, \theta) \to (F, \theta)$ , $1_G : (G, \varphi) \to (G, \varphi)$ e $\tau : (F, \theta) \to (G, \varphi)$, então $\tau \circ 1_F = \tau$ e $1_G \circ \tau = \tau$.

Para mostrar que é uma "small"categoria, tome $\mu : (F, \theta) \to (G, \varphi)$ e $\gamma : (F, \theta) \to (G, \varphi)$. Por definição obtemos: $\varphi(x) = \mu_{p(x)} \circ \theta(x)$ e $\varphi(x) = \gamma_{p(x)} \circ \theta(x)$. Assim $\mu_{p(x)} \circ \theta(x) = \gamma_{p(x)} \circ \theta(x)$, e pela lei do cancelamento $\mu_{p(x)} = \gamma_{p(x)}$. Sendo $p : X \to C_0$ sobrejetora, segue-se que para qualquer $e \in C_0$, vale $\mu_e = \gamma_e$. Logo, $\mu = \gamma$.

$(ii)$ Imediata de $(i)$. ■

Nos próximos lemas veremos que a categoria $INV$ tem também uma outra estrutura que provém da ordem natural existente em cada semigrupo inverso (ver Seção 1.3). Sejam $\theta, \varphi : S \to T$ homomorfismos em $INV$. Usaremos a notação $\varphi \leq \theta$ para dizer que $\varphi(s) \leq \theta(s)$, para todo $s \in S$. Desde que esta relação é de ordem, temos que o conjunto dos homomorfismos de $S$ para $T$

é parcialmente ordenado. Os próximos lemas fazem uma ligação entre esta relação de ordem e as transformações que ocorrem em $SYS$.

**Lema 4.1.3** *Sejam* $(F,\theta),(G,\varphi):(C,X)\to(D,Y)$ *morfismos de sistemas. Se* $\tau:(F,\theta)\to(G,\varphi)$ *é uma transformação, então* $\Theta(F,\theta)\leq\Theta(G,\varphi)$ *em* $INV$.

**Prova.** Iremos mostrar que $\Theta(F,\theta)([x,y])\leq\Theta(G,\varphi)([x,y])$ para qualquer $[x,y]\in SYS$. Pelo Teorema 3.1.2 temos $\Theta(F,\theta)([x,y])=[\theta(x),\theta(y)]$ e $\Theta(G,\varphi)([x,y])=[\varphi(x),\varphi(y)]$. Como $\tau:(F,\theta)\to(G,\varphi)$ é uma transformação temos $\varphi(x)=\tau_{p(x)}\cdot\theta(x)$ e $\varphi(y)=\tau_{p(y)}\cdot\theta(y)$. Mas por hipótese $[x,y]\in SYS$ e $(x,y)\in R^*$, então tomando $\tau_{p(x)}=\tau_{p(y)}=c$, obtemos $\varphi(x)=c\cdot\theta(x)$ e $\varphi(y)=c\cdot\theta(y)$. Portanto $(\varphi(x),\varphi(y))=c\cdot(\theta(x),\theta(y))$ se, e somente se $[\varphi(x),\varphi(y)]\leq[\theta(x),\theta(y)]$. Logo, $\Theta(F,\theta)\leq\Theta(G,\varphi)$. ■

**Lema 4.1.4** *Sejam* $\theta,\varphi:S\to T$ *homomorfismos em* $INV$ *tal que* $\varphi\leq\theta$. *Então existe uma transformação* $\tau:C(\varphi)\to C(\theta)$.

**Prova.** Pelo Teorema 3.2.1, temos $C(\varphi)=(F_\varphi,\varphi)$, onde $(F_\varphi,\varphi)=(\varphi(s),\varphi(e))$ tal que $\varphi:X_S\to X_T$ e $F_\varphi:C(S)\to C(T)$ e $C(\theta)=(F_\theta,\theta)$, onde $(F_\theta,\theta)=(\theta(s),\theta(e))$ tal que $\theta:X_S\to X_T$, com $F_\theta:C(S)\to C(T)$.

Desde que $C(S)=\{(x,e):x^{-1}x\leq e,x\neq 0\}$ então, para qualquer $(x,e)\in C(S)$ e $(e,e)\in C(S)_0$ temos que o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{array}{ccccc} & F_\theta(e,e) & \xrightarrow{\tau_{(e,e)}} & F_\varphi(e,e) & \\ {\scriptstyle F_\theta(x,e)} & \downarrow & & \downarrow & {\scriptstyle F_\varphi(x,e)} \\ & F_\theta(f,f) & \xrightarrow{\tau_{(f,f)}} & F_\varphi(f,f) & \end{array} \tag{4.1}$$

onde $\tau_{(e,e)} = (\varphi(e), \theta(e))$.

Por hipótese $\varphi \leq \theta$, então $\varphi(e) \leq \theta(e)$, daí pelo Lema 1.3.1, $\varphi(e)^{-1} \leq \theta(e)^{-1}$ e $\varphi(e)^{-1}\varphi(e) \leq \theta(e)^{-1}\theta(e) = \theta(e^{-1})\theta(e) = \theta(e^{-1}e) = \theta(e)$. Assim $\varphi(e)^{-1}\varphi(e) \leq \theta(e)$, logo $(\varphi(e), \theta(e)) \in C(S)$, ou seja, $\tau_{(e,e)} \in C(S)$.

Finalmente, para mostrar que $\tau$ é uma transformação, vamos verificar $T_1$ e $T_2$ da definição 4.1.1:

$T_1$. Sejam $(e,e),(f,f) \in C_0$ e $(x,e) \in hom((e,e),(f,f))$, pelo diagrama 4.1 obtemos que $F_\varphi(x,e) \circ \tau_{(e,e)} = (\varphi(x), \varphi(e))(\varphi(e), \varphi(e)) = (\varphi(x) \circ \varphi(e), \theta(e))$ e $\tau_{(f,f)} \circ F_\theta(x,e) = (\varphi(f), \theta(f))(\theta(f), \theta(f)) = (\varphi(f) \circ \theta(x), \theta(e))$. Assim, $F_\varphi(x,e) \circ \tau_{(e,e)} = (\varphi(x) \circ \varphi(e), \theta(e))$. Mas, $\varphi$ é um homomorfismo, logo $\varphi(x) \cdot \varphi(e) = \varphi(xe) = \varphi(x)$, então $F_\varphi(x,e) \circ \tau_{(e,e)} = (\varphi(x), \theta(e))$.

Por outro lado, $\tau_{(f,f)} \circ F_\theta(x,e) = (\varphi(f) \circ \theta(x), \theta(e))$. Mas, $\varphi(e) \leq \theta(e)$, então $\varphi(x) = \varphi(x^{-1}x) \cdot \theta(x) = \varphi(f)\theta(x)$, então $\tau_{(f,f)} \circ F_\theta(x,e) = (\varphi(x), \theta(e))$. Portanto, $F_\varphi(x,e) \circ \tau_{(e,e)} = \tau_{(f,f)} \circ F_\theta(x,e)$, ou seja, $\tau$ é natural.

$T_2$. Seja $x \in X_S$. Temos $p(x) = (x^{-1}x, x^{-1}x)$ e $\tau_{p(x)} = (\varphi(xx^{-1}), xx^{-1})$. Observe que $\tau_{p(x)} \circ \theta(x) = (\varphi(xx^{-1}), xx^{-1}) \cdot \theta(x) = \varphi(xx^{-1}) \cdot \theta = \varphi(x)$. Portanto, $\varphi(x) = \tau_{p(x)}\theta(x)$. ■

Estamos aptos a definir sistemas equivalentes. Se $(C,X)$ é um sistema, então $(1_C, 1_X)$ denotará o morfismo de sistemas identidade, onde $1_C$ denota o funtor identidade sobre $C$ e $1_X$ é a função identidade sobre $X$.

**Definição 4.1.5** *Sejam* $(C,X)$ *e* $(D,Y)$ *sistemas e* $(F,\theta) : (C,X) \longrightarrow (D,Y)$ *um morfismo de sistemas. Dizemos que* $(F,\theta)$ *é uma* equivalência de sistemas *se existe um morfismo de sistemas* $(G,\varphi) : (D,Y) \longrightarrow (C,X)$ *e isomorfismos* $\sigma : (1_D, 1_Y) \longrightarrow (F \circ G, \theta \circ \varphi)$ *e* $\tau : (1_C, 1_x) \longrightarrow (G \circ F, \varphi \circ \theta)$.

**Teorema 4.1.6** *As seguintes afirmações são verdadeiras:*

1. *Se* $(C,X)$ *é um sistema, então,* $(1_C, 1_X)$ *é uma equivalência de sistemas.*

*2. A composição de equivalências é uma equivalência.*

*3. Se $(F,\theta) : (C,X) \longrightarrow (D,Y)$ é uma equivalência de sistemas, então $\Theta(F,\theta) : \Theta(C,X) \longrightarrow \Theta(D,Y)$ é um isomorfismo.*

**Prova.** 1. Por definição $(1_C, 1_X) : (C,X) \to (C,X)$ é um morfismo de sistemas. Seja $(G,\varphi) = (1_C, 1_X)$. Então, para o morfismo de sistema $(1_C, 1_X)$, temos que $\sigma : (1_C, 1_X) \to (1_C \circ 1_C, 1_X \circ 1_X)$ e $\tau : (1_C, 1_X) \to (1_C \circ 1_C, 1_X \circ 1_X)$ são isomorfismos.

2. Sejam $(F,\theta) : (C,X) \to (D,Y)$ e $(H,\psi) : (D',Y') \to (C',X')$ equivalências de sistemas. Então, existem isomorfismos $(G,\varphi) : (D,Y) \to (C,X)$ e $(I,\phi) : (C',X') \to (D',Y')$, e ainda, isomorfismos $\sigma : (1_D, 1_Y) \to (F \circ G, \theta \circ \varphi)$ e $\tau : (1_C, 1_X) \to (G \circ F, \varphi \circ \theta)$, tais que $\alpha : (1_{C'}, 1_{X'}) \to (H \circ I, \psi \circ \phi)$ e $\beta : (1_{D'}, 1_{Y'}) \to (I \circ H, \phi \circ \psi)$ são isomorfismos.

Considere $(F,\theta) \circ (H,\psi) : (D',Y') \to (D,Y)$, logo existe $(I,\phi) \circ (G,\varphi) : (D,Y) \to (D',Y')$. Então $\delta : (1_D, 1_Y) \to ((f \circ H) \circ (I \circ G), (\theta \circ \psi) \circ (\alpha \circ \beta))$ e $\rho : (1_C, 1_X) \to ((I \circ G) \circ (f \circ H), (\alpha \circ \beta) \circ (\theta \circ \psi))$ são isomorfismos, garantindo assim, que a composição satisfaz a Definição 4.1.5.

3. Por hipótese temos que $(F,\theta) : (C,X) \longrightarrow (D,Y)$ é uma equivalência, portanto existem $(G,\varphi) : (D,Y) \longrightarrow (C,X)$ e $\delta : (1_D, 1_Y) \to (F \circ G, \theta \circ \varphi)$ e isomorfismos $\rho : (1_C, 1_X) \to (G \circ F, \varphi \circ \theta)$. Assim, do Teorema 3.1.2, temos que $\Theta$ é um funtor, com isto, $\Theta(F \circ G, \theta \circ \varphi) = \Theta((F,\theta) \circ (G,\varphi)) = \Theta(F,\theta) \circ \Theta(G,\varphi)$ e $\Theta(G \circ F, \theta \circ \varphi) = \Theta((G,\varphi) \circ (F,\theta)) = \Theta(G,\varphi) \circ \Theta(F,\theta)$.

Agora, observemos que $\Theta(1_D, 1_Y)$ é um homomorfismo identidade em $\Theta(D,Y)$ e $\Theta(1_C, 1_X)$ é um homomorfismo identidade em $\Theta(C,X)$ e pelo Lema 4.1.3, $\Theta(F \circ G, \theta \circ \varphi) \leq \Theta(1_D, 1_Y)$ e $\Theta(G \circ F, \varphi \circ \theta) \leq \Theta(1_C, 1_X)$. Assim, $\Theta(F \circ G, \theta \circ \varphi)$ é equivalente a $\Theta(1_D, 1_Y)$. Analogamente provamos que $\Theta(G \circ F, \theta \circ \varphi)$ é equivalente a $\Theta(1_C, 1_X)$. Portanto, $\Theta((F,\theta) \circ (G,\varphi))$ é equivalente a $\Theta(1_D, 1_Y)$ e $\Theta((G,\varphi)\circ(F,\theta))$ é equivalente a $\Theta(1_C, 1_X)$. Logo, $\Theta(F,\theta)$ é um isomorfismo. ■

O próximo resultado nos dá uma nova caracterização para equivalências de sistemas.

**Proposição 4.1.7** *Um morfismo de sistema $(F,\theta) : (C,X) \longrightarrow (D,Y)$ é uma equivalência de sistemas se, e somente se, satisfaz:*
*$(ES1)$ $F$ é uma equivalência de categorias;*
*$(ES2)$ para cada $y \in Y$ existe um isomorfismo $u \in D$ e um elemento $x \in X$ tal que $y = u \cdot \theta(x)$;*
*$(ES3)$ se $y_1 = a \cdot y_2$ em $D_Y$ e $\theta(x_1) = y_1$ e $\theta(x_2) = y_2$, então, existe $a' \in C$ tal que $x_1 = a' \cdot x_2$.*

**Prova.** $(\Rightarrow)$ Se $(F,\theta) : (C,X) \longrightarrow (D,Y)$ é uma equivalência de sistemas, então, existem $(G,\varphi) : (D,Y) \longrightarrow (C,X)$ morfismos de sistemas e $\delta : (1_D, 1_Y) \to (F\circ G, \theta\circ\varphi)$ e $\rho : (1_C, 1_X) \to (G\circ F, \varphi\circ\theta)$, isomorfismos naturais. Com isto, podemos provar que valem:

(ES1) Para $F : C \to D$ e $G : D \to C$, vamos considerar $\delta : 1_D \to F\circ G$ e $\rho : 1_C \to G\circ F$. Assim, $F$ é uma equivalência de categorias.

(ES2) Seja $y \in Y$, por hipótese, $\delta : (1_D, 1_Y) \to (F\circ G, \theta\circ\varphi)$ é um homomorfismo. Assim pela definição de transformação natural temos que $\theta(\varphi(y)) = \delta_{p(y)}\cdot(1_Y(y)) = \delta_{p(y)}\cdot y$. Mas, $x = \varphi(y)$ e considerando $u = (\delta_{p(y)})^{-1}$ e $\rho_{p(y)} = p(y)$. Portanto, $\theta(x) = \delta_{p(y)} \cdot y$ e $u\cdot\theta(x) = u\cdot\rho_{p(y)}\cdot y = (\rho_{p(y)})^{-1} = p(y)p(y)\cdot y = p(y)\cdot y = y$. Logo, $y = u\cdot\theta(x)$.

(ES3) Dados : $y_1 = a\cdot y_2$, $\theta(x_1) = y_1$ e $\theta(x_2) = y_2$. Por hipótese, $\rho : (1_C, 1_X) \to (G\circ F, \varphi\circ\theta)$ é uma transformação, assim, $\varphi\circ\theta(x) = \rho_{p(x)}\cdot 1_x\cdot x = p(x)\cdot x = x$, logo, $\rho_{p(x)}\cdot\varphi\circ\theta(x) = \rho_{p(x)}\cdot x = x$, portanto $x = \rho_{p(x)}\cdot\varphi\circ\theta(x)$ para qualquer $x \in X$. Então, $x_1 = \rho_{p(x_1)}\cdot\varphi\circ\theta(x_1)$ e $x_2 = \rho_{p(x_2)}\cdot\varphi\circ\theta(x_2)$.

Portanto temos, $x_1 = \rho_{p(x_1)} \cdot \varphi(y_1) = \rho_{p(x_1)} \cdot \varphi(ay_2) = \rho_{p(x_1)} \cdot G(a) \cdot \varphi(y_2) = \rho_{p(x_1)} \cdot G(a) \cdot \varphi \circ \theta(x_2)$.

Agora, $x_2 = \rho_{p(x_2)} \cdot \varphi \circ \theta(x_2)$, com $\rho_{p(x_2)} : p(x_2) \to p(x_2) = G \circ F(p(x_2))$ e $\rho^{-1}_{p(x_2)} \cdot x_2 = \rho^{-1}_{p(x_2)} \cdot \rho_{p(x_2)} \cdot \varphi \circ \theta(x_2)$. Mas, $\rho(p(x_2)) \cdot \varphi \circ \theta(x_2) = \rho_{p(x_2)}$ e $x_2 \cdot \varphi \circ \theta(x_2) = x_2$. Então, $\varphi \circ \theta$ é uma identidade, logo $\varphi \circ \theta(x_2) = x_2$. Assim, $\rho^{-1}_{p(x_2)} \cdot x_2 = \rho^{-1} \rho_{p(x_2)} \cdot x_2 = p(x_2) \cdot x_2 = x_2 = \varphi \circ \theta(x_2)$, Ou seja, $\varphi \circ \theta(x_2) = \rho^{-1}_{p(x_2)} \cdot x_2$. Logo, $x_1 = \rho_{p(x_1)} \cdot G(a) \cdot \rho^{-1}_{p(x_2)} \cdot x_2$. Fazendo $a' = \rho_{p(x_1)} \cdot G(a) \cdot \rho^{-1}_{p(x_2)}$, obtemos $x_1 = a' \cdot x_2$.

($\Leftarrow$) Seja $(F, \theta) : (C, X) \longrightarrow (D, Y)$ um morfismo de sistemas, satisfazendo as condições (ES1),(ES2) e (ES3). Iremos mostrar que $(F, \theta)$ é uma equivalência de sistemas. Por (ES1), para cada $e \in D$, existem uma identidade $G(e) \in C$ e isomorfismos $\delta_e \in hom(e, F \circ G(e))$. Agora seja $y \in Y$, por (ES2), existem um isomorfismo $u \in D$ e $x \in X$, tal que $y = u \cdot \theta(x)$. Consideremos $\delta_{p(y)} : p(y) \to F \circ G(p(y))$, observemos que $d(\delta_{p(y)}) = p(y)$, logo $\delta_{p(y)} \cdot y$ está definido. Assim, $\delta_{p(y)} \cdot y = \delta_{p(y)} \cdot (u \cdot \theta(x)) = (\delta_{p(y)} \cdot) u \cdot \theta(x)$. Mas, $\delta_{p(y)} \in hom(p(y), F \circ G(p(y)))$ e $u \in D$. Desde que $p(x) \in C_0 \subseteq C$ e $F(p(x)) \in D$, temos $\delta_{p(y)} \in hom(p(x), G(p(y)))$ e $F(u') = \delta_{p(y)} \cdot u$. Novamente por (ES1), temos que existe um único isomorfismo $u' \in C$ tal que $u' \in hom(p(x), G(p(y))$ e $F(u') = \delta_{p(y)} \cdot u$. Logo $\delta_{p(y)} \cdot y = F(u') \cdot \theta(x) = \theta(u' \cdot x)$. $\blacksquare$

## 4.2 Uma categoria equivalente a $INV$

Nesta seção iremos mostrar que a categoria $INV$ é equivalente a um quociente da categoria $SYS$. Iniciamos com alguns resultados auxiliares.

**Lema 4.2.1** *Sejam $(C, X)$ um sistema e $q : C_0 \to X$ uma aplicação tal que $p(q(e)) = e$, para todo $e \in C_0$. Então, as aplicações $F : C \to C(J({}_C X))$,* *definida por* $F(s) = ([q(r(s)), s \cdot q(d(s))], [q(d(s)), q(d(s))])$, *para todo* $s \in C$ *e* $\theta : X \to X_{J(_C X)}$, *onde* $\theta(x) = [q(p(x)), x]$, *para todo* $x \in X$, *definem um morfismo de sistemas.*

**Prova.** $F$ está bem definida. De fato, $[q(r(s)), sq \cdot q(d(s))]^{-1} \cdot [q(r(s)), sq \cdot q(d(s))] = [s \cdot q(d(s)), sq(d(s))]$, para $s, t \in C$. Mas, $[s \cdot q(d(s)), sq(d(s))] \leq [q(d(s)), q(s)(d)]$ se, e somente se, existe $s \in C$, tal que, $(s \cdot q(d(s)), s \cdot q(d(s))) = u(q(d(s)), q(d(s)))$. Portanto, temos que $F(s) \in C'(S)$.

É fácil ver que, pela Proposição 2.3.14, temos, $[q(p(x)), x] \in X_{J(_C X)}$, para todo $x \in C$. Como $q(p(x))$ e $x$ satisfazem a condição 2 do Lema 2.3.9, então, $\theta$ também está bem definida.

No que segue, usaremos as notações $q(r(s)) = f_s$ e $q(d(s)) = e_s$, para todo $s \in C$. Para mostrar que F é um funtor, iremos mostrar que F preserva as identidades. Seja $e \in C_0$, logo $F(e) = ([f_e, e \cdot e_e], [e_e, e_e])$, observe que $f_e = q(r(e)) = q(e)$ e $e_e = q(d(e)) = q(e)$. Existe $e \cdot e_e$ se, e somente se, $d(e) = p(e_e) = p(q(e))$, portanto, $p(q(e)) \cdot q(e) = q(e)$, daí obtemos que $e \cdot e_e = e_e$. Assim, concluimos que $F(e) = ([f_e, e_e], [e_e, e_e])$.

Agora suponhamos que exista $st \in C$, neste caso $d(s) = r(t)$ e ainda, $F(s) = ([f_s, s \cdot e_s], [e_s, e_s])$ e $F(t) = ([f_t, t \cdot e_t], [e_t, e_t])$. Pela Definição 2.1.1 $d(F(s)) = ([e_s, e_s], [e_s, e_s])$ e $r(F(t)) = ([f_t, t \cdot e_t] \otimes [f_t, t \cdot e_t]^{-1}, [f_t, t \cdot e_t] \otimes [f_t, t \cdot e_t]^{-1})$, e, pela Proposição 2.3.14, temos que $[x, y] \otimes [x, y]^{-1} = [x, x]$. Logo, $r(F(t)) = ([f_t, f_t], [f_t, f_t])$. Agora, $e_s = q(d(s)) = q(r(t)) f_t$, então, $e_s = f_t$. Assim, $d(F(s)) = r(F(t))$, logo, existe $F(s)F(t)$.

Por definição $F(s)F(t) = ([f_s, s \cdot e_s] \otimes [f_t, t \cdot e_t], [e_t, e_t])$, e ainda,

$$C \cdot (s \cdot e_s) \cap C \cdot f_t = C \cdot ((s, e_s) * f_t) \cdot f_t = C(f_t * (s, e)) \cdot (s, e_s) = C \cdot (s \cdot e_s). \quad (4.2)$$

Desde que, $r(s) \cdot f_s = p(q(r(s)) \cdot q(r(s)) = p(f_s) \cdot f_s = f_s$. E por (4.2), temos que, $(s \cdot e_s) * f_t = s$. Assim, $F(s)F(t) = ([(r(s) \cdot f_s, (s \cdot e_s * ft) \cdot te_t)], [e_t, e_t]) =$

$([f_s, (st)\cdot e_t, [e_t, e_t]).$

Por outro lado, $F(st) = (q(r(st)), st\cdot q(d(st))], [q(d(st)), q(d(st))]) = ([f_s, (st)\cdot e_t, [e_t, e_t]$, pois, $q(r(st)) = q(r(s)) = f_s$ e $q(d(st)) = q(d(t)) = e_t$.

No próximo passo, vamos verificar as condições da Definição 3.1.1, para que $(F, \theta)$ seja um morfismo de sistemas.

$M_1$. Notemos que de um lado, $p(\theta(x)) = (\theta(x)\cdot\theta(x)^{-1}, \theta(x)\cdot\theta(x)^{-1})$ e $\theta(x)\cdot\theta(x)^{-1} = [q(p(x)), x]\otimes[q(p(x)), x]^{-1} = [q(p(x)), q(p(x))]$. Então $p(\theta(x)) = ([q(p(x)), q(p(x))], [q(p(x)), q(p(x))])$.

Por outro lado,

$$Fp(x) = ([q(r(p(x))), p(x)\cdot q(d(p(x)))], [q(d(p(x))), q(d(p(x)))]).$$

Mas, $d(p(x)) = p(x)$ e $r(p(x)) = p(x)$, daí $q(p(x)) = q(r(p(x)))$. Agora, do fato de que existe $p(x)\cdot q(p(x))$ se, e somente se, $d(p(x)) = p(q(p(x)))$, obtemos, $p(x)\cdot q(p(x)) = q(p(x))$. Portanto,

$$F(p(\theta(x))) = ([q(p(x)), q(p(x))], [q(p(x)), q(p(x))]).$$

Logo, $p(\theta(x)) = F(p(x))$.

$M_2$. Observamos que $\theta(a\cdot x) = [q(p(x)), a\cdot x]$. Por sua vez, $F(a)\cdot\theta(x) = ([f_a, a\cdot e_a], [e_a, e_a])\otimes([q(p(x)), x]) = ([f_a, a\cdot e_a]\otimes[q(p(x)), x]) = [(q(p(x)) * ae_a)f_a, ae_a * q(p(x))\cdot x]$.

Como está definido $([f_a, a\cdot e_a]\otimes[q(p(x)), x])$, então, $C_{(ae_a)}\cap C_{q(p(x))} = C_z$, onde $z = (ae_a * q(p(x)))\cdot q(p(x)) = (q(p(x)) * ae_e)\cdot ae_a$ e $F(a)\cdot\theta(x) = [(q(p(x)) * ae_a)f_a, (ae_a * q(p(x)))\cdot x]$, onde $f_a = q(r(a)) = q(p(a\cdot x))$.

Notemos que de um lado, se existe $(q(p(x)) * ae_a)f_a$, temos que $d(q(p(x)) * ae_a) = p(f_a) = p(q(r(a))) = p(q(p(a\cdot x)))$, então, $(q(p(x)) * ae_a)\cdot q(p(a\cdot x)) = p(q(p(a\cdot x)))\cdot q(p(a\cdot x)) = q(p(a\cdot x))$. Por outro lado, se existe $(ae_a * q(p(x)))\cdot x$, temos que $d(ae_a * q(p(x))) = p(x) = d(a)$. Assim, $ae_a * q(p(x))\cdot x = a\cdot x$ e concluimos que, $\theta(a\cdot x) = F(a)\cdot\theta(x)$.

$M_3$. Sejam $F : C \to C(S) = C(J({}_C X))$ e $\theta : X \to X_{J({}_C X)}$. Da prova do Teorema 2.4.4, temos $C(S) \cdot x = S \cdot x \setminus \{0\}$, assim $C(J({}_C X)) \cdot \theta(w) = J({}_C X) \otimes \theta(w) = J({}_C X) \otimes [q(p(w)), w]$. Mostremos que $J({}_C X) \otimes [q(p(w)), w] = J({}_C X) \otimes [w, w]$, ou seja, para qualquer $[s, t] \in J({}_C X)$ temos, $[s, t] \otimes [q(p(w)), w] = [s, t] \otimes [w, w]$, pela Proposição 2.3.14, temos $[(q(p(w)) * t) \cdot s, (t * q(p(w))) \cdot w] = [(w * t) \cdot s, (t * w) \cdot w]$ e ainda, pelo mesmo teorema, concluimos que $((q(p(w)) * t) \cdot s, (t * q(p(w))) \cdot w) = u((w * t) \cdot s, (t * w) \cdot w)$, para algum $u \in C$. Deste modo, $(q(p(w)) * t) \cdot s = u((w * t) \cdot s)$ e $(t * q(p(w))) \cdot w = u((t * w) \cdot w)$, por $A_3$, obtemos que $q(p(w)) * t = u(w * t)$ e $t * q(p(w)) = u(t * w)$. Portanto, $J({}_C X) \otimes [q(p(w)), w] = J({}_C X) \otimes [w, w]$.

Assim, se $C(J({}_C X)) \cdot \theta(x) \cap C(J({}_C X)) \cdot \theta(y) \neq \emptyset$, então podemos encontrar elementos na interseção tais que $[a, u \cdot x] = [b, v \cdot y]$. Então $u \cdot x = r \cdot (v \cdot y)$ para algum $r \in C$, e portanto, $C \cdot x \cap C \cdot y \neq \emptyset$. Seja $z \in X$ tal que $C \cdot x \cap C \cdot y = C \cdot z$. Neste caso, temos $C(J({}_C X)) \cdot \theta(x) \cap C(J({}_C X)) \cdot \theta(y) = C(J({}_C X)) \cdot \theta(z)$. ■

Iremos agora, lembrar algumas definições usuais na Teoria de categorias. Sejam $C, D$ categorias e $F : C \to D$ um funtor. Dizemos que $F$ é *cheio*, se $F$ leva $C(A, B)$ em $C(F(A), F(B))$ sobrejetivamente, para todos objetos $A, B \in C$ e dizemos que $F$ é *fiel* se $F$ leva $C(A, B)$ em $C(F(A), F(B))$ injetivamente. Finalmente dizemos que $F$ é *essencialmente sobrejetivo* se para todo objeto $y \in D$, existe um objeto $x \in C$ e um isomorfismo $F(x) \cong y$ em $D$. Se $F$ é cheio, fiel e essencialmente sobrejetivo, então as categorias $C$ e $D$ serão equivalentes (via $F$), para detalhes ver por exemplo [6] ou [11].

**Teorema 4.2.2** *As seguintes afirmações são verdadeiras:*

*1. Seja $(C, X)$ um sistema, para cada função $q : C_0 \to X$ tal que $p(q(e)) = e$, para todo $e \in C_0$, existe uma equivalência de sistemas $(F_q, \theta_q) : (C, X) \to (\Omega \circ \Theta)(C, X)$.*

*2. Sejam $q, q' : C_0 \to X$ aplicações tais que $p(q(e)) = e = p(q'(e))$, para* *todo $e \in C_0$. Então, existe uma transformação isomórfica de $(F_q, \theta_q)$ para $(F_{q'}, \theta_{q'})$.*

**Prova.** 1. Para simplificar a notação, faça, $(F, \theta) = (F_q, \theta_q)$, onde $F : C \to C(J(_C X))$ é tal que $F(s) = ([q(r(s)), s \cdot q(d(s))], [q(d(s)), q(d(s))])$, com $r(s), d(s) \in C_0$ e $\theta : X \to X_{J(_C X)}$, onde $\theta(x) = [q(p(x)), x]$. Pelo Lema 4.2.1, temos que $(F, \theta) = (F_q, \theta_q)$ é um morfismo de sistemas. Resta provar que $(F, \theta) : (C, X) \to (C(S), X_{C(S)})$ é uma equivalência de sistemas, para isso vamos verificar as três condições da Proposição 4.1.7:

$ES_1$. Para $F : C \to C(J(_C X))$ ser uma equivalência de categorias deve existir $G : C(J(_C X)) \to C$ tal que $I_C \cong G \circ F$ e $I_{C(J(_C X))} \cong F \circ G$, o que equivale a mostrar que $F$ é cheio, fiel e essencialmente sobrejetivo. É o que vamos provar agora.

$F$ é uma categoria cheia. De fato, sejam $e, f \in C_0$ e $(s, e)$ um morfismo em $C(J(_C X))$ tal que $d(s, e) = F(e)$ e $r(s, e) = F(f)$. Devemos encontrar um morfismo $v \in C$ tal que $F(v) = (s, e)$. Mas pela Proposição 2.3.14, temos que $(s, e) = ([x, y], [z, z])$, para certos $x, y, z \in X$. Desde que $s^{-1}s \leq e$, então, existe $u \in C$ tal que $y = u \cdot z$. Agora, por um lado temos $d(s, e) = F(e) = [q(e), q(e)]$, e por outro, $d(s, e) = (e, e)$, portanto, $e = [q(e), q(e)]$ e com isso temos, $[z, z] = [q(e), q(e)]$. Isso garante a existência de um isomorfismo $a$ tal que $z = a \cdot q(e)$. Novamente, $r(s, e) = ([x, x], [x, x])$, que por outro lado, $r(s, e) = F(f) = ([q(f), q(f)], [q(f), q(f)])$, portanto, $x = b \cdot q(f)$ para algum isomorfismo $b$. Assim, $(s, e) = ([b \cdot q(f), (ua) \cdot q(e)], [a \cdot q(e), a \cdot q(e)])$. Assim temos $d(b^{-1}ua) = d(a) = p(q(e)) = e$ e $r(b^{-1}ua) = r(b^{-1}) = d(b) = p(q(f)) = f$, e ainda, $F(b^{-1}ua) = (s, e)$. Logo o nosso $v$ procurado é $v = b^{-1}ua$.

$F$ é fiel. Para ver isso, iremos mostrar que se $F(s) = F(t)$, ambos em $Hom(e, f)$, isto é, $r(s) = r(t) = f$ e $d(s) = d(t) = e$, para certos $s, t \in C$, então $s = t$. Como $([q(r(s)), s \cdot q(d(s))], [q(d(s)), q(d(s))] = F(s) = F(t) =$

$[q(r(t)), t \cdot q(d(t))], [q(d(t)), q(d(t))]$, então $[q(r(s)), s \cdot q(d(s))] = [q(r(t)), t \cdot q(d(t))]$. Assim, da definição da relação de equivalência dada no Lema 2.3.10, temos que $q(f) = u \cdot q(f)$ e $s \cdot q(e) = u \cdot (t \cdot q(e))$, para algum isomorfismo $u \in C$. Finalmente, $f \cdot q(f) = p(q(f) \cdot q(f) = u \cdot q(f)$, que pela a condição cancelativa à direita, obtemos $u = f$ e $s = u \cdot t = f \cdot t = r(t) \cdot t = t$.

$F$ é essencialmente sobrejetivo. Pois pela Proposição 2.3.14, $([x, x], [x, x])$ é uma identidade em $C(J({}_CX))$. Como $([x, q(p(x))], [q(p(x)), q(p(x))])$ é um isomorfismo na categoria $C(J({}_CX))$ e que $r([x, q(p(x))], [q(p(x)), q(p(x))]) = ([x, x], [x, x])$ e $d([x, q(p(x))], [q(p(x)), q(p(x))]) = F(p(x))$, obtemos o desejado.

$ES_2$. Para cada $y \in X_{J({}_CX)}$ existe um isomorfismo $a \in C(J({}_CX))$ e um elemento $x \in X$ tal que $y = u \cdot \theta(x)$. Considere $[x, y] \in X_{J({}_CX)}$. Tome $a = ([x, q(p(y))], [q(p(y)), q(p(y))])$. Observe que $[x, q(p(y))]^{-1} \otimes [x, q(p(y))] \leq [q(p(y)), q(p(y))]$, e pela Proposição 2.3.14,

$$[x, q(p(y))]^{-1} \otimes [x, q(p(y))] = [q(p(y)), q(p(y))],$$

portanto, $a$ está bem definida em $C(J({}_CX))$. Mostremos que $a$ é um isomorfismo em $C(J({}_CX))$, ou seja, mostremos que existe $a^{-1} \in C(J({}_CX))$ tal que $a^{-1}a = d(a)$ e $aa^{-1} = r(a)$. Com efeito, se $([\alpha, \beta], [\gamma, \theta])$ é tal que $([\alpha, \beta], [\gamma, \theta]) \cdot ([x, q(p(y))], [q(p(y)), q(p(y))]) = [q(p(y)), q(p(y))]$, então este produto só estará definido se $[x, q(p(y))] \otimes [x, q(p(y))]^{-1} = [\gamma, \theta]$, ou seja, $[x, x] = [\gamma, \theta]$. E ainda $([\gamma, \theta], [x, x]) \cdot ([x, q(p(y))], [q(p(y)), q(p(y))]) = ([\gamma, \theta] \otimes [x, q(p(y))], [q, q]) = ([q(p(y)), q(p(y))], [q(p(y)), q(p(y))])$, de modo que, $C \cdot \beta \cap C \cdot x \neq \emptyset$. Desta forma, temos que, $([(x * \beta) \cdot \alpha, (\beta * x) \cdot q(p(y))], [q(p(y)), q(p(y))]) = ([q, q], [q, q])$. Fazendo $\alpha = q(p(y))$ e $\beta = x$, obtemos, $a^{-1} = ([q(p(y)), x], [x, x])$.

Observemos que $a^{-1}a = ([q(p(y)), x], [x, x]) \cdot ([x, q(p(y))], [q(p(y)), q(p(y))]) = ([q(p(y)), x] \otimes [x, q(p(y))], [q(p(y)), q(p(y))])$, de modo que, $C \cdot x \cap C \cdot x \neq \emptyset$, temos $([(x*x)\cdot q(p(y)),(x*x)\cdot q(p(y))],[q(p(y)),q(p(y))])$, como $(x*x)\cdot x = x$, então, $x = p(x) = p(y)$.

Por outro lado, $d(x*x) = d(p(x)) = p(q(p(y))) = p(y) = p(x)$, ou seja, $p(q(p(y))) = p(x)$. Agora, $(x*x)\cdot q(p(y)) = p(x)$, $q(p(y)) = p(q(p(y)))\cdot q(p(y)) = q(p(y))$. Logo, $a^{-1}a = ([q(p(y)),q(p(y))],[q(p(y)),q(p(y))]) = d(a)$. Ainda, $aa^{-1} = ([x,q(p(y))]\otimes[q(p(y)),x],[x,x])$, ou seja, $aa^{-1} = ([x,q(p(y))]\otimes[x,q(p(y))]^{-1},[x,x]) = ([x,x],[x,x]) = r(a)$. Portanto, $a$ é um isomorfismo. Finalmente, $([x,q(p(y))],[q(p(y)),q(p(y))])\cdot[q(p(y)),y] = [x,q(p(y))]\otimes[q(p(y)),y]$. Daí, $C\cdot q(p(y))\cap C\cdot q(p(y)) = C\cdot q(p(y))$. Assim, $[(q(p(y))*q(p(y)))\cdot x,(q(p(y))*q(p(y)))\cdot y]$ e como $q(p(x)) = (q(p(y))*q(p(y)))\cdot q(p(y))$ temos que $p(q(p(y))) = p(y) = p(x)$. Daí $[p(x)\cdot x, p(y)\cdot y] = [x,y]$. Portanto, $[x,y] = a\cdot\theta(y)$.

$ES_3$. Devemos mostrar que se $y_1 = a\cdot y_2$ em $X_{J({}_CX)}$ e $\theta(x_1) = y_1$ e $\theta(x_2) = y_2$, então, existe $a'\in C$, tal que, $x_1 = a'\cdot x_2$. Considere $\theta(x) = (s,e)\cdot\theta(w)$. Neste caso, devemos ter, $d(s,e) = p(\theta(w)) = p([q(p(w)),w])$. Mas, $d(s,e) = (e,e)$ e $p([q(p(w)),w]) = ([q(p(w)),w]\otimes[q(p(w)),w]^{-1},[q(p(w)),w]\otimes[q(p(w)),w]^{-1})$, $p([q(p(w)),w]) = ([q(p(w)),q(p(w))],[q(p(w)),q(p(w))])$, assim, temos que, $e = [q(p(w)),q(p(w))]$. Seja $s = [a,b]$, então, $[b,b]\le e$ e pela Proposição 2.3.14 temos que $b = r\cdot q(p(w))$, para algum isomorfismo $r\in C$. Logo, obtemos, $[q(p(w)),x] = (s,e)\cdot[q(p(w)),w] = s\otimes[q(p(w)),w] = [a,b]\otimes[q(p(w)),w] = [(q(p(w))*b)\cdot a,(b*q(p(w)))\cdot w]$. E ainda, observe que, $C\cdot b\cap C\cdot q(p(w)) = C\cdot b$, pois $b = r\cdot q(p(w))$, logo $b = (b*q(p(w)))\cdot q(p(w)) = (q(p(w))*b)\cdot b$, ou seja, $(b*q(p(w))) = r$ e $(q(p(w))*b) = p(b)$. Então, $[q(p(w)),x] = [p(b)\cdot a, r\cdot w]$. Pela Proposição 2.3.14, temos, $(q(p(w)),x) = u\cdot(p(b)\cdot a, r\cdot w)$, para algum isomorfismo $u\in C$. Assim, $x = u\cdot(r\cdot w) = (ur)\cdot w$. Desta forma, $F(ur) = ([q(r(ux)),(ur)\cdot q(d(ru))],[q(d(r)),q(d(r))])$.

2. $t_e = ([q'(e), q(e)], [q(e), q(e)])$ está bem definido pois, $[q'(e), q(e)]^{-1} \otimes [q'(e), q(e)] = [q(e), q(e)]$. Para mostrar que $t_e$ é um isomorfismo, temos que encontrar $t_e^{-1}$, onde: $t_e^{-1} \cdot t_e = d(t_e)$ e $t_e \cdot t_e^{-1} = r(t_e)$. Observemos que $([\alpha, \beta], [\gamma, \theta]) \cdot ([q'(e), q(e)], [q(e), q(e)]) = ([q(e), q(e)], [q(e), q(e)])$, que está bem definido se $([q'(e), q(e)] \otimes [q(e), q(e)]^{-1}) = [\gamma, \theta]$, ou seja, $[q'(e), q'(e)] = [\gamma, \theta]$. Logo $([\alpha, \beta], [q'(e), q'(e)])$, e assim, $[\alpha, \beta]^{-1} \otimes [\alpha, \beta] \leq [q'(e), q'(e)]$. Por outro lado, $[\alpha, \beta] \otimes [\alpha, \beta]^{-1} = [\alpha, \alpha] \leq [q(e), q(e)]$.

Agora temos que, $t_e^{-1} = ([q(e), \beta], [q'(e), q'(e)])$, assim,

$$([q(e), \beta], [q'(e), q'(e)]) \cdot ([q'(e), q(e)], [q(e), q(e)]) = d(t_e).$$

Ainda, para existir $t_e^{-1} \cdot t_e$ devemos ter, $[q(e), \beta] \otimes [q'(e), q(e)], [q(e), q(e)]$, ou seja, $\beta = q'(e)$. Portanto,

$$t_e^{-1} = ([q(e), q'(e)], [q'(e), q'(e)]).$$

E assim, obtemos que, $t_e^{-1} \cdot t_e = [q(e), q(e)], [q(e), q(e)] = d(t_e)$. Utilizando o mesmo raciocínio para $t_e \cdot t_e^{-1}$, obtemos, $[q'(e), q'(e)], [q'(e), q'(e)] = r(t_e)$. Logo, $t_e$ é um isomorfismo.

Finalmente, verificaremos $T_1$ e $T_2$ da Definição 4.1.1:

$(T_1)$. $\tau : F_q \to F_{q'}$, tal que $F_q : C \to C(J(_C X))$ onde $e \in C_0 \to F_q(e)$. Seja $s \in hom(e, f)$ então $s : e \to f$, $F_q : F_q(e) \to F_q(f)$ e $F_{q'} : F_{q'}(e) \to F_{q'}(f)$. Temos que mostrar que $F_q(s) \circ \tau_e = \tau_f \circ F_q(s)$. Observemos que $F_{q'}(s) = F(s) = ([q'(r(s)), s \cdot q'(d(s))], [q'(d(s)), q'(d(s))])$ e $F_q(s) = F(s) = ([q(r(s)), s \cdot q(d(s))], [q(d(s)), q(d(s))])$. Por um lado temos que, $\tau_f \circ F_q(s) = ([q'(f), q(f)], [q(f), q(f)]) \cdot ([q(r(s)), s \cdot q(d(s))], [q(r(s)), s \cdot q(d(s))])$, e para existir esta operação, devemos ter $[q(r(s)), s \cdot q(d(s))] \otimes [q(r(s)), s \cdot q(d(s))]^{-1} = [q(f), q(f)]$, ou seja, $[q(r(s)), q(r(s))] = [q(f), q(f)]$. Pela Proposição 2.3.14 existe $u \in C$, tal que, $q(f) = u \cdot q(r(s))$.

Como $([q'(f), q(f)], [q(f), q(f)]) \cdot ([q(r(s)), s \cdot q(d(s))], [q(r(s)), s \cdot q(d(s))])$ $= ([q'(f), q(f)] \otimes [q(r(s)), s \cdot) q(d(s))], [q(d(s)), q(d(s))])$, então, $C \cdot q(f) \cap C \cdot q(r(s)) = C \cdot q(f)$, assim $q(f) = (q(f) * q(r(s))) \cdot q(r(s)) = (q(r(s)) * q(f)) \cdot q(f)$, daí, $([(q(r(s)) * q(f)) \cdot q'(f), (q(f) * q(r(s))) \cdot s \cdot q(d(s))], [q(d(s)), q(d(s))])$, pois $p(q(r(s))) = r(s) = (q(f) * q(r(s)))$. Portanto, $(q(f) * q(r(s))) \cdot s = s$. Logo, $\tau_f \circ F_q(s) = ([q'(f), s \cdot q(e)], [q(e), q(e)])$. Por outro lado, temos que, $F_{q'}(s) \circ \tau_e = ([q'(r(s)), s \cdot q'(d(s))], [q'(d(s)), q'(d(s))]) \cdot ([q'(e), q(e)], [q(e), q(e)])$ existe, se $[q'(e), q(e)] \otimes [q'(e), q(e)]^{-1} = [q'(d(s)), q'(d(s))]$, ou seja, $[q'(e), q'(e)] = [q'(d(s)), q'(d(s))]$. Pela Proposição 2.3.14, temos que $(q'(e), q'(e)) = u \cdot (q'(d(s)), q'(d(s)))$ para algum $u \in C$, assim $q'(e) = u \cdot q'(d(s)) = u \cdot q'(e)$. Enfim, obtemos $([q'(r(s)), s \cdot q'(d(s))] \otimes [q'(e), q(e)], [q(e), q(e)])$, que só estará bem definida pois $C \cdot s \cdot q'(d(s)) \cap C \cdot q'(e) = C \cdot s \cdot q'(d(s))$, ou seja, $(s \cdot q'(d(s)) * q'(e)) \cdot q'(e) = (q'(e) * s \cdot q'(d(s))) = s \cdot q'(d(s))$, assim, $(s \cdot q'(d(s)) * q'(e)) = s$. Portanto, $F_{q'}(s) \circ \tau_e = ([q'(f), s \cdot q(e)], [q(e), q(e)])$.

$T_2$. Temos que, $\tau_{p(x)} = ([q'(p(x)), q(p(x))], [q(p(x)), q(p(x))])$, $\theta_q(x) = [q(p(x)), x]$ e $\theta_{q'}(x) = [q'(p(x)), x]$. Agora,

$$\tau_{p(x)} \circ \theta_q(x) = ([q'(p(x)), q(p(x))], [q(p(x)), q(p(x))]) \cdot [q(p(x)), x],$$

portanto, $\tau_{p(x)} \circ \theta_q(x) = [q'(p(x)), q(p(x))] \otimes [q(p(x)), x]$, e ainda, $(q(p(x)) * q(p(x))) \cdot q(p(x)) = q(p(x))$. Assim, $[(q(p(x)) * q(p(x))) \cdot q'(p(x)), (q(p(x)) * q(p(x))) \cdot x] = [p(x) \cdot q'(p(x)), x]$. Mas, ainda temos que, se existe $(q(p(x)) * q(p(x)) \cdot q'(p(x)))$, então, $p(x) \cdot q'(p(x)) = q'(p(x))$. Portanto, $\tau_{p(x)} \cdot \theta_{q(x)} = [q'(p(x)), x] = \theta_{q'(x)}$. ■

**Definição 4.2.3** Defina a seguinte relação $\cong$ em SYS: $(F, \theta) \cong (G, \varphi)$ se, e somente se, existe um isomorfismo de $(F, \theta)$ para $(G, \varphi)$.

**Lema 4.2.4** *A relação $\cong$ é uma congruência em SYS.*

**Prova.** Sejam $(F, \theta)$ ,$(G, \varphi)$ e $(H, \phi)$ morfismos de sistemas.
1. $(F, \theta) \cong (F, \theta)$. Para ver isso, tome $(C, X)$, $(D, Y)$ sistemas e $(F, \theta) : (C, X) \rightarrow (D, Y)$ um morfismo e tome $I_F$ a transformação, que é um isomorfismo.
2. $(F, \theta) \cong (G, \varphi)$ pela definição 4.2.3 temos $\gamma : (F, \theta) \rightarrow (G, \varphi)$ um isomorfismo, logo existe $\gamma^{-1}$, tal que, $\gamma^{-1} : (G, \varphi) \rightarrow (F, \theta)$, portanto, $(G, \varphi) \cong (F, \theta)$.
3. $(F, \theta) \cong (G, \varphi)$ e $(G, \varphi) \cong (H, \phi)$ assim, pela definição 4.2.3, temos isomorfismos. Tome $\tau$ e $\gamma$, sabemos que são transformações isomórficas e de [1], sabemos que $\beta = (\tau \circ \gamma)$ é um isomorfismo. Portanto, $\beta : (F, \theta) \rightarrow (H, \phi)$ é um isomorfismo, assim pela Definição 4.2.3, temos $(F, \theta) \cong (H, \phi)$. ■

Agora vamos ao resultado que motivou todo o trabalho. Se $(F, \theta) \cong (G, \phi)$, então existe um isomorfismo $\tau : (F, \theta) \rightarrow (G, \phi)$, e assim, pelo Lema 4.1.3, temos que $\Theta(F, \theta) = \Theta(G, \phi)$. Então o funtor $\Theta : SYS \rightarrow INV$ induz um funtor $\Theta' : SYS/ \cong \rightarrow INV$. Também, o funtor $\Omega : INV \rightarrow SYS$, induz um funtor $\Omega' : INV \rightarrow SYS/ \cong$, compondo o funtor $\Omega : INV \rightarrow SYS$ com o funtor projeção de $SYS$ para $SYS/ \cong$. Com essa notação concluimos com o seguinte resultado

**Teorema 4.2.5** *Os funtores $\Theta'$ e $\Omega'$ induzem uma equivalência de categorias entre $SYS/ \cong$ e $INV$.*

**Prova.** Considere as duas categorias definidas $SYS/ \cong$ e $INV$ e os funtores $\Theta' : SYS/ \cong \rightarrow INV$ e $\Omega' : INV \rightarrow SYS/ \cong$, do Teorema 3.3.2 temos que $(\Theta \circ \Omega)(S) \cong S$ assim $(\Theta' \circ \Omega')(S) \cong S$. Temos do Teorema 4.2.2, que existe uma equivalência $(F_q, \theta_q) : (C, X) \rightarrow (\Omega \circ \Theta)(C, X)$ para cada $q : C_0 \rightarrow X$ e todas as equivalências são isomorfas. Então, todos os isomorfismos representam o mesmo morfismo em $SYS/ \cong$. Pela Definição

4.2.3, temos que a classe de congruência contém isomorfismos equivalentes em $SYS/\cong$. ■

# Conclusão

Nosso estudo se iniciou no estudo de duas categorias aparentemente distintas, a categoria INV cujos objetos são semigrupos inversos e a categoria SYS cujos os objetos são sistemas à esquerda, isto é, são ações de "small" categorias agindo à esquerda em conjuntos. No entanto, com os funtores $\Theta : SYS \to INV$ e $\Omega : INV \to SYS$ estabelecidos no Capítulo 3, foi possível comparar um semigrupo $S$ com o seu correspondente semigrupo $\Theta \circ \Omega(S)$ e provar de modo bastante direto estes são isomorfos. No entanto o mesmo processo não se estabelece entre sistema o sistema $(C, X)$ e seu correspondente $(\Omega \circ \Theta)(C, X)$. Porém, com grata satisfação percebemos que tais sistemas pertencem a uma mesma classe, quando considerada uma certa congruência $\cong$ na categoria INV. Com isso, obtivemos uma categoria quociente $SYS/\cong$. Induzindo os funtores $\Omega$ e $\Theta$ à funtores entre INV e $SYS/\cong$ pudemos provar que estas sim, eram categoricamente equivalentes.

Sob a ótica do aprendizado, pudemos nos deparar com notações e técnicas cientificas relevantes na Teoria dos semigrupos e na Teoria de categorias em geral, o que nos proporcionou boa aptidão na leitura de artigos com notações modernas o que sem dúvida facilitará nos desdobramentos futuros de nossos estudos na área de álgebra e da matemática como um todo.

# Referências Bibliográficas


[1] Bennet, P., *On the struture of inverse semigroup amalgams*,International Journal of Algebra and Computation 7 (1997), 577-604.

[2] Bredikhin, D. A., *Inverse semigroups of local automorphisms of universal algebras*, Sibirskiĭ Matematicheskiĭ Zhurnal 17 (1976), 449-507.

[3] Goberstein, S. M., *Partial automorphisms of inverses semigroups, in Proceedings of the 1984 Marquette conference on semigroups*,(eds K. Byleen, P. Jones and F. Pastijn),29-43.

[4] Gomes, G. M., Howie J. S., *A P-theorem for inverse semigroups with zero*,Portugaliae Mathematica 53 (1996), 257-278.

[5] Grillet, P. A., *Semigroups*, Marcel Dekker, New York, 1995.

[6] Hilton, P. J. and Stammbach, U., *A Course In Homological Algebra*, Graduate Texts In Mathematics, Springer-Verlag,1970.

[7] Howie, J. *Introduction to Semigroup Theory*, Academic Press, New York, 1976.

[8] Lawson, M. V., *Inverse Semigroups: The Theory of partial symmetries*, World Scientific,(1998).

[9] Lawson, M. V., *Constructing inverse semigroups from category actions*, Journal of Pure and Applied Algebra, 137 (1999), 57-101.

[10] Lawson, M. V., *Left cancellative categories and ordered groupoids*, Semigroup Forum 68, 458–476.

[11] MacLane, S., *Categories for the Working Mathematician*,Springer, Berlin,1971.

[12] Vermani, L. R. *Un Elementary Approach to Homological Algebra*, Chapman and Hall CRC, Momoographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics, 2003.