UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA MARIA
CENTRO DE CIÊNCIAS NATURAIS E EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

SOLUÇÕES FUNDAMENTAIS DE OPERADORES LINEARES DE COEFICIENTES CONSTANTES

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Luciele Rodrigues Nunes

Santa Maria, RS, Brasil

2012

SOLUÇÕES FUNDAMENTAIS DE OPERADORES LINEARES DE COEFICIENTES CONSTANTES

Luciele Rodrigues Nunes

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado do Programa de Pós-Graduação em Matemática, Área de Matemática Pura, da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM, RS), como requisito parcial para obtenção do grau de
Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Maurício Fronza da Silva

Santa Maria, RS, Brasil

2012

Universidade Federal de Santa Maria
Centro de Ciências Naturais e Exatas
Programa de Pós-Graduação em Matemática

A Comissão Examinadora, abaixo assinada,
aprova a Dissertação de Mestrado

SOLUÇÕES FUNDAMENTAIS DE OPERADORES LINEARES DE COEFICIENTES CONSTANTES

elaborada por
Luciele Rodrigues Nunes

como requisito parcial para obtenção do grau de
Mestre em Matemática

COMISSÃO EXAMINADORA:

Maurício Fronza da Silva, Dr.
(Orientador)

Paulo Leandro Datorri da Silva, Dr. (USP)

Marcio Violante Ferreira, Dr. (UFSM)

Santa Maria, 09 de março de 2012.

Aos meus pais,
Assis e Marlene.

Agradecimentos

Agradeço...

Primeiramente à Deus, pela vida e por ter me dado forças para seguir nessa caminhada.

Aos meus pais, Assis e Marlene, pela educação e pela esperança que sempre depositaram em mim.

À minha irmã Luana, à minha irmã emprestada Lidiane e a minha vó Orlandina, pelo carinho e compreensão nos momentos que estive ausente.

Ao meu namorado Rafael que, sempre me incentivou, apoiou e esteve disposto a me escutar e aconselhar nos momentos difíceis.

Ao meu orientador professor Maurício, pela forma como conduziu este trabalho, e pelos ensinamentos que muito contribuíram para meu aperfeiçoamento profissional.

Ao professor Mário, pelo constante incentivo para continuar os estudos e engressar no mestrado.

À todos meus amigos, pelo carinho. Em especial aos meus amigos Sandra e Ezequiel, que mesmo distantes, sempre estiveram presentes. E a minha amiga e colega de mestrado Elisa, pela companhia nesses dois anos.

À CAPES, pelo apoio financeiro.

RESUMO

Dissertação de Mestrado
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Universidade Federal de Santa Maria

SOLUÇÕES FUNDAMENTAIS DE OPERADORES LINEARES DE COEFICIENTES CONSTANTES

AUTORA: LUCIELE RODRIGUES NUNES
ORIENTADOR: MAURÍCIO FRONZA DA SILVA
Data e Local da Defesa: Santa Maria, 09 de março de 2012.

Nessa dissertação apresentamos uma demonstração do Teorema de Malgrange-Ehrenpreis, que afirma que todo operador de coeficientes constantes não identicamente nulo tem uma solução fundamental.

Palavras-chave: Equação Diferencial Parcial. Equações Diferenciais Parciais Lineares. Solução Fundamental.

ABSTRACT

Dissertation
Graduate Program in Mathematics
Federal University of Santa Maria

FUNDAMENTAL SOLUTIONS OF LINEAR OPERATORS CONSTANT COEFFICIENTS

AUTHOR: LUCIELE RODRIGUES NUNES
ADVISOR: MAURÍCIO FRONZA DA SILVA

Date and Location of Defense: Santa Maria, march 09, 2012.

In this thesis we present a proof of the Malgrange-Ehrenpreis theorem, which states that every operator with constant coefficients non identically zero has a fundamental solution.

Keywords: Partial Differential Equation. Linear Partial Differential Equations. Fundamental solution.

Lista de Símbolos

Ω	(aberto do $\mathbb{R}^n$)
$X - \Omega$	(complementar de Ω em X)
$\overline{F}$	(fecho de F)
F°	(interior de F)
e_j	(vetor unitário)
$\lvert \cdot \rvert$	(norma euclidiana)
$\lvert \cdot \rvert_M$	(norma do máximo)
$B(a, r)$	(bola aberta na norma euclidiana)
$B[a, r]$	(bola fechada na norma euclidiana)
$\phi^{[\epsilon]}$	(pg.25)
f_ϵ	(regularizadas de f)
$K \subset\subset \Omega$	(compacto de Ω)
S	(suporte)
SS	(suporte singular)
P	(operador diferencial linear)
p	(pg.73)
p_m	(símbolo principal)
$\hat{f}$	(Transformada de Fourier)
$\tilde{f}$	(Tranformada Parcial de Fourier)
$K \prec f$	(pg.13)
$f \prec V$	(pg.13)

Espaços:

$C_c(X)$	(pg.13)
$L(\mu)$	(pg.17)
$L^p(\mu)$	(pg.18)
$L^\infty(\mu)$	(pg.19)
$L^p(\Omega)$	(pg.23)
$L^\infty(\Omega)$	(pg.23)
$C_c^\infty(\Omega)$	(pg.25)
$\mathscr{D}'(\Omega)$	(pg.29)
$\mathscr{E}'(\Omega)$	(pg.37)
$\mathscr{S}$	(pg.52)
$\mathscr{S}'$	(pg.63)

SUMÁRIO

Introdução

A teoria das distribuições surgiu com o objetivo de permitir a diferenciação onde o cálculo clássico de Leibniz e Newton não podia ser utilizado, criando um cálculo baseado na extensão da classe das funções a uma nova classe de objetos, as distribuições. Este estudo foi realizado por Laurent Schwartz que em 1950 publicou a obra “La théore des distributions"que lhe valeu, no Congresso Internacional de Matemática de Harward, a medalha Fields.

A noção de Soluções Fundamentais tornou-se gradualmente mais clara durante os séculos XIX e XX . As primeiras provas da existência de Soluções Fundamentais foram dadas em 1953/54 por Bernard Malgrange e Leon Ehrenpreis. Estas provas foram baseadas no teorema de Hahn-Banach. Logo em seguida, provas construtivas também foram encontradas ou seja, provas que representam a Solução Fundamental E através de uma fórmula, em vez de se referir a existência de E.

O presente trabalho tem como objetivo principal estudar o Teorema de Malgrange-Ehrenpreis, que afirma que todo operador com coeficientes constantes, não nulo, tem uma Solução Fundamental. Em particular, prova-se a existência de Soluções Fundamentais para os operadores diferenciais do Calor, da Onda e de Laplace.

O trabalho está organizado do seguinte modo:

No capítulo 1 listamos resultados úteis de Topologia Geral e Medida e Integração que dão as fundamentações para os capítulos subsequentes. As distribuições são estudadas no capítulo 2. A ferramenta principal na demonstração do Teorema de Malgrange-Ehrenpreis é a Transformada de Fourier, que é apresentada no capítulo 3. O capítulo 4 traz a relação entre Solução Fundamental e a Existência e Regularidade de Soluções de EDP's lineares. Finalizando, ainda no capítulo 4, apresentamos uma demonstração relativamente simples do Teorema de Malgrange-Ehrenpreis.

Capítulo 1

Preliminares

1.1 Noções Topológicas

Para maiores detalhes dos resultados enunciados nessa seção veja [?].

Definição 1.1.1 *Seja X um conjunto qualquer.*

(a) *Uma coleção τ de subconjuntos de X é chamada de topologia em X, se τ tiver as seguintes propriedades:*

(i) $\emptyset \in \tau$ *e* $X \in \tau$;

(ii) *se* $V_i \in \tau$ *para* $i = 1, 2, \ldots, n$ *então* $V_1 \cap V_2 \cap \ldots \cap V_n \in \tau$;

(iii) *se* $\{V_\alpha\}$ *é uma coleção arbitrária de elementos de* τ *então* $\bigcup_{\alpha} V_\alpha \in \tau$.

(b) *Se τ é uma topologia em X, então (X, τ) é chamado de espaço topológico, e os elementos de τ são chamados de conjuntos abertos de X. Para simplificar a escrita, sempre que possível diremos simplesmente espaço topológico X.*

(c) *Se X e Y são espaços topológicos, dizemos que $f : X \to Y$ é uma aplicação contínua quando $f^{-1}(V)$ é um conjunto aberto de X para cada aberto V de Y.*

Definição 1.1.2 *Seja X um espaço topológico.*

(a) *Um conjunto $F \subset X$ é fechado se o seu complementar F^c é aberto.*

(b) *Dado um conjunto $F \subset X$, definimos o fecho de F como a intersecção de todos os fechados que contém F. Denotamos o fecho de F por $\overline{F}$. Definimos o interior de F como a união de todos os abertos contidos em F. Denotamos o interior de F por F^o.*

(c) *Dado um conjunto $E \subset X$, uma cobertura de E é uma família $(C_\lambda)_{\lambda \in L}$ de subconjuntos de X tal que $E \subset \bigcup_{\lambda \in L} C_\lambda$. Uma subcobertura é uma sub-família $(C_\lambda)_{\lambda \in L'}$, com $L' \subset L$ tal que $E \subset \bigcup_{\lambda \in L'} C_\lambda$. Quando todos conjuntos C_λ's são abertos dizemos que $(C_\lambda)_{\lambda \in L}$ é uma cobertura aberta e quando L é finito dizemos que $(C_\lambda)_{\lambda \in L}$ é uma cobertura finita.*

(d) *Um conjunto $K \subset X$ é compacto se toda cobertura aberta de K tem uma subcobertura finita. Representamos um compacto de X por $K \subset\subset X$.*

(e) *Uma vizinhança de um ponto $p \in X$ é qualquer aberto de X que contém p.*

(f) *X é um espaço de Hausdorff se para todo par de pontos $p, q \in X$ existem vizinhanças disjuntas U de p e V de q.*

(g) *X é localmente compacto se cada ponto de X tem uma vizinhaça com fecho compacto.*

Teorema 1.1.3 *Suponha que K é compacto e F é fechado em um espaço topológico X. Se $F \subset K$ então F é compacto.*

Teorema 1.1.4 *Suponha X um espaço Hasdorff, $K \subset\subset X$ e $p \in K^c$. Então existem conjuntos abertos U e W tais que $p \in U, K \subset W$ e $U \cap W = \emptyset$.*

Teorema 1.1.5 *Suponha que X é um espaço de Hausdorff localmente compacto. Se $K \subset U \subset X$ são tais que K é compacto e U é aberto, então existe um aberto V com fecho compacto tal que*

$$K \subset V \subset \overline{V} \subset U.$$

Definição 1.1.6 *Seja X um espaço topológico. Dada $f : X \to \mathbb{C}$ definimos o suporte de f como o conjunto*

$$S(f) = \overline{\{x \in X; f(x) \neq 0\}}$$

e denotamos como $C_c(X)$ o conjunto de todas funções $f : X \to \mathbb{C}$ contínuas tais que $S(f) \subset\subset X$.

Suponha X um espaço topológico. A notação $K \prec f$ significa que $K \subset\subset X$ e que $f \in C_c(X)$ tem as seguintes propriedades: $0 \leq f(x) \leq 1, \forall x \in X$ e $f(x) = 1, \forall x \in K$. O símbolo $f \prec V$ significa que V é aberto e que $f \in C_c(X)$ tem as seguintes propriedades: $0 \leq f(x) \leq 1, \forall x \in X$ e $S(f) \subset V$. A notação $K \prec f \prec V$ significa que $K \prec f$ e $f \prec V$.

Lema 1.1.7 (Lema de Urysohn) *Suponha que X é um espaço de Hausdorff localmente compacto, V é um aberto em X e $K \subset\subset V$. Então existe $f \in C_c(X)$, tal que*

$$K \prec f \prec V.$$

Teorema 1.1.8 *Suponha que $V_1, V_2, \ldots, V_n$ são subconjuntos abertos de um espaço de Hausdorff localmente compacto X e que $K \subset\subset X$ satisfaz*

$$K \subset V_1 \cup V_2 \cup \ldots \cup V_n.$$

Então existem funções $h_i \prec V_i, i = 1, \ldots, n$, tais que

$$h_1(x) + h_2(x) + \ldots + h_n(x) = 1, \forall x \in K.$$

A coleção $\{h_1, \ldots, h_n\}$ *é chamada de partição de unidade em* K *subordinada a cobertura* $\{V_1, V_2, \ldots, V_n\}$.

Definição 1.1.9 *Um conjunto* E *em um espaço topologico é chamado* $\sigma-$*compacto se* E *é uma união enumerável de conjuntos compactos.*

O próximo resultado mostra que todo aberto de $\mathbb{R}^n$ é $\sigma-$compacto.

Teorema 1.1.10 *Considere em* $\mathbb{R}^n$ *a topologia usual. Para cada aberto* Ω *de* $\mathbb{R}^n$ *existe uma sequência* (K_j) *de subconjuntos compactos de* Ω *tal que*

(i) $K_j \subset \overset{o}{K}_{j+1}, \forall j \in \mathbb{N}$;

(ii) $\bigcup\limits_{j=1}^{\infty} K_j = \Omega$;

(iii) *para cada* $K \subset\subset \Omega$, *existe* $j \in \mathbb{N}$ *tal que* $K \subset K_j$.

Finalizamos a seção com uma definição útil.

Definição 1.1.11 *Seja* X *um conjunto qualquer. Definimos a função característica de* $A, \chi_A : X \to \{0, 1\}$ *por*

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & se \quad x \in A \\ 0, & se \quad x \notin A. \end{cases}$$

1.2 Resultados de Medida e Integração

Para maiores detalhes sobre Medida e Integração veja [?] e [?].

Definição 1.2.1 *Seja* X *um conjunto qualquer.*

(a) *Uma coleção* $\mathscr{M}$ *de subconjuntos de* X *é chamada de uma* σ*-álgebra em* X *se* $\mathscr{M}$ *tem as seguintes propriedades:*

  (i) $X \in \mathscr{M}$;

  (ii) *se* $A \in \mathscr{M}$ *então* $A^c \in \mathscr{M}$;

  (iii) *se* $\{A_\alpha\}$ *é uma coleção arbitrária de elementos de* $\mathscr{M}$ *então* $\bigcup\limits_{\alpha} A_\alpha \in \mathscr{M}$.

(b) *Se* $\mathscr{M}$ *é uma* σ*-álgebra em* X *então* $(X, \mathscr{M})$ *é chamado de espaço mensurável, e os elementos de* $\mathscr{M}$ *são chamados de conjuntos mensuráveis de* X. *Para simplificar a escrita, sempre que possível diremos simplesmente espaço mensurável* X.

(c) *Se* X *é um espaço mensurável,* Y *é um espaço topológico e* f *é uma aplicação de* X *em* Y, *então* f *é chamada de mensurável se, e somente se, para todo subconjunto aberto* V *de* Y *tem-se* $f^{-1}(V)$ *mensurável em* X.

Observação 1.2.2 *A interseção de uma quantidade qualquer de σ-álgebras em X é uma σ-álgebra em X.*

Definição 1.2.3 *Se $\mathscr{F}$ é uma coleção de subconjuntos de X, então a interseção de todas σ-álgebras em X que contém $\mathscr{F}$ é chamada σ-álgebra gerada por $\mathscr{F}$.*

Definição 1.2.4 *Seja (X, τ) um espaço topológico. A σ-álgebra de Borel é definida como a σ-álgebra gerada por τ e seus elementos são chamados de conjuntos de Borel.*

Observação 1.2.5 *Os conjuntos fechados de um espaço topológico X são conjuntos de Borel, pois seus complementares são abertos.*

Teorema 1.2.6 *Se X é um espaço mensurável e $f_n : X \to [-\infty, \infty]$ é mensurável, para todo $n = 1, 2, 3, \ldots$ então*

$$g = \sup_{n \geq 1} f_n, \ \ h = \limsup f_n,$$

são mensuráveis.

Teorema 1.2.7 *Seja X um espaço mensurável e $f = u + iv$, sendo $u, v : X \to \mathbb{R}$. Então f é mensurável se, e somente se, u e v são mensuráveis.*

Definição 1.2.8 *Uma função $s : X \to [0, \infty)$ definida em um espaço mensurável X cuja imagem é um conjunto finito será chamada de função simples.*

Teorema 1.2.9 *Seja $f : X \to [0, \infty)$ mensurável definida no espaço mensurável X. Então existe uma sequência (s_n) de funções simples mensuráveis tal que:*

(a) $0 \leq s_1 \leq s_2 \leq \ldots \leq f$;

(b) $s_n(x) \to f(x)$ *quando* $n \to \infty$, *para todo* $x \in X$.

Definição 1.2.10 *Seja $(X, \mathscr{M})$ um espaço mensurável. Uma medida positiva em X é uma função $\mu : \mathscr{M} \to [0, \infty]$ que tem a seguinte propriedade: se $\{A_i\}$ é uma coleção enumerável de subconjuntos mensuráveis de X, dois a dois disjuntos, então*

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i).$$

Chamamos $(X, \mathscr{M}, \mu)$ de espaço de medida.

Teorema 1.2.11 *Se $(X, \mathscr{M}, \mu)$ é um espaço de medida então:*

(a) $\mu(\emptyset) = 0$;

(b) $\mu(A_1 \cup A_2 \cup \ldots A_n) = \mu(A_1) + \mu(A_2) + \ldots + \mu(A_n)$, *se* $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathscr{M}$ *são conjuntos mensuráveis dois a dois disjuntos;*

(c) $A, B \in \mathscr{M}, A \subset B \Rightarrow \mu(A) \leq \mu(B)$;

(d) $\lim\limits_{n\to+\infty} \mu(A_n) = \mu(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n)$ *se* $A_n \in \mathscr{M}, \forall n \in \mathbb{N}$ *e* $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \ldots$;

(e) $\lim\limits_{n\to+\infty} \mu(A_n) = \mu(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n)$ *se* $A_n \in \mathscr{M}, \forall n \in \mathbb{N}, A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \ldots$ *e* $\mu(A_1)$ *é finito.*

Definição 1.2.12 *Seja* $(X, \mathscr{M}, \mu)$ *um espaço de medida. Se* $E \in \mathscr{M}, A \subset E$ *e* $\mu(E) = 0$ *implica que* $A \in \mathscr{M}$ *então* μ *é dita ser uma medida completa.*

Definição 1.2.13 *Seja* $(X, \mathscr{M}, \mu)$ *um espaço de medida e* P *uma propriedade relativa a pontos de* X*. Dizemos que* P *vale* $\mu-$*q.t.p, ou simplesmente q.t.p se* $\exists E \in \mathscr{M}$ *tal que* $\mu(E) = 0$ *e* $\{x \in X; x$ *tem a propriedade* $P\} = X - E$.

Aqui q.t.p. abrevia a expressão “quase todo ponto". Assim, dizemos por exemplo $f, g : X \to \mathbb{C}$ são iguais q.t.p. se $\exists E \in \mathscr{M}$ com $\mu(E) = 0$, tal que $f(x) = g(x), \forall x \in X - E$.

Definição 1.2.14 *Consideremos* $(X, \mathscr{M}, \mu)$ *um espaço de medida. Se* s *é uma função simples mensurável em* X*, da forma*

$$s = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{A_i}, \tag{1.1}$$

onde $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ *são números reais dois a dois distintos e* $A_1, \ldots, A_n \in \mathscr{M}$ *são dois a dois distintos, se* $E \in \mathscr{M}$*, definimos*

$$\int_E s \, \mathrm{d}\mu = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(A_i \cap E). \tag{1.2}$$

Se $f : X \to [0, \infty]$ *é mensurável e* $E \in \mathscr{M}$*, definimos*

$$\int_E f \, \mathrm{d}\mu = \sup \int_E s \, \mathrm{d}\mu, \tag{1.3}$$

o supremo a ser tomado sobre todas as funções simples mensuráveis s *tais que* $0 \leq s \leq f$.

O membro a esquerda de (**??**) *é chamado de Integral de Lebesgue de* f *sobre* E*, com respeito a medida* μ*.*

Teorema 1.2.15 (Teorema da Convergência Monótona) *Sejam* $(X, \mathscr{M}, \mu)$ *um espaço de medida e* (f_n) *uma sequência de funções mensuráveis em* X*, e suponha que*

(a) $0 \leq f_1 \leq f_2 \leq \cdots \leq \infty$, *q.t.p.;*

(b) $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n = f$, *q.t.p.*

Então f *é mensurável, e*

$$\int_X f_n \, \mathrm{d}\mu \to \int_X f \, \mathrm{d}\mu$$

quando $n \to \infty$.

Lema 1.2.16 (Lema de Fatou) *Se* $(X, \mathscr{M}, \mu)$ *é um espaço de medida e* $f_n : X \to [0, \infty]$ *é mensurável para cada* $n \in \mathbb{N}$ *então*

$$\int_X \liminf f_n \, \mathrm{d}\mu \leq \liminf \int_X f_n \, \mathrm{d}\mu \, .$$

Definição 1.2.17 *Seja* $(X, \mathscr{M}, \mu)$ *um espaço de medida, denotamos o conjunto de todas as funções mensuráveis tais que*

$$\int |f| \, \mathrm{d}\mu < +\infty$$

por $L(\mu)$.

Definição 1.2.18 *Se* $f = u + iv$, *onde* u *e* v *são funções mensuráveis reais em* X, *e se* $f \in L(\mu)$, *definimos*

$$\int_E f \, \mathrm{d}\mu = \int_E u^+ \, \mathrm{d}\mu - \int_E u^- + i \int_E v^+ \, \mathrm{d}\mu - i \int_E v^- \, \mathrm{d}\mu, \tag{1.4}$$

para cada conjunto mensurável E.

Aqui u^+ e u^- são as partes positiva e negativa de u enquanto v^+ e v^- são partes positiva e negativa de v. Estas quatros funções são mensuráveis reais, e não negativas, assim as quatro integrais a direita de (**??**) fazem sentido pela definição **??**. Além disso, $u^+ \leq |u| \leq |f|$, o mesmo vale para u^-, v^+ e v^-, de modo que cada uma das quatros integrais a direita de (**??**) é finita.

Teorema 1.2.19 *Se* (X, M, μ) *é um espaço de medida e* $f \in L(\mu)$, *então*

$$\left| \int_X f \, \mathrm{d}\mu \right| \leq \int_X |f| \, \mathrm{d}\mu \, .$$

Teorema 1.2.20 (Teorema da Convergência Dominada) *Seja* $(X, \mathscr{M}, \mu)$ *um espaço de medida. Suponha que* (f_n) *é uma sequência de funções mensuráveis complexas em* X *tal que*

$$f = \lim_{n \to \infty} f_n \ q.t.p.$$

Se existe uma função $g \in L(\mu)$ *tal que*

$$|f_n| \leq g, \forall n \in \mathbb{N}, q.t.p.$$

então $f \in L(\mu)$ *e*

$$\lim_{n \to \infty} \int_X |f_n - f| \, \mathrm{d}\mu = 0. \tag{1.5}$$

Definição 1.2.21 *Sejam* $(X, \mathscr{M}, \mu)$ *um espaço de medida,* $f : X \to \mathbb{C}$ *mensurável e* $1 \leq p < \infty$. *Defina,*

$$||f||_p = \left\{ \int_X |f|^p \, \mathrm{d}\mu \right\}^{\frac{1}{p}}$$

e seja $L^p(\mu)$ a coleção de todas funções mensuráveis em X tais que

$$||f||_p < \infty.$$

Considere em $L^p(\mu)$ a seguinte relação de equivalência:

$$f \sim g \Leftrightarrow f = g \ q.t.p.$$

e o espaço vetorial quociente $L^p(\mu)/\sim$. Seja $[f]$ a classe de $f \in L^p(\mu)$. Então $L^p(\mu)/\sim$ equipado com a norma dada por

$$\|[f]\|_p = \|f\|_p \, , [f] \in L^p(\mu)$$

é um espaço de Banach. A partir de agora denotaremos $[f]$ por f e $L^p(\mu)/\sim$ por $L^p(\mu)$.

Os elementos de $L^1(\mu)$ são chamados funções integráveis de Lebesgue, com respeito a μ.

Definição 1.2.22 *Suponha $g : X \to [0, \infty]$ mensurável. Seja S a coleção de todos $\alpha \in \mathbb{R}$ tais que*

$$\mu(g^{-1}((\alpha, \infty])) = 0.$$

Se $S = \emptyset$, ponha $\beta = \infty$. Se $S \neq \emptyset$, ponha $\beta = \inf S$. Assim,

$$g^{-1}((\beta, \infty]) = \bigcup_{n=1}^{\infty} g^{-1}\left(\left(\beta + \frac{1}{n}, \infty\right]\right)$$

e como a união enumerável de conjuntos de medida nula tem medida nula, temos que $\beta \in S$. Chamamos β de supremo essencial de g.

Se f é uma função complexa mensurável em X, definimos $||f||_\infty$ o supremo essencial de $|f|$ e definimos $L^\infty(\mu)$ a coleção de todas funções mensuráveis em X tais que $||f||_\infty < \infty$. Os elementos de $L^\infty(\mu)$ são chamados de funções essencialmente limitadas em X. Passando ao quociente, como na definição **??**, *obtemos que $L^\infty(\mu)$ é Banach.*

Teorema 1.2.23 (Desigualdade de Hölder) *Suponha que $(X, \mathscr{M}, \mu)$ é um espaço de medida. Se p e q são tais que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $1 \leq p, q \leq \infty$, e se $f \in L^p(\mu)$ e $g \in L^q(\mu)$, então $fg \in L^1(\mu)$ e*

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q \, .$$

Teorema 1.2.24 *Seja $(X, \mathscr{M}, \mu)$ um espaço de medida. Suponha que $f : X \times [a, b] \to \mathbb{C}$ é tal que para cada $t \in [a, b]$ ocorre $x \mapsto f(x, t)$ pertence a $L^1(\mu)$. Defina $F(t) = \int\limits_X f(x, t)\, \mathrm{d}\mu$, $t \in [a, b]$.*

(i) *Se para quase todo $x \in X$ tem-se que $t \mapsto f(x, t)$ é contínua em $t_0 \in [a, b]$ e $\exists g \in L^1(\mu)$*

tal que $|f(x,t)| \leq g(x)$ *q.t.p. em* $X \times [a,b]$ *então* F *é contínua em* t_0*, isto é,*

$$\lim_{t \to t_0} \int\limits_X f(x,t)\,\mathrm{d}\mu = \int\limits_X \lim_{t \to t_0} f(x,t)\,\mathrm{d}\mu;$$

(ii) (Derivação sob o sinal de integral) *se* $\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)$ *existe em todos os pontos de* $X \times [a,b]$ *e* $\exists g \in L^1(\mu)$ *tal que* $|\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)| \leq g(x)$ *q.t.p. em* $X \times [a,b]$ *então* F *é derivável em* $[a,b]$ *e* $F'(t) = \int\limits_X \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\,\mathrm{d}\mu$ *isto é,*

$$\frac{\partial}{\partial t} \int\limits_X f(x,t)\,\mathrm{d}\mu = \int\limits_X \frac{\partial}{\partial t} f(x,t)\,\mathrm{d}\mu\,.$$

Definição 1.2.25 *Um conjunto* E *em um espaço medida, com medida* μ *é dito ter medida* $\sigma-$*finita se* E *é uma união enumerável de conjuntos* E_i *com* $\mu(E_i) < \infty$.

Teorema 1.2.26 (Fubini) *Sejam* $(X, \mathscr{M}, \mu)$ *e* $(Y, \mathscr{N}, \lambda)$ *espaços de medida* $\sigma-$*finitos e* f *uma função mensurável definida em* $X \times Y$.
(i) *Se* $0 \leq f \leq +\infty$ *q.t.p. então as funções*

$$\varphi : X \to [0, +\infty], \quad \psi : Y \to [0, +\infty]$$

definidas por

$$\varphi(x) = \int\limits_Y f(x,y)\,\mathrm{d}\lambda, \quad \psi(y) = \int\limits_X f(x,y)\,\mathrm{d}\mu$$

são $\mathscr{S}$ *e* $\mathscr{T}-$*mensuráveis, respectivamente, e*

$$\int\limits_X \varphi(x)\,\mathrm{d}\mu = \int\limits_{X \times Y} f(x,y)\,\mathrm{d}(\mu \times \lambda) = \int\limits_Y \psi(y)\,\mathrm{d}\lambda;$$

(ii) *se* $f : X \times Y \to \mathbb{C}$ *e a função* $\varphi^* : X \to [0, +\infty]$ *definida por*

$$\varphi^*(x) = \int\limits_Y |f(x,y)|\,\mathrm{d}\lambda$$

pertence a $L^1(X)$ *então* $f \in L^1(X \times Y)$.

A seguir apresentaremos os resultados que conduzem a construção da medida de Lebesgue em $\mathbb{R}^n$.

Definição 1.2.27 *Dizemos que um funcional linear* $\Lambda : C_c(X) \to \mathbb{C}$ *é positivo se* $\Lambda f \geq 0$ *sempre que* $f \geq 0$.

Teorema 1.2.28 (Teorema de Representação de Riesz) *Seja* X *um espaço Hausdorff localmente compacto, e seja* Λ *um funcional linear positivo em* $C_c(X)$*. Então existe uma*

σ-álgebra $\mathscr{M}$ em X que contém qualquer conjunto Borel em X, e existe uma única medida μ tal que:

(i) $\Lambda f = \int_X f \, \mathrm{d}\mu$ *para cada* $f \in C_c(X)$;

(ii) $\mu(K) < \infty$ *para cada conjunto compacto* $K \subset X$*;*

(iii) *para cada* $E \in \mathscr{M}$*, temos que* $\mu(E) = \inf \{\mu(V); E \subset V, V \text{ aberto } \}$*;*

(iv) *a relação* $\mu(E) = \sup \{\mu(K); K \subset E, K \text{ compacto } \}$ *vale para qualquer conjunto aberto, e para qualquer* $E \in \mathscr{M}$ *com* $\mu(E) < \infty$*;*

(v) μ *é completa.*

Teorema 1.2.29 *Suponha X um espaço localmente compacto, $\sigma-$compacto e Hausdorff. Se $\mathscr{M}$ e μ são descritas como no teorema* **??**, *então $\mathscr{M}$ e μ tem as seguintes propriedades:*

(i) *se $E \in \mathscr{M}$ e $\epsilon > 0$, então existe um conjunto fechado F e um conjunto aberto V tal que $F \subset E \subset V$ e $\mu(V - F) < \epsilon$;*

(ii) *se $E \in \mathscr{M}$, então existem conjuntos A e B tal que A é uma união enumerável de conjuntos fechados e B uma intersecção enumerável de conjuntos abertos, tal que $A \subset E \subset B$ e $\mu(B - A) = 0$.*

Um conjunto da forma

$$w = \{x \in \mathbb{R}^n; \alpha_i \leq x_i \leq \beta_i, 1 \leq i \leq n\},$$

onde qualquer $\leq$ pode ser substituído por $<$, é chamado uma n-célula, e seu volume é definido por

$$Vol(w) = \prod_{i=1}^{n} (\beta_i - \alpha_i).$$

Se $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ e $\delta > 0$, chamamos o conjunto

$$Q(a; \delta) = \{x \in \mathbb{R}^n; a_i \leq x_i < a_i + \delta, 1 \leq i \leq n\}$$

de $\delta-$bloco com canto em a. Para $k = 1, 2, \ldots$, seja P_k o conjunto de todos $x \in \mathbb{R}^n$ cujas coordenadas são múltiplos inteiros de 2^{-k}, e seja Ω_k a coleção de todos 2^{-k} blocos com canto nos pontos de P_k. Temos as seguintes propriedades do conjunto Ω_k:

(a) se k é fixado, cada $x \in \mathbb{R}^n$ pertence a um único elemento de Ω_k;

(b) se $Q' \in \Omega_k, Q'' \in \Omega_r$, e $r < k$, então $Q' \subset Q''$ ou $Q' \cap Q'' = \emptyset$;

(c) se $Q \in \Omega_r$, então $Vol(Q) = 2^{-rk}$, e se $n > r$, o conjunto P_n tem exatamente $2^{(n-r)k}$ pontos em Q;

(d) todo conjunto aberto não vazio em $\mathbb{R}^n$ é uma união enumerável de blocos disjuntos pertencentes a $\Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \ldots$.

Teorema 1.2.30 *Existe uma medida completa positiva m definida em uma $\sigma-$álgebra $\mathscr{M}$ em $\mathbb{R}^n$, com as seguintes propriedades.*

(i) *$\mathscr{M}$ contém todo conjunto de Borel em $\mathbb{R}^n$;*

(ii) *$m(V) = Vol(W)$ para cada $n-$célula W;*

(iii) *m é invariante por translação, isto é, $m(E + x) = m(E)$ para cada $E \in \mathscr{M}$ e cada $x \in \mathbb{R}^n$;*

(iv) *se μ é uma medida Borel positiva invariante por translação em $\mathbb{R}^n$ tal que $\mu(K) < \infty$ para cada conjunto compacto K, então existe uma constante c tal que $\mu(E) = cm(E)$ para qualquer conjunto Borel $E \subset \mathbb{R}^n$.*

Chamamos de $\mathscr{M}$ e m a $\sigma-$álgebra de Lebesgue em $\mathbb{R}^n$ e a Medida de Lebesgue em $\mathbb{R}^n$, respectivamente. A partir de agora, usaremos somente a Medida de Lebesgue em $\mathbb{R}^n$ e a integral de f em relação a Medida de Lebesgue será denotada por $\int f(x)\,\mathrm{dx}$.

Observação 1.2.31 *Se μ é a medida de Lebesgue no aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, na definição* **??** *escrevemos $L^p(\Omega)$ em vez de $L^p(\mu)$ e na definição* **??** *escrevemos $L^\infty(\Omega)$ em vez de $L^\infty(\mu)$.*

Teorema 1.2.32 *Se $1 \leq p < \infty$ então $C_c(\Omega)$ é denso em $L^p(\Omega)$.*

Definição 1.2.33 *A função Gama é definida por*

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1}\,\mathrm{dt}, 0 < x < +\infty.$$

Observação 1.2.34 *Utilizando integração por partes verifica-se que*

$$\Gamma(x + 1) = x\Gamma(x), x > 0$$

e daí

$$\Gamma(n + 1) = n!,\ n = 0, 1, 2, \ldots.$$

Teorema 1.2.35 (Coordenadas Polares em $\mathbb{R}^n$) *Suponha que $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é uma função radial, isto é,*

$$f(x) = g(|x|), \forall x \in \mathbb{R}^n,$$

para alguma $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Se f é uma função mensurável a Borel não negativa ou $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ então

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,\mathrm{dx} = \sigma(S^{n-1}) \int_0^{+\infty} r^{n-1} g(r)\,\mathrm{dr}$$

sendo $\sigma(S^{n-1})$ a área da esfera $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$.

Exemplo 1.2.36 (Cálculo da área da esfera) *Vale a fórmula:*

$$\sigma(S^{n-1}) = \frac{2(\sqrt{\pi})^n}{\Gamma(\frac{n}{2})}.$$

De fato, por coordenadas polares mostra-se que $\int_{\mathbb{R}^n} e^{-|x|^2}\,\mathrm{dx} = (\sqrt{\pi})^n$. Além disso $f(x) = e^{-|x|^2}$ é uma função radial, sendo $g(r) = e^{-r^2}$. Assim, aplicando o teorema **??** em f obtemos,

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,\mathrm{dx} = \sigma(S^{n-1})\int_0^{+\infty} r^{n-1}e^{-r^2}\,\mathrm{dr} = \sigma(S^{n-1})\frac{1}{2}\Gamma(\frac{n}{2}).$$

Observação 1.2.37 *A integral*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(1+|x|^2)^{\frac{n+1}{2}}}\,\mathrm{dx}$$

é finita.

Seja $f(x) = \frac{1}{(1+|x|^2)^{\frac{n+1}{2}}}, x \in \mathbb{R}^n$ e definimos $g(r) = \frac{1}{(1+r^2)^{\frac{n+1}{2}}}, r \in \mathbb{R}$. Assim $f(x) = g(|x|) = g(r)$, ou seja, f é uma função radial. Além disso $f \geq 0$, assim aplicando o teorema **??** temos

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,\mathrm{dx} = \sigma(S^{n-1})\int_0^{+\infty} r^{n-1}\frac{1}{(1+r^2)^{\frac{n+1}{2}}}\,\mathrm{dr}\,.$$

Notemos que, para $r \geq 1$,

$$\int_1^{+\infty} r^{n-1}\frac{1}{(1+r^2)^{\frac{n+1}{2}}}\,\mathrm{dr} \leq \int_0^{+\infty} r^{n-1}\frac{1}{r^{n+1}}\,\mathrm{dr} = \int_1^{+\infty} r^{-2}\,\mathrm{dr} < +\infty$$

e para $0 \leq r \leq 1$ temos que a aplicação $r \longmapsto r^{n-1}\frac{1}{(1+r^2)^{\frac{n+1}{2}}}$ é contínua e portanto integrável. Portanto,

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(1+|x|^2)^{\frac{n+1}{2}}}\,\mathrm{dx} < +\infty.$$

Por resultados dados em [?] obtemos o

Teorema 1.2.38 *Seja $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$ uma hiperfície então M tem medida de Lebesgue nula em $\mathbb{R}^n$.*

Usando o teorema anterior obtemos

Teorema 1.2.39 *Se $q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é um polinômio não identicamente nulo então $q^{-1}(\{0\})$ tem medida de Lebesgue nula.*

1.3 Multi-índice

Introduziremos agora uma notação muito usada no estudo de EDP's e que se mostra eficiente para denotar derivadas de ordens altas de funções de várias variáveis.

Um n-muti-índice ou simplesmente um multi-índice α é uma n-upla de inteiros não-negativos. O comprimento de $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ é definido por $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n$. Para cada $j = 1, 2, ..., n$ e cada multi-índice α escrevemos

$$\partial_j f = \frac{\partial f}{\partial x_j} \ \text{ e } \ \partial^\alpha f = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial^{\alpha_1} x_1 \, \partial^{\alpha_2} x_2 \ldots \partial^{\alpha_n} x_n}.$$

Assim, o número $|\alpha|$ diz a ordem de derivação de f, enquanto que cada coordenada α_j diz quantas derivadas na direção de x_j estão sendo calculadas.

Para cada $x = (x_1, x_2, \ldots x_n) \in \mathbb{R}^n$ e cada multi-índice $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ definimos

$$\alpha! = \alpha_1! \alpha_2! \ldots \alpha_n! \ \text{ e } \ x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n}.$$

e dizemos que $\alpha \leq \beta$ se $\alpha_i \leq \beta_i, \forall i = 1, 2, \ldots, n$ e que $\alpha < \beta$ se ocorre $\alpha \leq \beta$ e, além disso, $\alpha_i < \beta_i$ para algum $i = 1, 2, \ldots, n$.

Teorema 1.3.1 (Teorema Binomial) *Dados $x, y \in \mathbb{R}^n$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$ tem-se*

$$(x+y)^\alpha = \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} x^\beta y^{\alpha - \beta}$$

Definição 1.3.2 *Dado $\zeta \in \mathbb{C}^n$ e $\alpha \in \mathbb{N}^n$ definimos*

$$(\partial + \zeta)^\alpha f = \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \zeta^\beta \partial^{\alpha - \beta} f.$$

Nos próximos resultados consideramos $|\cdot|$ a norma euclidiana e $|\cdot|_M$ a norma do máximo em $\mathbb{R}^n$.

Lema 1.3.3 *Dado $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \alpha \in \mathbb{N}^n$ temos que*

(i) $|x^\alpha| \leq |x|_M^{|\alpha|}$; **(ii)** $\sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} = 2^k$; **(iii)** $\sum_{j=1}^{n} |x_j|^{2k} \leq \sum_{|\alpha| \leq k} |x^\alpha|^2$.

Teorema 1.3.4 $|x^\alpha| \leq (1 + |x|^2)^{\frac{|\alpha|}{2}}, \forall x \in \mathbb{R}^n, \forall \alpha \in \mathbb{N}^n$.

Utilizando homogeneidade e compacidade obtemos o

Teorema 1.3.5 *Para cada $k \in \mathbb{N}$, existe $c = c(k) > 0$ tal que*

$$(1 + |x|^2)^{\frac{k}{2}} \leq c \sum_{|\alpha| \leq k} |x^\alpha|, x \in \mathbb{R}^n.$$

Usando indução sobre $|\alpha|$ obtemos o

Teorema 1.3.6 (Fórmula de Leibniz) *Se $\alpha \in \mathbb{N}^n$ e $f, g \in C^{|\alpha|}(\Omega)$ tem-se*

$$\partial^\alpha (fg) = \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \partial^\beta f \partial^{\alpha - \beta} g.$$

1.4 Funções Testes e Regularização

Para maiores detalhes desta seção veja [?]. Neste texto Ω sempre denota um aberto de $\mathbb{R}^n$ na topologia usual.

Definição 1.4.1 *Para cada $k = 0, 1, 2, ...$ definimos $C_c^k(\Omega)$ como o conjunto de todas as funções $\phi \in C^k(\Omega)$ tais que $S(\phi) \subset\subset \Omega$. Os elementos de $C_c^\infty(\Omega)$ são chamados de funções teste.*

Observação 1.4.2 *Se U é um aberto de Ω e $\phi \in C_c^\infty(U)$ então $\phi_0 : \Omega \to \mathbb{C}$ definida por $\phi_0 = \phi$ em U e $\phi_0 = 0$ em $\Omega - U$ pertence a $C_c^\infty(\Omega)$. Identificando ϕ com ϕ_0 escrevemos $C_c^\infty(U) \subset C_c^\infty(\Omega)$.*

Os resultados que seguem mostram a existência de funções teste.

Observação 1.4.3 *Defina $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ por*

$$\phi(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{|x|^2-1}}, & se\ |x| < 1 \\ 0, & se\ |x| \geq 1 \end{cases}$$

então $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n), 0 \leq \phi \leq 1$ e $S(\phi) = B[0, 1]$.

Dividindo a função anterior por sua integral obtemos uma nova aplicação, que continuamos a denotar por ϕ, com as seguintes propriedades:

$$\phi \geq 0,\ S(\phi) = B[0, 1] \text{ e } \int_{\mathbb{R}^n} \phi(x)dx = 1.$$

Assim para cada $\epsilon > 0$ vale

$$\int_{\mathbb{R}^n} \phi\left(\frac{x}{\epsilon}\right) \mathrm{dx} = \epsilon^n,$$

logo, para cada $\epsilon > 0$ a aplicação $\phi^{[\epsilon]} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\phi^{[\epsilon]}(x) = \frac{1}{\epsilon^n}\ \phi\left(\frac{x}{\epsilon}\right) \tag{1.6}$$

é não-negativa, tem suporte igual a $B[0, \epsilon]$ e integral igual a 1.

Definição 1.4.4 *Dizemos que uma sequência (ϕ_j) converge para ϕ em $C_c^\infty(\Omega)$ quando $\phi_j \in C_c^\infty(\Omega), \forall j \in \mathbb{N}$, e*

(i) *$\exists K \subset\subset \Omega$ tal que $S(\phi_j) \subset K,\ \forall j \in \mathbb{N}$;*

(ii) *fixado $\alpha \in \mathbb{N}^n$ temos que $(\partial^\alpha \phi_j)_{j=1}^\infty$ converge uniformemente para $\partial^\alpha \phi$.*

Definição 1.4.5 *Definimos $L^1_{loc}(\Omega)$ como o conjunto de todas as funções $f : \Omega \to \mathbb{C}$ mensuráveis a Lebesgue que têm a propriedade de que*

$$\int_K f(x)\,\mathrm{dx} < \infty,$$

qualquer que seja $K \subset\subset \Omega$. Os elementos de $L^1_{loc}(\Omega)$ são chamados de funções localmente integráveis de $\mathbb{R}^n$.

Note que $L^1(\mathbb{R}^n) \subset L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ mas a inclusão contrária não é válida (exemplo: funções constantes). Além disso $C(\mathbb{R}^n) \subset L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$.

Definição 1.4.6 *Se $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ e $g \in C^k_c(\mathbb{R}^n)$ então a convolução de f e g é definida por*

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)\,\mathrm{dy} = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x-y)\,\mathrm{dy},\ x \in \mathbb{R}^n.$$

Quando, para cada $\epsilon > 0$ tomamos g igual a aplicação $\phi^{[\epsilon]}$ definida por (**??**) obtemos a família de funções f_ϵ dadas por

$$f_\epsilon(x) = f * \phi^{[\epsilon]}(x) = \frac{1}{\epsilon^n}\int_{\mathbb{R}^n} f(y)\phi\left(\frac{x-y}{\epsilon}\right)\mathrm{dy},\ x \in \mathbb{R}^n,$$

chamadas de regularizadas de f.

O próximo resultado justifica o nome das funções f_ϵ.

Teorema 1.4.7 *Dada $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ e $\epsilon > 0$ temos:*

(i) $f_\epsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$;

(ii) $S(f_\epsilon) \subset S(f) + B[0,\epsilon]$. *Em particular $f_\epsilon \in C^\infty_c(\mathbb{R}^n)$ caso $S(f) \subset\subset \mathbb{R}^n$;*

(iii) *se f é contínua e $S(f) \subset\subset \mathbb{R}^n$ então $f_\epsilon \to f$ uniformemente quando $\epsilon \to 0$.*

Utilizando as regularizadas obtemos uma versão do teorema **??** com funções suaves.

Teorema 1.4.8 *Seja $K \subset\subset \mathbb{R}^n$, e consideremos abertos $V_1, \cdots, V_l$ tais que $K \subseteq \bigcup_{j=l}^{l} V_j$. Então existem funções $\phi_j \in C^\infty_c(V_j)$ tais que*

(i) $\sum_{j=1}^{l} \phi_j \leq 1$;

(ii) $\sum_{j=1}^{l} \phi_j = 1$ *numa vizinhança de K;*

(iii) $0 \leq \phi_j \leq 1, j = 1, 2, \ldots$.

Com as regularizadas, também podemos obter uma versão do teorema **??** com funções suaves.

Teorema 1.4.9 *Se* $1 \leq p < \infty$ *então* $C_c^\infty(\Omega)$ *é denso em* $L^p(\Omega)$.

Capítulo 2

Distribuições

2.1 Definição

Definição 2.1.1 *Um funcional linear contínuo* $u : C_c^\infty(\Omega) \to \mathbb{C}$ *é dito uma distribuição em* Ω*. O espaço das distribuições em* Ω *se denota por* $\mathscr{D}'(\Omega)$.

A definição significa que se $\phi, \phi_1, \phi_2 \in C_c^\infty(\Omega), \lambda \in \mathbb{C}$ e (ϕ_j) é uma sequência em $C_c^\infty(\Omega)$,

$$u(\phi_1 + \lambda\phi_2) = u(\phi_1) + \lambda u(\phi_2) \qquad \text{(linearidade)}$$
$$\phi_j \to \phi \text{ em } C_c^\infty(\Omega) \quad \Rightarrow \quad u(\phi_j) \to u(\phi). \qquad \text{(continuidade)}$$

Por vezes é conveniente escrever $\langle u, \phi \rangle$ em vez de $u(\phi)$.

Exemplo 2.1.2 *Considere* $\Omega = \mathbb{R}^n$*, e defina* $\langle \delta, \phi \rangle = \phi(0), \phi \in C_c^\infty(\Omega)$*. O funcional* δ *é linear e também contínuo. Esta distribuição é chamada "Delta de Dirac".*

Exemplo 2.1.3 *Definimos*

$$\langle T, \phi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} |t|\, \phi'(t)dt, \phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}).$$

A linearidade é clara, e se $S(\phi_j) \subseteq [-a, a], \forall j \in \mathbb{N}$ e $\phi_j' \to 0$ uniformemente, segue que $|\langle T, \phi_j \rangle| \leq a^2 \sup |\phi_j'| \to 0$.

Exemplo 2.1.4 *Seja* $f \in L^1_{loc}(\Omega)$*, defina*

$$\langle T_f, \phi \rangle = \int_\Omega f\phi \quad \mathrm{dx}, \phi \in C_c^\infty(\Omega).$$

A linearidade é clara, e a continuidade decorre da estimativa

$$|\langle T_f, \phi \rangle| \leq \sup |\phi| \int_{S(\phi)} |f| \, \mathrm{dx}\,.$$

É interessante notar que se $\langle T_f, \phi\rangle = \langle T_g, \phi\rangle$ para toda $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$ e $f, g \in L^1_{loc}(\Omega)$, então $f = g$ q.t.p. Com efeito, se K é um compacto de $\Omega, h = f - g$ e $\alpha \in C_c^\infty(\Omega)$ vale um em $K, \alpha h \in L^1(\mathbb{R}^n)$ (estendendo por zero fora de Ω). Considere

$$(\alpha h)_\epsilon(x) = \epsilon^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} (\alpha h)(y)\phi(\frac{x-y}{\epsilon})dy = \langle T_f, \beta\rangle - \langle T_g, \beta\rangle = 0$$

onde

$$\beta(y) = \epsilon^{-n}\alpha(y)\phi(\frac{x-y}{\epsilon}) \quad \in C_c^\infty(\Omega).$$

Portanto, fazendo $\epsilon \to 0$ e aplicando teorema **??**(c), concluimos que $\alpha h = 0$ q.t.p. e em particular $h = 0$ q.t.p. em K. Tomando uma sequência de compactos (K_j) como no teorema **??** concluimos que $f = g$ q.t.p.

Abandonemos agora a notação provisória T_f e escrevemos simplesmente $\langle f, \phi\rangle = \int f\phi \, \mathrm{dx}$. Isto equivale a identificar qualquer função localmente integrável f, com o funcional T_f definido no exemplo **??**. Esta identificação permite considerar muitos espaços de funções, como $L^p(\Omega), \quad 1 \leq p \leq \infty, C^k(\Omega), \quad 1 \leq k \leq \infty$, como subespaços de $\mathscr{D}'(\Omega)$. É neste sentido que as distribuições são funções generalizadas. De agora em diante a identificação f e T_f será feita sem maiores comentários.

Observação 2.1.5 *$\delta \notin L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, ou seja, não existe $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ tal que $T_f = \delta$.*

De fato, suponha que exista, assim,

$$\langle f, \phi\rangle = \langle \delta, \phi\rangle, \forall \phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n).$$

Tome uma sequência (ϕ_j) em $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que $S(\phi_j) \subset \left[-\frac{1}{j}, \frac{1}{j}\right], \phi_j(0) = 1$ e $0 \leq \phi_j \leq 1, \forall j \in \mathbb{N}$. Então,

$$\langle \delta, \phi_j\rangle = \phi_j(0) = 1, \forall j \in \mathbb{N}. \tag{2.1}$$

Por outro lado,

$$\langle f, \phi_j\rangle = \int_{-\frac{1}{j}}^{\frac{1}{j}} f\phi_j \, \mathrm{dx} = \int_{-1}^{1} f\phi_j \, \mathrm{dx}.$$

Temos que $|f\phi_j| \leq |f|, \forall j \in \mathbb{N}$. Além disso $\lim_{j\to\infty} \phi_j = 0$ q.t.p., pois $S(\phi_j) \subset \left[-\frac{1}{j}, \frac{1}{j}\right]$, logo $|f\phi_j| \to 0$ q.t.p. Então aplicando o Teorema da Covergência Dominada teremos:

$$\int_{-1}^{1} f\phi_j \, \mathrm{dx} \to \int_{-1}^{1} 0 = 0.$$

Portanto, $\langle f, \phi_j\rangle \to 0$, contradizendo (**??**).

Exemplo 2.1.6 *Seja μ uma medida definida na σ-álgebra de Borel de Ω e suponhamos que $\mu(K)$ seja finita para todo compacto $K \subset \Omega$ (ou seja que μ é localmente finita). Então,*

$$\langle \mu, \phi\rangle = \int_\Omega \phi \, \mathrm{d}\mu$$

define um funcional linear em $C_c^\infty(\Omega)$.

A linearidade é clara e a continuidade segue de,

$$|\langle u,\phi\rangle| = \left|\int_\Omega \phi \,\mathrm{d}\mu\right| = \left|\int_{S(\phi)} \phi \,\mathrm{d}\mu\right| = \int_{S(\phi)} \sup|\phi| \,\mathrm{d}\mu = \sup|\phi| \int_{S(\phi)} \mathrm{d}\mu =$$

$= \sup|\phi|\mu(S(\phi))$.

Em outras palavras, as distribuições são suficientemente gerais para incluir todas as medidas localmente finitas.

2.2 Operações com Distribuições

A soma e o produto por escalares de distribuições define-se de maneira óbvia, se $u_1, u_2 \in \mathscr{D}'(\Omega), \phi \in C_c^\infty(\Omega), \lambda \in \mathbb{C}$,

$$\langle u_1 + u_2, \phi\rangle = \langle u_1, \phi\rangle + \langle u_2, \phi\rangle$$

e

$$\langle \lambda u_1, \phi\rangle = \lambda \langle u_1, \phi\rangle .$$

A filosofia geral para definir operações nas distribuições é a seguinte. Suponhamos que existam dois operadores lineares contínuos L e L' de $C_c^\infty(\Omega)$ em $C_c^\infty(\Omega)$ tais que

$$\int_\Omega (L\phi)\psi \,\mathrm{dx} = \int_\Omega \phi(L'\psi)\,\mathrm{dx}, \phi, \psi \in C_c^\infty(\Omega). \tag{2.2}$$

Quando isto acontece diz-se que L é o transposto formal de L'e vice e versa. A continuidade de L (L') significa $L\phi_j \to 0$ ($L'\phi_j \to 0$) em $C_c^\infty(\Omega)$ toda vez que $\phi_j \to 0$ em $C_c^\infty(\Omega)$. Observe que por hipótese $\phi, L\phi, \psi, L\psi \in C_c^\infty(\Omega) \subseteq L^1_{loc} \subseteq \mathscr{D}'(\Omega)$ e, portanto, (**??**) pode ser também escrita da forma $\langle L\phi, \psi\rangle = \left\langle \phi, L'\psi\right\rangle$. Neste caso é possível estender o operador L a um operador $\tilde{L} : \mathscr{D}'(\Omega) \to \mathscr{D}'(\Omega)$. Com efeito, definimos

$$\left\langle \tilde{L}u, \psi\right\rangle = \left\langle u, L'\psi\right\rangle, u \in \mathscr{D}'(\Omega), \psi \in C_c^\infty(\Omega). \tag{2.3}$$

$\tilde{L}u$ é um funcional linear contínuo em $C_c^\infty(\Omega)$.

Exemplo 2.2.1 (Produto por uma função C^∞) *Seja $f \in C_c^\infty(\Omega)$ e definimos $L : C_c^\infty(\Omega) \to C_c^\infty(\Omega)$ por $(L\phi)(x) = f(x)\phi(x), x \in \Omega$. Temos que $L = L'$ satisfaz (**??**) e a "operação multiplicação por f" fica definida para qualquer distribuição por meio de*

$$\langle fu, \phi\rangle = \langle u, f\phi\rangle . \tag{2.4}$$

Exemplo 2.2.2 (Derivação) *Sejam $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ coordenadas cartesianas em Ω e defi-*

nimos $L = \frac{\partial}{\partial x_j}$. *Integrando por partes em relação à variável* x_j *obtemos*

$$\int_\Omega \frac{\partial \phi}{\partial x_j}\psi dx = -\int_\Omega \phi \frac{\partial \psi}{\partial x_j}dx.$$

O termo não integrado é nulo porque as funções ϕ, ψ *são nulas fora de um compacto. Então* $L' = -L$ *é o transposto formal de* $\frac{\partial}{\partial x_j}$, *e podemos definir*

$$\left\langle \frac{\partial u}{\partial x_j}, \phi \right\rangle = -\left\langle u, \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \right\rangle. \tag{2.5}$$

Analogamente, para cada $\alpha \in \mathbb{N}^n$ e $u \in \mathscr{D}'(\Omega)$ definimos $\partial^\alpha u$ por

$$\langle \partial^\alpha u, \phi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle u, \partial^\alpha \phi \rangle, \phi \in C_c^\infty(\Omega).$$

Exemplo 2.2.3 (Mudança de Variáveis) *Seja* $\Phi : \Omega \to \Omega$ *um difeomorfismo e definimos* $L\phi = \phi \circ \Phi, \phi \in C_c^\infty(\Omega)$. *Observe que* $S(\phi \circ \Phi) = \Phi^{-1}(S(\phi))$ *e, portanto,* $L\phi \in C_c^\infty(\Omega)$. *Para encontrar* $L^{'}$ *aplicamos o teorema de mudança de variáveis na integral*

$$\int_\Omega \phi(\Phi(y))\psi(y)\,\mathrm{dy} = \int_\Omega \phi(x)\psi(\Phi^{-1}(x))\left|J(\Phi)^{-1}\right|(x)\,\mathrm{dx}, \tag{2.6}$$

onde $|J(\Phi)^{-1}|$ *denota o valor absoluto do determinante da matriz Jacobiana de* Φ^{-1}. *Isto nos leva a definir* $L^{'}\psi = |J(\Phi)^{-1}|(\psi \circ \Phi^{-1})$. *Lembramos que a matriz jacobiana de* Φ^{-1} *é não singular e seu determinante nunca nulo, assim* $|J(\Phi)^{-1}|$ *é diferenciável. Além disso* Φ *preserva compactos, logo,* $(\phi \circ \Phi^{-1}) \cdot |J(\Phi^{-1})| \in C_c^\infty(\Omega)$. *Quando* $u \in \mathscr{D}'(\Omega)$, *definimos então,*

$$\langle u \circ \Phi, \phi \rangle = \left\langle u, (\phi \circ \Phi^{-1}) \cdot \left|J(\Phi)^{-1}\right| \right\rangle. \tag{2.7}$$

Exemplo 2.2.4 (Translação) *Seja* $a \in \mathbb{R}^n$ *fixo,* $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, *definido por* $\Phi(x) = x - a, x \in \mathbb{R}^n$. *Definimos a translação de* $\phi(x) \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ *como a função* $\phi_a(x) = \phi(x-a), x \in \mathbb{R}^n$. *Se* $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$, *a translação de* u *se define usando* (**??**), *ou seja:*

$$\langle u_a, \phi \rangle = \langle u, \phi_a \rangle, \phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n). \tag{2.8}$$

Exemplo 2.2.5 (Reflexão) *Seja* Ω *um aberto simétrico em relação a origem e consideremos* $\Phi(x) = -x, x \in \Omega$. *Definimos* $\check{\phi}(x) = \phi(-x)$ *para* $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$ *e* $x \in \Omega$, *e*

$$\langle \check{u}, \phi \rangle = \left\langle u, \check{\phi} \right\rangle, u \in \mathscr{D}'(\Omega), \phi \in C_c^\infty(\Omega). \tag{2.9}$$

2.3 Derivadas Distribuicionais e Derivadas Clássicas

Vejamos o que acontece com as funções de uma variável que apresentam uma descontinuidade de primeira espécie na origem. Mais precisamente, suponhamos que $f \in C^1(\mathbb{R} - \{0\})$ e que os limites

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0^+) \quad \text{e} \quad \lim_{x\to 0^-} f(x) = f(0^-)$$

existam. Denotemos por $\{f'\}$ a função definida por $\dfrac{df}{dx}$ para $x \neq 0$ e não definida para $x = 0$ e suponhamos ainda que $\{f'\} \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$. Para calcular f' (a derivada de f no sentido das distribuições) observamos que dada $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$, com $S(\phi) \subseteq [-N, N]$ tem-se

$$\left\langle f', \phi \right\rangle = -\left\langle f, \phi' \right\rangle = \int_{-N}^{N} f\phi' \,\mathrm{dx} = -\lim_{\epsilon\to 0}\int_{-N}^{-\epsilon} f\phi' \,\mathrm{dx} - \lim_{\epsilon\to 0}\int_{\epsilon}^{N} f\phi' \,\mathrm{dx} =$$

$$= -\lim_{\epsilon\to 0}\left[f(x)\phi(x)|_{-N}^{-\epsilon} - \int_{-N}^{-\epsilon} \phi(x)\left\{f'\right\}\mathrm{dx}\right] - \lim_{\eta\to 0}\left[f(x)\phi(x)|_{\eta}^{N} - \int_{\eta}^{N} \phi(x)\left\{f'\right\}\mathrm{dx}\right] =$$

$$= \lim_{\epsilon\to 0}\left[f(-\epsilon)\phi(-\epsilon) - \int_{-N}^{-\epsilon} \phi(x)\left\{f'\right\}\mathrm{dx}\right] - \lim_{\eta\to 0}\left[-f(\eta)\phi(\eta) - \int_{\eta}^{N} \phi(x)\left\{f'\right\}\mathrm{dx}\right] =$$

$$= \left(f(0^+) - f(0^-)\right)\phi(0) + \int_{+\infty}^{-\infty} \phi\left\{f'\right\}\mathrm{dx}.$$

Um caso particular importante se obtém quando $f(x)$ é a função Heaviside, ou seja,

$$f(x) = H(x) = \begin{cases} 1, & se \quad x > 0 \\ 0, & se \quad x < 0. \end{cases}$$

Temos $H(0^+) = 1, H(0^-) = 0$ e $\{H'\} = 0$ assim,

$$\left\langle H', \phi \right\rangle = \left[H(0^+) - H(0^-)\right]\phi(0) + \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{H'\right\}\phi\,\mathrm{dx} = \phi(0) = \langle \delta, \phi\rangle .$$

Obtemos deste modo a distribuição Delta de Dirac como derivada de $H(x)$.

Observação 2.3.1 *É possível fazer com que uma função não localmente integrável defina uma distribuição, por exemplo a função $f(x) = \frac{1}{x}$ em $\mathbb{R}$.*

De fato, a integral de $\frac{1}{|x|}$ em qualquer vizinhança da origem é infinita e $f \notin L^1_{loc}(\mathbb{R})$. Entretanto para $x \neq 0$, $\frac{d}{dx}\log|x| = \frac{1}{x}$ e $g(x) = \log|x|$ é localmente integrável e $log|x|$ é contínua para $x \neq 0$. Assim, definimos a distribuição dada por

$$\left\langle g', \phi \right\rangle = -\left\langle g, \phi' \right\rangle = -\left\langle \log x, \phi' \right\rangle$$

conhecida por valor principal de $\frac{1}{x}$.

A seguir apresentaremos alguns exemplos de produto de uma distribuição por uma função C^∞.

Exemplo 2.3.2 *Se $f \in C^\infty(\mathbb{R}), \phi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ temos*

$$\langle f\delta, \phi\rangle = \langle \delta, f\phi\rangle = (f\phi)(0) = f(0)\phi(0) = \langle f(0)\delta, \phi\rangle ,$$

o que significa que $f\delta = f(0)\delta$ e só o valor de f em $x = 0$ é relevante no produto $f\delta$. Analogamente,

$$\left\langle f\delta', \phi \right\rangle = \left\langle \delta', f\phi \right\rangle = -\left\langle \delta, (f\phi)' \right\rangle = -\left\langle \delta, f\phi' + \phi f' \right\rangle = -\left\langle \delta, f\phi' \right\rangle - \left\langle \delta, \phi f' \right\rangle =$$

$$= -f(0)\phi'(0) - f'(0)\phi(0) = f(0)\left\langle \delta', \phi \right\rangle - f'(0)\left\langle \delta, \phi \right\rangle = \left\langle f(0)\delta' - f'(0)\delta, \phi \right\rangle.$$

Então $f\delta' = f(0)\delta' - f'(0)\delta$. Análogos resultados podem ser obtidos para derivadas de qualquer ordem de δ.

A regra de Leibniz para a derivada do produto de duas funções se mantém quando um dos fatores é uma distribuição. Sua demonstração é feita por indução sobre $|\alpha|$.

Teorema 2.3.3 *Se $u \in \mathscr{D}'(\Omega), f \in C^\infty(\Omega)$ e $\alpha \in \mathbb{N}^n$ então*

$$\partial^\alpha(fu) = \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \partial^\beta f \partial^{\alpha-\beta} u.$$

Se f é diferenciável num intervalo (a, b) e $f' = 0$ então o Teorema do Valor Médio implica que f é constante em (a, b). Este mesmo resultado é válido para distribuições.

Teorema 2.3.4 *Se $u \in \mathscr{D}'((a, b))$ e $u' = 0$ então $u = cte$, isto é, $\exists\ c \in \mathbb{R}$ tal que $\langle u, \phi \rangle = \langle c, \phi \rangle, \forall \phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$.*

Demonstração. Primeiramente observemos que qualquer função constante pertence a L^1_{loc} e é nesse sentido que $u = c$.

Dada $\phi \in C_c^\infty((a, b))$ temos que $\phi = \psi'$, para alguma $\psi \in C_c^\infty((a, b))$ se, e somente se, $\int \phi(x)\,\mathrm{dx} = 0$.

Tomamos $\phi_0 \in C_c^\infty((a, b))$ como na observação **??** tal que $\int \phi_0(x)\,\mathrm{dx} = 1$, assim podemos escrever

$$\phi(x) = [\phi(x) - \int \phi(t)\,\mathrm{dt}\,\phi_0(x)] + \int \phi(t)\,\mathrm{dt}\,\phi_0(x) = \psi'(x) + \int \phi(t)\,\mathrm{dt}\,\phi_0(x)$$

pois o termo entre conchetes tem integral nula, logo ele é a derivada de uma função teste.

Utilizando a expressão acima, mostramos que $\langle u, \phi \rangle = \langle c, \phi \rangle$, ou seja, $u = c$ onde $c = \langle u, \phi_0 \rangle$. ∎

2.4 Distribuições com Suporte Compacto

Definição 2.4.1 *Duas distribuições $u_1, u_2 \in \mathscr{D}'(\Omega)$ são iguais num aberto $U \subseteq \Omega$ quando*

$$\langle u_1, \phi \rangle = \langle u_2, \phi \rangle, \forall \phi \in C_c^\infty(U).$$

Note que a definição acima faz sentido pois $C_c^\infty(U) \subseteq C_c^\infty(\Omega)$.

Usando o teorema **??** mostramos o

Teorema 2.4.2 *Sejam u_1 e $u_2 \in \mathscr{D}'(\Omega)$ tais que todo ponto de Ω tem uma vizinhança onde $u_1 = u_2$. Então $u_1 = u_2$ em Ω.*

Definição 2.4.3 *Se $u \in \mathscr{D}'(\Omega)$ definimos o suporte de u, denotado $S(u)$, como a interseção de todos os subconjuntos fechados F de Ω tais que $u = 0$ em $\Omega - F$, ou seja*

$$\langle u, \phi \rangle = \langle 0, \phi \rangle, \forall \phi \in C_c^\infty(\Omega - F).$$

Exemplo 2.4.4 $S(\delta) = \{0\}$.

Vamos mostrar que $\delta = 0$ em $\mathbb{R}^n - \{0\}$. Seja $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n - \{0\})$. Pela observação **??** podemos supor $\phi(0) = 0$. Assim,

$$\langle \delta, \phi \rangle = \phi(0) = 0 = \langle 0, \phi \rangle.$$

Então $S(\delta) \subset \{0\}$. Mas tomando $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que $\phi(0) \neq 0$ temos $\langle \delta, \phi \rangle \neq 0$, portanto $S(\delta) = \{0\}$.

Definição 2.4.5 *Se $u \in \mathscr{D}'(\Omega)$ definimos o suporte singular de u, denotado por $SS(u)$,como a intersecção de todos os fechados F de Ω para os quais existe uma função $f \in C^\infty(\Omega - F)$ tal que*

$$\langle u, \phi \rangle = \langle f, \phi \rangle = \int f\phi \, \mathrm{dx}, \forall \phi \in C_c^\infty(\Omega - F).$$

Observação 2.4.6 $SS(u) \subset S(u)$.

Com efeito, se $x \notin S(u)$ então $u = 0$ numa vizinhança de x, assim u é C^∞ nesta vizinhança. Logo $x \notin SS(u)$.

Exemplo 2.4.7 $SS(\delta) = \{0\}$.

Como $SS(\delta) \subset S(\delta) = \{0\}$, então $SS(\delta) \subset \{0\}$. Logo, $SS(\delta) = \{0\}$ ou $SS(\delta) = \emptyset$.
Suponhamos que $SS(\delta) = \emptyset$, então δ é uma função $C^\infty(\mathbb{R}^n)$, ou seja , $\exists f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$\langle \delta, \phi \rangle = \langle f, \phi \rangle, \forall \phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n).$$

Afirmação:$f = 0$ em $\mathbb{R}^n - \{0\}$.
De fato, suponha que existe $x_0 \neq 0$ tal que $f(x_0) \neq 0$. Logo, pela continuidade da f em $\mathbb{R}^n, f(x) \neq 0, \forall x \in B(x_0, r)$, para algum r satisfazendo, $0 < r < \|x_0\|$. Digamos, $f > 0$ em $B(x_0, r)$. Seja $\phi \in C_c^\infty(B(x_0, r)), 0 \leq \phi \leq 1$ e $\phi = 1$ em $B(x_0, \frac{r}{2})$, assim temos,

$$0 < \int f\phi = \langle \delta, \phi \rangle = \phi(0) = 0$$

o que é absurdo, logo $f(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}^n - \{0\}$. Como $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ concluimos que $f = 0$ em $\mathbb{R}^n$. Logo $\delta \equiv 0$, o que é absurdo e, portanto, $SS(\delta) = \{0\}$.

Definição 2.4.8 *Denotamos por $\mathscr{E}'(\Omega)$, o subespaço de $\mathscr{D}'(\Omega)$ das distribuições com suporte compacto.*

A partir de agora veremos os resultados que permitem identificar $\mathscr{E}'(\Omega)$ com o espaço dos funcionais lineares contínuos em $C^\infty(\Omega)$.

Teorema 2.4.9 *Se $u \in \mathscr{E}'(\Omega)$, então existe um único funcional linear $\widetilde{u} : C^\infty(\Omega) \to \mathbb{C}$ tal que*

(i) $\widetilde{u}(\phi) = u(\phi)$, *para toda* $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$*;*

(ii) $\widetilde{u}(\phi) = 0$, *se* $\phi \in C^\infty(\Omega)$ *e* $S(\phi) \cap S(u) = \emptyset$.

Demonstração. Suponhamos que existam dois funcionais lineares $\widetilde{u_1}, \widetilde{u_2}$ que verifiquem $(i), (ii)$ e seja $\psi \in C_c^\infty(\Omega)$ tal que $\psi = 1$ numa vizinhança de $S(u)$. Se $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$, colocamos

$$\phi = \phi\psi + (1-\psi)\phi = \phi_1 + \phi_2,$$

onde $\phi_1 = \phi\psi$ e $\phi_2 = (1-\psi)\phi$. Assim, $\phi_1 \in C_c^\infty(\Omega)$ e $S(\phi_2) \cap S(u) = \emptyset$. Então,

$$\widetilde{u_1}(\phi) = \widetilde{u_1}(\phi_1) + \widetilde{u_1}(\phi_2) = u(\phi_1) = \widetilde{u_2}(\phi_1) + \widetilde{u_2}(\phi_2) = \widetilde{u_2}(\phi),$$

o que prova a unicidade.

Mostraremos agora a existência. Dada $\phi \in C^\infty(\Omega)$ definimos

$$\langle \widetilde{u}, \phi \rangle = \langle u, \phi_0 \rangle,$$

onde $\phi = \phi_0 + \phi_1$ é qualquer decomposição de ϕ com $\phi_0 \in C_c^\infty(\Omega)$ e $S(\phi_1) \cap S(u) = \emptyset$.

Suponha que $\phi = \phi_0' + \phi_1'$ é outra decomposição de ϕ então

$$\phi_0 + \phi_1 = \phi_0' + \phi_1'$$

o que implica que

$$\phi_0 - \phi_0' = \phi_1' - \phi_1. \tag{2.10}$$

Temos também que $S(\phi_1') \cap S(u) = \emptyset$ e $S(\phi_1) \cap S(u) = \emptyset$ então $S(\phi_1' - \phi_1) \cap S(u) = \emptyset$ e assim por (**??**) segue que $S(\phi_0 - \phi_0') \cap S(u) = \emptyset$.

Mas $\phi_0 - \phi_0'$ esta suportada num aberto onde u se anula, então $u(\phi_0 - \phi_0') = 0$, ou seja,

$$\langle u, \phi_0 - \phi_0' \rangle = \langle u, \phi_0 \rangle - \langle u, \phi_0' \rangle = 0$$

Então, $\langle u, \phi_0 \rangle = \langle u, \phi_0' \rangle$, ou seja, a definição de $\widetilde{u}$ independe da decomposição de ϕ.

Agora mostraremos que $\widetilde{u}$ verifica (i) e (ii).

De fato, seja $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$. Então,

$$\langle \widetilde{u}, \phi \rangle = \langle \widetilde{u}, \phi + 0 \rangle = \langle u, \phi \rangle,$$

o que prova (i).

Agora seja $\phi \in C^\infty(\Omega)$ tal que $S(\phi) \cap S(u) = \emptyset$. Então,

$$\langle \widetilde{u}, \phi \rangle = \langle \widetilde{u}, 0 + \phi \rangle = \langle u, 0 \rangle = 0,$$

o que prova (ii). ■

Definição 2.4.10 *Dizemos que uma sequência (ϕ_j) converge para ϕ em $C^\infty(\Omega)$ quando $\phi, \phi_j \in C^\infty(\Omega), \forall j \in \mathbb{N}$ e $\forall K \subset\subset \Omega, \forall \alpha \in \mathbb{N}^n$ tem-se que,*

$$\lim_{j \to +\infty} \sup_{x \in K} |\partial^\alpha \phi_j(x) - \partial^\alpha \phi(x)| = 0.$$

Dizemos que um funcional linear $u : C^\infty(\Omega) \to \mathbb{C}$ é contínuo se, para toda sequência $(\phi_j) \subset C_c^\infty(\Omega)$ tal que $\phi_j \to \phi$ em $C^\infty(\Omega)$ tem-se que $u(\phi_j) \to u(\phi)$.

Observação 2.4.11 *Se uma sequência $(\phi_j) \subset C_c^\infty(\Omega)$ converge a zero em $C_c^\infty(\Omega)$ é claro que também converge a zero em $C^\infty(\Omega)$. A recíproca é falsa, como mostra o exemplo em $\Omega = \mathbb{R}$ dado por*

$$\phi_j(x) = 2^{-j}\phi_0(jx),$$

onde $S(\phi_0) \subseteq [-1, 1]$ e $\phi_0(x) = 1$ se $|x| \leq \frac{1}{2}$.

De fato,

$$|\phi_j^{(k)}(x)| = |2^{-j} j^k \phi_0^{(k)}(jk)| \leq 2^{-j} j^k c \to 0, \quad \text{quando } j \to \infty.$$

Por outro lado, $S(\phi_j) \supseteq \left[-\frac{j}{2}, \frac{j}{2}\right]$, ou seja, os suportes das ϕ_j não estão contidos num compacto fixo.

Teorema 2.4.12 *$C_c^\infty(\Omega)$ é denso em $C^\infty(\Omega)$, isto é, $\forall \phi \in C^\infty(\Omega)$ existe $(\phi_j) \subset C_c^\infty(\Omega)$ tal que $\phi_j \to \phi$ em $C^\infty(\Omega)$.*

Demonstração. Considere uma sequência (K_j) de compactos de Ω como no teorema **??**. Pelo teorema **??**, para cada $j \in \mathbb{N}$ existe $\phi_j \in C_c^\infty(\Omega)$ tal que $\phi_j = 1$ em K_j. Então, $\phi_j \phi \in C_c^\infty(\Omega), \forall j \in \mathbb{N}$. Mostraremos que $\phi_j \phi \to \phi$ em $C^\infty(\Omega)$. Fixe $K \subset\subset \Omega$ e $\alpha \in \mathbb{N}$. Note que,

$$\phi_j \phi - \phi = \phi(\phi_j - 1) = 0 \text{ em } K_j, \forall j \in \mathbb{N},$$

logo,

$$\partial^\alpha \phi_j \phi - \partial^\alpha \phi = 0 \text{ em } \overset{\circ}{K_j}, \forall j \in \mathbb{N}.$$

Tome $j_0 \in \mathbb{N}$ tal que $K \subset K_{j_0}$. Então se $j > j_0$ temos que $K \subset \overset{\circ}{K_j}$ e daí

$$j > j_0 \Rightarrow \partial^\alpha \phi_j \phi - \partial^\alpha \phi = 0 \text{ em } K.$$

■

Teorema 2.4.13 *Seja u um funcional linear em $C^\infty(\Omega)$. As condições seguintes são equivalentes:*

(i) *u é contínuo;*

(ii) *existem um compacto $K \subset \Omega$, uma constante positiva c e um inteiro positivo m tais que*

$$|\langle u, \phi\rangle| \leq c \sum_{|\alpha|\leq m} \sup_K |\partial^\alpha \phi|, \phi \in C^\infty(\Omega). \tag{2.11}$$

Demonstração. Suponhamos que (ii) ocorra e seja (ϕ_j) uma sequência em $C^\infty(\Omega)$ tal que $\phi_j \to 0$. Assim,

$$|\langle u, \phi_j\rangle| \leq c \sum_{|\alpha|\leq m} \sup_K |\partial^\alpha \phi_j| \to 0,$$

já que as derivadas de ϕ_j até a ordem m tendem a zero uniformemente em qualquer compacto. Então, $\langle u, \phi_j\rangle \to 0$.

Reciprocamente, suponhamos que u é contínua e que (ii) seja falsa. Então, para qualquer escolha de c, K, m $\exists \phi \in C^\infty(\Omega)$ tal que

$$|\langle u, \phi\rangle| > c \sum_{|\alpha|\leq m} \sup_K |\partial^\alpha \phi|.$$

Seja a sequência de (K_j) dada no teorema **??**, tomando $c = j, m = j$ e $K = K_j$, existe uma sequência $(\phi_j) \in C^\infty(\Omega)$ tal que

$$r_j = |\langle u, \phi_j\rangle| > j \sum_{|\alpha|\leq j} \sup_{K_j} |\partial^\alpha \phi_j|.$$

Note que $r_j > 0$.

Seja $\psi_j = \dfrac{\phi_j}{r_j}$, vamos mostrar que $\psi_j \to 0$ em $C^\infty(\Omega)$. Assim, sejam $K \subset\subset \Omega, \beta$ um multi-índice e escolhemos $j > |\beta|$ tal que $K \subseteq K_j$ então,

$$\sup_K |\partial^\beta \psi_j| \leq \sum_{|\alpha\leq j} \sup_K |\partial^\alpha \psi_j| = \sum_{|\alpha|\leq j} \sup_{K_j} |\partial^\alpha \frac{\phi_j}{r_j}| = \sum_{|\alpha|\leq j} \frac{1}{r_j} \sup_{K_j} |\partial^\alpha \phi_j| < \frac{1}{j}.$$

Então quando $j \to +\infty, \sup_K |\partial^\beta \psi_j| \to 0$, ou seja, $\sup_K \partial^\beta \psi_j \to 0$ e, portanto, $\psi_j \to 0$. Mas,

$$|\langle u, \psi_j\rangle| = |\left\langle u, \frac{\phi_j}{r_j}\right\rangle| = \frac{1}{r_j}|\langle u, \phi_j\rangle| = 1, \forall j \in \mathbb{N}.$$

Assim, $\psi_j \to 0$ em $C^\infty(\Omega)$ mas $\langle u, \psi_j\rangle \nrightarrow 0$. O que contradiz o fato de u ser contínuo. ∎

A continuidade dos funcionais de $C_c^\infty(\Omega)$ pode ser caracterizada de forma análogo.

Teorema 2.4.14 *Seja u um funcional linear em $C_c^\infty(\Omega)$. As condições seguintes são equivalentes:*

(i) *u é contínuo;*

(ii) *Para cada compacto $K \subset \Omega$, existem uma constante positiva c e um inteiro positivo m tais que*

$$|\langle u, \phi \rangle| \leq c \sum_{|\alpha| \leq m} \sup |\partial^\alpha \phi|, \phi \in C_c^\infty(\Omega), S(\phi) \subset K.$$

Teorema 2.4.15 *Suponha que $u \in \mathscr{D}'(\Omega)$. As seguintes condições são equivalentes*

(i) $S(u) \subset\subset \Omega$;

(ii) *existe um funcional linear contínuo $v : C^\infty(\Omega) \to \mathbb{C}$ tal que $v|_{C_c^\infty(\Omega)} = u$.*

Demonstração. $(i) \Rightarrow (ii)$ Tome $\tilde{u} : C^\infty(\Omega) \to \mathbb{C}$ como no teorema **??**. Mostremos que $\tilde{u}$ é contínuo. Para isso, tomamos $\phi_j \to \phi$ em $C^\infty(\Omega)$ mostraremos que

$$\langle \tilde{u}, \phi_j \rangle \to \langle \tilde{u}, \phi \rangle. \tag{2.12}$$

Da lineariedade de $\tilde{u}$ é suficiente considerar o caso em que $\phi \equiv 0$. Para isso mostraremos inicialmente que

$$\psi\phi_j \to 0 \text{ em } C_c^\infty(\Omega). \tag{2.13}$$

De fato, $S(\psi\phi_j) \subset S(\psi), \forall j \in \mathbb{N}$. Além disso para cada $\alpha \in \mathbb{N}^n$ defina $M_\alpha = \max_{0 \leq \beta \leq \alpha} \sup_{x \in \Omega} |\partial^\beta \psi(x)|$, logo

$$\begin{aligned} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |\partial^\alpha (\psi\phi_j)(x)| &= \sup_{x \in K} |\partial^\alpha (\psi\phi_j)(x)| \\ &\leq \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \sup_{x \in K} |\partial^{\alpha-\beta} \psi(x)| \sup_{x \in K} |\partial^\beta \phi_j(x)|. \end{aligned}$$

Então,

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} |\partial^\alpha (\psi\phi_j)(x)| \leq M_\alpha \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \sup_{x \in K} |\partial^\beta \phi_j(x)|.$$

Como $\phi_j \to \phi$ em $C^\infty(\Omega)$, para cada $0 \leq \beta \leq \alpha$ temos que

$$\lim_{j \to +\infty} \sup_{x \in K} |\partial^\beta \phi_j(x)| = 0,$$

daí segue (**??**). Para concluir a prova de (**??**), note que

$$\phi_j = \psi\phi_j + (1-\psi)\phi_j \text{ e } S((1-\psi)\phi_j) \cap K = \emptyset, \forall j \in \mathbb{N}.$$

Logo, pelo teorema **??** e por (**??**) segue que

$$\langle \tilde{u}, \phi_j \rangle = \langle u, \psi\phi_j \rangle \to 0.$$

$(ii) \Rightarrow (i)$ Pelo teorema **??**, existem C, m, K tais que

$$|\langle v, \phi \rangle| \leq c \sum_{|\alpha| \leq m} \sup_{x \in K} |\partial^\alpha \phi(x)|, \phi \in C^\infty(\Omega).$$

Mostraremos que $S(u) \subset K$. De fato, se $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$ e $S(\phi) \cap K = \emptyset$ então $\partial^\alpha \phi = 0$ em K, $\forall \alpha \in \mathbb{N}^n$. Logo,

$$|\langle u, \phi \rangle| = |\langle v, \phi \rangle| \leq c \sum_{|\alpha| \leq m} \sup_{x \in K} |\partial^\alpha \phi(x)| = 0.$$

■

Observação 2.4.16 *O funcional v do teorema **??** é único. Logo, podemos identificar $\mathscr{E}'(\Omega)$ com o espaço dos funcionais lineares contínuos em $C^\infty(\Omega)$.*

De fato, suponha que $w : C^\infty(\Omega) \to \mathbb{C}$ é um funcional linear contínuo tal que $w|_{C_c^\infty(\Omega)} = u$. Então, dada $\phi \in C^\infty(\Omega)$ qualquer, pelo teorema **??** existe $(\phi_j) \subset C_c^\infty(\Omega)$ tal que $(\phi_j) \to \phi$ em $C^\infty(\Omega)$. Logo,

$$\langle v, \phi_j \rangle = \langle w, \phi_j \rangle, \forall j \in \mathbb{N}.$$

Fazendo $j \to +\infty$, da continuidade de v e w resulta que

$$\langle v, \phi \rangle = \langle w, \phi \rangle.$$

Ou seja, $v = w$.

Exemplo 2.4.17 *Se $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ e f é zero q.t.p. fora de um compacto K, segue que $S(T_f) \subseteq K$ e $T_f \in \mathscr{E}'(\Omega)$. Reciprocamente se $S(T_f) = K$, ou seja, T_f é zero no aberto $\Omega - K$ então $f = 0$ q.t.p. em $\Omega - K$.*

De fato, como $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ temos pelo exemplo **??** que f define uma distribuição T_f dada por

$$\langle T_f, \phi \rangle = \int_\Omega f\phi \, \mathrm{d}\mu, \phi \in C_c^\infty(\Omega).$$

Suponhamos inicialmente que $f = 0$ q.t.p. fora do compacto K, ou seja, existe $E \subset \Omega - K$ tal que $f \neq 0$ em E e $\mu(E) = 0$.

Assim, $\forall \phi \in C_c^\infty(\Omega - K)$,

$$\langle T_f, \phi \rangle = \int_\Omega f\phi \, \mathrm{d}\mu = \int_{\Omega - K} f\phi \, \mathrm{d}\mu + \int_K f\phi \, \mathrm{d}\mu = \int_E f\phi \, \mathrm{d}\mu = 0.$$

Então, $S(T_f) \subseteq K$ e assim $T_f \in \mathscr{E}'(\Omega)$.

Reciprocamente, suponhamos que $S(T_f) = K$, ou seja, $\langle T_f, \phi \rangle = 0, \forall \phi \in C_c^\infty(\Omega - K)$. Assim, $\forall \phi \in C_c^\infty(\Omega - K)$,

$$\int_\Omega f\phi \, \mathrm{d}\mu = \int_{\Omega - K} f\phi \, \mathrm{d}\mu + \int_K f\phi \, \mathrm{d}\mu = \int_{\Omega - K} f\phi \, \mathrm{d}\mu = 0.$$

Então, segue que $f = 0$ q.t.p. em $\Omega - K$.

2.5 Convergência em $\mathscr{D}'(\Omega)$

Definição 2.5.1 *Dizemos que uma sequência $(u_j) \subset \mathscr{D}'(\Omega)$, converge a $u \in \mathscr{D}'(\Omega)$ se $\langle u_j, \phi \rangle$ converge a $\langle u, \phi \rangle$ para toda $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$. Neste caso escrevemos $u_j \to u$ em $\mathscr{D}'(\Omega)$.*

Exemplo 2.5.2 *Seja $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}), r$ um número real e consideremos a translação u_r de u dada por $\langle u_r, \phi \rangle = \langle u, \phi_r \rangle$, onde $\phi_r(x) = \phi(r+x)$. Dado o "quociente de Newton" $v_r = \dfrac{u_r - u}{r}$ temos que*

$$\lim_{r \to 0} v_r = \frac{du}{dx} = u'.$$

Com efeito, dada $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$,

$$\langle v_r, \phi \rangle = \left\langle \frac{u_r - u}{r}, \phi \right\rangle = \frac{1}{r}(\langle u_r, \phi \rangle - \langle u, \phi \rangle) = \frac{1}{r}\left(\langle u, \phi_r \rangle - \langle u, \phi \rangle\right) = \left\langle u, \frac{\phi_r - \phi}{r} \right\rangle.$$

Consideremos uma sequência $r_j \to 0$ e colocamos $\psi_j = \dfrac{\phi_{r_j} - \phi}{r_j}$. Mostraremos que $\psi_j \to \phi'$ em $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Seja $N > 0$ tal que $S(\phi) \subset [-N, N]$ e $R = \sup\limits_{j \in \mathbb{N}} |r_j|$. Então $S(\psi_j) \subset [-N - R, N + R], \forall j \in \mathbb{N}$. Além disso, uma dupla aplicação do Teorema do Valor Medio mostra que para cada $k \in \mathbb{N}$, temos que

$$\frac{d^k \psi_j}{dx^k} \to \frac{d^k \phi'}{dx^k} \text{ uniformemente,}$$

ou seja, ψ_j converge a ϕ' em $C_c^\infty(\mathbb{R})$. Então,

$$\lim_{r \to 0} \langle v_r, \phi \rangle = \lim_{r \to 0} \left\langle u, \frac{\phi_r - \phi}{r} \right\rangle = \langle u, -\phi' \rangle = \langle u', \phi \rangle.$$

Portanto,

$$\langle v_r, \phi \rangle \to \langle u', \phi \rangle$$

em $\mathscr{D}'(\mathbb{R})$.

Este exemplo mostra que a derivada no sentido das distribuições é ainda o limite de quocientes de Newton, em um certo sentido. No caso de distribuições definidas em $\mathbb{R}^n$, temos situação análoga.

Exemplo 2.5.3 (Continuidade da derivação em $\mathscr{D}'(\Omega)$) *Seja $u_j \to u$ em $\mathscr{D}'(\Omega)$. Então*

$$\lim_{j \to \infty} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \lim_{j \to \infty} u_j = \frac{\partial u}{\partial x_i}.$$

Exemplo 2.5.4 *Se* $\phi \in C_c^\infty(\Omega), \phi \geq 0$ *e* $\int \phi \,\mathrm{dx} = 1$, *então quando* $\epsilon \to 0$,

$$\phi_\epsilon(x) = \epsilon^{-n}\phi\left(\frac{x}{\epsilon}\right) \to \delta$$

em $\mathscr{D}'(\Omega)$.

Exemplo 2.5.5 *Para cada* $j \in \mathbb{N}$ *seja* $K_j = \left\{x \in \Omega; |x| \leq j \text{ e } d(x, \Omega^c) \leq \frac{1}{j}\right\}$ *e consideremos uma sequência de funções* $\phi_j \subset C_c^\infty(\Omega)$ *tal que* $\phi_j = 1$ *numa vizinhança de* K_j. *Dada* $u \in \mathscr{D}'(\Omega)$ *a sequência* $u_j = \phi_j u \in \mathscr{E}'(\Omega)$ *e* $u_j \to u$ *em* $\mathscr{D}'(\Omega)$.

2.6 Convolução de Distribuições

Se f e g são funções contínuas em $\mathbb{R}^n$ e uma delas tem suporte compacto, a convolução de f e g se define como

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)\,\mathrm{dy} = \int_{\mathbb{R}^n} g(x-y)f(y)\,\mathrm{dy},\ x \in \mathbb{R}^n.$$

Isto leva a seguinte definição

Definição 2.6.1 *Se* $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ $(u \in \mathscr{E}'(\mathbb{R}^n))$ *e* $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ $(\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^n))$ *definimos* $u * \phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ *por*

$$u * \phi(a) = \left\langle u, \check{\phi}_a \right\rangle,$$

onde $\check{\phi}_a(x) = \phi(a - x)$.

Teorema 2.6.2 *Sejam* $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n), \phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. *Então*

(i) $u * \phi \in \mathbb{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ *e suas derivadas são dadas por*

$$\partial^\alpha(u * \phi) = (\partial^\alpha u) * \phi = u * \partial^\alpha \phi; \tag{2.14}$$

(ii) $S(u * \phi) \subseteq S(u) + S(\phi)$.

Demonstração. Seja (a_j) uma sequência de $\mathbb{R}^n$ tal que $a_j \to a$. Assim como $\check{\phi_{a_j}} \to \check{\phi}_a$ em $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ temos que

$$u * \phi(a_j) = \left\langle u, \check{\phi_{a_j}} \right\rangle \to \left\langle u, \check{\phi}_a \right\rangle = u * \phi_a.$$

Então $u * \phi$ é uma função contínua. Mostraremos que, para todo $m \in \mathbb{N}$ temos que $u * \phi \in C^m(\mathbb{R}^n)$ e que vale (**??**) para $|\alpha| \leq m$, usando para isso, indução em m. Para $k = 1$ tome $\alpha = e_i$, consideramos o quociente de Newton na direção do vetor unitário e_i, assim

$$\frac{1}{r}\left[u * \phi(a + re_i) - u * \phi(a)\right] = \frac{1}{r}\left[\left\langle u, \check{\phi}_{a+re_i}\right\rangle - \left\langle u, \check{\phi}_a\right\rangle\right] =$$

$$= \frac{1}{r}\left\langle u, \check{\phi}_{a+re_i} - \check{\phi}_a\right\rangle = \left\langle \frac{u_{re_i} - u}{r}, \check{\phi}_a \right\rangle.$$

Pelo exemplo **??** temos que $\lim\limits_{r\to 0}\frac{u_{re_i}-u}{r}=\frac{\partial u}{\partial x_i}$. Assim,

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(u*\phi)(a)=\left\langle \frac{\partial u}{\partial x_i},\check{\phi a}\right\rangle=\frac{\partial u}{\partial x_i}*\phi(a). \tag{2.15}$$

Como o membro direito da igualdade acima é uma função contínua em a segue que $\frac{\partial}{\partial x_i}(u*\phi)$ é contínua, assim $u*\phi\in \mathbb{C}^1(\mathbb{R}^n)$.

Além disso,

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(u*\phi)=\left\langle \frac{\partial u}{\partial x_i},\check{\phi}_a\right\rangle=-\left\langle u,\frac{\partial\check{\phi}_a}{\partial x_i}\right\rangle=\left\langle u,\frac{\partial\check{\phi}_x}{\partial a_i}\right\rangle=u*\frac{\partial \phi}{\partial a_i}. \tag{2.16}$$

De (**??**) e (**??**) segue que

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(u*\phi)=\frac{\partial u}{\partial x_i}*\phi=u*\frac{\partial \phi}{\partial x_i}.$$

Supondo que (**??**) é válida para todo $\alpha\in\mathbb{N}^n$ tal que $|\alpha|\leq m$. Dado $\alpha\in\mathbb{N}^n$ tal que $|\alpha|=m+1$, temos que $\alpha=\beta+e_1$ para algum $\beta\in\mathbb{N}^n$ com $|\beta|=m$ e algum $i=1,2,\ldots,n$. Substituindo u por $\partial^\beta u$ na demonstração do caso $m=1$, segue o item (i).

Finalmente, se $a\notin S(u)+S(\phi)$ então $u*\phi(a)=0$. De fato, $a-x\notin S(\phi)$ então $u*\phi(a)=0$. Agora se $a-x\in S(\phi)$ então $x\notin S(u)$. Assim, $u*\phi(a)=0$. Logo $S(u*\phi)\subseteq S(u)+S(\phi)$. ∎

Observação 2.6.3 *Os mesmos resultados do teorema anterior valem se $u\in\mathscr{E}'(\mathbb{R}^n)$ e $\phi\in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.*

Lema 2.6.4 *Se $\phi,\psi\in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. Para cada $\epsilon>0$ defina s_ϵ por*

$$s_\epsilon(x)=\sum_{m\in\mathbb{Z}^n}\phi(x-\epsilon m)\psi(\epsilon m)\epsilon^n.$$

Então

(i) *$S(s_\epsilon)\subset S(\phi)+S(\psi)$;*

(ii) *$s_\epsilon\to\phi*\psi$ uniformemente em x, quando $\epsilon\to 0$.*

Demonstração. **(i)** De fato, seja $x\in\mathbb{R}^n$ tal que $x\notin S(\phi)+S(\psi)$, vamos mostrar que

$$\phi(x-\epsilon m)\psi(\epsilon m)=0,\forall m\in\mathbb{Z}^n. \tag{2.17}$$

Se $\epsilon m\notin S(\psi),\forall m\in\mathbb{Z}^n$ então vale (**??**). Agora suponhamos que $\epsilon m\in S(\psi)$ então $x-\epsilon m\notin S(\phi)$, pois se $x-\epsilon m\in S(\phi)$ teríamos $x\in S(\phi)+S(\psi)$. Assim vale (**??**).
(ii) Existe K compacto tal que $S(\phi*\psi)\subseteq K$. Consideramos a partição P em K tal que $|P|=\epsilon$.

Fixado $x\in\mathbb{R}^n$. Por um resultado de integral dado em [**?**] temos que

$$\lim_{\epsilon\to 0}s_\epsilon(x)=\int_{\mathbb{R}^n}\phi(x-y)\psi(y)\,\mathrm{dy}=\phi*\psi(x). \tag{2.18}$$

Dado $\mu > 0$, mostraremos que $\exists \delta_x > 0$ e $\epsilon_x > 0$ tais que

$$\epsilon < \epsilon_x \Rightarrow |s_\epsilon(x) - \phi * \psi(x)| < \mu, \forall z \in B(x, \delta_x). \tag{2.19}$$

Por (**??**) segue que existe $\epsilon_1 > 0$ tal que

$$\epsilon < \epsilon_1 \Rightarrow |s_\epsilon(x) - \phi * \psi(x)| < \frac{\mu}{3} \tag{2.20}$$

Como $\phi * \psi$ é contínua em x, $\exists \delta > 0$ tal que

$$|x - z| < \delta \Rightarrow |\phi * \psi(x) - \phi * \psi(z)| < \frac{\mu}{3}. \tag{2.21}$$

Além disso,

$$\begin{aligned} |s_\epsilon(x) - s_\epsilon(z)| &\leq \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} |\phi(x - \epsilon m) - \phi(z - \epsilon m)||\psi(\epsilon m)|\epsilon^n \\ &\leq \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} \sup_{\mathbb{R}^n} |\phi'||x - z||\psi(\epsilon m)|\epsilon^n \\ &\leq \sup_{\mathbb{R}^n} |\phi'||x - z| \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} |\psi(\epsilon m)|\epsilon^n \end{aligned}$$

Pelo mesmo resultado dado em [**?**] usado anteriormente $\exists \epsilon_2 > 0$ tal que

$$\epsilon < \epsilon_2 \Rightarrow \left| \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} |\psi(\epsilon m)|\epsilon^n - \int |\psi(y)| \, \mathrm{dy} \right| < 1$$

logo para tais ϵ's temos

$$|s_\epsilon(x) - \epsilon(z)| < \left[\sup |\phi'| \left(\int |\psi(y)| \, \mathrm{dy} + 1 \right) \right] |x - z|.$$

Então

$$|x - z| < \frac{\mu}{3 \sup |\phi'| \left(\int |\psi(y)| \, \mathrm{dy} + 1 \right)} \Rightarrow |s_\epsilon(x) - s_\epsilon(z)| < \frac{\mu}{3} \tag{2.22}$$

Tomando $\epsilon_x = \min \{\epsilon_1, \epsilon_2\}$ e $\delta_x = \min \left\{ \delta, \frac{\mu}{3 \sup |\phi'| \left(\int |\psi(y)| \, \mathrm{dy} + 1 \right)} \right\} \Rightarrow |s_\epsilon(x) - s_\epsilon(z)| < \frac{\mu}{3}$ temos, para $\epsilon < \epsilon_x$ e $z \in B(x, \delta_x)$

$$\begin{aligned} |s_\epsilon(z) - \phi * \psi(z)| &\leq |s_\epsilon(z) - s_\epsilon(x)| + |s_\epsilon(x) - \phi * \psi(x)| + |\phi * \psi(x) - \phi * \psi(z)| \\ &< \tfrac{\mu}{3} + \tfrac{\mu}{3} + \tfrac{\mu}{3} = \mu \end{aligned}$$

a penultima desigualdade segue de (**??**), (**??**) e (**??**). Portanto concluímos (**??**).

Por compacidade existe um número finito de bolas que cobrem K. Assim existe um número finito de ϵ_x's digamos $\epsilon_{x1}, \epsilon_{x2}, \ldots, \epsilon_{xk}$. Tomanos $\epsilon_0 = \min \{\epsilon_{x1}, \epsilon_{x2}, \ldots, \epsilon_{xk}\}$. Logo para tal ϵ_0 temos que

$$s_\epsilon \to \phi * \psi \text{ uniformemente em } x, \text{ quando } \epsilon \to 0.$$

■

Teorema 2.6.5 *Se $\phi, \psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ e $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ então*

$$(u * \phi) * \psi = u * (\phi * \psi).$$

Demonstração. Para cada $\alpha \in \mathbb{N}^n$ temos

$$(\partial^\alpha s_\epsilon)(x) = \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} (\partial^\alpha \phi)(x - \epsilon m)\psi(\epsilon m)\epsilon^n.$$

Pelo lema **??** temos

$$\partial^\alpha s_\epsilon \to (\partial^\alpha \phi) * \psi = \partial^\alpha(\phi * \psi) \text{ uniformemente,}$$

a última igualdade segue do lema **??**(i). Assim,

$$s_\epsilon \to \phi * \psi \text{ em } C_c^\infty(\mathbb{R}^n).$$

Logo,

$$\begin{aligned}
(u * (\phi * \psi))(a) &= \left\langle u, (\phi \check{*} \psi)_a \right\rangle \\
&= \lim_{\epsilon \to 0} \langle u, (\check{s}_\epsilon)_a \rangle \\
&= \lim_{\epsilon \to 0} \left\langle u, \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} (\check{\phi}_{-\epsilon m})_x \psi(\epsilon m)\epsilon^n \right\rangle \\
&= \lim_{\epsilon \to 0} \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} \left\langle u, \check{\phi}_{a-\epsilon m} \right\rangle \psi(\epsilon m)\epsilon^n \\
&= \lim_{\epsilon \to 0} \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} (u * \phi)(a - \epsilon m)\psi(\epsilon m)\epsilon^n \\
&= ((u * \phi) * \psi)(a)
\end{aligned}$$

■

Teorema 2.6.6 *Seja $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ e $\phi^{[\epsilon]}$ é a aplicação definida em (**??**) então $u * \phi^{[\epsilon]} \to u$ em $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ quando $\epsilon \to 0$.*

Demonstração. Seja $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, com a notação $\check{\psi}(x) = \psi(-x)$ podemos escrever $\langle u, \psi \rangle = (u * \check{\phi})(0)$. Então

$$\lim_{\epsilon \to 0} \left\langle u * \phi^{[\epsilon]}, \psi \right\rangle = \lim_{\epsilon \to 0} \left((u * \phi^{[\epsilon]}) * \check{\psi}\right)(0) = \lim_{\epsilon \to 0} u * (\phi^{[\epsilon]} * \check{\psi})(0) = \lim_{\epsilon \to 0} \left\langle u, (\phi^{[\epsilon]} * \check{\psi})\check{} \right\rangle.$$

Mas pelo teorema **??** como $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ temos que $\phi^{[\epsilon]} * \check{\psi} \to \check{\psi}$ uniformemente quando $\epsilon \to 0$. Assim,

$$\lim_{\epsilon \to 0} \left\langle u * \phi^{[\epsilon]}, \psi \right\rangle = \langle u, \psi \rangle,$$

ou seja, $u * \phi^{[\epsilon]} \to u$ em $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ quando $\epsilon \to o$. ■

Corolário 2.6.7 *$C_c^\infty(\Omega)$ é denso em $\mathscr{D}'(\Omega)$, ou seja, para cada $u \in \mathscr{D}'(\Omega)$, existe $(\phi_j) \subset C_c^\infty(\Omega)$ tal que $\phi_j \to u$ em $\mathscr{D}'(\Omega)$.*

Demonstração. Em virtude do exemplo **??** é suficiente ver que $C_c^\infty(\Omega)$ é denso em $\mathscr{E}'(\Omega)$. Para isso, para cada $\epsilon > 0$ seja $\phi^{[\epsilon]}$ a aplicação definida em (**??**) e $u \in \mathscr{E}'(\Omega)$. Pela observação **??** $u * \phi^{[\epsilon]} \in C_c^\infty(\Omega)$ e

$$S(u * \phi^{[\epsilon]}) \subseteq S(u) + S(\phi^{[\epsilon]}) \subseteq S(u) + S(\phi) + B[0, \epsilon].$$

Logo $u * \phi^{[\epsilon]} \in C_c^\infty(\Omega)$. Além disso pelo teorema **??** temos que $u * \phi^{[\epsilon]} \to u$ em $\mathscr{D}'(\Omega)$ quando $\epsilon \to 0$.

Portando $C_c^\infty(\Omega)$ é denso em $\mathscr{E}'(\Omega)$ e assim $C_c^\infty(\Omega)$ é denso em $\mathscr{D}'(\Omega)$. ∎

No seguinte teorema denotamos T_h o operador de translação $(T_h u) = u_h$, como no teorema **??**.

Teorema 2.6.8 *Seja $U : C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \to C^\infty(\mathbb{R}^n)$ um operador linear contínuo que comuta com todas as translações $T_h, h \in \mathbb{R}^n$. Então existe uma única $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ tal que $U\phi = u * \phi, \phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$.*

Demonstração. Da hipótese resulta que $\phi \mapsto (U\check{\phi})(0)$ é um funcional linear contínuo em $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. Definimos $\langle u, \phi \rangle = (U\check{\phi})(0)$, assim

$$U\phi(h) = T_{-h}U\phi(0) = U(T_{-h}\phi)(0) = \left\langle u, T_{-h}\check{\phi} \right\rangle = \left\langle u, \check{\phi}_h \right\rangle = u * \phi(h).$$

Para mostrar a unicidade suponhamos que existam $u_1, u_2 \in \mathscr{D}'(\Omega)$ tais que $u_1 * \phi = U\phi$ e $u_2 * \phi = U\phi$ assim,

$$\left\langle u_1, \check{\phi}_a \right\rangle = \left\langle u_2, \check{\phi}_a \right\rangle, \forall \phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$$

daí concluímos que $u_1 = u_2$. ∎

Definição 2.6.9 *Sejam $u_1, u_2 \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ e suponhamos que uma das duas tem suporte compacto. Definimos $v = u_1 * u_2$ como a única distribuição v tal que $u_1 * (u_2 * \phi) = v * \phi$.*

Observe que $V(\phi) = u_1 * (u_2 * \phi)$ define um operador que satisfaz as hipóteses do teorema **??**.

Observação 2.6.10 *O teorema **??** mostra que a definição **??** generaliza a definição **??** se u_2 tem suporte compacto. Analogamente, esta definição coincide com a definição **??** se $u_1 \in \mathscr{E}'(\mathbb{R}^n)$ e $u_2 \in \mathbb{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$.*

Exemplo 2.6.11 *Se $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n), \langle u * \delta, \phi \rangle = (u * \delta) * \check{\phi}(0) = u * (\delta * \check{\phi})(0) = u * \check{\phi}(0) = \langle u, \phi \rangle$, isto é, $u * \delta = u$. Analogamente, $\delta * u = u$.*

Teorema 2.6.12 *Sejam $u_1 \in \mathscr{E}'(\mathbb{R}^n), u_2 \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$. Então*

(i) $u_1 * u_2 = u_2 * u_1$;

(ii) $S(u_1 * u_2) \subseteq S(u_1) + S(u_2)$;

(iii) $\partial^\alpha(u_1 * u_2) = \partial^\alpha u_1 * u_2 = u_1 * \partial^\alpha u_2, \forall \alpha \in \mathbb{N}^n$.

Demonstração. (i) Sejam $\phi, \psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. Então usando a comutatividade da convolução de funções e o teorema **??** temos que

$$(u_1 * u_2) * (\phi * \psi) = u_1 * [u_2 * (\phi * \psi)] = u_1 * [(u_2 * \phi) * \psi] = u_1 * [\psi * (u_2 * \phi)] = (u_1 * \psi) * (u_2 * \phi).$$

Da mesma forma,

$$(u_2 * u_1) * (\phi * \psi) = (u_1 * u_2) * (\psi * \phi) = u_2 * [u_1 * (\psi * \phi)] = u_2 * [(u_1 * \psi) * \phi] = u_2 * [\phi * (u_1 * \psi)] =$$

$$= (u_2 * \phi) * (u_1 * \psi) = (u_1 * \psi) * (u_2 * \phi).$$

Das duas expressões anteriores concluímos que,

$$(u_1 * u_2) * (\phi * \psi) = (u_2 * u_1) * (\phi * \psi).$$

Dada $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ tomando $\psi = \phi^{[\epsilon]}$ como na aplicação (**??**) teremos que $\phi * \psi \to \phi$ e assim,

$$(u_1 * u_2) * \phi = (u_2 * u_1) * \phi, \forall x \in \mathbb{R}^n,$$

em $x = 0$ temos

$$\left\langle u_1 * u_2, \check{\phi} \right\rangle = \left\langle u_2 * u_1, \check{\phi} \right\rangle, \forall \phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n).$$

Logo, $u_1 * u_2 = u_2 * u_1$.

(ii) Consideramos $(u_1 * u_2) * \phi^{[\epsilon]}$. Então

$$S[(u_1 * u_2) * \phi^{[\epsilon]}] = S[u_1 * (u_2 * \phi^{[\epsilon]})] \subseteq S(u_1) + S(u_2 * \phi^{[\epsilon]}) \subseteq S(u_1) + S(u_2) + S(\phi^{[\epsilon]}),$$

a primeira inclusão segue do teorema **??**.

Quando $\epsilon \to 0$, o diâmetro de $S(\phi^{[\epsilon]})$ tende para zero e $(u_1 * u_2) * \phi^{[\epsilon]} \to u_1 * u_2$. Assim, $S(u_1 * u_2) \subseteq S(u_1) + S(u_2)$.

(iii) Pela definição **??** segue que

$$\langle \partial^\alpha(u_1 * u_2), \phi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle u_1 * u_2, \partial^\alpha \phi \rangle = (-1)^{|\alpha|}(u_1 * u_2) * (\check{\partial^\alpha} \phi)(0) = u_1 * (u_2 * \partial^\alpha \check{\phi})(0) =$$

$$= u_1 * (\partial^\alpha u_2 * \check{\phi})(0) = (u_1 * \partial^\alpha u_2) * \check{\phi}(0) = \langle u_1 * \partial^\alpha u_2, \phi \rangle .$$

Usando (i) segue (iii). ∎

Capítulo 3

Transformada de Fourier

Nesse capítulo apresentamos a Transformada de Fourier de distribuições temperadas, principal ferramenta na demonstração do Teorema de Malgrange-Ehrenpreis.

3.1 A Transformada de Fourier em $\mathscr{S}$

Definição 3.1.1 *Se $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, a Transformada de Fourier de f se define por*

$$\mathscr{F}f(\xi) = \widehat{f}(\xi) = \int e^{-ix\xi} f(x)\,\mathrm{dx}, \xi \in \mathbb{R}^n \tag{3.1}$$

onde $i = \sqrt{-1}$ e $x\xi = x_1\xi_1 + \cdots + x_n\xi_n$.

Uma aplicação do Teorema da Convergência Dominada mostra que

$$\begin{array}{rcl} \hat{f}:\mathbb{R}^n & \to & \mathbb{C} \\ \xi & \mapsto & \hat{f}(\xi) \end{array}$$

é contínua. De fato, fixado $\xi \in \mathbb{R}^n$ e $(\xi_j) \subset \mathbb{R}^n$ com $\xi_j \to \xi$, mostraremos que $\hat{f}(\xi_j) \to \hat{f}(\xi)$. Com efeito, para cada $j \in \mathbb{N}$ seja $f_j(x) = e^{-ix\xi_j} f(x), x \in \mathbb{R}^n$, temos que

$$f_j(x) \to e^{-ix\xi} f(x), \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Além disso,

$$\left|e^{-ix\xi_j} f(x)\right| = |f(x)|\,, \forall x \in \mathbb{R}^n, \forall j \in \mathbb{N}.$$

Como $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, pelo Teorema da Convergência Dominada segue

$$\int e^{-ix\xi_j} f(x)\,\mathrm{dx} \to \int e^{-ix\xi} f(x)\,\mathrm{dx}\,.$$

Ou seja, $\hat{f}(\xi_j) \to \hat{f}(\xi)$. Portanto $\widehat{f}$ é contínua.

Quando $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ pode ocorrer que $\hat{\phi}$ não tenha suporte compacto. Introduziremos a seguir um espaço de funções invariante pela Transformada de Fourier.

Definição 3.1.2 *Denotamos com* $\mathscr{S}$ *(ou* $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ *quando queremos destacar a dimensão do espaço euclideano) o subespaço de* $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ *das funções* ϕ *tais que*

$$\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n \Rightarrow \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \left|x^\alpha \partial^\beta \phi(x)\right| < \infty. \tag{3.2}$$

Dizemos que uma sequência $(\phi_j) \subset \mathscr{S}$ *converge para* ϕ *em* $\mathscr{S}$ *e escrevemos,* $\phi_j \to \phi$ *em* $\mathscr{S}$*, se para todo* $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$ *temos que*

$$\lim_{j\to+\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |x^\alpha \partial^\beta \phi_j(x) - x^\alpha \partial^\beta \phi(x)| = 0.$$

Lema 3.1.3 *Suponha que* $\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$*. Então as seguintes condições são equivalentes:*

(i) $\phi \in \mathscr{S}$*;*

(ii) *para cada* $k \in \mathbb{N}$ *e* $\beta \in \mathbb{N}^n$ *temos* $\sup_{x\in\mathbb{R}^n} (1+|x|^2)^{\frac{k}{2}} \left|\partial^\beta \phi(x)\right| < \infty$*;*

(iii) *para cada* $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$ *temos* $\lim_{|x|\to+\infty} \left|x^\alpha \partial^\beta \phi(x)\right| = 0$.

Demonstração.
$(i) \Rightarrow (ii)$ Seja $\phi \in \mathscr{S}$. Para todo $\alpha \in \mathbb{N}^n$ tal que $|\alpha| \le k$ temos que,

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n} |x^\alpha||\partial^\beta \phi(x)| < \infty, \forall \beta \in \mathbb{N}^n.$$

Logo,

$$\sum_{|\alpha|\le k} \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |x^\alpha||\partial^\beta \phi(x)| < \infty.$$

Assim, pelo teorema **??**

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n} (1+|x|^2)^{\frac{k}{2}} |\partial^\beta \phi(x)| < \infty.$$

$(ii) \Rightarrow (i)$ Suponhamos que ϕ seja tal que

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n} (1+|x|^2)^{\frac{k}{2}} |\partial^\beta \phi(x)| < \infty,$$

para cada $k \in \mathbb{N}$ e $\beta \in \mathbb{N}^n$. Mostraremos que $\phi \in \mathscr{S}$. De fato, pelo teorema **??**, temos

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n} |x^\alpha||\partial^\beta \phi(x)| \le \sup_{x\in\mathbb{R}^n} (1+|x|^2)^{\frac{|\alpha|}{2}} |\partial^\beta \phi(x)| < \infty,$$

ou seja, $\phi \in \mathscr{S}$.

$(iii) \Rightarrow (i)$ Suponha que $\lim_{|x|\to\infty} \left|x^\alpha \partial^\beta \phi(x)\right| = 0$ assim, para $\epsilon = 1, \exists N > 0$ tal que se $|x| > N$ então $\left|x^\alpha \partial^\beta \phi(x)\right| < 1$.

A função $x \longmapsto x^\alpha \partial^\beta \phi(x)$ é contínua em $B\,[0, N]$ e então limitada nesse bola, isto é,

$$\exists M_1(\alpha,\beta) > 0 \text{ tal que } \left|x^\alpha \partial^\beta \phi(x)\right| \leq M_1(\alpha,\beta), |x| \leq N.$$

Assim, tomamos $M(\alpha,\beta) = \max\{1, M_1(\alpha,\beta)\}$. Daí,

$$\left|x^\alpha \partial^\beta \phi(x)\right| < M(\alpha,\beta) \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Logo, $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}^n} \left|x^\alpha \partial^\beta \phi(x)\right| \leq M(\alpha,\beta) < \infty.$

$(i) \Rightarrow (iii)$ Suponha que para cada $\alpha,\beta \in \mathbb{N}^n, \exists M(\alpha,\beta) > 0$ tal que $\left|x^\alpha \partial^\beta \phi(x)\right| \leq M(\alpha,\beta), \forall x \in \mathbb{R}^n$. Pela equivalência das normas euclideana e do máximo existe $C = cte$ tal que $|x| \leq C\,|x|_M$. Seja $i = 1,2,\ldots,n$ tal que $|x|_M = |x_i|$ e suponha $x \neq 0$. Assim,

$$\begin{array}{lcl} \left|x^{\alpha+e_i} \partial^\beta \phi(x)\right| & \leq & M(\alpha+e_i,\beta) \\ \left|x^{e_i}\right|\left|x^\alpha \partial^\beta \phi(x)\right| & \leq & M(\alpha+e_i,\beta) \\ \left|x^\alpha \partial^\beta \phi(x)\right| & \leq & \frac{1}{|x_i|} M(\alpha+e_i,\beta) \\ \left|x^\alpha \partial^\beta \phi(x)\right| & \leq & \frac{c}{|x|} M(\alpha+e_i,\beta), \end{array}$$

logo $\lim\limits_{|x|\to+\infty} \left|x^\alpha \partial^\beta \phi(x)\right| = 0.$ ■

Observação 3.1.4 *"Justificativa do termo decrescimento rápido no infinito".*

Como mostramos anteriormente, dada $\phi \in \mathscr{S}$ temos que

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \left|x^\alpha \partial^\beta \phi(x)\right| \leq M_0, \alpha,\beta \in \mathbb{N}^n.$$

Tomando $\alpha = \beta = 0$, temos

$$|\phi(x)| \leq \frac{M_0}{|x|}$$

e fazendo $|x| \to \infty$ teremos $|\phi(x)| \to 0$ em $\mathscr{S}$. Além disso, tomando $\alpha = 0$ e $\beta \in \mathbb{N}^n$ qualquer, segue que

$$\left|\partial^\beta \phi(x)\right| \leq \frac{M_0}{|x|}$$

e fazendo $|x| \to \infty$ teremos $\left|\partial^\beta \phi(x)\right| \to 0$.

Lema 3.1.5 *Para todo polinômio Q e $\alpha \in \mathbb{N}^n$ tem-se*

(i) *se $\phi \in \mathscr{S}$ então $\partial^\alpha(Q\phi) \in \mathscr{S}$;*

(ii) *seja $(\phi_j) \subset \mathscr{S}$, se $\phi_j \to 0$ em $\mathscr{S}$ então $\partial^\alpha(Q\phi_j) \to 0$ uniformemente em $\mathbb{R}^n$, quando $j \to \infty$.*

Exemplo 3.1.6 $C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \subset \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$.

De fato, seja $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ então $\exists N > 0$ tal que $\phi(x) = 0$ quando $|x| > N$. Assim dado $\epsilon > 0$ qualquer temos que se $|x| > N$ então

$$\left|x^\alpha \partial^\beta \phi(x)\right| = 0 < \epsilon.$$

Logo, $\lim\limits_{|x|\to+\infty} x^\alpha \partial^\beta \phi(x) = 0$ e portanto, $\phi \in \mathscr{S}$.

Exemplo 3.1.7 *$(\phi_j) \subset C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ e $\phi_j \to 0$ em $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ então $\phi_j \to 0$ em $\mathscr{S}$.*

Como $\phi_j \to 0$ em $C_c^\infty(\mathbb{R}^n), \forall \beta \in \mathbb{N}$ tem-se $\partial^\beta \phi_j \to 0$ uniformemente. Além disso, $\exists K \subset\subset \mathbb{R}^n$ tal que $S(\phi_j) \subset K, \forall j \in \mathbb{N}$, ou seja, se $x \notin K$ então $\phi_j(x) = 0, \forall j \in \mathbb{N}$.

Da convergência uniforme dado $\epsilon > 0, \exists j_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $j \geq j_0$ então

$$\left|\partial^\beta \phi_j(x)\right| < \frac{\epsilon}{\sup\limits_{x \in K} |x^\alpha|}, \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Assim, $\forall x \in K$, se $j \geq j_0$

$$\left|x^\alpha \partial^\beta \phi_j(x)\right| < \epsilon.$$

Como $\left|x^\alpha \partial^\beta \phi_j(x)\right| = 0 < \epsilon$ se $x \notin K$, segue que

$$j \geq j_0 \Rightarrow \left|x^\alpha \partial^\beta \phi_j(x)\right| < \epsilon, \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Teorema 3.1.8 *$C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ é denso em $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, ou seja, $\forall \phi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ existe $(\phi_j) \subset C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que $\phi_j \to \phi$ em $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$.*

Demonstração. Dada $\phi \in \mathscr{S}$ tomamos $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que $\psi = 1$ em $B[0,1]$. Para cada $j \in \mathbb{N}$ defina $\psi_j(x) = \psi(\frac{x}{j}), x \in \mathbb{R}^n$. É claro que $\psi_j \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ e $\psi_j = 1$ em $B[0,j], \forall j \in \mathbb{N}$. Mostraremos que

$$\phi\psi_j \to \phi \text{ em } \mathscr{S}.$$

Para isso, fixe $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$ e mostramos que para $\epsilon > 0,\ \exists j_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$j > j_0 \Rightarrow \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha \partial^\beta [\psi_j(x)\phi(x) - \phi(x)]| < \epsilon.$$

Para cada $\gamma \in \mathbb{N}^n$ tal que $0 \leq \gamma \leq \beta$, do lema **??** segue que

$$\lim_{|x| \to +\infty} |x^\alpha \partial^\gamma \phi(x)| = 0, 0 \leq \gamma \leq \beta. \tag{3.3}$$

Note que

$$\partial^\gamma \psi_j = \frac{1}{j^{|\gamma|}} \psi\left(\frac{x}{j}\right), x \in \mathbb{R}^n, 0 \leq \gamma \leq \beta.$$

Seja $M_\psi(\beta) = \max\limits_{0 \leq \gamma \leq \beta} \sup\limits_{x \in \mathbb{R}^n} |\partial^\gamma \psi(x)|$. Para cada $x \in \mathbb{R}^n, j \in \mathbb{N}$ temos

$$\begin{aligned}
\sup_{x\in\mathbb{R}^n}|x^\alpha\partial^\beta[\psi_j(x)\phi(x)-\phi(x)]| &= \sup_{x\in\mathbb{R}^n}|x^\alpha\partial^\beta(\psi_j(x)\phi(x))-x^\alpha\partial^\beta\phi(x)]| \\
&\leq \sum_{\gamma\leq\beta}\binom{\beta}{\gamma}|x^\alpha\partial^{\beta-\gamma}\phi(x)||\partial^\gamma\psi_j(x)|+|x^\alpha\partial^\beta\phi(x)| \\
&= \sum_{\gamma\leq\beta}\binom{\beta}{\gamma}|x^\alpha\partial^{\beta-\gamma}\phi(x)|\frac{1}{j^\gamma}|\partial^\gamma\psi\left(\frac{x}{j}\right)|+|x^\alpha\partial^\beta\phi(x)| \\
&\leq \sum_{\gamma\leq\beta}\binom{\beta}{\gamma}|x^\alpha\partial^{\beta-\gamma}\phi(x)||\partial^\gamma\psi\left(\frac{x}{j}\right)|+|x^\alpha\partial^\beta\phi(x)| \\
&\leq M_\psi(\beta)\sum_{\gamma\leq\beta}\binom{\beta}{\gamma}|x^\alpha\partial^{\beta-\gamma}\phi(x)|+|x^\alpha\partial^\beta\phi(x)|.
\end{aligned}$$

De (**??**) segue que

$$j\in\mathbb{N},|x|>N\Rightarrow|x^\alpha\partial^\beta[\phi(x)\psi_j(x)-\phi(x)]|<\epsilon. \tag{3.4}$$

Mas, $\psi_j=1$ em $B[0,j]$, logo, $\phi\psi_j-\phi=0$ em $B[0,j]$ e daí,

$$\partial^\beta[\phi\psi_j-\phi]=0 \text{ em } B[0,j],\forall j\in\mathbb{N}. \tag{3.5}$$

Tome $j_0\in\mathbb{N}$ tal que $j_0\geq N$. Então por (**??**) e (**??**) temos que

$$j>j_0\Rightarrow\sup_{x\in\mathbb{R}^n}|x^\alpha\partial^\beta[\phi(x)\psi_j(x)-\phi(x)]|=\sup_{|x|\geq j}|x^\alpha\partial^\beta[\phi(x)\psi_j(x)-\phi(x)]|<\epsilon.$$

■

Observação 3.1.9 $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)\subset L^1(\mathbb{R}^n)$.

Seja $\phi\in\mathscr{S}$ então pelo lema **??** tem-se

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n}(1+|x|^2)^{\frac{k}{2}}|\partial^\beta\phi(x)|=c_k<+\infty,\forall\beta\in\mathbb{N}^n,\quad k\in\mathbb{N}.$$

Assim,

$$(1+|x|^2)^{\frac{k}{2}}|\partial^\beta\phi(x)|\leq c_k,\forall k\in\mathbb{N},\forall x\in\mathbb{R}^n$$

e tomando $\beta=0$ e $k=n+1$ temos

$$|\phi(x)|\leq\frac{c_k}{(1+|x|^2)^{\frac{n+1}{2}}},\forall x\in\mathbb{R}^n,$$

logo,

$$\int|\phi(x)|\,\mathrm{dx}\leq\int\frac{c_k}{(1+|x|^2)^{\frac{n+1}{2}}}\,\mathrm{dx}<+\infty.$$

Pela observação **??**, $\phi\in L^1(\mathbb{R}^n)$.

Observação 3.1.10 *Da observação* **??** *segue que, se* $\phi\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ *então* $\hat{\phi}$ *está definida por* (**??**).

Exemplo 3.1.11 *Se* $f(x) = e^{-|x|^2}, x \in \mathbb{R}^n$, *então* $f \in \mathscr{S}$.

Mostraremos que dado $\beta \in \mathbb{N}^n$ qualquer, temos

$$\partial^\beta e^{-|x|^2} = p_\beta(x) e^{-|x|^2}, \tag{3.6}$$

sendo p_β um polinômio de grau $|\beta|$. Para isso usaremos indução sobre $|\beta|$. Para $|\beta| = 1$ digamos que $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$ seja tal que $\beta_j = 1$ e $\beta_i = 0, i = 1, 2, \ldots, n, i \neq j$. Temos

$$\partial^\beta e^{-|x|^2} = -2x_j e^{-|x|^2},$$

ou seja, $p_\beta(x) = -2x_j$.

Suponhamos que $\partial^\beta e^{-|x|^2} = p_\beta(x) e^{-|x|^2}$ e mostraremos que

$$\partial^{\beta+e_j} e^{-|x|^2} = p_{\beta,e_j}(x) e^{-|x|^2}, j = 1, 2, ...n,$$

onde p_{β,e_j} é um polinômio de grau $|\beta| + 1$. Temos,

$$\partial^{\beta+e_j} e^{-|x|^2} = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\partial^\beta e^{-|x|^2}\right) = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(p_\beta(x) e^{-|x|^2}\right) = e^{-|x|^2} \frac{\partial}{\partial x_j} p_\beta(x) - 2x_j p_\beta(x) e^{-|x|^2}.$$

Tomando $p_{\beta,e_j}(x) = \frac{\partial}{\partial x_j} p_\beta(x) - 2x_j p_\beta$ segue (**??**). Além disso, temos

$$p_\beta(x) = \sum_{|\alpha| \leq |\beta|} a_\alpha x^\alpha, x \in \mathbb{R}^n,$$

com cada $a_\alpha \in \mathbb{R}$, constante. Logo

$$|p_\beta(x)| \leq \sum_{|\alpha| \leq |\beta|} |a_\alpha| |x|^{|\alpha|}, x \in \mathbb{R}^n.$$

Seja $q(t) = \sum\limits_{|\alpha| \leq |\beta|} |a_\alpha| |t|^{|\alpha|}, t \in \mathbb{R}$. Então $|p_\beta(x)| \leq q(|x|)$.

Daí,

$$\lim_{|x| \to +\infty} |p_\beta(x) e^{-|x|^2}| \leq \lim_{|x| \to +\infty} q(|x|) e^{-|x|^2} = \lim_{t \to +\infty} q(t) e^{-t^2} = 0.$$

Logo pelo lema **??** concluímos que $f \in \mathscr{S}$.

Exemplo 3.1.12 *Se* $f(x) = e^{-x^2} \operatorname{sen}(e^{x^2}), x \in \mathbb{R}$ *então* $f \notin \mathscr{S}$, *embora* $\lim\limits_{|x| \to +\infty} |f(x)| = 0$.

De fato, para cada $x \in \mathbb{R}$ temos

$$x^0 \frac{d}{dx} f(x) = -2x e^{-x^2} \operatorname{sen}(e^{x^2}) + 2x \cos(e^{x^2}).$$

Note que a aplicação $x \longmapsto 2x \cos(e^{x^2})$ é ilimitada em $\mathbb{R}$. Portanto, $f \notin \mathscr{S}$.

Teorema 3.1.13 *A Transformada de Fourier é um operador contínuo de $\mathscr{S}$ em $\mathscr{S}$ e valem as fórmulas:*

$$\mathscr{F}(\partial^\alpha\phi)(\xi) = (i\xi)^\alpha\widehat{\phi}(\xi), \phi \in \mathscr{S} \tag{3.7}$$

e

$$\mathscr{F}(x^\alpha\phi(x))(\xi) = \frac{1}{(-i)^{|\alpha|}}\partial^\alpha\widehat{\phi}(\xi), \phi \in \mathscr{S}. \tag{3.8}$$

Sendo $\alpha \in \mathbb{N}^n, x, \xi \in \mathbb{R}^n$ quaisquer.

Demonstração. Primeiramente vamos mostrar que vale (**??**) e (**??**). Pelo teorema **??** segue que

$$\partial^\alpha\widehat{\phi}(\xi) = \int \partial^\alpha e^{-ix\xi}\phi(x)\,\mathrm{dx} = \int (-i)^{|\alpha|}x^\alpha e^{-ix\xi}\phi(x)\,\mathrm{dx} = (-i)^{|\alpha|}\int e^{-ix\xi}x^\alpha\phi(x)\,\mathrm{dx} =$$

$= (-i)^{|\alpha|}\mathscr{F}(x^\alpha\phi(x))(\xi)$.

Daí, $\frac{1}{(-i)^{|\alpha|}}\partial^\alpha\widehat{\phi}(\xi) = \mathscr{F}(x^\alpha\phi(x))(\xi)$ o que prova (**??**). Além disso,

$$\mathscr{F}(\partial^\alpha\phi)(\xi) = \int e^{-ix\xi}\partial^\alpha\phi(x)\,\mathrm{dx}\,.$$

Integrando por partes $|\alpha|$ vezes, obtemos

$$\mathscr{F}(\partial^\alpha\phi)(\xi) = (-1)^{|\alpha|}\int (-i)^{|\alpha|}\xi^\alpha e^{-ix\xi}\phi(x)\,\mathrm{dx}\,.$$

O termo não integrado é nulo, pois ϕ e todas suas derivadas se anulam no infinito. Assim,

$$\mathscr{F}(\partial^\alpha\phi)(\xi) = i^{|\alpha|}\xi^\alpha\widehat{\phi}(\xi) = (i\xi)^\alpha\widehat{\phi}(\xi),$$

o que prova (**??**).

Agora vamos mostrar que dada $\phi \in \mathscr{S}$ temos que $\hat{\phi} \in \mathscr{S}$. De fato, combinando (**??**) e (**??**)

$$\begin{aligned}
\xi^\alpha\partial^\beta\widehat{\phi}(\xi) &= \xi^\alpha(-i)^{|\beta|}\mathscr{F}[x^\beta\phi(x)](\xi) \\
&= \frac{(i\xi)^{|\alpha|}}{i^{|\alpha|}}(-i)^{|\beta|}\mathscr{F}[\partial^\alpha(x^\beta\phi(x))](\xi) \\
&= \frac{(-i)^{|\beta|}}{i^{|\alpha|}}\mathscr{F}[\partial^\alpha(x^\beta\phi(x))](\xi)
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\xi^\alpha\partial^\beta\widehat{\phi}(\xi) = \frac{(-i)^{|\beta|}}{i^{|\alpha|}}\int e^{-ix\xi}\partial^\alpha(x^\beta\phi(x))\,\mathrm{dx}$$

pelo lema **??**, temos que $\partial^\alpha x^\alpha\phi(x) \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, assim

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n}(1+|x|)^{\frac{k}{2}}|\partial^\alpha(x^\beta\phi(x))| < +\infty, \forall x \in \mathbb{R}^n, k \geq 0.$$

Pela observação **??**, para $k = n+1$ temos que

$$\int \frac{1}{(1+|x|^2)^{\frac{k}{2}}}\,\mathrm{dx} = c < +\infty.$$

Daí, $\forall \xi \in \mathbb{R}^n$ segue

$$\begin{aligned} |\xi^\alpha \partial^\beta \widehat{\phi}(\xi)| &\leq \int |\partial^\alpha (x^\beta \phi(x)|\,\mathrm{dx} \\ &= \int \frac{1}{(1+|x|^2)^{\frac{k}{2}}}(1+|x|^2)^{\frac{k}{2}}|\partial^\alpha(x^\beta\phi(x))|\,\mathrm{dx} \\ &\leq \sup_{x\in\mathbb{R}^n}(1+|x|)^{\frac{k}{2}}|\partial^\alpha(x^\beta\phi(x))| \int \frac{1}{(1+|x|^2)^{\frac{k}{2}}}\,\mathrm{dx}. \end{aligned}$$

Logo,

$$|\xi^\alpha \partial^\beta \widehat{\phi}(\xi)| \leq c \cdot \sup_{x\in\mathbb{R}^n}(1+|x|)^{\frac{k}{2}}|\partial^\alpha(x^\beta\phi(x))| < \infty, \forall \xi \in \mathbb{R}^n. \tag{3.9}$$

O que prova que para cada $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$, a aplicação $x \longmapsto \xi^\alpha \partial^\beta \widehat{\phi}(\xi)$ é limitada em $\mathbb{R}^n$, daí, $\widehat{\phi} \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$.

Finalmente vamos mostrar a continuidade de $\mathscr{F}$. Seja $(\phi_j) \subset \mathscr{S}$ uma sequência tal que $\phi_j \to 0$ em $\mathscr{S}$, ou seja, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$

$$x^\alpha \partial^\beta \phi_j(x) \to 0$$

uniformemente. Aplicando (**??**) com ϕ_j no lugar de ϕ obtemos

$$|\xi^\alpha \partial^\beta \widehat{\phi_j}(\xi)| \leq c \cdot \sup_{x\in\mathbb{R}}(1+|x|)^{\frac{k}{2}}|\partial^\alpha(x^\beta\phi_j(x))| = c_j,$$

com $c_j \to 0$, quando $j \to \infty$, pois pelo lema **??**(ii),

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n} \partial^\alpha x^\beta \phi_j(x) \to 0.$$

Logo, $\widehat{\phi_j} \to 0$ em $\mathscr{S}$.

Portanto, concluímos que $\mathscr{F} : \mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ é um operador contínuo. ■

Lema 3.1.14 (Riemann-Lebesgue) *Se $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ então $\widehat{f}(\xi) \to 0$ quando $|\xi| \to \infty$.*

Demonstração. Pelo teorema **??** temos que existe uma sequência $(\phi_j) \subset C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que $\phi_j \to f$ em $L^1(\mathbb{R}^n)$. Como, $\forall \xi \in \mathbb{R}^n$ temos

$$\left|\hat{\phi}_j(\xi) - \hat{f}(\xi)\right| \leq \int |e^{ix\xi}||\phi_j(x) - f(x)|\,\mathrm{dx} = \|f - \phi_j\|_{L^1(\Omega)}, \forall j \in \mathbb{N}$$

segue que

$$\hat{\phi}_j \to \hat{f} \text{ uniformemente em } \mathbb{R}^n.$$

Além disso, $\phi_j \in \mathscr{S}, \forall j \in \mathbb{N}$, pois $C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \subset \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. Logo $\widehat{\phi_j} \in \mathscr{S}, \forall j \in \mathbb{N}$. Assim,

$$\lim_{|\xi|\to\infty} \widehat{\phi_j}(\xi) = 0, \forall j \in \mathbb{N}. \tag{3.10}$$

Como $\widehat{\phi_j} \to \widehat{f}$ uniformemente, $\forall \epsilon > 0$, existe $j_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$j > j_0 \Rightarrow \left|\widehat{\phi_j}(\xi) - \widehat{f}(\xi)\right| < \frac{\epsilon}{2}, \forall \xi \in \mathbb{R}^n. \tag{3.11}$$

Tome $j = j_0 + 1$, por (**??**) existe $J > 0$ tal que

$$|\xi| > J \Rightarrow \left|\widehat{\phi_j}(\xi)\right| < \frac{\epsilon}{2}. \tag{3.12}$$

Por (**??**) e (**??**), para $j = j_0 + 1$

$$\left|\widehat{f}(\xi)\right| = \left|\widehat{f}(\xi) - \widehat{\phi_j}(\xi) + \widehat{\phi_j}(\xi)\right| \leq \left|\widehat{f}(\xi) - \widehat{\phi_j}(\xi)\right| + \left|\widehat{\phi_j}(\xi)\right| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon,$$

ou seja,

$$\lim_{|\xi|\to\infty} \widehat{f}(\xi) = 0.$$

■

Exemplo 3.1.15 *Seja $\phi(x) = e^{-x^2}, x \in \mathbb{R}$, vamos calcular $\widehat{\phi}(\xi)$.*

Temos que ϕ satisfaz o seguinte P.V.I.

$$\begin{cases} \phi'(x) + 2x\phi(x) = 0 \\ \phi(0) = 1. \end{cases}$$

Como $\phi \in \mathscr{S}$, aplicando a Transformada de Fourier na equação $\phi'(x) + 2x\phi(x) = 0$ e usando as regras do teorema **??** temos

$$-\frac{2}{i}\widehat{\phi}'(\xi) + i\xi\widehat{\phi}(\xi) = 0.$$

Então,

$$\widehat{\phi}'(\xi) + \frac{\xi}{2}\widehat{\phi}(\xi) = 0.$$

Além disso,

$$\widehat{\phi}(0) = \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\,\mathrm{dx} = \sqrt{\pi},$$

daí, resolvendo este P.V.I. temos que

$$\widehat{\phi}(\xi) = \sqrt{\pi}e^{\frac{-\xi^2}{4}}.$$

Para calcular a Transformada de Fourier de $\phi(x) = e^{-|x|^2}$ em $\mathbb{R}^n$ escrevemos a integral (??) como o produto de integrais unidimensionais obtendo

$$\widehat{\phi}(\xi) = (\sqrt{\pi})^n e^{\frac{-|\xi|^2}{4}}.$$

Teorema 3.1.16 *A Transformada de Fourier $\mathscr{F} : \mathscr{S} \to \mathscr{S}$ é continuamente inversível e*

$$\mathscr{F}^{-1}\phi(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int e^{ix\xi}\phi(\xi)\, \mathrm{d}\xi, \phi \in \mathscr{S}, x \in \mathbb{R}^n. \tag{3.13}$$

Demonstração. Quando $\phi = \widehat{\psi}$ devemos obter em (??)

$$\mathscr{F}^{-1}\mathscr{F}(\psi)(x) = \psi = \frac{1}{(2\pi)^n} \int e^{ix\xi}\, \mathrm{dx} \int e^{-iy\xi}\psi(y)\, \mathrm{dy}\, .$$

Nesta integral não podemos trocar a ordem de integração, já que $e^{i(x-y)\xi}\psi(y)$ não é integrável em ξ quando $\psi(y) \neq 0$. Para evitar esta dificuldade, introduzimos uma função de ξ que permitirá trocar a ordem de integração e que depois faremos convergir a 1. Tomamos assim a função $\phi_\epsilon(x) = \phi_1(\epsilon x)$ onde $\phi_1(x) = \exp\left(\frac{-|x|^2}{2}\right)$.

Com um cálculo análogo ao exemplo anterior, obtemos

$$\widehat{\phi_1}(\xi) = (2\pi)^{\frac{n}{2}}\phi_1(\xi)$$

e fazendo a mudança de variáveis $x^{'} = \epsilon x$ na definição de $\widehat{\phi_\epsilon}$ temos

$$\begin{aligned}
\widehat{\phi_\epsilon}(\xi) &= \int e^{-ix\xi}\phi_\epsilon(x)\, \mathrm{dx} \\
&= \int e^{-ix\xi}\phi_1(\epsilon x)\, \mathrm{dx} \\
&= \epsilon^{-n} \int e^{-ix^{'}\frac{\xi}{\epsilon}}\phi_1(x^{'})\, \mathrm{dx'} \\
&= \epsilon^{-n}\widehat{\phi_1}\left(\tfrac{\xi}{\epsilon}\right) \\
&= \epsilon^{-n}(2\pi)^{\frac{n}{2}}\phi_1\left(\tfrac{\xi}{2}\right).
\end{aligned}$$

Assim, temos

$$\int \phi_\epsilon(\xi)e^{ix\xi}\widehat{\psi}(\xi)\, \mathrm{d}\xi = \int \phi_\epsilon(\xi)e^{ix\xi} \int e^{-ix\xi}\psi(y)\, \mathrm{dy}\, \mathrm{d}\xi = \int \psi(y) \int \phi_\epsilon(\xi)e^{i(x-y)\xi}\, \mathrm{d}\xi\, \mathrm{dy} =$$

$$= \int \psi(y)\widehat{\phi_\epsilon}(y-x)\, \mathrm{dy} = \int \psi(y+x)\widehat{\phi_\epsilon}(y)\, \mathrm{dy} = \int \psi(y+x)\epsilon^{-n}\phi_1\left(\frac{y}{\epsilon}\right)(2\pi)^{\frac{n}{2}}\, \mathrm{dy} =$$

$$= (2\pi)^{\frac{n}{2}} \int \psi(\epsilon z + x)\phi_1(z)\, \mathrm{dz}.$$

Quando $\epsilon \to 0$, tem-se

$$\phi_\epsilon(z) = \phi_1(\epsilon z) = e^{\frac{-|\epsilon z|^2}{2}} \to 1 \quad \text{e} \quad \psi(\epsilon z + x) \to \psi(x).$$

Então pelo Teorema da Convergência Dominada temos

$$\int \phi_\epsilon(\xi) e^{ix\xi}\widehat{\psi}(\xi)\,\mathrm{d}\xi \to \int e^{ix\xi}\widehat{\psi}(\xi)\,\mathrm{d}\xi$$

e

$$(2\pi)^{\frac{n}{2}} \int \psi(\epsilon z + x)\phi_1(z)\,\mathrm{dz} \to (2\pi)^{\frac{n}{2}}\psi(x)\int \phi_1(z)\,\mathrm{dz}\,.$$

Assim,

$$\int e^{ix\xi}\widehat{\psi}(\xi)\,\mathrm{d}\xi = (2\pi)^{\frac{n}{2}}\psi(x)\int \phi_1(z)\,\mathrm{dz} = (2\pi)^{\frac{n}{2}}\psi(x)\int e^{\frac{-|z|^2}{2}}\,\mathrm{dz} = (2\pi)^n\psi(x).$$

Então,

$$\psi(x) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int e^{ix\xi}\widehat{\psi}(\xi)\,\mathrm{d}\xi,$$

ou seja,

$$\mathscr{F}^{-1}\phi(x) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int e^{ix\xi}\phi(\xi)d\xi.$$

A demonstração da continuidade de $\mathscr{F}^{-1}$ em $\mathscr{S}$ é análoga à de $\mathscr{F}$. ■

Teorema 3.1.17 *Se $\phi, \psi \in \mathscr{S}$, então:*

$$\int \widehat{\phi}\psi\,\mathrm{dx} = \int \phi\widehat{\psi}\,\mathrm{dx} \tag{3.14}$$

$$\int \phi\bar{\psi}\,\mathrm{dx} = (2\pi)^{-n}\int \widehat{\phi}\widehat{\bar{\psi}}\,\mathrm{dx} \tag{3.15}$$

$$\widehat{\phi * \psi} = \widehat{\phi}\cdot\widehat{\psi} \tag{3.16}$$

$$\widehat{\phi\psi} = (2\pi)^{-n}\widehat{\phi} * \widehat{\psi} \tag{3.17}$$

Demonstração. A demonstração segue imediata da definição. ■

3.2 A Transformada de Fourier em $\mathscr{S}'$

Definição 3.2.1 *Um funcional linear e contínuo em $\mathscr{S}$ é dito uma distribuição temperada. O espaço das distribuições temperadas se denota por $\mathscr{S}'$.*

Observação 3.2.2 *Todo elemento de $\mathscr{S}'$ define por restrição a $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ uma distribuição em $\mathbb{R}^n$. Como $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ é denso em $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n), \mathscr{S}'$ pode ser identificado com um subespaço de $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$.*

Lema 3.2.3 *Se $u \in \mathscr{S}'$ e q é um polinômio em $\mathbb{R}^n$ então $qu \in \mathscr{S}'$.*

Demonstração. A linearidade é clara. Mostraremos a continuidade. Seja $(\phi_j) \subset \mathscr{S}$ e $\phi \in \mathscr{S}$ tal que $\phi_j \to \phi$ em $\mathscr{S}$. Então, pelo lema **??**, temos que $q\phi_j \to q\phi$ em $\mathscr{S}$. Logo

$$\langle qu, \phi_j\rangle = \langle u, q\phi_j\rangle \to \langle u, q\phi\rangle = \langle qu, \phi\rangle\,.$$

■

Observação 3.2.4 $\mathscr{E}'(\mathbb{R}^n) \subset \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$.

Seja $u \in \mathscr{E}'(\mathbb{R}^n)$, pelo teorema **??** existe um funcional linear contínuo v em $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$v|_{C_c^\infty(\mathbb{R}^n)} = u. \tag{3.18}$$

Como $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ é subespaço de $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ segue que v é um funcional linear contínuo em $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. Logo, por (**??**) segue que u é um funcional linear contínuo em $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$.

Observação 3.2.5 $L^1(\mathbb{R}^n) \subset \mathscr{S}'$.

Dada $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ mostraremos que $T_f \in \mathscr{S}'$. Já sabemos que f define um funcional linear contínuo em $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ definido por

$$\langle T_f, \phi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\phi(x)\,\mathrm{dx}\,.$$

Assim, para cada $\phi \in \mathscr{S}$ temos

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\phi(x)\,\mathrm{dx} \right| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)||\phi(x)|\,\mathrm{dx} \leq \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |\phi(x)| \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|\,\mathrm{dx},$$

logo T_f está bem definida. A linearidade é clara, mostraremos agora que T_f é contínua em $\mathscr{S}$. Seja $(\phi_j) \subset \mathscr{S}$ tal que $\phi_j \to 0$ em $\mathscr{S}$, então

$$|\langle T_f, \phi_j \rangle| = \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\phi_j(x)\,\mathrm{dx} \right| \leq \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |\phi_j(x)| \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|\,\mathrm{dx} \to 0.$$

Observação 3.2.6 $L^\infty(\mathbb{R}^n) \subset \mathscr{S}'$.

Definição 3.2.7 *Se $u \in \mathscr{S}'$, a Transformada de Fourier de u, denotada por $\widehat{u}$ ou $\mathscr{F}u$ é definida por*

$$\langle \widehat{u}, \phi \rangle = \left\langle u, \widehat{\phi} \right\rangle, \phi \in \mathscr{S}.$$

Observação 3.2.8 *Quando $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ temos duas definições para $\hat{f}$, a primeira dada por* (**??**) *e a segunda dada pela definição* **??**. *Mas a Transformada de Fourier de f como função coincide com a sua Transformada de Fourier como distribuição, isto é, $\widehat{T_f} = T_{\widehat{f}}$.*

De fato, fixe $\phi \in \mathscr{S}$. Assim,

$$\left\langle \widehat{T_f}, \phi \right\rangle = \left\langle T_f, \widehat{\phi} \right\rangle = \int f(\xi)\widehat{\phi}(\xi)\,\mathrm{d}\xi = \int f(\xi) \int e^{-ix\xi}\phi(x)\,\mathrm{dx}\,\mathrm{d}\xi\,.$$

Então pelo teorema **??**

$$\left\langle \widehat{T_f}, \phi \right\rangle = \int \int f(\xi)e^{-ix\xi}\phi(x)\,\mathrm{dx}\,\mathrm{d}\xi\,. \tag{3.19}$$

Por outro lado, se $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ então pelo lema **??** segue que $\widehat{f} \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$. Daí, $\widehat{f} \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$. Logo,

$$\left\langle T_{\widehat{f}}, \phi \right\rangle = \int \widehat{f}(\xi)\phi(\xi)\,\mathrm{d}\xi = \int\int e^{-ix\xi} f(x)\,\mathrm{dx}\,\phi(\xi)\,\mathrm{d}\xi\,.$$

Então pelo teorema **??**

$$\left\langle T_{\widehat{f}}, \phi \right\rangle = \int\int e^{-ix\xi} f(x)\phi(\xi)\,\mathrm{dx}\,\mathrm{d}\xi\,. \tag{3.20}$$

De (**??**) e (**??**) resulta $\widehat{T_f} = T_{\widehat{f}}$.

Teorema 3.2.9 *Se $u \in \mathscr{S}'$ então $\widehat{u} \in \mathscr{S}'$ e*

$$\widehat{\partial^\alpha u} = (i\xi)^\alpha \widehat{u}, \forall \alpha \in \mathbb{N}^n;$$

$$\widehat{x^\alpha u} = \frac{1}{(-i)^{|\alpha|}} \partial^\alpha \widehat{u}, \forall \alpha \in \mathbb{N}^n;$$

$$\widehat{\widehat{u}} = (2\pi)^{-n} \check{u}. \tag{3.21}$$

Além disso, a inversa $\mathscr{F}^{-1} : \mathscr{S}' \to \mathscr{S}'$ é dada por

$$\mathscr{F}^{-1} u = \frac{1}{(2\pi)^n} \mathscr{F}. \tag{3.22}$$

Demonstração. Se $\phi_j \to \phi$ em $\mathscr{S}$ então pelo teorema **??** segue que $\widehat{\phi_j} \to \widehat{\phi}$ em $\mathscr{S}$. Logo,

$$\langle \widehat{u}, \phi_j \rangle = \left\langle u, \widehat{\phi_j} \right\rangle \to \left\langle u, \widehat{\phi} \right\rangle = \langle \widehat{u}, \phi \rangle$$

o que mostra que $\widehat{u} \in \mathscr{S}'$.

Se $u \in \mathscr{S}'$ e $\psi(\xi) = \xi^\alpha$ então, pelo teorema **??** temos que

$$\left\langle \widehat{\partial^\alpha u}, \phi \right\rangle = \left\langle \partial^\alpha u, \widehat{\phi} \right\rangle = (-1)^{|\alpha|} \left\langle u, \partial^\alpha \widehat{\phi} \right\rangle = (-1)^{|\alpha|} \left\langle u, (-i)^{|\alpha|} \widehat{\psi\phi} \right\rangle =$$

$$= i^{|\alpha|} \left\langle u, \widehat{\psi\phi} \right\rangle = i^{|\alpha|} \langle \widehat{u}, \psi\phi \rangle = i^{|\alpha|} \langle \psi\widehat{u}, \phi \rangle.$$

Logo, $\widehat{\partial^\alpha u} = i^{|\alpha|}\psi\widehat{u}$, ou seja, $\widehat{\partial^\alpha u} = (i\xi)^\alpha \widehat{u}$. Além disso, pelo teorema **??** temos que

$$\left\langle \widehat{x^\alpha u}, \phi \right\rangle = \left\langle u, x^\alpha \widehat{\phi} \right\rangle = \frac{1}{i^{|\alpha|}} \left\langle u, \widehat{\partial^\alpha \phi} \right\rangle = \frac{1}{i^{|\alpha|}} \langle \widehat{u}, \partial^\alpha \phi \rangle = \frac{(-1)^{|\alpha|}}{i^{|\alpha|}} \langle \partial^\alpha \widehat{u}, \phi \rangle\,.$$

Então, $\widehat{x^\alpha u} = \frac{1}{(-i)^{|\alpha|}} \partial^\alpha \widehat{u}$.

Denotamos agora $\check{\phi}(x) = \phi(-x)$ e observamos que de (**??**)

$$\mathscr{F}\phi = (2\pi)^n \mathscr{F}^{-1} \check{\phi}.$$

Logo, $\forall \phi \in \mathscr{S}$,

$$\langle \mathscr{F}\mathscr{F}u, \phi\rangle = \langle u, \mathscr{F}\mathscr{F}\phi\rangle = \left\langle u, \mathscr{F}[(2\pi)^n \mathscr{F}^{-1}\check{\phi}]\right\rangle = \left\langle u, (2\pi)^n \check{\phi}\right\rangle = \langle (2\pi)^n \check{u}, \phi\rangle .$$

Então, $\widehat{\widehat{u}} = (2\pi)^n \check{u}$.

Finalmente, aplicando (**??**) com $\frac{1}{(2\pi)^n}\check{u}$ no lugar de u obtemos

$$\mathscr{F}\mathscr{F}\left(\frac{\check{u}}{(2\pi)^n}\right) = u$$

logo vale (**??**). ■

Exemplo 3.2.10 $\widehat{\delta} = 1$ *e* $\widehat{1} = (2\pi)^n \delta$.

De fato, $\forall \phi \in \mathscr{S}$

$$\left\langle \widehat{\delta}, \phi\right\rangle = \left\langle \delta, \widehat{\phi}\right\rangle = \widehat{\phi}(0) = \int \phi(x)\,\mathrm{dx} = \langle 1, \phi\rangle .$$

Então, $\widehat{\delta} = 1$. Além disso, $\forall \phi \in \mathscr{S}$,

$$\left\langle \mathscr{F}^{-1}(2\pi)^n\delta, \phi\right\rangle = (2\pi)^n \left\langle \delta, \mathscr{F}^{-1}\phi\right\rangle = (2\pi)^n \mathscr{F}^{-1}\phi(0) = (2\pi)^n \frac{1}{(2\pi)^n}\int \phi(x)\,\mathrm{dx} = \langle 1, \phi\rangle .$$

Logo, $1 = \mathscr{F}^{-1}[(2\pi)^n\delta]$, então

$$\widehat{1} = (2\pi)^n \delta.$$

Observação 3.2.11 *Se* $u \in \mathscr{S}'$ *então* $\partial^\alpha(\mathscr{F}^{-1}u) = \mathscr{F}^{-1}((i\xi)^\alpha u)$.

Pelo teorema **??** temos que

$$\mathscr{F}(\partial^\alpha u) = (i\xi)^\alpha \mathscr{F}u, \forall u \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n), \alpha \in \mathbb{N}^n,$$

então, pelo lema **??**, $(i\xi)^\alpha \mathscr{F}u \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$, e daí

$$\partial^\alpha u = \mathscr{F}^{-1}[(i\xi)^\alpha \mathscr{F}u], \forall u \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n), \alpha \in \mathbb{N}^n.$$

Assim, como $\mathscr{F}^{-1}u \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$, temos que

$$\partial^\alpha(\mathscr{F}^{-1}u) = \mathscr{F}^{-1}((i\xi)^\alpha u).$$

3.3 Transformada Parcial de Fourier

Consideramos uma função $f(t,x) \in L^1_{loc}(\Omega \times \mathbb{R}^N), t = (t_1, t_1, \ldots, t_n) \in \Omega, x = (x_1, x_2, \ldots, x_N) \in \mathbb{R}^N$. Se para todo compacto $K \subset \Omega$ a integral

$$\int_K \int_{\mathbb{R}^N} |f(t,x)|\,\mathrm{dx} < \infty$$

é finita, segue do teorema de Fubini que $f(t,x)$ é integrável em x para quase todo $t \in \Omega$ e podemos definir a Transformada de Fourier de $f(t,x)$ nas variáveis x como

$$\widetilde{f}(t,\xi) = \int_{\mathbb{R}^N} e^{-ix\xi} f(t,x)\,\mathrm{dx}\,. \tag{3.23}$$

Além disso, $\widetilde{f}(t,\xi) \in L^1_{loc}(\Omega \times \mathbb{R}^N) \subseteq \mathscr{D}'(\Omega \times \mathbb{R}^N)$. De fato, seja $K \subset K_1 \times K_2 \subset\subset \Omega \times \mathbb{R}^N, K_1 \subset\subset \Omega$ e $K_2 \subset\subset \mathbb{R}^N$ então

$$\begin{aligned}\int_K |\widetilde{f}(t,\xi)|\,\mathrm{dt}\,\mathrm{d}\xi &\leq \int_{K_1 \times K_2} |\widetilde{f}(t,\xi)|\,\mathrm{dt}\,\mathrm{d}\xi \\ &= \int_{K_1}\int_{K_2} |\widetilde{f}(t,\xi)|\,\mathrm{dt}\,\mathrm{d}\xi.\end{aligned}$$

Mas $\displaystyle\int_{K_2} |\widetilde{f}(t,\xi)|\,\mathrm{d}\xi \leq \int_{K_2}\int_{\mathbb{R}^n} |f(t,\xi)|\,\mathrm{dx}\,\mathrm{d}\xi \leq cte$. Assim,

$$\int_K |\widetilde{f}(t,\xi)|\,\mathrm{dt}\,\mathrm{d}\xi \leq \mathrm{cte}.$$

Em outras palavras a Transformada Parcial de Fourier se obtem congelando algumas das variáveis, considerando a função como função das variáveis restantes e exigindo crescimento moderado (integrabilidade) nestas variáveis. Para definir a Transformada Parcial de Fourier de uma distribuição não podemos agir exatamente da mesma forma, já que em geral "fixar uma variável"não faz sentido para uma distribuição. É natural então, considerar funções C^∞ com suporte compacto em t e de decrescimento rápido em x, já que este espaço será invariante por $\phi \longmapsto \widetilde{\phi}$.

Nesta seção $\pi : \Omega \times \mathbb{R}^N \longrightarrow \Omega$ denotará a projeção $(t,x) \longmapsto t$ e ∂_t, ∂_x significará derivação nas variáveis t e x respectivamente.

Definição 3.3.1 *Seja $n, N \geq 1$. Denotamos com $C_c^\infty(\Omega; \mathscr{S}(\mathbb{R}^N))$ o subespaço de $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^N)$ das funções ϕ tais que $\pi S(\phi)$ é compacto em Ω. Dizemos que uma sequência $(\phi_j) \subset C_c^\infty(\Omega; \mathscr{S}(\mathbb{R}^N))$ converge para zero em $C_c^\infty(\Omega; \mathscr{S}(\mathbb{R}^N))$ e escrevemos $\phi_j \to 0$ em $C_c^\infty(\Omega; \mathscr{S}(\mathbb{R}^N))$ se existe um compacto fixo $K \subseteq \Omega$ tal que*

$$S(\phi_j) \subseteq K \times \mathbb{R}^N$$

e

$$\phi_j \to 0 \text{ em } \mathscr{S}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^N).$$

Teorema 3.3.2 *A Transformada Parcial de Fourier, definida por (??) é um operador continuamente inversível em $C_c^\infty(\Omega; \mathscr{S}(\mathbb{R}^N))$ e valem as fórmulas*

$$\widetilde{\partial_x^\alpha \phi}(t,\xi) = (i\xi)^\alpha \widetilde{\phi}(t,\xi), \phi \in C_c^\infty(\Omega; \mathscr{S}(\mathbb{R}^N)); \tag{3.24}$$

$$\widetilde{x^\alpha \phi(t,x)}(t,\xi) = (-i)^{|\alpha|} \partial_\xi^\alpha \widetilde{\phi}(t,\xi), \phi \in C_c^\infty(\Omega; \mathscr{S}(\mathbb{R}^N)); \tag{3.25}$$

$$\widetilde{\partial_t^\beta \phi} = \partial_t^\beta \widetilde{\phi}, \phi \in C_c^\infty(\Omega; \mathscr{S}(\mathbb{R}^N)) \tag{3.26}$$

e

$$\iint_{\Omega\times\mathbb{R}^N} \widetilde{\phi}\psi \,\mathrm{dx}\,\mathrm{dt} = \iint_{\Omega\times\mathbb{R}^N} \phi\widetilde{\psi}\,\mathrm{dx}\,\mathrm{dt}, \phi, \psi \in C_c^\infty(\Omega; \mathscr{S}(\mathbb{R}^N)). \tag{3.27}$$

Demonstração. A transformada inversa é dada por

$$f(t,x) = \frac{1}{(2\pi)^N} \int e^{ix\xi} \widetilde{f}(t,\xi)\,\mathrm{d}\xi\,. \tag{3.28}$$

As fórmulas (**??**) e (**??**) decorrem do teorema **??** aplicado na variável x. Além disso, pelo teorema **??** tem-se

$$\begin{aligned} \widetilde{\partial_t^\beta \phi} &= \int_{\mathbb{R}^N} e^{-ix\xi} \partial_t^\beta \phi(t,x)\,\mathrm{dx} \\ &= \partial_t^\beta \int_{\mathbb{R}^N} e^{-ix\xi} \phi(t,x)\,\mathrm{dx} \\ &= \partial_t^\beta \widetilde{\phi}. \end{aligned}$$

Ou seja,

$$\widetilde{\partial_t^\beta \phi} = \partial_t^\beta \widetilde{\phi}.$$

Assim, análogo ao teorema **??** mostramos que a aplicação $\phi \longmapsto \widetilde{\phi}$ é contínua e análogo ao teorema **??** mostramos que a aplicação $\phi \longmapsto \widetilde{\phi}$ é continuamente inversível e sua inversa é dada por (**??**).

Finalmente aplicando (**??**) obtemos que para cada t fixo

$$\int_{\mathbb{R}^N} \widetilde{\phi}\psi\,\mathrm{dx} = \int_{\mathbb{R}^N} \phi\widetilde{\psi}\,\mathrm{dx}\,.$$

Integrando em relação a t, obtemos

$$\iint\limits_{\Omega\times\mathbb{R}^N} \widetilde{\phi}\psi\,\mathrm{dx}\,\mathrm{dt} = \iint\limits_{\Omega\times\mathbb{R}^N} \phi\widetilde{\psi}\,\mathrm{dx}\,\mathrm{dt}\,.$$

■

Definição 3.3.3 *Um funcional linear e contínuo em $C_c^\infty(\Omega; \mathscr{S}(\mathbb{R}^N))$ é dito uma distribuição temperada em $x \in \mathbb{R}^N$. O espaço das distribuições temperadas em x se denota por $\mathscr{D}'(\Omega, \mathscr{S}(\mathbb{R}^N))$.*

Observação 3.3.4 *$C_c^\infty(\Omega \times \mathbb{R}^n)$ é denso em $C_c^\infty(\Omega; \mathscr{S}(\mathbb{R}^n))$.*

De fato, seja $\psi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^N)$, pela densidade de $C_c^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^N)$ em $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^N)$ existe uma sequência $(\phi_j) \subset C_c^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^N)$ tal que

$$\phi_j \to \psi \text{ em } \mathscr{S}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^N). \tag{3.29}$$

Seja $K = \pi S(\psi)$ e definimos $\varphi \in C_c^\infty(\Omega), 0 \leq \varphi \leq 1$ tal que $\varphi(t) = 1, \forall t \in K$ e $S(\varphi) = K' \subset\subset \Omega$.

Agora, definimos

$$\begin{array}{rccc} \phi: & \Omega \times \mathbb{R}^N & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (t,x) & \longmapsto & \varphi(t), \end{array}$$

temos que $\pi S(\phi) = K'$, além disso

$$\phi\psi = \psi,$$

pois $\phi(t,x) = \varphi(t) = 1, \forall t \in K$.

Seja a sequência de funções $\psi_j = \phi\phi_j$ definidas em $\Omega \times \mathbb{R}^N$, temos que $\psi_j \in C_c^\infty(\Omega \times \mathbb{R}^N), j \in \mathbb{N}$ e $S(\psi_j) \subset S(\phi)$ então,

$$\pi S(\psi_j) \subset \pi S(\phi) = K'.$$

Daí,

$$S(\psi_j - \psi) \subseteq K' \times \mathbb{R}^N.$$

Agora vamos mostrar que

$$\psi_j = \phi\phi_j \to \phi\psi = \psi \text{ em } \mathscr{S}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^N).$$

Para todo $(t,x) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^N$,

$$\begin{aligned} |\phi(t,x)\phi_j(t,x) - \phi(t,x)\psi(t,x)| &= |\phi(t,x)||\phi_j(t,x) - \psi(t,x)| \\ &= |\varphi(t)||\phi_j(t,x) - \psi(t,x)| \\ &\leq |\phi_j(t,x) - \psi(t,x)|. \end{aligned}$$

Por (**??**) segue

$$\psi_j \to \psi \text{ uniformemente em } \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^N.$$

Seja $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{N}^n \times \mathbb{N}^N$, temos que, se $\alpha_2 \neq 0$ então $\partial^\alpha \phi(t,x) = 0, \forall (t,x) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^N$. Daí,

$$\begin{gathered} \left|(t,x)^{(\beta_1,\beta_2)} \partial^\alpha \left(\phi(t,x)(\phi_j(t,x) - \psi(t,x))\right)\right| = \\ = \left|(t,x)^{(\beta_1,\beta_2)} \sum_{\gamma \leq \alpha} \binom{\alpha}{\gamma} \partial^\gamma \phi(t,x) \partial^{\alpha-\gamma}(\phi_j(t,x) - \psi(t,x))\right| = \\ = \left|(t,x)^{(\beta_1,\beta_2)} \sum_{\gamma \leq \alpha, \gamma = (\gamma_1, 0)} \binom{\alpha}{\gamma} \partial^{\gamma_1} \varphi(t,x) \partial^{\alpha-\gamma}(\phi_j(t,x) - \psi(t,x))\right| = \\ = \max_{\gamma_1 \leq \alpha_1} \left\{ \sup_{t \in \Omega} |\partial^{\gamma_1} \varphi(t)| \right\} \left[\left|(t,x)^{(\beta_1,\beta_2)}\right| \sum_{\gamma \leq \alpha, \gamma = (\gamma_1, 0)} \binom{\alpha}{\gamma} \left|\partial^{\alpha-\gamma}(\phi_j(t,x) - \psi(t,x))\right| \right]. \end{gathered}$$

Como cada $(t,x)^{(\beta_1,\beta_2)} \partial^\alpha [\phi_j(t,x) - \psi(t,x)] \to 0$ uniformemente e temos uma soma finita, concluímos que a expressão acima converge uniformemente para 0 em $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^N$, quando $j \to \infty$.

Daí, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n \times \mathbb{N}^N, (t,x) \in \mathbb{R}^n\mathbb{R}^N$ tem-se,

$$|(t,x)^\beta \partial^\alpha (\psi_j - \psi)| \to 0$$

uniformemente em $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^N$. Assim,

$$\psi_j \to \psi \text{ em } \mathscr{S}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^N)$$

Portanto, $C_c^\infty(\Omega \times \mathbb{R}^n)$ é denso em $C_c^\infty(\Omega; \mathscr{S}(\mathbb{R}^n))$. ■

Definição 3.3.5 *Se $u \in \mathscr{D}'(\Omega, \mathscr{S}(\mathbb{R}^N)$, a Transformada Parcial de Fourier $\widetilde{u}$ se define por*

$$\langle \widetilde{u}, \phi \rangle = \left\langle u, \widetilde{\phi} \right\rangle, \phi \in C_c^\infty(\Omega; \mathscr{S}(\mathbb{R}^N)).$$

Exemplo 3.3.6 *Consideremos $u = \delta = \delta(t,x)$ em $\mathbb{R}^2$, a qual é temperada em x. Então*

$$\left\langle \widetilde{\delta}, \phi \right\rangle = \left\langle \delta, \widetilde{\phi} \right\rangle = \widetilde{\phi}(0,0) = \int_{\mathbb{R}} \phi(0,x)\, \mathrm{dx}\,.$$

Esta distribuição pode ser denotada por $\delta(t)$ para significar que atua como δ só em t. Na segunda variável atua como a função 1.

Capítulo 4

Soluções Fundamentais

4.1 Introdução

O principal objetivo desse capítulo é apresentar a demonstração do Teorema de Malgrange-Ehrenpreis feita por Peter Wagner [?]:

Teorema 4.1.1 (Teorema de Malgrange-Ehrenpreis) *Todo operador diferencial parcial de coeficientes constantes não identicamente nulo possui uma solução fundamental* $E \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$.

Antes, veremos definições e resultados preliminares.

Definição 4.1.2 *Um operador diferencial linear* $P(x,\partial) = \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha(x)\partial^\alpha$ *em* Ω *é uma aplicação*

$$\begin{array}{rccc} P(x,\partial): & \mathscr{D}'(\Omega) & \longrightarrow & \mathscr{D}'(\Omega) \\ & u & \longmapsto & \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha(x)\partial^\alpha u \end{array}$$

sendo $m \in \mathbb{N}$ *e* $a_\alpha \in C^\infty(\Omega)$ *fixos. Cada* a_α *é chamada de coeficiente do operador.*

Definição 4.1.3 *A ordem do operador* $P(x,\partial)$ *definido em* Ω *é o maior inteiro* m *tal que*

$$\sum_{|\alpha|=m} |a_\alpha(x)| \neq 0$$

para algum $x \in \Omega$. *Quando* $P(x,\partial) \equiv 0$ *definimos a ordem de* $P(x,\partial)$ *igual a zero.*

Definição 4.1.4 *A cada operador* $P(x,\partial) = \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha(x)\partial^\alpha$ *de ordem* m *definido em* Ω *associamos a aplicação*

$$p(x,\xi) = \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha(x)\xi^\alpha,\ x \in \Omega,\ \xi \in \mathbb{R}^n$$

e definimos seu símbolo principal como

$$p_m(x,\xi) = \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x)\xi^\alpha,\ x \in \Omega,\ \xi \in \mathbb{R}^n.$$

O abuso de notação nas definições acima tem o objetivo de salientar que os coeficientes não são necessariamente constantes. Quando todos os coeficientes são constantes escrevemos $P(\partial)$ no lugar de $P(x, \partial)$. Usaremos os símbolos $p(\xi)$ e $p_m(\xi)$ de modo análogo. Em várias situações será conveniente denotar um operador diferencial linear, de coeficientes constantes ou não, simplesmente por P.

Quando P tem coeficientes constantes, consideramos P definido em $\mathbb{R}^n$. Observe que, nesse caso, p e p_m são polinômios em $\mathbb{R}^n$, sendo p_m homogêneo de grau m.

4.2 Existência e Regularidade de Soluções: Noções Gerais

Os teoremas de Picard e Peano sobre equações diferenciais ordinárias dão condições muito gerais para a existência local de soluções. No caso das equações diferenciais parciais o problema adota a seguinte forma.

Definição 4.2.1 *Dizemos que o operador diferencial linear P é localmente resolúvel em Ω se todo ponto de Ω tem uma vizinhança U tal que para toda $f \in C_c^\infty(U)$ existe $u \in \mathscr{D}'(U)$ tal que*

$$Pu = f.$$

Apresentaremos a seguir o exemplo de Grushin-Garabedian que consiste de um operador que não é localmente resolúvel em $\mathbb{R}^2$. Isto mostra que mesmo na situação mais favorável, em que o membro direito da equação $Pu = f$ é escolhido entre funções muito regulares e só se pretende uma solução local na classe das distribuições, a equação pode não ter solução.

Exemplo 4.2.2 *O operador*

$$P = \partial_x + ix\partial_y$$

não é locamente resolúvel em nenhuma vizinhança da origem de $\mathbb{R}^2$.

A demonstração pode ser encontrada em [**?**], pg 122.

Exemplo 4.2.3 $P = \dfrac{d}{dt}$ *é localmente resolúvel em $\mathbb{R}$.*

De fato, dada $f \in C_c^\infty((a,b))$, existe $F \in C^\infty((a,b))$ tal que

$$F(t) = \int_c^t f(s)\, \mathrm{ds},$$

sendo $c \in (a,b)$ fixo, $t \in (a,b)$. Assim,

$$\frac{d}{dt}F(t) = f(t), \forall t \in (a,b).$$

Como F é contínua em (a,b), sabemos que F define uma distribuição $T_f \in \mathscr{D}'((a,b))$.

Definição 4.2.4 *Um operador diferencial linear* $P(x,\partial) = \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha(x)\partial^\alpha$ *definido em* Ω *se diz elíptico no ponto* $x_0 \in \Omega$ *se*

$$p_m(x_0,\xi) = \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x_0)\xi^\alpha \neq 0$$

para todo $\xi \in \mathbb{R}^n - \{0\}$. *Se* $P(x,\partial)$ *é elíptico em todos os pontos de* Ω *dizemos que* $P(x,\partial)$ *é elíptico em* Ω.

Exemplo 4.2.5 *O operador* $P = \dfrac{d}{dt}$ *é elíptico em* $\mathbb{R}$.

De fato,

$$p_1(\xi) = \xi \neq 0, \forall \xi \in \mathbb{R} - \{0\}.$$

Exemplo 4.2.6 *O operador de Laplace (ou Laplaciano) em* $\mathbb{R}^n$ *definido por*

$$\Delta = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)^2$$

é elíptico em $\mathbb{R}^n$.

De fato,

$$p_2(\xi) = \sum_{j=1}^{n} \xi_j^2 = |\xi|^2 \neq 0, \forall \xi \in \mathbb{R}^n - \{0\}.$$

Exemplo 4.2.7 *O operador da onda em* $\mathbb{R}^{n+1}$ *definido por*

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^2 - \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)^2, \ t \in \mathbb{R}, \ x \in \mathbb{R}^n$$

não é elíptico em $\mathbb{R}^{n+1}$.

De fato, para todo $(\eta,\xi) \in \mathbb{R}^{n+1}, \eta \in \mathbb{R}$ e $\xi \in \mathbb{R}^n$ temos,

$$p_2(\eta,\xi) = \eta^2 - \sum_{j=1}^{n} \xi_j^2 = \eta^2 - |\xi|^2.$$

Dado $\xi \neq 0$ e $\eta = |\xi|$ então

$$p_2(|\xi|,\xi) = 0.$$

Logo P não é elíptico.

Exemplo 4.2.8 *O operador do calor em* $\mathbb{R}^{n+1}$ *definido por*

$$P = \frac{\partial}{\partial t} - \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)^2$$

não é elíptico em $\mathbb{R}^{n+1}$.

De fato, para todo $(\eta, \xi) \in \mathbb{R}^{n+1}, \eta \in \mathbb{R}$ e $\xi \in \mathbb{R}^n$ temos,

$$p_2(\eta, \xi) = \eta - |\xi|^2.$$

Assim, dado $\xi \neq 0$ e $\eta = |\xi|^2$, temos

$$p_2(|\xi|^2, \xi) = 0.$$

Logo P não é elíptico.

Definição 4.2.9 *Um operador P definido em Ω é dito hipoelíptico se $SS(Pu) = SS(u)$ para toda $u \in \mathscr{D}'(\Omega)$.*

Isto significa que se $Pu = f$ então u é C^∞ precisamente onde f é C^∞. Assim, quando P é hipoelíptico e $f \in C^\infty(\Omega)$, toda distribuição u que satisfaz $Pu = f$ é de classe C^∞. Note que como os coeficientes de P pertencem a $C^\infty(\Omega)$ temos

Observação 4.2.10 *A inclusão $SS(Pu) \subseteq SS(u)$ é válida para todo operador P.*

Observação 4.2.11 *Podemos então dizer que um operador P é hipoelíptico em Ω se para cada $u \in \mathscr{D}'(\Omega)$, ocorre que $u \in C^\infty(V)$ toda vez que $Pu \in C^\infty(V)$, qualquer que seja $V \subseteq \Omega$, aberto.*

Exemplo 4.2.12 *O operador $P = \dfrac{d}{dt}$ é hipoelíptico em $\mathbb{R}$.*

Se $f = \dfrac{d}{dt}u \in C^\infty(a,b)$, fixando $c \in (a,b)$ e definido

$$g(t) = \int_c^t f(x)\,\mathrm{dx}, a < t < b$$

temos

$$\frac{d}{dt}g(t) = \frac{d}{dt}\int_c^t f(x)\,\mathrm{dx}\,.$$

Então $(u-g)' = 0$, assim pelo teorema **??** segue que $u - g = k$, para alguma constante k. Como $g + k \in C^\infty((a,b))$ segue que $u \in C^\infty((a,b))$.

Exemplo 4.2.13 *O operador $P = \frac{d}{dx}$ não é hipoelíptico em $\mathbb{R}^2$.*

De fato, seja $u(x,y) = |y|$, temos que $Pu = 0 \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ mas $u \notin C^\infty(\mathbb{R}^2)$.

Exemplo 4.2.14 *O operador $P = t\dfrac{d}{dt}$ não é hipoelíptico em $\mathbb{R}$.*

De fato, seja $u = H$ a função de Heaviside em $\mathbb{R}$. Temos que

$$Pu = t\frac{d}{dt}H(t) = t\delta = 0.$$

Logo $Pu \in C^\infty(\mathbb{R})$ mas $u = H \notin C^\infty(\mathbb{R})$.

Exemplo 4.2.15 *O operador da onda não é hipoelíptico em* $\mathbb{R}^{n+1}$.

De fato, seja $u(x,t) = f(x_1+t)$ com $f \in C^2(\mathbb{R})$. Então

$$\begin{aligned} Pu &= \frac{\partial^2}{(\partial t)^2} f(x_1+t) - \sum_{j=1}^{m} \left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)^2 f(x_1+t) \\ &= \frac{\partial}{\partial t}\left(f'(x_1+t)\frac{\partial}{\partial t}(x_1+t)\right) - \frac{\partial}{\partial x_1}\left(f'(x_1+t)\frac{\partial}{\partial x_1}(x_1+t)\right) \\ &= f''(x_1+t) - f''(x_1+t) = 0. \end{aligned}$$

Assim $Pu = 0 \in C^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$, mas $u \notin C^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$ se $f \notin C^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$. Tome, por exemplo, $f(t) = |t|^3, t \in \mathbb{R}$.

O próximo resultado mostra a relação entre operadores elípticos e hipoelípticos e sua demonstração pode ser encontrada em [?], pg. 215.

Teorema 4.2.16 *Se P é elíptico em Ω então P é hipoelíptico em Ω.*

Exemplo 4.2.17 *O operador de Laplace é hipoelíptico em* $\mathbb{R}^n$.

A recíproca do teorema **??** não é verdadeira. Veremos que o operador do calor, que não é elíptico, é hipoelíptico (ver exemplo **??**).

4.3 Soluções Fundamentais

Definição 4.3.1 *Seja $P(\partial)$ um operador com coeficientes constantes em $\mathbb{R}^n$. Dizemos que $E \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ é uma solução fundamental de $P(\partial)$ se*

$$P(\partial)E = \delta.$$

O conhecimento das soluções fundamentais de um operador de coeficientes constantes proporciona muitas informações sobre o operador, daí o nome de solução fundamental. Nessa seção exploramos relações entre soluções fundamentais e os conceitos abordados na seção anterior. Ou seja, veremos resultados relacionando solução fundamental com a existência e regularidade de soluções da equação $Pu = f$. Uma aplicação mais profunda de soluções fundamentais está relacionada a resolubilidade global e pode ser encontrada em [?].

Teorema 4.3.2 *Se E é uma solução fundamental de $P(\partial)$ e $v \in \mathscr{E}'(\mathbb{R}^n)$ então a equação $P(\partial)u = v$ tem uma solução dada por $E * v$. Além disso, se $u \in \mathscr{E}'(\mathbb{R}^n)$ e $P(\partial)u = v$ então $u = E * v$.*

Demonstração. Como $v \in \mathscr{E}'(\mathbb{R}^n)$ temos que $E * v$ está bem definida. Assim, obtemos

$$P(\partial)(E*v) = \sum_{|\alpha|\le m} a_\alpha \partial^\alpha (E*v) = \sum_{|\alpha|\le m} (a_\alpha \partial^\alpha E) * v = P(\partial)E * v = \delta * v = v.$$

Ou seja, $E * v$ é uma solução de $P(\partial)u = v$.

Além disso, se $u \in \mathscr{E}'(\mathbb{R}^n)$ temos

$$u = \delta * u = P(\partial)E * u = P(\partial)(E * u) = E * P(\partial)u = E * v.$$

■

Observe que o teorema **??** implica que se $P(\partial)$ tem uma solução fundamental então $P(\partial)$ é localmente resolúvel. Logo, pelo Teorema **??** podemos concluir que todo operador de coeficientes constantes não identicamente nulo é localmente resolúvel.

Teorema 4.3.3 *Seja $P(\partial)$ um operador com coeficientes constantes não identicamente nulo e seja E uma solução fundamental de $P(\partial)$ são equivalentes:*

(i) $E \in C^\infty(\mathbb{R}^n - \{0\})$;

(ii) *$P(\partial)$ é hipoelíptico.*

Demonstração. Mostraremos inicialmente que (i) $\Rightarrow$ (ii). Seja U um aberto de $\mathbb{R}^n$ e suponhamos que $u \in \mathscr{D}'(U)$ e $P(\partial)u = f \in C^\infty(U)$. Queremos mostrar que $u \in C^\infty(U)$, para isso mostraremos que todo ponto $x_0 \in U$ tem uma vizinhança na qual u é C^∞.

Seja W uma vizinhança de x_0 relativamente compacta e contida em U, e considere $g \in C_c^\infty(U)$ tal que $g = 1$ em W. Daí,

$$\begin{aligned} P(\partial)(gu) &= \sum_{|\alpha|\le m} a_\alpha \partial^\alpha(gu) = \sum_{|\alpha|\le m} a_\alpha \left(\sum_{\beta\le\alpha} \binom{\alpha}{\beta} \partial^\beta g \partial^{\alpha-\beta} u \right) \\ &= \sum_{|\alpha|\le m} a_\alpha g \partial^\alpha u + \sum_{|\alpha|\le m} a_\alpha \left(\sum_{0<\beta\le\alpha} \binom{\alpha}{\beta} \partial^\beta g \partial^{\alpha-\beta} u \right) \\ &= gP(\partial)u + v \\ &= gf + v \end{aligned}$$

onde

$$v = \sum_{|\alpha|\le m} a_\alpha \left(\sum_{0<\beta\le\alpha} \binom{\alpha}{\beta} \partial^\beta g \partial^{\alpha-\beta} u \right).$$

Como v contém derivadas de g de ordem ≥ 1 e $g = 1$ em W, segue que v se anula em W. Observando que $gu \in \mathscr{E}'(\mathbb{R}^n)$ e aplicando o teorema **??**, como $P(\partial)gu = gf + v$, temos

$$gu = E * (gf + v) = E * gf + E * v.$$

Como $gf \in C_c^\infty(u)$ então $E * (gf) \in C^\infty(U)$ e só resta provar que $E * v$ é C^∞ numa vizinhança de x_0. Seja $\epsilon > 0$ tal que

$$V_\epsilon = \left\{ x \in \mathbb{R}^n, d(x, W^C) > \epsilon \right\}$$

seja uma vizinhança de x_0 e consideremos uma função $h \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$h(x) = \begin{cases} 1, & \text{se} \quad |x| < \frac{\epsilon}{2} \\ 0, & \text{se} \quad |x| > \epsilon. \end{cases}$$

Podemos escrever

$$E * v = (hE) * v + [(1-h)E] * v.$$

Afirmação 1: $(1-h)E \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.
De fato, como $E \in C^\infty(\mathbb{R}^n - \{0\})$, ou seja, $E = \psi$, onde $\psi \in C^\infty(\mathbb{R}^n - \{0\})$ e $h \in C^\infty$ então $(1-h)\psi \in C^\infty(\mathbb{R}^n - \{0\})$. Estendendo ψ a uma função definida em todo $\mathbb{R}^n$ (continuamos denotando esta extensão por ψ), dado epsilon>0 temos que

$$[(1-h)\psi](x) = \psi(x) - h(x)\psi(x) = \psi(x) - \psi(x) = 0, |x| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Logo $(1-h)\psi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, e portanto, $(1-h)E \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Assim, $(1-h)E * v \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Por outro lado, usando o teorema **??**(ii), temos que

$$S((hE) * v) \subseteq S(hE) + S(v) \subseteq \{x \in \mathbb{R}^n; |x| \leq \epsilon\} + S(v) = A + S(v)$$

Afirmação 2: $A + S(v) \subset (V_\epsilon)^C$, ou seja, $(hE) * v$ se anula em V_ϵ.
De fato, seja $x \in V_\epsilon$, assim $d(x, W^C) > \epsilon$, isto é ,

$$|x - y| > \epsilon, \forall y \in W^C.$$

Em particular,

$$|x - z| > \epsilon, \forall z \in S(v),$$

pois $S(v) \subset W^C$. Suponhamos por absurdo que $x \in A + S(v)$, isto é, $x = x_1 + x_2, x_1 \in A$ e $x_2 \in S(v)$. Então,

$$\epsilon < |x_1 + x_2 - z| \leq |x_1| + |x_2 - z| \leq \epsilon + |x_2 - z|.$$

Então,

$$0 < |x_2 - z|.$$

Como $z \in S(v)$ é arbitrário concluimos que $d(x_2, S(v)) > 0$, o que é absurdo.

Finalmente, pelas afirmações 1 e 2 temos que restrita a V_ϵ

$$E * v = [(1-h)E] * v \in C^\infty,$$

portanto, com $u - gu$ em W e $V_\epsilon \subset W$ temos que

$$u|_{V_\epsilon} = E * gf|_{V_\epsilon} + [(1-h)E] * v|_{V_\epsilon} \in C^\infty(V_\epsilon).$$

Reciprocamente, se $P(\partial)$ é hipoelíptico e E é uma solução fundamental de $P(\partial)$ então,

$$SS(E) \subset SS(P(\partial)E) = SS(\delta) = \{0\},$$

logo $E \in C^\infty(\mathbb{R}^n - \{0\})$. ■

Observação 4.3.4 *Note que nenhum operador P tem solução fundamental $E \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, pois os coeficientes de P são de classe C^∞ e $\delta \notin C^\infty(\mathbb{R}^n)$.*

Observação 4.3.5 *A solução fundamental de um operador nem sempre é única.*

De fato, se E é solução fundamental de P e $p(\zeta) = 0$ para algum $\zeta \in \mathbb{C}^n$, então definindo $u(x) = ce^{\zeta x}, x \in \mathbb{R}^n$, $c \in \mathbb{C}$ constante, temos que $Pu = 0$. Logo $E + u$ também é solução fundamental de P. Observe que do Teorema Fundamental da Álgebra segue que tal ζ sempre existe quando o grau de P é ≥ 1.

4.4 Exemplos de Soluções Fundamentais

Exemplo 4.4.1 *Se $P \equiv 0$ então P não tem solução fundamental. Por outro lado, se P é um operador de ordem zero não identicamente nulo, digamos $P = c$, com $c \in \mathbb{C} - \{0\}$, então $E = \dfrac{\delta}{c}$ é a única solução fundamental de P.*

Exemplo 4.4.2 *Já mostramos que $\dfrac{d}{dx}H = \delta$. Logo $E = H$ é solução fundamental do operador $P = \dfrac{d}{dx}$.*

Exemplo 4.4.3 *Consideremos o operador $P = \dfrac{d}{dx} - a$ em $\mathbb{R}, a \in \mathbb{C}$ constante, e definimos $E(x) = H(x)e^{ax}, x \in \mathbb{R}$. Então E é solução fundamental do operador P.*

De fato,

$$\left(\frac{d}{dx} - a\right)E = \frac{d}{dx}(H(x)e^{ax}) - aH(x)e^{ax} = e^{ax}\frac{d}{dx}H(x) + ae^{ax}H(x) - aH(x)e^{ax} =$$

$$= e^{ax}\frac{d}{dx}H(x) = e^{ax}\delta = \delta.$$

Além disso, $SS(E) = SS(H(x)e^{ax}) = \{0\}$ e $SS(PE) = SS(\delta) = \{0\}$. Ou seja,

$$SS(PE) = SS(E).$$

Logo $P(\partial)$ é hipoelíptico.

Exemplo 4.4.4 *Consideremos o operador*

$$P = \left(\frac{d}{dx}\right)^m + a_{m-1}\left(\frac{d}{dx}\right)^{m-1} + \ldots + a_1\left(\frac{d}{dx}\right) + a_0$$

definido em $\mathbb{R}$*, sendo* $a_0, \ldots, a_{m-1} \in \mathbb{C}$ *constantes. Seja* U *a solução do P.V.I.*

$$\begin{cases} P(U) = 0 \\ U(0) = 0, \ldots, U^{m-2}(0) = 0, U^{m-1}(0) = 1. \end{cases}$$

Definindo $E = UH$ *temos que* E *é uma solução fundamental de* P*.*

De fato, para todo $x \in \mathbb{R}$ e $0 \leq j \leq m$ temos

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^j (U(x)H(x)) = \sum_{r=0}^{j} \binom{j}{r} \left(\frac{d}{dx}\right)^r U(x) \left(\frac{d}{dx}\right)^{j-r} H(x).$$

Levando em consideração que qualquer derivada de $H(x)$ é uma combinação de δ e em $x = 0$ as derivadas de ordem $\leq m-2$ de U se anulam, vemos que

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^j (U(x)H(x)) = \begin{cases} H(x)\left(\frac{d}{dx}\right)^j U(x), \text{ se } 0 \leq j \leq m-1 \\ \delta + H(x)\left(\frac{d}{dx}\right)^m U(x), \text{ se } j = m. \end{cases}$$

Logo,

$$\begin{aligned} PE &= P(U(x)H(x)) = \\ &= \left(\frac{d}{dx}\right)^m U(x)H(x) + a_{m-1}\left(\frac{d}{dx}\right)^{m-1} U(x)H(x) + \cdots + a_1\frac{d}{dx}U(x)H(x) + a_0U(x)H(x) \\ &= \delta + H(x)\left(\frac{d}{dx}\right)^m U(x) + a_{m-1}H(x)\left(\frac{d}{dx}\right)^{m-1} U(x) + \cdots + a_1H(x)\frac{d}{dx}U(x) + a_0U(x)H(x) \\ &= \delta + H(x)\left[\left(\frac{d}{dx}\right)^m U(x) + \left(\frac{d}{dx}\right)^{m-1} U(x) + \cdots + a_1\frac{d}{dx}U(x) + a_0U(x)\right] \\ &= \delta + H(x)\,[PU(x)] \\ &= \delta. \end{aligned}$$

Portanto, E assim definida é uma solução fundamental de P.

Exemplo 4.4.5 *Fixado* $a \neq 0$*, consideremos o operador* $P = \left(\frac{d}{dx}\right)^2 + a^2, x \in \mathbb{R}$ *e definimos* $E = \dfrac{H(x)\operatorname{sen} ax}{a}, x \in \mathbb{R}$*. Então* E *é solução fundamental do operador* P*.*

De fato, $U(x) = \dfrac{\operatorname{sen} ax}{a}$ satisfaz o P.V.I.

$$\begin{cases} P(U) = 0 \\ U(0) = 0, U'(0) = 1. \end{cases}$$

Logo, pelo exemplo anterior, $E(x) = U(x)H(x)$ é solução fundamental do operador P. Além disso, P é hipoelíptico, pois

$$SS(E) = SS(\frac{H(x)\operatorname{sen} ax}{a}) = \{0\}.$$

Exemplo 4.4.6 *Fixado $a \neq 0$, consideremos o operador $P = \left(\frac{d}{dx}\right)^2 - a^2, x \in \mathbb{R}$ e definimos $E = \frac{H(x)\operatorname{senh} ax}{2a}$. E é solução fundamental de P.*

De fato, $U(x) = \dfrac{\operatorname{senh} ax}{2a}$ satisfaz o P.V.I.

$$\begin{cases} P(U) = 0 \\ U(0) = 0, U'(0) = 1. \end{cases}$$

Logo $E(x) = U(x)H(x)$ é solução fundamental de P. Além disso, P é hipoelíptico.

Exemplo 4.4.7 (Solução fundamental do operador do calor)

Para encontrar uma solução fundamental do operador do calor devemos resolver a seguinte equação

$$\frac{\partial}{\partial t}E(t,x) - \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)^2 E(t,x) = \delta(t,x),\ t \in \mathbb{R},\quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Aplicando a Transformada Parcial de Fourier em relação a x, obtemos

$$\frac{\partial}{\partial t}\widetilde{E}(t,\xi) + |\xi|^2\widetilde{E}(t,\xi) = \delta(t),$$

ou seja,

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + |\xi|^2\right)\widetilde{E}(t,\xi) = \delta(t).$$

Assim, pelo exemplo **??**, temos

$$\widetilde{E}(t,\xi) = H(t)e^{-|\xi|^2 t}.$$

Para $t > 0, \widetilde{E}$ decresce rapidamente em ξ e podemos aplicar a fórmula da inversão, assim

$$E(t,x) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi}e^{-|\xi|^2 t}\,\mathrm{d}\xi, t > 0$$

Daí, usando que dada $f(x) = e^{-|x|^2}, x \in \mathbb{R}^n$ tem-se $\hat{f}(\xi) = (\sqrt{\pi})^n e^{\frac{-|\xi|^2}{4}}$ e fazendo a mudança de variável $\xi = \frac{\eta}{\sqrt{t}}$ temos

$$
\begin{aligned}
E(t,x) &= \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\frac{\eta}{\sqrt{t}}-\frac{|\eta|^2}{t}t}\frac{1}{(\sqrt{t})^n}\,\mathrm{d}\eta \\
&= \frac{1}{(2\pi\sqrt{t})^n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\frac{\eta}{\sqrt{t}}-|\eta|^2}\,\mathrm{d}\eta \\
&= \frac{1}{(2\pi\sqrt{t})^n}\widehat{f}\left(\frac{-x}{\sqrt{t}}\right) \qquad\qquad] \\
&= \frac{1}{(2\pi\sqrt{t})^n}(\sqrt{\pi})^n e^{\frac{-|x|^2}{4t}} \\
&= \frac{1}{(2\sqrt{\pi t})^n}e^{\frac{-|x|^2}{4t}}.
\end{aligned}
$$

Logo,

$$E(t,x) = \frac{1}{(2\sqrt{\pi t})^n}H(t)e^{\frac{-|x|^2}{4t}}.$$

O operador do calor é hipoelíptico, pois existe uma extensão de E para $\mathbb{R}^{n+1}$, de tal modo que essa extensão é C^∞ em $\mathbb{R}^{n+1}-\{0\}$: basta tomar $E(0,x)=0$ para $x\neq 0$. Notemos que E não tem extensão contínua para $\mathbb{R}^{n+1}$, pois,

$$E(t,0) = \frac{1}{(2\sqrt{\pi t})^n}.$$

Exemplo 4.4.8 (Solução fundamental do operador da onda)

Primeiramente vamos obter a solução fundamental do operador das ondas para o caso $n=1$:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^2 E(t,x) - \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 E(t,x) = \delta(t,x). \tag{4.1}$$

Façamos a mudança de variáveis $s=t-x$ e $y=t+x$. Veremos que podemos encontrar uma solução de (**??**) que é uma função localmente integrável, também denotada por $E(t,x)$.

Dada $\varphi\in C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$, seja $\varphi(t,x)$ a expressão nas coordenadas t,x e seja $\varphi^*(s,y)$ a expressão nas coordenadas s,y. Assim, temos

$$\varphi(t,x) = \varphi\left(\frac{s+y}{2},\frac{y-s}{2}\right) = \varphi^*(s,y).$$

Com isso,

$$4\left(\frac{\partial}{\partial s}\right)\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)\varphi^*(s,y) = \left[\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^2 - \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^2\right]\varphi\left(\frac{s+y}{2},\frac{y-s}{2}\right). \tag{4.2}$$

Por outro lado,

$$\langle E,\varphi\rangle = \iint E(t,x)\varphi(t,x)\,\mathrm{dt}\,\mathrm{dx} = \frac{1}{2}\iint E\left(\frac{s+y}{2},\frac{y-s}{2}\right)\varphi^*(s,y)\,\mathrm{ds}\,\mathrm{dy}\,.$$

Assim a distribuição E é definida, em coordenadas s e y, por

$$E^*(s,y) = \frac{1}{2}E\left(\frac{s+y}{2}, \frac{y-s}{2}\right).$$

Para cada $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$ tomamos $\varphi = \left[\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^2 - \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^2\right]\psi$, nas coordenadas t, x. Usando (**??**) e (**??**) segue que

$$\psi(0,0) = \langle \delta, \psi\rangle = \left\langle E, \frac{\partial^2}{\partial t^2}\psi - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi\right\rangle = \iint E(t,x)\left[\psi_{tt} - \psi_{xx}\right](t,x)\,\mathrm{dt}\,\mathrm{dx} =$$

$$\iint E^*(s,y)\left[\psi_{tt} - \psi_{xx}\right]\left(\frac{s+y}{2}, \frac{y-s}{2}\right)\mathrm{ds}\,\mathrm{dy} = 4\iint E^*(s,y)\psi^*_{sy}(s,y)\,\mathrm{ds}\,\mathrm{dy}\,.$$

Devemos portanto encontrar uma função localmente integrável E^*, solução de

$$4\left(\frac{\partial}{\partial s}\right)\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)E^* = \delta(s,y).$$

Assim, uma vez que $E(t,x) = 2E^*(t-x, t+x)$, temos que

$$E(t,x) = \frac{1}{2}H(t-x)H(t+x). \tag{4.3}$$

Mostraremos agora que E dada por (**??**) é solução do operador da onda em $\mathbb{R}^2$. Temos que E pode ser escrita como

$$E(t,x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{se } |x| < t \\ 0, & \text{se } |x| > t. \end{cases}$$

De fato,

$$\begin{aligned}
&\left\langle \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)E, \varphi\right\rangle = \left\langle E, \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\varphi\right\rangle = \\
&= \frac{1}{2}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{|x|}^{+\infty}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\varphi(t,x)\,\mathrm{dt}\,\mathrm{dx} - \int_0^{+\infty}\int_{-t}^{t}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\varphi(t,x)\,\mathrm{dx}\,\mathrm{dt}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} -\frac{\partial}{\partial t}\varphi(|x|,x)\,\mathrm{dx} - \int_0^{+\infty}\left(\frac{\partial}{\partial x}\varphi(t,t) - \frac{\partial}{\partial x}\varphi(t,-t)\right)\mathrm{dt}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(-\int_{-\infty}^{0}\frac{\partial}{\partial t}\varphi(-x,x)\,\mathrm{dx} - \int_0^{+\infty}\frac{\partial}{\partial t}\varphi(x,x) - \int_0^{+\infty}\frac{\partial}{\partial x}\varphi(t,t)\,\mathrm{dt} + \int_0^{+\infty}\frac{\partial}{\partial x}\varphi(t,-t)\,\mathrm{dt}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(-\int_0^{+\infty}\frac{\partial}{\partial t}\varphi(x,-x)\,\mathrm{dx} - \int_0^{+\infty}\frac{\partial}{\partial t}\varphi(x,x) - \int_0^{+\infty}\frac{\partial}{\partial x}\varphi(t,t)\,\mathrm{dt} + \int_0^{+\infty}\frac{\partial}{\partial x}\varphi(t,-t)\,\mathrm{dt}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(-\int_0^{+\infty}\left(\frac{\partial}{\partial t}\varphi(y,-y) - \frac{\partial}{\partial x}\varphi(y,-y)\right)\mathrm{dy} - \int_0^{+\infty}\left(\frac{\partial}{\partial t}\varphi(y,y) + \frac{\partial}{\partial x}\varphi(y,y)\right)\mathrm{dy}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(-\int_0^{+\infty}\frac{\partial}{\partial y}\varphi(y,-y)\,\mathrm{dy} - \int_0^{+\infty}\frac{\partial}{\partial y}\varphi(y,y)\,\mathrm{dy}\right)
\end{aligned}$$

$= \frac{1}{2}(\varphi(0,0) + \varphi(0,0))$
$= \varphi(0,0)$
$= \langle \delta, \varphi \rangle$.

A partir de agora garantiremos a existência de solução fundamental para o operador da onda em $\mathbb{R}^{n+1}$ e apresentaremos as soluções fundamentais explícitas para os casos $n = 2$ e $n = 3$.

Para encontrar a solução fundamental resolveremos a seguinte expressão

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^2 E(t,x) - \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)^2 E(t,x) = \delta(t,x).$$

Aplicando a Transformada Parcial de Fourier em relação a x, obtemos

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^2 \widetilde{E}(t,\xi) + |\xi|^2 \widetilde{E}(t,\xi) = \delta(t). \tag{4.4}$$

Fixado $\xi \in \mathbb{R}^n - \{0\}$, a solução do P.V.I.

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^2 U + |\xi|^2 U = 0, \\ U(0,\xi) = 0, \\ U'(0,\xi) = 1 \end{cases}$$

é dada por $U(t,\xi) = \dfrac{\operatorname{sen}(|\xi|t)}{|\xi|}$. Assim, pelo exemplo **??** uma solução de (**??**) com suporte em $t \geq 0$, é dada por

$$\widetilde{E_+}(t,\xi) = H(t)\frac{\operatorname{sen}(|\xi|t)}{|\xi|}$$

e uma solução de (**??**) com suporte em $t \leq 0$ é dada por

$$\widetilde{E_-}(t,\xi) = -H(-t)\frac{\operatorname{sen}(|\xi|t)}{|\xi|}.$$

Notemos que $\widetilde{E_+}$ é limitada na variável ξ e, portanto, temperada na variável ξ. Mas como $\widetilde{E_+}$ não pertence a $L^1(\mathbb{R}^n)$, não é possível aplicar diretamente a fórmula da inversão para obter a distribuição E_+.

Entretanto, podemos aproximar $\widetilde{E_+}$ por funções contínuas como

$$\widetilde{E_+^\epsilon}(t,\xi) = H(t)\frac{\operatorname{sen}(|\xi|t)}{|\xi|}e^{-\epsilon|\xi|}$$

daí,

$$\widetilde{E_+^\epsilon}(t,\xi) = H(t)\lim_{\epsilon\to 0}\frac{\operatorname{sen}(|\xi|t)}{|\xi|}e^{-\epsilon|\xi|}.$$

Então,

$$E_+^\epsilon(t,x) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int e^{ix\xi}H(t)\frac{\operatorname{sen}(|\xi|t)}{|\xi|}e^{-\epsilon|\xi|}\,\mathrm{d}\xi\,.$$

Logo,

$$E_+(t,x) = \frac{1}{(2\pi)^n}H(t)\lim_{\epsilon\to 0}\int e^{ix\xi}e^{-\epsilon|\xi|}\frac{\operatorname{sen}(|\xi|t)}{|\xi|}\,\mathrm{d}\xi\,. \tag{4.5}$$

Em geral é difícil obter fórmulas explícitas para E_+ a partir de (**??**), mas isto é possivel no caso $n=1$ como já apresentamos e nos casos $n=2$ e $n=3$, obtendo as seguintes expressões:

$$E_+(t,x) = \begin{cases} \frac{1}{2}H(t-x)H(t+x), & \text{se} \quad n=1 \\ \begin{cases} \frac{1}{2}(t^2-|x|^2)^{-\frac{1}{2}}, & \text{se} \quad |x|<t \\ 0 & \text{se} \quad |x|\geq t \end{cases} & \text{se} \quad n=2 \\ \frac{1}{4\pi|x|}\delta(t-|x|), & \text{se} \quad n=3. \end{cases}$$

Um cálculo detalhado das fórmulas para os casos $n=2$ e $n=3$ pode ser encontrado em [**?**] pg. 62. Podemos obter a solução fundamental E_- de maneira análoga.

Exemplo 4.4.9 (Solução fundamental do operador de Laplace)

As soluções da equação $\Delta u = 0$ são ditas funções harmônicas. O operador de Laplace é usado para descrever fenômenos em meios homogêneos do tipo estacionário. Isto se reflete na propriedade de Δ ser invariante por rotações.

É natural então procurar soluções fundamentais de Δ que sejam inavariantes por rotações. Se procurarmos soluções introduzindo uma Transformada de Fourier Parcial como foi feito no operador do calor e da onda obteremos soluções não invariantes por rotações devido à escolha de uma variável privilegiada (aquela não transformada).

Como estamos interessados somente em encontrar uma solução fundamental, o que faremos é procurar soluções que sejam dependentes apenas de

$$r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2} = |x|.$$

Ou seja, tentaremos encontrar uma função f definida em $[0,\infty)$, de modo que $E(x) = f(|x|)$ seja uma distribuição temperada.

Proposição 4.4.10 *Considere f uma função de classe C^2 definida em $[0,\infty)$. Então se $E(x) = f(|x|), r = |x|, x \in \mathbb{R}^n$, temos que*

$$\Delta E(x) = f''(r) + \frac{n-1}{r}f'(r) = \left[\frac{d^2}{dr^2} + \frac{n-1}{r}\frac{d}{dr}\right]f(r), r \neq 0.$$

Demonstração. Para $r \neq 0$ temos

$$\frac{\partial E}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k}f(|x|) = f'(r)\frac{\partial}{\partial x_k}(x_1^2 + \cdots x_n^2)^{\frac{1}{2}} = f'(r)x_k(x_1^2 + \cdots x_n^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{x_k}{r}f'(r).$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 E}{\partial x_k^2} &= \frac{\partial}{\partial x_k}\left[\frac{x_k}{r}f'(r)\right] \\
&= \frac{x_k^2}{r^2}f''(r) + f'(r)\left[\left(r - \frac{x_k^2}{r}\right)\frac{1}{r^2}\right] \\
&= x_k^2\left(\frac{f''(r)}{r^2} - \frac{f'(r)}{r^3}\right) + \frac{f'(r)}{r} \\
&= x_k^2\left(\frac{rf''(r) - f'(r)}{r^3}\right) + \frac{f'(r)}{r}, k = 1, 2, \ldots, n.
\end{aligned}$$

Somando estas igualdades de $k = 1$ até $k = n$ obtemos

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2 E}{\partial x_k^2} &= \sum_{k=1}^{n} x_k^2\left(\frac{rf''(r) - f'(r)}{r^3}\right) + \frac{f'(r)}{r} \\
&= (x_1^2 + \cdots x_n^2)\left(\frac{rf''(r) - f'(r)}{r^3}\right) + n\frac{f'(r)}{r} \\
&= r^2\left(\frac{rf''(r) - f'(r)}{r^3}\right) + n\frac{f'(r)}{r} \\
&= f''(r) + \frac{n-1}{r}f'(r).
\end{aligned}$$

■

Como $\Delta E = 0$, se $x \neq 0, f$ deve satisfazer

$$f''(r) + \frac{n-1}{r}f'(r) = 0, 0 < r < \infty. \tag{4.6}$$

Resolvendo pelo método do fator integrante a equação (**??**) obtemos

$$f(r) = \begin{cases} ar^{2-n} + b, & \text{para} \quad n \geq 3 \\ a\ln r + b, & \text{para} \quad n = 2 \end{cases} \tag{4.7}$$

onde a e b são constantes arbitrárias. Notemos que definindo $E(x) = f(|x|)$ com f dada por (**??**), $E \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ e consequentemente define uma distribuição.

Para verificar que com uma escolha adequada da constante a, E é realmente uma solução fundamental, relembraremos a seguinte identidade

$$\phi\Delta\psi - \psi\Delta\phi = div(\phi\nabla\psi - \psi\nabla\phi),$$

onde ∇ denota o gradiente e *div* denota o divergente.

Se $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ então

$$\langle E, \phi\rangle = \int E(x)\phi(x)\,\mathrm{dx} = \lim_{\epsilon\to 0}\int\limits_{|x|\geq\epsilon} E(x)\phi(x)\,\mathrm{dx}\,. \tag{4.8}$$

Logo, se quisermos demonstrar que E é solução fundamental para o laplaciano devemos verificar a igualdade

$$\langle E, \Delta\phi\rangle = \lim_{\epsilon\to 0} \int\limits_{|x|\geq\epsilon} E(x)\Delta\phi(x)\,\mathrm{dx}$$

para cada $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Assim, dada $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, tomamos $R > 0$ tal que $S(\phi) \subset B[0,R]$. Como $\Delta E = 0$ em $\mathbb{R}^n - \{0\}$, então em $\mathbb{R}^n - \{0\}$ temos que

$$E\Delta\phi = E\Delta\phi - \phi\Delta E = div(E\nabla\phi - \phi\nabla E).$$

Daí, se $B_\epsilon = \{x; \epsilon \leq |x| \leq R\}$ o teorema da divergência permite escrever

$$\int\limits_{|x|\geq\epsilon} E\Delta\phi = \int\limits_{B_\epsilon} E\Delta\phi = \int\limits_{B_\epsilon} E\Delta\phi - \phi\Delta E = \int\limits_{B_\epsilon} div(E\nabla\phi - \phi\nabla E) =$$

$$= \int\limits_{\partial B_\epsilon} (E\nabla\phi - \phi\nabla E)\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}\sigma$$

onde $\vec{n}$ é o vetor normal unitário exterior a ∂B_ϵ e $\mathrm{d}\sigma$ é o elemento de área em B_ϵ. Note que como $S(\phi) \subset B[0,R]$ então a integral em $|x| = R$ é nula, logo só a esfera de raio ϵ participa na integral sobre ∂B_ϵ, ou seja,

$$\int\limits_{|x|\geq\epsilon} E\Delta\phi = \int\limits_{\partial B_\epsilon} (E\nabla\phi - \phi\nabla E)\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}\sigma = \int\limits_{|x|=\epsilon} (E\nabla\phi - \phi\nabla E)\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}\sigma\,.$$

Se y denota a variável em $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n; |x| = 1\}$ e $\mathrm{d}\mu$ o elemento de área em S^{n-1}, fazendo a mudança de variável $x = \epsilon y$ então $\mathrm{d}\sigma = \epsilon^{n-1}\,\mathrm{d}\mu$ e podemos escrever

$$\int\limits_{|x|=\epsilon} (E\nabla\phi - \phi\nabla E)\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}\sigma = \int\limits_{S^{n-1}} \left[f(\epsilon)\frac{\partial\phi}{\partial\vec{n}}(\epsilon y) + \phi(\epsilon y)f'(\epsilon)\right]\epsilon^{n-1}\,\mathrm{d}\mu, \tag{4.9}$$

onde usamos que $\nabla\phi\cdot\vec{n} = \frac{\partial\phi}{\partial\vec{n}}, \nabla E = -f'(r)\vec{n}$.

Quando $\epsilon \to 0$ segue de (**??**), com $b = 0$ que

$$\begin{cases} f(\epsilon)\dfrac{\partial\phi}{\partial\vec{n}}(\epsilon y)\epsilon^{n-1} & \longrightarrow \quad 0 \\ f'(\epsilon)\phi(\epsilon y)\epsilon^{n-1} & \longrightarrow \quad \begin{cases} a(2-n)\phi(0), & \text{se} \quad n \geq 3 \\ a\phi(0), & \text{se} \quad n = 2 \end{cases} \end{cases} \tag{4.10}$$

uniformemente em S^{n-1}. Assim, usando (??), (??) e (??), trocando ϕ por $\Delta\phi$, temos

$$\begin{aligned}
\langle E, \Delta\phi\rangle &= \lim_{\epsilon\to 0} \int\limits_{|x|\geq\epsilon} E(x)\Delta\phi(x)\,\mathrm{dx} \\
&= \lim_{\epsilon\to 0} \int\limits_{S^{n-1}} \left[f(\epsilon)\frac{\partial\phi}{\partial\vec{n}}(\epsilon y) + \phi(\epsilon y) f'(\epsilon)\right] \epsilon^{n-1}\,\mathrm{d}\mu \\
&= \begin{cases} a(2-n)\phi(0) \displaystyle\int\limits_{S^{n-1}} \mathrm{d}\mu, & \text{se} \quad n\geq 3 \\ a\phi(0) \displaystyle\int\limits_{S^{n-1}} \mathrm{d}\mu, & \text{se} \quad n=2. \end{cases}
\end{aligned}$$

Portanto basta escolher $a = \frac{1}{(2-n)\omega_n}$, onde ω_n é a área da esfera unitária em $\mathbb{R}^n$, para $n \geq 3$ e $a = \frac{1}{2\pi}$ se $n = 2$, ou seja

$$E(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{(2-n)\omega_n}|x|^{2-n}, & \text{se} \quad n\geq 3 \\ \dfrac{1}{2\pi}\ln|x|, & \text{se} \quad n=2. \end{cases}$$

4.5 Demonstração do Teorema de Malgrange-Ehrenpreis

Nessa seção demonstraremos o teorema **??**. Sua demonstração é bastante simples no caso em que

$$p(i\xi) \neq 0, \forall \xi \in \mathbb{R}^n. \tag{4.11}$$

De fato, nesse caso,

$$\hat{E}(\xi) = \frac{1}{p(i\xi)}$$

é limitada em $\mathbb{R}^n$, logo $\hat{E} \in \mathscr{S}'$ e daí $E = \mathscr{F}^{-1}(\hat{E}) \in \mathscr{S}'$. Além disso, as equivalências

$$PE = \delta \Leftrightarrow p(i\xi)\hat{E} = 1 \Leftrightarrow \hat{E} = \frac{1}{p(i\xi)}$$

demonstram que sob a hipótese (??), E é a única solução fundamental temperada de P.

Exemplo 4.5.1 *Fixe $c \neq 0$ e $j \in \mathbb{N}$. O operador $P = (c^2 + \Delta)^j$ tem uma única solução fundamental temperada, pois*

$$p(i\xi) = (c^2 + |i\xi|^2)^j, \ \xi \in \mathbb{R}^n.$$

As considerações acima mostram que os zeros de $p(i\xi)$ são os pontos “problemáticos" na construção da solução fundamental. Observe ainda que a solução fundamental no teorema **??** é um elemento de $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ mas não necessariamente um objeto de $\mathscr{S}'$.

Combinando os exemplos **??**, **??** e **??** com o teorema **??**, obtemos que os operadores do calor, das ondas e de Laplace têm solução fundamental temperada. Na verdade, Hörmander [?] e Lojasiewicz [?] demonstram que todo operador linear não identicamente nulo de coeficientes constantes têm solução fundamental temperada.

A demonstração do teorema **??** será dividida em 3 lemas. No primeiro deles estão listadas propriedades úteis da Transformada de Fourier.

Lema 4.5.2 *Seja* $P(\partial) = \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha \partial^\alpha$ *um operador de coeficientes constantes. Se* $\xi \in \mathbb{R}^n, \zeta \in \mathbb{C}^n, T \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ *e* $S \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ *então*

(i) $P(\partial)(e^{\zeta x}T) = e^{\zeta x}(P(\partial+\zeta)T)$;

(ii) $P(\partial+\zeta)\mathscr{F}^{-1}S = \mathscr{F}^{-1}(p(i\xi+\zeta)S)$;

(iii) $\mathscr{F}^{-1}(\overline{p}(-i\xi+\zeta)) = \overline{P}(-\partial+\zeta)\delta$.

Aqui $P(\partial+\zeta)$ *denota o operador*

$$P(\partial+\zeta) = \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha(\partial+\zeta)^\alpha \tag{4.12}$$

e

$$\overline{P}(\partial) = \sum_{|\alpha|\leq m} \overline{a_\alpha}\partial^\alpha.$$

Demonstração. Primeiramente notemos que de (**??**) e da definição **??** temos que

$$\sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha(\partial+\zeta)^\alpha = \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha \sum_{0\leq\beta\leq\alpha} \binom{\alpha}{\beta}\zeta^\beta\partial^{\alpha-\beta}.$$

Então,

$$e^{\zeta x}P(\partial+\zeta)T = e^{\zeta x}\sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha \sum_{0\leq\beta\leq\alpha} \binom{\alpha}{\beta}\zeta^\beta\partial^{\alpha-\beta}T. \tag{4.13}$$

Por outro lado pela Regra de Leibniz segue que

$$P(\partial)(e^{\zeta x}T) = \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha\partial_\alpha(e^{\zeta x}T) = \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha \sum_{0\leq\beta\leq\alpha} \binom{\alpha}{\beta}\zeta^\beta e^{\zeta x}\partial^{(\alpha-\beta)}T. \tag{4.14}$$

Assim, por (**??**) e (**??**) segue (i).

Agora vamos mostrar (ii). Por definição

$$P(\partial+\zeta)\mathscr{F}^{-1}S = \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha \sum_{0\leq\beta\leq\alpha} \binom{\alpha}{\beta}\zeta^\beta\partial^{\alpha-\beta}(\mathscr{F}^{-1}S)$$

e pela observação **??**

$$P(\partial+\zeta)\mathscr{F}^{-1}S = \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha \sum_{0\leq\beta\leq\alpha} \binom{\alpha}{\beta}\zeta^\beta\mathscr{F}^{-1}((i\xi)^{\alpha-\beta}S) \tag{4.15}$$

Além disso, do Teorema Binomial,

$$\mathscr{F}^{-1}(p(i\xi+\zeta)S) = \mathscr{F}^{-1}\left(\sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha \sum_{0\leq\beta\leq\alpha}\binom{\alpha}{\beta}\zeta^\beta (i\xi)^{\alpha-\beta} S\right).$$

Logo, por (**??**) segue que (ii).

Finalmente, aplicando (ii) em $S = \mathscr{F}\delta$ segue que

$$\overline{P}(-\partial+\zeta)\mathscr{F}^{-1}\mathscr{F}\delta = \mathscr{F}^{-1}[\overline{p}(-i\xi+\zeta)\mathscr{F}\delta],$$

assim, como $\mathscr{F}\delta = 1$

$$\mathscr{F}^{-1}(\overline{p}(-i\xi+\zeta)) = \overline{P}(-\partial+\zeta)\delta.$$

■

O próximo resultado usa o Teorema dos Resíduos para dar a solução explícita de um sistema linear de equações envolvendo a Matriz de Vandermonde.

Lema 4.5.3 *Se $\lambda_0, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{C}$ são dois a dois distintos, então existe uma única solução do sistema de equações lineares*

$$\sum_{j=0}^{m} a_j \lambda_j^k = \begin{cases} 0, & se \quad k = 0, 1, \ldots, m-1 \\ 1, & se \quad k = m \end{cases}$$

e é dada por

$$a_j = \prod_{k=0, k\neq j}^{m} (\lambda_j - \lambda_k)^{-1}.$$

Demonstração. Podemos representar o sistema acima por

$$\begin{pmatrix} \lambda_0^0 & \lambda_1^0 & \cdots & \lambda_m^0 \\ \lambda_0^1 & \lambda_1^1 & \cdots & \lambda_m^1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_0^m & \lambda_1^m & \cdots & \lambda_m^m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Seja A a matriz formada pelos $\lambda_j's$, notemos que A é uma matriz de Vandermonde, logo

$$\det A = \prod_{0\leq i<j\leq m} (\lambda_j - \lambda_i).$$

Como $\lambda_0, \ldots, \lambda_m$ são dois a dois distintos, então $\det A \neq 0$. Logo $a_j's$ ficam unicamente determinados.

Seja $Q(z) = \prod_{j=0}^{m}(z-\lambda_j)$ e para cada $k = 0, 1, \ldots, m$ definimos $f(z) = \frac{z^k}{Q(z)}$, a qual é holomorfa em $\mathbb{C} - \{\lambda_0, \ldots, \lambda_m\}$. Agora para cada $j = 0, 1, \ldots, m$ obteremos o resíduo de f em torno de $z = \lambda_j$.

Como $\lambda_j's$ são dois a dois distintos e Q tem grau $m+1$, por frações parciais existem constantes $A_0, A_1, \dots A_m$ tais que

$$\frac{z^k}{Q(z)} = \frac{A_0}{z-\lambda_0} + \frac{A_1}{z-\lambda_1} + \ldots + \frac{A_m}{z-\lambda_m}. \tag{4.16}$$

Note que $z \mapsto \frac{A_i}{z-\lambda_i}$ é uma função analítica numa vizinhança de λ_j quando $i \neq j$, então, podemos expandi-las como uma série de potências. Assim o resíduo de f em torno de $z = \lambda_j$ é dado por A_j. A seguir calcularemos A_j.

Multiplicando ambos os lados de (**??**) por $(z-\lambda_j)$ obtemos

$$\frac{z^k(z-\lambda_j)}{Q(z)} = \frac{A_0(z-\lambda_j)}{z-\lambda_0} + \frac{A_1(z-\lambda_j)}{z-\lambda_1} + \ldots + \frac{A_j(z-\lambda_j)}{(z-\lambda_j)} + \ldots + \frac{A_m(z-\lambda_j)}{z-\lambda_m}.$$

Fazendo $z \to \lambda_j$ em ambos os lados da igualdade acima, segue que

$$\frac{\lambda_j^k}{(\lambda_j-\lambda_0)\ldots(\lambda_j-\lambda_{j-1})(\lambda_j-\lambda_{j+1})\ldots(\lambda_j-\lambda_m)} = A_j.$$

Logo, definindo $N_0 = 1 + \max\{|\lambda_0|, |\lambda_1|, \ldots, |\lambda_m|\}$, pelo Teorema dos Resíduos temos que

$$\sum_{j=0}^{m} A_j = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=N} \frac{z^k}{Q(z)}\,\mathrm{dz},\ N \geq N_0. \tag{4.17}$$

Por outro lado

$$\int_{|z|=N} \frac{z^k}{Q(z)}\,\mathrm{dz} = \int_0^{2\pi} \frac{iN^{k+1}e^{(k+1)i\theta}}{Q(Ne^{i\theta})}\,\mathrm{d}\theta,\ N \geq N_0.$$

Seja

$$F_N(\theta) = \frac{iN^{k+1}e^{(k+1)i\theta}}{Q(Ne^{i\theta})},\ N \geq N_0,\ \theta \in [0, 2\pi].$$

Para cada $\theta \in [0, 2\pi]$ fixado vale

$$\lim_{N\to\infty} F_N(\theta) = \lim_{N\to\infty} \frac{ie^{(k+1)i\theta}}{(e^{i\theta}-\frac{\lambda_0}{N})\ldots(e^{i\theta}-\frac{\lambda_m}{N})} = \begin{cases} 0, & \text{se} \quad k = 0, 1, \ldots, m-1, \\ i, & \text{se} \quad k = m. \end{cases} \tag{4.18}$$

Além disso para todo $N \geq N_0$ e $\theta \in [0, 2\pi]$ vale

$$|F_N(\theta)| \leq \frac{1}{|e^{i\theta}-\frac{\lambda_0}{N}|\ldots|e^{i\theta}-\frac{\lambda_m}{N}|} \leq \frac{1}{||e^{i\theta}|-\frac{|\lambda_0|}{N}|\ldots||e^{i\theta}|-\frac{|\lambda_m|}{N}|} \leq \frac{1}{|1-\frac{|\lambda_0|}{N}|\ldots|1-\frac{|\lambda_m|}{N}|}.$$

Assim

$$|F_N(\theta)| \leq \frac{1}{\left(1-\frac{N_0}{N}\right)^{m+1}},\ N \geq N_0,\ \theta \in [0, 2\pi].$$

Como $\lim\limits_{N\to\infty} \frac{1}{\left(1-\frac{N_0}{N}\right)^{m+1}} = 1$, existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que se $N > N_1$ então $\frac{1}{\left(1-\frac{N_0}{N}\right)^{m+1}} \leq 2$.

A aplicação $N \mapsto \frac{1}{\left(1-\frac{N_0}{N}\right)^{m+1}}$ é contínua no compacto $[N_0+1, N_1]$, logo é limitada, digamos que $\frac{1}{\left(1-\frac{N_0}{N}\right)^{m+1}} \leq k_0$. Seja $k = \max\{2, k_0\}$ então

$$|F_N(\theta)| \leq \frac{1}{\left(1-\frac{N_0}{N}\right)^{m+1}} \leq k, \;\; N \geq N_0+1, \;\; \theta \in [0, 2\pi].$$

Como k é integrável em $[0, 2\pi]$, de (**??**) e do Teorema da Convergência Dominada temos que

$$\lim_{N\to\infty} \int_0^{2\pi} F_N(\theta)\,\mathrm{d}\theta = \begin{cases} 0, & \text{se} \;\; k = 0, 1, \ldots, m-1, \\ 2\pi i, & \text{se} \;\; k = m. \end{cases}$$

De (**??**) segue então

$$\sum_{j=0}^{m} A_j = \begin{cases} 0, & \text{se} \;\; k = 0, 1, \ldots, m-1, \\ 1, & \text{se} \;\; k = m. \end{cases}$$

Portanto, como os $a_j's$ são unicamente determinados, concluímos que

$$a_j = \prod_{k=0, k\neq j}^{m} (\lambda_j - \lambda_k)^{-1}.$$

■

Combinando os dois lemas anteriores obtemos o seguinte resultado, que conclui a demonstração do teorema **??**.

Lema 4.5.4 *Seja $P(\partial)$ um operador não identicamente nulo de ordem m. Se $\eta \in \mathbb{R}^n$ com $p_m(\eta) \neq 0, \lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_m$ são números reais dois a dois distintos e*

$$a_j = \prod_{k=0, k\neq j}^{m} (\lambda_j - \lambda_k)^{-1}, j = 0, 1, \ldots, m,$$

então

$$E = \frac{1}{\overline{p_m(2\eta)}} \sum_{j=0}^{m} a_j e^{\lambda_j \eta x} \mathscr{F}^{-1}\left(\frac{\overline{p(i\xi + \lambda_j\eta)}}{p(i\xi + \lambda_j\eta)}\right)$$

é uma solução fundamental de $P(\partial)$, ou seja, $P(\partial)E = \delta$.

Demonstração. Como P não é identicamente nulo, observamos primeiramente que para $\lambda \in \mathbb{R}$ fixo, pelo teorema **??** temos que $N = \{\xi \in \mathbb{R}^n; p(i\xi + \lambda\eta) = 0\}$ é um conjunto de medida nula. Defina $S : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ por

$$S(\xi) = \frac{\overline{p(i\xi + \lambda_j\eta)}}{p(i\xi + \lambda_j\eta)}, \;\; \xi \in \mathbb{R}^n - N$$

e $S(\xi) = 0, \xi \in N$.

Afirmação 1: $S \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$.

De fato,

$$\sup_{\mathbb{R}^n - N}\left|\frac{\overline{p(i\xi+\lambda\eta)}}{p(i\xi+\lambda\eta)}\right| = \sup_{\mathbb{R}^n - N}\frac{|\overline{p(i\xi+\lambda\eta)}|}{|p(i\xi+\lambda\eta)|} = 1 < \infty.$$

Então $S \in L^\infty(\mathbb{R}^n) \subset \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$, provando a Afirmação 1.

Note que p_m é um polinômio homogêneo de grau m, logo, $p_m(2\eta) = 2^m p_m(\eta) \neq 0$. Assim, E está bem definida.

Afirmação 2: Se $\zeta \in \mathbb{C}^n$ então $P(\partial)(e^{\zeta x}\mathscr{F}^{-1}S) = e^{\zeta x}\mathscr{F}^{-1}(p(i\xi+\zeta)S)$.

De fato, pelo lema **??** (i) e (ii) segue que

$$P(\partial)(e^{\zeta x}\mathscr{F}^{-1}S) = e^{\zeta x}P(\partial+\zeta)\mathscr{F}^{-1}S = e^{\zeta x}\mathscr{F}^{-1}(p(i\xi+\zeta)S),$$

o que demonstra a afirmação 2.

Assim, pelas afirmações 1 e 2 segue que

$$P(\partial)\left(e^{\lambda\eta x}\mathscr{F}^{-1}\left(\frac{\overline{p(i\xi+\lambda\eta)}}{p(i\xi+\lambda_j\eta)}\right)\right) = e^{\lambda\eta x}\mathscr{F}^{-1}\left(p(i\xi+\lambda\eta)\frac{\overline{p(i\xi+\lambda\eta)}}{p(i\xi+\lambda\eta)}\right) =$$

$= e^{\lambda\eta x}\mathscr{F}^{-1}(\overline{p(i\xi+\lambda\eta)})$.

Por outro lado,

$$\mathscr{F}^{-1}(\overline{p(i\xi+\lambda\eta)}) = \mathscr{F}^{-1}(\overline{p}(-i\xi+\lambda\eta)) = \overline{P}(-\partial+\lambda\eta)\delta,$$

a última igualdade decorre do lema **??** (iii). Com isso e novamente utilizando o lema **??**(i),

$$P(\partial)\left(e^{\lambda\eta x}\mathscr{F}^{-1}\left(\frac{\overline{p(i\xi+\lambda\eta)}}{p(i\xi+\lambda_j\eta)}\right)\right) = e^{\lambda\eta x}\overline{P}(-\partial+\lambda\eta)\delta = \overline{P}(-\partial+2\lambda\eta)(e^{\lambda\eta x}\delta) = \overline{P}(-\partial+2\lambda\eta)\delta$$

observe que $e^{\lambda\eta x}\delta = \delta$.

Além disso,

$$\overline{P}(-\partial+2\lambda\eta)\delta = \sum_{|\alpha|\le m}\overline{a_\alpha}(-\partial+2\lambda\eta)^\alpha\delta = \sum_{|\alpha|\le m}\overline{a_\alpha}\sum_{0\le\beta\le\alpha}\binom{\alpha}{\beta}(2\lambda\eta)^\beta(-\partial)^{\alpha-\beta}\delta =$$

$$= \sum_{|\alpha|\le m}\overline{a_\alpha}\sum_{0\le\beta\le\alpha}\binom{\alpha}{\beta}\lambda^{|\beta|}(2\eta)^\beta(-\partial)^{\alpha-\beta}\delta = \sum_{|\alpha|=m}\overline{a_\alpha}\sum_{0\le\beta\le\alpha}\binom{\alpha}{\beta}\lambda^{|\beta|}(2\eta)^\beta(-\partial)^{\alpha-\beta}\delta +$$

$$+ \sum_{|\alpha|<m}\overline{a_\alpha}\sum_{0\le\beta\le\alpha}\binom{\alpha}{\beta}\lambda^{|\beta|}(2\eta)^\beta(-\partial)^{\alpha-\beta}\delta =$$

$$\sum_{|\alpha|=m}\overline{a_\alpha}\left(\lambda^m(2\eta)^\alpha\delta + \sum_{0\le\beta\le\alpha}\binom{\alpha}{\beta}\lambda^{|\beta|}(2\eta)^\beta(-\partial)^{\alpha-\beta}\delta\right) +$$

$$+ \sum_{|\alpha|<m}\overline{a_\alpha}\sum_{0\le\beta\le\alpha}\binom{\alpha}{\beta}\lambda^{|\beta|}(2\eta)^\beta(-\partial)^{\alpha-\beta}\delta =$$

$$\lambda^m\overline{p_m(2\eta)}\delta + \sum_{k=0}^{m-1}\lambda^k T_k' + \sum_{k=0}^{m-1}\lambda^k T_k'' = \lambda^m\overline{p_m(2\eta)}\delta + \sum_{k=0}^{m-1}\lambda^k T_k,$$

$T_k = T_k' + T_k''$, onde T_k' e T_k'' são distribuições tais que $S(T_k') \subset \{0\}$ e $S(T_k'') \subset \{0\}$, pois T_k' e T_k'' são multiplicações de funções C^∞ por derivadas de δ.

Daí,

$$P(\partial)\left(e^{\lambda\eta x}\mathscr{F}^{-1}\left(\frac{\overline{p(i\xi+\lambda\eta)}}{p(i\xi+\lambda_j\eta)}\right)\right) = \lambda^m\overline{p_m(2\eta)}\delta + \sum_{k=0}^{m-1}\lambda^k T_k.$$

Assim para cada $\lambda_j \in \mathbb{R}$ temos que

$$\begin{aligned} P(\partial)E &= \frac{1}{\overline{\overline{p_m(2\eta)}}}\sum_{j=0}^{m} a_j\left[\lambda_j^m\overline{p_m(2\eta)}\delta + \sum_{k=0}^{m-1}\lambda_j^k T_k\right] \\ &= \sum_{j=0}^{m} a_j\lambda_j^m\delta + \frac{1}{\overline{\overline{p_m(2\eta)}}}\sum_{j=0}^{m} a_j\sum_{k=0}^{m-1}\lambda_j^k T_k. \end{aligned}$$

Então pelo lema **??**, segue que

$$P(\partial)E = \delta.$$

Ou seja, E é uma solução fundamental de $P(\partial)$. ∎

Conclusão

Neste trabalho estudamos a resolubilidade local de um operador diferencial. E através do Teorema de Malgrange-Ehrenpreis podemos concluir que todo operador diferencial de coeficientes constantes não identicamente nulo é localmente resolúvel.

A Transformada de Fourier foi a principal ferramenta utilizada na demonstração do Teorema de Malgrange-Ehrenpreis e vimos que a dificuldade na construção da solução fundamental de um operador $P(\partial)$ consiste no conjunto de zeros do polinômio $p(i\xi)$ associado a ele. Apresentamos uma prova construtiva na demonstração do teorema, onde garantimos a existência de solução fundamental apresentando sua expressão. Porém, não estudamos a resolubilidade global deste operador.

Assim, esperamos que este trabalho sirva como fonte de consulta e forneça subsídios para trabalhos futuros mais avançados nesta área.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRAFICAS

[1] BARROS NETO, J. **An Introduction to the Theory of Distributions**. Marcel Dekker, New York, 1973.

[2] EHRENPREIS, L. Solutions some problems of division: Part I. Division by a polynomial of derivation. American Journal of Mathematics, vol 76, **4**, 883-903, 1954.

[3] FOLLAND, G. **Introduction to Partial Differential Equations**. Princeton University Press, New Jersey, 1995.

[4] FOLLAND, G. **Real Analysis**. John Wiley and Sons, New York, 1984.

[5] HOUNIE, J. **Teoria Elementar das Distribuições**. IMPA, Rio de Janeiro, 1979.

[6] HÖRMANDER, L. On the division of distributions by polynomials. Arkiv för Matematik, vol 3, **53**, 555-568, 1945

[7] HÖRMANDER, L. **The Analysis of Linear Partial Differential Operators - Vol II**. Springer-Verlag, Berlin, 1983.

[8] LIMA, E. L. **Curso de Análise.** Vol. 2, IMPA, Rio de Janeiro, 2006.

[9] LOJASIEWICZ, S. Sur le probleme de la division. Studia Math, **18**, 87-136, 1959.

[10] MALGRANGE, B. Existence et approximation des solutions des equations aus dérivées partielles et des équations de concolution, Ann. Inst. Fourier (Grenoble), **6**, 271-355, 1995-56.

[11] MUNKRES, J. **Topology, A First Course**. Prentice Hall, Inc. Engrewood, New Jersey, 1975.

[12] RUDIN, W.; **Real and Complex Analysis**. McGraw-Hill, New York, 1970.

[13] TREVES, F. **Basic Linear Partial Differential Equations**. Academic Press, New York, 1975.

[14] WAGNER, P. A New Constructive Proof of the Malgrange-Ehrenpreis Theorem. American Mathematical Monthly, **116**, 457-462, May 2009.

[15] WAGNER, P. On the explicit calculation of fundamental solutions. Journal of Mathematical Analysis and Applications, **297**, 404-418, 2004.