

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA MARIA  
CENTRO DE CIÊNCIAS NATURAIS E EXATAS  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA**

**SOLUÇÃO DE PROBLEMAS EM SEMIESPAÇO  
NA DINÂMICA DE GASES RAREFEITOS  
BASEADA EM MODELOS CINÉTICOS**

**DISSERTAÇÃO DE MESTRADO**

**Solange Regina Cromianski**

**Santa Maria, RS, Brasil**

**2012**

**SOLUÇÃO DE PROBLEMAS EM SEMIESPAÇO NA  
DINÂMICA DE GASES RAREFEITOS BASEADA EM  
MODELOS CINÉTICOS**

**Solange Regina Cromianski**

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado do Programa de Pós-Graduação em Matemática, Área de Ciências Naturais e Exatas, da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM, RS), como requisito parcial para obtenção do grau de **Mestre em Matemática.**

**Orientador: Prof. Dr. Rosenei Felipe Knackfuss**

**Santa Maria, RS, Brasil**

**2012**

**Universidade Federal de Santa Maria  
Centro de Ciências Naturais e Exatas  
Programa de Pós-Graduação em Matemática**

A Comissão Examinadora, abaixo assinada,  
aprova a Dissertação de Mestrado

**SOLUÇÃO DE PROBLEMAS EM SEMIESPAÇO NA  
DINÂMICA DE GASES RAREFEITOS BASEADA EM  
MODELOS CINÉTICOS**

elaborada por  
**Solange Regina Cromianski**

como requisito parcial para obtenção do grau de  
**Mestre em Matemática**

**COMISSÃO EXAMINADORA:**

**Rosenei Felipe Knackfuss, Prof. Dr.**  
(Orientador)

**Daniela Buske, Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>.** (UFPel)

**José Vanderlei Prestes Oliveira, Prof. Dr.** (UFSM)

Santa Maria, 28 de fevereiro de 2012.

# DEDICATÓRIA

*“ À minha família que sempre me apoiaram e estiveram do meu lado.”*

# EPÍGRAFE

*"Se os fatos não se encaixam na teoria, modifique os fatos."*

(Albert Einstein)

# AGRADECIMENTOS

Primeiramente agradeço a Deus, por estar em minha vida me iluminando e guiando meus passos, permitindo concluir mais essa etapa da minha vida.

Agradeço à minha família pelo amor, incentivo e apoio durante a minha vida acadêmica, pois sem ela não chegaria a lugar algum. Agradeço em especial aos meus amigos Elis e Ivan por estarem sempre do meu lado me ajudando no que for preciso.

Ao meu professor orientador Rosenei Felipe Knackfuss, pelo seu empenho, dedicação e paciência que demonstrou durante esses dois anos de convivência, e aos demais professores pelas aulas ministradas no decorrer do curso.

Agradeço aos meus colegas de mestrado por estarem ao meu lado me incentivando e me ajudando, em especial à minha colega Marcia.

Agradeço o auxílio financeiro concedido pela CAPES e as pessoas que de alguma forma contribuíram para o meu sucesso.

# RESUMO

Dissertação de Mestrado  
Programa de Pós-Graduação em Matemática  
Universidade Federal de Santa Maria

## **SOLUÇÃO DE PROBLEMAS EM SEMIESPAÇO NA DINÂMICA DE GASES RAREFEITOS BASEADA EM MODELOS CINÉTICOS**

AUTORA: SOLANGE REGINA CROMIANSKI

ORIENTADOR: ROSENEI FELIPPE KNACKFUSS

Data e Local da Defesa: Santa Maria, 28 de fevereiro de 2012.

O método de ordenadas discretas é utilizado na solução de alguns problemas envolvendo a dinâmica de gases rarefeitos. Neste trabalho, uma versão analítica do método de ordenadas discretas (ADO) é usada para resolver problemas em meio semiinfinito. O desenvolvimento analítico completo, em coordenadas cartesianas, da solução dos problemas Deslizamento Térmico e Deslizamento Viscoso é apresentada, para quatro modelos cinéticos: modelo BGK, modelo S, modelo Gross Jackson e modelo MRS em uma abordagem unificada. Além disso, para descrever o processo de interação entre o gás e a parede utiliza-se o núcleo de Cercignani-Lampis definido em termos do coeficiente de acomodação do momento tangencial e do coeficiente de acomodação da energia cinética correspondendo a velocidade normal. Resultados numéricos são apresentados, onde obtém-se grandezas de interesse, tais como: perfil de velocidade e perfil de fluxo de calor, os quais foram implementados computacionalmente através do programa FORTRAN.

**Palavras-chave:** Dinâmica de Gases Rarefeitos. Núcleo de Cercignani-Lampis. Método de Ordenadas Discretas. Modelos Cinéticos.

# ABSTRACT

Dissertation  
Graduate Program in Mathematics  
Universidade Federal de Santa Maria

## **SOLUTION OF PROBLEMS IN HALF SPACE IN THE RAREFIED GAS DYNAMICS BASED KINETIC MODELS**

AUTHOR: SOLANGE REGINA CROMIANSKI

ADVISOR: ROSENEI FELIPPE KNACKFUSS

Date and Location of Defense: Santa Maria, February 28, 2012.

The method discrete ordinates is used to solve problems involving rarefied gas dynamics. In this work, a version of the analytical method discrete ordinates (ADO) is used to solve problems in a semi-infinite. The complete analytical development, in cartesian coordinates, the solution of the Thermal-Slip and Viscous-Slip problems is presented, for four kinetic models: BGK model, S model, Gross Jackson model and MRS model in a unified approach. In addition, to describe the interaction between gas and surface, we use the Cercignani-Lampis boundary condition defined in terms of the coefficients of accommodation of tangential momentum and energy accommodation coefficient kinetic corresponding the velocity normal. Numerical results are presented, where we obtain quantities of interest, such as: velocity profile and heat flow profile, which were implemented computationally through the FORTRAN program.

**Keywords:** Rarefied Gas Dynamics. Cercignani-Lampis Kernel. Discrete Ordinates Method. Kinetic Models.



# LISTA DE SÍMBOLOS

$A_s$	Coeficiente de Deslizamento Térmico
$A_k$	Coeficiente de Deslizamento Viscoso
$a$	Comprimento característico
$\mathbf{c}$ e $\mathbf{v}$	Vetores velocidade
$f_n(\mathbf{c}', \mathbf{c})$	Componente do núcleo sintético de espalhamento
$f(\mathbf{r}, \mathbf{v})$	Função distribuição de partículas
$f_0(\mathbf{r}, \mathbf{v})$	Maxwelliana local
$\mathbf{F}(c', c)$	Núcleo sintético de espalhamento
$h(\mathbf{r}, \mathbf{v})$	Perturbação causada à distribuição Maxwelliana
$I_0(w)$	Função de Bessel modificada
$J(f', f)$	Operador de colisões
$K_n$	Número de Knudsen
$\mathbf{K}(c', c)$	Núcleo exato de espalhamento
$k$	Constante de Boltzmann
$K_i$	Gradiente de temperatura na direção $i$
$K$	Gradiente de velocidade
$l$	Livre Caminho Médio
$\mathcal{L}$	Operador de colisão linearizado da equação linearizada de Boltzmann
$m$	Massa molecular de partícula gasosa
$n(t, r)$	Densidade
$n_0$	Densidade de equilíbrio

$n(t, r)$	Densidade
$P_n$	Polinômio de Legendre
$P_n^m$	Função normalizada de Legendre
$P_{xz}$	Componente do tensor pressão
$p$	Pressão
$Pr$	Número de Prandtl
$q(\tau)$	Perfil de fluxo de calor
$r = (x, y, z)$	Vetor de coordenadas espaciais
$R_i$	Gradiente de Temperatura na direção $i$
$R_{CL}$	Núcleo de espalhamento de Cercignani-Lampis
$S(c)$	Termo de fonte
$t$	Tempo
$T(r, v)$	Temperatura
$T_0$	Temperatura constante
$T_w$	Temperatura da superfície
$u(\tau)$	Perfil de velocidade
$w_k$	Pesos da quadratura
$\alpha_t$	Coefficiente de acomodação tangencial
$\alpha_n$	Coefficiente de energia cinética
$\mu$	Viscosidade
$\delta$	Rarefação do gás
$\delta^*$	Função de Dirac
$\delta_{n,n'}$	Delta de Kronecker
$\eta(c)$	Frequência de colisão das partículas
$\lambda_*$	Condutividade térmica
$\mu_*$	Viscosidade
$\psi$	Função característica
$\sigma_0$	Diâmetro de colisão das partículas gasosas
$\xi_k$	Pontos de quadratura
$\tau$	Variável espacial adimensional

# ABREVIACÕES

ADO	Versão Analítica do Método de Ordenadas Discretas
BGK	Modelo de Bhatnagar-Gross-Krook
DGR	Dinâmica de Gases Rarefeitos
ELB	Equação Linearizada de Boltzmann
GJ	Modelo de Gross-Jackson
MEMS	Sistemas Microeletromecânicos
MST	Microsistemas Tecnológicos

# SUMÁRIO

<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>7</b>
<b>1 CONCEITOS DA DINÂMICA DE GASES RAREFEITOS</b>	<b>13</b>
1.1 Número de Knudsen . . . . .	13
1.2 Função Distribuição . . . . .	14
1.3 A Equação de Transporte de Boltzmann . . . . .	15
1.3.1 Equação Linearizada de Boltzmann . . . . .	16
1.4 Livre Caminho Médio . . . . .	18
1.5 Interação Gás-Superfície . . . . .	20
<b>2 MODELOS CINÉTICOS</b>	<b>24</b>
2.1 Núcleos Sintéticos . . . . .	24
2.2 Os Modelos BGK, S, Gross-Jackson e MRS . . . . .	25
<b>3 FORMULAÇÃO MATEMÁTICA</b>	<b>30</b>
3.1 Definição do Problema . . . . .	30
3.2 Formulação Vetorial do Problema . . . . .	31
3.3 Problemas Clássicos . . . . .	33
3.3.1 Problema de Deslizamento Térmico . . . . .	33
3.3.2 Problema de Deslizamento Viscoso . . . . .	34
<b>4 GRANDEZAS FÍSICAS</b>	<b>35</b>
4.1 Problema de Deslizamento Térmico . . . . .	35
4.2 Problema de Deslizamento Viscoso . . . . .	36

<b>5</b>	<b>SOLUÇÃO EM ORDENADAS DISCRETAS</b>	<b>37</b>
5.1	Solução Particular . . . . .	38
5.2	Solução em Ordenadas Discretas . . . . .	39
<b>6</b>	<b>SOLUÇÃO ATRAVÉS DAS CONDIÇÕES DE CONTORNO</b>	<b>44</b>
6.1	Núcleo de Cercignani-Lampis . . . . .	45
6.2	Quantidades de Interesse . . . . .	45
<b>7</b>	<b>RESULTADOS NUMÉRICOS</b>	<b>48</b>
7.1	Deslizamento Térmico . . . . .	49
7.2	Deslizamento Viscoso . . . . .	56
	<b>CONCLUSÃO</b>	<b>63</b>
	<b>REFERÊNCIAS</b>	<b>65</b>

# INTRODUÇÃO

O estudo da Dinâmica de Gases Rarefeitos (DGR), pode ser feito através da Teoria Cinética dos Gases, neste sentido, destaca-se os trabalhos de Ferziger e Kaper (1972), Hirschfelder et al. (1972), Cercignani (1988), Bird (1994), Sharipov e Seleznev (1998), Sharipov (2008b). Esta teoria descreve o gás como uma quantidade muito grande de pequenas partículas, onde essas partículas estão em constante movimento e como consequência colidem umas com as outras e com a parede que envolve essas partículas.

Nos últimos anos, houve um aumento de interesse por pesquisadores em fenômenos referentes à Dinâmica de Gases Rarefeitos (DGR), pois esta possui aplicações em diversas áreas, dentre elas, o fluxo do gás em microcanais. Esse aumento de interesse, ocorre devido as indústrias almejarem desenvolver e miniaturizar os mais diversos dispositivos. O processo de fabricar dispositivos em escalas cada vez menores pode conter vários obstáculos (Avelino e Kakaç, 2004), que resultam no desenvolvimento de novas técnicas de produção. Por exemplo, que a miniaturização de um componente eletrônico pode acarretar em problemas associados ao superaquecimento, sendo necessário usar um dispositivo de refrigeração para amenizar o calor.

Como a miniaturização de dispositivos tem envolvido um importante campo de pesquisa na década passada e vem crescendo ultimamente, é comum encontrar expressões como sistemas microeletromecânico (MEMS) e microsistemas tecnológicos (MST), estas vem sendo utilizadas para descrever o modelo e a metodologia no processo de fabricação.

Microsistemas são tecnologias que integram microeletrônica, microsensores, microatuadores e microestruturas com diversas aplicações em vários ramos do mercado, onde sistemas microeletromecânicos (MEMS) são pequenas estruturas que ajudam na execução da tarefa que um determinado aparelho realiza. Os microsistemas tecnológicos (MST) são estruturas da ordem de micrômetros onde a função técnica é dada pela forma da microestrutura.

De acordo com Rostami, Majumbar e Saniei (Rostami et al., 2002), os MEMS, MST e a mecatrônica vem sendo usados nos EUA, Europa e Japão, respectivamente, para descrever o modelo, o desenvolvimento e o processo de fabricação destes dispositivos, cuja escala é muito pequena. Assim observa-se que os países com melhor desenvolvimento tecnológico, econômico e social, possuem uma melhor competência tecnológica e empresarial em projetos como aplicações da microeletrônica. Ainda, segundo Rostami, Majumbar e Saniei (Rostami et al., 2002) os princi-

países industrializados têm reconhecido a importância do MEMS e MST e têm implementado e apoiado programas de pesquisas que envolvem esta tecnologia.

Mesmo que na década de 30 tenham surgido os primeiros resultados analíticos referente ao fluxo de um gás estável, até 1990 (Colin et al., 1998) os trabalhos científicos em microfluidos eram raros. Pode-se citar que em 1938 Kennard (Kennard, 1938) desenvolveu uma expressão simples para a taxa de fluxo de massa num longo tubo circular através de um canal de placas paralelas, logo após surgem outros trabalhos, dentre eles: Cercignani (Cercignani, 1966), Loyalka e Ferziger (Loyalka e Ferziger, 1968), Loyalka (Loyalka, 1971), Williams (Williams, 1971), Cercignani (Cercignani, 1975), Lo, Loyalka e Storvick (Lo et al., 1984), Cercignani (Cercignani, 1988), Loyalka e Hickey (Loyalka e Hickey, 1989) e Van de Pol e Branbjerg (Pol e Branbjerg, 1990).

A partir dos anos 90, houve um considerado crescimento no número de publicações, dentre elas destaca-se: Gravesen, Branbjerg e Jensen (Gravesen et al., 1993) e Shoji e Eshashi (Shoji e Eshashi, 1994), que escreveram dois artigos referentes à componentes básicos em microfluidos (microválvulas, microbombas, microsensores, etc.).

O número de empresas e institutos que trabalhavam na tecnologia dos sistemas microeletromecânicos (MEMS), era em torno de 300 em todo o mundo, e em 1995 houve um avanço no crescimento chegando a 8.000, isso é descrito por Rostami, Majumbar e Saniei (Rostami et al., 2002). Esse crescimento deve-se a união de universidades e institutos que desenvolvem atividades relacionadas a MEMS e MST (Fatikow e Rembold, 1997). De acordo com Subgrupo de Comitê das Atividades de Pesquisa e Desenvolvimento da Amazônia (CAPDA) (Subgrupo CAPDA, 2004) o mercado mundial possuía taxa de crescimento de 18% no ano de 2004 e tinha como estimativas de mercado 34 bilhões de dólares em 2006.

Os microsistemas são utilizados em diversas áreas (Rostami et al., 2002), dentre elas destacam-se: medicina, biotecnologia, aviação, telecomunicações, metrologia, tecnologia de computadores, equipamentos de escritório, eletrodomésticos, tecnologia de segurança, robótica, engenharia automotiva e aeroespacial. As aplicações dos MEMS, estão atualmente em cabeçotes injetores para impressoras jato de tinta, acelerômetros e sensores de pressão para a indústria automotiva (freios ABS, airbags, etc.), microatuadores para cabeça de leitura/escrita de HD's, microsistemas para óptica e opto-eletrônica, microcanais, microbombas, microválvulas, controle de fluxo, marcapassos do coração, sensores de pressão, entre outros. Esses exemplos de dispositivos caracterizam-se por suas dimensões, onde é relevante o efeito de superfície.

Grande parte dos microsistemas envolve fluxos de fluidos, logo quando trabalha-se com fluxos em micro ou menores escalas, não é válida a aproximação contínua, sendo assim fenômenos como viscosidade, compressibilidade e forças intermoleculares devem ser levadas em consideração (Gad-el-Hak, 2006). Esses fenômenos e mais os fenômenos de superfície possuem um papel mais relevante em fluxos de gases e líquidos em microsistemas do que em macrosistemas (Zoar et al., 2002). Considera-se, também, em microescala para o fluxo de líquidos, a eletrocinética (Hunter, 1981) e o efeito mecânico polar (Stokes, 1984), no entanto para o fluxo de gases o estado mais importante é o de rarefação.

Devido a escala do comprimento característico ser muito pequena, em simulações numéricas, tem-se fluxos que não podem ser modelados pela equação de Navier-Stokes, nos MEMS, essa escala deve ser relacionada com o livre caminho médio  $l$  das moléculas do gás. Logo, o fluxo não pode ser modelado usando as hipóteses do contínuo, portanto a equação de Boltzmann passa a ser considerada para descrever e calcular o fluxo nesses dispositivos (Cercignani, 1988; Cercignani, 1990; Cercignani, 2000).

As superfícies que envolvem um gás podem ser caracterizadas de diversas formas, dentre elas tem-se os coeficientes de acomodação, que buscam descrever as interações entre as moléculas e a parede, ou seja, gás superfície na parede. Essas interações juntamente com as leis de forças interatômicas, descrevem o perfil de velocidade, perfil fluxo de calor, desvio de temperatura e desvio de densidade. De um modo geral, tem-se que a resolução de problemas na DGR está baseada no estado de rarefação do gás (Williams, 1971), (Sharipov e Seleznev, 1998). Esse estado é classificado pelo valor do número de Knudsen ( $K_n$ ), que será definido mais adiante neste trabalho.

O valor do número de Knudsen de um determinado fluxo, determina o estado de rarefação do gás, e também pode analisar a validade das equações de Navier-Stokes para a modelagem do fluxo. Como em alguns casos, a equação de Navier-Stokes não se aplica (Williams, 1971), ou seja, o número de Knudsen assume um valor intermediário e o gás encontra-se no regime de transição, usa-se a equação de Boltzmann, que é fundamental na DGR. Pode-se encontrar em Cercignani (Cercignani, 1988; Cercignani, 1990) e em Sharipov e Seleznev (Sharipov e Seleznev, 1998), dados que são úteis para comparar métodos computacionais e formulações matemáticas na área da DGR.

A equação de Boltzmann, foi criada no século XIX por Ludwig Boltzmann fig. 1 um dos pais da mecânica estatística em seus estudos pioneiros da teoria cinética dos gases (Boltzmann, 1872). Possui grande importância em fenômenos de transporte, onde abrange teoria cinética, mecânica dos fluídos e mecânica estatística (Prolo Filho, 2007). A equação de Boltzmann foi desenvolvida para descrever estatisticamente a distribuição de partículas em um gás ideal, é utilizada no estudo de como um gás transporta determinadas quantidades físicas, como calor e massa.





Figura 1: Ludwig Boltzmann

Além de contribuir na área da física, Boltzmann também influenciou em áreas da matemática. Relata-se que em 1912, o matemático David Hilbert apontou como obter soluções aproximadas da equação de Boltzmann (Cercignani, 1998) e mais tarde David Enskog generalizou o método de Hilbert (Cercignani, 1998).

Na literatura encontra-se três formas para a equação de Boltzmann (Garcia, 2002) ou equação de transporte de partículas, são elas: forma íntegro-diferencial (Garcia, 2002), forma integral e forma integral de superfície (Sanchez e McCormick, 1982). Quando fala-se da equação do transporte íntegro-diferencial, pode-se dizer que esta fornece uma descrição qualitativa das distribuições espacial, direcional, energética e temporal das partículas em meios materiais.

A partir dos anos 60 a equação de Boltzmann ganhou relevância no seu estudo a fim de ser utilizada para resolver problemas de fluxos de gases rarefeitos. Mesmo tendo vários estudos referentes a equação de Boltzmann e utilizando métodos semi-analíticos ou puramente numéricos, a solução de problemas utilizando-a não é de fácil obtenção, isso deve-se a presença da integral de colisão.

Pelo fato da equação de Boltzmann ser uma equação não-linear e muito complexa, simplifica-se a integral de colisões através de uma função distribuição Maxwelliana local, mantendo-se as características matemáticas e físicas fundamentais da equação de Boltzmann.

Muitos estudos relacionados ao tratamento da equação de Boltzmann vem sendo realiza-

dos por pesquisadores matemáticos (Loyalka e Hickey, 1989; Sone et al., 1990; Siewert, 2003a; Siewert, 2003b), sendo que Cercignani é um dos que mais se destaca na área da teoria cinética (Cercignani, 1975; Cercignani, 1990; Cercignani et al., 1994).

Em consequência da dificuldade de trabalhar com a equação de Boltzmann, principalmente no termo integral de colisão, foram criadas as chamadas equações modelos ou equações cinéticas, que possuem o papel de simplificar o termo integral de colisão mantendo as características da equação original (Zou et al., 1995; Barichello et al., 2001; Sharipov, 2002; Siewert, 2002e; Sharipov, 2003a). Logo, tem-se que diferentes problemas podem ser modelados pelas seguintes equações modelos: modelo BGK, proposto por Bhatnagar, Gross e Krook (Bhatnagar et al., 1954), modelo S, proposto por Shakhov (Shakhov, 1974), modelo Gross-Jackson (GJ), proposto por Gross e Jackson (Gross e Jackson, 1959), modelo MRS, proposto por Garcia e Siewert (Garcia e Siewert, 2006), modelo CLF, proposto por Cercignani (Cercignani, 1966), Loyalka e Ferziger (Loyalka e Ferziger, 1968) e os modelos CES e CEBS, propostos por Barichello e Siewert (Barichello e Siewert, 2002).

Neste trabalho, serão utilizados os modelos BGK, S, Gross-Jackson e MRS. Esses modelos consideram a frequência de colisão das partículas constantes. Pode-se destacar que o modelo CLF é um caso particular do modelos CES e que esses modelos tem frequência de colisão variável. Encontra-se na literatura também o modelo McCormack (McCormack, 1973), aplicado a misturas de gases cuja frequência de colisão é variável.

De acordo com Siewert (Siewert, 2002), o estudo teórico de problemas clássicos da DGR que modelam escoamento de gases em canais planos (fluxo de Poiseuille, fluxo de Couette, Creep-Térmico,...) é muito importante no surgimento de novos modelos matemáticos e no desenvolvimento de novas técnicas computacionais.

Em relação aos métodos determinísticos, encontra-se vários na literatura, dentre eles tem-se o método de solução aproximado two-stream (Schuster, 1905; Schwarzschild, 1906), o método dos harmônicos esféricos (Jeans, 1917), método de ordenadas discretas (Wick, 1943; Chandrasekhar, 1950), método de ordenadas discretas analítico (Barichello e Siewert, 1999; Siewert, 2000a), método de velocidades discretas (Sharipov, 1999b) e o método exato de solução de Case (Case, 1960).

De acordo com Garcia (Garcia, 2002), tem-se que Wick (Wick, 1943) propôs o método de ordenadas discretas na década de 40. Esse método tem a função de aproximar o termo integral da equação de transporte íntegro-diferencial através de uma fórmula de quadratura. Em geometria plana, essa aproximação resulta em um sistema de equações diferenciais ordinárias, que pode ser resolvido analiticamente. Mais tarde, esse método foi aplicado em estudos de transferência radiativa por Chandrasekhar (Chandrasekhar, 1950).

A versão analítica do método de ordenadas discretas (ADO) foi proposta por Barichello e Siewert (Barichello e Siewert, 1999). Este método difere do original, pois usa-se um esquema de quadratura arbitrário, do tipo half-range, pela determinação das constantes de separação que são

encontradas na resolução de um problema de autovalores e por trabalhar de uma forma analítica com a variável espacial.

O método ADO, é muito útil na resolução de problemas na dinâmica de gases rarefeitos, principalmente pelo fato de possibilitar a construção de soluções unificadas para diferentes modelos, isso pode ser verificado nas seguintes Refs. (Barichello e Siewert, 1999; Barichello e Siewert, 2000; Siewert, 2000c; Siewert, 2001a; Barichello et al., 2001; Siewert e Valougeorgis, 2002; Siewert, 2002a; Siewert, 2002c).

Neste trabalho, usa-se a equação íntegro-diferencial de Boltzmann e a versão analítica do método de ordenadas discretas (ADO), onde será trabalhado de forma unificada os modelos cinéticos BGK, S, Gross-Jackson e MRS em coordenadas cartesianas, definindo-se uma formulação geral aos parâmetros  $\beta$  e  $\varpi$ , para os problemas de Deslizamento Térmico e Deslizamento Viscoso. Usa-se as condições de contorno generalizadas Cercignani-Lampis (Siewert, 2002a), que apresentam dois coeficientes de acomodação e devido a isso representam melhor as propriedades físicas (Siewert e Sharipov, 2002). Os coeficientes de acomodação são:  $\alpha_n$  que é o coeficiente de acomodação da energia cinética correspondendo a velocidade normal e  $\alpha_t$  que é o coeficiente de acomodação do momento tangencial.

Na realização deste trabalho, desenvolveu-se uma formulação analítica e computacional em coordenadas cartesianas para os problemas em semi-espço: Problemas de Deslizamento Térmico e Deslizamento Viscoso, definindo-se uma formulação geral aos parâmetros  $\beta$  e  $\varpi$ , onde inclui os modelos BGK, S, Gross-Jackson e MRS.

Portanto, a estrutura deste trabalho é apresentada da seguinte forma: no capítulo 1, apresenta-se uma modelagem da equação linearizada de Boltzmann e conceitos básicos para o desenvolvimento deste trabalho. No capítulo 2, encontra-se a formulação dos modelos cinéticos. No capítulo 3, tem-se a formulação dos problemas propostos. No capítulo 4, encontra-se as quantidades físicas de interesse usadas nesse trabalho. No capítulo 5, encontra-se as soluções particulares e a solução em ordenadas discretas. No capítulo 6, apresenta-se a solução através das condições de contorno generalizadas (Cercignani-Lampis) e as quantidades de interesse. No capítulo 7, tem-se os resultados numéricos obtidos a partir das simulações.

# Capítulo 1

## CONCEITOS DA DINÂMICA DE GASES RAREFEITOS

Neste capítulo, serão apresentados alguns conceitos importantes sobre a dinâmica de gases, que serão fundamentais para o entendimento do desenvolvimento deste trabalho.

### 1.1 Número de Knudsen

A resolução de problemas na Dinâmica de Gases Rarefeitos (DGR) depende do estado de rarefação do gás (Williams, 1971), esse estado pode ser classificado pelo valor do número de Knudsen ( $K_n$ ). O número de Knudsen é um dos parâmetros mais utilizados na DGR (Sharipov e Seleznev, 1998), o qual é definido pela razão entre o livre caminho médio molecular  $\lambda$  (distância média percorrida por uma molécula entre as colisões) e um comprimento característico  $a$  da região do escoamento do gás (por exemplo, o raio do tubo em um problema de fluxo, ou espessura da camada limite de um fluxo externo) (Chaaf e Chambre, 1961), ou seja,

$$K_n = \frac{\lambda}{a}. \quad (1.1)$$

O regime de escoamento gasoso pode ser dividido em três tipos (Sharipov e Seleznev, 1998), de acordo com os valores que o parâmetro  $K_n$  assume:

- **(i) Regime hidrodinâmico** ( $K_n \leq 10^{-2}$ ): as colisões intermoleculares são muito frequentes, o livre caminho médio  $\lambda$  torna-se muito pequeno comparado ao comprimento característico, neste caso, o gás é considerado como um meio contínuo e as equações de Navier-Stokes são aplicadas ao escoamento do gás.
- **(ii) Regime de moléculas livres** ( $K_n \geq 10$ ): o livre caminho médio  $\lambda$  é muito maior que o comprimento característico  $a$ , nesse caso, as moléculas interagem mais com a superfície

que limita o gás do que com as outras moléculas, e considera-se o movimento das moléculas independentes umas das outras.

- **(iii) Regime de transição** ( $10^{-2} < K_n < 10$ ): o número de Knudsen assume um valor intermediário, não considera-se o gás como um meio contínuo e não pode-se desprezar as colisões intermoleculares. Assim, quando o gás encontra-se no regime de transição, as equações de Navier-Stokes não podem ser utilizadas, logo o comportamento do gás só pode ser determinado a partir de uma análise detalhada da equação de Boltzmann, ou seja, é necessário considerar algumas formulações baseadas na equação de Boltzmann ou equações cinéticas (modelos).

## 1.2 Função Distribuição

A Teoria Cinética pretende determinar as propriedades macroscópicas de um gás, através do sistema formado pelas moléculas que compõem esse gás. O estado de um sistema de partículas é determinado em um instante  $t$  qualquer, desde que se conheça a posição e a velocidade de cada partícula que o compõe nesse determinado instante.

O número de partículas que compõe um gás é de ordem  $10^{25}$  por  $m^3$  nas condições normais de temperatura e pressão, o que torna inviável resolver o problema através dos métodos da Mecânica Clássica, sendo assim, o estado do sistema de partículas é descrito pela função de distribuição  $f(t, r, v)$ , onde  $t$  é o tempo,  $r = (x, y, z)$  é o vetor de coordenadas espaciais e  $v = (v_x, v_y, v_z)$  é o vetor velocidade das partículas.

Todas as características macroscópicas do fluxo de um gás podem ser calculadas através da função de distribuição  $f(t, r, v)$ . As expressões para essas características macroscópicas são encontradas em Ferziger e Kaper (Ferziger e Kaper, 1972) e Sharipov e Seleznev (Sharipov e Seleznev, 1998), são elas:

- Densidade:

$$n(t, r) = \int f(t, r, v) dv. \quad (1.2)$$

- Velocidade Hidrodinâmica:

$$u(t, r) = \frac{1}{n(r)} \int V_z f(t, r, v) dv. \quad (1.3)$$

- Tensor Pressão:

$$P_{xz} = m \int V_x V_z f(t, r, v) dv. \quad (1.4)$$

- Temperatura:

$$T(t, r) = \frac{m}{3nk} \int V^2 f(t, r, v) dv. \quad (1.5)$$

- Fluxo de Calor:

$$q(t, r) = \frac{m}{2} \int V^2 V f(t, r, v) dv, \quad (1.6)$$

onde  $m$  é a massa molecular,  $k$  é a constante de Boltzmann e  $V$  é a velocidade peculiar.

Calcula-se a pressão como valor médio dos termos diagonais do tensor pressão

$$p = \frac{1}{3} (P_{xx} + P_{yy} + P_{zz}). \quad (1.7)$$

As Eqs. (1.2), (1.5) e (1.7) fornecem a equação de estado de um gás ideal

$$p = nkT, \quad (1.8)$$

que é válida também em um estado fora de equilíbrio.

### 1.3 A Equação de Transporte de Boltzmann

A equação de Boltzmann (Boltzmann, 1872) é uma equação íntegro-diferencial não linear (Chapman e Cowing, 1952; Kogan, 1969; Ferziger e Kaper, 1972; Cercignani, 1975; Cercignani, 2000; Cabrera e Barichello, 2006), que descreve o movimento de uma partícula quando há colisões e determina a evolução na função distribuição.

As equações de Navier-Stokes (Sharipov e Seleznev, 1998) não são aplicadas ao regime de transição, então torna-se necessário o uso da equação de Boltzmann (Cercignani, 1988), ou seja, a equação íntegro-diferencial para estudar a dinâmica de gases rarefeitos, que é dada por

$$\frac{\partial}{\partial t} f(t, r, v) + v \frac{\partial}{\partial r} f(t, r, v) = J(f', f). \quad (1.9)$$

Pode-se expressar a equação de Boltzmann não-linear estacionária, segundo Williams (Williams, 2001), como

$$v \cdot \nabla_r f(r, v) = \hat{J}(f', f), \quad (1.10)$$

onde  $\hat{J}$  representa o operador de colisão ou integral de colisão, definido como

$$\hat{J}(f', f) = \int dv'_1 \int dv'_2 \int dv_2 W(v_1 \rightarrow v'_1; v_2 \rightarrow v'_2) [f(r, v'_1) f(r, v'_2) - f(r, v_1) f(r, v_2)], \quad (1.11)$$

onde  $f$  e  $f'$  são respectivamente as funções de distribuição de partículas “antes” e “após” as colisões,  $W$  é a função frequência de espalhamento diferencial para a colisão entre duas partículas.

O operador de colisão expressa a taxa de variação temporal da função de distribuição devido as colisões moleculares. Como esse operador torna a equação de Boltzmann muito complexa para ser resolvida, é necessário fazer uma simplificação no operador de colisões. Devido a isso, foram desenvolvidos vários métodos analíticos com o objetivo de facilitar a resolução da equação de Boltzmann, como exemplo o método de Grad (Kogan, 1969; Cercignani, 1975; Cabrera e Barichelo, 2006) e o método de Chapman-Enskog (Chapman e Cowing, 1952; Cercignani, 1975; Cabrera e Barichelo, 2006), porém esses métodos fornecem resultados que são válidos somente no regime hidrodinâmico  $K_n \ll 10^{-2}$ .

Devido a dificuldade de trabalhar com a equação de Boltzmann na forma original, será trabalhado com a forma linear da equação de Boltzmann. Desta forma utiliza-se modelos cinéticos que são formas simplificadas da equação linear de Boltzmann, onde mantém-se as propriedades fundamentais da integral de colisão original (conservação de massa, momento e energia). Quando a equação de Boltzmann é simplificada por um modelo cinético, ou seja, a integral de colisão é substituída por um modelo cinético, a equação de Boltzmann passa a ser chamada de equação modelo ou equação cinética.

### 1.3.1 Equação Linearizada de Boltzmann

Segundo Williams (Williams, 2001), neste trabalho, utiliza-se a equação linearizada de Boltzmann unidimensional e no estado estacionário, para situações fracas em que o gás é removido do seu estado de equilíbrio  $f_0$ , para isso escreve-se a função de distribuição na forma

$$f(r, v) = f_0(r, v)[1 + h(r, v)], \quad (1.12)$$

onde  $h$  representa uma pequena perturbação ( $|h| \ll 1$ ) causada à distribuição Maxwelliana local  $f_0(r, v)$ , pela presença de uma superfície de fronteira.

Segundo Williams (Williams, 2001), escreve-se a Maxwelliana local  $f_0(r, v)$ , como

$$f_0(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = n_\infty(\mathbf{r}) \left[ \frac{m}{2\pi k T_\infty(\mathbf{r})} \right]^{3/2} \exp \left[ -\frac{m[v_x^2 + v_y^2 + [v_z - \bar{u}(x)]^2]}{2k T_\infty(\mathbf{r})} \right], \quad (1.13)$$

onde  $r = (x, y, z)$  é o vetor de coordenadas espaciais,  $m$  é a massa molecular,  $k$  é a constante de Boltzmann,  $v = (v_x, v_y, v_z)$  é o vetor velocidade das partículas,  $n_\infty$  é densidade e  $T_\infty$  é a temperatura.

Assume-se que  $n_\infty$ ,  $T_\infty$  e  $\bar{u}$  são funções lineares de  $x$  e  $z$ , como segue

$$n_\infty(x, z) = n_0(1 + R_x x + R_z z), \quad (1.14)$$

$$T_\infty(x, z) = T_0(1 + K_x x + K_z z) \quad (1.15)$$

e

$$\bar{u}(x) = Kx, \quad (1.16)$$

onde  $n_0$  é a densidade de equilíbrio das partículas de gás,  $T_0$  é a temperatura constante,  $K$  é um gradiente de velocidade na direção  $x$ ,  $R_i$  e  $K_i$  são, respectivamente, os gradientes de densidade e temperatura na direção  $i$ .

Desta forma, seguindo Williams (Williams, 1971; Williams, 2001) e partindo da Eq. (1.12), a função de distribuição  $f$ , será determinada a partir de uma perturbação  $h$ . Para isso substitui-se a Eq. (1.12) que é a forma linear da equação de Boltzmann na Eq. (1.10), considera-se as propriedades simétricas da função frequência de espalhamento diferencial para a colisão entre dois corpos (Williams, 2001; Camargo, 2003), despreza-se os termos de  $O(h^2)$  e faz-se uma adimensionalização da forma

$$c = v \left( \frac{m}{2kT_0} \right)^{1/2}, \quad (1.17)$$

$$K_0 = K \left( \frac{m}{2kT_0} \right)^{1/2}, \quad (1.18)$$

onde  $v$  é a magnitude da velocidade da partícula. Assim chega-se a uma equação para  $h$ . Logo, obtém-se a equação balanço definida por

$$S(\mathbf{c}) + c_x \frac{\partial}{\partial y^*} h(y^*, \mathbf{c}) = \sigma_0^2 n_0 \pi^{1/2} \mathcal{L}\{h\}(y^*, \mathbf{c}), \quad (1.19)$$

onde  $\sigma_0$  é o diâmetro de colisão das partículas (Barichello e Siewert, 2003),  $S(\mathbf{c})$  é o termo de fonte que é determinado para cada tipo de problema e o operador de colisão é descrito por

$$\mathcal{L}\{h\}(y^*, \mathbf{c}) = -\eta(c)h(y^*, \mathbf{c}) + \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(c_x^2 + c_y^2 + c_z^2)} F(\mathbf{c}', \mathbf{c}) h(y^*, \mathbf{c}') dc_x dc_y dc_z, \quad (1.20)$$

onde  $y^*$  é a variável espacial,  $F(\mathbf{c}', \mathbf{c})$  é o núcleo de espalhamento e  $\eta(c)$  é a frequência de colisão dada por

$$\eta(c) = \frac{2c^2 + 1}{c} \int_0^c e^{-x^2} dx + e^{-c^2}. \quad (1.21)$$

Escrevendo-se o vetor velocidade em coordenadas esféricas  $(c, \arccos \mu, \chi)$ , ou seja, usando-se

$$c_x = c\mu \quad c_y = c(1 - \mu^2)^{1/2} \sin \chi \quad e \quad c_z = c(1 - \mu^2)^{1/2} \cos \chi, \quad (1.22)$$



reescreve-se a Eq. (1.19) na forma

$$S(\mathbf{c}) + c\mu \frac{\partial}{\partial y^*} h(y^*, \mathbf{c}) = \sigma_0^2 n_0 \pi^{1/2} \mathcal{L}\{h\}(y^*, \mathbf{c}), \quad (1.23)$$

com o operador de colisão

$$\mathcal{L}\{h\}(y^*, \mathbf{c}) = -\eta(c)h(y^*, \mathbf{c}) + \int_0^\infty \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} c'^2 e^{-c'^2} F(\mathbf{c}', \mathbf{c}) h(y^*, \mathbf{c}') d\chi' d\mu' dc'. \quad (1.24)$$

## 1.4 Livre Caminho Médio

Nesta sessão será abordada o conceito de Livre Caminho Médio  $l$ , que representa a distância média percorrida por uma partícula gasosa antes de sofrer uma colisão. Considera-se a versão homogênea da Eq. (1.19), e usa-se a variável adimensional  $\tau = y^*/l$ , reescrevendo-a da seguinte forma

$$c_x \frac{\partial}{\partial \tau} h(\tau, \mathbf{c}) = \varepsilon \mathcal{L}\{h\}(\tau, \mathbf{c}), \quad (1.25)$$

onde o operador  $\mathcal{L}$  é dado por

$$\mathcal{L}\{h\}(\tau, \mathbf{c}) = -\eta(c)h(\tau, \mathbf{c}) + \int_0^\infty \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} c'^2 e^{-c'^2} F(\mathbf{c}', \mathbf{c}) h(\tau, \mathbf{c}') d\chi' d\mu' dc' \quad (1.26)$$

e

$$\varepsilon = \sigma_0^2 n_0 \pi^{1/2} l. \quad (1.27)$$

O livre caminho médio é definido em função da viscosidade e da condutividade térmica. Segundo Loyalka e Hickey (Loyalka e Hickey, 1989), o livre caminho médio em termos da viscosidade  $\mu_*$  é dado por

$$l = l_p = \left( \frac{\mu_*}{p_0} \right) \left( \frac{2kT_0}{m} \right)^{1/2}, \quad (1.28)$$

e o livre caminho médio definido em termos da condutividade térmica  $\lambda_*$ , de acordo com Loyalka e Ferziger (Loyalka e Ferziger, 1968), é dado por

$$l = l_t = \left( \frac{4\lambda_*}{5\eta_0 k} \right) \left( \frac{m}{2kT_0} \right)^{1/2}, \quad (1.29)$$

onde  $k$  é a constante de Boltzmann,  $m$  é a massa molecular,  $T_0$  é a temperatura constante e  $p_0 = \eta k T_0$  é a pressão.

De acordo com Pekeris e Alterman (Pekeris e Alterman, 1957), a viscosidade é definida por

$$\mu_* = \frac{8(2mkT_0)^{1/2}}{15\pi\sigma_0^2} \int_0^\infty e^{-c^2} b(c) c^6 dc, \quad (1.30)$$

e a condutividade térmica é definida como

$$\lambda_* = \frac{4k(2kT_0/m)^{1/2}}{3\pi\sigma_0^2} \int_0^\infty e^{-c^2} a(c) c^6 dc. \quad (1.31)$$

As funções  $b(c)$  e  $a(c)$  que aparecem respectivamente nas Eqs. (1.30) e (1.31), são soluções da equação de Chapman-Enskog, onde  $b(c)$  é a solução para a viscosidade e  $a(c)$  é a solução para a condutividade térmica, definidas pelas seguintes integrais

$$\eta(c) c^2 b(c) - \int_0^\infty e^{-c'^2} b(c') k_2(c', c) c'^4 dc' = c^2 \quad (1.32)$$

e

$$\eta(c) c^2 a(c) - \int_0^\infty e^{-c'^2} a(c') k_1(c', c) c'^3 dc' = c(c^2 - 5/2), \quad (1.33)$$

com a condição de normalização

$$\int_0^\infty e^{-c^2} a(c) c^4 dc = 0. \quad (1.34)$$

Assim, em termos da viscosidade, substitui-se a a Eq. (1.32) na Eq. (1.30), posteriormente a Eq. (1.30) na Eq. (1.28) e finalmente a Eq. (1.28) na Eq. (1.27), obtendo-se

$$\varepsilon = \varepsilon_p = \frac{16}{15} \pi^{-1/2} \int_0^\infty e^{-c^2} b(c) c^6 dc. \quad (1.35)$$

Em termos da condutividade térmica, substitui-se a a Eq. (1.33) na Eq. (1.31), posteriormente a Eq. (1.31) na Eq. (1.29) e finalmente a Eq. (1.29) na Eq. (1.27), obtendo-se

$$\varepsilon = \varepsilon_t = \frac{16}{15} \pi^{-1/2} \int_0^\infty e^{-c^2} a(c) c^6 dc. \quad (1.36)$$

Os resultados numéricos para  $\varepsilon_t$  e  $\varepsilon_p$ , dependem dos modelos cinéticos utilizados. Após a

mudança da variável adimensional, pode-se escrever a Eq. (1.19) na forma

$$c_x \frac{\partial}{\partial \tau} h(\tau, \mathbf{c}) + \varepsilon h(\tau, \mathbf{c}) = \varepsilon \pi^{-3/2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-c'^2} h(\tau, \mathbf{c}') F(\mathbf{c}', \mathbf{c}) dc'_x dc'_y dc'_z + S(\mathbf{c}), \quad (1.37)$$

onde

$$\varepsilon = \sigma_0^2 n_0 \pi^{1/2} l. \quad (1.38)$$

## 1.5 Interação Gás-Superfície

Frequentemente, os gases são limitados por superfícies, essa limitação impõe condições de contorno à função distribuição. Logo, o estudo da interação gás-superfície é de grande importância na DGR.

A função de distribuição é dada através do núcleo de espalhamento  $R(\mathbf{v}' : \mathbf{v})$  (Cercignani, 1988), o qual proporciona a densidade de probabilidade de que a velocidade de uma molécula seja alterada de  $\mathbf{v}'$  antes da colisão com a parede, para  $\mathbf{v}$  após a colisão, como

$$|v_n| f(\mathbf{v}) = \int_{v'_n < 0} |v'_n| R(\mathbf{v}' : \mathbf{v}) f(\mathbf{v}') d\mathbf{v}', \quad v_n > 0 \quad (1.39)$$

onde  $\mathbf{v}'$  é a velocidade molecular das partículas de incidência e  $\mathbf{v}$  é a velocidade molecular das partículas de reflexão,  $v_n = \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}$  é a componente normal da velocidade  $\mathbf{v}$  e  $\mathbf{n}$  é o vetor unitário normal à superfície.

O núcleo de espalhamento satisfaz as seguintes propriedades:

- Condição de Normalização:

$$\int_{v'_n < 0} R(\mathbf{v}' : \mathbf{v}) d\mathbf{v}' = 1. \quad (1.40)$$

- Condição de Reciprocidade (Cercignani, 1975):

$$|v'_n| \exp\left(-\frac{mv'^2}{2kT_w}\right) R(\mathbf{v}' : \mathbf{v}) = |v_n| \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT_w}\right) R(-\mathbf{v} : -\mathbf{v}'). \quad (1.41)$$

O núcleo de espalhamento Difuso-Especular proposto por Maxwell é o mais utilizado. Este núcleo não depende da velocidade das moléculas antes da colisão e a velocidade das moléculas espalhadas não obedecem uma direção preferencial. Esse núcleo é dado por

$$R(\mathbf{v}' : \mathbf{v}) = (1 - \alpha) \delta^*(\mathbf{v}' - \mathbf{v} + 2\mathbf{n}v_n) + \left(\alpha \frac{m^2 v_n}{2\pi(kT_w)^2}\right) \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT_w}\right), \quad (1.42)$$

onde  $\delta^*$  é a função delta de Dirac,  $m$  é a massa molecular das partículas,  $k$  é a constante de Boltzmann,  $T_w$  é a temperatura da superfície a  $\alpha$  é o coeficiente de acomodação. Esse núcleo representa fisicamente que a fração  $\alpha$  das partículas é refletida difusivamente e o restante da fração  $(1 - \alpha)$  é refletida especularmente.

Segundo Williams (Williams, 2001), esse modelo difuso-especular para problemas de fluxo entre duas placas paralelas localizadas em  $\tau = -a$  e  $\tau = a$ , é escrito linearmente em coordenadas cartesianas como

$$h(-a, c_x, c_y, c_z) - (1 - \alpha)h(-a, -c_x, c_y, c_z) = \frac{2\alpha}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} h(-a, -c'_x, c'_y, c'_z) c'_x dc'_x dc'_y dc'_z \quad (1.43)$$

e

$$h(a, -c_x, c_y, c_z) - (1 - \alpha)h(a, c_x, c_y, c_z) = \frac{2\alpha}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} h(a, c'_x, c'_y, c'_z) c'_x dc'_x dc'_y dc'_z, \quad (1.44)$$

onde  $\alpha \in (0, 1]$ , representa o coeficiente de acomodação das paredes e  $c_y > 0$ .

Em consideração com o modelo difuso-especular, encontra-se na literatura vários trabalhos da DGR baseado no núcleo de Maxwell, dentre eles cita-se os seguintes (Cercignani, 1965; Barichello e Siewert, 2000; Barichello et. al., 2001; Siewert, 2001; Siewert, 2002a; Siewert, 2002b; Siewert, 2002c; Siewert, 2002d).

Seguindo a literatura (Sharipov, 2002), o modelo de Maxwell (difuso-especular) não descreve corretamente a interação gás-superfície, pois considera um único coeficiente de acomodação para todas as propriedades físicas, enquanto que na prática necessita-se de no mínimo dois coeficientes de acomodação. O núcleo que proporciona esses dois coeficientes é o núcleo proposto por Cercignani e Lampis (Cercignani e Lampis, 1971), os dois coeficientes de acomodação descrevem as propriedades físicas do gás, permitindo uma melhor descrição física para fenômenos de transporte de gases. Esse núcleo é dado por

$$R_{CL}(\mathbf{v}' : \mathbf{v}) = \frac{m^2 v_n}{2\pi \alpha_n \alpha_t (2 - \alpha_t) (kT_w)^2} \times \exp\left(\frac{-m[v_n^2 + (1 - \alpha_n)v_n'^2]}{2kT_w \alpha_n} - \frac{-m[\mathbf{v}_t - (1 - \alpha_t)\mathbf{v}'_t]^2}{2kT_w \alpha_t (2 - \alpha_t)}\right) \times I_0\left(\frac{\sqrt{(1 - \alpha_n)m} v_n v_n'}{\alpha_n kT_w}\right), \quad (1.45)$$

onde  $I_0$  é a função de Bessel modificada, expressa por

$$I_0(w) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{w \cos \phi} d\phi, \quad (1.46)$$

onde  $\mathbf{v}_t$  é o vetor bidimensional da velocidade tangencial e  $v_n$  é a componente normal da velocidade  $\mathbf{v}$ .

O núcleo dado pela Eq. (1.45) contém dois parâmetros,  $0 \leq \alpha_t \leq 2$  como coeficiente de acomodação do momento tangencial e  $0 \leq \alpha_n \leq 1$  como coeficiente de acomodação da energia cinética devido a componente normal da velocidade (Sharipov e Seleznev, 1998). Quando  $\alpha_t = 2$  e  $\alpha_n = 0$  tem-se que a velocidade troca de sinal após uma colisão com a superfície, trocando assim sua direção, quando  $\alpha_t = 1$  e  $\alpha_n = 1$  o núcleo dado pela Eq. (1.45) coincide com o núcleo difuso, quando  $\alpha_t = 0$  e  $\alpha_n = 0$  o núcleo dado pela Eq. (1.45) será o núcleo especular (Sharipov, 2002).

Usando uma adimensionalização para o vetor velocidade  $\mathbf{c}$ , a interação entre o gás e a parede (Siewert, 2002a), é dada por

$$h(-a, c_x, c_y, c_z) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-c'^2} h(-a, -c'_x, c'_y, c'_z) R(-c'_x, c'_y, c'_z : c_x, c_y, c_z) dc'_x dc'_y dc'_z \quad (1.47)$$

e

$$h(a, -c_x, c_y, c_z) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-c'^2} h(a, c'_x, c'_y, c'_z) R(c'_x, c'_y, c'_z : -c_x, c_y, c_z) dc'_x dc'_y dc'_z, \quad (1.48)$$

para todo  $c_x \in (0, \infty)$  e para todo  $c_y, c_z$ .

Aqui  $\mathbf{c}'$  é a velocidade molecular de partículas de incidência e  $\mathbf{c}$  é a velocidade molecular de partículas de reflexão,  $R_{CL}(\mathbf{c}' : \mathbf{c})$  é o núcleo de espalhamento de Cercignani-Lampis, este descreve o efeito da parede na função distribuição das partículas, Eq. (1.45).

Considerando-se a adimensionalização  $\mathbf{c}$ , na Eq. (1.45), o núcleo de espalhamento de Cercignani-Lampis em coordenadas retangulares é dado por

$$R_{CL}(c'_x, c'_y, c'_z : c_x, c_y, c_z) = \frac{2c'_x}{\pi \alpha_n \alpha_t (2 - \alpha_t)} T(c'_y, c_y) S(c'_x, c_x) T(c'_z, c_z), \quad (1.49)$$

onde

$$T(y, z) = \exp\left[-\frac{[(1 - \alpha_t)z - y]^2}{\alpha_t(2 - \alpha_t)}\right], \quad (1.50)$$

$$S(y, z) = \exp\left[\frac{-[(1 - \alpha_n)^{1/2}z - y]^2}{\alpha_n}\right] I_0\left[\frac{2(1 - \alpha_n)^{1/2}yz}{\alpha_n}\right] \quad (1.51)$$

e

$$\hat{I}_0(w) = I_0(w)e^{-w}, \quad (1.52)$$

onde  $I_0(w)$  é dado pela Eq. (1.46).

Para o problema em meio semi-infinito, além da condição de contorno, considera-se uma condição associada ao comportamento da solução no infinito, que será comentado mais adiante.

# Capítulo 2

## MODELOS CINÉTICOS

### 2.1 Núcleos Sintéticos

Diversos trabalhos tem sido desenvolvidos na dinâmica de gases rarefeitos, utilizando-se de equações modelos (Barichello e Siewert, 2000). Sendo assim, é necessário seguir uma metodologia para trabalhar os modelos cinéticos de uma mesma forma, onde compara-se os resultados de diferentes aproximações da ELB. Essa metodologia deve incluir a maneira de definir o livre caminho médio e a frequência de colisão aplicável a cada modelo cinético.

Segundo Pekeris e Alterman (Pekeris e Alterman, 1957), uma expansão em termos dos polinômios de Legendre é proposto em relação ao núcleo de espalhamento  $K(\mathbf{c}', \mathbf{c})$ . Fazendo uso do teorema da adição dos harmônicos esféricos, pode-se escrever o núcleo do espalhamento  $K(\mathbf{c}', \mathbf{c})$  na forma

$$K(\mathbf{c}', \mathbf{c}) = \frac{1}{4\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n (2n+1)(2 - \delta_{0,m}) P_n^m(\mu') P_n^m(\mu) k_n(c', c) \cos m(\chi' - \chi), \quad (2.1)$$

onde  $P_n^m(\mu)$  são as funções normalizadas de Legendre, dadas por

$$P_n^m(\mu) = \left[ \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \right]^{1/2} (1 - \mu^2)^{m/2} \frac{d^m}{d\mu^m} P_n(\mu), \quad n \geq m \quad (2.2)$$

e  $P_n(\mu)$  são os Polinômios de Legendre tais que

$$\int_{-1}^1 P_n^m(\mu) P_{n'}^m(\mu) d\mu = \left( \frac{2}{2n+1} \right) \delta_{n,n'}, \quad (2.3)$$

onde  $\delta_{n,n'}$  representa o Delta de Kronecker. Nos trabalhos de Barichello e Siewert (Barichello e Siewert, 2003), Loyalka e Hickey (Loyalka e Hickey, 1989) e Pekeris e Alterman (Pekeris e Alterman, 1957), encontram-se alguns valores de  $n$  para as componentes  $k_n(c', c)$  que possuem

derivadas descontínuas em  $c' = c$ , mesmo para valores pequenos de  $n$ . Para reduzir essa dificuldade, as equações modelos estão sendo desenvolvidas, pois elas simplificam e linearizam o núcleo de espalhamento sem perder as características da equação origem.

Para obter os modelos cinéticos, substitui-se as componentes exatas  $k_n(c', c)$  de forma truncada no núcleo de espalhamento  $K(\mathbf{c}', \mathbf{c})$ , obtendo

$$F(\mathbf{c}', \mathbf{c}) = \frac{1}{4\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n (2n+1)(2-\delta_{0,m}) P_n^m(\mu') P_n^m(\mu) f_n(c', c) \cos m(\chi' - \chi), \quad (2.4)$$

onde utiliza-se aproximações sintéticas  $f_n(c', c)$  para  $n \leq N$  no lugar de  $k_n(c', c)$  que serão apresentadas no decorrer do trabalho.

Sendo assim, a ELB adimensionalizada e aproximada pelo núcleo sintético  $F(\mathbf{c}', \mathbf{c})$  é escrita como

$$c_\mu \frac{\partial}{\partial \tau} h(\tau, \mathbf{c}) = \varepsilon \mathcal{L}^* \{h\}(\tau, \mathbf{c}), \quad (2.5)$$

onde

$$\mathcal{L}^* \{h\}(\tau, \mathbf{c}) = -v(c)h(\tau, \mathbf{c}) + \int_0^\infty \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} e^{-(c'^2)} h(\tau, \mathbf{c}') F(\mathbf{c}', \mathbf{c}) c'^2 dc_{\chi'} dc_{\mu'} dc_{c'} \quad (2.6)$$

e  $F(\mathbf{c}', \mathbf{c})$  é dado pela Eq. (2.4).

## 2.2 Os Modelos BGK, S, Gross-Jackson e MRS

Definidas as Eqs. (2.5) e (2.6) que serão usadas na construção das equações modelo para a ELB, bem como as funções de Chapman-Enskog e os parâmetros  $\varepsilon$ , segue-se o desenvolvimento dos modelos BGK, S, Gross-Jackson e MRS baseado no modelo de esferas rígidas. Seguindo Cabrera (Cabrera, 2003) e usando as relações entre coordenadas esféricas e cartesianas obtém-se o vetor velocidade  $\mathbf{c}$  com componentes retangulares  $(c_x, c_y, c_z)$ , assim a ELB passa a ser escrita como

$$c_x \frac{\partial}{\partial \tau} h(\tau, \mathbf{c}) = \varepsilon \mathcal{L}^* \{h\}(\tau, \mathbf{c}), \quad (2.7)$$

onde

$$\mathcal{L}^* \{h\}(\tau, \mathbf{c}) = -v(c)h(\tau, \mathbf{c}) + \pi^{-3/2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(c'^2)} h(\tau, \mathbf{c}') F(\mathbf{c}', \mathbf{c}) c'^2 dc'_x dc'_y dc'_z. \quad (2.8)$$



As componentes  $f_n(c', c)$  para o modelo BGK (caso particular do modelo CES) foram determinadas por Barichello e Siewert (Barichello e Siewert, 2003). Tem-se também que Siewert e Sharipov (Siewert e Sharipov, 2002) determinaram essas componentes usando em conjunto os modelos BGK e S. Para o modelo Gross-Jackson as componentes estão definidas nos trabalhos (Gross e Jackson, 1959; Scherer, 2005) e o modelo MRS foi obtido como um caso particular do modelo de McCormack em (Chen et al., 1991), utilizando-se de apenas uma única espécie de gás para o modelo de esferas rígidas. Assim, de acordo com Garcia e Siewert (Garcia e Siewert, 2006) e Sherer (Scherer, 2005) o núcleo de espalhamento na forma unificada para esses modelos é expresso por

$$F(\mathbf{c}' : \mathbf{c}) = 1 + 2(\mathbf{c}' \cdot \mathbf{c}) + \frac{2}{3}(c'^2 - \frac{3}{2})(c^2 - \frac{3}{2}) + \beta M(\mathbf{c}' : \mathbf{c}) + \varpi N(\mathbf{c}' : \mathbf{c}), \quad (2.9)$$

onde  $\beta$  e  $\varpi$  são parâmetros a serem determinados segundo o modelo a ser trabalhado e

$$M(\mathbf{c}' : \mathbf{c}) = \frac{4}{5}(\mathbf{c}' \cdot \mathbf{c})(c'^2 - \frac{5}{2})(c^2 - \frac{5}{2}) \quad (2.10)$$

e

$$N(\mathbf{c}' : \mathbf{c}) = 2(\mathbf{c}' \cdot \mathbf{c})^2 - \frac{2}{3}c'^2 c^2 \quad (2.11)$$

com

$$\mathbf{c}' \cdot \mathbf{c} = c'c \sum_{m=0}^1 (2 - \delta_{0,m}) P_1^m(\mu') P_1^m(\mu) \cos[m(\chi' - \chi)]. \quad (2.12)$$

Para que o núcleo definido pela Eq. (2.9), corresponda a um determinado modelo, deve-se considerar certos valores para os parâmetros  $\beta$  e  $\varpi$ , sendo assim tem-se:

- Modelo **BGK** (Siewert e Sharipov, 2002):  $\beta = 0$  e  $\varpi = 0$ .
- Modelo **S** (Siewert e Sharipov, 2002):  $\beta = \frac{1}{3}$  e  $\varpi = 0$ .
- Modelo **Gross-Jackson** (Scherer, 2005):  $\beta = \frac{5}{9}$  e  $\varpi = \frac{1}{3}$ .
- Modelo **MRS** (Garcia e Siewert, 2006):  $\beta = 1 - (\frac{16}{15})^{2^{1/2}}$  e  $\varpi = 1 - (\frac{8}{5})^{2^{1/2}}$ .

De acordo com Garcia e Siewert (Garcia e Siewert, 2006), para escrever o núcleo de espalhamento dado pela Eq. (2.9) na forma da Eq. (2.4), define-se as componentes  $f_n(c', c)$  como:

$$f_0(c', c) = 4\pi \left[ 1 + \frac{2}{3}(c'^2 - \frac{3}{2})(c^2 - \frac{3}{2}) \right], \quad (2.13)$$

$$f_1(c', c) = \frac{8}{3}\pi^{-1/2}c'c \left[ 1 + \frac{2}{5}\beta(c'^2 - \frac{5}{2})(c^2 - \frac{5}{2}) \right], \quad (2.14)$$

$$f_2(c', c) = \frac{16}{15} \pi^{-1/2} \bar{\omega} c'^2 c^2 \quad (2.15)$$

e

$$f_n(c', c) = 0, \quad n > 2. \quad (2.16)$$

Ainda, de acordo com Garcia e Siewert (Garcia e Siewert, 2006), as componentes  $f_n(c', c)$  devem satisfazer as condições integrais (que resultam das condições de conservação de massa, momento e energia),

$$\eta(c) = \int_0^\infty e^{-c'^2} f_0(c', c) c'^2 dc', \quad (2.17)$$

$$\eta(c)c = \int_0^\infty e^{-c'^2} f_1(c', c) c'^3 dc' \quad (2.18)$$

e

$$\eta(c)c^2 = \int_0^\infty e^{-c'^2} f_0(c', c) c'^4 dc'. \quad (2.19)$$

Substituindo as Eqs. (2.13) e (2.14) nas Eqs. (2.17), (2.18) e (2.19), determina-se que a frequência de colisão  $\eta(c) = 1$  para os quatro modelos. Agora substituindo as Eqs. (2.14) e (2.15) nas Eqs. (1.32), (1.33) e (1.34), determina-se as funções de Chapman-Enskog  $a(c)$  e  $b(c)$  apropriadas para cada modelo.

- Para o modelo BGK, temos:

$$a(c) = \left(c^2 - \frac{5}{2}\right), \quad b(c) = 1. \quad (2.20)$$

- Para o modelo S temos:

$$a(c) = \frac{3}{2} \left(c^2 - \frac{5}{2}\right), \quad b(c) = 1. \quad (2.21)$$

- Para o modelo Gross-Jackson temos:

$$a(c) = \frac{9}{4} \left(c^2 - \frac{5}{2}\right), \quad b(c) = \frac{3}{2}. \quad (2.22)$$

- Para o modelo MRS temos:

$$a(c) = \left(\frac{15}{32} \left(c^2 - \frac{5}{2}\right)\right) 2^{1/2}, \quad b(c) = \left(\frac{5}{16}\right) 2^{1/2}. \quad (2.23)$$

Agora utilizando-se as Eqs. (2.20) a (2.23) nas Eqs. (1.36) e (1.35), determina-se os valores de  $\varepsilon$  para os quatro modelos.

- Para o modelo BGK, tem-se:

$$\varepsilon_p = \varepsilon_t = 1. \quad (2.24)$$

- Para o modelo S tem-se:

$$\varepsilon_p = 1, \quad \varepsilon_t = \frac{3}{2}. \quad (2.25)$$

- Para o modelo Gross-Jackson tem-se:

$$\varepsilon_p = \frac{3}{2}, \quad \varepsilon_t = \frac{9}{4}. \quad (2.26)$$

- Para o modelo MRS tem-se:

$$\varepsilon_p = \left(\frac{5}{16}\right) 2^{1/2}, \quad \varepsilon_t = \left(\frac{15}{32}\right) 2^{1/2}. \quad (2.27)$$

Ressalta-se que de acordo com Barichello e Siewert (Barichello e Siewert, 2003), para a ELB, tem-se

$$\varepsilon_p = 0,449027806\dots, \quad \varepsilon_t = 0,679630049\dots \quad (2.28)$$

Após encontrar os valores de  $\varepsilon_p$  e  $\varepsilon_t$  podemos avaliar o número de Prandtl, que é utilizado em teoria cinética para determinar a relação entre  $\varepsilon_p$  e  $\varepsilon_t$  e de acordo com (Barichello e Siewert, 2003), é expresso por

$$P_r = \frac{\varepsilon_p}{\varepsilon_t}. \quad (2.29)$$

Assim verifica-se substituindo a Eq. (2.28) na Eq. (2.29), que o número de Prandtl para a ELB é

$$P_r = 0,660694457, \quad (2.30)$$

o qual é um valor próximo de  $\frac{2}{3}$  e segundo Sharipov e Seleznev (Sharipov e Seleznev, 1998) e (Cercignani, 1988) é o valor normalmente utilizado na teoria cinética.

Então, substituindo-se as Eqs. (6.16) a (2.27), verifica-se que  $P_r = 1$  para o modelo BGK e para os demais modelos (S, Gross-Jackson e MRS) tem-se  $P_r = \frac{2}{3}$ . Sendo assim, existe (Sharipov

e Seleznev, 1998) uma vantagem no uso dos modelos S, Gross-Jackson e MRS em relação ao uso do modelo BGK, uma vez que todos possuem uma frequência de colisão constante.

Sabe-se que as condições de contorno é outro elemento importante na resolução de problemas da DGR, pois sua função é descrever o comportamento do gás próximo as paredes. A descrição do processo de interação entre o gás e a parede podem ser descritas pela lei de Cercignani-Lampis, discutida por Knackfuss (Knackfuss, 2005) e pela lei Difuso-Especular, abordada por Williams (Williams, 1971), onde considera-se que uma fração de partículas reflete difusivamente, enquanto que a fração restante é refletida specularmente.

Nos próximos capítulos serão apresentadas as quantidades físicas de interesse e a formulação matemática dos problemas de transferência de calor que pretende-se resolver aplicando os modelos BGK, S, Gross-Jackson e MRS utilizando a versão analítica do método de ordenadas discretas (ADO).

# Capítulo 3

## FORMULAÇÃO MATEMÁTICA

Após a apresentação da formulação de equações modelos da ELB para esferas rígidas, formula-se, neste capítulo, de uma maneira unificada o problema de Deslizamento Térmico e o problema de Deslizamento Viscoso, utilizando os modelos cinéticos apresentados anteriormente, ou seja, modelos BGK, S, Gross-Jackson e MRS em coordenadas cartesianas.

### 3.1 Definição do Problema

Os problemas na DGR no regime de transição podem ser modelados pela ELB ou de forma mais simplificada através das equações modelos, com as devidas condições de contorno apropriadas (Siewert, 2003a). Seguindo Barichello e Siewert (Barichello e Siewert, 2003), considera-se a equação cinética já escrita em termos de uma perturbação  $h(\tau, \mathbf{c})$  da função distribuição dada por

$$c_x \frac{\partial}{\partial y} h(\tau, \mathbf{c}) + \varepsilon h(\tau, \mathbf{c}) = \varepsilon \pi^{-3/2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-c'^2} h(\tau, \mathbf{c}') F(\mathbf{c}' : \mathbf{c}) dc'_x dc'_y dc'_z + S(\mathbf{c}), \quad (3.1)$$

onde  $S(\mathbf{c})$  é o termo de fonte e  $F(\mathbf{c}' : \mathbf{c})$  é o núcleo de espalhamento sintético dado pela Eq. (2.9), onde mantém-se a dependência de  $\beta$  e  $\varpi$ . Esses parâmetros definem o núcleo sintético de cada modelo usado nesse trabalho (modelos BGK, S, Gross-Jackson e MRS). Tem-se também que  $M(\mathbf{c}' : \mathbf{c})$  e  $N(\mathbf{c}' : \mathbf{c})$  são dados respectivamente pelas Eqs. (2.10) e (2.11), como foi definido no capítulo anterior.

Em relação a Eq. (3.1), tem-se que  $\tau$  é a variável espacial adimensionalizada,  $\mathbf{c}$  é o vetor velocidade adimensional em coordenadas retangulares  $(c_x, c_y, c_z)$  e  $\varepsilon$  é definido pela Eq. (1.38).

## 3.2 Formulação Vetorial do Problema

Nesta seção não será trabalhado diretamente com a Eq. (3.1), mas sim utilizando problemas auxiliares, para isso tem-se que as quantidades de interesse são definidas em termos de momentos (integrais) da função  $h(\tau, \mathbf{c})$ , a utilização desses momentos diminuem o número de variáveis envolvidas no problema. Sendo assim considera-se os momentos

$$\phi_1(c_y, c_z) = \frac{1}{\pi} c_y e^{-(c_y^2 + c_z^2)} \quad (3.2)$$

e

$$\phi_2(c_y, c_z) = \frac{1}{\pi} c_y 2^{-1/2} (c_y^2 + c_z^2 - 2) e^{-(c_y^2 + c_z^2)}, \quad (3.3)$$

define-se

$$g_1(\tau, c_x) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \phi_1(c_y, c_z) h(\tau, c_x, c_y, c_z) dc_y dc_z \quad (3.4)$$

e

$$g_2(\tau, c_x) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \phi_2(c_y, c_z) h(\tau, c_x, c_y, c_z) dc_y dc_z. \quad (3.5)$$

Agora, multiplica-se a Eq. (3.1) pela Eq. (3.2), integra-se esse produto sobre todo  $c_y$  e  $c_z$  em  $(-\infty, \infty)$ , considera-se a nova notação  $c_x = \xi$  juntamente com as Eqs. (3.4) e (3.5), obtém-se a seguinte equação balanço

$$\xi \frac{\partial}{\partial \tau} g_1(\tau, \xi) + \varepsilon g_1(\tau, \xi) = \varepsilon \int_{-\infty}^{\infty} \pi^{-1/2} e^{-\xi'^2} [k_{11}(\xi', \xi) g_1(\tau, \xi') + k_{12}(\xi', \xi) g_2(\tau, \xi')] d\xi' + a_1(\xi), \quad (3.6)$$

onde

$$a_1(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \phi_1(c_y, c_z) S(\xi, c_y, c_z) dc_y dc_z, \quad (3.7)$$

$$k_{11}(\xi', \xi) = 1 + \frac{2}{5} \beta \left( \xi^2 - \frac{1}{2} \right) \left( \xi'^2 - \frac{1}{2} \right) + 2\varpi \xi \xi', \quad (3.8)$$

$$k_{12}(\xi', \xi) = 2^{1/2} \frac{2}{5} \beta \left( \xi^2 - \frac{1}{2} \right). \quad (3.9)$$

De maneira equivalente, multiplica-se a Eq. (3.1) pela Eq. (3.3), integra-se esse produto sobre todo  $c_y$  e  $c_z$  em  $(-\infty, \infty)$ , considera-se  $c_x = \xi$ , bem como, as Eqs. (3.4) e (3.5), obtém-se a seguinte equação balanço

$$\xi \frac{\partial}{\partial \tau} g_2(\tau, \xi) + \varepsilon g_2(\tau, \xi) = \varepsilon \int_{-\infty}^{\infty} \pi^{-1/2} e^{-\xi'^2} [k_{21}(\xi', \xi) g_1(\tau, \xi') + k_{22}(\xi', \xi) g_2(\tau, \xi')] d\xi' + a_2(\xi), \quad (3.10)$$

onde

$$a_2(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \phi_2(c_y, c_z) S(\xi, c_y, c_z) dc_y dc_z, \quad (3.11)$$

$$k_{21}(\xi', \xi) = 2^{1/2} \frac{2}{5} \beta \left( \xi'^2 - \frac{1}{2} \right), \quad (3.12)$$

$$k_{22}(\xi', \xi) = \frac{4}{5} \beta. \quad (3.13)$$

As Eqs. (3.6) e (3.10) podem ser escritas na forma vetorial como

$$\xi \frac{\partial}{\partial \tau} \mathbf{G}(\tau, \xi) + \varepsilon \mathbf{G}(\tau, \xi) = \varepsilon \int_{-\infty}^{\infty} \psi(\xi') \mathbf{K}(\xi', \xi) \mathbf{G}(\tau, \xi') d\xi' + \mathbf{A}(\xi), \quad (3.14)$$

onde

$$\mathbf{G}(\tau, \xi) = \begin{bmatrix} g_1(\tau, \xi) \\ g_2(\tau, \xi) \end{bmatrix}, \quad (3.15)$$

$$\psi(\xi) = \pi^{-1/2} e^{-\xi^2} \quad (3.16)$$

e

$$\mathbf{K}(\xi', \xi) = \begin{bmatrix} k_{11}(\xi', \xi) & k_{12}(\xi', \xi) \\ k_{21}(\xi', \xi) & k_{22}(\xi', \xi) \end{bmatrix}, \quad (3.17)$$

$$\mathbf{A}(\xi) = \begin{bmatrix} a_1(\xi) \\ a_2(\xi) \end{bmatrix}. \quad (3.18)$$

### 3.3 Problemas Clássicos

Os procedimentos desenvolvidos até este momento são válidos para todos os modelos cinéticos e para os problemas de fluxos de gases rarefeitos que serão apresentados a seguir, cuja resolução será feita pelo método ADO.

Nesta seção, serão apresentados dois problemas clássicos da DGR, o problema de Deslizamento Térmico e o problema de Deslizamento Viscoso, os quais referem-se a problemas em meios semi-infinito e suas soluções são utilizadas na avaliação dos coeficientes de deslizamento.

#### 3.3.1 Problema de Deslizamento Térmico

O problema de Deslizamento Térmico descreve o fluxo de um gás em um domínio semiinfinito, causado por um gradiente constante de temperatura ( $K_x$ ). O gás está limitado por uma placa localizada em  $\tau = 0$ , onde  $\tau \in [0, \infty)$ . A Maxwelliana usada para linearizar a Eq. (1.10) é

$$f_0(x, \mathbf{v}) = n(x) \left( \frac{m}{2\pi kT(x)} \right)^{3/2} \exp \left( -\frac{m(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v})}{2kT(x)} \right), \quad (3.19)$$

onde a densidade  $n(x)$  e a temperatura  $T(x)$  são dadas respectivamente por

$$n(x) = n_0(1 + R_x x), \quad (3.20)$$

$$T(x) = T_0(1 + K_x x). \quad (3.21)$$

No problema de Deslizamento Térmico a densidade do gás varia com  $x$ , pois a pressão é constante, então para ter  $p = nkT = \text{constante}$ , deve-se considerar  $R_x = -K_x$ . Assim o termo de fonte da Eq. (3.1) é definido por

$$S(\mathbf{c}) = -c_x(c_x^2 + c_y^2 + c_z^2 - 5/2)K_x, \quad (3.22)$$

onde a adimensionalização da magnitude da velocidade ( $c$ ) é dado pela Eq. (1.17). Assim, considera-se as Eqs. (3.2), (3.3), (3.7) e (3.11), e encontra-se

$$\mathbf{A}(\xi) = -K_x \begin{bmatrix} \xi^2 - 1/2 \\ 2^{1/2} \end{bmatrix}. \quad (3.23)$$



### 3.3.2 Problema de Deslizamento Viscoso

O problema de Deslizamento Viscoso descreve o fluxo de um gás em um domínio semiinfinito, causado por um gradiente de velocidade ( $k_0$ ) na direção do fluxo. O gás está limitado por uma placa localizada em  $\tau = 0$ , onde  $\tau \in [0, \infty)$ . Para esse problema a Maxwelliana utilizada para linearizar a Eq. (1.10) é dada por

$$f_0(y, \mathbf{v}) = n_0 \left( \frac{m}{2\pi kT_0} \right)^{3/2} \exp \left( -\frac{m(v_x^2 + v_y^2 + [v_z - u_1(y)]^2)}{2kT_0} \right), \quad (3.24)$$

onde

$$u_1(y) = K_y. \quad (3.25)$$

O termo de fonte da Eq. (3.1) é definido por

$$S(\mathbf{c}) = -2c_x c_y k_0, \quad (3.26)$$

onde  $k_0$  é dado pela Eq. (1.18) e a adimensionalização da magnitude da velocidade da partícula ( $c$ ) é dado pela Eq. (1.17). Das Eqs. (3.2), (3.3), (3.7) e (3.11), tem-se

$$\mathbf{A}(\xi) = -K_0 \begin{bmatrix} \xi \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (3.27)$$

# Capítulo 4

## GRANDEZAS FÍSICAS

Deseja-se calcular as quantidades físicas de interesse que estão relacionadas a velocidade das partículas e ao fluxo de calor, essas grandezas estão definidas em termos da função  $h(\tau, \mathbf{c})$ . Assim para o perfil de velocidade  $u(\tau)$  e o perfil de fluxo de calor  $q(\tau)$ , conforme Siewert (Siewert, 2002a), tem-se, respectivamente

$$u(\tau) = \pi^{-3/2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-c^2} h(\tau, c_x, c_y, c_z) c_y dc_x dc_y dc_z, \quad (4.1)$$

$$q(\tau) = \pi^{-3/2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-c^2} h(\tau, c_x, c_y, c_z) \left( c^2 - \frac{5}{2} \right) c_y dc_x dc_y dc_z. \quad (4.2)$$

As grandezas físicas devem ser escritas na forma vetorial como foi proposto no capítulo anterior.

### 4.1 Problema de Deslizamento Térmico

Para o problema de Deslizamento Térmico as grandezas físicas na forma vetorial são dadas por:

- Perfil de velocidade:

$$u(\tau) = \pi^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\xi^2} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}^T G(\tau, \xi) d\xi. \quad (4.3)$$

- Perfil de fluxo de calor:

$$q(\tau) = \pi^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\xi^2} \begin{bmatrix} (\xi^2 - 1/2) \\ 2^{1/2} \end{bmatrix}^T G(\tau, \xi) d\xi, \quad (4.4)$$

onde  $T$  representa a operação transposta.

O coeficiente de Deslizamento Térmico  $A_s$ , que é usado nas equações de hidrodinâmicas quando considera-se a condição de deslizamento de velocidade do gás na parede (Camargo, 2003), é definido por

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} u(\tau) = A_s, \quad (4.5)$$

onde  $u(\tau)$  é o perfil de velocidade dado pela Eq. (4.3).

## 4.2 Problema de Deslizamento Viscoso

Para o problema de Deslizamento Viscoso as grandezas físicas na forma vetorial são dadas por:

- Perfil de velocidade:

$$u(\tau) = k_0 \tau + \pi^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\xi^2} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}^T G(\tau, \xi) d\xi. \quad (4.6)$$

- Perfil de fluxo de calor:

$$q(\tau) = \pi^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\xi^2} \begin{bmatrix} (\xi^2 - 1/2) \\ 2^{1/2} \end{bmatrix}^T G(\tau, \xi) d\xi. \quad (4.7)$$

O comportamento do perfil de velocidade no infinito é dado por

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{d}{d\tau} u(\tau) = k_0, \quad (4.8)$$

onde  $k_0$  é o gradiente de velocidade constante,  $u(\tau)$  é o perfil de velocidade dado pela Eq. (4.6).

O coeficiente de Deslizamento Viscoso será determinado no capítulo 6.

# Capítulo 5

## SOLUÇÃO EM ORDENADAS DISCRETAS

Para determinar os resultados numéricos, proposto neste trabalho, derivado dos quatro modelos (BGK, S, Gross-Jackson, MRS), utiliza-se uma versão analítica do método de ordenadas discretas (ADO) e para descrever a interação entre o gás e a superfície, utiliza-se o modelo de Cercignani-Lampis.

O método de Ordenadas Discretas proposto por Wick (Wick, 1943) e Chandrasekhar (Chandrasekhar, 1950), é um dentre os métodos determinísticos usados na resolução de problemas derivados da equação de Boltzmann linearizada. Este método consiste em aproximar a integral angular no termo de espalhamento da equação de transporte por uma fórmula de quadratura numérica, onde resolve-se analiticamente o sistema de equações algébricas resultantes dessa aproximação. Mas ainda existe uma certa dificuldade em aplicar a solução em ordenadas discretas no cálculo das constantes de separação como raízes de um polinômio.

Neste capítulo, uma versão analítica do método de ordenadas discretas (Barichello e Siewert, 1999; Siewert, 2000a), é utilizado para resolver problemas baseados em modelos derivados da ELB. No desenvolvimento da solução utilizando este método, segue-se os seguintes passos:

- escreve-se a versão em ordenadas discretas, baseada num esquema de quadratura do tipo “half-range”;
- busca-se soluções do tipo exponencial para o problema;
- encontra-se o problema de autovalores;
- determina-se as soluções elementares;
- determina-se uma expressão para os autovetores;
- encontra-se o sistema linear de equações algébricas;

- determina-se as quantidades de interesse utilizando a solução em ordenadas discretas.

Como nosso problema é não-homogêneo antes de aplicar o método de ordenadas discretas analítico, determina-se uma solução particular para encontrar a solução dos problemas de Deslizamento Térmico Deslizamento Viscoso.

## 5.1 Solução Particular

Devido ao termo de fonte que aparece na Eq. (3.14), torna-se necessário determinar soluções particulares que dependem do problema a ser resolvido. Seguindo Cabrera e Barichello (Cabrera e Barichello, 2006), segue-se a seguinte proposta de solução particular

$$\mathbf{G}^p(\tau, \xi) = \mathbf{B}\tau^2 + \mathbf{C}\tau\xi + \mathbf{D}\xi^2 + \mathbf{E}\xi + \mathbf{F}, \quad (5.1)$$

que será considerada para todos os problemas, onde  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{F}$  são vetores  $(2n \times 1)$  constantes.

Para uma melhor compreensão denota-se para o problema de Deslizamento Térmico o sub-índice  $s$  e para o problema de Deslizamento Viscoso o sub-índice  $k$ , então substituindo a Eq. (5.1) na Eq. (3.14), encontra-se para o problema de Deslizamento Térmico a seguinte solução particular

$$\mathbf{G}_s^p(\tau, \xi) = \frac{k_t}{2\varepsilon(\beta - 1)} \begin{bmatrix} \xi^2 \\ \sqrt{2} \end{bmatrix}. \quad (5.2)$$

Para o problema de Deslizamento Viscoso faz-se a mesma substituição que no problema de Deslizamento Térmico e encontra-se como solução particular

$$\mathbf{G}_k^p(\tau, \xi) = \frac{k_0\xi}{\varepsilon(\varpi - 1)} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (5.3)$$

Encontrada a solução particular tem-se como proposta de solução geral para o problema a seguinte equação

$$\mathbf{G}(\tau, \xi) = \mathbf{G}^h(\tau, \xi) + \mathbf{G}^p(\tau, \xi), \quad (5.4)$$

onde  $\mathbf{G}^p(\tau, \xi)$  denota a solução particular e  $\mathbf{G}^h(\tau, \xi)$  a solução homogênea.

A solução homogênea  $\mathbf{G}^h(\tau, \xi)$  é definida pela Eq. (3.14) na qual não considera-se o termo de fonte, assim tem-se

$$\xi \frac{\partial}{\partial \tau} \mathbf{G}^h(\tau, \xi) + \varepsilon \mathbf{G}^h(\tau, \xi) = \varepsilon \int_{-\infty}^{\infty} \psi(\xi') \mathbf{K}(\xi', \xi) \mathbf{G}^h(\tau, \xi') d\xi', \quad (5.5)$$

onde  $\psi(\xi)$  é dada pela Eq. (3.16) e  $\mathbf{K}(\xi', \xi)$  é dado pela Eq. (3.17).

## 5.2 Solução em Ordenadas Discretas

Como a Eq. (3.16) é uma função equilíbrio, pode-se reescrever a Eq. (5.5) como

$$\xi \frac{\partial}{\partial \tau} \mathbf{G}^h(\tau, \xi) + \varepsilon \mathbf{G}^h(\tau, \xi) = \varepsilon \int_0^\infty \psi(\xi') [\mathbf{K}(\xi', \xi) \mathbf{G}^h(\tau, \xi') + \mathbf{K}(-\xi', \xi) \mathbf{G}^h(\tau, -\xi')] d\xi', \quad (5.6)$$

onde, aplicando-se o método de ADO reescreve-se a Eq. (5.6) como

$$\begin{aligned} \pm \xi_i \frac{d}{d\tau} \mathbf{G}^h(\tau, \pm \xi) + \varepsilon \mathbf{G}^h(\tau, \pm \xi) = \\ \varepsilon \sum_{k=1}^N \omega_k \psi(\xi_k) [\mathbf{K}(\xi_k, \pm \xi_i) \mathbf{G}^h(\tau, \xi_k) + \mathbf{K}(-\xi_k, \pm \xi_i) \mathbf{G}^h(\tau, -\xi_k)], \end{aligned} \quad (5.7)$$

para  $i = 1, \dots, N$ . Tem-se que  $\xi_k$  e  $\omega_k$ ,  $k = 1, \dots, N$  correspondem, respectivamente, aos  $N$  pontos e pesos de quadratura obtidos pelo método ADO, onde a integral pertence ao intervalo  $[0, \infty)$ .

De acordo com Siewert (Siewert, 2002a), para resolver o problema proposto pela Eq. (5.7), propõe-se uma solução na forma exponencial do tipo

$$\mathbf{G}^h(\tau, \xi) = \Phi(\nu, \xi) e^{-\varepsilon \tau / \nu}, \quad (5.8)$$

onde

$$\Phi(\nu, \xi) = \begin{bmatrix} \Phi_1(\nu, \xi) \\ \Phi_2(\nu, \xi) \end{bmatrix}. \quad (5.9)$$

Agora substituindo a Eq.(5.8) na Eq. (5.7), obtém-se

$$(1 \mp \frac{\xi_i}{\nu}) \Phi(\nu, \pm \xi) = \sum_{k=1}^N \omega_k \psi(\xi_k) [\mathbf{K}(\xi_k, \pm \xi_i) \Phi(\nu, \xi_k) + \mathbf{K}(-\xi_k, \pm \xi_i) \Phi(\nu, -\xi_k)], \quad (5.10)$$

para  $i = 1, \dots, N$ , escreve-se a Eq. (5.10) na forma matricial como

$$(\mathbf{I} - \mathbf{M}\nu^{-1}) \Phi_+(\nu) = \mathbf{W}(+, +) \Phi_+(\nu) + \mathbf{W}(-, +) \Phi_-(\nu), \quad (5.11)$$

$$(\mathbf{I} + \mathbf{M}\nu^{-1}) \Phi_-(\nu) = \mathbf{W}(+, -) \Phi_+(\nu) + \mathbf{W}(-, -) \Phi_-(\nu), \quad (5.12)$$

onde,  $\mathbf{I}$  é matriz identidade ( $2N \times 2N$ ),  $\mathbf{M}$  é a matriz ( $2N \times 2N$ ) definida por

$$\mathbf{M} = \text{diag}[\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N] \quad (5.13)$$

e,  $\Phi_{\pm}(\mathbf{v})$  são vetores de dimensão  $2N$  definidos por

$$\Phi_{\pm}(\mathbf{v}) = [ \Phi_1(\mathbf{v}, \pm\xi_1) \ \dots \ \Phi_1(\mathbf{v}, \pm\xi_N) \ \Phi_2(\mathbf{v}, \pm\xi_1) \ \dots \ \Phi_2(\mathbf{v}, \pm\xi_N) ]^T, \quad (5.14)$$

aqui  $T$  representa a operação transposta.

Tem-se ainda que  $\mathbf{W}(\pm, \pm)$  é a matriz ( $2N \times 2N$ ), dada por

$$\mathbf{W}(\pm, \pm) = \begin{bmatrix} \mathbf{W}_{11}(\pm, \pm) & \mathbf{W}_{12}(\pm, \pm) \\ \mathbf{W}_{21}(\pm, \pm) & \mathbf{W}_{22}(\pm, \pm) \end{bmatrix}, \quad (5.15)$$

cujas componentes de  $\mathbf{W}$  são sub-matrizes de dimensão  $N \times N$  definias por

$$[\mathbf{W}_{mn}(\pm, \pm)]_{i,j} = \omega_j \psi(\xi_j) k_{mn}(\pm\xi_j, \pm\xi_i), \quad m, n = 1, 2 \quad e \quad i, j = 1, \dots, N, \quad (5.16)$$

onde  $\omega_j$  são os pesos do esquema de quadratura,  $\psi(\xi_j)$  é definido pela Eq. (3.16) e  $k_{mn}(\pm\xi_j, \pm\xi_i)$  são as componentes da matriz ( $2 \times 2$ ) dadas pelas Eqs. (3.8), (3.9), (3.12) e (3.13), observa-se que essas componentes da matriz ( $2 \times 2$ ) dada pela Eq. (3.17) são simétricas em relação umas das outras aos sinais de  $\xi$  e  $\xi'$ , ou seja,

$$\mathbf{K}(\xi', \xi) = \mathbf{K}(-\xi', -\xi), \quad (5.17)$$

$$\mathbf{K}(\xi', -\xi) = \mathbf{K}(-\xi', \xi), \quad (5.18)$$

dessa simetria, resulta que

$$\mathbf{W}(+, +) = \mathbf{W}(-, -), \quad (5.19)$$

$$\mathbf{W}(+, -) = \mathbf{W}(-, +). \quad (5.20)$$

Novamente seguindo Siewert (Siewert, 2002a), pode-se definir

$$\mathbf{W}_+ = \mathbf{W}(+, +) = \mathbf{W}(-, -), \quad (5.21)$$

$$\mathbf{W}_- = \mathbf{W}(+, -) = \mathbf{W}(-, +), \quad (5.22)$$

assim, escreve-se as Eqs. (5.11) e (5.12), como

$$(\mathbf{I} - \mathbf{M}\mathbf{v}^{-1})\Phi_+(\mathbf{v}) = \mathbf{W}_+\Phi_+(\mathbf{v}) + \mathbf{W}_-\Phi_-(\mathbf{v}), \quad (5.23)$$

$$(\mathbf{I} + \mathbf{M}\mathbf{v}^{-1})\Phi_-(\mathbf{v}) = \mathbf{W}_-\Phi_+(\mathbf{v}) + \mathbf{W}_+\Phi_-(\mathbf{v}). \quad (5.24)$$

Agora define-se, conforme Siewert (Siewert, 2002a)

$$\mathbf{U} = \Phi_+(\mathbf{v}) + \Phi_-(\mathbf{v}), \quad (5.25)$$

onde  $\Phi_+(\mathbf{v})$  e  $\Phi_-(\mathbf{v})$  são os vetores definidos na Eq. (5.14).

Neste momento, soma-se e subtrai-se as Eqs. (5.23) e (5.24) e usando-se a Eq. (5.25), obtém-se o problema de autovalores

$$\mathbf{A}\mathbf{X} = \lambda\mathbf{X}, \quad (5.26)$$

onde,  $\mathbf{A}$  é a matriz ( $2N \times 2N$ ) definida por

$$\mathbf{A} = (\mathbf{W}_+ - \mathbf{W}_- - \mathbf{I})\mathbf{M}^{-1}(\mathbf{W}_+ + \mathbf{W}_- - \mathbf{I})\mathbf{M}^{-1}, \quad (5.27)$$

onde  $\mathbf{X}$  é o autovetor associado, tal que

$$\mathbf{X} = \mathbf{M}\mathbf{U}, \quad (5.28)$$

e  $\lambda$  é o autovalor associado, dado por

$$\lambda = \mathbf{v}^{-2}, \quad (5.29)$$

aqui ressalta-se que esses autovalores são reais e distintos.

O problema de autovalores dado pela Eq. (5.26), gera  $2N$  constantes de separação  $\mathbf{v}_j$  associados a  $2N$  vetores  $\mathbf{X}(\mathbf{v}_j)$ , que quando aplicados nas Eqs. (5.23) e (5.24), obtém-se as soluções elementares, dadas por

$$\Phi_+(\mathbf{v}_j) = \frac{1}{2}\mathbf{M}^{-1}[\mathbf{I} - \mathbf{v}_j(\mathbf{W}_+ + \mathbf{W}_- - \mathbf{I})\mathbf{M}^{-1}]\mathbf{X}(\mathbf{v}_j), \quad (5.30)$$

$$\Phi_-(\mathbf{v}_j) = \frac{1}{2}\mathbf{M}^{-1}[\mathbf{I} + \mathbf{v}_j(\mathbf{W}_+ + \mathbf{W}_- - \mathbf{I})\mathbf{M}^{-1}]\mathbf{X}(\mathbf{v}_j). \quad (5.31)$$



De acordo com a proposta de solução na forma exponencial dada pela Eq. (5.8), pode-se escrever a solução geral dada pela Eq. (5.7), como

$$\mathbf{G}^h(\tau, \pm \xi_i) = \sum_{j=1}^{2N} [A_j \Phi(v_j, \pm \xi_i) e^{-\varepsilon(a+\tau)/v_j} + B_j \Phi(v_j, \mp \xi_i) e^{-\varepsilon(a-\tau)/v_j}]. \quad (5.32)$$

Em consequência de ser um problema conservativo (Barichello et al., 2001), tem-se que um dos autovalores tende a zero quando  $N \rightarrow \infty$ , ou seja, uma das constantes de separação  $v_j$  torna-se ilimitada. Logo, para escrever a solução geral do problema em termos das soluções elementares e linearmente independentes, negligencia-se a maior das constantes de separação, onde adiciona-se duas novas soluções exatas que devem satisfazer a Eq. (5.5). Portanto, a solução é

$$\mathbf{G}^h(\tau, \pm \xi_i) = A_1^* \mathbf{G}_1 + B_1^* \mathbf{G}_2(\tau, \pm \xi_i) + \sum_{j=1}^{2N-1} [A_j \Phi(v_j, \pm \xi_i) e^{-\varepsilon(a+\tau)/v_j} + B_j \Phi(v_j, \mp \xi_i) e^{-\varepsilon(a-\tau)/v_j}], \quad (5.33)$$

em semi-espço a solução é dada por

$$\mathbf{G}^h(\tau, \pm \xi_i) = A_1^* \mathbf{G}_1 + B_1^* \mathbf{G}_2(\tau, \pm \xi_i) + \sum_{j=1}^{2N-1} [A_j \Phi(v_j, \pm \xi_i) e^{-\varepsilon\tau/v_j} + B_j \Phi(v_j, \mp \xi_i) e^{-\varepsilon\tau/v_j}], \quad (5.34)$$

onde as soluções exatas são dadas por

$$\mathbf{G}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.35)$$

e

$$\mathbf{G}_2(\tau, \xi) = \begin{bmatrix} \varepsilon\tau - \xi/(1 - \varpi) \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (5.36)$$

Como, este trabalho é um problema em semi-espço, deseja-se que suas soluções homogêneas sejam limitadas, então considera-se  $B_1^* = 0$ ,  $B_j = 0$   $j = 1, \dots, 2N - 1$  na Eq. (5.34), e a solução em ordenadas discretas será

$$\mathbf{G}^h(\tau, \pm \xi_i) = A_1^* \mathbf{G}_1 + \sum_{j=1}^{2N-1} A_j \Phi(v_j, \pm \xi_i) e^{-\varepsilon\tau/v_j}. \quad (5.37)$$

Encontradas a solução particular e a solução homogênea, escreve-se a solução geral do

problema dado como

$$\mathbf{G}(\tau, \xi) = \mathbf{G}^p(\tau, \xi) + A_1^* \mathbf{G}_1 + \sum_{j=1}^{2N-1} A_j \Phi(v_j, \pm \xi_i) e^{-\varepsilon \tau / v_j}. \quad (5.38)$$

As constantes arbitrárias  $A_j$ , serão determinadas substituindo a Eq. (5.37) nas condições de contorno na forma de ordenadas discretas, assim obtém-se um sistema linear algébrico  $(2N \times 2N)$ , o qual será determinado no próximo capítulo.

## Capítulo 6

# SOLUÇÃO ATRAVÉS DAS CONDIÇÕES DE CONTORNO

Tendo conhecida a solução geral do problema Eq. (5.38), deve-se determinar os  $2N$  coeficientes  $A_1^*$  e  $A_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, 2N - 1$ , para isso usa-se as condições de contorno de Cercignani-Lampis, onde primeiramente deve-se adequá-las à nova formulação, ou seja, a forma vetorial conforme a Eq. (3.14).

Assim, deve-se multiplicar as Eqs. (1.47) e (1.48) pelos momentos Eq. (3.2) e, posteriormente, pela Eq. (3.3), integrando-se sobre todo  $c_y$  e  $c_z$ , encontra-se, conforme notação vetorial proposta para as condições de Cercignani-Lampis as seguinte equações dadas

$$\mathbf{G}(-a, \xi) = A \int_0^\infty \mathbf{G}(-a, -\xi') f(\xi' : \xi) d\xi', \quad (6.1)$$

$$\mathbf{G}(a, -\xi) = A \int_0^\infty \mathbf{G}(a, \xi') f(\xi' : \xi) d\xi', \quad (6.2)$$

para as Eqs. (1.47) e (1.48) respectivamente.

Tem-se, ainda que

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} (1 - \alpha_t) & 0 \\ 0 & (1 - \alpha_t)^3 \end{bmatrix} \quad (6.3)$$

e

$$f(\xi' : \xi) = \frac{2\xi'}{\alpha_n} \exp \left[ -\frac{[(1 - \alpha_n)^{1/2} \xi - \xi']^2}{\alpha_n} \right] \hat{I}_0 \left[ \frac{2(1 - \alpha_n)^{1/2} \xi' \xi}{\alpha_n} \right], \quad (6.4)$$

para  $\xi, \xi' \in (0, \infty)$ , onde  $\hat{I}_0$  é dado pela Eq. (1.46).

Por ser um problema semiinfinito considera-se somente uma das equações de contorno na

forma vetorial. Tomando a Eq. (6.1) e fazendo  $a = 0$ , tem-se

$$\mathbf{G}(0, \xi) = A \int_0^\infty \mathbf{G}(0, -\xi') f(\xi' : \xi) d\xi'. \quad (6.5)$$

## 6.1 Núcleo de Cercignani-Lampis

Para determinar os coeficientes define-se o sistema algébrico obtido pela substituição da Eq. (5.38) na Eq. (6.5), e obtém-se

$$\mathbf{A}_1^* \left\{ \mathbf{G}_1 - \left[ \mathbf{A} \mathbf{G}_1 \sum_{k=1}^N \omega_k f(\xi_k : \xi_i) \right] \right\} + \sum_{j=1}^{2N-1} \mathbf{A}_j \left\{ \Phi_+(v_j) - \left[ \sum_{k=1}^N \omega_k f(\xi_k : \xi_i) \mathbf{A} \Phi_-(v_j) \right] \right\} = \mathbf{R}(\xi_i), \quad (6.6)$$

onde para o problema de Deslizamento Térmico, tem-se

$$\mathbf{R}(\xi_i) = \mathbf{R}_s(\xi_i) = \mathbf{A} \sum_{k=1}^N \omega_k f(\xi_k : \xi_i) \mathbf{G}_s^p(0, \xi_k) - \mathbf{G}_s^p(0, \xi_i) \quad (6.7)$$

e para o problema de Deslizamento Viscoso, tem-se

$$\mathbf{R}(\xi_i) = \mathbf{R}_k(\xi_i) = \mathbf{A} \sum_{k=1}^N \omega_k f(\xi_k : \xi_i) \mathbf{G}_k^p(0, \xi_k) - \mathbf{G}_k^p(0, \xi_i), \quad (6.8)$$

onde  $\mathbf{A}$  é a matriz dada pela Eq. (6.3),  $\omega_k$  são os pesos de quadratura e  $f(\xi_k : \xi_i)$  é dado pela Eq. (6.4).

## 6.2 Quantidades de Interesse

Tendo definida a solução geral do problema dada pela Eq. (5.38), e encontrado os coeficientes  $\mathbf{A}_1^*$  e  $\mathbf{A}_j$ ,  $j = 1, \dots, 2N - 1$ , pode-se determinar as grandezas físicas de interesse.

### Problema de Deslizamento Térmico

- Perfil de velocidade:  
substitui-se a Eq. (5.38) na Eq. (4.3), obtendo-se

$$u_s(\tau) = \frac{k_t}{4\varepsilon(\beta - 1)} + \mathbf{A}_1^* + \sum_{j=1}^{2N-1} \mathbf{A}_j e^{-\varepsilon\tau/v_j} \mathbf{V}(v_j). \quad (6.9)$$

- Perfil de fluxo de calor:  
substitui-se a Eq. (5.38) na Eq. (4.4), obtendo-se

$$q_s(\tau) = \frac{5k_t}{4\varepsilon(\beta - 1)} + \sum_{j=1}^{2N-1} \mathbf{A}_j e^{-\varepsilon\tau/v_j} \mathbf{Y}(\mathbf{v}_j). \quad (6.10)$$

- Coeficiente de Deslizamento Térmico:  
substitui-se a Eq. (6.9) na Eq. (4.5), obtendo-se

$$A_s = \frac{k_t}{4\varepsilon(\beta - 1)} + \mathbf{A}_1^*. \quad (6.11)$$

Tem-se que

$$\mathbf{V}(\mathbf{v}_j) = \sum_{k=1}^N \omega_k \psi(\xi_k) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}^T [\Phi(\mathbf{v}_j, \xi_k) + \Phi(\mathbf{v}_j, -\xi_k)] \quad (6.12)$$

e

$$\mathbf{Y}(\mathbf{v}_j) = \sum_{k=1}^N \omega_k \psi(\xi_k) \begin{bmatrix} \xi_k^2 - 1/2 \\ \sqrt{2} \end{bmatrix}^T [\Phi(\mathbf{v}_j, \xi_k) + \Phi(\mathbf{v}_j, -\xi_k)]. \quad (6.13)$$

### Problema de Deslizamento Viscoso

- Perfil de velocidade:  
substitui-se a Eq. (5.38) na Eq. (4.6), obtendo-se

$$u_k(\tau) = k_0 \tau + \mathbf{A}_1^* + \sum_{j=1}^{2N-1} \mathbf{A}_j e^{-\varepsilon\tau/v_j} \mathbf{V}(\mathbf{v}_j). \quad (6.14)$$

- Perfil de fluxo de calor:  
substitui-se a Eq. (5.38) na Eq. (4.7), obtendo-se

$$q_k(\tau) = \sum_{j=1}^{2N-1} \mathbf{A}_j e^{-\varepsilon\tau/v_j} \mathbf{Y}(\mathbf{v}_j). \quad (6.15)$$

- Coeficiente de Deslizamento Viscoso:  
Conforme Knackfuss (Knackfuss, 2005), inicialmente faz-se

$$u_{asy}(\tau) = k_0 \tau + \mathbf{A}_1^*, \quad (6.16)$$

onde define-se o coeficiente de deslizamento viscoso como

$$u_{asy}(0) = A_k \frac{d}{d\tau} u_{asy} \Big|_{\tau=0}. \quad (6.17)$$

Portanto das Eqs. (6.16) e (6.17), obtém-se

$$A_k = \frac{A_1^*}{k_0}. \quad (6.18)$$

Da Eq. (6.14) vem que  $\mathbf{V}(v_j)$  é dado pela Eq. (6.12) e na Eq. (6.15) tem-se que  $\mathbf{Y}(v_j)$  é dado pela Eq. (6.13).

No próximo capítulo serão apresentados os resultados numéricos para os problemas propostos neste trabalho, bem como a descrição dos procedimentos utilizados na implementação computacional do método analítico em ordenadas discretas (ADO).

# Capítulo 7

## RESULTADOS NUMÉRICOS

Para obter os resultados numéricos, utiliza-se nesse trabalho a implementação computacional através da linguagem FORTRAN. Primeiramente, define-se um esquema de quadratura associado com o método analítico de ordenadas discretas, para isso mapeia-se os pontos  $\xi$  em  $[0, \infty)$  e  $u(\xi)$  em  $[0, 1]$ , onde utiliza-se a seguinte transformação linear

$$u(\xi) = \exp(-\xi), \quad (7.1)$$

após, usa-se o esquema de quadratura de Gauss-Legendre (Burden e Faires, 1997) mapeando linearmente em  $[0, 1]$ .

Definido o esquema de quadratura, segue-se os seguintes passos básicos para implementar a solução ADO:

- resolve-se o problema de autovalores dado pela Eq. (5.26);
- avalia-se as soluções elementares dadas pelas Eqs. (5.30) e (5.31);
- resolve-se o sistema linear definido pela Eq. (6.6);
- avalia-se as quantidades de interesse dadas pelas Eqs. (6.9), (6.10) e (6.11), para o problema de Deslizamento Térmico e pelas Eqs. (6.14), (6.15) e (6.17), para o problema de Deslizamento Viscoso.

Segue-se esses passos fazendo o uso dos pacotes de software de álgebra linear, usualmente LINPACK (Dongarra et al., 1979) e EISPACK (Smith et al., 1976) que são usados para trabalhar com os problemas de autovalores e autovetores e com o sistema linear.

Apresenta-se, neste trabalho, resultados numéricos listados em tabelas, onde utilizou-se  $N = 60$  como número de pontos de quadratura, as notações usadas nas tabelas defidas como ELB-DE e ELB-CL, representam respectivamente a equação linearizada de Boltzmann com as

condições de contorno de Maxwell e condições de contorno de Cercignani-Lampis, ainda  $(-1)$ ,  $(-2)$  e  $(1)$  representam respectivamente  $10^{-1}$ ,  $10^{-2}$  e  $10^1$ .

Neste trabalho, é analisado os resultados numéricos para o problema de Deslizamento Térmico e Deslizamento Viscoso fazendo uso dos quatro modelos, ou seja, modelos BGK, S, Gross-Jackson e MRS, com as condições de contorno de Cercignani-Lampis em coordenadas cartesianas e quando disponíveis será feito comparação com outros trabalhos existentes na literatura.

## 7.1 Deslizamento Térmico

As tabelas (7.1) a (7.10) referem-se ao problema de Deslizamento Térmico, nas quais considerou-se  $\varepsilon = \varepsilon_t$ . Encontram-se nas tabelas (7.1) e (7.2) os perfis de velocidade  $u_s(\tau)$  para  $\alpha_n = 0.01$  e  $\alpha_t = 0.1$ . Na tabela (7.1) são analisados os resultados para os modelos BGK e S, comparando os mesmos com os das referências (Knackfuss, 2005; Siewert, 2003c). Os resultados numéricos obtidos neste trabalho estão em conformidade com aqueles obtidos por Knackfuss (Knackfuss, 2005), pois foram trabalhados problemas iguais utilizando uma formulação analítica diferente.

Na tabela (7.2) encontram-se resultados para os quatro modelos, onde verifica-se que os modelos S e Gross-Jackson possuem uma melhor aproximação conforme o aumento da posição normalizada  $\tau$ .

Tabela 7.1: Problema de Deslizamento Térmico: perfil de velocidade  $u_s$ ,  $\alpha_t = 0.1$

$\tau$	BGK	S	$BGK - CL^a$	$S - CL^a$	$ELB - DE^b$
	$\alpha_n = 0.01$	$(\varepsilon = \varepsilon_t)$ $\alpha_n = 0.01$	$(\varepsilon = \varepsilon_t)$ $\alpha_n = 0.01$	$(\varepsilon = \varepsilon_t)$ $\alpha_n = 0.01$	
0.0	2.176172(-1)	2.122634(-1)	2.176172(-1)	2.122634(-1)	2.3877(-1)
0.1	2.241663(-1)	2.209868(-1)	2.241663(-1)	2.209868(-1)	2.4634(-1)
0.2	2.277114(-1)	2.258687(-1)	2.277114(-1)	2.258687(-1)	2.5011(-1)
0.3	2.303137(-1)	2.295285(-1)	2.303137(-1)	2.295285(-1)	2.5279(-1)
0.4	2.323700(-1)	2.324551(-1)	2.323700(-1)	2.324551(-1)	2.5484(-1)
0.5	2.340581(-1)	2.348708(-1)	2.340581(-1)	2.348708(-1)	2.5648(-1)
0.6	2.354775(-1)	2.369036(-1)	2.354775(-1)	2.369036(-1)	2.5782(-1)
0.7	2.366909(-1)	2.386366(-1)	2.366909(-1)	2.386366(-1)	2.5892(-1)
0.8	2.377412(-1)	2.401282(-1)	2.377412(-1)	2.401282(-1)	2.5985(-1)
0.9	2.386589(-1)	2.414215(-1)	2.386589(-1)	2.414215(-1)	2.6064(-1)
1.0	2.394670(-1)	2.425493(-1)	2.394670(-1)	2.425493(-1)	2.6131(-1)

$$Ref^a = [\text{Knackfuss, 2005}] \quad Ref^b = [\text{Siewert, 2003c}]$$



Tabela 7.2: Problema de Deslizamento Térmico: perfil de velocidade  $u_s$ ,  $\alpha_t = 0.1$ 

$\tau$	BGK	S	GJ	MRS
	$\alpha_n = 0.01$	$(\varepsilon = \varepsilon_t)$ $\alpha_n = 0.01$	$(\varepsilon = \varepsilon_t)$ $\alpha_n = 0.01$	$(\varepsilon = \varepsilon_t)$ $\alpha_n = 0.01$
0.0	2.176172(-1)	2.122634(-1)	2.062333(-1)	2.223902(-1)
0.1	2.241663(-1)	2.209868(-1)	2.179237(-1)	2.273210(-1)
0.2	2.277114(-1)	2.258687(-1)	2.247006(-1)	2.299126(-1)
0.3	2.303137(-1)	2.295285(-1)	2.298453(-1)	2.317679(-1)
0.4	2.323700(-1)	2.324551(-1)	2.339603(-1)	2.332050(-1)
0.5	2.340581(-1)	2.348708(-1)	2.373325(-1)	2.343662(-1)
0.6	2.354775(-1)	2.369036(-1)	2.401358(-1)	2.353305(-1)
0.7	2.366909(-1)	2.386366(-1)	2.424890(-1)	2.361473(-1)
0.8	2.377412(-1)	2.401282(-1)	2.444781(-1)	2.368493(-1)
0.9	2.386589(-1)	2.414215(-1)	2.461689(-1)	2.374598(-1)
1.0	2.394670(-1)	2.425493(-1)	2.476122(-1)	2.379960(-1)

O perfil de fluxo de calor encontra-se na tabela (7.3), avalia-se os resultados para os quatro modelos com  $\alpha_n = 0.01$  e  $\alpha_t = 0.1$ , onde percebe-se uma boa aproximação conforme o aumento da posição  $\tau$ .

Tabela 7.3: Problema de Deslizamento Térmico: perfil fluxo de calor  $p_s$ ,  $\alpha_t = 0.1$ 

$\tau$	BGK	S	GJ	MRS
	$\alpha_n = 0.01$	$(\varepsilon = \varepsilon_t)$ $\alpha_n = 0.01$	$(\varepsilon = \varepsilon_t)$ $\alpha_n = 0.01$	$(\varepsilon = \varepsilon_t)$ $\alpha_n = 0.01$
0.0	-1.099557	-1.072217	-1.041458	-1.123942
0.1	-1.141344	-1.126105	-1.110522	-1.156081
0.2	-1.162699	-1.152850	-1.143696	-1.172927
0.3	-1.177578	-1.171189	-1.166028	-1.184830
0.4	-1.188789	-1.184805	-1.182318	-1.193909
0.5	-1.197593	-1.195346	-1.194703	-1.201124
0.6	-1.204696	-1.203727	-1.204367	-1.207014
0.7	-1.210536	-1.210516	-1.212047	-1.211914
0.8	-1.215408	-1.216094	-1.218234	-1.216050
0.9	-1.219518	-1.220728	-1.223272	-1.219582
1.0	-1.223019	-1.224614	-1.227408	-1.222626

Na tabela (7.4) é analisado o coeficiente de deslizamento térmico para os quatro modelos, utilizando  $\alpha_n = 0.25$  e diferentes valores para  $\alpha_t$ . Nesta tabela percebe-se quanto maior o valor do coeficiente de acomodação tangencial maior é a aproximação dos quatro modelos.

Tabela 7.4: Problema de Deslizamento Térmico: Coeficiente de Deslizamento Térmico

$\alpha_t$	BGK	S	GJ	MRS
	$\alpha_n = 0.25$	$(\varepsilon = \varepsilon_t)$ $\alpha_n = 0.25$	$(\varepsilon = \varepsilon_t)$ $\alpha_n = 0.25$	$(\varepsilon = \varepsilon_t)$ $\alpha_n = 0.25$
0.25	3.103473(-1)	3.179911(-1)	3.267210(-1)	3.037097(-1)
0.5	3.351889(-1)	3.448836(-1)	3.554349(-1)	3.263757(-1)
0.75	3.594526(-1)	3.689663(-1)	3.791047(-1)	3.506268(-1)
1.0	3.831612(-1)	3.915748(-1)	4.004647(-1)	3.752934(-1)
1.25	4.063360(-1)	4.134959(-1)	4.209935(-1)	3.995831(-1)
1.5	4.289973(-1)	4.350791(-1)	4.413074(-1)	4.231315(-1)
1.75	4.511645(-1)	4.562730(-1)	4.612608(-1)	4.459843(-1)
2.0	4.728559(-1)	4.766765(-1)	4.800987(-1)	4.685955(-1)

Nas tabelas (7.5) a (7.10) é analisado os coeficientes de deslizamento térmico  $A_s$ , onde encontra-se nas tabelas (7.5) e (7.6) resultados para os modelos BGK e S, os quais são comparados com as referências (Knackfuss, 2005; Siewert, 2003d). A comparação deste trabalho com Knackfuss (Knackfuss, 2005), é realizada para consolidar os resultados uma vez que são os mesmos, isso deve-se ao fato dos problemas serem iguais, onde, o que diferencia-os é a formulação analítica e considera-se dois valores para  $\alpha_n$  diferentes dos valores para  $\alpha_t$ .

Tabela 7.5: Problema de Deslizamento Térmico: Coeficiente de Deslizamento Térmico

$\alpha_t$	BGK	S	$BGK - CL^a$	$S - CL^a$	$ELB - CL^b$
	$\alpha_n = 0.25$	$(\varepsilon = \varepsilon_t)$ $\alpha_n = 0.25$	$(\varepsilon = \varepsilon_t)$ $\alpha_n = 0.25$	$(\varepsilon = \varepsilon_t)$ $\alpha_n = 0.25$	
0.25	3.103473(-1)	3.179911(-1)	3.103473(-1)	3.179911(-1)	2.9049(-1)
0.5	3.351889(-1)	3.448836(-1)	3.351889(-1)	3.448836(-1)	3.0221(-1)
0.75	3.594526(-1)	3.689663(-1)	3.594526(-1)	3.689663(-1)	3.1834(-1)
1.0	3.831612(-1)	3.915748(-1)	3.831612(-1)	3.915748(-1)	3.3628(-1)
1.25	4.063360(-1)	4.134959(-1)	4.063360(-1)	4.134959(-1)	3.5369(-1)
1.5	4.289973(-1)	4.350791(-1)	4.289973(-1)	4.350791(-1)	3.6813(-1)
1.75	4.511645(-1)	4.562730(-1)	4.511645(-1)	4.562730(-1)	3.7723(-1)
2.0	4.728559(-1)	4.766765(-1)	4.728559(-1)	4.766765(-1)	3.7904(-1)

$Ref^a = [Knackfuss, 2005]$   $Ref^b = [Siewert, 2003d]$

Tabela 7.6: Problema de Deslizamento Térmico: Coeficiente de Deslizamento Térmico

$\alpha_t$	BGK	S	$BGK - CL^a$	$S - CL^a$	$ELB - CL^b$
	$\alpha_n = 0.75$	$(\varepsilon = \varepsilon_t)$ $\alpha_n = 0.75$	$(\varepsilon = \varepsilon_t)$ $\alpha_n = 0.75$	$(\varepsilon = \varepsilon_t)$ $\alpha_n = 0.75$	
0.25	3.593360(-1)	3.659777(-1)	3.593360(-1)	3.659777(-1)	3.2950(-1)
0.5	3.673333(-1)	3.757197(-1)	3.673333(-1)	3.757197(-1)	3.2748(-1)
0.75	3.752749(-1)	3.839875(-1)	3.752749(-1)	3.839875(-1)	3.3068(-1)
1.0	3.831612(-1)	3.915748(-1)	3.831612(-1)	3.915748(-1)	3.3628(-1)
1.25	3.909929(-1)	3.990826(-1)	3.909929(-1)	3.990826(-1)	3.4183(-1)
1.5	3.987705(-1)	4.069660(-1)	3.987705(-1)	4.069660(-1)	3.4491(-1)
1.75	4.064947(-1)	4.155175(-1)	4.064947(-1)	4.155175(-1)	3.4323(-1)
2.0	4.141660(-1)	4.248236(-1)	4.141660(-1)	4.248236(-1)	3.3502(-1)

$Ref^a = [Knackfuss, 2005]$   $Ref^b = [Siewert, 2003d]$

Os coeficientes de deslizamento térmico para os modelos Gross-Jackson e MRS são analisados nas tabelas (7.7) a (7.10), onde usa-se diferentes valores para  $\alpha_n$  e  $\alpha_t$ . Os resultados são comparados com os resultados encontrados nas referências (Garcia e Siewert, 2010; Siewert, 2003d) no qual verifica-se uma ótima aproximação dos valores.

Tabela 7.7: Problema de Deslizamento Térmico: Coeficiente de Deslizamento Térmico

	GJ ( $\varepsilon = \varepsilon_t$ ) $\alpha_n = 0.25$	MRS ( $\varepsilon = \varepsilon_t$ ) $\alpha_n = 0.25$	$GJ^a$ ( $\varepsilon = \varepsilon_t$ ) $\alpha_n = 0.25$	$MRS^a$ ( $\varepsilon = \varepsilon_t$ ) $\alpha_n = 0.25$	$ELB - CL^b$ ( $\varepsilon = \varepsilon_t$ ) $\alpha_n = 0.25$
$\alpha_t$					
0.25	3.26721(-1)	3.03709(-1)	3.26721(-1)	3.03709(-1)	2.90491(-1)
0.5	3.55434(-1)	3.26375(-1)	3.55434(-1)	3.26375(-1)	3.02213(-1)
0.75	3.79104(-1)	3.50626(-1)	3.79104(-1)	3.50626(-1)	3.18337(-1)
1.0	4.00464(-1)	3.75293(-1)	4.00464(-1)	3.75293(-1)	3.36280(-1)
1.25	4.20993(-1)	3.99583(-1)	4.20993(-1)	3.99583(-1)	3.53688(-1)
1.5	4.41307(-1)	4.23131(-1)	4.41307(-1)	4.23131(-1)	3.68132(-1)
1.75	4.61260(-1)	4.45984(-1)	4.61260(-1)	4.45984(-1)	3.77227(-1)
2.0	4.80098(-1)	4.68595(-1)	4.80098(-1)	4.68595(-1)	3.79039(-1)

$Ref^a = [Garcia e Siewert, 2010]$     $Ref^b = [Siewert, 2003d]$

Tabela 7.8: Problema de Deslizamento Térmico: Coeficiente de Deslizamento Térmico

	GJ ( $\varepsilon = \varepsilon_t$ ) $\alpha_n = 0.5$	MRS ( $\varepsilon = \varepsilon_t$ ) $\alpha_n = 0.5$	$GJ^a$ ( $\varepsilon = \varepsilon_t$ ) $\alpha_n = 0.5$	$MRS^a$ ( $\varepsilon = \varepsilon_t$ ) $\alpha_n = 0.5$	$ELB - CL^b$ ( $\varepsilon = \varepsilon_t$ ) $\alpha_n = 0.5$
$\alpha_t$					
0.25	3.50453(-1)	3.28806(-1)	3.50453(-1)	3.28806(-1)	3.10413(-1)
0.5	3.70202(-1)	3.43096(-1)	3.70202(-1)	3.43096(-1)	3.10530(-1)
0.75	3.86163(-1)	3.58908(-1)	3.86163(-1)	3.58908(-1)	3.24559(-1)
1.0	4.00464(-1)	3.75293(-1)	4.00464(-1)	3.75293(-1)	3.36280(-1)
1.25	4.14390(-1)	3.91528(-1)	4.14390(-1)	3.91528(-1)	3.47779(-1)
1.5	4.28651(-1)	4.07164(-1)	4.28651(-1)	4.07164(-1)	3.56626(-1)
1.75	4.43393(-1)	4.22004(-1)	4.43393(-1)	4.22004(-1)	3.60488(-1)
2.0	4.58196(-1)	4.36062(-1)	4.58196(-1)	4.36062(-1)	3.57508(-1)

$Ref^a = [Garcia e Siewert, 2010]$     $Ref^b = [Siewert, 2003d]$

Tabela 7.9: Problema de Deslizamento Térmico: Coeficiente de Deslizamento Térmico

	GJ ( $\varepsilon = \varepsilon_t$ ) $\alpha_n = 0.75$	MRS ( $\varepsilon = \varepsilon_t$ ) $\alpha_n = 0.75$	$GJ^a$ ( $\varepsilon = \varepsilon_t$ ) $\alpha_n = 0.75$	$MRS^a$ ( $\varepsilon = \varepsilon_t$ ) $\alpha_n = 0.75$	$ELB - CL^b$ ( $\varepsilon = \varepsilon_t$ ) $\alpha_n = 0.75$
$\alpha_t$					
0.25	3.73474(-1)	3.53507(-1)	3.73474(-1)	3.53507(-1)	3.29501(-1)
0.5	3.84777(-1)	3.59655(-1)	3.84777(-1)	3.59655(-1)	3.27475(-1)
0.75	3.93236(-1)	3.67163(-1)	3.93236(-1)	3.67163(-1)	3.30677(-1)
1.0	4.00464(-1)	3.75293(-1)	4.00464(-1)	3.75293(-1)	3.36280(-1)
1.25	4.07589(-1)	3.83393(-1)	4.07589(-1)	3.83393(-1)	3.41830(-1)
1.5	4.15437(-1)	3.90939(-1)	4.15437(-1)	3.90939(-1)	3.44906(-1)
1.75	4.24475(-1)	3.97507(-1)	4.24475(-1)	3.97507(-1)	3.43228(-1)
2.0	4.34679(-1)	4.02698(-1)	4.34679(-1)	4.02698(-1)	3.35020(-1)

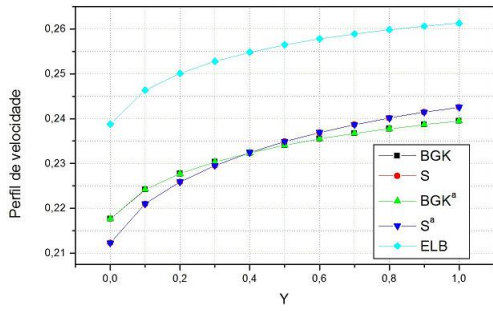
$Ref^a = [Garcia e Siewert, 2010]$   $Ref^b = [Siewert, 2003d]$

Tabela 7.10: Problema de Deslizamento Térmico: Coeficiente de Deslizamento Térmico

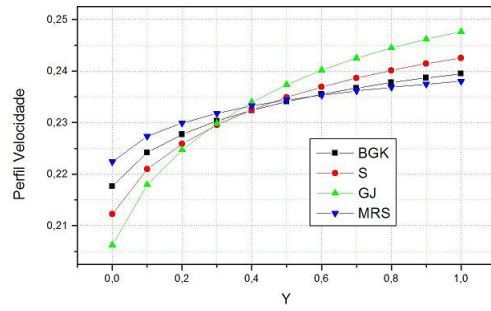
	GJ ( $\varepsilon = \varepsilon_t$ ) $\alpha_n = 1.0$	MRS ( $\varepsilon = \varepsilon_t$ ) $\alpha_n = 1.0$	$GJ^a$ ( $\varepsilon = \varepsilon_t$ ) $\alpha_n = 1.0$	$MRS^a$ ( $\varepsilon = \varepsilon_t$ ) $\alpha_n = 1.0$	$ELB - CL^b$ ( $\varepsilon = \varepsilon_t$ ) $\alpha_n = 1.0$
$\alpha_t$					
0.25	3.95843(-1)	3.77872(-1)	3.95843(-1)	3.77872(-1)	3.47874(-1)
0.5	3.99147(-1)	3.76071(-1)	3.99147(-1)	3.76071(-1)	3.39578(-1)
0.75	4.00302(-1)	3.75391(-1)	4.00302(-1)	3.75391(-1)	3.36685(-1)
1.0	4.00464(-1)	3.75293(-1)	4.00464(-1)	3.75293(-1)	3.36280(-1)
1.25	4.00626(-1)	3.75195(-1)	4.00626(-1)	3.75195(-1)	3.35876(-1)
1.5	4.01741(-1)	3.74503(-1)	4.01741(-1)	3.74503(-1)	3.33064(-1)
1.75	4.04620(-1)	3.72579(-1)	4.04620(-1)	3.72579(-1)	3.25616(-1)
2.0	4.09681(-1)	3.68622(-1)	4.09681(-1)	3.68622(-1)	3.11833(-1)

$Ref^a = [Garcia e Siewert, 2010]$   $Ref^b = [Siewert, 2003d]$

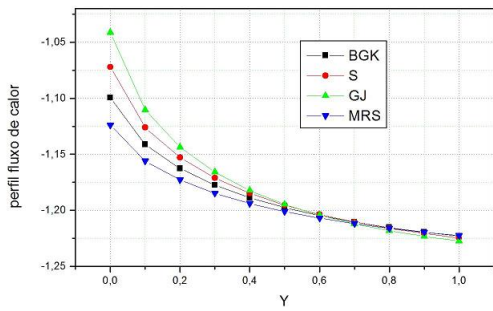
Os gráficos a seguir estão relacionados com o problema de Deslizamento Térmico levando em consideração os quatro modelos. Foram gerados considerando as tabelas apresentadas como forma de auxiliar a análise do comportamento dos perfis e dos coeficientes. Nos gráficos (a) - (c) mostra-se a influência da largura do canal no perfil de velocidade e no perfil de fluxo de calor. Nos gráficos (d) - (j), observa-se a influência dos coeficientes de acomodação  $\alpha_n$  e  $\alpha_t$  na interação gás-parede.



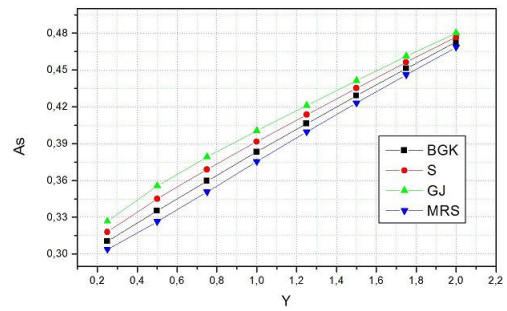
(a) Deslizamiento Térmico



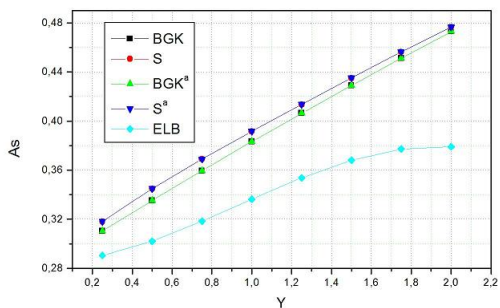
(b) Deslizamiento Térmico



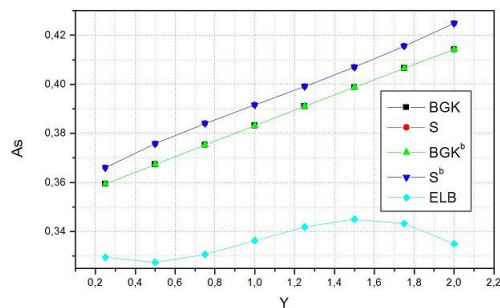
(c) Deslizamiento Térmico



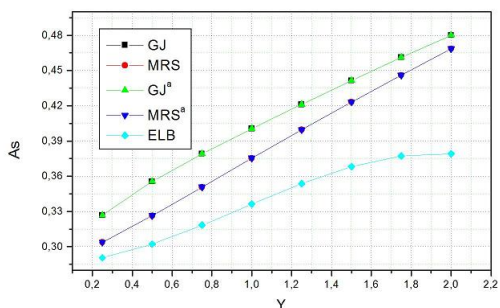
(d) Coeficiente de Deslizamiento Térmico



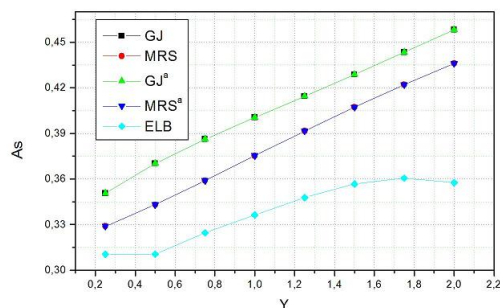
(e) Coeficiente de Deslizamento Térmico



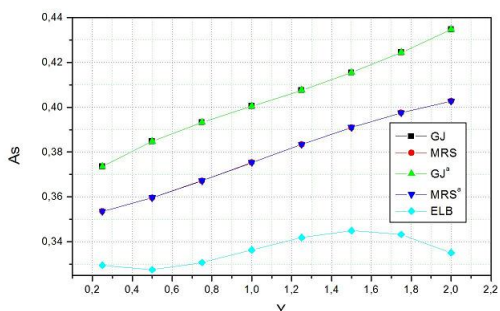
(f) Coeficiente de Deslizamento Térmico



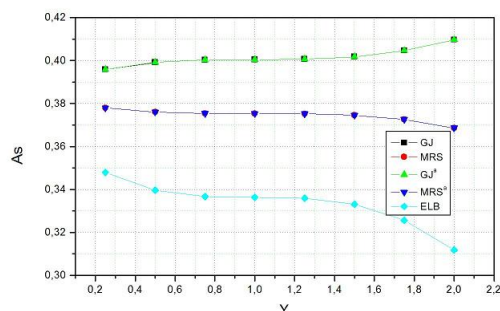
(g) Coeficiente de Deslizamento Térmico



(h) Coeficiente de Deslizamento Térmico



(i) Coeficiente de Deslizamento Térmico



(j) Coeficiente de Deslizamento Térmico

## 7.2 Deslizamento Viscoso

Os resultados numéricos para o problema de Deslizamento Viscoso é analisado nas tabelas (7.11) a (7.22), onde considera-se  $\varepsilon = \varepsilon_p$ . O perfil de velocidade é analisado para os modelos BGK e S na tabela (7.11) e o perfil de fluxo de calor para esses modelos é analisado na tabela (7.12), aqui considerou-se  $\alpha_n = 0.01$  e  $\alpha_t = 0.1$ . Os resultados obtidos para os modelos BGK e S são comparados com os resultados das referências (Knackfuss, 2005; Siewert, 2003c). A comparação deste trabalho com o trabalho de Knackfuss (Knackfuss, 2005), é realizada para consolidar os resultados que são os mesmos, pois trata-se de problemas iguais com formulação analítica diferente.

Tabela 7.11: Problema de Deslizamento Viscoso: perfil de velocidade  $u_s$ ,  $\alpha_t = 0.1$

$\tau$	BGK	S	$BGK - CL^a$	$S - CL^a$	$ELB - DE^b$
	$\alpha_n = 0.01$	$(\varepsilon = \varepsilon_p)$ $\alpha_n = 0.01$	$(\varepsilon = \varepsilon_p)$ $\alpha_n = 0.01$	$(\varepsilon = \varepsilon_p)$ $\alpha_n = 0.01$	
0.0	1.658891(1)	1.657637(1)	1.658891(1)	1.657637(1)	1.6472(1)
0.1	1.685911(1)	1.684664(1)	1.685911(1)	1.684664(1)	1.6771(1)
0.2	1.704206(1)	1.703032(1)	1.704206(1)	1.703032(1)	1.6956(1)
0.3	1.719992(1)	1.718907(1)	1.719992(1)	1.718907(1)	1.7111(1)
0.4	1.734402(1)	1.733411(1)	1.734402(1)	1.733411(1)	1.7252(1)
0.5	1.747922(1)	1.747027(1)	1.747922(1)	1.747027(1)	1.7383(1)
0.6	1.760815(1)	1.760014(1)	1.760815(1)	1.760014(1)	1.7507(1)
0.7	1.773242(1)	1.772534(1)	1.773242(1)	1.772534(1)	1.7627(1)
0.8	1.785310(1)	1.784690(1)	1.785310(1)	1.784690(1)	1.7743(1)
0.9	1.797093(1)	1.796558(1)	1.797093(1)	1.796558(1)	1.7857(1)
1.0	1.808645(1)	1.808192(1)	1.808645(1)	1.808192(1)	1.7968(1)

$$Re f^a = [\text{Knackfuss, 2005}] \quad Re f^b = [\text{Siewert, 2003c}]$$

Tabela 7.12: Problema de Deslizamento Viscoso: perfil de fluxo de calor  $p_s$ ,  $\alpha_t = 0.1$

$\tau$	BGK	S	$BGK - CL^a$	$S - CL^a$	$ELB - DE^b$
	$\alpha_n = 0.01$	$(\varepsilon = \varepsilon_p)$ $\alpha_n = 0.01$	$(\varepsilon = \varepsilon_p)$ $\alpha_n = 0.01$	$(\varepsilon = \varepsilon_p)$ $\alpha_n = 0.01$	
0.0	3.254431(-1)	3.894010(-1)	3.254431(-1)	3.894010(-1)	2.3959(-1)
0.1	2.403405(-1)	3.052167(-1)	2.403405(-1)	3.052167(-1)	1.9023(-1)
0.2	1.988665(-1)	2.614301(-1)	1.988665(-1)	2.614301(-1)	1.6365(-1)
0.3	1.699351(-1)	2.294938(-1)	1.699351(-1)	2.294938(-1)	1.4360(-1)
0.4	1.478871(-1)	2.042410(-1)	1.478871(-1)	2.042410(-1)	1.2735(-1)
0.5	1.302883(-1)	1.834326(-1)	1.302883(-1)	1.834326(-1)	1.1373(-1)
0.6	1.158228(-1)	1.658431(-1)	1.158228(-1)	1.658431(-1)	1.0206(-1)
0.7	1.036864(-1)	1.507120(-1)	1.036864(-1)	1.507120(-1)	9.1923(-2)
0.8	9.334704(-2)	1.375274(-1)	9.334704(-2)	1.375274(-1)	8.3039(-2)
0.9	8.443298(-2)	1.259252(-1)	8.443298(-2)	1.259252(-1)	7.5193(-2)
1.0	7.667370(-2)	1.156353(-1)	7.667370(-2)	1.156353(-1)	6.8224(-2)

$$Re f^a = [\text{Knackfuss, 2005}] \quad Re f^b = [\text{Siewert, 2003c}]$$

Nas tabelas (7.13) e (7.14) é analisado respectivamente o perfil de velocidade e o perfil de fluxo de calor para os quatro modelos BGK, S, Gross-Jackson, MRS, onde considera-se  $\alpha_n = 0.01$  e  $\alpha_t = 0.1$ . Na análise do perfil de velocidade há uma boa aproximação entre os modelos BGK e S. Percebe-se que o modelo MRS se distancia dos outros modelos conforme vai aumentando a

posição de  $\tau$ . No perfil de fluxo de calor, percebe-se que os modelo S aproxima-se do modelo Gross-Jackson enquanto que o modelo BGK se aproxima do modelo MRS.

Tabela 7.13: Problema de Deslizamento Viscoso: perfil de velocidade  $u_s$ ,  $\alpha_t = 0.1$

$\tau$	BGK	S	GJ	MRS
	$\alpha_n = 0.01$	$(\varepsilon = \varepsilon_p)$ $\alpha_n = 0.01$	$(\varepsilon = \varepsilon_p)$ $\alpha_n = 0.01$	$(\varepsilon = \varepsilon_p)$ $\alpha_n = 0.01$
0.0	1.658891(1)	1.657637(1)	1.656188(1)	1.659982(1)
0.1	1.685911(1)	1.684664(1)	1.687843(1)	1.680031(1)
0.2	1.704206(1)	1.703032(1)	1.707559(1)	1.695736(1)
0.3	1.719992(1)	1.718907(1)	1.724082(1)	1.710052(1)
0.4	1.734402(1)	1.733411(1)	1.738914(1)	1.723557(1)
0.5	1.747922(1)	1.747027(1)	1.752683(1)	1.736511(1)
0.6	1.760815(1)	1.760014(1)	1.765719(1)	1.749060(1)
0.7	1.773242(1)	1.772534(1)	1.778221(1)	1.761296(1)
0.8	1.785310(1)	1.784690(1)	1.790317(1)	1.773282(1)
0.9	1.797093(1)	1.796558(1)	1.802097(1)	1.785062(1)
1.0	1.808645(1)	1.808192(1)	1.813622(1)	1.796671(1)

Tabela 7.14: Problema de Deslizamento Viscoso: perfil de fluxo de calor  $p_s$ ,  $\alpha_t = 0.1$

$\tau$	BGK	S	GJ	MRS
	$\alpha_n = 0.01$	$(\varepsilon = \varepsilon_p)$ $\alpha_n = 0.01$	$(\varepsilon = \varepsilon_p)$ $\alpha_n = 0.01$	$(\varepsilon = \varepsilon_p)$ $\alpha_n = 0.01$
0.0	3.254431(-1)	3.894010(-1)	4.632162(-1)	2.697705(-1)
0.1	2.403405(-1)	3.052167(-1)	3.565188(-1)	2.185744(-1)
0.2	1.988665(-1)	2.614301(-1)	3.018904(-1)	1.907633(-1)
0.3	1.699351(-1)	2.294938(-1)	2.619316(-1)	1.703441(-1)
0.4	1.478871(-1)	2.042410(-1)	2.302563(-1)	1.541704(-1)
0.5	1.302883(-1)	1.834326(-1)	2.041377(-1)	1.408329(-1)
0.6	1.158228(-1)	1.658431(-1)	1.820862(-1)	1.295462(-1)
0.7	1.036864(-1)	1.507120(-1)	1.631724(-1)	1.198187(-1)
0.8	9.334704(-2)	1.375274(-1)	1.467650(-1)	1.113182(-1)
0.9	8.443298(-2)	1.259252(-1)	1.324098(-1)	1.038088(-1)
1.0	7.667370(-2)	1.156353(-1)	1.197658(-1)	9.711613(-2)



O coeficiente de Deslizamento Viscoso para os quatro modelos encontra-se na tabela (7.15), considera-se  $\alpha_n = 0.25$  e diferentes valores para  $\alpha_t$ . Nessa análise a aproximação dos modelos é muito grande e há concordância em até uma casa decimal para ambos modelos.

Tabela 7.15: Problema de Deslizamento Viscoso: Coeficiente de Deslizamento Viscoso

$\alpha_t$	BGK	S	GJ	MRS
	$\alpha_n = 0.01$	$(\varepsilon = \varepsilon_p)$ $\alpha_n = 0.01$	$(\varepsilon = \varepsilon_p)$ $\alpha_n = 0.01$	$(\varepsilon = \varepsilon_p)$ $\alpha_n = 0.01$
0.25	6.412097	6.417960	6.424770	6.407091
0.5	2.840346	2.844690	2.849503	2.836466
0.75	1.632537	1.635681	1.639087	1.629667
1.0	1.016191	1.018372	1.020709	1.014179
1.25	6.367919(-1)	6.382056(-1)	6.397028(-1)	6.354725(-1)
1.5	3.761519(-1)	3.769738(-1)	3.778227(-1)	3.753651(-1)
1.75	1.836073(-1)	1.840042(-1)	1.843937(-1)	1.832061(-1)
2.0	3.381591(-2)	3.394790(-2)	3.406541(-2)	3.366759(-2)

Para validar os coeficientes de Deslizamento Viscoso utilizamos vários valores para  $\alpha_n$  e  $\alpha_t$ , onde nas tabelas (7.16), (7.17) e (7.18) comparamos os resultados para os modelos BGK e S com os valores encontrados nas referências (Knackfuss, 2005; Sharipov, 2003a; Siewert, 2003d). A comparação deste trabalho com Knackfuss (Knackfuss, 2005), é realizada para consolidar os resultados uma vez que são os mesmos, isso deve-se ao fato dos problemas serem iguais, onde, o que diferencia-os é a formulação analítica.

Tabela 7.16: Problema de Deslizamento Viscoso: Coeficiente de Deslizamento Viscoso

$\alpha_t$	BGK	S	$BGK - CL^a$	$S - CL^a$	$ELB - CL^b$
	$\alpha_n = 0.25$	$(\varepsilon = \varepsilon_p)$ $\alpha_n = 0.25$	$(\varepsilon = \varepsilon_p)$ $\alpha_n = 0.25$	$(\varepsilon = \varepsilon_p)$ $\alpha_n = 0.25$	$(\varepsilon = \varepsilon_p)$ $\alpha_n = 0.25$
0.25	6.412097	6.417960	6.412097	6.417960	6.3645
0.5	2.840346	2.844690	2.840346	2.844690	2.7985
0.75	1.632537	1.635681	1.632537	1.635681	1.5970
1.0	1.016191	1.018372	1.016191	1.018372	9.8733(-1)
1.25	6.367919(-1)	6.382056(-1)	6.367919(-1)	6.382056(-1)	6.1452(-1)
1.5	3.761519(-1)	3.769738(-1)	3.761519(-1)	3.769738(-1)	3.6006(-1)
1.75	1.836073(-1)	1.840042(-1)	1.836073(-1)	1.840042(-1)	1.7290(-1)
2.0	3.381591(-2)	3.394790(-2)	3.381591(-2)	3.394790(-2)	2.7335(-2)

$Ref^a = [Knackfuss, 2005]$   $Ref^b = [Siewert, 2003d]$

Tabela 7.17: Problema de Deslizamento Viscoso: Coeficiente de Deslizamento Viscoso

$\alpha_t$	BGK	S	$BGK - CL^a$	$S - CL^a$	$ELB - CL^b$
	$\alpha_n = 0.75$	$(\varepsilon = \varepsilon_p)$ $\alpha_n = 0.75$	$(\varepsilon = \varepsilon_p)$ $\alpha_n = 0.75$	$(\varepsilon = \varepsilon_p)$ $\alpha_n = 0.75$	$(\varepsilon = \varepsilon_p)$ $\alpha_n = 0.75$
0.25	6.357832	6.361015	6.357832	6.361015	6.3232
0.5	2.804773	2.807568	2.804773	2.807568	2.7715
0.75	1.615045	1.617514	1.615045	1.617514	1.5838
1.0	1.016191	1.018372	1.016191	1.018372	9.8733(-1)
1.25	6.537217(-1)	6.556345(-1)	6.537217(-1)	6.556345(-1)	6.2721(-1)
1.5	4.094717(-1)	4.111266(-1)	4.094717(-1)	4.111266(-1)	3.8497(-1)
1.75	2.327992(-1)	2.342024(-1)	2.327992(-1)	2.342024(-1)	2.0964(-1)
2.0	9.838300(-2)	9.954176(-2)	9.838300(-2)	9.954176(-2)	7.5624(-2)

$Ref^a = [Knackfuss, 2005]$   $Ref^b = [Siewert, 2003d]$

Tabela 7.18: Problema de Deslizamento Viscoso: Coeficiente de Deslizamento Viscoso  $A_k$ ,  $\alpha_n = 0.5$  e  $\alpha_t = 0.5$ .

Modelo	$A_k$
BGK	2.821883
S ( $\varepsilon = \varepsilon_p$ )	2.825385
S ( $\varepsilon = \varepsilon_t$ )	1.883590
BGK - CL <sup>a</sup>	2.82188
S - CL <sup>a</sup> ( $\varepsilon = \varepsilon_p$ )	2.825385
S - CL <sup>a</sup> ( $\varepsilon = \varepsilon_t$ )	1.883590
S <sup>b</sup>	2.825

$Ref^a = [\text{Knackfuss, 2005}]$     $Ref^b = [\text{Sharipov, 2003a}]$

Nas tabelas (7.19) à (7.22) validou-se os coeficientes para os modelos Gross-Jackson e MRS, onde compara-se os valores obtidos com os valores encontrados em Siewert e Garcia (Garcia e Siewert, 2010; Siewert, 2003d), a aproximação foi muito grande garantindo validação desse método.

Tabela 7.19: Problema de Deslizamento Viscoso: Coeficiente de Deslizamento Viscoso

	GJ ( $\varepsilon = \varepsilon_p$ ) $\alpha_n = 0.25$	MRS ( $\varepsilon = \varepsilon_p$ ) $\alpha_n = 0.25$	GJ <sup>a</sup> ( $\varepsilon = \varepsilon_p$ ) $\alpha_n = 0.25$	MRS <sup>a</sup> ( $\varepsilon = \varepsilon_p$ ) $\alpha_n = 0.25$	ELB - CL <sup>b</sup> ( $\varepsilon = \varepsilon_p$ ) $\alpha_n = 0.25$
$\alpha_t$					
0.25	6.42477	6.40709	6.42477	6.40709	6.36448
0.5	2.84950	2.83646	2.84950	2.83646	2.79846
0.75	1.63908	1.62966	1.63908	1.62966	1.59702
1.0	1.02070	1.01417	1.02070	1.01417	9.87328(-1)
1.25	6.39702(-1)	6.35472(-1)	6.39702(-1)	6.35472(-1)	6.14524(-1)
1.5	3.77822(-1)	3.75365(-1)	3.77822(-1)	3.75365(-1)	3.60063(-1)
1.75	1.84393(-1)	1.83206(-1)	1.84393(-1)	1.83206(-1)	1.72898(-1)
2.0	3.40654(-2)	3.36675(-2)	3.40654(-2)	3.36675(-2)	2.73344(-2)

$Ref^a = [\text{Garcia e Siewert, 2010}]$     $Ref^b = [\text{Siewert, 2003d}]$

Tabela 7.20: Problema de Deslizamento Viscoso: Coeficiente de Deslizamento Viscoso

	GJ ( $\varepsilon = \varepsilon_p$ ) $\alpha_n = 0.5$	MRS ( $\varepsilon = \varepsilon_p$ ) $\alpha_n = 0.5$	GJ <sup>a</sup> ( $\varepsilon = \varepsilon_p$ ) $\alpha_n = 0.5$	MRS <sup>a</sup> ( $\varepsilon = \varepsilon_p$ ) $\alpha_n = 0.5$	ELB - CL <sup>b</sup> ( $\varepsilon = \varepsilon_p$ ) $\alpha_n = 0.5$
$\alpha_t$					
0.25	6.39320	6.38004	6.39320	6.38004	6.34233
0.5	2.82925	2.81874	2.82925	2.81874	2.78408
0.75	1.62930	1.62095	1.62930	1.62095	1.59002
1.0	1.02070	1.01417	1.02070	1.01417	9.87328(-1)
1.25	6.48872(-1)	6.43910(-1)	6.48872(-1)	6.43910(-1)	6.21174(-1)
1.5	3.95583(-1)	3.91973(-1)	3.95583(-1)	3.91973(-1)	3.73049(-1)
1.75	2.10195(-1)	2.07723(-1)	2.10195(-1)	2.07723(-1)	1.91953(-1)
2.0	6.74013(-2)	6.58423(-2)	6.74013(-2)	6.58423(-2)	5.22446(-2)

$Ref^a = [\text{Garcia e Siewert, 2010}]$     $Ref^b = [\text{Siewert, 2003d}]$

Tabela 7.21: Problema de Deslizamento Viscoso: Coeficiente de Deslizamento Viscoso

$\alpha_f$	GJ	MRS	$GJ^a$	$MRS^a$	$ELB - CL^b$
	$(\varepsilon = \varepsilon_p)$ $\alpha_n = 0.75$	$(\varepsilon = \varepsilon_p)$ $\alpha_n = 0.75$	$(\varepsilon = \varepsilon_p)$ $\alpha_n = 0.75$	$(\varepsilon = \varepsilon_p)$ $\alpha_n = 0.75$	$(\varepsilon = \varepsilon_p)$ $\alpha_n = 0.75$
0.25	6.36465	6.35507	6.36465	6.35507	6.32321
0.5	2.81063	2.80225	2.81063	2.80225	2.77151
0.75	1.62017	1.61277	1.62017	1.61277	1.58382
1.0	1.02070	1.01417	1.02070	1.01417	9.87328(-1)
1.25	6.57671(-1)	6.51946(-1)	6.57671(-1)	6.51946(-1)	6.27207(-1)
1.5	4.12858(-1)	4.07908(-1)	4.12858(-1)	4.07908(-1)	3.84967(-1)
1.75	2.35614(-1)	2.31417(-1)	2.35614(-1)	2.31417(-1)	2.09640(-1)
2.0	1.00629(-1)	9.71521(-2)	1.00629(-1)	9.71521(-2)	7.56232(-2)

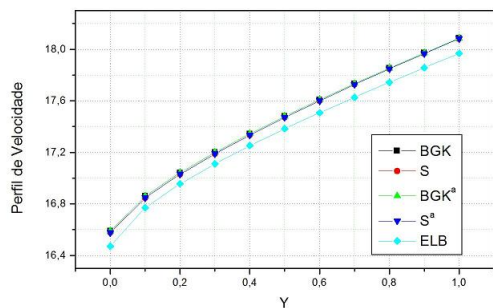
$Ref^a = [Garcia e Siewert, 2010]$   $Ref^b = [Siewert, 2003d]$

Tabela 7.22: Problema de Deslizamento Viscoso: Coeficiente de Deslizamento Viscoso

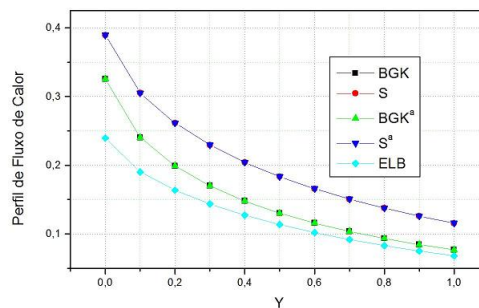
$\alpha_f$	GJ	MRS	$GJ^a$	$MRS^a$	$ELB - CL^b$
	$(\varepsilon = \varepsilon_p)$ $\alpha_n = 1.0$	$(\varepsilon = \varepsilon_p)$ $\alpha_n = 1.0$	$(\varepsilon = \varepsilon_p)$ $\alpha_n = 1.0$	$(\varepsilon = \varepsilon_p)$ $\alpha_n = 1.0$	$(\varepsilon = \varepsilon_p)$ $\alpha_n = 1.0$
0.25	6.33831	6.33158	6.33831	6.33158	6.30622
0.5	2.79323	2.78664	2.79323	2.78664	2.76021
0.75	1.61153	1.60499	1.61153	1.60499	1.57820
1.0	1.02070	1.01417	1.02070	1.01417	9.87328(-1)
1.25	6.66210(-1)	6.59686(-1)	6.66210(-1)	6.59686(-1)	6.32784(-1)
1.5	4.29823(-1)	4.23346(-1)	4.29823(-1)	4.23346(-1)	3.96088(-1)
1.75	2.60863(-1)	2.54504(-1)	2.60863(-1)	2.54504(-1)	2.26297(-1)
2.0	1.33988(-1)	1.27825(-1)	1.33988(-1)	1.27825(-1)	9.78373(-2)

$Ref^a = [Garcia e Siewert, 2010]$   $Ref^b = [Siewert, 2003d]$

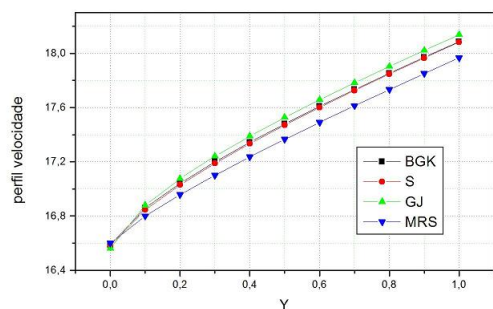
Os gráficos a seguir estão relacionados com o problema de Deslizamento Viscoso levando em consideração os quatro modelos. Foram gerados considerando as tabelas apresentadas como forma de auxiliar a análise do comportamento dos perfis e dos coeficientes. Nos gráficos (j) - (m) mostra-se a influência da largura do canal no perfil de velocidade e no perfil de fluxo de calor. Nos gráficos (n) - (u), observa-se a influência dos coeficientes de acomodação  $\alpha_n$  e  $\alpha_f$  na interação gás-parede.



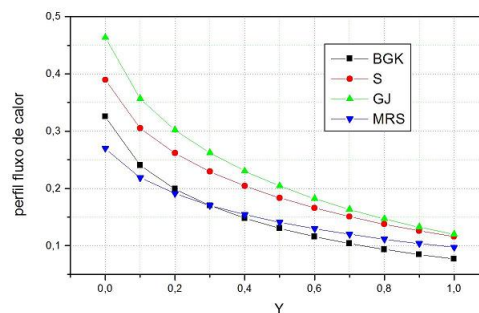
(k) Deslizamento Viscoso



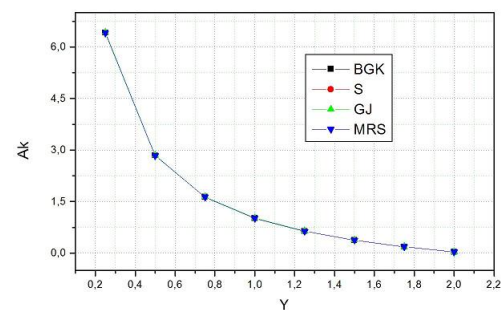
(l) Deslizamento Viscoso



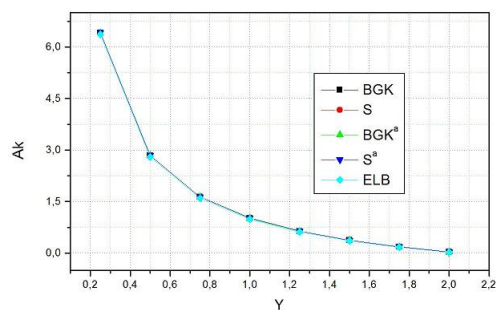
(m) Deslizamento Viscoso



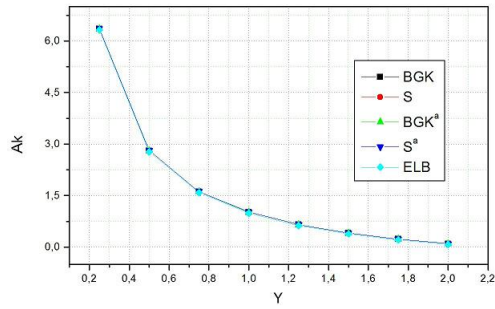
(n) Deslizamento Viscoso



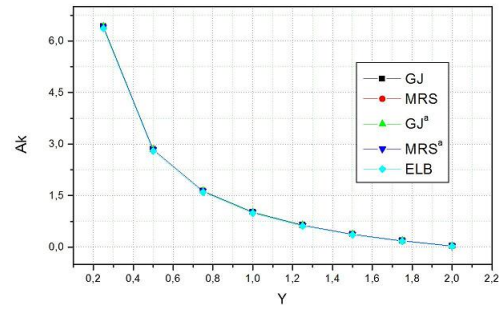
(o) Coeficiente de Deslizamento Viscoso



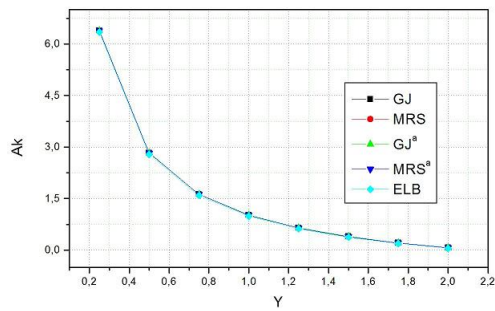
(p) Coeficiente de Deslizamento Viscoso



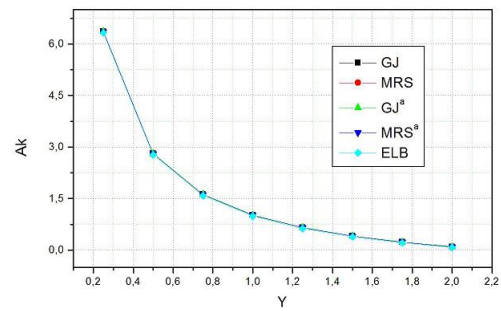
(q) Coeficiente de Deslizamento Viscoso



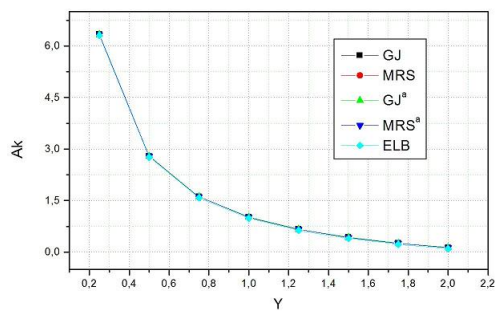
(r) Coeficiente de Deslizamento Viscoso



(s) Coeficiente de Deslizamento Viscoso



(t) Coeficiente de Deslizamento Viscoso



(u) Coeficiente de Deslizamento Viscoso

# CONCLUSÃO

Neste trabalho, investigou-se a utilização do método analítico de ordenadas discretas (ADO) em coordenadas cartesianas juntamente com as equações cinéticas em dois problemas da dinâmica de gases rarefeitos, utilizando as condições de contorno de Cercignani-Lampis.

O método analítico de ordenadas discretas (ADO), foi utilizado no desenvolvimento de soluções unificadas para diferentes modelos cinéticos, ou seja, modelos BGK, S, Gross-Jackson e MRS com o objetivo de utilizar todos os modelos em um mesmo programa computacional de uma forma concisa.

Os resultados obtidos foram satisfatórios, uma vez que conseguiu-se comparar todos os modelos com trabalhos existentes na literatura, dentre eles cita-se (Knackfuss, 2005; Garcia e Siewert, 2010), foi possível obter resultados com precisão de até 6 dígitos significativos.

Neste trabalho, foi comparado separadamente os modelos BGK e S dos modelos Gross-Jackson e MRS, pois na literatura não foi possível encontrar os quatro modelos numa mesma bibliografia com as condições de contorno de Cercignani-Lampis.

De maneira geral, pode-se dizer que os modelos BGK, S, Gross-Jackson e MRS, mostraram-se como boas opções no objetivo de se aproximar ao núcleo de colisão da ELB, mas não pode-se eleger um melhor modelo em todas as situações quando comparados com a ELB, o que pode-se dizer é que para cada modelo um apresenta melhor desempenho do que o outro.

Assim pode-se considerar que o objetivo deste trabalho foi alcançado, pois:

- através do método analítico de ordenadas discretas e das condições de contorno de Cercignani-Lampis, foi desenvolvido uma formulação matemática e computacional para problemas básicos da dinâmica de gases rarefeitos, utilizando-se os modelos cinéticos BGK, S, Gross-Jackson e MRS;
- encontrou-se resultados numéricos ainda não existentes na literatura baseados nos modelos Gross-Jackson e MRS, para o caso de um gás com as condições de contorno de Cercignani-Lampis, utilizando-se a versão analítica do método de ordenadas discretas (ADO) em coordenadas cartesianas;
- gerou-se resultados que servirão de análises futuras para outras equações modelos.

Como proposta de trabalhos futuros, pretende-se desenvolver soluções para o problema de Salto de Temperatura, utilizando de maneira unificada, os modelos BGK, S, Gross-Jackson e MRS, através das condições de contorno de Cercigani-Lampis em coordenadas cartesianas.

# REFERÊNCIAS

- [1] AVELINO, M.; KAKAÇ, S. **Convective Heat Transfer in Microchannels - A Review**. Proceedings of the 10<sup>0</sup> Brazilian Congress of Thermal Sciences and Engineering. Rio de Janeiro, Brazil, 2004.
- [2] BARICHELO, L. B.; CAMARGO, M.; RODRIGUES, P.; and SIEWERT, C. E. **Unified Solutions to Classical Flow Problems Based on the BGK Model**. Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik, vol. 52, pp. 517, 2001.
- [3] BARICHELO, L. B.; SIEWERT, C. E. **A Discrete-Ordinates Solution for Nongrey Model with Complete Frequency Redistribution**. JQSRT, vol. 62, pp. 665-675, 1999.
- [4] BARICHELO, L. B.; SIEWERT, C. E. **The Temperatura-Jump Problem in Rarefied-Gas Dynamics**. European Journal of Applied Mathematics, vol. 11, pp.353, 2000.
- [5] BARICHELO, L. B.; SIEWERT, C. E. **Some Comments on Modeling the Linearized Boltzmann Equation**. J.Quant.Spect.Radiat.Transfer, vol. 77, pp. 43-59, 2003.
- [6] BHATNAGAR, P. L.; GROSS, E. P.; and KROOK, M. **A Model for Collision Processes in Gases. I. Small Amplitude Processes in Charged and Neutral One-Component Systems**. Phys. Rev., vol. 94, pp. 511-525, 1954.
- [7] BIRD, G. A. **Molecular Gas Dynamics and the Direct Simulation of Gas Flows**. Oxford University Press, Oxford, 1994.
- [8] BOLTZMANN, L. **Weitere Studien Über das Wärmegleichgewicht Unter Gasmolekülen**. Setzungsberichte Akademie der Wissenschaften, vol. 66, pp. 275-370, 1872.
- [9] BURDEN, R. L.; FAIRES, J. D. **Numerical Analysis**. Brooks/Cole Publishing Company, Boston, 1997.
- [10] CABRERA, L. C. **Derivação e Solução de Equações Modelo da Dinâmica de Gases Rarefeitos**. Dissertação (Mestrado em Matemática Aplicada) - Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2003.
- [11] CABRERA, L. C.; BARICHELO, L. B. **Unified Solutions to Some Classical Problems in Rarefied Gas Dynamic Based on the One-Dimension Linearized S-Model Equations**. Z.Angew. Math. Phys, vol. 57, pp. 285-312, 2006.



- [12] CAMARGO, M. **Soluções Unificadas para Modelos com Frequência de Colisão Variável da Dinâmica de Gases Rarefeitos**. Tese de doutorado do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, UFRGS, Porto Alegre, 2003.
- [13] CASE, K. M. **Elementary Solutions of the Transport Equation and their Applications**. *Annals of Physics*, vol. 9, pp. 1-23, 1960.
- [14] CERCIGNANI, C. **Plane Couette Flow According to the Method of Elementary Solutions**. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, vol. 11, pp. 93, 1965.
- [15] CERCIGNANI, C. **Plane Poiseuille Flow According to the Method of Elementary Solutions**. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, vol. 12, pp. 254, 1965.
- [16] CERCIGNANI, C. **The Method of Elementary Solutions for Kinetic Models with Velocity-Dependent Collision Frequency**. *Annals of Physics*, vol. 40, pp. 469-481, 1966.
- [17] CERCIGNANI, C. **Theory and Application of the Boltzmann Equation**. Elsevier, New York, 1975.
- [18] CERCIGNANI, C. **The Boltzmann Equation and Its Application**. Springer, New York, 1988.
- [19] CERCIGNANI, C. **Mathematical Methods in Kinetic Theory**. Plenum Press, New York, 1990.
- [20] CERCIGNANI, C. **Rarefied Gas Dynamics**. Cambridge Texts in Applications Mathematics, Cambridge University Press, 2000.
- [21] CERCIGNANI, C.; ILLNER, R.; and PULVIRENT, M. **The Mathematical Theory of Dilute Gases**. Springer, 1994.
- [22] CERCIGNANI, C.; LAMPIS, M. **Kinetic Model for Gas-Surface Interaction**. *Transport Theory and Statistical Physics*, vol. 1, pp. 101, 1971.
- [23] CHANDRASEKHAR, S. **Radiative Transfer**. Oxford University Press, London, 1950.
- [24] CHAPMAN, S; COWING, T. G. **The Mathematical Theory of Non-Uniform Gases**. University Press, Cambridge, 1952.
- [25] CHEN, S.; CHEN, H.; MARTÍNEZ, D.; MATTHAEUS, W. H. **Lattice Boltzmann Model for Simulation of Magnetohydrodynamics**. *Phys. Rev. Lett*, vol. 67, pp. 3776-3779, 1991.
- [26] COLIN, S.; AUBERT, C.; and CAEN, R. **Unstead Gaseous Flows in Rectangular Microchannels: Frequency Response of one or two Pneumatic Lines Conected in Series**. *European Journal of Mechanics B/Fluids*, vol. 17, pp. 79-104, 1998.
- [27] DONGARRA, J. J.; BUNCH, J. R.; MOLER, C. B.; and STEWART, G. W. **LINPACK user's Guide**. SIAM, Philadelphia, 1979.
- [28] FATIKOW, S.; REMBOLD, U. **Microsystem Technology and Microrobotics**. Springer, New York, 1997.
- [29] FERZIGER, J. H.; KAPER, H. G. **Mathematical Theory of Transport Processes in gases** North-Holland Publishing Company. Amsterdam, 1972.

- [30] GAD-EL-HAK, M. **The MEMS Handbook: Introduction and Fundamentals**. CRC Press, 2006.
- [31] GARCIA, R. D. M. **Métodos para Solução da Equação de Transporte de Partículas Íntegro-Diferencial**. Em: Escola de Verão em Teoria de Transporte de Partículas Neutras. PUC-Porto Alegre-RS, 2002.
- [32] GARCIA, R. D. M.; SIEWERT, C. E. **The Linearized Boltzmann Equation: Sound-Wave Propagation in a Rarefied Gas**. *Z. Angew. Math. Phys.*, vol. 57, pp. 94-122, 2006.
- [33] GARCIA, R. D. M.; SIEWERT, C. E. **Viscous-Slip, Thermal-Slip, and Temperature-Jump Coefficients Based on the Linearized Boltzmann Equation (and Five Kinetic Models) with the Cercignani-Lampis Boundary Condition**. *European Journal of Mechanics B/Fluids*, vol. 29, pp. 181-191, 2010.
- [34] GRAVESEN, P.; BRANEBJERG, J.; and JENSEN, O. S. **Microfluidics: A Review**. *Journal of Micromechanics Microengineering*, vol. 3, pp. 168-182, 1993.
- [35] GROSS, E. P. **Recent Investigations of the Boltzmann Equation, Rarefied Gas Dynamics, Proceedings of the First International Symposium held at Nice**. Pergamon Press, New York, pp. 139, 1960.
- [36] GROSS, E. P.; JACKSON, E. A. **Kinetic Models and the Linearized Boltzmann Equation**. *The Phys. of Fluids*, vol. 2, pp. 432-441, 1959.
- [37] HIRSCHFELDER, J. O.; CURTISS, C. F.; and BIRD, R. B. **The Molecular Theory of Gases and Liquids**. Wiley, New York, 1954.
- [38] HUNTER, R. J. **Zeta Potential in Colloid Science: Principles and Applications**. Academic Press, London, 1981.
- [39] JEANS, J. H. **The Equations of Radioactive Transfer of Energy**. *Mon. Not. Royal Astron. Soc.*, vol. 78, pp. 28-36, 1971.
- [40] KENNARD, E. H. **Kinetic Theory of Gases**. McGraw-Hill Book Company, Inc., New York, 1938.
- [41] KNACKFUSS, R. F. **Efeitos de Superfície na Dinâmica de Gases Rarefeitos: uma Análise Baseada no Núcleo de Espalhamento de Cercignani-Lampis**. Tese (Doutorado em Engenharia Mecânica) - Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2005.
- [42] KOGNAN, M. N. **Rarefied Gas Dynamics**. Plenum, New York, 1969.
- [43] LO, S. S.; LOYALKA, S. K.; and STORVICK, T. S. **Kinetic Theory of Thermal Transpiration and Mechanocaloric Effect. V. Flow of Polyatomic Gases in a Cylindrical Tube with Arbitrary Accommodation at the Superface**. *J. Chem. Phys.*, vol. 81, pp. 2439, 1984.
- [44] LOYALKA, S. K. **Kinetic Theory of Thermal Transpiration and Mechanocaloric Effect I**. *J. Chem. Phys.*, vol. 55, pp. 4497, 1971.
- [45] LOYALKA, S. K.; FERZIGER, J. H. **Model Dependence of the Temperature Slip Coefficient**. *Physics of Fluids*, vol. 11, pp. 1668, 1968.
- [46] LOYALKA, S. K.; HICKEY, K. A. **Plane Poiseuille Flow: Near Continuum Results for a Rigid Sphere Gas**. *Physics A*, vol. 160, pp. 395, 1989.

- [47] PEKERIS, C. L.; ALTERMAN, Z. **Solutions of the Boltzmann-Hilbert Integral Equation II. The Coefficients of Viscosity and Heat Conduction.** Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America, vol. 43, pp. 998, 1957.
- [48] PROLO FILHO, J. F. **A Equação de Boltzmann e a Modelagem de Fluidos em Micro e Macroescalas.** Dissertação (Mestrado em Matemática Aplicada) - Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2007.
- [49] POL, F. C. M. V. D.; BRANEBJERG, J. **Micro Liquid-Handling Devices: A review.** MST, Berlin, 1990.
- [50] ROSTAMI, A. A.; MUJUMDAI, A. S.; and SANIELI, N. **Flow and Heat Transfer for Gas Flowing in Microchannels: a Review.** Heat and Mass Transfer, vol. 38, pp. 359, 2002.
- [51] Sanchez, R. and McCormick, N. J., 1982. **A Review of Neutron Transport Approximations,** Nucl. Sci. Eng., vol. 80, pp. 481.
- [52] SCHAAF, S. A.; CHAMBRE, P. L. **Flow of Rarefied Gases.** Princeton University Press, 1961.
- [53] SCHERER, C. S. **Modelos cinéticos da equação de Boltzmann em um problema de transferência de calor em microescala.** Dissertação (Mestrado em Matemática Aplicada) - Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2005.
- [54] SCHUSTER, A. **Radiation Through a Foggy Atmosphere.** Astrophysics, vol. 21, pp. 1, 1905.
- [55] SCHWARZSCHILD, K. **Über das Gleichgewicht der Sonnenatmosphäre.** Göttinger Nachrichten Math.-Phys.Klasse, vol. 1, pp. 41-53, 1906.
- [56] SHAKHOV, E. M. **Method of Investigation of Rarefied Gas Flows.** Nauka, Moscow, 1974.
- [57] SHARIPOV, F. **Rarefied Gas Flow Through a Long Rectangular Channel.** Journal of Vacuum Science and Technology A, vol. 17, pp. 3062, 1999a.
- [58] SHARIPOV, F. **Application of Cercignani-Lampis Scattering Kernel to Calculations of Rarefied Gas Flows. I. Plane Flow Between two Parallel Plates.** European Journal of Mechanics B/Fluids, vol. 21, pp. 113, 2002.
- [59] SHARIPOV, F. **Application of Cercignani-Lampis Scattering Kernel to Calculations of Rarefied Gas Flows. II. Slip and Jump Coefficients.** European Journal of Mechanics B/Fluids, vol. 22, pp. 133, 2003a.
- [60] SHARIPOV, F.; SELEZNEV, V. **Data on Internal Rarefied Gas Flows.** Journal Physical and Chemical Reference Data, vol. 27, pp. 657, 1998.
- [61] SHOJI, S. M.; ESHASHI, M. **Microflow Devices and Systems.** Journal of Micromechanics Microengineering, vol. 4, pp. 157-171, 1994.
- [62] SIEWERT, C. E. **A Concise and Accurate Solution to Chandrasekhar's Basic Problem in Radiative Transfer.** Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer, vol. 64, pp. 109, 2000a.
- [63] SIEWERT, C. E. **Poiseuille and Thermal-Creep Flow in a Cylindrical Tube.** Journal Computational Physics, vol. 160, pp. 470, 2000b.

- [64] SIEWERT, C. E. **Couette Flow for a Binary Gas Mixture.** Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer, vol. 70, pp. 321, 2001a.
- [65] SIEWERT, C. E. **Kramer's Problem for a Variable Collision Frequency Model.** European Journal of Applied Mathematics, vol. 12, pp. 179, 2001b.
- [66] SIEWERT, C. E. **Generalized Bondary Conditions for the S-Model Kinetic Equations Basic to Flow in a Plane Channel.** Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer, vol. 72, pp. 75, 2002a.
- [67] SIEWERT, C. E. **Poiseuille, Thermal Creep and Couette Flow: Results Based on the CES Model of the Linearized Boltzmann Equation.** European Journal of Mechanics B/Fluids, vol. 21, pp. 579, 2002b.
- [68] SIEWERT, C. E. **The Temperature-Jump Problem Based on the CES Model of the Linearized Boltzmann Equation.** Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik. in press, 2002c.
- [69] SIEWERT, C. E. **Two Half-Space Problems Based on a Synthetic-Kernel Model of the Linearized Boltzmann Equation.** Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer, vol. 75, pp. 21, 2002d.
- [70] SIEWERT, C. E. **Heat Transfer and Evaporation/Condensation Problems Based on the Linearized Boltzmann Equation.** European Journal of Mechanics B/Fluids, vol. 22, pp. 391-408, 2003a.
- [71] SIEWERT, C. E. **The Linearized Boltzmann Equation: A Concise and Accurate Solution to the Temperature-Jump Problem.** Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer, vol. 77, pp. 417, 2003b.
- [72] SIEWERT, C. E. **The Linearized Boltzmann Equation: Concise and Accurate Solution to Basic Flow Problems.** Zeitschrift für Angewandte Mathematik und physik, vol. 54, pp. 273, 2003c.
- [73] SIEWERT, C. E. **Viscous-Slip, Thermal-Slip and Temperature-Jump Coefficients as Defined by Linearized Boltzmann Equation and the Cercignani-Lampis Boundary Condition.** Physics of Fluids, vol. 15, pp. 1696, 2003d.
- [74] SIEWERT, C. E.; SHARIPOV, F. **Model Equations in Rarefied Gas Dynamics: Viscous-Slip and Thermal-Slip Coefficients.** Physics of Fluids, vol. 14, pp. 4123-4129, 2002.
- [75] SIEWERT, C. E.; VALOUGEORGIS, D. **An Analytical Discrete-Ordinates Solution of the S-Model Kinetic Equations for Flow in a Cylindrical Tube.** Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer, vol. 72, pp. 531-550, 2002.
- [76] SMITH, B. T.; BOYLE, J. M.; DONGARRA, J. J.; GARBOW, B. S.; IKEBE, Y.; KLEMA, V. C.; and MOLER, C. B. **Matrix Eigensystem Routines EISPACK Guide.** Springer Verlag, Berlin, 1976.
- [77] SONE, Y.; OHWADA, T.; AOKI, K. **Temperature Jump and Knudsen Layer in a Rarefied Gas Over a Plane Wall: Numerical Analysis of the Linearized Boltzmann Equation of Hard-Sphere Molecules.** Physics of Fluids A, vol. 1, pp. 363-370, 1989.

- [78] SONE, Y.; TAKATA, S.; OHWADA, T. **Numerical Analysis of the Plane Couette Flow of Rarefied Gas on the Basis of the Linearized Boltzmann Equation of Hard-Sphere Molecules.** European Journal of Mechanics B/Fluids, vol. 9, pp. 273-288, 1990.
- [79] STOKES, V. K. **Theories of Fluids with Microstructure.** Springer, New York, 1984.
- [80] Subgrupo de Trabalho 2 do CAPDA. **Programa de Microeletrônica e Microsistemas da Amazônia - PMMA.** UGE do CT-PIM. Versão 2.0, pp. 3-23, 2004.
- [81] WICK, G. C. **Über Ebene Diffusions Problem.** Zeitschrift fur Physik, vol. 120, pp. 702-718, 1943.
- [82] WILLIAMS, M. M. R. **Mathematical Methods in Particle Transport Theory.** Butterworth, London, 1971.
- [83] WILLIAMS, M. M. R. **A Review of the Rarefied Gas Dynamics Theory Associated with Some Classical Problems on Flow and Heat Transfer.** Z. Angew. Math. Phys, vol. 52, pp. 500-516, 2001.
- [84] ZOHAR, Y.; LEE, S. Y. K.; LEE, W. Y.; JIANG, L.; and TONG, P. **Subsonic Gas Flow in a Straight and Uniform Microchannel.** J. Fluid Mech, vol. 472, pp. 125-151, 2002.
- [85] ZOU, Q.; HOU, S.; DOOLEN, G. D. **Analytical Solutions of the Lattice Boltzmann BGK Model.** Journal of Statistical Physics, vol. 81, pp. 319-334, 1995.