

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA MARIA
CENTRO DE CIÊNCIAS NATURAIS E EXATAS
PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA**

**HÉLICES, CURVAS DE BERTRAND E
SUPERFÍCIES REGRADAS**

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Marcia Viaro Flôres

Santa Maria, RS, Brasil

2012

HÉLICES, CURVAS DE BERTRAND E SUPERFÍCIES REGRADAS

Marcia Viaro Flôres

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado do Programa de Pós-Graduação em Matemática, Área das Ciências Naturais e Exatas, da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM, RS), como requisito parcial para obtenção do grau de **Mestre em Matemática.**

Orientador: Prof. Dr^a. Claudia Candida Pansonato

Santa Maria, RS, Brasil

2012

**Universidade Federal de Santa Maria
Centro de Ciências Naturais e Exatas
Programa de Pós-Graduação em Matemática**

A Comissão Examinadora, abaixo assinada,
aprova a Dissertação de Mestrado

**HÉLICES, CURVAS DE BERTRAND E SUPERFÍCIES
REGRADAS**

elaborada por
Marcia Viaro Flôres

como requisito parcial para obtenção do grau de
Mestre em Matemática

COMISSÃO EXAMINADORA:

Prof. Dr^a. Claudia Candida Pansonato
(Orientador)

Prof. Dr^a. Rosane Rossato Binotto (UFFS)

Prof. Dr. Ari João Aiolfi (UFSM)

Santa Maria, 27 de fevereiro de 2012.

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar agradeço a Deus por sua infinita bondade. Graças a Ele consegui forças e coragem para concluir mais essa etapa da minha vida.

Agradeço de coração ao meu grande companheiro de todas as horas, Glademir, por estar sempre do meu lado, dando apoio e amor. E agradeço a ele pelo maior presente da minha vida, minha pequena Cristine. Filha saiba que eu te amo para sempre!

Registro também meus agradecimentos aos meus pais e irmão, por terem sido partes fundamentais na formação do meu caráter. A todos os professores que contribuíram para minha formação, principalmente ao professor João Batista Peneireiro pelo exemplo de vida.

Meus agradecimentos especiais à professora Claudia, pela sua orientação durante toda a realização desse trabalho e por sua compreensão para com todas as inusitadas situações pelas quais passei nesses últimos dois anos. Agradeço aos professores Ari, Rosane e Carmen pela leitura desse texto e pelas palavras de incentivo.

Aos meus colegas de mestrado, agradeço pelas experiências que vivemos juntos. Em especial ao Marcos por estar sempre pronto a nos ajudar. Marcos, você tem um grande caráter!

Agradeço também em especial a Solange e a Elisa por não terem medido esforços para me ajudar no momento mais delicado da minha vida, o nascimento da Cristine. Obrigada de coração!

Por fim, agradeço à CAPES pelo apoio financeiro recebido.

RESUMO

Dissertação de Mestrado
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Universidade Federal de Santa Maria

HÉLICES, CURVAS DE BERTRAND E SUPERFÍCIES REGRADAS

AUTORA: MARCIA VIARO FLORES

ORIENTADORA: CLAUDIA CANDIDA PANSONATO

Data e Local da Defesa: Santa Maria, 27 de fevereiro de 2012.

O presente trabalho destina-se a um estudo sobre hélices e curvas de Bertrand. Uma *hélice circular* é caracterizada por ter curvatura $\kappa \neq 0$ e torção τ constantes. Se a razão $\frac{\tau}{\kappa}$ for constante, a curva é chamada *hélice generalizada*. Uma curva $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ é chamada *curva de Bertrand* se existe uma outra curva $\bar{\gamma} : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que as retas normais de γ e $\bar{\gamma}$ em $s \in I$ são iguais. Tanto a hélice generalizada como a curva de Bertrand podem ser vistas como generalizações da hélice circular. Neste trabalho, além de obtermos importantes caracterizações destas curvas, realizamos também um estudo destas do ponto de vista da teoria de curvas em superfícies regradas.

Palavras-chave: Hélices. Curvas de Bertrand. Superfícies Regradas.

ABSTRACT

Dissertation
Graduate Program in Mathematics
Universidade Federal de Santa Maria

HELICES, BERTRAND CURVES AND RULED SURFACES

AUTHOR: MARCIA VIARO FLORES

ADVISOR: CLAUDIA CANDIDA PANSONATO

Date and Location of Defense: Santa Maria, February 27nd, 2012.

This work is designed to study helices and Bertrand curves. A *circular helix* is characterized by having constant curvature $\kappa \neq 0$ and constant torsion τ . If the ratio $\frac{\tau}{\kappa}$ is constant, the curve is called *generalized helix*. A curve $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ is called a *Bertrand curve* if there is another curve $\bar{\gamma}: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ such that the normal lines of γ and $\bar{\gamma}$ at $s \in I$ are equal. Generalized helices and Bertrand curves can be viewed as generalizations of the circular helix. In this work, we obtain important characterizations of these curves. Besides, we also study these curves from the view point of the theory of curves on ruled surfaces.

Keywords: Helices. Bertrand Curves. Ruled Surfaces.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO	6
1 CURVAS ESPECIAIS	8
1.1 Curvas no Espaço	8
1.2 Hélices e Vetor de Darboux	11
1.3 Curvas de Bertrand	16
1.4 A indicatriz de Darboux de uma curva de Bertrand	26
2 SUPERFÍCIES REGRADAS	31
2.1 Definição	31
2.2 Superfícies Cilíndricas	34
2.3 Superfícies Desenvolvíveis	36
3 CURVAS ESPECIAIS E SUPERFÍCIES REGRADAS	39
3.1 Superfície retificável desenvolvível	39
3.2 Superfície normal principal	43
3.3 Algumas caracterizações de superfícies regradadas	46
CONCLUSÃO	55
REFERÊNCIAS	56

INTRODUÇÃO

Este trabalho visa um estudo sobre hélices e curvas de Bertrand.

Um dos problemas importantes em geometria diferencial de curvas no espaço é a caracterização de uma curva regular. A curvatura κ e a torção τ desempenham um papel efetivo nesta caracterização. Uma *hélice circular* é caracterizada por ter curvatura $\kappa \neq 0$ e torção τ constantes. Se a razão $\frac{\tau}{\kappa}$ for constante, a curva é chamada *hélice generalizada*. Tal condição é equivalente aos vetores tangentes fazerem um ângulo constante com uma direção fixa. Existem muitas aplicações interessantes de hélices, sendo que as estruturas helicoidais surgem, por exemplo, em nanomolas, nanotubos de carbono, na forma da hélice dupla do DNA, em escadas helicoidais, entre outras [12].

Outra abordagem para o problema de caracterização de curvas é considerar a relação entre os vetores do referencial de Frenet de curvas, como é o caso das *curvas de Bertrand*. Estas curvas foram descobertas por J. Bertrand em 1850 e constituem um importante tópico da geometria clássica de curvas. Uma curva $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ é chamada de Bertrand se existe uma outra curva $\bar{\gamma}: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que as retas normais de γ e $\bar{\gamma}$ em $s \in I$ são iguais. Neste caso $\bar{\gamma}$ é chamada *par de Bertrand* de γ . Mostraremos na Proposição 3 que a curva é de Bertrand se e somente se existem números reais não-nulos A e B tais que $A\kappa + B\tau = 1$, para todo $s \in I$, onde κ e τ são a curvatura e a torção, respectivamente, de γ . Com isto, pode-se mostrar que as curvas de Bertrand também são uma generalização das hélices circulares.

O estudo de hélices e curvas de Bertrand também será feito do ponto de vista de curvas sobre superfícies regradas.

No capítulo 1 será feito inicialmente um breve apanhado da teoria local das curvas no espaço e, após, dedicaremos as seções subsequentes ao estudo das hélices generalizadas e das curvas de Bertrand. Destacamos os resultados obtidos nos Teoremas 1 e 2 que estabelecem, respectivamente, que toda hélice generalizada pode ser construída a partir de uma curva plana e que toda curva de Bertrand pode ser obtida de uma curva esférica. Na última seção estudamos o conceito de envelope de uma família de funções para obter uma importante caracterização da indicatriz de Darboux de uma curva de Bertrand.

O capítulo 2 será dedicado à teoria clássica de superfícies regradas. O interesse pelo tema tem reaparecido recentemente devido suas aplicações em diferentes áreas que vão desde Geometria Diferencial Projetiva, Computação Gráfica a Desenho Industrial, dentre outras. Neste capítulo faremos um apanhado dos principais resultados sobre superfícies regradas. As referências utilizadas são [2] e [3]. Dentre as superfícies regradas, destacamos duas categorias que merecem atenção especial: as

superfícies cilíndricas e as superfícies desenvolvíveis.

No capítulo 3 estudaremos hélices generalizadas e curvas de Bertrand como curvas em superfícies regradas, tendo como base [7]. Para isto, dividimos o capítulo em três seções. Na primeira seção faremos um estudo sobre a superfície retificável desenvolvível, destacando as condições para que ocorra pontos singulares e relacionando esta com a hélice generalizada. Na segunda seção estudaremos a superfície normal principal, seus pontos regulares, bem como encontraremos condições para que a curvatura se anule. O desfecho do capítulo encontra-se na terceira seção, na qual são apresentados resultados que relacionam as hélices generalizadas com a superfície retificável desenvolvível e as curvas de Bertrand com a superfície normal principal. Chamamos atenção para a caracterização de helicóides obtida pela Proposição 16.

Capítulo 1

CURVAS ESPECIAIS

Este capítulo é dedicado ao estudo das hélices generalizadas e das curvas de Bertrand. Estas curvas são uma generalização da clássica hélice circular.

Os principais resultados obtidos são dados pelo Teorema que estabelece que toda hélice generalizada pode ser construída a partir de uma curva plana e pelo Teorema que estabelece que toda curva de Bertrand pode ser obtida de uma curva esférica.

Além disto, na seção 1.4, obtemos uma importante caracterização da indicatriz de Darboux de uma curva de Bertrand.

As principais referências utilizadas aqui são [2], [5], [7], [8] e [13].

1.1 Curvas no Espaço

Nesta seção fazemos um breve estudo da teoria local de curvas no espaço e estabelecemos fórmulas para o cálculo da curvatura e torção que serão utilizadas no decorrer do trabalho.

Dizemos que uma curva parametrizada diferenciável de \mathbb{R}^3 é uma aplicação diferenciável γ , de classe C^∞ , de um intervalo aberto $I \subset \mathbb{R}$ em \mathbb{R}^3 . Chamamos a variável $t \in I$ de parâmetro da curva e o subconjunto de \mathbb{R}^3 formado pelos pontos $\gamma(t), t \in I$, de traço da curva.

Tomando $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t)), t \in I \subset \mathbb{R}$, uma curva parametrizada diferenciável, o vetor $\gamma'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$ é chamado de *vetor tangente* a γ em $t \in I$. A reta tangente à curva regular γ em $t_0 \in I$ é a reta que passa por $\gamma(t_0)$ na direção de $\gamma'(t_0)$.

Dada uma curva regular $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^3$, o comprimento de arco da curva γ , de t_0 a t_1 , é dado por

$$\int_{t_0}^{t_1} \|\gamma'(t)\| dt.$$

A função comprimento de arco de γ a partir de t_0 é dada por

$$s(t) = \int_{t_0}^t \|\gamma'(r)\| dr.$$

Uma curva regular $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ é dita parametrizada pelo comprimento de arco se para cada $t_0, t_1 \in I, t_0 \leq t_1$,

$$\int_{t_0}^{t_1} \|\gamma'(t)\| dt = t_1 - t_0.$$

Toda curva regular no espaço admite uma reparametrização pelo parâmetro comprimento de arco.

Consideraremos aqui uma curva $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ parametrizada pelo comprimento de arco. A *curvatura* de γ em $s \in I$ é definida por $\kappa(s) = \|\gamma''(s)\|$.

Observe que se $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ é uma curva regular parametrizada pelo comprimento de arco, então $\|\gamma'(s)\| = 1$. Assim, $\gamma''(s)$ é ortogonal a $\gamma'(s)$. Portanto, para todo $s \in I$ onde $\kappa(s) \neq 0$, podemos definir um vetor unitário na direção de $\gamma''(s)$ e ortogonal a $\gamma'(s)$, dado por $\mathbf{n}(s) = \frac{\gamma''(s)}{\kappa(s)}$. Este vetor é denominado *vetor normal* a γ em $\gamma(s)$.

Denotando por $\mathbf{t}(s)$ o vetor unitário $\gamma'(s)$, temos que $\mathbf{t}(s)$ e $\mathbf{n}(s)$ são vetores ortonormais e

$$\mathbf{t}'(s) = \kappa(s)\mathbf{n}(s).$$

O vetor $\mathbf{b}(s) = \mathbf{t}(s) \times \mathbf{n}(s)$ é denominado *vetor binormal* a γ em s .

O referencial ortonormal $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}\}$ é chamado *triedro de Frenet* da curva γ em s .

Cada dois vetores do triedro de Frenet determinam um plano. O *plano normal* à curva γ em $\gamma(s)$ é o plano que contém $\gamma(s)$ e é normal ao vetor $\mathbf{t}(s)$. O plano que contém $\gamma(s)$ e é normal a $\mathbf{b}(s)$ é denominado *plano osculador*; por fim, o plano que contém $\gamma(s)$ e é normal a $\mathbf{n}(s)$ é chamado *plano retificante* da curva γ em s .

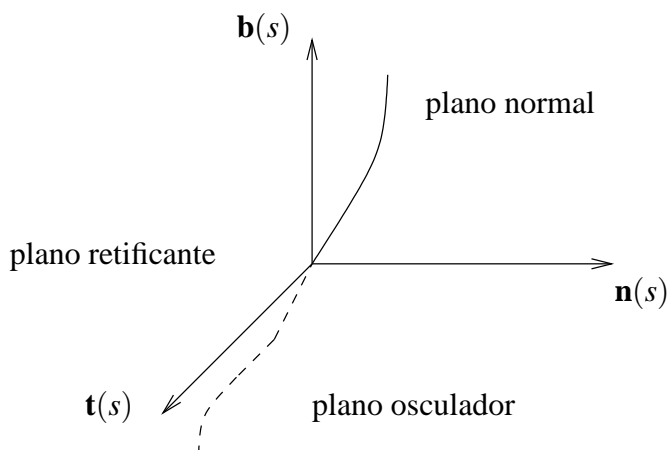


Figura 1.1: Planos retificante, normal e osculador

O número real $\tau(s)$ definido por $\mathbf{b}'(s) = -\tau(s)\mathbf{n}(s)$ é denominado *torção* da curva em s .

Se $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ é uma curva regular parametrizada pelo comprimento de arco tal que $\kappa(s) > 0$, para todo $s \in I$, então o triedro de Frenet da curva γ em s é um referencial ortonormal de \mathbb{R}^3 bem

definido. Dessa forma, podemos obter os vetores $\mathbf{t}'(s)$, $\mathbf{n}'(s)$ e $\mathbf{b}'(s)$ como combinação linear de $\mathbf{t}(s)$, $\mathbf{n}(s)$ e $\mathbf{b}(s)$. Pelo exposto anteriormente, temos que

$$\begin{aligned}\mathbf{t}'(s) &= \kappa(s)\mathbf{n}(s) \\ \mathbf{b}'(s) &= -\tau(s)\mathbf{n}(s).\end{aligned}$$

Vamos obter a expressão para $\mathbf{n}'(s)$. Sabemos que $\mathbf{n}(s) = \mathbf{b}(s) \times \mathbf{t}(s)$. Derivando,

$$\mathbf{n}'(s) = \mathbf{b}'(s) \times \mathbf{t}(s) + \mathbf{b}(s) \times \mathbf{t}'(s).$$

Fazendo as substituições, obtemos:

$$\mathbf{n}'(s) = -\kappa(s)\mathbf{t}(s) + \tau(s)\mathbf{b}(s).$$

Resumindo, temos

$$\begin{aligned}\mathbf{t}'(s) &= \kappa(s)\mathbf{n}(s) \\ \mathbf{n}'(s) &= -\kappa(s)\mathbf{t}(s) + \tau(s)\mathbf{b}(s) \\ \mathbf{b}'(s) &= -\tau(s)\mathbf{n}(s).\end{aligned}$$

que são denominadas equações de Frenet-Serret.

Observamos que nem sempre a curva que estamos trabalhando está parametrizada pelo comprimento de arco, contudo ainda assim podemos encontrar sua curvatura e torção conforme a proposição a seguir.

Proposição 1 *Seja $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva regular de parâmetro t e $\beta: J \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma reparametrização de γ pelo comprimento de arco, isto é, $\beta(s(t)) = \gamma(t)$, para todo $t \in I$. Sejam $\kappa(s) > 0$ e $\tau(s)$ a curvatura e a torção de β em $s \in J$, então*

$$\begin{aligned}\kappa(s(t)) &= \frac{\|\gamma'(t) \times \gamma''(t)\|}{\|\gamma'(t)\|^3} \\ \tau(s(t)) &= -\frac{(\gamma'(t) \times \gamma''(t)) \cdot \gamma'''(t)}{\|\gamma'(t) \times \gamma''(t)\|^2}.\end{aligned}$$

Demonstração Seja $s(t) = \int_0^t \|\gamma'(r)\| dr$ a função comprimento de arco.

$$\text{Assim, } \frac{ds}{dt} = \|\gamma'(t)\|.$$

$$\text{Mas, } \gamma'(t) = \frac{d\gamma ds}{ds dt} = \mathbf{t}(s) \frac{ds}{dt}. \text{ Então, } \gamma''(t) = \mathbf{t}'(s) \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 + \mathbf{t}(s) \frac{d^2s}{dt^2}.$$

Agora,

$$\gamma'(t) \times \gamma''(t) = \left(\mathbf{t}(s) \frac{ds}{dt} \right) \times \left(\mathbf{t}'(s) \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 + \mathbf{t}(s) \frac{ds^2}{dt^2} \right) = \left(\frac{ds}{dt} \right)^3 (\mathbf{t}(s) \times \mathbf{t}'(s)).$$

Então

$$\| \gamma'(t) \times \gamma''(t) \| = \| \gamma'(t) \|^3 \kappa(s(t)).$$

Portanto,

$$\kappa(s(t)) = \frac{\| \gamma'(t) \times \gamma''(t) \|}{\| \gamma'(t) \|^3}.$$

Derivando γ'' , obtemos:

$$\begin{aligned} \gamma'''(t) &= \frac{d^3s}{dt^3} \mathbf{t}(s) + \frac{d^2s}{dt^2} \mathbf{t}'(s) + \left(\kappa(t) \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 \right)' \mathbf{n}(s) + \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 \mathbf{n}'(s) \\ \gamma'''(t) &= \left(\frac{d^3s}{dt^3} - \kappa^2(t) \left(\frac{ds}{dt} \right)^3 \right) \mathbf{t}(s) + \left(\kappa'(t) \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 + 3\kappa(t) \frac{ds}{dt} \frac{d^2s}{dt^2} \right) \mathbf{n}(s) \\ &\quad + \kappa(t) \tau(t) \left(\frac{ds}{dt} \right)^3 \mathbf{b}(s). \end{aligned}$$

$$\text{Assim, } (\gamma'(t) \times \gamma''(t)) \cdot \gamma'''(t) = -\tau(t) \kappa^2(t) \left(\frac{ds}{dt} \right)^6 = -\tau(t) \kappa^2(t) \| \gamma'(t) \|^6.$$

Como $\| \gamma'(t) \times \gamma''(t) \|^2 = \kappa^2(t) \| \gamma'(t) \|^6$, então

$$\tau(s(t)) = -\frac{(\gamma'(t) \times \gamma''(t)) \cdot \gamma'''(t)}{\| \gamma'(t) \times \gamma''(t) \|^2}.$$

■

1.2 Hélices e Vetor de Darboux

Nesta seção vamos definir a hélice generalizada destacando algumas de suas propriedades. Também vamos estudar o vetor de Darboux que será importante para o desenvolvimento dos capítulos posteriores.

Iniciaremos com a clássica definição de hélice circular.

A principal referência utilizada nesta seção foi [5].

Definição 1 *Uma curva $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ é uma hélice circular se a curvatura $\kappa(s) \neq 0$ e a torção $\tau(s)$ são constantes.*

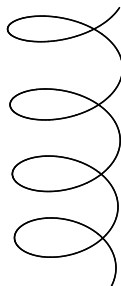


Figura 1.2: Hélice Circular

Definição 2 Uma curva $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ com $\kappa(s) \neq 0$ é chamada uma hélice generalizada se a reta tangente de γ faz um ângulo constante com uma direção fixada.

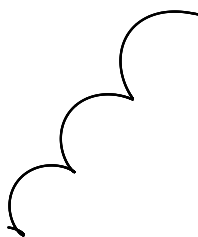


Figura 1.3: Hélice Generalizada

Vamos agora determinar a direção fixada dada pela definição acima.

Quando um ponto se move ao longo de uma curva em \mathbb{R}^3 , seu triedro de Frenet, $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}\}$, transladado paralelamente até a origem, define um movimento rígido chamado Movimento de Frenet. A cada instante, o triedro de Frenet determina um eixo de rotação. Este é determinado pelo núcleo da matriz de Frenet.

$$M(s) = \begin{bmatrix} 0 & k(s) & 0 \\ -k(s) & 0 & \tau(s) \\ 0 & -\tau(s) & 0 \end{bmatrix}.$$

Temos que \mathbf{v} é uma direção fixa se $M(s)\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$.

Considerando o polinômio característico, temos

$$\det(M(s) - \lambda I) = 0 \Rightarrow \lambda = 0 \text{ e } \lambda = \sqrt{-\tau^2(s) - \kappa^2(s)}.$$

Como estamos interessados na direção que é mantida fixa, devemos considerar apenas o autovalor real, ou seja, $\lambda = 0$. Assim, o vetor $\mathbf{D}(s) = \tau(s)\mathbf{t}(s) + \kappa(s)\mathbf{b}(s)$ é um autovetor relativo ao autovalor considerado. Este vetor é chamado de *vetor de Darboux*. O vetor unitário $\mathbf{d} = \frac{\mathbf{D}}{\|\mathbf{D}\|}$ descreve uma curva na esfera chamada *indicatriz de Darboux*.

O vetor $\tilde{\mathbf{D}}(s) = \left(\frac{\tau}{\kappa}\right)(s)\mathbf{t}(s) + \mathbf{b}(s)$, que está no núcleo de $M(s)$ e é múltiplo de $\mathbf{D}(s)$, será chamado *vetor de Darboux modificado* e será útil posteriormente.

Agora, sendo \mathbf{a} a direção fixada, temos que

$$\gamma' \cdot \mathbf{a} = \text{constante} \Rightarrow \gamma'' \cdot \mathbf{a} = 0 \Rightarrow \kappa \mathbf{n} \cdot \mathbf{a} = 0 \Rightarrow \mathbf{a} \text{ é ortogonal a } \mathbf{n} \text{ para } \kappa \neq 0.$$

Assim, $\mathbf{a} = \lambda \mathbf{t} + \mu \mathbf{b}$ e $\lambda^2 + \mu^2 = 1$.

$$\text{Ainda, } \gamma''' \cdot \mathbf{a} = 0 \Rightarrow (\kappa' \mathbf{n} + \kappa \mathbf{n}') \cdot \mathbf{a} = 0$$

$$\Rightarrow (\kappa' \mathbf{n} + \kappa(-\kappa \mathbf{t} + \tau \mathbf{b})) \cdot (\lambda \mathbf{t} + \mu \mathbf{b}) = 0 \Rightarrow -\kappa^2 \lambda + \kappa \tau \mu = 0$$

$$\Rightarrow \mathbf{a} = \frac{\tau \mathbf{t} + \kappa \mathbf{b}}{\sqrt{(\tau^2 + \kappa^2)}}.$$

Portanto, $\frac{\mathbf{D}}{\|\mathbf{D}\|}$ é a direção fixa da hélice generalizada.

A proposição a seguir nos dá uma caracterização da hélice generalizada em função da curvatura e torção.

Proposição 2 *Uma curva $\gamma(s)$ com curvatura não-nula é uma hélice generalizada se, e somente se, $\left(\frac{\tau}{\kappa}\right)(s)$ é constante.*

Demonstração Primeiramente, tomando $\mathbf{a} = \frac{\kappa \mathbf{b} + \tau \mathbf{t}}{\sqrt{(\kappa^2 + \tau^2)}}$, vamos encontrar \mathbf{a}' .

$$\mathbf{a}' = \frac{(\kappa' \mathbf{b} + \kappa \mathbf{b}' + \tau' \mathbf{t} + \tau \mathbf{t}')(\kappa^2 + \tau^2)^{\frac{1}{2}} - (\kappa \mathbf{b} + \tau \mathbf{t}) \frac{1}{2} (\kappa^2 + \tau^2)^{-\frac{1}{2}} (2\kappa \kappa' + 2\tau \tau')}{\kappa^2 + \tau^2}.$$

Usando as equações de Frenet,

$$\mathbf{a}' = \frac{(\kappa' \mathbf{b} + \tau' \mathbf{t})(\kappa^2 + \tau^2) - (\kappa \mathbf{b} + \tau \mathbf{t})(\kappa \kappa' + \tau \tau')}{(\kappa^2 + \tau^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Efetuando os cálculos, obtemos

$$\mathbf{a}' = \frac{\kappa^2 \tau' \mathbf{t} + \tau^2 \kappa' \mathbf{b} - \kappa \kappa' \tau \mathbf{t} - \kappa \tau \tau' \mathbf{b}}{(\kappa^2 + \tau^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Reagrupando os termos de forma conveniente, temos

$$\mathbf{a}' = \frac{\tau(\tau \kappa' - \kappa \tau') \mathbf{b} + \kappa(\kappa \tau' - \kappa' \tau) \mathbf{t}}{(\kappa^2 + \tau^2)^{\frac{3}{2}}}. \quad (1.1)$$

Suponha $\gamma(s)$ uma hélice generalizada. Assim,

$$\gamma' \cdot \mathbf{a} = \text{constante}. \quad (1.2)$$

Derivando 1.2 e usando as equações de Frenet

$$\gamma'' \cdot \mathbf{a} + \gamma' \cdot \mathbf{a}' = 0 \Rightarrow \kappa \mathbf{n} \cdot \mathbf{a} + \mathbf{t} \cdot \mathbf{a}' = 0. \quad (1.3)$$

Aplicando as expressões de \mathbf{a} e \mathbf{a}' em 1.3,

$$\begin{aligned} (\kappa\mathbf{n}) \cdot \left(\frac{\kappa\mathbf{b} + \tau\mathbf{t}}{\sqrt{(\kappa^2 + \tau^2)}} \right) + \mathbf{t} \cdot \left(\frac{\tau(\tau\kappa' - \kappa\tau')\mathbf{b} + \kappa(\kappa\tau' - \kappa'\tau)\mathbf{t}}{(\kappa^2 + \tau^2)^{\frac{3}{2}}} \right) &= 0 \\ \Rightarrow \mathbf{t} \cdot \left(\frac{\kappa(\kappa\tau' - \kappa'\tau)\mathbf{t}}{(\kappa^2 + \tau^2)^{\frac{3}{2}}} \right) &= 0 \Rightarrow \frac{\kappa(\kappa\tau' - \kappa'\tau)}{(\kappa^2 + \tau^2)^{\frac{3}{2}}} = 0. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Como $\kappa \neq 0$, a expressão 1.4 nos dá:

$$\kappa\tau' - \kappa'\tau = 0. \quad (1.5)$$

Por outro lado,

$$\left(\frac{\tau}{\kappa} \right)' = \frac{\kappa\tau' - \kappa'\tau}{\kappa^2}. \quad (1.6)$$

Usando 1.5 em 1.6, concluímos que

$$\left(\frac{\tau}{\kappa} \right)' = 0 \Rightarrow \left(\frac{\tau}{\kappa} \right) = \text{constante}.$$

Suponha, agora, $\left(\frac{\tau}{\kappa} \right) = \text{constante}$.

Assim,

$$\left(\frac{\tau}{\kappa} \right)' = 0 \Rightarrow \frac{\kappa\tau' - \kappa'\tau}{\kappa^2} = 0 \Rightarrow \kappa\tau' - \kappa'\tau = 0. \quad (1.7)$$

Utilizando isto em 1.1, concluímos que $\mathbf{a}' = 0$.

Então,

$$\gamma'' \cdot \mathbf{a} + \gamma' \cdot \mathbf{a}' = (\kappa\mathbf{n}) \cdot \left(\frac{\kappa\mathbf{b} + \tau\mathbf{t}}{\sqrt{(\kappa^2 + \tau^2)}} \right) + \mathbf{t} \cdot 0 = 0.$$

Mas,

$$0 = \gamma'' \cdot \mathbf{a} + \gamma' \cdot \mathbf{a}' = (\gamma' \cdot \mathbf{a})' \Rightarrow \gamma' \cdot \mathbf{a} = \text{constante}.$$

Portanto, γ é uma hélice generalizada. ■

Como consequência deste resultado temos que a hélice circular é um caso particular de hélice generalizada.

Veremos a seguir como uma hélice generalizada pode ser construída a partir de uma curva plana. A referência utilizada aqui é [5].

Dada uma curva plana regular $\gamma(t)$ com curvatura não-nula, definimos uma curva no espaço

$\tilde{\gamma}(t) = \gamma(t) + (\cot \theta \int_{t_0}^t \|\gamma'(r)\| dr) \mathbf{a} + \mathbf{c}$, onde θ é um número constante e \mathbf{a} e \mathbf{c} são vetores constantes com $\gamma'(t) \cdot \mathbf{a} = 0$ e $\|\mathbf{a}\| = 1$.

No teorema a seguir utilizaremos $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}\}$ para o triedro de Frenet da curva plana γ e $\{\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B}\}$

para o triedro de Frenet da curva no espaço $\tilde{\gamma}$.

Teorema 1 *A curva $\tilde{\gamma}$ dada acima é uma hélice generalizada. Além disto, todas as hélices generalizadas podem ser construídas por este método.*

Demonstração Prova da 1ª afirmação.

Mostremos que $\left(\frac{\tau}{\kappa}\right)$ é constante. Assumimos $\gamma(t)$ uma curva plana parametrizada pelo comprimento de arco.

Derivando $\tilde{\gamma}$, obtemos

$$\tilde{\gamma}(t) = \gamma'(t) + \cot \theta \mathbf{a}.$$

$$\tilde{\gamma}'(t) = \kappa_p(t) \mathbf{n}(t), \text{ onde } \kappa_p \text{ é a curvatura da curva plana.}$$

$$\tilde{\gamma}''(t) = \kappa_p'(t) \mathbf{n}(t) - (\kappa_p(t))^2 \mathbf{t}(t).$$

Também sabemos que

$$\kappa(t) = \frac{\|\tilde{\gamma}' \times \tilde{\gamma}''\|}{(\tilde{\gamma}' \cdot \tilde{\gamma}')^{\frac{3}{2}}} \quad \text{e} \quad \tau(t) = \frac{\det(\tilde{\gamma}', \tilde{\gamma}'', \tilde{\gamma}''')}{\|\tilde{\gamma}' \times \tilde{\gamma}''\|^2}.$$

Efetuada os cálculos, obtemos

$$\kappa(t) = |\kappa_p(t)| \sin^2 \theta \text{ e } \tau(t) = \kappa_p(t) \cot \theta \sin^2 \theta.$$

Assim, $\left(\frac{\tau}{\kappa}\right)$ é constante.

Prova da 2ª afirmação.

Seja $\tilde{\gamma}$ uma hélice generalizada parametrizada pelo comprimento de arco. Neste caso, a imagem esférica de Darboux $\mathbf{d}(s) = \frac{\mathbf{D}(s)}{\|\mathbf{D}(s)\|}$ é constante.

$$\text{Denote } \mathbf{a} = \mathbf{d}(s) = \frac{\tau(s) \mathbf{T}(s) + \kappa(s) \mathbf{B}(s)}{\sqrt{\tau^2(s) + \kappa^2(s)}}.$$

Temos que $\left(\frac{\tau}{\kappa}\right)(s) = c$. Escolha θ tal que $\cot \theta = c$ ($\sin \theta > 0$).

Considere a curva $\gamma(s) = \tilde{\gamma}(s) - (\tilde{\gamma}(s) \cdot \mathbf{a}) \mathbf{a}$.

Então $\gamma(s) \cdot \mathbf{a} = 0$. Logo γ está no plano normal a \mathbf{a} , ou seja, γ é uma curva plana.

Temos que $\tilde{\gamma}'(s) \cdot \mathbf{a} = \cos \theta$ e $\|\tilde{\gamma}'(s) - (\tilde{\gamma}'(s) \cdot \mathbf{a}) \mathbf{a}\| = \sin \theta$.

Segue que

$$\gamma(s) + (\cot \theta \int_0^s \|\gamma'(r)\| dr) \mathbf{a} = \tilde{\gamma} - \cos \theta \mathbf{a} s + \cot \theta \sin \theta s \mathbf{a} = \tilde{\gamma}. \quad \blacksquare$$

Como consequência temos o seguinte resultado.

Corolário 1 *Uma curva plana γ é um círculo se e somente se as hélices generalizadas correspondentes são hélices circulares.*

Demonstração Pelos cálculos feitos na demonstração do teorema anterior, temos que a curvatura κ e a torção τ das hélices generalizadas são dadas por

$$\kappa(t) = |\kappa_p(t)| \sin^2 \theta \text{ e } \tau(t) = \kappa_p(t) \cot \theta \sin^2 \theta.$$

Vemos que são constantes se $\kappa_p(t)$ é constante. ■

1.3 Curvas de Bertrand

Na seção anterior vimos as hélices generalizadas como uma generalização da hélice circular. Outra generalização da hélice circular é dada pelas curvas de Bertrand.

Definição 3 Uma curva $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ com $\kappa(s) \neq 0$ é chamada uma curva de Bertrand se existe uma curva $\bar{\gamma}: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que as retas normais principais de γ e $\bar{\gamma}$ em $s \in I$ são iguais. Neste caso, $\bar{\gamma}$ é chamada um par de Bertrand de γ .

Veremos inicialmente que toda curva plana com curvatura não-nula é de Bertrand. Para isto necessitaremos do conceito de evoluta e involuta de curvas.

Se $\alpha(s)$ é uma curva regular de curvatura $\kappa \neq 0$, a quantidade $\rho(s) = \frac{1}{|\kappa(s)|}$ é denominada raio de curvatura de α em s . O círculo de raio $\rho(s)$ e centro

$$c(s) = \alpha(s) + \frac{1}{\kappa(s)} \mathbf{n}(s)$$

é denominado círculo osculador e $c(s)$ é dito centro de curvatura. A medida que varia o parâmetro s , o centro de curvatura descreve uma curva β , a evoluta de α .

Uma involuta de uma curva regular β é uma curva que é ortogonal às retas tangentes de β . Portanto, se β é evoluta de α , então α é uma involuta de β .

Então, se α é uma curva plana, podemos sempre encontrar uma curva $\bar{\alpha}$ tal que α e $\bar{\alpha}$ são curvas de Bertrand. De fato, se β é a evoluta de α , então todas as involutas $\bar{\alpha}$ de β têm a mesma normal principal de α , pois por definição de involuta, estas curvas interceptam ortogonalmente qualquer tangente de β .

Considere $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva de Bertrand com $\bar{\gamma}$ seu par. Então, por definição, $\bar{\gamma}$ pode ser representada na forma

$$\bar{\gamma}(t) = \gamma(t) + a(t) \mathbf{n}(t)$$

onde $\mathbf{n}(t)$ é o vetor normal unitário de γ e $|a(t)|$ é a distância do ponto \bar{P} de $\bar{\gamma}$ ao ponto correspondente P de γ ; $a(t)$ tem sinal positivo se o sentido de P a \bar{P} é o de $\mathbf{n}(t)$ e negativo caso contrário.

Vamos provar que $a(t)$ é uma constante.

Sejam s e \bar{s} os parâmetros comprimento de arco de γ e $\bar{\gamma}$, respectivamente.

Como a é a distância dos pontos correspondentes de γ e $\bar{\gamma}$, a é uma constante se, e só se,

$$\frac{d}{dt}(a^2) = \frac{d}{dt}[(\bar{\gamma} - \gamma) \cdot (\bar{\gamma} - \gamma)] = 2(\bar{\gamma} - \gamma) \cdot (\bar{\gamma}' - \gamma')$$

se anula. De fato, a afirmação é válida pois o vetor $\bar{\gamma} - \gamma$ é paralelo à reta normal principal comum, enquanto os vetores $\bar{\gamma}'$ e γ' são tangentes a $\bar{\gamma}$ e γ , respectivamente, isto é, são ortogonais à normal principal.

Vamos utilizar o fato anterior para dar uma caracterização de curvas de Bertrand.

Proposição 3 *Seja $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva no espaço com $\kappa(s) \neq 0$. Suponha que $\tau(s) \neq 0$. Então γ é uma curva de Bertrand se, e somente se, existem números reais não-nulos A, B tal que*

$$A\kappa(s) + B\tau(s) = 1, \text{ para todo } s \in I.$$

Demonstração Suponha que γ é uma curva de Bertrand com $\bar{\gamma}$ o par de Bertrand.

Sejam \mathbf{t} e $\bar{\mathbf{t}}$ os vetores tangentes unitários a γ e $\bar{\gamma}$, respectivamente. Temos

$$\frac{d}{dt}(\bar{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{t}) = \bar{\mathbf{t}}' \cdot \mathbf{t} + \bar{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{t}'. \quad (1.8)$$

Como os vetores \mathbf{t}' e $\bar{\mathbf{t}}'$ são paralelos à reta normal principal comum, a expressão 1.8 se anula.

Denotando por α o ângulo entre os tangentes nos pontos correspondentes, temos

$$\bar{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{t} = \|\bar{\mathbf{t}}\| \|\mathbf{t}\| \cos \alpha = \cos \alpha = \text{constante},$$

Assim, em todos os pontos correspondentes de γ e $\bar{\gamma}$ o ângulo entre os vetores tangentes é o mesmo.

Vamos utilizar s e \bar{s} como o parâmetro comprimento de arco de γ e $\bar{\gamma}$, respectivamente. Assim, como γ é curva de Bertrand,

$$\bar{\gamma}(s) = \gamma(s) + a\mathbf{n}(s). \quad (1.9)$$

Então, usando 1.3 e as equações de Frenet,

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \bar{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{t} = \frac{d\bar{\gamma}}{ds} \frac{ds}{d\bar{s}} \cdot \mathbf{t} \\ &= \frac{ds}{d\bar{s}} (\mathbf{t} + a\mathbf{n}') \cdot \mathbf{t} \\ &= \frac{ds}{d\bar{s}} (\mathbf{t} \cdot \mathbf{t} + a(-\kappa\mathbf{t} + \tau\mathbf{b}) \cdot \mathbf{t}) \\ &= \frac{ds}{d\bar{s}} (1 - a\kappa). \end{aligned}$$

Logo,

$$\frac{ds}{d\bar{s}} (1 - a\kappa) = \text{constante} \quad (1.10)$$

Por outro lado, temos

$$\|\bar{\mathbf{t}} \times \mathbf{t}\| = \left\| \frac{ds}{d\bar{s}} ([\mathbf{t} + a(-\kappa\mathbf{t} + \tau\mathbf{b})] \times \mathbf{t}) \right\| = \left\| \frac{ds}{d\bar{s}} a\tau\mathbf{n} \right\| = \left\| \frac{ds}{d\bar{s}} a\tau \right\|. \quad (1.11)$$

Também

$$\|\bar{\mathbf{t}} \times \mathbf{t}\| = \|\bar{\mathbf{t}}\| \|\mathbf{t}\| \sin \alpha = 1 \cdot 1 \cdot \sin \alpha = \sin \alpha. \quad (1.12)$$

De 1.3, 1.11 e 1.12, obtemos

$$a\tau \frac{ds}{d\bar{s}} = \pm \sin \alpha = \text{constante}. \quad (1.13)$$

Então, de 1.10 e 1.13, temos

$$\frac{\frac{ds}{d\bar{s}}(1 - a\kappa)}{\frac{ds}{d\bar{s}}a\tau} = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = C \Rightarrow \frac{1 - a\kappa}{a\tau} = C. \quad (1.14)$$

Fazendo, em 1.14, $a = A$ e $C = \frac{B}{a}$,

$$\frac{1 - A\kappa}{A\tau} = \frac{B}{A} \Rightarrow 1 - A\kappa = B\tau \Rightarrow A\kappa + B\tau = 1.$$

Agora, seja a curva $\gamma(s)$, com s seu parâmetro comprimento de arco. Tomemos a curva

$$\bar{\gamma}(s) = \gamma(s) + A\mathbf{n}(s) \quad (1.15)$$

e mostremos que se

$$A\kappa(s) + B\tau(s) = 1, \quad (1.16)$$

então γ e $\bar{\gamma}$ são curvas de Bertrand.

Diferenciando a expressão 1.15 com relação a s , obtemos

$$\frac{d\bar{\gamma}}{ds} = \mathbf{t} + A\mathbf{n}' = \mathbf{t} + A(-\kappa\mathbf{t} + \tau\mathbf{b}) = \mathbf{t} - A\kappa\mathbf{t} + A\tau\mathbf{b} = (1 - A\kappa)\mathbf{t} + A\tau\mathbf{b}.$$

Em 1.16, tomando $C = \frac{B}{A}$, ficamos com

$$1 - A\kappa = CA\tau. \quad (1.17)$$

Portanto, de 1.3 e 1.17

$$\frac{d\bar{\gamma}}{ds} = A\tau(C\mathbf{t} + \mathbf{b}). \quad (1.18)$$

Assim, se a orientação de $\bar{\gamma}$ já foi escolhida, o vetor tangente unitário a $\bar{\gamma}$ é da forma

$$\bar{\mathbf{t}} = \frac{C\mathbf{t} + \mathbf{b}}{\sqrt{1+C^2}} \quad (1.19)$$

Derivando 1.19, obtemos

$$\frac{d\bar{\mathbf{t}}}{ds} = \frac{1}{\sqrt{1+C^2}}(C\mathbf{t}' + \mathbf{b}') = \frac{1}{\sqrt{1+C^2}}(C\kappa\mathbf{n} - \tau\mathbf{n}) = \frac{1}{\sqrt{1+C^2}}(C\kappa - \tau)\mathbf{n}.$$

Observe que este vetor é a derivada do vetor tangente a $\bar{\gamma}$ e pertence à normal principal a $\bar{\gamma}$ e esta normal coincide com a normal principal de γ . Portanto, γ e $\bar{\gamma}$ são curvas de Bertrand. ■

Uma consequência direta da Proposição 3 é que as hélices circulares são curvas de Bertrand.

A seguir apresentamos algumas consequências importantes da Proposição 3.

Corolário 2 *Seja $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva no espaço com $\kappa(s) \neq 0$ e $\tau(s) \neq 0$. Então γ é uma curva de Bertrand se, e somente se, existe um número real $A \neq 0$ tal que*

$$A(\tau'(s)\kappa(s) - \kappa'(s)\tau(s)) - \tau'(s) = 0.$$

Demonstração Pela proposição anterior, como γ é uma curva de Bertrand, existem números reais não-nulos A e B tais que $A\kappa(s) + B\tau(s) = 1$.

Então como $\tau(s) \neq 0$, $B = \frac{1 - A\kappa(s)}{\tau(s)}$. Ou seja, a expressão $\frac{1 - A\kappa(s)}{\tau(s)}$ é uma constante.

Diferenciando, temos

$$\frac{-A\kappa'(s)\tau(s) - (1 - A\kappa(s))\tau'(s)}{[\tau(s)]^2} = 0 \Rightarrow -A\kappa'(s)\tau(s) - \tau'(s) + A\kappa(s)\tau'(s) = 0$$

Assim, $A(\tau'(s)\kappa(s) - \kappa'(s)\tau(s)) - \tau'(s) = 0$.

Agora, por hipótese temos $A(\tau'(s)\kappa(s) - \kappa'(s)\tau(s)) - \tau'(s) = 0$

Portanto, $\frac{A(\tau'(s)\kappa(s) - \kappa'(s)\tau(s)) - \tau'(s)}{[\tau(s)]^2} = 0$, pois $\tau(s) \neq 0$.

Então,

$$\frac{A(\tau'(s)\kappa(s) - \kappa'(s)\tau(s)) - \tau'(s)}{\tau(s)^2} = \left(\frac{1 - A\kappa(s)}{\tau(s)}\right)' = 0 \Rightarrow \frac{1 - A\kappa(s)}{\tau(s)} = B \Rightarrow A\kappa(s) + B\tau(s) = 1,$$

com B uma constante real.

Assim, pela proposição anterior, γ é uma curva de Bertrand. ■

Proposição 4 *Se γ é uma curva de Bertrand, ou γ é plana ou $\tau(s)$ nunca se anula.*

Demonstração Seja γ uma curva de Bertrand com $\bar{\gamma}$ o par de Bertrand e sejam \mathbf{t} e $\bar{\mathbf{t}}$ os vetores tangentes unitários de γ e $\bar{\gamma}$, respectivamente.

Pela demonstração da Proposição 3,

$$\bar{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{t} = \cos \alpha = \text{constante} \quad \text{e} \quad \|\bar{\mathbf{t}} \times \mathbf{t}\| = \sin \alpha = \text{constante}, \quad (1.20)$$

onde α é o ângulo formado entre os vetores tangentes.

Sendo s o comprimento de arco de γ , temos que

$$\bar{\gamma}(s) = \gamma(s) + a\mathbf{n}(s). \quad (1.21)$$

Derivando 1.21 com relação ao comprimento de arco \bar{s} de $\bar{\gamma}$, obtemos

$$\frac{d\bar{\gamma}}{d\bar{s}} = \frac{d\bar{\gamma}}{ds} \frac{ds}{d\bar{s}} = (\gamma'(s) + a\mathbf{n}'(s)) \frac{ds}{d\bar{s}}. \quad (1.22)$$

Usando as equações de Frenet em 1.22

$$\bar{\mathbf{t}} = \left(\mathbf{t} + a(-\kappa\mathbf{t} + \tau\mathbf{b}) \right) \frac{ds}{d\bar{s}} = ((1 - a\kappa)\mathbf{t} + a\tau\mathbf{b}) \frac{ds}{d\bar{s}}. \quad (1.23)$$

Por outro lado, usando 1.23

$$\bar{\mathbf{t}} \times \mathbf{t} = \left((1 - a\kappa)\mathbf{t} + a\tau\mathbf{b} \right) \frac{ds}{d\bar{s}} \times \mathbf{t} = a\tau \frac{ds}{d\bar{s}} \mathbf{b} \times \mathbf{t} = a\tau \frac{ds}{d\bar{s}} \mathbf{n}. \quad (1.24)$$

Assim, como $\|\mathbf{n}\| = 1$, de 1.20 obtemos o que segue:

$$\|\bar{\mathbf{t}} \times \mathbf{t}\| = \left\| a\tau \frac{ds}{d\bar{s}} \mathbf{n} \right\| = \left\| a\tau \frac{ds}{d\bar{s}} \right\| = C, \quad (1.25)$$

onde C é uma constante.

Como $a \neq 0$ e $\frac{ds}{d\bar{s}} \neq 0$, da expressão 1.25 concluímos que:

(a) se $C = 0$, então $\tau(s) = 0$, para todo $s \in I$, ou seja, γ é uma curva plana;

(b) se $C \neq 0$, então $\tau(s) \neq 0$, para todo $s \in I$.

Portanto, uma curva de Bertrand é plana ou sua torção nunca se anula.

■

Temos então que se γ é uma curva de Bertrand no espaço, sua torção é nunca nula. Quando γ é plana, γ possui infinitos pares de Bertrand dados por curvas $\bar{\gamma}(s) = \gamma(s) + a\mathbf{n}(s)$ paralelas a γ .

A próxima proposição relaciona as torções de uma curva de Bertrand e seu par.

Proposição 5 *Seja $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva de Bertrand com par de Bertrand $\bar{\gamma}$. Então $\tau(s)\bar{\tau}(s)$ é constante não-negativa, onde $\tau(s)$ e $\bar{\tau}(s)$ indicam a torção de γ e $\bar{\gamma}$, respectivamente.*

Demonstração Inicialmente observe que devido à Proposição 4 podemos supor $\tau \neq 0$ e $\bar{\tau} \neq 0$.

Como \mathbf{t} e $\bar{\mathbf{t}}$ são ortogonais à normal principal comum de γ e $\bar{\gamma}$, $\bar{\mathbf{t}}$ é da forma:

$$\bar{\mathbf{t}} = \pm(\cos \alpha \mathbf{t} + \sin \alpha \mathbf{b}), \quad (1.26)$$

onde α é o ângulo entre \mathbf{t} e $\bar{\mathbf{t}}$, que é constante, conforme a prova de 3. Se tomarmos o produto vetorial entre $\bar{\mathbf{t}}$ e $\bar{\mathbf{n}}$ temos

$$\bar{\mathbf{b}} = \bar{\mathbf{t}} \times \bar{\mathbf{n}} = (\cos \alpha \mathbf{t} + \sin \alpha \mathbf{b}) \times \mathbf{n} = \cos \alpha \mathbf{b} - \sin \alpha \mathbf{t}. \quad (1.27)$$

Diferenciando a expressão 1.27 com relação a s , encontramos

$$\frac{d\bar{\mathbf{b}}}{ds} = \cos \alpha \frac{d\mathbf{b}}{ds} - \sin \alpha \frac{d\mathbf{t}}{ds},$$

já que α é constante.

Usando as equações de Frenet,

$$\frac{d\bar{\mathbf{b}}}{ds} = -\cos \alpha \tau \mathbf{n} - \sin \alpha \kappa \mathbf{n} = -(\tau \cos \alpha + \kappa \sin \alpha) \mathbf{n}. \quad (1.28)$$

Por outro lado

$$\frac{d\bar{\mathbf{b}}}{ds} = \frac{d\bar{\mathbf{b}}}{d\bar{s}} \frac{d\bar{s}}{ds} = -\bar{\tau} \bar{\mathbf{n}} \frac{d\bar{s}}{ds}, \quad (1.29)$$

onde \bar{s} é o parâmetro comprimento de arco de $\bar{\gamma}$.

Comparando 1.28 e 1.29 e usando o fato que $\bar{\mathbf{n}} = \pm \mathbf{n}$, temos

$$\begin{aligned} -(\tau \cos \alpha + \kappa \sin \alpha) \mathbf{n} &= -\bar{\tau} \bar{\mathbf{n}} \frac{d\bar{s}}{ds} \\ \Rightarrow \tau \cos \alpha + \kappa \sin \alpha &= \pm \bar{\tau} \frac{d\bar{s}}{ds}. \end{aligned} \quad (1.30)$$

Como por hipótese, γ é curva de Bertrand, temos pela Proposição 3

$$A\kappa + B\tau = 1 \quad (1.31)$$

Fazendo $A = a$, $C = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$ e $C = \frac{B}{A}$, como na prova da Proposição 3, podemos reescrever 1.31 como segue

$$\kappa + \cot \alpha \tau = \frac{1}{a} \Rightarrow \tau \cos \alpha + \kappa \sin \alpha = \frac{\sin \alpha}{a}. \quad (1.32)$$

Então de 1.30 e 1.32,

$$\pm (\tau \cos \alpha + \kappa \sin \alpha) = \pm \frac{\sin \alpha}{a} = \bar{\tau} \frac{d\bar{s}}{ds}. \quad (1.33)$$

De $\bar{\gamma}(s) = \gamma(s) + a\mathbf{n}(s)$, obtemos

$$\bar{\tau} = \frac{d\bar{\gamma}}{ds} \frac{ds}{d\bar{s}} = (\mathbf{t} + a\mathbf{n}') \frac{ds}{d\bar{s}} = [(1 - a\kappa)\mathbf{t} + a\tau\mathbf{b}] \frac{ds}{d\bar{s}}. \quad (1.34)$$

Comparando os coeficientes de 1.26 e 1.34, encontramos

$$\pm (\cos \alpha \mathbf{t} + \sin \alpha \mathbf{b}) = [(1 - a\kappa)\mathbf{t} + a\tau\mathbf{b}] \frac{ds}{d\bar{s}}.$$

Agora comparando os coeficientes de \mathbf{b} , temos

$$\pm \sin \alpha = a\tau \frac{ds}{d\bar{s}} \Rightarrow \frac{ds}{d\bar{s}} = \pm \frac{\sin \alpha}{a\tau} \Rightarrow \frac{d\bar{s}}{ds} = \pm \frac{a\tau}{\sin \alpha}. \quad (1.35)$$

Por fim, de 1.33 e 1.35

$$\pm \frac{\bar{\tau} a \tau}{\sin \alpha} = \pm \frac{\sin \alpha}{a} \Rightarrow \tau \cdot \bar{\tau} = \frac{\sin^2 \alpha}{a^2} = \text{constante}.$$

Portanto, o produto das torções é uma constante não-negativa. ■

Vimos na seção 1.2 que toda hélice pode ser obtida a partir de uma curva plana. Veremos agora um resultado similar envolvendo as curvas de Bertrand. A referência utilizada aqui foi [5].

Seja $\gamma: I \rightarrow \mathbb{S}^2$ uma curva esférica parametrizada pelo comprimento de arco e σ o parâmetro comprimento de arco de γ . Considere:

$$\mathbf{t}(\sigma) = \gamma'(\sigma);$$

$$\mathbf{s}(\sigma) = \gamma(\sigma) \times \mathbf{t}(\sigma).$$

$\{\gamma(\sigma), \mathbf{t}(\sigma), \mathbf{s}(\sigma)\}$ forma um referencial ortonormal chamado *triedro de Sabban*.

Vamos mostrar agora que $\mathbf{t}'(\sigma) = -\gamma(\sigma) + \kappa_g(\sigma)\mathbf{s}(\sigma)$, onde κ_g é a curvatura geodésica de $\gamma \subset \mathbb{S}^2$.

Escolheremos γ o vetor normal da esfera em $\gamma(s)$. Assim, a curvatura geodésica $\kappa_g(s)$ é dada por

$$\kappa_g(\sigma) = \gamma''(\sigma) \cdot (\mathbf{t}(\sigma) \times \gamma(\sigma)).$$

Logo,

$$\kappa_g(\sigma) = \mathbf{t}'(\sigma) \cdot (\mathbf{t}(\sigma) \times \gamma(\sigma)) = \mathbf{t}'(\sigma) \cdot \mathbf{s}(\sigma). \quad (1.36)$$

Como $\|\gamma\| = 1$, temos $\mathbf{t}' \cdot \mathbf{t} = 0$, significando que \mathbf{t}' é ortogonal a \mathbf{t} . Assim,

$$\mathbf{t}' = a\gamma + b\mathbf{s}. \quad (1.37)$$

Precisamos encontrar a e b na expressão 1.37.

$$a = \mathbf{t}' \cdot \gamma \text{ e } b = \mathbf{t}' \cdot \mathbf{s}.$$

Como $\|\gamma\| = 1$, temos $\gamma' \cdot \gamma = 0$. Derivando esta última expressão,

$$\gamma'' \cdot \gamma + \gamma' \cdot \gamma' = 0 \Rightarrow \gamma'' \cdot \gamma + 1 = 0 \Rightarrow \gamma'' \cdot \gamma = -1 \Rightarrow \mathbf{t}' \cdot \gamma = -1. \quad (1.38)$$

Então, de 1.36 e 1.38, $a = -1$ e $b = \kappa_g$.

Portanto,

$$\mathbf{t}'(\sigma) = -\gamma(\sigma) + \kappa_g(\sigma)\mathbf{s}(\sigma).$$

Agora, vamos mostrar que $\mathbf{s}'(\sigma) = -\kappa_g(\sigma)\mathbf{t}(\sigma)$.

Como $\mathbf{s}(\sigma) = \gamma(\sigma) \times \mathbf{t}(\sigma)$, derivando obtemos,

$$\mathbf{s}'(\sigma) = \gamma'(\sigma) \times \mathbf{t}(\sigma) + \gamma(\sigma) \times \mathbf{t}'(\sigma) = \kappa_g(\sigma)(\gamma(\sigma) \times \mathbf{s}(\sigma)) = \kappa_g(\sigma)(-\mathbf{t}(\sigma)) = -\kappa_g(\sigma)\mathbf{t}(\sigma).$$

Pelo visto anteriormente, temos que

$$\gamma'(\sigma) = \mathbf{t}(\sigma)$$

$$\mathbf{t}'(\sigma) = -\gamma(\sigma) + \kappa_g(\sigma)\mathbf{s}(\sigma)$$

$$\mathbf{s}'(\sigma) = -\kappa_g(\sigma)\mathbf{t}(\sigma).$$

Definimos uma curva no espaço

$$\tilde{\gamma}(\sigma) = a \int_{\sigma_0}^{\sigma} \gamma(r) dr + a \cot \theta \int_{\sigma_0}^{\sigma} \mathbf{s}(r) dr + c. \quad (1.39)$$

Teorema 2 *A curva $\tilde{\gamma}$ acima é uma curva de Bertrand. Além disto, todas as curvas de Bertrand podem ser construídas por este método.*

Demonstração Vamos mostrar primeiramente que $\tilde{\gamma}$ dada em 1.39 é uma curva de Bertrand. A ideia aqui é utilizar a Proposição 3.

Para isso, precisamos calcular a curvatura e a torção de $\tilde{\gamma}(\sigma)$.

Derivando $\tilde{\gamma}(\sigma)$, obtemos

$$\tilde{\gamma}'(\sigma) = a(\gamma(\sigma) + \cot \theta \mathbf{s}(\sigma)).$$

$$\tilde{\gamma}''(\sigma) = a(1 - \cot \theta \kappa_g(\sigma))\mathbf{t}(\sigma).$$

$$\tilde{\gamma}'''(\sigma) = -a \cot \theta \kappa_g'(\sigma)\mathbf{t}(\sigma) + a(1 - \cot \theta \kappa_g(\sigma))(-\gamma(\sigma) + \kappa_g(\sigma)\mathbf{s}(\sigma)).$$

Assim, utilizando a Proposição 1, encontramos, com $\varepsilon = \pm 1$:

$$\kappa(\sigma) = \varepsilon \frac{\text{sen}^2 \theta (1 - \kappa_g(\sigma) \cot \theta)}{a} \quad (1.40)$$

e

$$\tau(\sigma) = \frac{\text{sen}^2 \theta (\kappa_g(\sigma) + \cot \theta)}{a}. \quad (1.41)$$

Observe que usando 1.40 e 1.41, obtemos

$$a(\varepsilon \kappa(\sigma) + \cot \theta \tau(\sigma)) = a \left(\varepsilon \text{sen}^2 \theta \frac{(1 - \kappa_g(\sigma) \cot \theta)}{a} + \frac{\cot \theta \text{sen}^2 \theta}{a} (\kappa_g(\sigma) + \cot \theta) \right)$$

$$\Rightarrow a(\varepsilon \kappa(\sigma) + \cot \theta \tau(\sigma)) = 1.$$

Logo, existem números reais $A = a\varepsilon$ e $B = a \cot \theta$ tais que $A\kappa(\sigma) + B\tau(\sigma) = 1$ o que significa que $\tilde{\gamma}$ é uma curva de Bertrand.

Agora, sendo $\tilde{\gamma}$ curva de Bertrand, queremos mostrar que

$$\tilde{\gamma}(\sigma) = a \int_{\sigma_0}^{\sigma} \gamma(r) dr + a \cot \theta \int_{\sigma_0}^{\sigma} \mathbf{s}(r) dr + c,$$

para alguma curva esférica γ .

Como $\tilde{\gamma}$ é curva de Bertrand, existem $A, B \in \mathbb{R}$ tais que $A\kappa(s) + B\tau(s) = 1$.

Façamos $a = A$, $\cot \theta = \frac{B}{a}$; e escolhemos $\varepsilon = \pm 1$ com $\frac{\varepsilon \text{sen} \theta}{a} > 0$.

Definimos uma curva esférica dada por

$$\gamma(s) = \varepsilon (\text{sen} \theta \mathbf{T}(s) - \cos \theta \mathbf{B}(s)), \quad (1.42)$$

onde $\mathbf{T}(s)$ e $\mathbf{B}(s)$ são os vetores tangente e binormal, respectivamente, da curva $\tilde{\gamma}$ e s é o parâmetro comprimento de arco de $\tilde{\gamma}$.

Então, derivando a expressão 1.42 e usando as equações de Frenet com \mathbf{N} o vetor normal principal de $\tilde{\gamma}$, encontramos

$$\begin{aligned} \gamma'(s) &= \varepsilon (\text{sen} \theta \mathbf{T}'(s) - \cos \theta \mathbf{B}'(s)) \\ &= \varepsilon (\text{sen} \theta \kappa(s) \mathbf{N}(s) - \cos \theta (-\tau(s) \mathbf{N}(s))) \\ &= \varepsilon (\text{sen} \theta \kappa(s) + \cos \theta \tau(s)) \mathbf{N}(s) \\ &= \frac{\varepsilon}{a} \text{sen} \theta (\kappa(s) + \cot \theta \tau(s)) \mathbf{N}(s) \\ &= \frac{\varepsilon}{a} \text{sen} \theta (a\kappa(s) + a \cot \theta \tau(s)) \mathbf{N}(s) \\ &= \frac{\varepsilon}{a} \text{sen} \theta \mathbf{N}(s). \end{aligned}$$

Seja σ o parâmetro comprimento de arco de γ , então

$$\frac{d\sigma}{ds} = \left\| \frac{d\gamma}{ds} \right\| = \left| \frac{\varepsilon}{a} \operatorname{sen} \theta \right| = \frac{\varepsilon}{a} \operatorname{sen} \theta.$$

Também temos

$$a\gamma(s) \frac{d\sigma}{ds} = a\varepsilon (\operatorname{sen} \theta \mathbf{T}(s) - \cos \theta \mathbf{B}(s)) \frac{\varepsilon}{a} \operatorname{sen} \theta = \operatorname{sen} \theta (\operatorname{sen} \theta \mathbf{T}(s) - \cos \theta \mathbf{B}(s)). \quad (1.43)$$

Logo,

$$a \cot \theta \gamma(s) \times \frac{d\gamma}{d\sigma} \frac{d\sigma}{ds} = \cos \theta (\operatorname{sen} \theta \mathbf{B}(s) + \cos \theta \mathbf{T}(s)). \quad (1.44)$$

Como $s = \gamma \times \frac{d\gamma}{d\sigma}$, temos

$$\begin{aligned} a \int_0^\sigma \gamma(r) dr + a \cot \theta \int_0^\sigma \mathbf{s}(r) dr &= \int_{u_0}^u \operatorname{sen} \theta (\operatorname{sen} \theta \mathbf{T}(t) - \cos \theta \mathbf{B}(t)) dt \\ &\quad + \int_{u_0}^u \cos \theta (\operatorname{sen} \theta \mathbf{B}(t) + \cos \theta \mathbf{T}(t)) dt \\ &= \int_{u_0}^u (\operatorname{sen}^2 \theta + \cos^2 \theta) \mathbf{T}(t) dt = \int_{u_0}^u \mathbf{T}(t) dt \\ &= \tilde{\gamma} + c. \end{aligned}$$

Então,

$$\tilde{\gamma}(\sigma) = a \int_{\sigma_0}^\sigma \gamma(r) dr + a \cot \theta \int_{\sigma_0}^\sigma \mathbf{s}(r) dr + c.$$

■

A curva de Bertrand da figura 1.5 foi gerada a partir da curva esférica $\gamma(t) = (\operatorname{sen}(t), \operatorname{sen}(t) \cos(t), \cos^2(t))$, figura 1.4, tomando-se $a = 1$ e $\cot \theta = 1$.

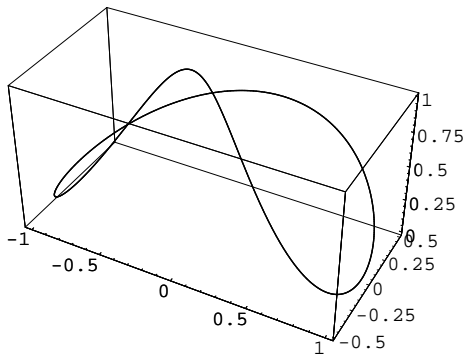


Figura 1.4: Curva esférica

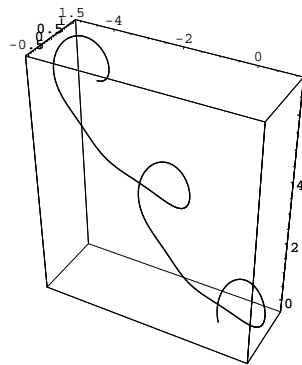


Figura 1.5: Curva de Bertrand

Como consequência temos o seguinte resultado.

Corolário 3 *A curva esférica γ é um círculo se, e somente se, as correspondentes curvas de Bertrand são hélices circulares.*

Demonstração Pela demonstração do teorema anterior, temos

$$\kappa'(\sigma) = -\frac{\varepsilon \kappa_g'(\sigma) \cos \theta}{a} \text{ e } \tau'(\sigma) = \frac{\sin^2 \theta \kappa_g'(\sigma)}{a}.$$

A curva esférica γ é um círculo se e somente se $\kappa_g'(\sigma) \equiv 0$. Esta condição é equivalente à condição $\kappa'(\sigma) = \tau'(\sigma) \equiv 0$. ■

1.4 A indicatriz de Darboux de uma curva de Bertrand

Como vimos no Teorema 2, toda curva de Bertrand $\tilde{\gamma}$ pode ser obtida a partir de uma curva esférica γ . Veremos nesta seção que a evoluta esférica de γ (lugar geométrico dos centros dos círculos osculadores) é a indicatriz de Darboux de $\tilde{\gamma}$.

Para isto precisaremos do conceito de envelope de uma família de funções.

Suponha que $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{R}$ seja uma aplicação diferenciável (o símbolo \rightarrow indica que o domínio de F é um subconjunto aberto de \mathbb{R}^{r+1}). Usamos (t, x_1, \dots, x_r) como coordenadas de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^r$ e consideremos F como uma família de funções de \mathbf{x} , parametrizadas por t . Escrevemos $F_t : \mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{R}$ para a função $F_t(\mathbf{x}) = F(t, \mathbf{x})$; suponhamos que, para cada t , zero seja um valor regular de F_t , isto é, para $F(t, \mathbf{x}) = 0$, $\frac{\partial F}{\partial x_i}$ é não nula para algum i . Se tomarmos $C_t = F_t^{-1}(0)$, temos que C_t é uma $(r-1)$ -variedade parametrizada. Isso motiva a definição a seguir.

Definição 4 *O envelope da família F é definido por*

$$\mathcal{D} = \mathcal{D}_F = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^r : \exists t \in \mathbb{R}, F(t, \mathbf{x}) = \frac{\partial F}{\partial t}(t, \mathbf{x}) = 0\}.$$

Se $\mathbf{x} \in \mathcal{D}$ e $F(t, \mathbf{x}) = \frac{\partial F}{\partial t}(t, \mathbf{x}) = 0$, então t é dito corresponder a \mathbf{x} .

Quando $r = 2$, tem-se que C_t é uma curva regular, para cada t .

Como exemplo, considere a família de círculos unitários centrados no eixo x_1 do plano x_1x_2 . Cada círculo desta família tem como equação

$$(x_1 - t)^2 + x_2^2 - 1 = 0, \text{ com } t \in \mathbb{R} \text{ fixo.}$$

As curvas $C_t = F_t^{-1}(0)$, onde $F(t, x_1, x_2) = (x_1 - t)^2 + x_2^2 - 1$ são círculos de raio 1 centrados no eixo x_1 .

Dado $(x_1, x_2) \in C_t$, então $(x_1 - t)^2 + x_2^2 - 1 = 0$. Além disso,

$$\frac{\partial F_t}{\partial x_1}(t, x) = 2(x_1 - t) \text{ e } \frac{\partial F_t}{\partial x_2}(t, x) = 2x_2.$$

Logo,

$$\frac{\partial F_t}{\partial x_1}(t, x) = \frac{\partial F_t}{\partial x_2}(t, x) = 0 \Leftrightarrow x_2 = 0 \text{ e } x_1 = t.$$

Mas estes pontos não pertencem a $F_t^{-1}(0)$, portanto 0 é valor regular de F_t , para qualquer $t \in \mathbb{R}$. Assim, $F_t^{-1}(0)$ é localmente uma superfície parametrizada em \mathbb{R}^3 .

Sendo assim, vamos encontrar o conjunto discriminante de F .

Temos $\frac{\partial F}{\partial t} = -2(x_1 - t)$ e então

$$\mathcal{D} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : x_1 = t, x_2^2 = 1\} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : x_2 = \pm 1\},$$

que é o par de retas $x_2 = \pm 1$. Note que t corresponde a $(t, 1)$ e a $(t, -1)$ em \mathcal{D} .

Na figura abaixo, podemos visualizar melhor o exemplo anterior.

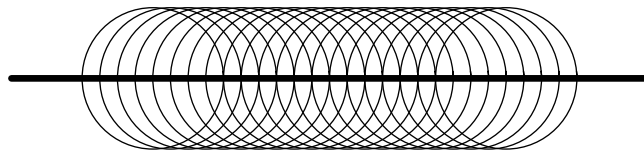


Figura 1.6: Família de círculos centrados em $(x_1, 0)$

A evoluta de uma curva plana $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ também pode ser vista como o envelope de retas normais à curva. De fato, considere a família $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $F(s, \mathbf{x}) = (\mathbf{x} - \alpha(s)) \cdot \alpha'(s)$, onde s é o parâmetro comprimento de arco de α .

Cada reta normal à curva α em $\alpha(s)$ é determinada por $C_s = F_s^{-1}(0)$.

Vamos encontrar o envelope desta família de retas. Temos que

$$F = 0 \Rightarrow (\mathbf{x} - \alpha) \cdot \alpha' = 0 \Rightarrow \mathbf{x} - \alpha = \lambda \mathbf{n}$$

e

$$\frac{\partial F}{\partial s} = 0 \Rightarrow -\alpha' \cdot \alpha' + (\mathbf{x} - \alpha) \cdot \alpha'' = 0.$$

Logo, $F = \frac{\partial F}{\partial s} = 0$, se e somente se,

$$-1 + (\lambda \mathbf{n} + \alpha - \alpha) \cdot \alpha'' = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{\kappa}.$$

Assim, o conjunto \mathcal{D}_F é dado por

$$\mathcal{D}_F = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2; \mathbf{x} = \alpha(s) + \frac{1}{\kappa(s)} \mathbf{n}(s), \text{ com } \kappa(s) \neq 0\},$$

ou seja, o envelope das retas normais de γ é dado pelos centros dos círculos osculadores de γ (evoluta).

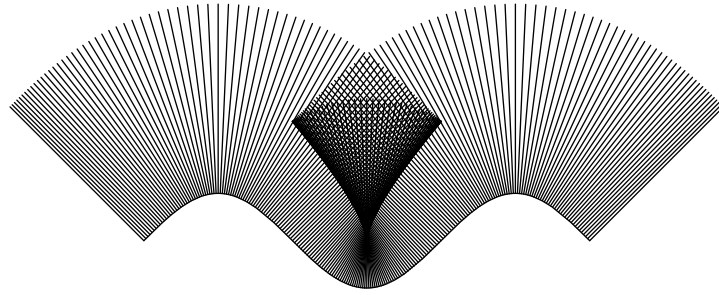


Figura 1.7: Família de retas normais ao gráfico de $\sin x$

Usando a definição de envelope vista anteriormente, vamos estudar a evoluta de uma curva esférica.

Para uma curva esférica $\gamma : I \rightarrow \mathbb{S}^2$, com curvatura $\kappa \neq 0$, vamos definir *evoluta esférica* de γ como o envelope de grandes círculos normais à curva.

Tome a família $F : \mathbb{R} \times \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $F(s, \mathbf{x}) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{t}(s)$, ou seja, a família de grandes círculos ortogonais a γ , onde γ é uma curva esférica parametrizada pelo comprimento de arco e $\mathbf{t} = \gamma'$.

Assim,

$$F = 0 \Rightarrow \mathbf{x} \cdot \mathbf{t} = 0 \Rightarrow \mathbf{x} = \lambda \mathbf{n} + \mu \mathbf{b}$$

$$\frac{\partial F}{\partial s} = 0 \Rightarrow \mathbf{x} \cdot \kappa \mathbf{n} = 0$$

Agora,

$$F = \frac{\partial F}{\partial s} = 0 \Rightarrow (\lambda \mathbf{n} + \mu \mathbf{b}) \cdot (\kappa \mathbf{n}) = 0 \Rightarrow \lambda = 0,$$

já que estamos admitindo a hipótese $\kappa \neq 0$.

Logo, $\mathbf{x} = \mu \mathbf{b}$. Como $\mathbf{x} \in \mathbb{S}^2$, temos $\|\mathbf{x}\| = 1$ e assim $\mu = \pm 1$. Portanto,

$$\mathcal{D}_F = \{\mathbf{x} \in \mathbb{S}^2; \mathbf{x} = \pm \mathbf{b}(s), s \in I\}.$$

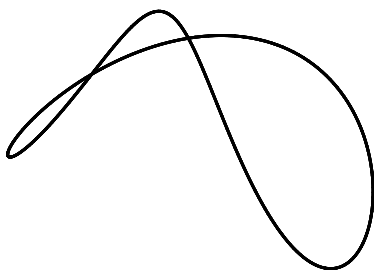


Figura 1.8: Curva esférica

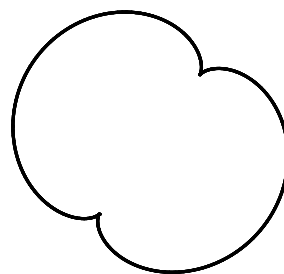


Figura 1.9: Evoluta esférica

Podemos expressar a evoluta esférica de γ em termos do triedro de Sabban visto anteriormente.

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{t} = 0 \Rightarrow \mathbf{x} = \lambda \boldsymbol{\gamma} + \mu \mathbf{s}$$

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{t}' = 0 \Rightarrow \mathbf{x} \cdot (-\boldsymbol{\gamma} + \kappa_g \mathbf{s}) = 0.$$

Usando $\mathbf{x} = \lambda \boldsymbol{\gamma} + \mu \mathbf{s}$, obtemos

$$(\lambda \boldsymbol{\gamma} + \mu \mathbf{s}) \cdot (-\boldsymbol{\gamma} + \kappa_g \mathbf{s}) = 0 \Rightarrow \lambda = \kappa_g \mu.$$

Então

$$\mathbf{x} = \kappa_g \mu \boldsymbol{\gamma} + \mu \mathbf{s}. \quad (1.45)$$

Mas $\|\mathbf{x}\| = 1$, o que implica

$$\kappa_g^2 \mu^2 + \mu^2 = 1 \Rightarrow \mu = \pm \frac{1}{\sqrt{\kappa_g^2 + 1}}. \quad (1.46)$$

De 1.45 e 1.46, segue que

$$\mathbf{x} = \pm \frac{1}{\sqrt{\kappa_g^2 + 1}} (\kappa_g \boldsymbol{\gamma} + \mathbf{s}). \quad (1.47)$$

Pode-se mostrar usando [5] que a evoluta esférica de $\boldsymbol{\gamma}$ é dada pelos centros esféricos dos círculos osculadores a $\boldsymbol{\gamma}$.

Temos então a seguinte proposição.

Proposição 6 *Seja $\boldsymbol{\gamma}: I \rightarrow \mathbb{S}^2$ uma curva esférica e $\tilde{\boldsymbol{\gamma}}: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva de Bertrand correspondente a $\boldsymbol{\gamma}$. Então a indicatriz de Darboux de $\tilde{\boldsymbol{\gamma}}$ é igual à evoluta esférica de $\boldsymbol{\gamma}$.*

Demonstração Pela demonstração do Teorema 2, temos que a curvatura e a torção de $\tilde{\boldsymbol{\gamma}}$ são dadas por

$$\kappa(\sigma) = \frac{\varepsilon \operatorname{sen}^2 \theta (1 - \kappa_g(\sigma) \cot \theta)}{a} \quad (1.48)$$

e

$$\tau(\sigma) = \frac{\operatorname{sen}^2 \theta (\kappa_g(\sigma) + \cot \theta)}{a}, \quad (1.49)$$

onde a , θ , ε são dados como no Teorema 2.

Consideraremos, como no Teorema 2, $\{\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B}\}$ para o triedro de Frenet da curva $\tilde{\boldsymbol{\gamma}}$, s o parâmetro comprimento de arco de $\tilde{\boldsymbol{\gamma}}$ e σ o parâmetro comprimento de arco da curva $\boldsymbol{\gamma}$. Assim, utilizando a expressão de $\tilde{\boldsymbol{\gamma}}$ em (1.39) obtemos como na demonstração do Teorema 2 que

$$\mathbf{T}(\sigma) = a(\boldsymbol{\gamma}(\sigma) + \cot \theta \mathbf{s}(\sigma)) \frac{d\sigma}{ds} \quad (1.50)$$

e

$$\mathbf{N}(\sigma) = \varepsilon \mathbf{t}(\sigma). \quad (1.51)$$

Então, de 1.50 e 1.51, temos

$$\mathbf{B}(\sigma) = \mathbf{T}(\sigma) \times \mathbf{N}(\sigma) = a(\gamma(\sigma) + \cot \theta \mathbf{s}(\sigma)) \frac{d\sigma}{ds} \times \varepsilon \mathbf{t}(\sigma).$$

$$\mathbf{B}(\sigma) = \varepsilon a \left(\frac{d\sigma}{ds} \right) (s(\sigma) - \cot \theta \gamma(\sigma)). \quad (1.52)$$

Como o vetor de Darboux é dado por $\mathbf{D}(\sigma) = \tau(\sigma)\mathbf{T}(\sigma) + \kappa(\sigma)\mathbf{B}(\sigma)$, temos utilizando 1.48, 1.49, 1.50 e 1.52 que

$$\begin{aligned} \mathbf{D}(\sigma) &= \left[\frac{\sin^2 \theta}{a} (\kappa_g(\sigma) + \cot \theta) \right] a(\gamma(\sigma) + \cot \theta \mathbf{s}(\sigma)) \frac{d\sigma}{ds} \\ &\quad + \left[\frac{\varepsilon}{a} \sin^2 \theta (1 - \kappa_g(\sigma) \cot \theta) \right] a \varepsilon \left(\frac{d\sigma}{ds} \right) (s(\sigma) - \cot \theta \gamma(\sigma)). \end{aligned}$$

Efetuada os cálculos, obtemos

$$\mathbf{D}(\sigma) = \frac{d\sigma}{ds} (\mathbf{s}(\sigma) + \kappa_g(\sigma) \gamma(\sigma)).$$

$$\text{Portanto, } \mathbf{d}(\sigma) = \frac{\mathbf{D}(\sigma)}{\|\mathbf{D}(\sigma)\|} = \frac{1}{\sqrt{\kappa_g^2(\sigma) + 1}} (\kappa_g(\sigma) \gamma(\sigma) + \mathbf{s}(\sigma)).$$

Portanto, por 1.47, \mathbf{d} é a evoluta esférica de γ .

■

Capítulo 2

SUPERFÍCIES REGRADAS

O estudo de superfícies regradas é um assunto clássico em Geometria Diferencial. O interesse pelo tema tem reaparecido recentemente devido suas aplicações em diferentes áreas que vão desde Geometria Diferencial Projetiva, Computação Gráfica a Desenho Industrial, dentre outras.

Neste capítulo faremos um apanhado dos principais resultados clássicos sobre superfícies regradas que serão úteis no próximo capítulo. As referências utilizadas são [2] e [3]. Também estudaremos as superfícies desenvolvíveis. Tais superfícies são exemplos de superfícies regradas cuja curvatura gaussiana é nula em todos os seus pontos regulares.

2.1 Definição

Intuitivamente podemos considerar uma superfície regradada como uma superfície gerada por uma linha reta movendo-se ao longo de uma curva. Mais formalmente, temos a definição que segue.

Definição 5 *Uma superfície regradada em \mathbb{R}^3 é (localmente) a função $F_{(\gamma,\delta)} : I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por $F_{(\gamma,\delta)}(t, u) = \gamma(t) + u\delta(t)$, onde $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\delta : I \rightarrow \mathbb{R}^3 - \{0\}$ são funções diferenciáveis e I é um intervalo aberto. Neste caso, chamamos γ a curva base ou diretriz, e as retas $u \mapsto \gamma(t) + u\delta(t)$ são chamadas de geratrizes.*

Podemos dizer que a superfície regradada é gerada pela família $\{\gamma(t), \delta(t)\}$.

Os exemplos mais simples de superfícies regradadas são as superfícies tangentes a uma curva regular, os cilindros e os cones.

Uma superfície tangente é dada por $F_{(\gamma,t)}(t, u) = \gamma(t) + u\mathbf{t}(t)$.

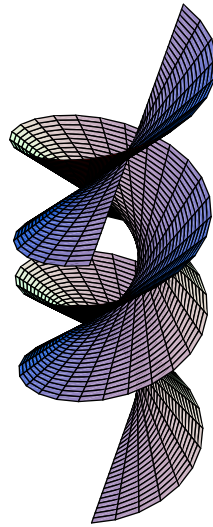


Figura 2.1: Superfície tangente

Um cilindro pode ser visto como uma superfície regrada gerada por uma família de retas $\{\gamma(t), \delta(t)\}$, com $t \in I$, $\gamma(t)$ contida em um plano e $\delta(t)$ paralelo a uma direção fixa em \mathbb{R}^3 .

Se tomarmos uma família $\{\gamma(t), \delta(t)\}$, com $t \in I$, onde $\gamma(t)$ está contida em um plano e todas as geratrizes passam por um ponto que não pertença a esse plano, temos o cone.

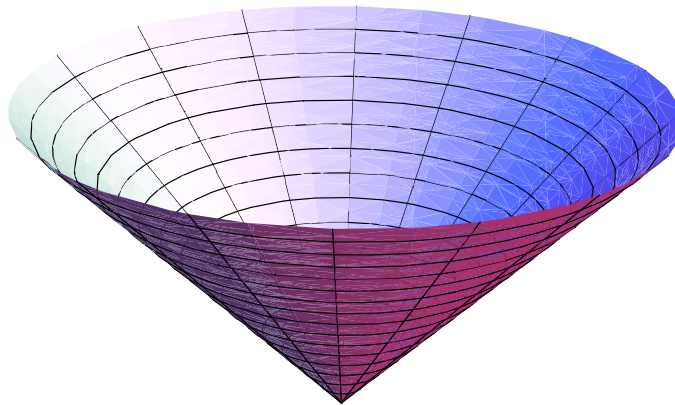


Figura 2.2: Cone

As duas proposições que seguem referem-se às curvaturas gaussiana e média de uma superfície regrada em geral.

Proposição 7 Seja $F_{(\gamma,\delta)}$ uma superfície regrada com $\|\delta(t)\| = 1$. Então a curvatura gaussiana de $F_{(\gamma,\delta)}$ é dada por $K(t,u) = -\frac{(\det(\gamma'(t), \delta(t), \delta'(t)))^2}{(EG - F^2)^2}$, com $E = E(t,u) = \|\gamma'(t) + u\delta'(t)\|^2$, $F = F(t,u) = \gamma'(t) \cdot \delta(t)$, $G = G(t,u) = 1$.

Demonstração Temos que $K(t,u) = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}$, onde E, F, G e e, f, g são os coeficientes da primeira e segunda formas fundamentais, respectivamente. Como $F_{(\gamma,\delta)}(t,u) = \gamma(t) + u\delta(t)$ e usando \mathbf{N} para o vetor normal à superfície temos:

$$e = \mathbf{N} \cdot F_{tt}; f = \mathbf{N} \cdot F_{tu}; g = \mathbf{N} \cdot F_{uu}; \mathbf{N} = \frac{F_t \times F_u}{(\|F_t \times F_u\|)}.$$

$$E = F_t \cdot F_t, F = F_t \cdot F_u, G = F_u \cdot F_u.$$

Observe que:

$$\|F_t \times F_u\| = \|F_t\| \|F_u\| \sin \theta,$$

$$F_t \cdot F_u = \|F_t\| \|F_u\| \cos \theta, \text{ onde } \theta \text{ é o ângulo entre } F_t \text{ e } F_u.$$

$$\text{Assim, } (\|F_t \times F_u\|)^2 + (F_t \cdot F_u)^2 = (\|F_t\|)^2 (\|F_u\|)^2.$$

$$\text{Logo, } \|F_t \times F_u\| = \sqrt{(\|F_t\|)^2 (\|F_u\|)^2 - (F_t \cdot F_u)^2} = \sqrt{EG - F^2}.$$

Ainda observe que $F_u = \delta(t)$ e $F_{uu} = 0$, assim $g = \mathbf{N} \cdot F_{uu} = 0$.

$$\text{Dessa forma, } K(t,u) = \frac{-f^2}{EG - F^2} = -\frac{\left(\left(\frac{F_t \times F_u}{\sqrt{EG - F^2}}\right) \cdot F_{tu}\right)^2}{EG - F^2}, \text{ ou seja,}$$

$$\begin{aligned} K(t,u) &= -\frac{((F_t \times F_u) \cdot F_{tu})^2}{(EG - F^2)^2} \\ &= -\frac{(\det(F_t, F_u, F_{tu}))^2}{(EG - F^2)^2} \\ &= -\frac{(\det(\gamma'(t) + u\delta'(t), \delta(t), \delta'(t)))^2}{(EG - F^2)^2} \\ &= -\frac{(\det(\gamma'(t), \delta(t), \delta'(t)) - u \det(\delta'(t), \delta(t), \delta'(t)))^2}{(EG - F^2)^2} \\ &= -\frac{(\det(\gamma'(t), \delta(t), \delta'(t)))^2}{(EG - F^2)^2}. \end{aligned}$$

■

Proposição 8 Seja $F_{(\gamma,\delta)}$ uma superfície regrada com $\|\delta(t)\| = 1$. Então a curvatura média de $F_{(\gamma,\delta)}$ é dada por

$$H(t,u) = \frac{-2(\gamma'(t) \cdot \delta(t)) \det(\gamma'(t), \delta(t), \delta'(t)) + \det(\gamma''(t) + u\delta''(t), \gamma'(t) + u\delta'(t), \delta(t))}{2(EG - F^2)^{\frac{3}{2}}},$$

em que $E = E(t,u) = \|\gamma'(t) + u\delta'(t)\|^2$, $F = F(t,u) = \gamma'(t) \cdot \delta(t)$ e $G = G(t,u) = 1$.

Demonstração

Temos que $H(t, u) = \frac{eG - 2fF + gE}{2(EG - F^2)}$.

Assim,

$$\begin{aligned} H(t, u) &= \frac{(N \cdot F_{tt})1 - 2(N \cdot F_{tu})(F_t \cdot F_u)}{2(EG - F^2)} \\ &= \frac{(F_t \times F_u) \cdot F_{tt} - 2(F_t \times F_u) \cdot F_{tu}(F_t \cdot F_u)}{2(\sqrt{EG - F^2})(EG - F^2)} \\ &= \frac{-2(\gamma'(t) \cdot \delta(t)) \det(\gamma'(t) + u\delta'(t), \delta(t), \delta'(t)) + \det(\gamma'(t) + u\delta'(t), \delta(t), \gamma''(t) + u\delta''(t))}{2(EG - F^2)^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{-2(\gamma'(t) \cdot \delta(t)) \det(\gamma'(t), \delta(t), \delta'(t)) + \det(\gamma''(t) + u\delta''(t), \gamma'(t) + u\delta'(t), \delta(t))}{2(EG - F^2)^{\frac{3}{2}}}. \end{aligned}$$

■

Observemos que aqui estamos admitindo a possibilidade de que F tenha pontos singulares, isto é, pontos (t, u) onde $F_t \times F_u = 0$.

Considerando $F_{(\gamma, \delta)} : I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por $F_{(\gamma, \delta)}(t, u) = \gamma(t) + u\delta(t)$, temos que $\frac{\partial F_{(\gamma, \delta)}}{\partial t}(t, u) \times \frac{\partial F_{(\gamma, \delta)}}{\partial u}(t, u) = \gamma'(t) \times \delta(t) + u\delta'(t) \times \delta(t)$.

Assim, (t_0, u_0) é um ponto singular de $F_{(\gamma, \delta)}$ se, e só se, $\gamma'(t_0) \times \delta(t_0) + u_0\delta'(t_0) \times \delta(t_0) = 0$.

No caso da superfície tangente $F_{(\gamma, t)}(s, u) = \gamma(s) + u\gamma'(s)$, temos que $\frac{\partial F}{\partial s} \times \frac{\partial F}{\partial u} = u\gamma''(s) \times \gamma'(s) = -u\kappa(s)\mathbf{b}(s)$. Logo, a superfície tangente sempre tem pontos singulares ao longo de γ .

Observamos também que se $F_{(\gamma, \delta)}(s, u) = \gamma(s) + u\delta(s)$ é uma superfície regrada que é não-singular em $\gamma(s)$, então $\gamma(s)$ é transversal às geratrizes, isto é, os vetores $\{\gamma', \delta\}$ são linearmente independentes.

De fato, suponhamos que γ não seja transversal às geratrizes. Assim, $\gamma' \times \delta = 0$ e $\frac{\partial F}{\partial t} \times \frac{\partial F}{\partial u} = 0$ em $u = 0$. Então F seria singular ao longo de γ .

Dentre as superfícies regradas, destacamos duas categorias que merecem atenção especial: as superfícies cilíndricas e as superfícies desenvolvíveis. As seções que seguem são destinadas ao estudo dessas duas classes de superfícies regradas.

2.2 Superfícies Cilíndricas

Vamos primeiramente supor, sem perda de generalidade, que $\|\delta\| = 1$.

Definição 6 Dizemos que a superfície regrada $F_{(\gamma, \delta)}$ é uma superfície cilíndrica se $\delta(t) \times \delta'(t) \equiv 0$. Quando $\delta(t) \times \delta'(t) \neq 0$, dizemos que a superfície regrada $F_{(\gamma, \delta)}$ é não-cilíndrica.

Observamos que a condição $\delta(t) \times \delta'(t) \neq 0$, é equivalente a $\delta'(t) \neq 0$, para todo $t \in I$.

De fato, supondo $\|\delta\| = 1$, temos que

$$\delta \cdot \delta = 1.$$

Derivando esta última expressão obtemos

$$\delta' \cdot \delta = 0.$$

Isso significa que sendo θ o ângulo formado entre δ e δ' , $\theta = 90^\circ$.

Assim, tomando $\|\delta \times \delta'\| = \|\delta\| \|\delta'\| \sin \theta = \|\delta'\|$.

Então $\delta(t) \times \delta'(t) \neq 0 \Leftrightarrow \delta'(t) \neq 0$.

Por outro lado, se F é não-cilíndrica, temos bem definida uma curva $\sigma(t)$ na superfície regada $F_{(\gamma, \delta)}$ com a propriedade que $\sigma'(t) \cdot \delta'(t) = 0$. Chamamos tal curva de *linha de estrição*.

Notemos que a linha de estrição está bem definida.

De fato, queremos encontrar uma curva parametrizada $\sigma(t)$ tal que $\sigma'(t) \cdot \delta'(t) = 0$, para todo $t \in I$, e que o traço de $\sigma(t)$ esteja contido no traço de F , isto é,

$$\sigma(t) = \gamma(t) + u(t)\delta(t)$$

para alguma função a valores reais $u(t)$. Supondo a existência de tal curva e diferenciando a expressão acima, obtemos

$$\sigma'(t) = \gamma'(t) + u'(t)\delta(t) + u(t)\delta'(t).$$

Impondo a condição $\sigma'(t) \cdot \delta'(t) = 0$, temos

$$0 = \sigma'(t) \cdot \delta'(t) = (\gamma'(t) + u'(t)\delta(t) + u(t)\delta'(t)) \cdot \delta'(t) \Rightarrow u(t) = -\frac{\gamma'(t) \cdot \delta'(t)}{\delta'(t) \cdot \delta'(t)}.$$

Além disto, esta curva não depende da curva base escolhida.

De fato, sejam γ e $\tilde{\gamma}$ duas curvas bases para F . Então podemos escrever

$$F(t, u) = \gamma(t) + u\delta(t) = \tilde{\gamma}(t) + s(u)\delta(t)$$

para alguma função $s(u)$.

Sejam σ e $\tilde{\sigma}$ as correspondentes linhas de estrição. Então

$$\sigma(t) = \gamma(t) - \frac{\gamma'(t) \cdot \delta'(t)}{\delta'(t) \cdot \delta'(t)} \delta(t)$$

e

$$\tilde{\sigma}(t) = \tilde{\gamma}(t) - \frac{\tilde{\gamma}'(t) \cdot \delta'(t)}{\delta'(t) \cdot \delta'(t)} \delta(t).$$

Assim,

$$\sigma(t) - \tilde{\sigma}(t) = \gamma(t) - \tilde{\gamma}(t) - \frac{(\gamma'(t) - \tilde{\gamma}'(t)) \cdot \delta'(t)}{\delta'(t) \cdot \delta'(t)} \delta(t). \quad (2.1)$$

Por outro lado, temos que

$$\gamma(t) - \tilde{\gamma}(t) = (s(u) - u) \delta(t) \quad (2.2)$$

Então, de (2.1) e (2.2):

$$\sigma(t) - \tilde{\sigma}(t) = \left(s(u) - u - \frac{[(s(u) - u) \delta'(t)] \cdot \delta'(t)}{\delta'(t) \cdot \delta'(t)} \right) \delta(t) = 0.$$

Portanto, $\sigma = \tilde{\sigma}$.

Vamos tomar a linha de estrição como a curva base da superfície regradada e escreveremos a superfície da seguinte maneira

$$F(t, u) = \sigma(t) + u \delta(t).$$

Assim, $F_t = \sigma'(t) + u \delta'(t)$ e $F_u = \delta(t)$.

$$\text{Então } F_t \times F_u = \sigma'(t) \times \delta(t) + u \delta'(t) \times \delta(t).$$

Como $\delta'(t) \cdot \delta(t) = 0$ e $\delta'(t) \cdot \sigma'(t) = 0$, concluímos que $\sigma'(t) \times \delta(t) = \lambda(t) \delta'(t)$, para alguma função $\lambda(t)$ chamada de *parâmetro de distribuição*.

$$\text{Assim, } \|F_t \times F_u\|^2 = \|\lambda \delta' + u \delta' \times \delta\|^2 = \lambda^2 \|\delta'\|^2 + u^2 \|\delta'\|^2 = (\lambda^2 + u^2) \|\delta'\|^2.$$

Segue-se que os eventuais pontos singulares da superfície regradada situam-se ao longo da linha de estrição $u = 0$ e eles ocorrem se e somente se $\lambda(t) = 0$.

$$\text{Observe que } \lambda(t) = \frac{\det(\sigma'(t), \delta(t), \delta'(t))}{\|\delta'(t)\|^2}.$$

Utilizando isto na expressão de K dada na Proposição 5, segue que

$$K = -\frac{\lambda^2}{(\lambda^2 + u^2)^2}.$$

Concluímos então que tomando a curva base como a linha de estrição, temos que, *em pontos regulares, a curvatura Gaussiana de uma superfície regradada satisfaz $K \leq 0$, sendo zero apenas ao longo das geratrizes que intersectam a linha de estrição em um ponto singular.*

2.3 Superfícies Desenvolvíveis

Definição 7 Dizemos que uma superfície regradada $F_{(\gamma, \delta)}$ é uma superfície desenvolvível se a curvatura gaussiana da parte regular de $F_{(\gamma, \delta)}$ se anula.

Observemos que uma superfície regrada $F_{(\gamma,\delta)}(t,u) = \gamma(t) + u\delta(t)$ é uma superfície desenvolvível se e somente se $\det(\gamma'(t), \delta(t), \delta'(t)) = 0$.

De fato, isto decorre imediatamente da Proposição 7, visto que

$$K(t,u) = -\frac{(\det(\gamma'(t), \delta(t), \delta'(t)))^2}{(EG - F^2)^2}.$$

Vamos considerar agora três superfícies regradas especiais associadas a uma curva $\gamma(s)$ com curvatura positiva.

A primeira é a superfície tangente, já vista na seção 2.1.

A segunda é a chamada superfície normal principal que é dada por:

$$F_{(\gamma,\mathbf{n})}(t,u) = \gamma(t) + u\mathbf{n}(t)$$

A terceira é conhecida por superfície binormal e é dada por:

$$F_{(\gamma,\mathbf{b})}(t,u) = \gamma(t) + u\mathbf{b}(t)$$

Temos então a seguinte proposição.

Proposição 9 *A superfície tangente é sempre uma superfície desenvolvível. A superfície normal principal e a superfície binormal são superfícies desenvolvíveis se e somente se a curva correspondente é plana.*

Demonstração Para a superfície tangente temos $\delta(s) = \mathbf{t}(s) = \gamma'(s)$. Assim $\det(\gamma'(t), \delta(t), \delta'(t)) = 0$, pois apresenta duas colunas iguais.

No caso da superfície normal principal, temos que

$$\begin{aligned} \det(\gamma'(s), \delta(s), \delta'(s)) &= \det(\gamma'(s), \mathbf{n}(s), \mathbf{n}'(s)) \\ &= \det(\gamma'(s), \mathbf{n}(s), -\kappa(s)\mathbf{t}(s) + \tau(s)\mathbf{b}(s)) \\ &= \det(\gamma'(s), \mathbf{n}(s), \tau(s)\mathbf{b}(s)). \end{aligned}$$

Como os vetores \mathbf{t} , \mathbf{n} e \mathbf{b} são linearmente independentes, este determinante só se anula quando $\tau(s) = 0$, isto é, quando a curva é plana.

Por outro lado, se $\gamma(s)$ é uma curva plana, a normal principal pertence ao plano da curva e assim a superfície normal principal é um plano.

Por fim, no caso da superfície binormal nós temos

$$\det(\gamma'(s), \delta(s), \delta'(s)) = \det(\gamma'(s), \mathbf{b}(s), \mathbf{b}'(s)) = \det(\gamma'(s), \mathbf{b}(s), -\tau(s)\mathbf{n}(s)),$$

onde novamente este determinante se anula se e só se a torção é nula, ou seja, quando $\gamma(s)$ é uma curva plana.

Inversamente, se $\gamma(s)$ é uma curva plana, $\mathbf{b}(s)$ é constante e assim $\mathbf{b}'(s) = 0$.

Portanto, $\det(\gamma'(s), \mathbf{b}(s), \mathbf{b}'(s)) = 0$. ■

Vamos agora distinguir dois casos de superfícies desenvolvíveis:

(a) $\delta(t) \times \delta'(t) \equiv 0$. Isso significa que $\delta'(t) \equiv 0$. Assim, $\delta(t)$ é constante e a superfície regrada é um cilindro sobre uma curva obtida pela interseção do cilindro com um plano normal a $\delta(t)$;

(b) $\delta(t) \times \delta'(t) \neq 0$, para todo $t \in I$. Nesse caso, $\delta(t) \neq 0$, para todo $t \in I$. Temos assim que a superfície é não-cilíndrica. Podemos determinar a linha de estrição e verificar que o parâmetro de distribuição

$$\lambda = \frac{\det(\sigma', \delta, \delta')}{\|\delta'\|^2} \equiv 0.$$

Portanto, a linha de estrição será o lugar geométrico dos pontos singulares da superfície desenvolvível. Se $\sigma'(t) \neq 0$, para todo $t \in I$, segue da equação acima, do fato que $\sigma' \cdot \delta' \equiv 0$ e de δ ser paralelo ao plano tangente da superfície que δ é paralelo a σ' . Logo, a superfície regrada é a superfície tangente de σ . Se $\sigma'(t) = 0$, para todo $t \in I$, então a linha de estrição é um ponto, e a superfície regrada é um cone tendo esse ponto como vértice.

Desse modo, longe dos pontos de acumulação dos zeros das funções envolvidas, uma superfície desenvolvível é uma união de pedaços de cilindros, cones e superfícies tangentes.

Capítulo 3

CURVAS ESPECIAIS E SUPERFÍCIES REGRADAS

Neste capítulo estudaremos hélices generalizadas e curvas de Bertrand como curvas sobre superfícies regradas. Através de alguns resultados veremos que a hélice generalizada está relacionada à curvatura gaussiana e a curva de Bertrand à curvatura média da superfície regradada que as contém.

Para este estudo introduziremos duas superfícies regradas importantes, a saber a superfície retificável desenvolvível e a superfície normal principal.

Os principais resultados desta seção encontram-se no artigo [5].

3.1 Superfície retificável desenvolvível

Do capítulo 1, definimos o vetor $\tilde{\mathbf{D}}(s) = \left(\frac{\tau}{\kappa}\right)(s)\mathbf{t}(s) + \mathbf{b}(s)$, que chamamos vetor de Darboux modificado.

Considere $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva regular com $\kappa(s) \neq 0$.

Utilizando este vetor vamos definir a superfície retificável desenvolvível, como segue.

Definição 8 A superfície regradada $F_{(\gamma, \tilde{\mathbf{D}})}(s, u) = \gamma(s) + u\tilde{\mathbf{D}}(s)$ é chamada a superfície retificável desenvolvível de γ .

No decorrer da seção veremos algumas propriedades importantes dessa superfície que justificam sua denominação.

Primeiramente, observemos que $\tilde{\mathbf{D}}'(s) = \left(\frac{\tau}{\kappa}\right)'(s)\mathbf{t}(s)$.

De fato, temos que $\tilde{\mathbf{D}}(s) = \left(\frac{\tau}{\kappa}\right)(s)\mathbf{t}(s) + \mathbf{b}(s)$ com $\kappa(s) \neq 0$.

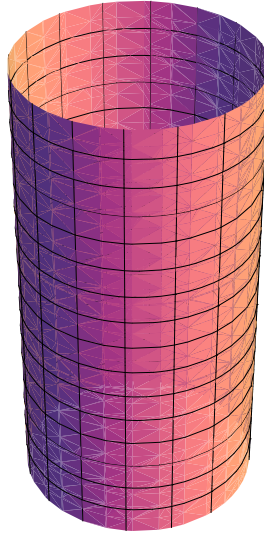


Figura 3.1: Superfície retificável desenvolvível da hélice circular

Diferenciando, temos:

$$\begin{aligned}
 \tilde{\mathbf{D}}'(s) &= \left(\frac{\tau}{\kappa}\right)'(s)\mathbf{t}(s) + \left(\frac{\tau}{\kappa}\right)(s)\mathbf{t}'(s) + \mathbf{b}'(s) \\
 &= \left(\frac{\tau}{\kappa}\right)'(s)\mathbf{t}(s) + \left(\frac{\tau}{\kappa}\right)(s)\kappa(s)\mathbf{n}(s) - \tau(s)\mathbf{n}(s) \\
 &= \left(\frac{\tau}{\kappa}\right)'(s)\mathbf{t}(s).
 \end{aligned}$$

Uma propriedade importante desta superfície é que a curva γ é uma geodésica. De fato, basta mostrar que o vetor normal da superfície sobre γ é paralelo ao vetor normal da curva γ .

Primeiro, vamos encontrar o vetor normal unitário da superfície, \mathbf{N} . Sabemos que

$$\mathbf{N}(s) = \frac{\frac{\partial F}{\partial s}(s, u) \times \frac{\partial F}{\partial u}(s, u)}{\left\| \frac{\partial F}{\partial s}(s, u) \times \frac{\partial F}{\partial u}(s, u) \right\|} \quad (3.1)$$

Vamos encontrar $\frac{\partial F}{\partial s}(s, u)$ e $\frac{\partial F}{\partial u}(s, u)$, como segue.

$$\frac{\partial F}{\partial s}(s, u) = \gamma'(s) + u\tilde{\mathbf{D}}'(s) = \mathbf{t}(s) + u\left(\frac{\tau}{\kappa}\right)'(s)\mathbf{t}(s) = \left[1 + u\left(\frac{\tau}{\kappa}\right)'(s)\right]\mathbf{t}(s)$$

e

$$\frac{\partial F}{\partial u}(s, u) = \tilde{\mathbf{D}}(s) = \left(\frac{\tau}{\kappa}\right)\mathbf{t}(s) + \mathbf{b}(s).$$

Então

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial s}(s, u) \times \frac{\partial F}{\partial u}(s, u) &= \left[1 + u \left(\frac{\tau}{\kappa} \right)'(s) \right] \mathbf{t}(s) \left[\times \left(\frac{\tau}{\kappa} \right) \mathbf{t}(s) + \mathbf{b}(s) \right] \\ &= -\mathbf{n}(s) - u \left(\frac{\tau}{\kappa} \right)'(s) \mathbf{n}(s) \\ &= - \left(1 + u \left(\frac{\tau}{\kappa} \right)'(s) \right) \mathbf{n}(s).\end{aligned}$$

Então $\mathbf{N}(s) = \pm \mathbf{n}(s)$, o que significa que γ é uma geodésica da sua superfície retificável desenvolvível.

Agora, vamos olhar essa superfície do ponto de vista da teoria de envelopes (seção 1.4). Para isso, considere a família $F : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$F(\mathbf{x}, s) = (\mathbf{x} - \gamma) \cdot \mathbf{n}.$$

Observe que $F_s^{-1}(0)$ é o plano retificante de γ em $\gamma(s)$.

Assim,

$$F = 0 \Rightarrow (\mathbf{x} - \gamma) \cdot \mathbf{n} = 0 \Rightarrow \mathbf{x} - \gamma = \lambda \mathbf{t} + \mu \mathbf{b}.$$

Também,

$$\frac{\partial F}{\partial s} = 0 \Rightarrow (-\gamma' \cdot \mathbf{n}) + (\mathbf{x} - \gamma) \cdot (-\kappa \mathbf{t} + \tau \mathbf{b}) = 0.$$

Assim,

$$F = \frac{\partial F}{\partial s} = 0 \Rightarrow (\lambda \mathbf{t} + \mu \mathbf{b}) \cdot (-\kappa \mathbf{t} + \tau \mathbf{b}).$$

Logo,

$$\kappa \lambda + \mu \tau = 0 \Rightarrow \lambda = \mu \frac{\tau}{\kappa}.$$

Então,

$$\mathbf{x} - \gamma = \left(\mu \frac{\tau}{\kappa} \right) \mathbf{t} + \mu \mathbf{b} \Rightarrow \mathbf{x} = \gamma + \mu \left(\left(\frac{\tau}{\kappa} \right) \mathbf{t} + \mathbf{b} \right) \Rightarrow \mathbf{x} = \gamma + \mu \tilde{\mathbf{D}}.$$

Portanto, a superfície retificável desenvolvível é o envelope dos planos retificantes da curva γ .

A proposição a seguir nos dá condições para que ocorra um ponto singular na superfície retificável desenvolvível.

Proposição 10 O ponto (s_0, u_0) é um ponto singular de $F_{(\gamma, \tilde{\mathbf{D}})}$ se, e somente se, $\left(\frac{\tau}{\kappa} \right)'(s_0) \neq 0$ e $u_0 = -\frac{1}{\left(\frac{\tau}{\kappa} \right)'(s_0)}$.

Demonstração Se (s_0, u_0) é um ponto singular da superfície

$$F_{(\gamma, \tilde{\mathbf{D}})}(s, u) = \gamma(s) + u \tilde{\mathbf{D}}(s),$$

então $\mathbf{N}(s_0, u_0) = 0$.

$$\text{Portanto, } \frac{\partial F}{\partial s}(s_0, u_0) \times \frac{\partial F}{\partial u}(s_0, u_0) = 0 \Rightarrow - \left(1 + u_0 \left(\frac{\tau}{\kappa} \right)'(s_0) \right) \mathbf{n}(s_0) = 0$$

$$\text{Logo, } 1 + u_0 \left(\frac{\tau}{\kappa} \right)'(s_0) = 0, \text{ ou seja, } u_0 = - \frac{1}{\left(\frac{\tau}{\kappa} \right)'(s_0)} \text{ e } \left(\frac{\tau}{\kappa} \right)'(s_0) \neq 0.$$

$$\text{Suponha agora que } \left(\frac{\tau}{\kappa} \right)'(s_0) \neq 0 \text{ e } u_0 = \frac{-1}{\left(\frac{\tau}{\kappa} \right)'(s_0)}.$$

$$\text{Então, como visto antes, } \left(\frac{\partial F}{\partial s} \times \frac{\partial F}{\partial u} \right)(s_0, u_0) = - \left(1 + u_0 \left(\frac{\tau}{\kappa} \right)'(s_0) \right) \mathbf{n}(s_0).$$

Substituindo, encontramos

$$\left(\frac{\partial F}{\partial s} \times \frac{\partial F}{\partial u} \right)(s_0, u_0) = - \left(1 - \frac{1}{\left(\frac{\tau}{\kappa} \right)'(s_0)} \left(\frac{\tau}{\kappa} \right)'(s_0) \right) \mathbf{n}(s_0) = -(1 - 1) \mathbf{n}(s_0) = 0.$$

Portanto, (s_0, u_0) é um ponto singular de $F_{(\gamma, \tilde{D})}$.

■

Os pontos da curva em que $\left(\frac{\tau}{\kappa} \right)' = 0$ são conhecidos como *pontos helicoidais*. Em tais pontos a indicatriz de Darboux da curva possui singularidades, conforme pode ser visto em [9] e [11].

A proposição a seguir nos dá uma relação entre a superfície retificável desenvolvível e a hélice generalizada.

Proposição 11 *Seja uma curva $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ parametrizada pelo comprimento de arco com $\kappa(s) \neq 0$. São equivalentes:*

- (a) *A retificável desenvolvível $F_{(\gamma, \tilde{D})} : I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ de γ é uma superfície não-singular.*
- (b) *γ é uma hélice generalizada.*
- (c) *A retificável desenvolvível $F_{(\gamma, \tilde{D})}$ de γ é uma superfície cilíndrica.*

Demonstração (a) \Rightarrow (b) Pela Proposição 10, $F_{(\gamma, \tilde{D})}$ é não-singular em qualquer ponto de $I \times \mathbb{R} \Leftrightarrow \left(\frac{\tau}{\kappa} \right)'(s) \equiv 0$. Assim, $\left(\frac{\tau}{\kappa} \right)'(s)$ é constante e, dessa forma, γ é uma hélice generalizada.

(b) \Rightarrow (c) Devemos mostrar que $\tilde{\mathbf{D}} \times \tilde{\mathbf{D}}' \equiv 0$.

Por hipótese, γ é uma hélice generalizada. Logo, $\left(\frac{\tau}{\kappa} \right)'(s)$ é constante, ou seja, $\left(\frac{\tau}{\kappa} \right)'(s) = 0$.

Assim, $\tilde{\mathbf{D}}'(s) = 0 \Rightarrow \tilde{\mathbf{D}} \times \tilde{\mathbf{D}}' \equiv 0$. Logo, F é cilíndrica.

(c) \Rightarrow (a) Como $F_{(\gamma, \tilde{D})}$ é uma superfície cilíndrica, temos $\tilde{\mathbf{D}} \times \tilde{\mathbf{D}}' \equiv 0$. Devemos mostrar que $\left(\frac{\tau}{\kappa} \right)'(s) = 0$.

Temos:

$$\left(\left(\frac{\tau}{\kappa} \right) (s) \mathbf{t}(s) + \mathbf{b}(s) \right) \times \left(\left(\frac{\tau}{\kappa} \right)' (s) \mathbf{t}(s) \right) \equiv \mathbf{0}.$$

Logo, $\left(\frac{\tau}{\kappa} \right) (s) \left(\frac{\tau}{\kappa} \right)' (s) \mathbf{t}(s) \times \mathbf{t}(s) + \left(\frac{\tau}{\kappa} \right)' (s) \mathbf{b}(s) \times \mathbf{t}(s) \equiv \mathbf{0}$, ou seja, $\left(\frac{\tau}{\kappa} \right)' (s) = 0$.

Assim, F é não-singular.

■

No capítulo 2, encontramos a expressão para a curvatura gaussiana de uma superfície regradada em geral. Veremos agora que a curvatura gaussiana da superfície retificável desenvolvível não-singular se anula.

De fato, $F_{(\gamma, \tilde{\mathbf{D}})}(s, u) = \gamma(s) + u\tilde{\mathbf{D}}(s)$ com $\tilde{\mathbf{D}}(s) = \left(\frac{\tau}{\kappa} \right) (s) \mathbf{t}(s) + \mathbf{b}(s)$.

Pelo cálculo da curvatura gaussiana para uma superfície regradada, temos

$$K(s, u) = -\frac{(\det(\gamma'(s), \tilde{\mathbf{D}}(s), \tilde{\mathbf{D}}'(s)))^2}{(EG - F^2)^2}. \text{ Já sabemos que } \tilde{\mathbf{D}}'(s) = \left(\frac{\tau}{\kappa} \right)' (s) \mathbf{t}(s).$$

Assim,

$$K(s, u) = -\frac{(\det(\gamma'(s), \left(\frac{\tau}{\kappa} \right) (s) \mathbf{t}(s) + \mathbf{b}(s), \left(\frac{\tau}{\kappa} \right)' (s) \mathbf{t}(s)))^2}{(EG - F^2)^2} = \frac{(\det(\gamma'(s), \mathbf{b}(s), \left(\frac{\tau}{\kappa} \right)' (s) \mathbf{t}(s)))^2}{(EG - F^2)^2}.$$

Logo, $K(s, u) = 0$, pois $\left(\frac{\tau}{\kappa} \right)' (s) = 0$ já que $F_{(\gamma, \tilde{\mathbf{D}})}$ é não-singular. Isto significa que *a superfície retificável desenvolvível é uma superfície desenvolvível*.

3.2 Superfície normal principal

Outra superfície regradada importante é definida a seguir.

Definição 9 A superfície regradada $F_{(\gamma, \mathbf{n})}(s, u) = \gamma(s) + u\mathbf{n}(s)$ é chamada a superfície normal principal de γ .

Veremos que γ é uma curva assintótica de $F_{(\gamma, \mathbf{n})}$, ou seja, uma curva tal que a curvatura normal de $F_{(\gamma, \mathbf{n})}$ se anula na direção das retas tangentes à γ .

Temos então que mostrar que $\gamma'' \cdot \mathbf{N} = 0$.

Vamos calcular $\frac{\partial F}{\partial s}(s, u)$ e $\frac{\partial F}{\partial u}(s, u)$ para a superfície normal principal.

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial s}(s, u) &= \gamma'(s) + u\mathbf{n}'(s) = \mathbf{t}(s) + u(-\kappa(s)\mathbf{t}(s) + \tau(s)\mathbf{b}(s)) \\ &= \mathbf{t}(s) - u\kappa(s)\mathbf{t}(s) + u\tau(s)\mathbf{b}(s) = (1 - u\kappa(s))\mathbf{t}(s) + u\tau(s)\mathbf{b}(s). \end{aligned}$$

e

$$\frac{\partial F}{\partial u}(s, u) = \mathbf{n}(s).$$

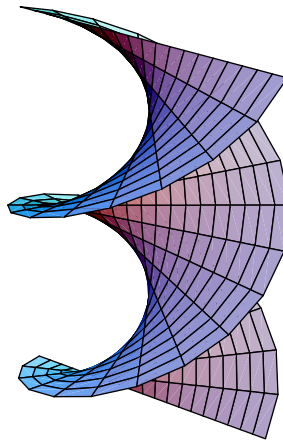


Figura 3.2: Superfície normal principal da hélice circular

Assim,

$$\frac{\partial F}{\partial s}(s, u) \times \frac{\partial F}{\partial u}(s, u) = [(1 - u\kappa(s))\mathbf{t}(s) + u\tau(s)\mathbf{b}(s)] \times \mathbf{n}(s) = -u\tau(s)\mathbf{t}(s) + (1 - u\kappa(s))\mathbf{b}(s).$$

Então

$$\gamma'' \cdot \left(\frac{\partial F}{\partial s} \times \frac{\partial F}{\partial u} \right) = \kappa \mathbf{n} \cdot ((-u\tau)\mathbf{t} + (1 - u\kappa)\mathbf{b}) = 0.$$

Logo a curvatura normal κ_n é zero na direção das tangentes de γ , o que significa que γ é uma curva assintótica da superfície normal principal.

Agora, considere a superfície normal principal $F_{(\gamma, n)}(s, u)$ de uma curva parametrizada pelo comprimento de arco $\gamma(s)$ com $\kappa(s) \neq 0$. Como vimos

$$\frac{\partial F}{\partial s} \times \frac{\partial F}{\partial u} = (1 - u\kappa(s))\mathbf{b}(s) - \tau(s)u\mathbf{t}(s).$$

Dessa forma, (s_0, u_0) é um ponto singular de $F_{(\gamma, n)}$ se, e só se, $\tau(s_0) = 0$ e $u_0 = \frac{1}{\kappa(s_0)}$.

Portanto, os pontos singulares da superfície normal principal ocorrem se $\tau(s_0) = 0$ e estão nos centros de curvatura da curva γ . No caso em que γ é uma curva de Bertrand, temos o seguinte resultado.

Proposição 12 *Seja $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva de Bertrand. A superfície normal principal $F_{(\gamma, n)}$ tem um ponto singular se, e somente se, γ é uma curva plana. Neste caso, a imagem de $F_{(\gamma, n)}$ é um plano em \mathbb{R}^3 .*

Demonstração Suponha que F tenha um ponto singular. Então, existe $s_0 \in I$ tal que $\tau(s_0) = 0$.

Pela Proposição 4 do Capítulo 1, se existe um ponto $s_0 \in I$ tal que $\tau(s_0) = 0$, então γ é uma curva plana e consequentemente $F_{(\gamma,n)}$ é um plano.

Por outro lado, se γ é uma curva plana, $\tau(s) = 0$, para todo $s \in I$. Agora, tome $u_0 = \frac{1}{\kappa(s_0)}$. Então, pelo que vimos (s_0, u_0) é um ponto singular de $F_{(\gamma,n)}$. ■

Seja $F_{(\gamma,\delta)}$ uma superfície regrada com $\|\delta(t)\| = 1$. Analisaremos a seguir a curvatura gaussiana de $F_{(\gamma,\tilde{D})}$ e a curvatura média de $F_{(\gamma,n)}$.

A curvatura gaussiana de $F_{(\gamma,\delta)}$ é dada por $K(t, u) = -\frac{(\det(\gamma'(t), \delta(t), \delta'(t)))^2}{(EG - F^2)^2}$

e a curvatura média de $F_{(\gamma,\delta)}$ é dada por

$$H(t, u) = \frac{-2(\gamma'(t) \cdot \delta(t)) \det(\gamma'(t), \delta(t), \delta'(t)) + \det(\gamma''(t) + u\delta''(t), \gamma'(t) + u\delta'(t), \delta(t))}{2(EG - F^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Aqui, $E = E(t, u) = \|\gamma'(t) + u\delta'(t)\|^2$, $F = F(t, u) = \gamma'(t) \cdot \delta(t)$, $G = G(t, u) = 1$.

Pelas equações anteriores, temos que $K(s, u) = 0$ para $F_{(\gamma,\tilde{D})}$ e

$$H(s, u) = \frac{-2(\mathbf{t}(s) \cdot \mathbf{n}(s)) \det(\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s), \mathbf{n}'(s)) + \det(\mathbf{t}'(s) + u\mathbf{n}''(s), \mathbf{t}(s) + u\mathbf{n}'(s), \mathbf{n}(s))}{2(EG - F^2)^{\frac{3}{2}}},$$

para $F_{(\gamma,n)}$.

Logo

$$H(s, u) = \frac{u(\tau'(s) + u(\kappa'(s)\tau(s) - \tau'(s)\kappa(s)))}{(EG - F^2)^{\frac{3}{2}}} \quad \text{para } F_{(\gamma,n)}. \quad (3.2)$$

Portanto, para $F_{(\gamma,n)}$, temos $H(s, u) = 0$ se, e só se, $u = 0$ ou $\tau'(s) = u(\tau'(s)\kappa(s) - \tau(s)\kappa'(s))$. Assim, a curvatura média sempre se anula ao longo de γ .

Pela expressão (3.2), $H(s, u) = 0$ se, e somente se, $u = 0$ ou $\tau' = u(\tau'\kappa - \tau\kappa')$. Se existe um ponto $s_0 \in I$ tal que $\tau'(s_0)\kappa(s_0) - \tau(s_0)\kappa'(s_0) = 0$, então $H(s_0, u_0) = 0$ para algum $u_0 \neq 0$ se, e somente se, $\tau'(s_0) = 0$. Neste caso, como $\tau(s_0) \neq 0$ (estamos considerando os pontos regulares de $F_{(\gamma,n)}$), então $\kappa'(s_0) = 0$ também. Assim, $H(s_0, u) = 0$, para todo u .

Portanto, $H(s_0, u_0) = 0$ para algum $u_0 \neq 0$ se, e somente se,

$$\tau'(s_0) = \kappa'(s_0) = 0 \text{ ou } u_0 = \frac{\tau'(s_0)}{\tau'(s_0)\kappa(s_0) - \tau(s_0)\kappa'(s_0)}.$$

Se $\tau'(s_0) \neq 0$ e $\tau'(s_0)\kappa(s_0) - \tau(s_0)\kappa'(s_0) \neq 0$, então $H(s_0, u) \neq 0$, para todo $u \neq 0$.

Dizemos que γ é o lugar mínimo de $F_{(\gamma,\delta)}$ se a curvatura média H de $F_{(\gamma,\delta)}$ se anula ao longo γ .

Motivados pela definição acima, temos a proposição que segue.

Proposição 13 *Seja γ uma curva de Bertrand e $\bar{\gamma}$ o par de Bertrand de γ . Então $\bar{\gamma}$ é o lugar mínimo da superfície normal principal de γ .*

Demonstração Pelo Corolário 2, se $\bar{\gamma}$ é um par de Bertrand de γ , então existe um número real A tal que $A(\tau'(s)\kappa(s) - \tau(s)\kappa'(s)) - \tau'(s) = 0$ e $\bar{\gamma}(s) = \gamma(s) + A\mathbf{n}(s)$.

Assim, pela expressão (3.2), $H(\bar{\gamma}(s)) = 0$.

Portanto, $\bar{\gamma}$ é o lugar mínimo da superfície normal principal de γ . ■

3.3 Algumas caracterizações de superfícies regradas

Como vimos antes, a curva γ é uma geodésica da superfície retificável desenvolvível e uma curva assintótica da superfície normal principal de γ . O resultado a seguir é conhecido como teorema de Bonnet para superfícies regradas não-cilíndricas e ocorre para superfícies regradas em geral.

Proposição 14 *Seja $F_{(\gamma,\delta)}(s,u) = \gamma(s) + u\delta(s)$ uma superfície regrada com $\|\delta(s)\| = 1$. Seja $\sigma(s) = \gamma(s) + u(s)\delta(s)$ uma curva em $F_{(\gamma,\delta)}$, onde s é o comprimento de arco de $\sigma(s)$. Considere as seguintes condições:*

- (a) $\sigma(s)$ é uma linha de estrição de $F_{(\gamma,\delta)}$;
- (b) $\sigma(s)$ é uma geodésica de $F_{(\gamma,\delta)}$;
- (c) os ângulos entre $\sigma'(s)$ e $\delta(s)$ são constantes.

Se assumimos que duas das condições anteriores valem, então a restante vale.

Demonstração Observe que as condições (a), (b) e (c) do teorema acima são equivalentes às condições (a)', (b)' e (c)' citadas a seguir:

- (a)' $\sigma'(s) \cdot \delta'(s) = 0$.
- (b)' $\sigma''(s) \cdot \delta(s) = 0$.
- (c)' $\sigma'(s) \cdot \delta(s) = \text{constante}$.

De fato, a equivalência entre (a) e (a)' acontece pela própria definição de linha de estrição.

Vejam a equivalência entre (b) e (b)'. Como $\frac{\partial F}{\partial s} \times \frac{\partial F}{\partial u} = (\mathbf{t} + u\delta') \times \delta$, temos que \mathbf{N} é perpendicular a δ . Por outro lado, σ é uma geodésica de $F_{(\gamma,\delta)} \Leftrightarrow \mathbf{n}$ é paralelo a \mathbf{N} , onde \mathbf{n} é o vetor normal de σ .

Como $\sigma'' = \kappa\mathbf{n}$, temos que σ'' é paralelo a \mathbf{N} , o que é equivalente a σ'' ser ortogonal a δ , ou seja, $\sigma'' \cdot \delta = 0$.

Assim, (b) é equivalente a (b)'.

Por fim, (c) \Leftrightarrow (c)' também acontece por definição.

Assumimos que valem (a)' e (b)'. Para mostrar que $\sigma'(s) \cdot \delta(s) = \text{constante}$, vamos mostrar que $(\sigma'(s) \cdot \delta(s))' = 0$.

$$\text{De fato, } (\sigma'(s) \cdot \delta(s))' = \sigma''(s) \cdot \delta(s) + \sigma'(s) \cdot \delta'(s) = 0 + 0 = 0.$$

Assumimos agora que valem (a)' e (c)'.

Temos que $\sigma'(s) \cdot \delta(s) = \text{constante} \Rightarrow (\sigma'(s) \cdot \delta(s))' = 0 \Rightarrow \sigma''(s) \cdot \delta(s) + \sigma'(s) \cdot \delta'(s) = 0 \Rightarrow \sigma''(s) \cdot \delta(s) + 0 = 0 \Rightarrow \sigma''(s) \cdot \delta(s) = 0$.

Por fim, assumimos que valem (b)' e (c)'. Novamente,

$$\begin{aligned} \sigma'(s) \cdot \delta(s) = \text{constante} &\Rightarrow (\sigma'(s) \cdot \delta(s))' = 0 \Rightarrow \sigma''(s) \cdot \delta(s) + \sigma'(s) \cdot \delta'(s) = 0 \\ &\Rightarrow 0 + \sigma'(s) \cdot \delta'(s) = 0 \Rightarrow \sigma'(s) \cdot \delta'(s) = 0. \end{aligned} \quad \blacksquare$$

Como consequência temos o corolário que segue.

Corolário 4 *Suponha que existam duas geodésicas disjuntas $\sigma_i(s)$ ($i = 1, 2$) em uma superfície regrada $F_{(\gamma, \delta)}(s, u) = \gamma(s) + u\delta(s)$ tal que os ângulos entre $\sigma_i'(s)$ e $\delta(s)$ são constantes. Então a superfície regrada $F_{(\gamma, \delta)}(s, u)$ é uma superfície cilíndrica e ambas $\sigma_i(s)$ são hélices generalizadas. Ainda, a direção de $\delta(s)$ é igual à direção do vetor de Darboux de $\sigma_i(s)$.*

Demonstração Pela Proposição 14, $\sigma_1(s)$ e $\sigma_2(s)$ são linhas de estrição de $F_{(\gamma, \delta)}$.

Se o ponto $F_{(\gamma, \delta)}(s, u)$ é não-cilíndrico, então $\sigma_1(s) = \sigma_2(s)$, pela unicidade da linha de estrição, o que não pode acontecer, pois por hipótese temos geodésicas disjuntas. Assim, a superfície regrada é uma superfície cilíndrica. Portanto, $\|\delta'\| = 0$, o que significa que $\delta' = 0$ e assim δ é constante.

Por hipótese os ângulos entre $\sigma_i'(s)$ e $\delta(s)$ são constantes e como $\delta(s)$ é constante, temos a definição de hélice generalizada atendida para $\sigma_1(s)$ e $\sigma_2(s)$.

Sendo δ a direção constante dada na definição de hélice generalizada, temos pelo que foi visto no capítulo 1 que δ é a direção de Darboux. \blacksquare

O corolário anterior dá uma caracterização de superfícies cilíndricas pela existência de geodésicas com propriedades especiais. Mais especificamente, *uma superfície cilíndrica é a retificável desenvolvível de uma hélice generalizada que é uma geodésica desta superfície*. Veremos agora quando uma superfície regrada é a retificável desenvolvível de uma curva.

Teorema 3 *Seja $F_{(\gamma, \delta)}(s, u) = \gamma(s) + u\delta(s)$ uma superfície regrada não-singular com $\|\delta(s)\| = 1$. Seja $\sigma(s) = \gamma(s) + u(s)\delta(s)$ uma curva em $F_{(\gamma, \delta)}$ com $\kappa(s) \neq 0$. Então as seguintes condições são equivalentes:*

(a) $F_{(\gamma, \delta)}$ é a retificável desenvolvível de $\sigma(s)$;

(b) $\sigma(s)$ é uma geodésica de $F_{(\gamma, \delta)}$ que é transversal às geratrizes e $F_{(\gamma, \delta)}$ é uma superfície desenvolvível;

(c) $\sigma(s)$ é uma geodésica de $F_{(\gamma,\delta)}$ que é transversal às geratrizes e a curvatura gaussiana de $F_{(\gamma,\delta)}$ se anula ao longo de $\sigma(s)$.

Demonstração

(a) \Rightarrow (b) Por hipótese $F_{(\gamma,\delta)}$ é a retificável desenvolvível de $\sigma(s)$, assim

$$F_{(\gamma,\delta)}(s,u) = F_{(\sigma,\tilde{D})}(s,u) = \sigma(s) + u\tilde{\mathbf{D}}(s) = \sigma(s) + u\left(\left(\frac{\tau}{\kappa}\right)(s)\mathbf{t}(s) + \mathbf{b}(s)\right),$$

aqui $\mathbf{t}(s) = \sigma'(s)$.

Vamos supor $\sigma(s)$ uma curva parametrizada pelo comprimento de arco. Então,

$$\frac{\partial F}{\partial s} = \sigma'(s) + u\tilde{\mathbf{D}}'(s) = \sigma'(s) + u\left(\frac{\tau}{\kappa}\right)'(s)\mathbf{t}(s) = \mathbf{t}(s)\left(1 + u\left(\frac{\tau}{\kappa}\right)'(s)\right)$$

$$\frac{\partial F}{\partial u} = \tilde{\mathbf{D}}(s) = \left(\frac{\tau}{\kappa}\right)(s)\mathbf{t}(s) + \mathbf{b}(s).$$

$$\frac{\partial F}{\partial s} \times \frac{\partial F}{\partial u} = \mathbf{t}(s)\left(1 + u\left(\frac{\tau}{\kappa}\right)'(s)\right) \times \left(\left(\frac{\tau}{\kappa}\right)(s)\mathbf{t}(s) + \mathbf{b}(s)\right) = -\mathbf{n}(s)\left(1 + u\left(\frac{\tau}{\kappa}\right)'(s)\right).$$

Assim, o vetor normal da superfície $\mathbf{N}(s)$ é paralelo a $\mathbf{n}(s)$ o que significa que $\sigma(s)$ é uma geodésica de $F_{(\gamma,\delta)}$.

Agora, para mostrar que $\sigma(s)$ é transversal às geratrizes de $F_{(\gamma,\delta)}$, basta mostrar que $\{\mathbf{t}, \tilde{\mathbf{D}}\}$ é linearmente independente.

Temos $\sigma'(s) = \mathbf{t}(s)$. Assim, $\mathbf{t}(s) \times \tilde{\mathbf{D}}(s) = \mathbf{t}(s) \times \left(\left(\frac{\tau}{\kappa}\right)(s)\mathbf{t}(s) + \mathbf{b}(s)\right) = -\mathbf{n}(s)$.

Então, $\mathbf{t}(s) \times \tilde{\mathbf{D}}(s) \neq 0 \Rightarrow \sigma(s)$ é transversal às geratrizes.

Por fim, vamos mostrar que $F_{(\gamma,\delta)}$ é desenvolvível. Para isso, devemos mostrar que $K = 0$, ou seja, $K(s,u) = -\frac{(\det(\sigma'(s), \tilde{\mathbf{D}}(s), \tilde{\mathbf{D}}'(s)))^2}{(EG - F^2)^2} = 0$.

Observe que

$$K(s,u) = -\frac{(\det(\sigma'(s), \tilde{\mathbf{D}}(s), \tilde{\mathbf{D}}'(s)))^2}{(EG - F^2)^2} = 0 \Leftrightarrow \det(\sigma'(s), \tilde{\mathbf{D}}(s), \tilde{\mathbf{D}}'(s)) = 0.$$

Temos que $\det(\sigma'(s), \tilde{\mathbf{D}}(s), \tilde{\mathbf{D}}'(s)) = \det(\mathbf{t}(s), \left(\frac{\tau}{\kappa}\right)(s)\mathbf{t}(s) + \mathbf{b}(s), \left(\frac{\tau}{\kappa}\right)'(s)\mathbf{t}(s)) = 0$.

Assim, $K = 0$ e, portanto, $F_{(\gamma,\delta)}$ é uma superfície desenvolvível.

(b) \Rightarrow (c) Por hipótese, $F_{(\gamma,\delta)}$ é uma superfície desenvolvível, assim a curvatura gaussiana de $F_{(\gamma,\delta)}$ se anula ao longo de $\sigma(s)$.

(c) \Rightarrow (a) Como por hipótese $\sigma(s)$ é transversal às geratrizes, podemos tomar $\sigma(s)$ como a curva base, isto é, $\sigma = \gamma$.

Como $\gamma(s)$ é geodésica de $F_{(\gamma,\delta)}$, o vetor normal \mathbf{n} de $\gamma(s)$ é paralelo ao vetor normal \mathbf{N} de $F_{(\gamma,\delta)}$.

Logo, o plano tangente de $F_{(\gamma,\delta)}$, coincide com o plano retificante de γ em $\gamma(s)$.

Além disso, como δ é ortogonal a \mathbf{N} (pois $\mathbf{N} = (\gamma' + u\delta') \times \delta$), segue que δ está no plano retificante.

Então $\delta(s) = \lambda(s)\mathbf{t}(s) + \mu(s)\mathbf{b}(s)$, onde $\mathbf{t}(s) = \gamma'(s)$ e $\mathbf{b}(s)$ é o vetor binormal de γ .

Temos que mostrar que $\delta = m\tilde{\mathbf{D}}$.

Derivando a expressão de δ , temos

$$\begin{aligned}\delta'(s) &= \lambda'(s)\mathbf{t}(s) + \lambda(s)\mathbf{t}'(s) + \mu'(s)\mathbf{b}(s) + \mu(s)\mathbf{b}'(s) \\ &= \lambda'(s)\mathbf{t}(s) + \mu'(s)\mathbf{b}(s) + (\lambda(s)\kappa(s) - \mu(s)\tau(s))\mathbf{n}(s).\end{aligned}$$

Então

$$\det(\gamma'(s), \delta(s), \delta'(s)) = \det(\mathbf{t}(s), \lambda(s)\mathbf{t}(s) + \mu(s)\mathbf{b}(s), \lambda'(s)\mathbf{t}(s) + \mu'(s)\mathbf{b}(s) + (\lambda(s)\kappa(s) - \mu(s)\tau(s))\mathbf{n}(s)) = -\mu(s)(\lambda(s)\kappa(s) - \mu(s)\tau(s)).$$

Como $K(s, u) = 0 \Leftrightarrow \det(\gamma'(s), \delta(s), \delta'(s)) = 0$, temos que

$$-\mu(s)(\lambda(s)\kappa(s) - \mu(s)\tau(s)) = \mu(s)(\mu(s)\tau(s) - \lambda(s)\kappa(s)) = 0,$$

o que significa que $\mu(s) = 0$ ou $\mu(s)\tau(s) - \lambda(s)\kappa(s) = 0$.

Se existir um ponto s_0 tal que $\mu(s_0) = 0$, então $\delta(s_0) = \lambda(s_0)\mathbf{t}(s_0)$, o que é absurdo, já que F é transversal às geratrizes.

Assim, $\mu(s)\tau(s) - \lambda(s)\kappa(s) = 0$, ou seja, $\mu(s)\tau(s) = \lambda(s)\kappa(s)$.

Logo

$$\begin{aligned}\delta(s) &= \lambda(s)\mathbf{t}(s) + \mu(s)\mathbf{b}(s) \\ &= \lambda(s)\mathbf{t}(s) + \frac{\lambda(s)\kappa(s)}{\tau(s)}\mathbf{b}(s) \\ &= \lambda(s)\left(\mathbf{t}(s) + \left(\frac{\kappa}{\tau}\right)(s)\mathbf{b}(s)\right) = \lambda(s)\tilde{\mathbf{D}}.\end{aligned}$$

Portanto, $F_{(\gamma, \delta)}$ é a superfície retificável desenvolvível de $\sigma(s)$. ■

Como consequência, temos a seguinte caracterização de superfícies cilíndricas.

Corolário 5 *Suponha que $F_{(\gamma, \delta)}$ é uma superfície desenvolvível não-singular. Se existe uma hélice generalizada com curvatura não-nula em $F_{(\gamma, \delta)}$ que é uma geodésica de $F_{(\gamma, \delta)}$, então $F_{(\gamma, \delta)}$ é uma superfície cilíndrica.*

Demonstração Como $\sigma(s)$ é geodésica de $F_{(\gamma, \delta)}$, que é transversal às geratrizes (F é não-singular) e $F_{(\gamma, \delta)}$ é desenvolvível, segue do Teorema 3 que $F_{(\gamma, \delta)}$ é a retificável desenvolvível de $\sigma(s)$. Como γ é uma hélice generalizada, segue da Proposição 11 que $F_{(\gamma, \delta)}$ é uma superfície cilíndrica. ■

Aqui temos outra caracterização de superfícies cilíndricas.

Corolário 6 *Seja $F_{(\gamma,\delta)}(s,u) = \gamma(s) + u\delta(s)$ uma superfície regradada não-singular. Se existe uma geodésica planar de $F_{(\gamma,\delta)}$ com curvatura não-nula que é perpendicular às geratrizes em qualquer ponto, então $F_{(\gamma,\delta)}$ é uma superfície cilíndrica.*

Demonstração Pelas fórmulas de Frenet-Serret, uma geodésica planar é uma linha de curvatura.

De fato, temos que o vetor normal da superfície é paralelo ao vetor normal da curva.

$$\mathbf{n}'(s) = -\kappa(s)\mathbf{t}(s) + \tau(s)\mathbf{b}(s) \text{ e do fato que } \tau(s) \equiv 0, \text{ temos que } \mathbf{n}'(s) = -\kappa(s)\mathbf{t}(s).$$

Logo, $\mathbf{N}'(s) = -\kappa(s)\boldsymbol{\sigma}'(s)$, ou seja, $\boldsymbol{\sigma}(s)$ é linha de curvatura.

Como $\boldsymbol{\sigma}$ é linha de curvatura, $\boldsymbol{\sigma}'$ é direção principal. Da hipótese da geodésica ser perpendicular às geratrizes, segue que em cada ponto a geratriz é uma direção principal.

Então, $dN_p(\boldsymbol{\sigma}') = \kappa_1 \boldsymbol{\sigma}'$ e $dN_p(\boldsymbol{\delta}) = \kappa_2 \boldsymbol{\delta}$. Como a seção transversal de F na direção de $\boldsymbol{\delta}$ é uma reta, segue que $\kappa_2 = 0$. Logo, $K = \kappa_1 \kappa_2 = 0$. Isto significa que $F_{(\gamma,\delta)}$ é uma superfície desenvolvível.

Desde que qualquer curva plana é uma hélice generalizada, pois a torção é nula e dessa forma $\frac{\tau}{\kappa} \equiv 0$, segue do Corolário 5 que F é uma superfície cilíndrica. ■

Vamos agora considerar curvas assintóticas sobre superfícies regradadas. Para isto, precisaremos do seguinte lema.

Lema 1 *Seja $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ a base canônica do plano euclidiano \mathbb{R}^2 . Sejam $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ vetores unitários em \mathbb{R}^2 . Assuma que $\lambda > 0$ e α escolhido tal que $\mathbf{v}_1 = \lambda(\mathbf{e}_1 + \alpha\mathbf{e}_2)$. Então $\mathbf{v}_2 = \lambda(\mathbf{e}_1 - \alpha\mathbf{e}_2)$ se, e só se, $\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{e}_1 = \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{e}_1$ e $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = \frac{1 - \alpha^2}{1 + \alpha^2}$.*

Demonstração Assuma $\mathbf{v}_2 = \lambda(\mathbf{e}_1 - \alpha\mathbf{e}_2)$.

$$\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{e}_1 = \lambda(\mathbf{e}_1 - \alpha\mathbf{e}_2) \cdot \mathbf{e}_1 = \lambda.$$

$$\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{e}_1 = \lambda(\mathbf{e}_1 + \alpha\mathbf{e}_2) \cdot \mathbf{e}_1 = \lambda.$$

$$\text{Assim, } \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{e}_1 = \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{e}_1.$$

$$\text{Agora, } \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = \lambda(\mathbf{e}_1 + \alpha\mathbf{e}_2) \cdot \lambda(\mathbf{e}_1 - \alpha\mathbf{e}_2) = \lambda^2(1 - \alpha^2).$$

$$\text{Observe que } \mathbf{v}_1 = \lambda(\mathbf{e}_1 + \alpha\mathbf{e}_2) \Rightarrow \|\mathbf{v}_1\|^2 = \|\lambda\|^2 \|(\mathbf{e}_1 + \alpha\mathbf{e}_2)\|^2 \Rightarrow \lambda^2 = \frac{1}{1 + \alpha^2}.$$

$$\text{Então, } \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = \frac{1 - \alpha^2}{1 + \alpha^2}.$$

$$\text{Para a recíproca, considere } \mathbf{v}_1 = (x_1, y_1) \text{ e } \mathbf{v}_2 = (x_2, y_2).$$

$$\text{Como } \mathbf{v}_1 = \lambda(\mathbf{e}_1 + \alpha\mathbf{e}_2), \text{ temos } (x_1, y_1) = \lambda((1, 0) + \alpha(0, 1)) \Rightarrow x_1 = \lambda \text{ e } y_1 = \lambda\alpha.$$

$$\text{De } \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{e}_1 = \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{e}_1, \text{ temos}$$

$$(x_2, y_2) \cdot (1, 0) = (x_1, y_1) \cdot (1, 0) \Rightarrow x_2 = \lambda.$$

$$\text{E de } \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = \frac{1 - \alpha^2}{1 + \alpha^2}, \text{ temos } (x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = \frac{1 - \alpha^2}{1 + \alpha^2} \Rightarrow y_2 = -\lambda \alpha.$$

$$\text{Dessa forma, } \mathbf{v}_2 = (\lambda, -\lambda \alpha) = \lambda(\mathbf{e}_1 - \alpha \mathbf{e}_2). \quad \blacksquare$$

Consideraremos a partir de agora uma superfície regrada $F_{(\gamma, \delta)}(s, u) = \gamma(s) + u\delta(s)$ não-singular em $\gamma(s)$. Se a curvatura gaussiana é negativa ao longo de $\gamma(s)$, então há duas direções principais diferentes $\mathbf{e}_1(s)$, $\mathbf{e}_2(s)$ ao longo de $\gamma(s)$ com curvaturas principais $k_1(s)$, $k_2(s)$, respectivamente. Podemos assumir $\|\mathbf{e}_i(s)\| = 1$.

Temos a seguinte proposição.

Proposição 15 *Sob a situação descrita, temos que $\gamma(s)$ é uma curva assintótica se, e só se, $\gamma'(s) \cdot \mathbf{e}_1(s) = \delta(s) \cdot \mathbf{e}_1(s)$ e $\gamma'(s) \cdot \delta(s) = \frac{k_1(s) + k_2(s)}{k_2(s) - k_1(s)}$.*

Demonstração Como $K < 0$, κ_1 e κ_2 têm sinais opostos, considere então dois vetores tangentes a

$$F_{(\gamma, \delta)} \text{ em } \gamma(s) \text{ dados por } \mathbf{v}_1 = \mathbf{e}_1(s) + \sqrt{-\frac{k_1(s)}{k_2(s)}} \mathbf{e}_2(s) \text{ e } \mathbf{v}_2 = \mathbf{e}_1(s) - \sqrt{-\frac{k_1(s)}{k_2(s)}} \mathbf{e}_2(s).$$

Seja \mathbf{N} o vetor unitário normal de $F_{(\gamma, \delta)}$ em $\gamma(s)$.

Assim, $-dN(\mathbf{e}_1) = k_1 \mathbf{e}_1$ e $-dN(\mathbf{e}_2) = k_2 \mathbf{e}_2$. Temos

$$-dN(\mathbf{v}_1) \cdot \mathbf{v}_1 = -dN(\mathbf{e}_1(s) + \sqrt{-\frac{k_1(s)}{k_2(s)}} \mathbf{e}_2(s)) \cdot (\mathbf{e}_1(s) + \sqrt{-\frac{k_1(s)}{k_2(s)}} \mathbf{e}_2(s)) = 0.$$

$$-dN(\mathbf{v}_2) \cdot \mathbf{v}_2 = -dN(\mathbf{e}_1(s) - \sqrt{-\frac{k_1(s)}{k_2(s)}} \mathbf{e}_2(s)) \cdot (\mathbf{e}_1(s) - \sqrt{-\frac{k_1(s)}{k_2(s)}} \mathbf{e}_2(s)) = 0.$$

Assim, \mathbf{v}_1 e \mathbf{v}_2 fornecem direções assintóticas em $\gamma(s)$, já que a curvatura normal é zero.

Como por hipótese a curvatura gaussiana é negativa em $\gamma(s)$, temos que F possui exatamente duas direções assintóticas, conforme [2].

Assim, como $\delta(s)$ dá uma direção assintótica, podemos assumir que

$$\delta(s) = \lambda(s) \left(\mathbf{e}_1(s) + \sqrt{-\frac{k_1(s)}{k_2(s)}} \mathbf{e}_2(s) \right) \text{ em que } \lambda(s) = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{k_1(s)}{k_2(s)}}}.$$

$$\text{Se } \alpha = \sqrt{-\frac{k_1(s)}{k_2(s)}}, \text{ então } \frac{1 - \alpha^2}{1 + \alpha^2} = \frac{k_2 + k_1}{k_2 - k_1}.$$

Por hipótese, γ é curva assintótica, assim γ' dá uma direção assintótica e então podemos escrever $\gamma'(s) = \lambda(s)(\mathbf{e}_1(s) - \alpha(s)\mathbf{e}_2(s))$.

Utilizando o lema anterior, temos que $\gamma(s)$ é uma curva assintótica se, e só se, $\gamma'(s) \cdot \mathbf{e}_1(s) = \delta(s) \cdot \mathbf{e}_1(s)$ e $\gamma'(s) \cdot \delta(s) = \frac{k_1(s) + k_2(s)}{k_2(s) - k_1(s)}$. \blacksquare

O corolário a seguir é análogo ao teorema de Bonnet sobre geodésicas em superfícies regradas.

Corolário 7 Seja $F_{(\gamma,\delta)}(s,u) = \gamma(s) + u\delta(s)$ uma superfície regradada não-singular em $\gamma(s)$. Assuma que $\gamma(s)$ é uma curva assintótica de $F_{(\gamma,\delta)}$ e denote por $k_i(s)$ com $i = 1, 2$ as duas curvaturas principais diferentes em $\gamma(s)$. Então as seguintes condições são equivalentes:

(a) o ângulo entre $\gamma'(s)$ e $\delta(s)$ é constante;

(b) $\left(\frac{k_1}{k_2}\right)(s)$ é constante.

Demonstração (a) \Rightarrow (b) Notemos que mostrar que $\left(\frac{k_1}{k_2}\right)(s)$ é constante é equivalente mostrar que $\left(\frac{k_1}{k_2}\right)'(s) = 0$, ou ainda que $k_1'(s)k_2(s) - k_1(s)k_2'(s) = 0$.

Pela Proposição 15, temos que $\gamma'(s) \cdot \delta(s) = \frac{k_1(s) + k_2(s)}{k_2(s) - k_1(s)}$. Por hipótese, $\gamma'(s) \cdot \delta(s)$ é constante; assim $(\gamma'(s) \cdot \delta(s))' = 0$.

Então $\left(\frac{k_1(s) + k_2(s)}{k_2(s) - k_1(s)}\right)' = 0 \Rightarrow k_1'(s)k_2(s) - k_1(s)k_2'(s) = 0$.

Portanto, $\left(\frac{k_1}{k_2}\right)(s)$ é constante.

(b) \Rightarrow (a) Por hipótese, $\left(\frac{k_1}{k_2}\right)(s)$ é constante $\Rightarrow \left(\frac{k_1}{k_2}\right)'(s) = 0 \Rightarrow \left(\frac{k_1(s) + k_2(s)}{k_2(s) - k_1(s)}\right)' = 0 \Rightarrow (\gamma' \cdot \delta)' = 0 \Rightarrow \gamma' \cdot \delta$ é constante. ■

Vimos anteriormente que a curvatura média da superfície normal principal se anula ao longo de γ ; além disso, vimos também que γ é uma curva assintótica de $F_{(\gamma,n)}$. Veremos a seguir que a recíproca é também verdadeira. Chamaremos de *curva assintótica mínima* uma curva assintótica cuja curvatura média se anula ao longo dela.

Teorema 4 Seja $F_{(\gamma,\delta)}(s,u) = \gamma(s) + u\delta(s)$ uma superfície regradada e $\sigma(s)$ uma curva em $F_{(\gamma,\delta)}$. Então as seguintes condições são equivalentes.

(a) $F_{(\gamma,\delta)}$ é a superfície normal principal de $\sigma(s)$.

(b) A curva $\sigma(s)$ é uma curva assintótica mínima de $F_{(\gamma,\delta)}$ que é transversal às geratrizes.

Demonstração (a) \Rightarrow (b) já foi mostrado na seção 3.2.

(b) \Rightarrow (a) Como σ é uma curva assintótica mínima, temos que a curvatura média se anula ao longo de σ . Assim, $H = \kappa_1 + \kappa_2 = 0$.

Pela Proposição 15, temos

$$\gamma' \cdot \delta = \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{\kappa_2 - \kappa_1} = 0 \Rightarrow \gamma' \cdot \delta = 0.$$

Assim, γ' e δ são ortogonais.

Da hipótese de σ ser uma curva assintótica, temos que δ é paralelo à direção normal principal de σ . Então $\delta = \mathbf{n}$, o que significa que $F_{(\gamma,\delta)}$ é a superfície normal principal de $\sigma(s)$. ■

Temos agora uma caracterização de helicóides.

Proposição 16 *Seja $F_{(\gamma,\delta)}(s,u) = \gamma(s) + u\delta(s)$ uma superfície regrada não-singular. Se existem três curvas assintóticas mínimas disjuntas em $F_{(\gamma,\delta)}$ que são transversais às geratrizes, então $F_{(\gamma,\delta)}$ é um helicóide. Neste caso, curvas assintóticas mínimas que são transversais às geratrizes são hélices circulares.*

Demonstração

Pelos cálculos feitos no capítulo 2 para encontrar a curvatura média de uma superfície regrada em geral, temos

$$H(s,u) = \frac{-2(\gamma'(s) \cdot \delta(s)) \det(\gamma'(s), \delta(s), \delta'(s)) + \det(\gamma''(s) + u(s)\delta''(s), \gamma'(s) + u(s)\delta'(s), \delta(s))}{2(EG - F^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Podemos reescrever essa expressão como segue

$$H(s,u) = \frac{u^2 \det(\delta'', \delta', \delta) + u[\det(\gamma'', \delta', \delta) + \det(\delta'', \gamma', \delta)] + \det(\gamma'', \gamma', \delta) - 2(\gamma' \cdot \delta) \det(\gamma', \delta, \delta')}{2(EG - F^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Observamos que a curvatura média é uma função quadrática de u .

Sejam $\sigma_1(s)$, $\sigma_2(s)$ e $\sigma_3(s)$ as curvas assintóticas mínimas disjuntas dadas na hipótese. Por definição, a curvatura média se anula em $\sigma_1(s)$, $\sigma_2(s)$ e $\sigma_3(s)$. Sendo assim, temos três valores que anulam uma função quadrática, o que significa que $H \equiv 0$ em $F_{(\gamma,\delta)}$. Portanto, $F_{(\gamma,\delta)}$ é uma superfície mínima.

Por um resultado clássico conhecido [4], temos que a superfície regrada mínima é um helicóide ou um plano.

Neste caso, cada curva assintótica mínima transversal às geratrizes é uma hélice circular. ■

Observação *Seja $\sigma(s) = \gamma(s) + u(s)\delta(s)$ uma curva em $F_{(\gamma,\delta)}$. Suponha que $F_{(\gamma,\delta)}$ é não-singular em $\sigma(s)$. Assim, $\sigma(s)$ é transversal às geratrizes.*

Dessa forma, $\sigma'(s) = \gamma'(s) + u(s)\delta'(s) + u'(s)\delta(s) = F_s(s, u(s)) + u'(s)F_u(s, u(s))$.

Assim, $\sigma(s)$ é uma curva assintótica se, e só se,

$$\det(\gamma''(s) + u(s)\delta''(s), \gamma'(s) + u(s)\delta'(s), \delta(s)) + 2\det(\delta'(s), \gamma'(s), \delta(s))u'(s) = 0.$$

De fato, $\sigma(s)$ é uma curva assintótica se, e somente se, $\sigma'' \cdot \mathbf{N} = 0$, onde \mathbf{N} é o vetor normal de $F_{(\gamma, \delta)}$. Temos que

$$\begin{aligned}\sigma''(s) &= \gamma''(s) + u'(s)\delta'(s) + u(s)\delta''(s) + u''(s)\delta(s) + u'(s)\delta'(s) \\ &= \gamma''(s) + u(s)\delta''(s) + 2u'(s)\delta'(s) + u''(s)\delta(s).\end{aligned}$$

Então

$$\begin{aligned}(\gamma''(s) + u(s)\delta''(s) + 2u'(s)\delta'(s) + u''(s)\delta(s)) \cdot (\gamma'(s) + u(s)\delta'(s) \times \delta(s)) &= 0 \\ \Leftrightarrow \det(\gamma''(s) + u(s)\delta''(s) + 2u'(s)\delta'(s) + u''(s)\delta(s), \gamma'(s) + u(s)\delta'(s), \delta(s)) &= 0 \\ \Leftrightarrow \det(\gamma''(s) + u(s)\delta''(s), \gamma'(s) + u(s)\delta'(s), \delta(s)) + 2\det(\delta'(s), \gamma'(s), \delta(s))u'(s) &= 0.\end{aligned}$$

Sob a afirmação que $K(s, u(s)) < 0$ e pelo visto na Proposição 8 do Capítulo 2, $\sigma(s)$ é uma curva assintótica mínima se, e só se, $u'(s) = -\delta(s) \cdot \gamma'(s)$.

Teorema 5 *Seja $F_{(\gamma, \delta)}(s, u) = \gamma(s) + u\delta(s)$ uma superfície regradada não-singular. Se existem duas curvas assintóticas mínimas disjuntas em $F_{(\gamma, \delta)}$ que são transversais às geratrizes, então estas curvas são uma curva de Bertrand e seu par.*

Demonstração

Seja $\sigma_1(s) = \gamma(s) + u_1(s)\delta(s)$ e $\sigma_2(s) = \gamma(s) + u_2(s)\delta(s)$ curvas assintóticas mínimas transversais às geratrizes.

Pelo Teorema 4, $F_{(\gamma, \delta)}$ é a superfície normal principal de $\sigma_i(s)$.

Pela observação anterior, $u_1'(s) = -\delta(s) \cdot \gamma'(s)$ e $u_2'(s) = -\delta(s) \cdot \gamma'(s)$. Assim, $(u_1 - u_2)'(s) = 0$. Portanto, existe uma constante A tal que $u_1(s) - u_2(s) = A \Rightarrow u_1(s) = u_2(s) + A$.

Então, $\sigma_1(s) - \sigma_2(s) = A\delta(s) \Rightarrow \sigma_1(s) = \sigma_2(s) + A\delta(s)$.

Seja s o parâmetro comprimento de arco de $\sigma_2(s)$. Assim, $\delta(s)$ pode ser considerado o vetor normal unitário de $\sigma_2(s)$. Logo, $F_{(\gamma, \delta)} = F_{(\sigma_2, n)} = \sigma_2(s) + v\mathbf{n}(s)$.

Vamos encontrar a expressão da curvatura média $F_{(\sigma_2, n)}$.

$$H_{(\sigma_2, \delta)} = \frac{-2(\sigma_2' \cdot \delta) \det(\sigma_2', \delta, \delta') + \det(\sigma_2'' + u\delta'', \sigma_2' + u\delta', \delta)}{2(EG - F^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Portanto, usando as equações de Frenet

$$H_{(\sigma_2, \delta)} = \frac{v\tau' + v^2\kappa'\tau - v^2\tau'\kappa}{2(EG - F^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Como σ_2 é assintótica mínima, a curvatura média de F se anula ao longo de σ_2 .

Logo, $0 = v\tau' + v^2\kappa'\tau - v^2\tau'\kappa$, ou seja, $v(\tau'\kappa - \kappa'\tau) - \tau' = 0$.

Assim, usando o corolário 3, temos que σ_2 é uma curva de Bertrand com σ_1 seu par.

■

CONCLUSÃO

Neste trabalho estudamos hélices generalizadas e curvas de Bertrand.

No **Capítulo 1** encontramos as definições de hélice generalizada, curvas de Bertrand e vetor de Darboux, importantes para o desenvolvimento das seções subsequentes. Destacamos os resultados obtidos nos Teoremas 1 e 2 que estabelecem, respectivamente, que toda hélice generalizada pode ser construída a partir de uma curva plana e que toda curva de Bertrand pode ser obtida de uma curva esférica.

Dedicamos o **Capítulo 2** ao estudo da teoria clássica das superfícies regradas.

No **Capítulo 3** reunimos a teoria estudada nos capítulos anteriores em resultados que relacionam duas superfícies regradas em particular, a superfície retificável desenvolvível e a superfície normal principal, com as hélices generalizadas e as curvas de Bertrand, respectivamente.

As principais contribuições deste trabalho são dadas pela Proposição 2, em que demos uma demonstração alternativa e na obtenção da evoluta esférica de uma curva na esfera como envelope de uma família de grandes círculos normais à curva.

Para trabalhos futuros, destaca-se a possibilidade de abordar as propriedades genéricas destas curvas como aplicação da teoria das singularidades a curvas planas e esféricas.

REFERÊNCIAS

- [1] BRUCE, J. W. and GIBLIN, P.J. **Curves and singularities**. 2.ed. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1992.
- [2] CARMO, M. P. **Geometria diferencial de curvas e superfícies**. 2.ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2005.
- [3] GRAY, A. **Modern differential geometry of curves and surfaces**. Florida: CRC Press, 1993.
- [4] HERRERA, A. G. et al. Algunas aplicaciones de las curvas de Bertrand. **Matemáticas: Enseñanza Universitaria**, v.XVI, p. 11-22, 2008.
- [5] IZUMIYA, S. et al. Generic properties of helices and Bertrand curves. **Journal of Geometry**, Basel, v.74, p. 97-109, 2002.
- [6] IZUMIYA, S. et al. The rectifying developable and the spherical Darboux image of a space curve. **Geometry and topology of caustics**, v.50, p. 137-149, 1999.
- [7] IZUMIYA, S. et al. Special curves and ruled surfaces. **Contributions to Algebra and Geometry**, v.44, p. 203-212, 2003.
- [8] KREYSZIG, E. **Differential Geometry**. New York: Dover Publications, Inc., 1991.
- [9] MACHADO, P. A. P. **Pontos helicoidais e vértices de Darboux de curvas no espaço euclidiano**. 2010. 104 f. Dissertação (Mestrado em Matemática)-Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria, 2010.
- [10] MARTINS, R. **Singularidades das superfícies regradas em \mathbb{R}^3** . 2004. 60 f. Dissertação (Mestrado em Matemática)-Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação da Universidade de São Paulo, São Carlos, 2004.
- [11] ROMERO-FUSTER, M. C. and SANABRIA-CODESAL, E. Generalized helices, twistings and flattenings of curves in n-space. **Matemática Contemporânea**, v.17, p.267-280, 1999.

- [12] TURGUT, M. et al. Some characterizations of special curves in the Euclidean space E^4 . **Acta Univ. Sapientiae**, v.2, p. 111-122, 2010.
- [13] TENENBLAT, K. **Introdução à geometria diferencial**. 2.ed. São Paulo: E. Blucher, 2008.