UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA MARIA
CENTRO DE CIÊNCIAS NATURAIS E EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

A FILTRAÇÃO STANDARD DE UMA ÁLGEBRA DE HOPF

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

João Matheus Jury Giraldi

Santa Maria, RS, Brasil
2014

A FILTRAÇÃO STANDARD DE UMA ÁLGEBRA DE HOPF

João Matheus Jury Giraldi

Dissertação apresentada ao curso de Pós-Graduação em Matemática, Área de concentração em Álgebra, da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM, RS), como requisito parcial para a obtenção do grau de
Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Dirceu Bagio

Santa Maria, RS, Brasil
2014

Universidade Federal de Santa Maria
Centro de Ciências Naturais e Exatas
Programa de Pós-Graduação em Matemática

A Comissão Examinadora, abaixo assinada,
aprova a Dissertação de Mestrado

A FILTRAÇÃO STANDARD DE UMA ÁLGEBRA DE HOPF

elaborada por
João Matheus Jury Giraldi

como requisito parcial para a obtenção do grau de
Mestre em Matemática

COMISSÃO EXAMINADORA:

Dirceu Bagio, Dr.
(Presidente/Orientador)

Gastón Andrés García, Dr. (UNLP - Argentina)

Saradia Della Flora, Dra. (UFSM)

João Roberto Lazzarin, Dr. (UFSM) (Suplente)

Santa Maria, 25 de março de 2014.

Agradecimentos

À minha família - mãe Jane (*in memoriam*), mainha e pai - pelo apoio em todos os momentos, por sempre acreditar em mim e por me deixar livre com respeito às minhas escolhas profissionais.

A meu orientador, Dirceu Bagio, por me ensinar quase tudo que sei de álgebra até hoje e me ajudar a trilhar meu caminho tanto pessoal quanto acadêmico desde a graduação. Um agradecimento especial a ele e sua esposa, Elisabeth Bagio, pelas atitudes tomadas que superam a relação aluno/professor em um momento complicado de minha vida pessoal; muito obrigado!

A meu coorientador, Gastón A. García, por supervisionar/orientar praticamente todo este trabalho durante minha estada em Córdoba e à distância na conexão quase sempre ruim Santa Maria/La Plata via *Skype*®.

Ao professor João R. Lazzarin, por estar sempre disponível para conversar/discutir os assuntos mais variados e por ter papel importante na minha formação básica.

À professora Saradia Della Flora por aceitar fazer parte da banca apontando várias correções, sugestões e críticas para o melhoramento deste trabalho.

À professora Daiana Flôres pelo apoio neste trabalho, por tirar várias dúvidas na ausência do professor Dirceu e pela amizade.

Também gostaria de agradecer a todo o grupo de Córdoba pela acolhida durante o os seis meses que estive lá, em especial aos colegas Augusto, Edwin, Javier, Monique e Oscar, e aos professores Agustín, Cristian, Fernando, Iván, Martín, Nicolás e Sonia.

A todos os colegas/amigos de Santa Maria que estiveram presentes nesta etapa, em especial ao Douglas, Fernanda, Geovani, Joice, Ricardo e Simone, companheiros de 1214.

Aos colegas de curso no IMPA André, Germán, Matías e Roberto, e aos amigos que fiz no Rio, por compartilhar excelentes experiências na cidade maravilhosa durante o verão.

À CAPES e à FAPERGS pelo suporte financeiro no decorrer destes dois anos.

Finalmente à minha namorada, Olga, por todo o carinho, companheirismo, incentivo e paciência neste momento final de curso.

RESUMO
Dissertação de Mestrado
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Universidade Federal de Santa Maria

A FILTRAÇÃO STANDARD DE UMA ÁLGEBRA DE HOPF
AUTOR : JOÃO MATHEUS JURY GIRALDI
ORIENTADOR : DIRCEU BAGIO
Data e Local da Defesa: Santa Maria, 25 de março de 2014

Neste trabalho apresentamos o método de lifting [AS2], o qual é utilizado para a classificação de certa classe de álgebras de Hopf. Desde que este método baseia-se na filtração coradical, ele só pode ser utilizado para aquelas que satisfazem a propriedade Chevalley (PC). Resultados relacionados com o cálculo explícito de tal filtração também são explorados. Na parte final, estudamos a filtração standard, que está definida em [AC], e que nos permite estender o método de lifting ao caso não (PC).

Palavras-chave: Álgebras de Hopf, filtração coradical, método de lifting, filtração standard, classificação.

ABSTRACT
Dissertation
Graduate Program in Mathematics
Federal University of Santa Maria

THE STANDARD FILTRATION OF A HOPF ALGEBRA
AUTHOR : JOÃO MATHEUS JURY GIRALDI
ADVISOR : DIRCEU BAGIO
Date and Location of Defense: Santa Maria, March 25^{th}, 2014.

In this work we present the lifting method [AS2], which is used to classify certain class of Hopf algebras. Since this method is based on the coradical filtration, it can be used just for those Hopf algebras satisfying the Chevalley property (CP). Results related to the explicit calculation of such filtration are also explored. Finally, we study the standard filtration, which is defined in [AC], and which allows us to extend the lifting method to the non-(CP) case.

Keywords: Hopf algebras, coradical filtration, lifting method, standard filtration, classification.

Lista de notações e símbolos

- Morfismo significa uma aplicação entre dois objetos que preserva a natureza dos mesmos (observar que estamos utilizando noções categóricas). Por exemplo, morfismo linear significa transformação $\Bbbk$-linear, com $\Bbbk$ um corpo;
- id_A (ou, simplesmente, id) significa a função identidade de A em A;
- $\simeq$ representa um isomorfismo entre dois objetos considerados, geralmente, entre V, $\Bbbk \otimes V$ ou $V \otimes \Bbbk$, com V um espaço vetorial;
- Dados $f \in H^*$ (espaço dual), $h \in H$, então $\langle f, h \rangle$ significa o mesmo que $f(h)$.
- $\binom{n}{p}_q$ denota o número q-combinatório de n por p.

Sumário

Introdução

Dentre os poucos métodos e técnicas que existem com a finalidade de classificar álgebras de Hopf, temos o que ficou conhecido na literatura como o *método de lifting* encontrado em [AS2]. Apesar da relevância deste método, ele pressupõe que as álgebras de Hopf com as quais trabalhamos possuem a *propriedade de Chevalley* (PC), isto é, que seus coradicais sejam subálgebras de Hopf. Assim, a eliminação desta hipótese adicional tornou-se um problema de grande importância na área de classificação de álgebras de Hopf. Uma alternativa para este problema é dada em [AC], a qual é o principal objeto de estudo nesta dissertação.

Em [AC], foram definidos o *coradical de Hopf* e a *filtração standard* que generalizam as estruturas do *coradical* e da *filtração coradical*, respectivamente. A partir destes novos conceitos foi possível demonstrar um novo teorema estrutural (Teorema 3.1.3) análogo ao que dá base ao método de lifting no caso em que as álgebras de Hopf satisfazem (PC). Mais ainda, o Teorema 3.1.3 generaliza o caso (PC). Logo, a presente dissertação tem por objetivo estudar os resultados de [AC] relacionados à resolução do problema acima descrito.

Para tanto, no primeiro capítulo tratamos de todos os conteúdos que julgamos preliminares ao estudo do problema supracitado. São eles: as álgebras de Hopf (no sentido usual), as álgebras de Hopf em categorias trançadas, o produto de Radford-Majid, também conhecido como bosonização, e o produto wedge.

Já o segundo capítulo dividimos em duas seções. Na primeira definimos a filtração coradical e expomos suas propriedades mais conhecidas (e, consequentemente, seu maior "defeito": o fato de ela nem sempre ser uma filtração de álgebras de Hopf). Também vemos a construção da álgebra de Hopf graduada associada a uma álgebra de Hopf filtrada e, assumindo o caso (PC), provamos o teorema estrutural que dá base ao método de lifting.

Por sua vez, a segunda seção tem mais características de um adendo. Nela tratamos de alguns resultados que facilitam o cálculo da filtração coradical.

Por fim, no terceiro capítulo definimos a filtração standard e provamos o novo teorema estrutural [AC, Teor. 1.3]. Também incluímos neste capítulo uma seção sobre os novos rumos de pesquisa que tal teorema gera na área de classificação de álgebras de Hopf de dimensão finita.

Capítulo 1

Conceitos e alguns resultados preliminares

Neste capítulo são introduzidos os elementos básicos que serão utilizados praticamente durante todo o trabalho e que, de certa forma, são independentes do contexto específico em que se trabalha. São eles: as álgebras de Hopf (no sentido usual), as álgebras de Hopf em categorias trançadas, o produto de Radford-Majid, também conhecido como bosonização, e o produto wedge.

1.1 Álgebras de Hopf

Nesta seção, expomos de forma sucinta algumas definições e os resultados mais básicos da teoria de álgebras de Hopf. A seção tem mais o intuito de firmar notação do que trazer algo de novo para o trabalho. Assim, todas as demonstrações desta seção serão omitidas e podem ser vistas, por exemplo, em [DNR, M, S].

Mais ainda, durante todo o trabalho, $\Bbbk$ sempre representará um corpo fixado e as estruturas algébricas aqui apresentadas serão todas sobre este corpo. Algumas definições e resultados poderiam ser tomados de forma mais geral, mas, tendo em vista o desenvolvimento do trabalho, foram tomados desta forma.

Começamos definindo $\Bbbk$-álgebras. Um $\Bbbk$-espaço vetorial A é dito uma $\Bbbk$-*álgebra* se possui uma operação produto $\Bbbk$-bilinear de $A \times A$ em A tal que:

$$x(yz) = (xy)z,$$

para todo $x, y, z \in A$, e ainda existe um elemento $1 \in A$ tal que:

$$x1 = x = 1x,$$

para todo $x \in A$.

Como estamos interessados em *dualizar* a estrutura de $\mathbb{k}$-álgebra, a seguinte definição alternativa (que é equivalente à anterior) é a que nos interessa.

Uma terna (A, m, u), onde A é um $\mathbb{k}$-espaço vetorial e $m : A \otimes A \to A, u : \mathbb{k} \to A$ são morfismos $\mathbb{k}$-lineares, é dita uma $\mathbb{k}$-álgebra se os seguintes diagramas comutam:

$$\begin{tikzcd}
A \otimes A \otimes A \arrow[r, "id_A \otimes m"] \arrow[d, "m \otimes id_A"'] & A \otimes A \arrow[d, "m"] \\
A \otimes A \arrow[r, "m"'] & A
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathbb{k} \otimes A \arrow[r, "u \otimes id_A"] & A \otimes A \arrow[d, "m"] & A \otimes \mathbb{k} \arrow[l, "id_A \otimes u"'] \\
& A \arrow[ul, "\simeq"] \arrow[ur, "\simeq"'] &
\end{tikzcd}$$

Observação 1.1.1 *O morfismo m é conhecido como multiplicação, já o morfismo u é conhecido como unidade. O primeiro diagrama recebe o nome de diagrama da associatividade e o segundo, de diagrama da unidade.*

Antes de prosseguir, vejamos alguns exemplos:

Exemplo 1.1.2

1. *A álgebra de matrizes $\mathcal{M}(n, \mathbb{k})$, com as estruturas naturais.*

2. *A álgebra de polinômios $\mathbb{k}[x_1, x_2, \cdots, x_n]$, com as estruturas naturais.*

3. *A álgebra de palavras $\mathbb{k}\langle x_1, x_2, \cdots, x_n\rangle$. Os elementos desta álgebra são combinações lineares de termos da forma $x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_j}$, com $1 \leq i_k \leq n$ para todo $k = 1, \cdots, j$. A multiplicação é dada por:*

$$(x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_j})(x_{l_1} x_{i_2} \cdots x_{i_k}) = x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_j} x_{l_1} x_{i_2} \cdots x_{i_k}.$$

4. *A álgebra tensorial $T(V)$, onde V é um $\mathbb{k}$-espaço vetorial. Os elementos desta álgebra são combinações lineares de termos da forma $v_1 \otimes v_2 \otimes \cdots \otimes v_i$, com $v_k \in V$ para todo $k = 1, \cdots, i$. A multiplicação é dada por:*

$$(v_1 \otimes v_2 \otimes \cdots \otimes v_i)(\tilde{v}_1 \otimes \tilde{v}_2 \otimes \cdots \otimes \tilde{v}_j) = v_1 \otimes v_2 \otimes \cdots \otimes v_i \otimes \tilde{v}_1 \otimes \tilde{v}_2 \otimes \cdots \otimes \tilde{v}_j.$$

5. *A álgebra de grupo* $\Bbbk G$, *onde* G *é um grupo. Os elementos desta álgebra são da forma* $\sum_{g \in G} \lambda_g g$, *com* $g \in G, \lambda_g \in \Bbbk$ *e* λ_g *igual a zero quase sempre. A multiplicação é dada por:*

$$(\sum_{g\in G} \lambda_g g)(\sum_{h\in G} \tilde{\lambda}_h h) = \sum_{g,h\in G} \lambda_g \tilde{\lambda}_h gh,$$

   ou seja, o produto deriva da operação do grupo.

De forma dual, uma terna (C, Δ, ε), onde C é um $\Bbbk$-espaço vetorial e $\Delta : C \to C \otimes C, \varepsilon : C \to \Bbbk$ são morfismos $\Bbbk$-lineares, é dita uma $\Bbbk$-*coálgebra* se os seguintes diagramas comutam:

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "\Delta"'] & C \otimes C \arrow[d, "id_C \otimes \Delta"] \\ C \otimes C \arrow[r, "\Delta \otimes id_C"'] & C \otimes C \otimes C \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \Bbbk \otimes C & C \otimes C \arrow[l, "\varepsilon \otimes id_C"'] \arrow[r, "id_C \otimes \varepsilon"] & C \otimes \Bbbk \\ & C \arrow[u, "\Delta"] & \arrow[from=1-1, to=2-2, "\simeq"'] \arrow[from=1-3, to=2-2, "\simeq"] \end{tikzcd}$$

Observação 1.1.3 *O morfismo* Δ *é conhecido como comultiplicação, já o morfismo* ε *é conhecido como counidade. O primeiro diagrama recebe o nome de diagrama da coassociatividade e o segundo, de diagrama da counidade.*

Exemplo 1.1.4

1. *A coálgebra de comatrizes* $\mathcal{M}^*(n, \Bbbk)$. *Os elementos desta coálgebra são combinações lineares de termos da forma* E_{ij}, *com* $1 \le i, j \le n$. *A comultiplicação e counidade são dada por:*

$$\Delta(E_{ij}) = \sum_{k=1}^{n} E_{ik} \otimes E_{kj} \text{ e } \varepsilon(E_{ij}) = \delta_{ij},$$

   para todo $1 \le i, j \le n$, *onde* δ_{ij} *representa o delta de Kronecker.*

2. *A coálgebra de grupo* $\Bbbk G$ $(G$ *um grupo*$)$:

$$\Delta(g) = g \otimes g \text{ e } \varepsilon(g) = 1,$$

   para todo $g \in G$.

3. *A coálgebra tensorial* $T(V)$ $(V$ *um* $\Bbbk$*-espaço vetorial*$)$:

$$\Delta(v) = v \otimes 1 + 1 \otimes v \text{ e } \varepsilon(v) = 0,$$

para todo $v \in V$. Observar que somente definimos a comultiplicação e counidade na componente V em $T(V)$. Isto é suficiente porque queremos que Δ e ε sejam morfismos de álgebras (ver Proposição 1.1.6).

Convenções:

1. A partir de agora, vamos nos referir a uma $\Bbbk$-álgebra A (seja em qualquer um dos sentidos acima) somente como: A uma álgebra, onde as estruturas associadas ficam implícitas. Da mesma forma, isso também valerá para as $\Bbbk$-coálgebras C.

2. *Notação de Sweedler.* Se C é uma coálgebra com comultiplicação Δ, então utilizaremos a seguinte variação da notação de Sweedler:

$$\Delta(c) = c_1 \otimes c_2,$$

para todo $c \in C$. Observe que esta não é a notação de Sweedler original, mas a que foi aperfeiçoada por Heyneman. Neste trabalho, sempre que nos referirmos à notação de Sweedler, estaremos nos referindo a esta variante.

A seguinte definição nos traz o conceito de elementos group-like, primitivo e skew-primitivo. Eles possuem um papel muito importante no decorrer deste trabalho.

Definição 1.1.5 *Em uma coálgebra C, um elemento $g \neq 0$ é dito group-like se:*

$$\Delta(g) = g \otimes g,$$

e o conjunto de elementos group-like será denotado por $G(C)$. Já $c \in C$ é dito primitivo se:

$$\Delta(c) = c \otimes 1 + 1 \otimes c,$$

e o conjunto de elementos primitivos será denotado por $P(C)$. Note que estamos admitindo que há o elemento 1 com característica de unidade em C. Por fim, $c \in C$ é dito skew-primitivo se:

$$\Delta(c) = c \otimes g + h \otimes c,$$

com $g, h \in G(C)$. Neste caso, c é dito (g,h)-primitivo e o conjunto de elementos (g,h)-primitivos será denotado por $P_{g,h}(C)$. Observe que $P(C) = P_{1,1}(C)$, supondo que $1 \in G(C)$, e que $\Bbbk\{g - h\}$ está sempre contido em $P_{g,h}(C)$; os elementos desta forma são chamados de skew-primitivos triviais.

Proposição 1.1.6 [S, *Seção* 3.0] *Sejam A, B duas álgebras e C, D duas coálgebras. Então:*

1. *$A \otimes B$ é uma álgebra via:*
   - $m_{A\otimes B} = (m_A \otimes m_B)(id_A \otimes \tau_{B,A} \otimes id_B)$;
   - $u_{A\otimes B} = (u_A \otimes u_B)\phi$.
2. *$C \otimes D$ é uma coálgebra via:*
   - $\Delta_{C\otimes D} = (id_C \otimes \tau_{C,D} \otimes id_D)(\Delta_C \otimes \Delta_D)$;
   - $\varepsilon_{C\otimes D} = \phi^{-1}(\varepsilon_C \otimes \varepsilon_D)$.

onde $\tau_{X,Y} : X \otimes Y \to Y \otimes X$, $\tau(x \otimes y) = y \otimes x$, representa o twist usual entre os espaços vetoriais X e Y, e $\phi : \Bbbk \to \Bbbk \otimes \Bbbk$, $\phi(1) = 1 \otimes 1$, é o isomorfismo canônico.

□

Também temos o seguinte resultado:

Proposição 1.1.7 [M, *Seção* 1.2] *Sejam A uma álgebra de dimensão finita e C uma coálgebra. Então:*

1. *A^* é uma coálgebra via:*
   - $\Delta_{A^*}(f) = f_1 \otimes f_2$, *onde* $\langle f, ab\rangle = \langle f_1, a\rangle\langle f_2, b\rangle$, *para todo* $f \in A^*, a, b \in A$;
   - $\varepsilon_{A^*}(f) = \langle f, 1\rangle$, *para todo* $f \in A^*$.
2. *C^* é uma álgebra via:*
   - $\langle fg, c\rangle = \langle f, c_1\rangle\langle g, c_2\rangle$, *para todo* $f, g \in C^*, c \in C$;
   - $1_{C^*} = \varepsilon$.

□

Antes de definirmos biálgebras, precisamos definir o que são morfismos de álgebras e de coálgebras. Um *morfismo entre duas álgebras* A e B é um morfismo $\Bbbk$-linear f entre os espaços A e B tal que os seguintes diagramas comutam:

$$\begin{tikzcd} A \otimes A \arrow[r, "f\otimes f"] \arrow[d, "m_A"'] & B \otimes B \arrow[d, "m_B"] \\ A \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \Bbbk \arrow[r, "u_A"] \arrow[dr, "u_B"'] & A \arrow[d, "f"] \\ & B \end{tikzcd}$$

ou, de forma equivalente, tal que:

$$f(xy) = f(x)f(y),$$

para todo $x, y \in A$ e $f(1) = 1$.

Dualmente, um *morfismo entre duas coálgebras* C e D é um morfismo $\Bbbk$-linear f entre os espaços C e D tal que os seguintes diagramas comutam:

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\Delta_C"'] & D \arrow[d, "\Delta_D"] \\ C \otimes C \arrow[r, "f \otimes f"'] & D \otimes D \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} C \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "\varepsilon_C"'] & D \arrow[d, "\varepsilon_D"] \\ & \Bbbk \end{tikzcd}$$

Utilizando a notação de Sweedler, podemos escrever:

$$f(c_1) \otimes f(c_2) = f(c)_1 \otimes f(c)_2 \text{ e } \varepsilon f(c) = \varepsilon(c),$$

para todo $c \in C$. Agora temos condições de definir biálgebras.

Definição 1.1.8 *Uma biálgebra H é uma quíntupla $(H, m, u, \Delta, \varepsilon)$ tal que:*

1. *(H, m, u) é uma álgebra;*

2. *(H, Δ, ε) é uma coálgebra;*

3. *Δ, ε são morfismos de álgebras, onde a estrutura de álgebra de $H \otimes H$ é a dada pela Proposição 1.1.6 e a de $\Bbbk$ é a induzida pelo inverso do isomorfismo canônico ϕ (ver Proposição 1.1.6 item 2).*

Mais ainda, se existe um morfismo linear $\mathcal{S} : H \to H$ tal que:

$$m(\mathcal{S} \otimes id_H)\Delta = u\varepsilon = m(id_H \otimes \mathcal{S})\Delta,$$

então H é dita uma álgebra de Hopf e $\mathcal{S}$ é chamada sua antípoda.

Observação 1.1.9 *O item 3 da definição acima poderia ser trocado, de forma equivalente, por: m, u são morfismos de coálgebras, onde a estrutura de coálgebra de $H \otimes H$ é a dada pela Proposição 1.1.6 e a de $\Bbbk$ é a induzida pelo isomorfismo canônico ϕ.*

Exemplo 1.1.10

1. *$H = \Bbbk G$, com G um grupo, é uma biálgebra com as estruturas dadas nos Exemplos 1.1.2 (item 5) e 1.1.4 (item 2). Mais ainda, é uma álgebra de Hopf via:*

$$\mathcal{S}(g) = g^{-1},$$

para todo $g \in G$.

2. *$H = T(V)$, onde V é um $\Bbbk$-espaço vetorial, é uma biálgebra com as estruturas dadas nos Exemplos 1.1.2 (item 4) e 1.1.4 (item 3). Mais ainda, é uma álgebra de Hopf via:*

$$\mathcal{S}(v) = -v,$$

para todo $v \in V$. Novamente, notar que somente definimos a antípoda na componente V em $T(V)$. Isto é suficiente porque queremos que $\mathcal{S}$ seja um antimorfismo de álgebras (ver Proposição 1.1.11 - item 1).

3. *$H = T_q = \Bbbk\langle x, g;\ x^n = 0,\ g^n = 1,\ gx = qxg\rangle$, onde n é um inteiro maior ou igual que 2 e q é uma raiz n-ésima primitiva da unidade ($q \in \Bbbk$), é uma álgebra de Hopf, conhecida como álgebra de Taft. As estruturas de coálgebra e a antípoda são dadas por:*

$$\begin{array}{ll} \Delta(x) = x \otimes 1 + g \otimes x & \qquad \Delta(g) = g \otimes g \\ \varepsilon(x) = 0 & \qquad \varepsilon(g) = 1 \\ \mathcal{S}(x) = -g^{n-1}x & \qquad \mathcal{S}(g) = g^{n-1} \end{array}$$

Terminamos esta seção com uma proposição que reúne alguns resultados de álgebras de Hopf. Eles serão amplamente utilizados durante o trabalho sem qualquer menção prévia.

Proposição 1.1.11 *Sejam H, F álgebras de Hopf. Então,*

1. *[S, Prop. 4.0.1] $\mathcal{S}$ é antimorfismo de álgebras, isto é:*

$$\mathcal{S}(xy) = \mathcal{S}(y)\mathcal{S}(x) \text{ e } \mathcal{S}(1) = 1,$$

para todo $x, y \in H$;

2. $[S, Prop.\ 4.0.1]$ $\mathcal{S}$ *é antimorfismo de coálgebras, isto é:*

$$\mathcal{S}(x_1) \otimes \mathcal{S}(x_2) = \mathcal{S}(x)_2 \otimes \mathcal{S}(x)_1 \ e\ \varepsilon\mathcal{S}(x) = \varepsilon(x),$$

para todo $x \in H$;

3. $[S, Lema\ 4.0.4]$ *Todo morfismo de biálgebras é de álgebras de Hopf, ou seja, se* $f : H \to F$ *é um morfismo de álgebras e de coálgebras, então* $f\mathcal{S} = \mathcal{S}f$;

4. $[DNR, Teor.\ 7.1.7]$ *Se* H *tem dimensão finita, então sua antípoda é bijetiva e possui ordem finita;*

5. $[DNR, Prop.\ 1.4.14]$ *O conjunto de elementos group-like* $G(H)$ *é linearmente independente;*

6. $[DNR, Teor.\ 7.2.9]$ (*Teorema de Nichols-Zoeller*) *Se* H *tem dimensão finita e* F *é uma subálgebra de Hopf de* H, *então* $\dim F$ *divide* $\dim H$.

□

1.2 Álgebras de Hopf em categorias trançadas

As noções de álgebra, coálgebra, biálgebra e álgebra de Hopf podem ser generalizadas a determinadas categorias, denominadas categorias trançadas. Nosso intuito nesta seção é apresentar tais noções. Para tanto, as referência principais são [Ang, K, Mac] e iniciamos relembrando alguns conceitos e resultados da teoria de categorias.

Dada uma categoria $\mathcal{C}$, utilizamos a notação $Obj(\mathcal{C})$ para representar a classe de objetos de $\mathcal{C}$ e dados $X, Y \in Obj(\mathcal{C})$, $Mor(X, Y)$ denota o conjunto de morfismos entre X e Y. Por sua vez,

$$Mor(\mathcal{C}) = \bigcup_{X,Y \in Obj(\mathcal{C})} Mor(X, Y).$$

Sejam $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ duas categorias e F, G dois funtores entre $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$. Uma *transformação natural* η de F para G é uma aplicação que a cada objeto X de $\mathcal{C}$ associa um morfismo $\eta_X : F(X) \to G(X)$ em $\mathcal{D}$, e tal que para todo morfismo $f : X \to Y$ em $\mathcal{C}$, temos que o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{tikzcd} F(X) \arrow[r, "F(f)"] \arrow[d, "\eta_X"'] & F(Y) \arrow[d, "\eta_Y"] \\ G(X) \arrow[r, "G(f)"'] & G(Y) \end{tikzcd}$$

Um morfismo $f : X \to Y$ em $\mathcal{C}$ para o qual existe um morfismo $g : Y \to X$ em $\mathcal{C}$ tal que $fg = 1_Y$ e $gf = 1_X$ é chamado um *isomorfismo*. Se para cada objeto X em $\mathcal{C}$, o morfismo η_X acima é um isomorfismo dizemos que a transformação natural η é um *isomorfismo natural* e que os funtores F e G são *naturalmente equivalentes*.

Uma *categoria monoidal* é uma coleção $(\mathcal{C}, \otimes, \alpha, \mathbb{I}, l, r)$ tal que:

- $\mathcal{C}$ é uma categoria;
- $\otimes : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ é um funtor, conhecido como *produto tensorial*;
- $\mathbb{I}$ é um objeto de $\mathcal{C}$, usualmente chamado de unidade (ou identidade);
- $\alpha : F \to G$, $l : L \to id_{\mathcal{C}}$, $r : R \to id_{\mathcal{C}}$ são isomorfismos naturais, onde $id_{\mathcal{C}}$ representa o funtor identidade em $\mathcal{C}$ e:

$$\begin{aligned}
F : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \times \mathcal{C} &\longrightarrow \mathcal{C} && , F = \otimes\,(\otimes, id_{\mathcal{C}}) \\
(V, W, U) &\longmapsto (V \otimes W) \otimes U && \\
G : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \times \mathcal{C} &\longrightarrow \mathcal{C} && , G = \otimes\,(id_{\mathcal{C}}, \otimes) \\
(V, W, U) &\longmapsto V \otimes (W \otimes U) && \\
L : \mathcal{C} &\longrightarrow \mathcal{C} && , L = _ \otimes \mathbb{I} \\
V &\longmapsto V \otimes \mathbb{I} && \\
R : \mathcal{C} &\longrightarrow \mathcal{C} && , R = \mathbb{I} \otimes _ \\
V &\longmapsto \mathbb{I} \otimes V &&
\end{aligned}$$

- E os seguintes diagramas comutam para quaisquer $V, W, U, X \in Obj(\mathcal{C})$:

$$\begin{tikzcd}
((V \otimes W) \otimes U) \otimes X \arrow[rr, "\alpha_{V,W,U} \otimes id_X"] \arrow[d, "\alpha_{V \otimes W, U, X}"'] & & (V \otimes (W \otimes U)) \otimes X \arrow[d, "\alpha_{V, W \otimes U, X}"] \\
(V \otimes W) \otimes (U \otimes X) \arrow[dr, "\alpha_{V,W,U \otimes X}"'] & & V \otimes ((W \otimes U) \otimes X) \arrow[dl, "id_V \otimes \alpha_{W,U,X}"] \\
& V \otimes (W \otimes (U \otimes X)) &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
V \otimes W \arrow[rr, "id_V \otimes r_W"] \arrow[dr, "l_V \otimes id_W"'] & & V \otimes (\mathbb{I} \otimes W) \\
& (V \otimes \mathbb{I}) \otimes W \arrow[ur, "\alpha_{V,\mathbb{I},W}"'] &
\end{tikzcd}$$

Observação 1.2.1 *Os diagramas acima são conhecidos como os diagramas do pentágono e do triângulo, respectivamente.*

Agora que já sabemos o que é uma categoria monoidal, podemos definir álgebras em tais categorias. Dada $\mathcal{C}$ uma categoria monoidal, uma *álgebra em* $\mathcal{C}$ é uma terna (A, m, u), na qual $A \in Obj(\mathcal{C})$ e $m : A \otimes A \to A, u : \mathbb{I} \to A \in Mor(\mathcal{C})$ tais que valem os diagramas de associatividade e unidade:

$$\begin{tikzcd}
(A \otimes A) \otimes A \arrow[r, "\alpha_{A,A,A}"] \arrow[d, "m \otimes id_A"'] & A \otimes (A \otimes A) \arrow[r, "id_A \otimes m"] & A \otimes A \arrow[d, "m"] \\
A \otimes A \arrow[rr, "m"'] & & A
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathbb{I} \otimes A \arrow[r, "u \otimes id_A"] & A \otimes A \arrow[d, "m"] & A \otimes \mathbb{I} \arrow[l, "id_A \otimes u"'] \\
& A \arrow[ul, "r_A"] \arrow[ur, "l_A"'] &
\end{tikzcd}$$

De forma dual, uma *coálgebra em* $\mathcal{C}$ é uma terna (C, Δ, ε), na qual $C \in Obj(\mathcal{C})$ e $\Delta : C \to C \otimes C, \varepsilon : C \to \mathbb{I} \in Mor(\mathcal{C})$ tais que valem os diagramas de coassociatividade e counidade:

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[rr, "\Delta"] \arrow[d, "\Delta"'] & & C \otimes C \arrow[d, "id_C \otimes \Delta"] \\
C \otimes C \arrow[r, "\Delta \otimes id_C"'] & (C \otimes C) \otimes C \arrow[r, "\alpha_{C,C,C}"'] & C \otimes (C \otimes C)
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathbb{I} \otimes C \arrow[dr, "r_C^{-1}"'] & C \otimes C \arrow[l, "\varepsilon \otimes id_C"'] \arrow[r, "id_C \otimes \varepsilon"] & C \otimes \mathbb{I} \arrow[dl, "l_C^{-1}"] \\
& C \arrow[u, "\Delta"'] &
\end{tikzcd}$$

Entretanto, para definirmos uma biálgebra em $\mathcal{C}$, precisamos que dada uma álgebra A em $\mathcal{C}$, seja possível dar uma estrutura de álgebra a $A \otimes A$ em $\mathcal{C}$. No caso de álgebras (no sentido usual), fazemos isso através do twist τ. Para o caso geral, necessitamos trabalhar em categorias trançadas.

Definição 1.2.2 *Uma coleção* $(\mathcal{C}, \otimes, \alpha, \mathbb{I}, l, r, c)$ *é dita uma categoria trançada se:*

1. $(\mathcal{C}, \otimes, \alpha, \mathbb{I}, l, r)$ *é uma categoria monoidal;*

2. $c : \otimes \to \otimes\tau$ *é um isomorfismo natural usualmente denominado de trança, onde* τ *é o funtor twist:*

$$\begin{aligned} \tau : \mathcal{C} \times \mathcal{C} &\longrightarrow \mathcal{C} \times \mathcal{C} \\ (V, W) &\longmapsto (W, V) \end{aligned}$$

3. *Os seguintes diagramas comutam para quaisquer* $V, W, U \in Obj(\mathcal{C})$*:*

$$\begin{tikzcd}
& V \otimes (W \otimes U) \arrow[r, "c_{V,W\otimes U}"] & (W \otimes U) \otimes V \arrow[dr, "\alpha_{W,U,V}"] & \\
(V \otimes W) \otimes U \arrow[ur, "\alpha_{V,W,U}"] \arrow[dr, "c_{V,W}\otimes id_U"'] & & & W \otimes (U \otimes V) \\
& (W \otimes V) \otimes U \arrow[r, "\alpha_{W,V,U}"'] & W \otimes (V \otimes U) \arrow[ur, "id_W \otimes c_{V,U}"'] &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
& (V \otimes W) \otimes U \arrow[r, "c_{V\otimes W,U}"] & U \otimes (V \otimes W) \arrow[dr, "\alpha^{-1}_{U,V,W}"] & \\
V \otimes (W \otimes U) \arrow[ur, "\alpha^{-1}_{V,W,U}"] \arrow[dr, "id_V \otimes c_{W,U}"'] & & & (U \otimes V) \otimes W \\
& V \otimes (U \otimes W) \arrow[r, "\alpha^{-1}_{V,U,W}"'] & (V \otimes U) \otimes W \arrow[ur, "c_{V,U} \otimes id_W"'] &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
V \otimes \mathbb{I} \arrow[rr, "c_{V,\mathbb{I}}"] & & \mathbb{I} \otimes V \\
& V \arrow[ul, "l_V"] \arrow[ur, "r_V"'] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathbb{I} \otimes V \arrow[rr, "c_{\mathbb{I},V}"] & & V \otimes \mathbb{I} \\
& V \arrow[ul, "r_V"] \arrow[ur, "l_V"'] &
\end{tikzcd}$$

Observação 1.2.3 *Esses diagramas são conhecidos, respectivamente, como os diagramas do hexágono e os diagramas do triângulo para tranças.*

Dadas $\mathcal{C}$ uma categoria trançada e A, B álgebras em $\mathcal{C}$, podemos definir:

$$m_{A\otimes B} = (m_A \otimes m_B)(id_A \otimes c_{B,A} \otimes id_B) : A \otimes B \otimes A \otimes B \longrightarrow A \otimes B$$
$$u_{A\otimes B} = (u_A \otimes u_B)r_{\mathbb{I}} : \mathbb{I} \longrightarrow A \otimes B$$

onde, por simplicidade, omitimos os isomorfismos naturais que associam os produtos tensoriais. Com estes dois morfismos, provamos que:

Proposição 1.2.4 *$(A \otimes B, m_{A\otimes B}, u_{A\otimes B})$ é uma álgebra em $\mathcal{C}$.*

Dem.: Por um lado temos:

$$\begin{aligned}
m_{A\otimes B}(m_{A\otimes B} \otimes id_{A\otimes B}) = \ & (m_A \otimes m_B)(id_A \otimes c_{B,A} \otimes id_B)(m_A \otimes m_B \otimes id_{A\otimes B}) \\
& (id_A \otimes c_{B,A} \otimes id_B \otimes id_{A\otimes B}) \\
= \ & (m_A \otimes m_B)(id_A \otimes c_{B,A} \otimes id_B)(m_A \otimes m_B \otimes id_A \otimes id_B) \\
& (id_A \otimes c_{B,A} \otimes id_B \otimes id_A \otimes id_B) \\
\overset{(*_1)}{=} \ & (m_A \otimes m_B)(id_A \otimes id_A \otimes m_B \otimes id_B)(m_A \otimes c_{B\otimes B,A} \otimes id_B) \\
& (id_A \otimes c_{B,A} \otimes id_B \otimes id_A \otimes id_B) \\
= \ & (m_A \otimes m_B)(m_A \otimes id_A \otimes m_B \otimes id_B) \\
& (id_{A\otimes A} \otimes c_{B\otimes B,A} \otimes id_B)(id_A \otimes c_{B,A} \otimes id_B \otimes id_A \otimes id_B) \\
\overset{(*_2)}{=} \ & (m_A \otimes m_B)(id_A \otimes m_A \otimes id_B \otimes m_B) \\
& (id_{A\otimes A} \otimes c_{B\otimes B,A} \otimes id_B)(id_A \otimes c_{B,A} \otimes id_B \otimes id_A \otimes id_B) \\
\overset{(*_3)}{=} \ & (m_A \otimes m_B)(id_A \otimes m_A \otimes id_B \otimes m_B) \\
& (id_{A\otimes A} \otimes c_{B,A} \otimes id_{B\otimes B})(id_A \otimes id_A \otimes id_B \otimes c_{B,A} \otimes id_B) \\
& (id_A \otimes c_{B,A} \otimes id_B \otimes id_A \otimes id_B) \\
= \ & (m_A \otimes m_B)(id_A \otimes m_A \otimes id_B \otimes m_B) \\
& (id_{A\otimes A} \otimes c_{B,A} \otimes id_{B\otimes B})(id_A \otimes c_{B,A} \otimes c_{B,A} \otimes id_B),
\end{aligned}$$

onde $(*_1)$ vale pois c é isomorfismo natural, ou seja, porque o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{tikzcd}
B \otimes B \otimes A \arrow[r, "m_B \otimes id_A"] \arrow[d, "c_{B\otimes B,A}"'] & B \otimes A \arrow[d, "c_{B,A}"] \\
A \otimes B \otimes B \arrow[r, "id_A \otimes m_B"'] & A \otimes B
\end{tikzcd}$$

e $(*_2)$ vale pela associatividade de A e B, e $(*_3)$ vale pelo 2º diagrama do hexágono. Por outro lado,

$$\begin{aligned}
m_{A\otimes B}(id_{A\otimes B}\otimes m_{A\otimes B}) = \;& (m_A\otimes m_B)(id_A\otimes c_{B,A}\otimes id_B)(id_A\otimes id_B\otimes m_A\otimes m_B)\\
& (id_A\otimes id_B\otimes id_A\otimes c_{B,A}\otimes id_B)\\
\overset{(*_1)}{=}\;& (m_A\otimes m_B)(id_A\otimes m_A\otimes id_B\otimes id_B)(id_A\otimes c_{B,A\otimes A}\otimes m_B)\\
& (id_A\otimes id_B\otimes id_A\otimes c_{B,A}\otimes id_B)\\
=\;& (m_A\otimes m_B)(id_A\otimes m_A\otimes id_B\otimes m_B)\\
& (id_A\otimes c_{B,A\otimes A}\otimes id_{B\otimes B})(id_A\otimes id_B\otimes id_A\otimes c_{B,A}\otimes id_B)\\
\overset{(*_2)}{=}\;& (m_A\otimes m_B)(id_A\otimes m_A\otimes id_B\otimes m_B)\\
& (id_{A\otimes A}\otimes c_{B,A}\otimes id_{B\otimes B})(id_A\otimes c_{B,A}\otimes id_A\otimes id_B\otimes id_B)\\
& (id_A\otimes id_B\otimes id_A\otimes c_{B,A}\otimes id_B)\\
=\;& (m_A\otimes m_B)(id_A\otimes m_A\otimes id_B\otimes m_B)\\
& (id_{A\otimes A}\otimes c_{B,A}\otimes id_{B\otimes B})(id_A\otimes c_{B,A}\otimes c_{B,A}\otimes id_B),
\end{aligned}$$

onde $(*_1)$ vale novamente por c ser isomorfismo natural:

$$\begin{tikzcd}
B\otimes A\otimes A \arrow[r, "id_B\otimes m_A"] \arrow[d, "c_{B,A\otimes A}"'] & B\otimes A \arrow[d, "c_{B,A}"] \\
A\otimes A\otimes B \arrow[r, "m_A\otimes id_B"'] & A\otimes B
\end{tikzcd}$$

e $(*_2)$ vale pelo 1º diagrama do hexágono. Logo, vale a associatividade. Agora a unidade:

$$\begin{aligned}
m_{A\otimes B}(u_{A\otimes B}\otimes id_{A\otimes B})r_{A\otimes B} = \;& (m_A\otimes m_B)(id_A\otimes c_{B,A}\otimes id_B)(u_A\otimes u_B\otimes id_A\otimes id_B)\\
& (r_{\mathbb{I}}\otimes id_A\otimes id_B)r_{A\otimes B}\\
\overset{(*_1)}{=}\;& (m_A\otimes m_B)(id_A\otimes id_A\otimes u_B\otimes id_B)(u_A\otimes c_{\mathbb{I},A}\otimes id_B)\\
& (r_{\mathbb{I}}\otimes id_A\otimes id_B)r_{A\otimes B}\\
=\;& (m_A\otimes m_B)(u_A\otimes id_A\otimes u_B\otimes id_B)(id_{\mathbb{I}}\otimes c_{\mathbb{I},A}\otimes id_B)\\
& (r_{\mathbb{I}}\otimes id_A\otimes id_B)r_{A\otimes B}\\
\overset{(*_2)}{=}\;& (r_A^{-1}\otimes r_B^{-1})(id_{\mathbb{I}}\otimes c_{\mathbb{I},A}\otimes id_B)(r_{\mathbb{I}}\otimes id_A\otimes id_B)r_{A\otimes B}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\overset{(*_3)}{=} (r_A^{-1} \otimes r_B^{-1})(id_{\mathbb{I}} \otimes l_A \otimes id_B)(id_{\mathbb{I}} \otimes r_A^{-1} \otimes id_B)(r_{\mathbb{I}} \otimes id_A \otimes id_B)r_{A\otimes B} \\
&\overset{(*_4)}{=} (r_A^{-1} \otimes r_B^{-1})(id_{\mathbb{I}} \otimes id_A \otimes r_B)(id_{\mathbb{I}} \otimes r_A^{-1} \otimes id_B)(r_{\mathbb{I}} \otimes id_A \otimes id_B)r_{A\otimes B} \\
&= (r_A^{-1} \otimes id_B)(id_{\mathbb{I}} \otimes r_A^{-1} \otimes id_B)(r_{\mathbb{I}} \otimes id_A \otimes id_B)r_{A\otimes B} \\
&\overset{(*_5)}{=} (r_A^{-1} \otimes id_B)(l_{\mathbb{I}}^{-1} \otimes id_A \otimes id_B)(r_{\mathbb{I}} \otimes id_A \otimes id_B)r_{A\otimes B} \\
&\overset{(*_6)}{=} (r_A^{-1} \otimes id_B)r_{A\otimes B} \overset{(*_7)}{=} id_{A\otimes B},
\end{aligned}
$$

onde $(*_1)$ vale por c ser isomorfismo natural:

$$
\begin{tikzcd}
\mathbb{I} \otimes A \arrow[r, "u_B \otimes id_A"] \arrow[d, "c_{\mathbb{I},A}"'] & B \otimes A \arrow[d, "c_{B,A}"] \\
A \otimes \mathbb{I} \arrow[r, "id_A \otimes u_B"'] & A \otimes B
\end{tikzcd}
$$

Já $(*_2)$ vale pelos diagramas da unidade de A e B e $(*_3)$ vale pelo 2º diagrama do triângulo das tranças. As passagens $(*_4)$ e $(*_5)$ valem pelo diagrama do triângulo, $(*_6)$ vale pois $l_{\mathbb{I}} = r_{\mathbb{I}}$ e $(*_7)$ é uma das *Coerências de Mac Lane* para categorias monoidais, que pode ser vista em [Mac, pág. 163]. Assim, vale um dos lados do diagrama da unidade e o outro lado sai de forma análoga. E, portanto, segue que $A \otimes B$ é uma álgebra em $\mathcal{C}$.

$\square$

Também, dadas duas coálgebras C, D em um categoria trançada $\mathcal{C}$, podemos definir:

$$
\Delta_{C\otimes D} = (id_C \otimes c_{C,D} \otimes id_D)(\Delta_C \otimes \Delta_D) : C \otimes D \longrightarrow C \otimes D \otimes C \otimes D
$$
$$
\varepsilon_{C\otimes D} = r_{\mathbb{I}}^{-1}(\varepsilon_C \otimes \varepsilon_D) : C \otimes D \longrightarrow \mathbb{I}
$$

e resulta que $C \otimes D$ é uma coálgebra nesta categoria.

Agora, note que para definir biálgebras, precisávamos que Δ e ε fossem morfismos de álgebras. Logo, precisamos definir o que é um morfismo de álgebras em uma categoria monoidal $\mathcal{C}$. Dadas duas álgebras A, B em $\mathcal{C}$, $f : A \to B \in Mor(\mathcal{C})$ é dito um *morfismo de álgebras em* $\mathcal{C}$ se os seguintes diagramas comutam:

$$
\begin{tikzcd}
A \otimes A \arrow[r, "f \otimes f"] \arrow[d, "m_A"'] & B \otimes B \arrow[d, "m_B"] \\
A \arrow[r, "f"'] & B
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathbb{I} \arrow[r, "u_A"] \arrow[dr, "u_B"'] & A \arrow[d, "f"] \\
& B
\end{tikzcd}
$$

Morfismos de cóalgebras em $\mathcal{C}$ são definidos de forma dual.

A partir destas construções, podemos definir biálgebras e álgebras de Hopf em categorias trançadas.

Definição 1.2.5 *Seja $\mathcal{C}$ uma categoria trançada. Uma biálgebra H em $\mathcal{C}$ é uma quíntupla $(H, m, u, \Delta, \varepsilon)$ tal que:*

1. *(H, m, u) é uma álgebra em $\mathcal{C}$;*

2. *(H, Δ, ε) é uma coálgebra em $\mathcal{C}$;*

3. *Δ, ε são morfismos de álgebras em $\mathcal{C}$, onde a estrutura de álgebra de $H \otimes H$ em $\mathcal{C}$ é a construída anteriormente e a de $\mathbb{I}$ é a induzida por $r_{\mathbb{I}}^{-1}$.*

Mais ainda, se existe $\mathcal{S} : H \to H \in Mor(\mathcal{C})$ tal que:

$$m(\mathcal{S} \otimes id_H)\Delta = u\varepsilon = m(id_H \otimes \mathcal{S})\Delta,$$

então H é dita uma álgebra de Hopf em $\mathcal{C}$ e $\mathcal{S}$ é chamada sua antípoda.

Observação 1.2.6

1. *Assim como no caso usual, poderíamos trocar de forma equivalente o item 3 da definição acima por: m, u são morfismos de coálgebras em $\mathcal{C}$, onde a estrutura de coálgebra de $H \otimes H$ em $\mathcal{C}$ é a construída anteriormente e a de $\mathbb{I}$ é a induzida por $r_{\mathbb{I}}$.*

2. *É comum nos referirmos a uma álgebra de Hopf em uma categoria trançada $\mathcal{C}$ somente como uma álgebra de Hopf trançada quando a categoria já está implícita. O mesmo se passa para álgebras, coálgebras e biálgebras.*

3. *A notação de Sweedler para a comultiplicação de uma coálgebra trançada, em geral, não é a mesma de uma coálgebra usual. Se C é uma coálgebra trançada e Δ é sua comultiplicação, então, para todo $c \in C$:*

$$\Delta(c) = c^1 \otimes c^2.$$

Exemplo 1.2.7 *Consideremos ${}_{\Bbbk}Vec$ a categoria dos espaços vetoriais sobre o corpo $\Bbbk$. Esta categoria é monoidal com o produto tensorial usual e $\mathbb{I} = \Bbbk$. Mais ainda, é trançada com a trança dada pelo twist.*

Observe que H é uma álgebra de Hopf usual se, e somente se, é uma álgebra de Hopf em ${}_{\Bbbk}Vec$.

Outro exemplo, que é bastante conhecido e que será muito utilizado durante este trabalho, é a categoria dos módulos de Yetter-Drinfel'd.

Exemplo 1.2.8 *Seja H uma álgebra de Hopf. Um $\Bbbk$-espaço vetorial M é dito um H-módulo de Yetter-Drinfel'd à esquerda se:*

- *M é um H-módulo à esquerda, isto é, existe uma ação $\Bbbk$-linear:*

$$\begin{aligned} \cdot : H \otimes M &\longrightarrow M \\ h \otimes m &\longmapsto h \cdot m \end{aligned}$$

que satisfaz:

$$h \cdot (g \cdot m) = (hg) \cdot m \text{ e } 1 \cdot m = m,$$

para todo $h, g \in H, m \in M$;

- *M é um H-comódulo à esquerda, isto é, existe uma coação $\Bbbk$-linear:*

$$\begin{aligned} \lambda : M &\longrightarrow H \otimes M \\ m &\longmapsto m_{-1} \otimes m_0 \end{aligned}$$

tal que os seguintes diagramas comutam:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\lambda"] \arrow[d, "\lambda"'] & H \otimes M \arrow[d, "\Delta \otimes id_M"] \\ H \otimes M \arrow[r, "id_H \otimes \lambda"'] & H \otimes H \otimes M \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} M \arrow[r, "\lambda"] & H \otimes M \arrow[d, "\varepsilon \otimes id_M"] \\ & \Bbbk \otimes M \arrow[ul, "\simeq\, =\, r_M^{-1}"] \end{tikzcd}$$

- *E vale a seguinte compatibilidade:*

$$\lambda(h \cdot m) = h_1 m_{-1} \mathcal{S}(h_3) \otimes h_2 \cdot m_0,$$

para todo $h \in H, m \in M$.

Observe que se M, N são módulos de Yetter-Drinfel'd, então $M \otimes N$ é um módulo de Yetter-Drinfel'd via:

$$h \cdot (m \otimes n) = h_1 \cdot m \otimes h_2 \cdot n \text{ e } \lambda(m \otimes n) = m_{-1}n_{-1} \otimes m_0 \otimes n_0,$$

e que $\mathbb{k}$ *também é um módulo de Yetter-Drinfel'd via* $h \cdot 1 = \varepsilon(h)1$ *e* $\lambda(1) = 1 \otimes 1$. *Mais ainda, se* H *tem antípoda bijetiva, então:*

$$\begin{aligned} c_{M,N} : M \otimes N &\to N \otimes M \\ (m \otimes n) &\mapsto m_{-1} \cdot n \otimes m_0 \end{aligned}$$

é uma trança com $c^{-1}_{M,N}(n \otimes m) = m_0 \otimes \mathcal{S}^{-1}(m_{-1}) \cdot n$. *Todos os detalhes podem ser vistos, por exemplo, em* [*R1, pág.* 369].

Logo, se H *tem antípoda bijetiva (em particular, se* H *tem dimensão finita), então a categoria dos módulos de Yetter-Drinfel'd à esquerda sobre* H *é uma categoria trançada, que denotamos por* ${}^H_H\mathcal{YD}$.

Exemplo 1.2.9 *Seja* H *uma álgebra de Hopf com antípoda bijetiva. Então, qualquer espaço vetorial* M *é um* H*-módulo de Yetter-Drinfel'd à esquerda via:*

$$h \cdot m = \varepsilon(h)m \text{ e } \lambda(m) = 1 \otimes m,$$

para todo $h \in H, m \in M$. *Mais ainda, se* M *é uma álgebra de Hopf (no sentido usual), então* M *é uma álgebra de Hopf em* ${}^H_H\mathcal{YD}$.

Exemplo 1.2.10 *Tome* $H = \mathbb{k}C_n$, *onde* C_n *representa o grupo cíclico de ordem* n. *Considere* g *um gerador deste grupo. Também seja* M *um espaço vetorial de dimensão* 1, *com base* $\{m\}$.

Vamos dar a M *uma estrutura de* H*-módulo de Yetter-Drinfel'd à esquerda. Do fato de que* M *é* H*-módulo, temos*

$$g \cdot v = \eta v,$$

com $\eta \in \mathbb{k}$. *Mas* $g^n = 1$, *logo* $\eta^n = 1$, *ou seja,* η *deve ser uma raiz* n*-ésima da unidade. Note que de* g *ser gerador de* C_n, *todas as outras propriedades de* H*-módulo são satisfeitas. Do fato de que* M *é* H*-comódulo, temos*

$$\lambda(v) = x \otimes v,$$

com $x \in \mathbb{k}C_n$. *Das propriedades de* H*-comódulo, segue que* $\Delta(x) = x \otimes x$ *e* $\varepsilon(x) = 1$, *o que nos diz que* $x \in G(\mathbb{k}C_n) = C_n$. *Assim, tomamos* $x = g^i$. *Por fim, note que*

$$\lambda(g \cdot v) = \lambda(\eta v) = \eta g^i \otimes v = g^i \otimes \eta v = g g^i g^{-1} \otimes g \cdot v = g_1 v_{-1} \mathcal{S}(g_3) \otimes g_2 \cdot v_0$$

e que isto basta para garantir a compatibilidade em todo o módulo. Portanto, os módulos de Yetter-Drinfel'd sobre $\Bbbk C_n$ de dimensão 1 são da forma acima: atuando por raízes n-ésimas da unidade e coatuando via elementos group-like.

1.3 O produto de Radford-Majid

Sejam A, H duas álgebras de Hopf tais que H tem antípoda bijetiva e existem $\pi : A \to H, \iota : H \to A$ morfismos de álgebras de Hopf tais que $\pi\iota = id_H$.

Nosso intuito nesta seção é construir uma ferramenta que nos permita "decompor" a álgebra de Hopf A em duas partes, sendo uma delas H. Mais precisamente, mostraremos que existe um isomorfismo de álgebras de Hopf entre A e $R \otimes H$, onde R será construído a seguir, assim como a estrutura de Hopf de $R \otimes H$.

Durante a seção, veremos que o conjunto R tomado tem boas propriedades (Proposição 1.3.1), fazendo com que possamos utilizar o produto de Radford-Majid, assunto que também é abordado nesta seção. A referência principal para esta seção é [R1].

Assim, comecemos determinando quem deve ser R. Consideraremos R como sendo o conjunto de elementos de A coinvariantes com respeito a π, isto é,

$$R = A^{co\pi} = \{a \in A : (id \otimes \pi)\Delta(a) = a \otimes 1\}.$$

O conjunto R também é conhecido na literatura como *diagrama*.

Agora que já temos as duas partes seria natural já estabelecermos uma estrutura de álgebra de Hopf ao produto $R \otimes H$ para, então, termos o isomorfismo. Porém, antes de darmos tal estrutura ao produto tensorial, seria natural darmos uma estrutura de álgebra de Hopf a R, já que H tem a sua.

No entanto, usando os morfismos π e ι, somos capazes de equipar R com uma estrutura de H-módulo de Yetter-Drinfel'd. De fato, tomemos como ação a restrição da ação adjunta (à esquerda) de A em R composta com ι, isto é,

$$h \cdot r = \iota(h_1) r \mathcal{S}\iota(h_2),$$

para todo $h \in H, r \in R$, e como coação:

$$\begin{aligned} \lambda : R &\longrightarrow H \otimes R \\ r &\longmapsto \pi(r_1) \otimes r_2 \end{aligned}$$

A função $\cdot$ está bem definida, pois

$$
\begin{aligned}
(id \otimes \pi)\Delta(h \cdot r) = \;& (id \otimes \pi)\Delta(\iota(h_1)r\mathcal{S}\iota(h_2)) \\
=\;& (id \otimes \pi)(\iota(h_1)r_1\mathcal{S}\iota(h_4) \otimes \iota(h_2)r_2\mathcal{S}\iota(h_3)) \\
=\;& \iota(h_1)r_1\mathcal{S}\iota(h_4) \otimes \pi\iota(h_2)\pi(r_2)\pi\mathcal{S}\iota(h_3) \\
\overset{(r\in R)}{=}\;& \iota(h_1)r\mathcal{S}\iota(h_4) \otimes \pi\iota(h_2)\pi\mathcal{S}\iota(h_3) \\
=\;& \iota(h_1)r\mathcal{S}\iota(h_4) \otimes \pi\iota(h_2\mathcal{S}(h_3)) \\
=\;& \iota(h_1)r\mathcal{S}\iota(h_3) \otimes \pi\iota(\varepsilon(h_2)1)) \\
=\;& \iota(h_1)r\mathcal{S}\iota(h_2) \otimes 1 \\
=\;& h \cdot r \otimes 1,
\end{aligned}
$$

para todo $h \in H, r \in R$. Observe também que para quaisquer $g, h \in H, r \in R$,

$$
\begin{aligned}
h \cdot (g \cdot r) = h \cdot (\iota(g_1)r\mathcal{S}\iota(g_2)) &= \iota(h_1)\iota(g_1)r\mathcal{S}\iota(g_2)\mathcal{S}\iota(h_2) \\
&= \iota((hg)_1)r\mathcal{S}\iota((hg)_2) = (hg) \cdot r
\end{aligned}
$$

e $1 \cdot r = \iota(1)r\mathcal{S}\iota(1) = r$. Logo, $\cdot$ é uma ação.

Por sua vez, a função λ também está bem definida. De fato, dado $r \in R$,

$$
\begin{aligned}
(id \otimes id \otimes \pi)(id \otimes \Delta)\lambda(r) &= (id \otimes id \otimes \pi)(id \otimes \Delta)(\pi(r_1) \otimes r_2) \\
&= (id \otimes id \otimes \pi)(\pi(r_1) \otimes r_2 \otimes r_3) \\
&= \pi(r_1) \otimes r_2 \otimes \pi(r_3) \\
&= (\pi \otimes id \otimes id)(r_1 \otimes r_2 \otimes \pi(r_3)) \\
&= (\pi \otimes id \otimes id)(\Delta \otimes id)(r_1 \otimes \pi(r_2)) \\
&= (\pi \otimes id \otimes id)(\Delta \otimes id)(r \otimes 1) \\
&= (\pi \otimes id \otimes id)(r_1 \otimes r_2 \otimes 1) \\
&= \pi(r_1) \otimes r_2 \otimes 1 \\
&= \lambda(r) \otimes 1,
\end{aligned}
$$

o que garante que $\lambda(r) \in H \otimes R$. Mais ainda, para qualquer $r \in R$,

$$
\begin{aligned}
(id \otimes \lambda)\lambda(r) = (id \otimes \lambda)(\pi(r_1) \otimes r_2) &= \pi(r_1) \otimes \pi(r_2) \otimes r_3 = \pi(r_1)_1 \otimes \pi(r_1)_2 \otimes r_2 \\
&= (\Delta \otimes id)(\pi(r_1) \otimes r_2) = (\Delta \otimes id)\lambda(r)
\end{aligned}
$$

e $r_R^{-1}(\varepsilon\otimes id)\lambda(r) = \varepsilon\pi(r_1)r_2 = \varepsilon(r_1)r_2 = r$. Assim, para garantir que $R \in {}^H_H\mathcal{YD}$, só falta ver a compatibilidade:

$$\begin{aligned}
\lambda(h\cdot r) = \lambda(\iota(h_1)r\mathcal{S}\iota(h_2)) &= \pi(\iota(h_1)r_1\mathcal{S}\iota(h_4))\otimes\iota(h_2)r_2\mathcal{S}\iota(h_3)\\
&= h_1\pi(r_1)\mathcal{S}(h_4)\otimes\iota(h_2)r_2\mathcal{S}\iota(h_3) = h_1r_{-1}\mathcal{S}(h_4)\otimes\iota(h_2)r_0\mathcal{S}\iota(h_3)\\
&= h_1r_{-1}\mathcal{S}(h_3)\otimes h_2\cdot r_0,
\end{aligned}$$

para todo $h \in H, r \in R$. Agora, também notemos que R é uma subálgebra de A, pois nitidamente $1 \in R$ e dados $r, q \in R$:

$$(id\otimes\pi)\Delta(rq) = r_1q_1\otimes\pi(r_2q_2) = (r_1\otimes\pi(r_2))(q_1\otimes\pi(q_2)) = (r\otimes 1)(q\otimes 1) = rq\otimes 1,$$

o que nos diz que $rq \in R$. Assim, podemos tomar os morfismos multiplicação e unidade de A e restringir a R e não é difícil ver que as restrições pertencem a $Mor({}^H_H\mathcal{YD})$, ou seja, são morfismos de H-módulos e de H-comódulos. Logo, segue que R é uma álgebra em ${}^H_H\mathcal{YD}$.

Por outro lado, também podemos definir:

$$\varepsilon_R = \varepsilon_A\big|_R \quad \text{e} \quad \begin{aligned}\Delta_R : R &\longrightarrow R\otimes R\\ r &\longmapsto r_1\iota\pi\mathcal{S}(r_2)\otimes r_3\end{aligned}$$

Note que Δ_R está bem definida, pois dado $r \in R$,

$$\begin{aligned}
(id\otimes\pi\otimes id\otimes\pi)(\Delta\otimes\Delta)\Delta_R(r) &= [r_1\iota\pi\mathcal{S}(r_2)]_1\otimes\pi([r_1\iota\pi\mathcal{S}(r_2)]_2)\otimes[r_3]_1\otimes\pi([r_3]_2)\\
&= r_1\iota\pi\mathcal{S}(r_4)\otimes\pi(r_2\iota\pi\mathcal{S}(r_3))\otimes r_5\otimes\pi(r_6)\\
&= r_1\iota\pi\mathcal{S}(r_4)\otimes\pi(r_2)\pi\mathcal{S}(r_3)\otimes r_5\otimes\pi(r_6)\\
&= f(id\otimes id\otimes id\otimes id\otimes id\otimes\pi)\Delta_5(r)\\
&\overset{(*)}{=} f(\Delta_4(r)\otimes 1)\\
&= r_1\iota\pi\mathcal{S}(r_4)\otimes\pi(r_2)\pi\mathcal{S}(r_3)\otimes r_5\otimes 1\\
&= r_1\iota\pi\mathcal{S}(r_4)\otimes\pi(r_2\mathcal{S}(r_3))\otimes r_5\otimes 1\\
&= r_1\iota\pi\mathcal{S}(r_3)\otimes\pi(\varepsilon(r_2)1)\otimes r_4\otimes 1\\
&= r_1\iota\pi\mathcal{S}(r_2)\otimes 1\otimes r_3\otimes 1
\end{aligned}$$

o que implica que $\Delta_R(r) \in R\otimes R$. Aqui usamos que

$$f = [(m\otimes m)(id\otimes[(\tau\otimes id)(id\otimes\tau)(\pi\otimes\pi\mathcal{S}\otimes\iota\pi\mathcal{S})])]\otimes id\otimes id,$$

e a passagem $(*)$ vale pois:

$$
\begin{aligned}
(\underbrace{id\otimes\cdots\otimes id}_{5\ id's}\otimes\pi)\Delta_5(r) &= (\underbrace{id\otimes\cdots\otimes id}_{5\ id's}\otimes\pi)(\Delta\otimes\underbrace{id\otimes\cdots\otimes id}_{4\ id's})\Delta_4(r)\\
&= (\Delta\otimes\underbrace{id\otimes\cdots\otimes id}_{4\ id's})(\underbrace{id\otimes\cdots\otimes id}_{4\ id's}\otimes\pi)\Delta_4(r)\\
&= \cdots\\
&= (\Delta\otimes\underbrace{id\otimes\cdots\otimes id}_{4\ id's})\cdots(\Delta\otimes id)(id\otimes\pi)\Delta(r)\\
&= (\Delta_4\otimes id)(r\otimes 1).
\end{aligned}
$$

Mais ainda, valem os diagramas de coassociatividade e counidade. Com efeito, dado $r\in R:$

$$(id\otimes\Delta_R)\Delta_R(r) = (id\otimes\Delta_R)(r_1\iota\pi\mathcal{S}(r_2)\otimes r_3) = r_1\iota\pi\mathcal{S}(r_2)\otimes r_3\iota\pi\mathcal{S}(r_4)\otimes r_5.$$

Já,

$$
\begin{aligned}
(\Delta_R\otimes id)\Delta_R(r) &= (\Delta_R\otimes id)(r_1\iota\pi\mathcal{S}(r_2)\otimes r_3)\\
&= [r_1\iota\pi\mathcal{S}(r_2)]_1\iota\pi\mathcal{S}([r_1\iota\pi\mathcal{S}(r_2)]_2)\otimes[r_1\iota\pi\mathcal{S}(r_2)]_3\otimes r_3\\
&= r_1\iota\pi\mathcal{S}(r_6)\iota\pi\mathcal{S}[r_2\iota\pi\mathcal{S}(r_5)]\otimes r_3\iota\pi\mathcal{S}(r_4)\otimes r_7\\
&= r_1\iota\pi\mathcal{S}(r_6)\iota\pi\mathcal{S}\iota\pi\mathcal{S}(r_5)\iota\pi\mathcal{S}(r_2)\otimes r_3\iota\pi\mathcal{S}(r_4)\otimes r_7\\
&= r_1\iota\pi\mathcal{S}(r_6)\iota\pi\mathcal{S}^2(r_5)\iota\pi\mathcal{S}(r_2)\otimes r_3\iota\pi\mathcal{S}(r_4)\otimes r_7\\
&= r_1\iota\pi\mathcal{S}(\mathcal{S}(r_5)r_6)\iota\pi\mathcal{S}(r_2)\otimes r_3\iota\pi\mathcal{S}(r_4)\otimes r_7\\
&= r_1\iota\pi\mathcal{S}(\varepsilon(r_5)1)\iota\pi\mathcal{S}(r_2)\otimes r_3\iota\pi\mathcal{S}(r_4)\otimes r_6\\
&= r_1\iota\pi\mathcal{S}(r_2)\otimes r_3\iota\pi\mathcal{S}(r_4)\otimes r_5.
\end{aligned}
$$

Logo, vale o diagrama de coassociatividade. Para o da counidade, temos por um lado,

$$r_R^{-1}(\varepsilon_R\otimes id)\Delta_R(r) = \varepsilon(r_1\iota\pi\mathcal{S}(r_2))r_3 = \varepsilon(r_1)\varepsilon(r_2)r_3 = r,$$

e por outro lado,

$$
\begin{aligned}
l_R^{-1}(id\otimes\varepsilon_R)\Delta_R(r) &= \varepsilon(r_3)r_1\iota\pi\mathcal{S}(r_2) = r_1\iota\pi\mathcal{S}(r_2) = m(id\otimes\iota\mathcal{S})(r_1\otimes\pi(r_2))\\
&= m(id\otimes\iota\mathcal{S})(r\otimes 1) = r.
\end{aligned}
$$

Assim como anteriormente, é fácil ver que ε_R é um morfismo de H-módulos. Vejamos que o é de H-comódulos. Por um lado, $\lambda_{\Bbbk}\varepsilon_R(r) = \varepsilon(r)(1 \otimes 1)$. Por outro,

$$(id \otimes \varepsilon_R)\lambda(r) = \pi(r_1) \otimes \varepsilon(r_2) = \pi(r) \otimes 1.$$

A igualdade segue do fato que:

$$\begin{aligned} r \in R \Longrightarrow r_1 \otimes \pi(r_2) = r \otimes 1 &\Longrightarrow \varepsilon(r_1) \otimes \pi(r_2) = \varepsilon(r) \otimes 1 \\ &\Longrightarrow \qquad 1 \otimes \pi(r) = \varepsilon(r)(1 \otimes 1). \end{aligned}$$

Vejamos que Δ_R também pertence a $Mor({}^H_H\mathcal{YD})$. De fato, dados $h \in H, r \in R$

$$\begin{aligned} h \cdot \Delta_R(r) &= h \cdot (r_1 \iota\pi\mathcal{S}(r_2) \otimes r_3) = h_1 \cdot (r_1 \iota\pi\mathcal{S}(r_2)) \otimes h_2 \cdot r_3 \\ &= \iota(h_1) r_1 \iota\pi\mathcal{S}(r_2)\mathcal{S}\iota(h_2) \otimes \iota(h_3) r_3 \mathcal{S}\iota(h_4) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \Delta_R(h \cdot r) &= \Delta_R(\iota(h_1) r \mathcal{S}\iota(h_2)) \\ &= [\iota(h_1) r \mathcal{S}\iota(h_2)]_1 \iota\pi\mathcal{S}([\iota(h_1) r \mathcal{S}\iota(h_2)]_2) \otimes [\iota(h_1) r \mathcal{S}\iota(h_2)]_3 \\ &= \iota(h_1) r_1 \mathcal{S}\iota(h_6) \iota\pi\mathcal{S}[\iota(h_2) r_2 \mathcal{S}\iota(h_5)] \otimes \iota(h_3) r_3 \mathcal{S}\iota(h_4) \\ &= \iota(h_1) r_1 \mathcal{S}\iota(h_6) \mathcal{S}^2\iota(h_5) \iota\pi\mathcal{S}(r_2)\mathcal{S}\iota(h_2) \otimes \iota(h_3) r_3 \mathcal{S}\iota(h_4) \\ &= \iota(h_1) r_1 \iota\mathcal{S}(\mathcal{S}(h_5) h_6) \iota\pi\mathcal{S}(r_2)\mathcal{S}\iota(h_2) \otimes \iota(h_3) r_3 \mathcal{S}\iota(h_4) \\ &= \iota(h_1) r_1 \iota\mathcal{S}(\varepsilon(h_5)1) \iota\pi\mathcal{S}(r_2)\mathcal{S}\iota(h_2) \otimes \iota(h_3) r_3 \mathcal{S}\iota(h_4) \\ &= \iota(h_1) r_1 \iota\pi\mathcal{S}(r_2)\mathcal{S}\iota(h_2) \otimes \iota(h_3) r_3 \mathcal{S}\iota(h_4). \end{aligned}$$

Assim, Δ_R é morfismo de H-módulos. Para ver que Δ_R é morfismo de H-comódulos, note que

$$(id \otimes \Delta_R)\lambda(r) = (id \otimes \Delta_R)(\pi(r_1) \otimes r_2) = \pi(r_1) \otimes r_2 \iota\pi\mathcal{S}(r_3) \otimes r_4,$$

e

$$\begin{aligned} \lambda_{R\otimes R}\Delta_R(r) &= \lambda_{R\otimes R}(r_1 \iota\pi\mathcal{S}(r_2) \otimes r_3) = [r_1 \iota\pi\mathcal{S}(r_2)]_{-1}(r_3)_{-1} \otimes [r_1 \iota\pi\mathcal{S}(r_2)]_0 \otimes (r_3)_0 \\ &= \pi([r_1 \iota\pi\mathcal{S}(r_2)]_1)\pi((r_3)_1) \otimes [r_1 \iota\pi\mathcal{S}(r_2)]_2 \otimes (r_3)_2 \\ &= \pi(r_1 \iota\pi\mathcal{S}(r_4))\pi(r_5) \otimes r_2 \iota\pi\mathcal{S}(r_3) \otimes r_6 = \pi(r_1)\pi(\mathcal{S}(r_4) r_5) \otimes r_2 \iota\pi\mathcal{S}(r_3) \otimes r_6 \\ &= \pi(r_1)\pi(\varepsilon(r_4)1) \otimes r_2 \iota\pi\mathcal{S}(r_3) \otimes r_5 = \pi(r_1) \otimes r_2 \iota\pi\mathcal{S}(r_3) \otimes r_4. \end{aligned}$$

Logo, temos que R é uma coálgebra em ${}^H_H\mathcal{YD}$. Também vemos que R é uma biálgebra trançada em ${}^H_H\mathcal{YD}$. Com efeito, é imediato que ε_R é morfismo de álgebras em ${}^H_H\mathcal{YD}$. Vejamos que Δ_R também é morfismo de álgebras em ${}^H_H\mathcal{YD}$. Dados $r, s \in R$, temos:

$$\begin{aligned}
\Delta_R(r)\Delta_R(s) &= (r_1\iota\pi\mathcal{S}(r_2) \otimes r_3)(s_1\iota\pi\mathcal{S}(s_2) \otimes s_3) \\
&= r_1\iota\pi\mathcal{S}(r_2)[(r_3)_{-1} \cdot (s_1\iota\pi\mathcal{S}(s_2))] \otimes (r_3)_0 s_3 \\
&= r_1\iota\pi\mathcal{S}(r_2)[\pi(r_3) \cdot (s_1\iota\pi\mathcal{S}(s_2))] \otimes r_4 s_3 \\
&= r_1\iota\pi\mathcal{S}(r_2)\iota\pi(r_3)s_1\iota\pi\mathcal{S}(s_2)\mathcal{S}\iota\pi(r_4) \otimes r_5 s_3 \\
&= r_1\iota\pi(\mathcal{S}(r_2)r_3)s_1\iota\pi\mathcal{S}(s_2)\iota\pi\mathcal{S}(r_4) \otimes r_5 s_3 \\
&= r_1\iota\pi(\varepsilon(r_2)1)s_1\iota\pi\mathcal{S}(s_2)\iota\pi\mathcal{S}(r_3) \otimes r_4 s_3 \\
&= r_1 s_1\iota\pi\mathcal{S}(s_2)\iota\pi\mathcal{S}(r_2) \otimes r_3 s_3 = (rs)_1\iota\pi\mathcal{S}((rs)_2) \otimes (rs)_3 \\
&= \Delta_R(rs).
\end{aligned}$$

Claramente, $\Delta_R(1) = 1\iota\pi\mathcal{S}(1) \otimes 1 = 1 \otimes 1$. Mais ainda, tomando

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}_R : R &\longrightarrow R \\
r &\longmapsto \iota\pi(r_1)\mathcal{S}(r_2)
\end{aligned}$$

segue que R é uma álgebra de Hopf trançada em ${}^H_H\mathcal{YD}$. Primeiro vejamos que $\mathcal{S}$ está bem definida. Com efeito, dado $r \in R$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}_R(r)_1 \otimes \pi(\mathcal{S}_R(r)_2) &= [\iota\pi(r_1)\mathcal{S}(r_2)]_1 \otimes \pi([\iota\pi(r_1)\mathcal{S}(r_2)]_2) \\
&= \iota\pi(r_1)\mathcal{S}(r_4) \otimes \pi(\iota\pi(r_2)\mathcal{S}(r_3)) = \iota\pi(r_1)\mathcal{S}(r_4) \otimes \pi(r_2)\pi\mathcal{S}(r_3) \\
&= \iota\pi(r_1)\mathcal{S}(r_4) \otimes \pi(r_2\mathcal{S}(r_3)) = \iota\pi(r_1)\mathcal{S}(r_3) \otimes \pi(\varepsilon(r_2)1) \\
&= \iota\pi(r_1)\mathcal{S}(r_2) \otimes 1 = \mathcal{S}_R(r) \otimes 1.
\end{aligned}$$

Observe que $\mathcal{S}_R$ é antípoda, já que:

$$\begin{aligned}
m(id \otimes \mathcal{S}_R)\Delta_R(r) &= r_1\iota\pi\mathcal{S}(r_2)\mathcal{S}_R(r_3) = r_1\iota\pi\mathcal{S}(r_2)\iota\pi(r_3)\mathcal{S}(r_4) = r_1\iota\pi(\mathcal{S}(r_2)r_3)\mathcal{S}(r_4) \\
&= r_1\iota\pi(\varepsilon(r_2)1)\mathcal{S}(r_3) = r_1\mathcal{S}(r_2) = \varepsilon(r)1 \quad (= \varepsilon_R(r)1),
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
m(\mathcal{S}_R \otimes id)\Delta_R(r) &= \mathcal{S}_R(r_1\iota\pi\mathcal{S}(r_2))r_3 = \iota\pi([r_1\iota\pi\mathcal{S}(r_2)]_1)\mathcal{S}([r_1\iota\pi\mathcal{S}(r_2)]_2)r_3 \\
&= \iota\pi(r_1\iota\pi\mathcal{S}(r_4))\mathcal{S}(r_2\iota\pi\mathcal{S}(r_3))r_5 = \iota\pi(r_1)\iota\pi\mathcal{S}(r_4)\iota\pi\mathcal{S}^2(r_3)\mathcal{S}(r_2)r_5
\end{aligned}$$

$$= \iota\pi(r_1)\iota\pi\mathcal{S}(\mathcal{S}(r_3)r_4)\mathcal{S}(r_2)r_5 = \iota\pi(r_1)\iota\pi\mathcal{S}(\varepsilon(r_3)1)\mathcal{S}(r_2)r_4 = \iota\pi(r_1)\mathcal{S}(r_2)r_3$$
$$= \iota\pi(\varepsilon(r_2)r_1) = \iota\pi(r) = \varepsilon(r)1 \quad (= \varepsilon_R(r)1).$$

A igualdade $\iota\pi(r) = \varepsilon(r)1$ é válida pois:

$$r_1 \otimes \pi(r_2) = r \otimes 1 \Longrightarrow \pi(r) = \varepsilon(r_1)\pi(r_2) = \varepsilon(r)1 \Longrightarrow \iota\pi(r) = \varepsilon(r)1.$$

Resumindo, temos a seguinte proposição.

Proposição 1.3.1 *Sejam A, H duas álgebras de Hopf (H com antípoda bijetiva) e $\pi : A \to H, \iota : H \to A$ morfismos de álgebras de Hopf tais que $\pi\iota = id_H$. Então, o diagrama:*

$$R = A^{co\pi} = \{a \in A : (id \otimes \pi)\Delta(a) = a \otimes 1\}$$

é uma álgebra de Hopf trançada em ${}^H_H\mathcal{YD}$, com estruturas:

- *Ação: $h \cdot r = \iota(h_1)r\mathcal{S}\iota(h_2)$;*
- *Coação: $\lambda(r) = \pi(r_1) \otimes r_2$;*
- *R é subálgebra de A, isto é, a multiplicação e a unidade são as herdadas de A;*
- *Comultiplicação: $\Delta_R(r) = r_1\iota\pi\mathcal{S}(r_2) \otimes r_3$;*
- *Counidade: É a herdada de A;*
- *Antípoda: $\mathcal{S}_R(r) = \iota\pi(r_1)\mathcal{S}(r_2)$.*

$\square$

Agora que temos que o diagrama R é uma álgebra de Hopf na categoria ${}^H_H\mathcal{YD}$, podemos considerar o produto de Radford-Majid. Na verdade, o produto pode ser definido num contexto mais geral, e é o que faremos.

Sejam H uma álgebra de Hopf (com antípoda bijetiva) e R uma álgebra de Hopf em ${}^H_H\mathcal{YD}$, então o *produto de Radford-Majid* de H por R é a álgebra de Hopf $R\#H$, que como espaço vetorial é $R \otimes H$, cuja estrutura de Hopf é dada por: para quaisquer $r, s \in R$ e $g, h \in H$,

- Multiplicação: $(r\#h)(s\#g) = r(h_1 \cdot s)\#h_2g$;
- Unidade: $1_{R\#H} = 1_R\#1_H$;

- Comultiplicação: $\Delta(r\#h) = r^1\#(r^2)_{-1}h_1 \otimes (r^2)_0\#h_2$;

- Counidade: $\varepsilon(r\#h) = \varepsilon(r)\varepsilon(h)$;

- Antípoda: $\mathcal{S}(r\#h) = (1\#\mathcal{S}(r_{-1}h))(\mathcal{S}(r_0)\#1)$.

Proposição 1.3.2 *O produto $R\#H$ com as estruturas acima é, de fato, uma álgebra de Hopf.*

Dem.: Esta demonstração se resume em verificar os axiomas de álgebra de Hopf. Sejam $r, s, t \in R$ e $f, g, h \in H$.
1. Associatividade:

$$\begin{aligned}[(r\#h)(s\#g)](t\#f) &= (r(h_1 \cdot s)\#h_2g)(t\#f) = r(h_1 \cdot s)((h_2g_1) \cdot t)\#h_3g_2f \\ &= r(h_1 \cdot s)(h_2 \cdot (g_1 \cdot t))\#h_3g_2f \overset{(*)}{=} r(h_1 \cdot [s(g_1 \cdot t)])\#h_2g_2f \\ &= (r\#h)(s(g_1 \cdot t)\#g_2f) = (r\#h)[(s\#g)(t\#f)],\end{aligned}$$

sendo $(*)$ válido pois m_R é morfismo de H-módulos.
2. Unidade:

$$\begin{aligned}(r\#h)(1\#1) = r(h_1 \cdot 1)\#h_21 &\overset{(*)}{=} r\varepsilon(h_1)1\#h_2 \\ &= r\#h \\ &= 1(1 \cdot r)\#1h = (1\#1)(r\#h),\end{aligned}$$

onde o passo $(*)$ vale pois u_R é morfismo de H-módulos.
3. Coassociatividade:

$$\begin{aligned}(\Delta \otimes id)\Delta(r\#h) &= (\Delta \otimes id)(r^1\#(r^2)_{-1}h_1 \otimes (r^2)_0\#h_2) \\ &= r^1\#(r^2)_{-1}[(r^3)_{-1}h_1]_1 \otimes (r^2)_0\#[(r^3)_{-1}h_1]_2 \otimes (r^3)_0\#h_2 \\ &= r^1\#(r^2)_{-1}(r^3)_{-2}h_1 \otimes (r^2)_0\#(r^3)_{-1}h_2 \otimes (r^3)_0\#h_3.\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}(id \otimes \Delta)\Delta(r\#h) &= (id \otimes \Delta)(r^1\#(r^2)_{-1}h_1 \otimes (r^2)_0\#h_2) \\ &= r^1\#(r^2)_{-1}h_1 \otimes [(r^2)_0]^1\#([(r^2)_0]^2)_{-1}h_2 \otimes ([(r^2)_0]^2)_0\#h_3 \\ &\overset{(*)}{=} r^1\#(r^2)_{-1}(r^3)_{-1}h_1 \otimes (r^2)_0\#[(r^3)_0]_{-1}h_2 \otimes [(r^3)_0]_0\#h_3 \\ &= r^1\#(r^2)_{-1}(r^3)_{-2}h_1 \otimes (r^2)_0\#(r^3)_{-1}h_2 \otimes (r^3)_0\#h_3,\end{aligned}$$

já que o passo $(*)$ vale pois Δ_R é morfismo de H-comódulos.
4. Counidade:

$$\begin{aligned}
r^{-1}_{R\#H}(\varepsilon\otimes id)\Delta(r\#h) &= \varepsilon(r^1\#(r^2)_{-1}h_1)(r^2)_0\#h_2 = \varepsilon(r^1)\varepsilon((r^2)_{-1})(r^2)_0\#\varepsilon(h_1)h_2\\
&= \varepsilon(r^1)r^2\#h = r\#h
\end{aligned}$$

e

$$l^{-1}_{R\#H}(id\otimes\varepsilon)\Delta(r\#h) = r^1\#\varepsilon((r^2)_0)(r^2)_{-1}\varepsilon(h_2)h_1 \overset{(*)}{=} r^1\#\varepsilon(r^2)1h = r\#h,$$

onde o passo $(*)$ vale, pois ε_R é morfismo de H-comódulos.
5. Δ é morfismo de álgebras:

$$\begin{aligned}
\Delta[(r\#h)(s\#g)] =&\ \Delta(r(h_1\cdot s)\#h_2g)\\
=&\ [r(h_1\cdot s)]^1\#([r(h_1\cdot s)]^2)_{-1}h_2g_1\otimes([r(h_1\cdot s)]^2)_0\#h_3g_2\\
\overset{(*_1)}{=}&\ r^1[(r^2)_{-1}\cdot(h_1\cdot s)^1]\#[(r^2)_0(h_1\cdot s)^2]_{-1}h_2g_1\otimes[(r^2)_0(h_1\cdot s)^2]_0\#h_3g_2\\
\overset{(*_2)}{=}&\ r^1[(r^2)_{-1}\cdot(h_1\cdot s^1)]\#[(r^2)_0(h_2\cdot s^2)]_{-1}h_3g_1\otimes[(r^2)_0(h_2\cdot s^2)]_0\#h_4g_2\\
\overset{(*_3)}{=}&\ r^1[(r^2)_{-2}\cdot(h_1\cdot s^1)]\#(r^2)_{-1}(h_2\cdot s^2)_{-1}h_3g_1\otimes(r^2)_0(h_2\cdot s^2)_0\#h_4g_2\\
\overset{(*_4)}{=}&\ r^1[(r^2)_{-2}\cdot(h_1\cdot s^1)]\#(r^2)_{-1}h_2(s^2)_{-1}g_1\otimes(r^2)_0(h_3\cdot(s^2)_0)\#h_4g_2,
\end{aligned}$$

onde $(*_1)$ vale porque Δ_R é morfismo de álgebras, $(*_2)$ pois Δ_R é morfismo de H-módulos, $(*_3)$ porque m_R é morfismo de H-comódulos e $(*_4)$ pois, da compatibilidade de Yetter-Drinfel'd,

$$\lambda(h\cdot r) = h_1r_{-1}\mathcal{S}(h_3)\otimes h_2\cdot r_0$$

segue que,

$$(h_1\cdot r)_{-1}\otimes(h_1\cdot r)_0\otimes h_2 = h_1r_{-1}\mathcal{S}(h_3)\otimes h_2\cdot r_0\otimes h_4,$$

o que implica que

$$\begin{aligned}
(h_1\cdot r)_{-1}h_2\otimes(h_1\cdot r)_0 &= h_1r_{-1}\mathcal{S}(h_3)h_4\otimes h_2\cdot r_0 = h_1r_{-1}\otimes(\varepsilon(h_3)h_2)\cdot r_0\\
&= h_1r_{-1}\otimes h_2\cdot r_0.
\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$
\begin{aligned}
\Delta(r\#h)\Delta(s\#g) &= [r^1\#(r^2)_{-1}h_1 \otimes (r^2)_0\#h_2][s^1\#(s^2)_{-1}g_1 \otimes (s^2)_0\#g_2]\\
&= [r^1\#(r^2)_{-1}h_1][s^1\#(s^2)_{-1}g_1] \otimes [(r^2)_0\#h_2][(s^2)_0\#g_2]\\
&= r^1([(r^2)_{-1}h_1]_1 \cdot s^1)\#[(r^2)_{-1}h_1]_2(s^2)_{-1}g_1 \otimes (r^2)_0(h_2 \cdot (s^2)_0)\#h_3g_2\\
&= r^1([(r^2)_{-2}h_1] \cdot s^1)\#(r^2)_{-1}h_2(s^2)_{-1}g_1 \otimes (r^2)_0(h_3 \cdot (s^2)_0)\#h_4g_2\\
&= r^1[(r^2)_{-2} \cdot (h_1 \cdot s^1)]\#(r^2)_{-1}h_2(s^2)_{-1}g_1 \otimes (r^2)_0(h_3 \cdot (s^2)_0)\#h_4g_2.
\end{aligned}
$$

Note que $\Delta(1\#1) = 1\#(1)_{-1}1 \otimes (1)_0\#1 = 1\#1 \otimes 1\#1$, já que Δ_R é morfismo de álgebras e u_R é morfismo de H-comódulos.

6. ε é morfismo de álgebras:

$$
\begin{aligned}
\varepsilon((r\#h)(s\#g)) &= \varepsilon(r(h_1 \cdot s)\#h_2g) = \varepsilon(r)\varepsilon(h_1 \cdot s)\varepsilon(h_2)\varepsilon(g) = \varepsilon(r)\varepsilon(h \cdot s)\varepsilon(g)\\
&\overset{(*)}{=} \varepsilon(r)\varepsilon(h)\varepsilon(s)\varepsilon(g) = \varepsilon(r\#h)\varepsilon(s\#g),
\end{aligned}
$$

sendo que $(*)$ vale por ε_R ser morfismo de H-módulos, e $\varepsilon(1\#1) = \varepsilon(1)\varepsilon(1) = 1$.

7. $\mathcal{S}$ é antípoda:

$$
\begin{aligned}
m(\mathcal{S} \otimes id)\Delta(r\#h) &= \mathcal{S}(r^1\#(r^2)_{-1}h_1)[(r^2)_0\#h_2]\\
&= [1\#\mathcal{S}((r^1)_{-1}(r^2)_{-1}h_1)][\mathcal{S}((r^1)_0)\#1][(r^2)_0\#h_2]\\
&\overset{(*_1)}{=} [1\#\mathcal{S}(r_{-1}h_1)][\mathcal{S}((r_0)^1)\#1][(r_0)^2\#h_2]\\
&= [1\#\mathcal{S}(r_{-1}h_1)][\mathcal{S}((r_0)^1)(1 \cdot (r_0)^2)\#h_2]\\
&= [1\#\mathcal{S}(r_{-1}h_1)][\mathcal{S}((r_0)^1)(r_0)^2\#h_2]\\
&= [1\#\mathcal{S}(r_{-1}h_1)][\varepsilon(r_0)1\#h_2] = [1\#\mathcal{S}(\varepsilon(r_0)r_{-1}h_1)][1\#h_2]\\
&\overset{(*_2)}{=} [1\#\mathcal{S}(\varepsilon(r)1h_1)][1\#h_2] = \varepsilon(r)[1(\mathcal{S}(h_1)_1 \cdot 1)\#\mathcal{S}(h_1)_2h_2]\\
&= \varepsilon(r)[\varepsilon\mathcal{S}(h_2)1\#\mathcal{S}(h_1)h_3] = \varepsilon(r)[1\#\mathcal{S}(h_1)\varepsilon\mathcal{S}(h_2)h_3]\\
&= \varepsilon(r)[1\#\mathcal{S}(h_1)h_2] = \varepsilon(r)[1\#\varepsilon(h)1] = \varepsilon(r)\varepsilon(h)[1\#1]\\
&= \varepsilon(r\#h)[1\#1],
\end{aligned}
$$

onde $(*_1)$ vale por Δ_R ser morfismo de H-comódulos e $(*_2)$ vale por ε_R ser morfismo de H-comódulos. Por outro lado,

$$
\begin{aligned}
m(id \otimes \mathcal{S})\Delta(r\#h) &= [r^1\#(r^2)_{-1}h_1]\mathcal{S}((r^2)_0\#h_2)\\
&= [r^1(((r^2)_{-3}h_1) \cdot 1)\#(r^2)_{-2}h_2\mathcal{S}((r^2)_{-1}h_3)][\mathcal{S}((r^2)_0)\#1]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= [r^1\varepsilon((r^2)_{-3}h_1)1\#(r^2)_{-2}h_2\mathcal{S}(h_3)\mathcal{S}((r^2)_{-1})][\mathcal{S}((r^2)_0)\#1] \\
&= [r^1\varepsilon((r^2)_{-3})\varepsilon(h_1)\#(r^2)_{-2}\varepsilon(h_2)\mathcal{S}((r^2)_{-1})][\mathcal{S}((r^2)_0)\#1] \\
&= \varepsilon(h_1\varepsilon(h_2))[r^1\varepsilon((r^2)_{-3})\#(r^2)_{-2}\mathcal{S}((r^2)_{-1})][\mathcal{S}((r^2)_0)\#1] \\
&= \varepsilon(h)[r^1\varepsilon((r^2)_{-2})\#\varepsilon((r^2)_{-1})1][\mathcal{S}((r^2)_0)\#1] \\
&= \varepsilon(h)[r^1\#1][\mathcal{S}(r^2)\#1] = \varepsilon(h)[r^1(1\cdot\mathcal{S}(r^2))\#1] \\
&= \varepsilon(h)[r^1\mathcal{S}(r^2)\#1] = \varepsilon(h)[\varepsilon(r)1\#1] = \varepsilon(r\#h)[1\#1].
\end{aligned}
$$

□

Observação 1.3.3 *Desde que $R\#H$ é uma álgebra de Hopf, é fácil ver que $\widetilde{\pi} : R\#H \to H$, $\widetilde{\pi}(r\#h) = \varepsilon(r)h$, e $\widetilde{\iota} : H \to R\#H$, $\widetilde{\iota}(h) = 1\#h$, são morfismos de álgebras de Hopf e que $\widetilde{\pi}\,\widetilde{\iota} = id_H$. Mais ainda, temos que:*

$$R\#\Bbbk\{1\} = (R\#H)^{co\widetilde{\pi}} = \{x \in R\#H : (id \otimes \widetilde{\pi})\Delta(x) = x \otimes 1\}.$$

Dem.:
" $\supseteq$ " : Seja $x = \sum_{i=1}^{n} x_{(i)} \otimes x^{(i)} \in (R\#H)^{co\widetilde{\pi}}$ com $\{x_{(i)} : i = 1, \cdots, n\}$ linearmente independente. Então,

$$
\begin{aligned}
x_1 \otimes \widetilde{\pi}(x_2) = x \otimes 1 &\Longleftrightarrow \sum_{i=1}^{n} x^1_{(i)}\#(x^2_{(i)})_{-1}x^{(i)}_1 \otimes \widetilde{\pi}((x^2_{(i)})_0\#x^{(i)}_2) = \sum_{i=1}^{n} x_{(i)}\#x^{(i)} \otimes 1 \\
&\Longleftrightarrow \sum_{i=1}^{n} x^1_{(i)}\#(x^2_{(i)})_{-1}x^{(i)}_1 \otimes \varepsilon((x^2_{(i)})_0)x^{(i)}_2 = \sum_{i=1}^{n} x_{(i)}\#x^{(i)} \otimes 1 \\
&\overset{(*_1)}{\Longleftrightarrow} \sum_{i=1}^{n} x^1_{(i)}\#\varepsilon(x^2_{(i)})x^{(i)}_1 \otimes x^{(i)}_2 = \sum_{i=1}^{n} x_{(i)}\#x^{(i)} \otimes 1 \\
&\Longleftrightarrow \sum_{i=1}^{n} x_{(i)}\#x^{(i)}_1 \otimes x^{(i)}_2 = \sum_{i=1}^{n} x_{(i)}\#x^{(i)} \otimes 1 \\
&\overset{(*_2)}{\Longleftrightarrow} x^{(i)}_1 \otimes x^{(i)}_2 = x^{(i)} \otimes 1,
\end{aligned}
$$

para todo $i = 1, \cdots, n$, onde $(*_1)$ vale pois ε é morfismo de H-comódulos e $(*_2)$ vale pois $\{x_{(i)} : i = 1, \cdots, n\}$ é LI. Se $x^{(i)}_1 \otimes x^{(i)}_2 = x^{(i)} \otimes 1$, para todo $i = 1, \cdots, n$, aplicando $r_H^{-1}(\varepsilon \otimes id)$, tem-se que:

$$x^{(i)} = \varepsilon(x^{(i)}_1)x^{(i)}_2 = \varepsilon(x^{(i)})1 \Longrightarrow x^{(i)} \in \Bbbk\{1\} \Longrightarrow x \in R\#\Bbbk\{1\}.$$

" $\subseteq$ " : Se $x \in R\#\Bbbk\{1\}$, então $x^{(i)} \in \Bbbk\{1\}$, para todo $i = 1, \cdots, n$. De forma imediata, segue que $x_1^{(i)} \otimes x_2^{(i)} = x^{(i)} \otimes 1$, e consequentemente $x_1 \otimes \widetilde{\pi}(x_2) = x \otimes 1$.

$\square$

Resumindo o que vimos na segunda parte desta seção: se H é uma álgebra de Hopf (de antípoda bijetiva) e R uma álgebra de Hopf na categoria ${}_H^H\mathcal{YD}$, então $R\#H$ é uma álgebra de Hopf e existem $\widetilde{\pi} : R\#H \to H, \widetilde{\iota} : H \to R\#H$ morfismos de álgebra de Hopf tais que $\widetilde{\pi}\,\widetilde{\iota} = id_H$ e $R\#\Bbbk\{1\} = (R\#H)^{co\widetilde{\pi}}$.

Agora, voltando ao início desta seção, tínhamos A, H álgebras de Hopf com $\pi : A \to H, \iota : H \to A$ morfismos de álgebras de Hopf tais que $\pi\iota = id_H$. Vimos que o diagrama $R = A^{co\pi}$ tem uma estrutura de álgebra de Hopf na categoria ${}_H^H\mathcal{YD}$ e assim podíamos tomar o produto $R\#H$. De $R\#\Bbbk\{1\} = (R\#H)^{co\widetilde{\pi}}$ e $R = A^{co\pi}$ é natural supor que haja alguma relação entre A e $R\#H$. De fato, essas álgebras são isomorfas.

Entretanto, antes de vermos este isomorfismo, vamos definir um morfismo auxiliar e ver algumas propriedades dele. Seja:

$$\begin{aligned} \vartheta : A &\longrightarrow R \\ a &\longmapsto a_1\iota\pi\mathcal{S}(a_2) \end{aligned}$$

Note que ϑ está bem definido, pois:

$$\begin{aligned} (id \otimes \pi)\Delta\vartheta(a) &= (id \otimes \pi)\Delta(a_1\iota\pi\mathcal{S}(a_2)) = a_1\iota\pi\mathcal{S}(a_4) \otimes \pi(a_2\iota\pi\mathcal{S}(a_3)) \\ &= a_1\iota\pi\mathcal{S}(a_4) \otimes \pi(a_2)\pi\mathcal{S}(a_3) = a_1\iota\pi\mathcal{S}(a_4) \otimes \pi(a_2\mathcal{S}(a_3)) \\ &= a_1\iota\pi\mathcal{S}(a_3) \otimes \pi(\varepsilon(a_2)1) = a_1\iota\pi\mathcal{S}(a_2) \otimes 1 = \vartheta(a) \otimes 1. \end{aligned}$$

Observe também que como R é uma álgebra de Hopf em ${}_H^H\mathcal{YD}$, segue que R é uma coálgebra no sentido usual, pois toda coálgebra em ${}_H^H\mathcal{YD}$ é, em particular, uma coálgebra no sentido usual. Logo, a seguinte afirmação faz sentido.

Afirmação: ϑ é morfismo de coálgebras. Com efeito,

$$\begin{aligned} \vartheta(a)^1 \otimes \vartheta(a)^2 &= (a_1\iota\pi\mathcal{S}(a_2))^1 \otimes (a_1\iota\pi\mathcal{S}(a_2))^2 \\ &= [a_1\iota\pi\mathcal{S}(a_2)]_1\iota\pi\mathcal{S}([a_1\iota\pi\mathcal{S}(a_2)]_2) \otimes [a_1\iota\pi\mathcal{S}(a_2)]_3 \\ &= a_1\iota\pi\mathcal{S}(a_6)\iota\pi\mathcal{S}(a_2\iota\pi\mathcal{S}(a_5)) \otimes a_3\iota\pi\mathcal{S}(a_4) \\ &= a_1\iota\pi\mathcal{S}(a_6)\iota\pi\mathcal{S}^2(a_5)\iota\pi\mathcal{S}(a_2) \otimes a_3\iota\pi\mathcal{S}(a_4) \\ &= a_1\iota\pi\mathcal{S}(\mathcal{S}(a_5)a_6)\iota\pi\mathcal{S}(a_2) \otimes a_3\iota\pi\mathcal{S}(a_4) \\ &= a_1\iota\pi\mathcal{S}(\varepsilon(a_5)1)\iota\pi\mathcal{S}(a_2) \otimes a_3\iota\pi\mathcal{S}(a_4) \end{aligned}$$

$$= a_1\iota\pi\mathcal{S}(a_2) \otimes a_3\iota\pi\mathcal{S}(a_4) = \vartheta(a_1) \otimes \vartheta(a_2)$$

e $\varepsilon\vartheta(a) = \varepsilon(a_1\iota\pi\mathcal{S}(a_2)) = \varepsilon(a_1)\varepsilon(a_2) = \varepsilon(a)$. Mais ainda, dados $a, b \in A, h \in H$:

$$\vartheta(ab) = (ab)_1\iota\pi\mathcal{S}((ab)_2) = a_1b_1\iota\pi\mathcal{S}(b_2)\iota\pi\mathcal{S}(a_2) = a_1\vartheta(b)\iota\pi\mathcal{S}(a_2),$$

e

$$\vartheta(\iota(h)) = \iota(h)_1\iota\pi\mathcal{S}(\iota(h)_2) = \iota(h_1)\mathcal{S}\iota\pi\iota(h_2) = \iota(h)_1\mathcal{S}(\iota(h)_2) = \varepsilon\iota(h)1 = \varepsilon(h)1.$$

Assim,

$$\vartheta(a\iota(h)) = \varepsilon(h)\vartheta(a) \text{ e } \vartheta(\iota(h)a) = \iota(h_1)\vartheta(a)\mathcal{S}\iota(h_2) = h \cdot \vartheta(a).$$

Com estas propriedades, podemos definir explicitamente o isomorfismo entre A e $R\#H$:

$$\begin{aligned} \varphi : A &\longrightarrow R\#H \\ a &\longmapsto \vartheta(a_1)\#\pi(a_2) \end{aligned}$$

A boa definição de ϑ implica a boa definição de φ. Vejamos que φ é um morfismo de álgebras de Hopf. Dados $a, b \in A$:

$$\begin{aligned} \varphi(a)\varphi(b) &= [\vartheta(a_1)\#\pi(a_2)][\vartheta(b_1)\#\pi(b_2)] = \vartheta(a_1)(\pi(a_2) \cdot \vartheta(b_1))\#\pi(a_3)\pi(b_2) \\ &= \vartheta(a_1)\vartheta(\iota\pi(a_2)b_1)\#\pi(a_3b_2) = a_1\iota\pi\mathcal{S}(a_2)\iota\pi(a_3)\vartheta(b_1)\iota\pi\mathcal{S}\iota\pi(a_4)\#\pi(a_5b_2) \\ &= a_1\iota\pi(\mathcal{S}(a_2)a_3)\vartheta(b_1)\iota\pi\mathcal{S}(a_4)\#\pi(a_5b_2) \\ &= a_1\iota\pi(\varepsilon(a_2)1)\vartheta(b_1)\iota\pi\mathcal{S}(a_3)\#\pi(a_4b_2) = a_1\vartheta(b_1)\iota\pi\mathcal{S}(a_2)\#\pi(a_3b_2) \\ &= \vartheta(a_1b_1)\#\pi(a_2b_2) = \varphi(ab), \end{aligned}$$

e $\varphi(1) = \vartheta(1)\#\pi(1) = 1\iota\pi\mathcal{S}(1)\#1 = 1\#1$. Também,

$$\begin{aligned} \varphi(a)_1 \otimes \varphi(a)_2 &= [\vartheta(a_1)\#\pi(a_2)]_1 \otimes [\vartheta(a_1)\#\pi(a_2)]_2 \\ &= \vartheta(a_1)^1\#(\vartheta(a_1)^2)_{-1}\pi(a_2) \otimes (\vartheta(a_1)^2)_0\#\pi(a_3) \\ &\overset{(*)}{=} \vartheta(a_1)\#\vartheta(a_2)_{-1}\pi(a_3) \otimes \vartheta(a_2)_0\#\pi(a_4) \\ &= \vartheta(a_1)\#(a_2\iota\pi\mathcal{S}(a_3))_{-1}\pi(a_4) \otimes (a_2\iota\pi\mathcal{S}(a_3))_0\#\pi(a_5) \\ &= \vartheta(a_1)\#\pi([a_2\iota\pi\mathcal{S}(a_3)]_1)\pi(a_4) \otimes [a_2\iota\pi\mathcal{S}(a_3)]_2\#\pi(a_5) \\ &= \vartheta(a_1)\#\pi(a_2\iota\pi\mathcal{S}(a_5))\pi(a_6) \otimes a_3\iota\pi\mathcal{S}(a_4)\#\pi(a_7) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \vartheta(a_1)\#\pi(a_2)\pi(\mathcal{S}(a_5)a_6) \otimes a_3\iota\pi\mathcal{S}(a_4)\#\pi(a_7)\\
&= \vartheta(a_1)\#\pi(a_2)\pi(\varepsilon(a_5)1) \otimes a_3\iota\pi\mathcal{S}(a_4)\#\pi(a_6)\\
&= \vartheta(a_1)\#\pi(a_2) \otimes \vartheta(a_3)\#\pi(a_4) = \varphi(a_1)\otimes\varphi(a_2),
\end{aligned}
$$

sendo o passo $(*)$ válido já que ϑ é morfismo de coálgebras, e $\varepsilon\varphi(a) = \varepsilon(\vartheta(a_1)\#\pi(a_2)) = \varepsilon\vartheta(a_1)\varepsilon\pi(a_2) = \varepsilon(a_1)\varepsilon(a_2) = \varepsilon(a)$. Portanto φ é morfismo de álgebras e de coálgebras, e consequentemente de álgebras de Hopf. Mais ainda, φ é isomorfismo, com inverso dado por:

$$
\begin{aligned}
\varphi^{-1} : R\#H &\longrightarrow A\\
r\#h &\longmapsto r\iota(h)
\end{aligned}
$$

De fato,

$$
\begin{aligned}
\varphi^{-1}\varphi(a) = \varphi^{-1}(\vartheta(a_1)\#\pi(a_2)) &= \vartheta(a_1)\iota\pi(a_2) = a_1\iota\pi\mathcal{S}(a_2)\iota\pi(a_3)\\
&= a_1\iota\pi(\mathcal{S}(a_2)a_3) = a_1\iota\pi(\varepsilon(a_2)1) = a
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
\varphi\varphi^{-1}(r\#h) &= \varphi(r\iota(h)) = \vartheta(r_1\iota(h_1))\#\pi(r_2\iota(h_2)) = \varepsilon(h_1)\vartheta(r_1)\#\pi(r_2)h_2\\
&= \vartheta(r_1)\#\pi(r_2)h \overset{(*)}{=} \vartheta(r)\#1h = r_1\iota\pi\mathcal{S}(r_2)\#h \overset{(*)}{=} r\iota\mathcal{S}(1)\#h\\
&= r\#h,
\end{aligned}
$$

onde as passagens $(*)$ valem porque $r \in R = A^{co\pi}$.

Para finalizar, enunciamos o seguinte teorema que sintetiza toda esta seção. Ele será de grande importância para o principal resultado do trabalho (Teorema 3.1.3), pois contém a maior parte da linguagem e dos resultados intermediários que serão utilizados na demonstração do mesmo.

Teorema 1.3.4 [*AS3, Seção* 4] *Sejam A, H duas álgebras de Hopf com H de antípoda bijetiva e $\pi : A \to H, \iota : H \to A$ morfismos de álgebras de Hopf tais que $\pi\iota = id_H$. Também seja $R = A^{co\pi}$ o diagrama, que sabemos ser uma álgebra de Hopf trançada em ${}^H_H\mathcal{YD}$, com estruturas dadas pela Proposição 1.3.1. Então, a álgebra de Hopf $R\#H$ dada pelo produto de Radford-Majid (ver Proposição 1.3.2) é isomorfa à álgebra de Hopf A via*

$$\begin{aligned} \varphi : A &\longrightarrow R\#H \\ a &\longmapsto \vartheta(a_1)\#\pi(a_2) \end{aligned}$$

onde $\vartheta : A \to R, \vartheta(a) = a_1\iota\pi\mathcal{S}(a_2)$. *Mais ainda, o inverso de* φ *é dado por:*

$$\begin{aligned} \varphi^{-1} : R\#H &\longrightarrow A \\ r\#h &\longmapsto r\iota(h) \end{aligned}$$

□

Exemplo 1.3.5 *Sejam* $A = T_q$ *uma álgebra de Taft com* q *uma raiz* n*-ésima primitiva da unidade e* $H = \Bbbk C_n$ *a álgebra de grupo sobre o grupo cíclico* $C_n = \{g^i : i = 0, \cdots, n-1\}$. *Tome* $\iota : H \to A,\ g^i \mapsto g^i$, *e* $\pi : A \to H,\ x^ig^j \mapsto \delta_{0,i}g^j$. *Não é dificil de ver que* ι *e* π *são morfismos de álgebras de Hopf e que* $\pi\iota = id_H$. *Assim, pela Proposição 1.3.1, o diagrama*

$$R = \{a \in A : (id \otimes \pi)\Delta(a) = a \otimes 1\} = \Bbbk\{x^i : i = 0, \cdots, n-1\} \simeq \Bbbk[x]/(x^n)$$

é uma álgebra de Hopf em ${}^{\Bbbk C_n}_{\Bbbk C_n}\mathcal{YD}$ *via:*

- $g^i \cdot x^r = \iota((g^i)_1)x^r\mathcal{S}\iota((g^i)_2) = g^ix^rg^{-i} = q^{ir}x^rg^ig^{-i} = q^{ir}x^r$;
- $\lambda(x^r) = (\pi \otimes id)\Delta(x^r) = (\pi \otimes id)(\sum\limits_{p=0}^{r} \binom{r}{p}_q x^pg^{r-p} \otimes x^{r-p}) = g^r \otimes x^r$;
- *Multiplicação, unidade e counidade herdadas de* A;
- $$\begin{aligned} \Delta_R(x^r) &= (x^r)_1\iota\pi\mathcal{S}((x^r)_2) \otimes (x^r)_3 \\ &= \sum_{p=0}^{r}\sum_{s=0}^{r-p} \binom{r}{p}_q \binom{r-p}{s}_q x^pg^{r-p}\pi\mathcal{S}(x^sg^{r-p-s}) \otimes x^{r-p-s} \\ &\overset{(*)}{=} \sum_{p=0}^{r} \binom{r}{p}_q x^pg^{r-p}\mathcal{S}(g^{r-p}) \otimes x^{r-p} \\ &= \sum_{p=0}^{r} \binom{r}{p}_q x^p \otimes x^{r-p}, \end{aligned}$$

onde o passo $(*)$ *vale pois* $\pi\mathcal{S} = \mathcal{S}\pi$;

- $$\begin{aligned}\mathcal{S}_R(x^r) &= \iota\pi((x^r)_1)\mathcal{S}((x^r)_2) = \sum_{p=0}^{r}\binom{r}{p}_q \pi(x^p g^{r-p})\mathcal{S}(x^{r-p}) = g^r\mathcal{S}(x^r)\\ &= g^r(-g^{-1}x)^r = g^r(-1)^r q^{\frac{r(r-1)}{2}} g^{-r}x^r = (-1)^r q^{\frac{r(r-1)}{2}} x^r.\end{aligned}$$

Mais ainda, pelo Teorema 1.3.4, segue que:

$$T_q \simeq \Bbbk[x]/(x^n)\#\Bbbk C_n.$$

1.4 O produto wedge

No capítulo 2 vamos associar a uma coálgebra C uma sequência ascendente $\{C_n\}_{n\geq 0}$ de subcoálgebras intermediárias com propriedades interessantes. Para tal, usaremos o produto wedge. Nesta seção, exploramos este produto em um contexto mais geral e estamos interessados em gerar algumas propriedades e fórmulas que serão úteis no decorrer do trabalho. A referência principal é [M].

Definição 1.4.1 *Sejam* C *uma coálgebra e* $D, E \subseteq C$ *subespaços vetoriais. Então o produto wedge entre* D *e* E*, denotado por* $D \wedge E$*, é dado por:*

$$D \wedge E = \{c \in C : \Delta(c) \in D \otimes C + C \otimes E\}.$$

Antes de seguirmos, um pouco de notação. Sejam V um espaço vetorial e $W \subseteq V$ um subconjunto, assim:

$$W^{\perp} := \{f \in V^* : f(w) = 0, \text{ para todo } w \in W\}.$$

De forma dual, dado $U \subseteq V^*$ um subconjunto:

$$U^{\perp} := \{v \in V : f(v) = 0, \text{ para todo } f \in U\}.$$

Este subespaços recebem o nome de subespaços anulado em V^* e V, respectivamente. Note que da definição temos que $D \wedge E = (D^{\perp}E^{\perp})^{\perp}$, pois:

$$(D^{\perp}E^{\perp})^{\perp} = \{c \in C : \langle \sum_{i=1}^{n} f_i g_i, c\rangle = 0, \text{ para todo } f_i \in D^{\perp}, g_i \in E^{\perp}\}$$

$$
\begin{aligned}
&= \{c \in C : \sum_{i=1}^{n} \langle f_i, c_1 \rangle \langle g_i, c_2 \rangle = 0, \text{ para todo } f_i \in D^{\perp}, g_i \in E^{\perp}\} \\
&= \{c \in C : \Delta(c) \in D \otimes C + C \otimes E\} = D \wedge E.
\end{aligned}
$$

Observe também que, se C é uma álgebra de Hopf com antípoda $\mathcal{S}$, então $\mathcal{S}(D \wedge E) \subseteq \mathcal{S}(E) \wedge \mathcal{S}(D)$, já que dado $x = \mathcal{S}(c)$ com $c \in D \wedge E$, temos:

$$
\begin{aligned}
\Delta(x) = \mathcal{S}(c)_1 \otimes \mathcal{S}(c)_2 = \mathcal{S}(c_2) \otimes \mathcal{S}(c_1) &\in (\mathcal{S} \otimes \mathcal{S})\tau(D \otimes C + C \otimes E) \\
&= (\mathcal{S} \otimes \mathcal{S})(E \otimes C + C \otimes D) \\
&\subseteq \mathcal{S}(E) \otimes C + C \otimes \mathcal{S}(D).
\end{aligned}
$$

E, mais ainda, se $\mathcal{S}$ é bijetiva vale a igualdade. De fato, dado $x \in \mathcal{S}(E) \wedge \mathcal{S}(D)$, basta verificar que $\mathcal{S}^{-1}(x) \in D \wedge E$:

$$
\begin{aligned}
\Delta(\mathcal{S}^{-1}(x)) = \mathcal{S}^{-1}(x_2) \otimes \mathcal{S}^{-1}(x_1) &\in (\mathcal{S}^{-1} \otimes \mathcal{S}^{-1})(\mathcal{S}(D) \otimes C + C \otimes \mathcal{S}(E)) \\
&= D \otimes C + C \otimes E.
\end{aligned}
$$

Um fato interessante e não tão trivial sobre a operação wedge é que ela é *associativa*. Com efeito, primeiro notemos que $D \wedge E = \ker(\pi_{D,E})$, onde $\pi_{D,E}$ é a seguinte composição:

$$C \xrightarrow{\Delta} C \otimes C \xrightarrow{\pi_D \otimes \pi_E} C/D \otimes C/E,$$

com π_D, π_E as projeções naturais. Assim, $\pi_{D,E}$ induz um morfismo linear bijetivo $\phi_{D,E} : C/(D \wedge E) \longrightarrow C/D \otimes C/E$ via:

$$
\begin{tikzcd}
C \arrow[rr, "\pi_{D,E}"] \arrow[dr, "\pi_{D \wedge E}"'] & & C/D \otimes C/E \\
& C/(D \wedge E) \arrow[ur, dashed, "\phi_{D,E}"'] &
\end{tikzcd}
$$

Logo,

$$(D \wedge E) \wedge F = \ker(\pi_{D \wedge E, F}) = \ker[(\phi_{D,E} \otimes id_{C/F})\pi_{D \wedge E, F}],$$

já que $\phi_{D,E} \otimes id_{C/F}$ é bijeção. Mas,

$$
\begin{aligned}
(\phi_{D,E} \otimes id_{C/F})\pi_{D \wedge E, F} &= (\phi_{D,E} \otimes id_{C/F})(\pi_{D \wedge E} \otimes \pi_F)\Delta = (\phi_{D,E}\pi_{D \wedge E} \otimes \pi_F)\Delta \\
&= ((\pi_D \otimes \pi_E)\Delta \otimes \pi_F)\Delta = (\pi_D \otimes \pi_E \otimes \pi_F)\Delta_2,
\end{aligned}
$$

onde $\Delta_2 = (id \otimes \Delta)\Delta$. De forma análoga, $(id_{C/D} \otimes \phi_{E,F})\pi_{D,E\wedge F} = (\pi_D \otimes \pi_E \otimes \pi_F)\Delta_2$, o que implica que:

$$(D \wedge E) \wedge F = D \wedge (E \wedge F).$$

Uma outra notação que também utilizamos bastante durante o trabalho é a das *potências de wedge*. Dado D subespaço vetorial da coálgebra C, definimos $\wedge^0 D = 0, \wedge^1 D = D$ e, indutivamente, $\wedge^{n+1} D = (\wedge^n D) \wedge D$ para $n \geq 1$.

Da associatividade do produto wedge, segue que, para $n \geq 2$:

$$\wedge^n D = (\wedge^{n-i} D) \wedge (\wedge^i D),\ i = 1, \cdots, n-1,$$

uma vez que:

$$\begin{aligned}
\wedge^n D &= (\wedge^{n-1} D) \wedge D = (\wedge^{n-1} D) \wedge (\wedge^1 D) \\
&= ((\wedge^{n-2} D) \wedge D) \wedge (\wedge^1 D) = (\wedge^{n-2} D) \wedge (D \wedge (\wedge^1 D)) \overset{(*)}{=} (\wedge^{n-2} D) \wedge (\wedge^2 D) \\
&= \cdots = (\wedge^2 D) \wedge (\wedge^{n-2} D) \\
&= ((\wedge^1 D) \wedge D) \wedge (\wedge^{n-2} D) = (\wedge^1 D) \wedge (D \wedge (\wedge^{n-2} D)) \overset{(*)}{=} (\wedge^1 D) \wedge (\wedge^{n-1} D),
\end{aligned}$$

onde os passos $(*)$ valem por hipótese de indução.

Capítulo 2

A filtração coradical

Na primeira seção deste capítulo apresentamos as principais propriedades da filtração coradical. Além disso, exibimos um exemplo mostrando que a filtração coradical não é, em geral, uma filtração de álgebras de Hopf. Também será visto nesta seção a construção da álgebra de Hopf graduada associada a uma álgebra de Hopf filtrada, que terá maior utilidade no capítulo seguinte. As referências pincipais para esta seção são [M, S].

Por sua vez, a segunda seção tem mais características de um adendo. Nela, tratamos de alguns resultados que facilitam o cálculo explícito da filtração coradical, tarefa esta que na maioria da vezes não é fácil de ser feita.

2.1 Definições e resultados

Seja C uma coálgebra. Antes de definir a sua filtração coradical, precisamos saber o que vem a ser seu coradical. O *coradical* de C, que usualmente denotamos por C_0, é a soma direta de todas as suas *subcoálgebras simples*, isto é, de todas as suas subcoálgebras não nulas que não possuem subcoálgebras intermediárias (além das trivias). A partir de C_0, podemos considerar para $n > 0$:

$$C_n = \wedge^{n+1} C_0.$$

A família $\{C_n\}_{n\geq 0}$ é denominada de *filtração coradical* de C.

Exemplo 2.1.1 *Seja G um grupo. A coálgebra de grupo $C = \Bbbk G$ tem coradical $C_0 = C$ pois, para todo $g \in G$, $\Bbbk\{g\}$ é uma subcoálgebra simples.*

Para o próximo exemplo necessitamos das seguintes noções.

Definição 2.1.2 *Sejam C uma coálgebra e H uma álgebra de Hopf.*

- *Diz-se que C é pontuada se $C_0 = \Bbbk G(C)$;*
- *Diz-se que H é auto-dual se H e H^* são isomorfas como álgebras de Hopf.*

Exemplo 2.1.3 $[DNR, Cor.\ 5.6.39]$ *As álgebras de Taft T_q do Exemplo 1.1.10 item 3 são sempre auto-duais.*

Exemplo 2.1.4 *Seja H_4 a álgebra de Sweedler, isto é, H_4 é a álgebra de Taft T_{-1} :*

$$H_4 = \Bbbk\langle x, g; x^2 = 0, g^2 = 1, gx = -xg\rangle,$$

com $\Delta(g) = g \otimes g$ e $\Delta(x) = x \otimes 1 + g \otimes x$.

Por $[M, Lema\ 5.5.1]$, sabemos que H_4 é pontuada. Por outro lado, também sabemos que a álgebra de Sweedler é auto-dual como álgebra de Hopf. Assim, garantimos que $\#G(H_4) = 2$, já que $G(H^*) = Alg(H, \Bbbk)$ para qualquer álgebra de Hopf H de dimensão finita, e:

$$G((H_4)^*) = \{\alpha_1 = \varepsilon, \alpha_{-1}\},$$

onde $\alpha_q : H_4 \to \Bbbk,\ \alpha_q(x) = 0$ e $\alpha_q(g) = q$.

Como $1, g \in G(H_4)$, segue que $(H_4)_0 = \Bbbk\{1, g\}$. Agora, quem é $(H_4)_1$?

$$\begin{aligned}(H_4)_1 &= \wedge^2(H_4)_0 = (H_4)_0 \wedge (H_4)_0\\ &= \{h \in H_4 : \Delta(h) \in \Bbbk\{1, g\} \otimes H_4 + H_4 \otimes \Bbbk\{1, g\}\}.\end{aligned}$$

Nitidamente, $1, g, x \in (H_4)_1$ e de $\Delta(xg) = \Delta(x)\Delta(g) = xg \otimes g + 1 \otimes xg$, também temos que $xg \in (H_4)_1$. Logo, $(H_4)_1 = H_4$.

Exemplo 2.1.5 *Seja $C = \mathcal{M}^*(2, \Bbbk)$ a coálgebra de comatrizes de ordem 2 sobre $\Bbbk$. Como a álgebra $A = \mathcal{M}(2, \Bbbk)$ é simples (e, portanto, semissimples), pelo Teorema de Wedderburn (dual) (ver $[R1, Teor.\ 4.6.1]$) segue que C é cosemissimples, isto é, $C = C_0$.*

Mais ainda, o Teorema de Wedderburn (dual) garante que para qualquer coálgebra C, tem-se que:

$$Jac(C^*) = C_0^{\perp},$$

onde $Jac(C^*)$ representa o *radical de Jacobson* da álgebra C^* associada, isto é, $Jac(C^*)$ é igual à interseção de todos os ideais maximais à esquerda (ou, equivalentemente, à direita) de C^*. Desta forma, também vemos que $C_n = (Jac(C^*)^{n+1})^\perp$, para todo $n \geq 0$. Provemos por indução. Para $n = 0$:

$$C_0 = (C_0^\perp)^\perp = Jac(C^*)^\perp,$$

e dado $n > 0$, notar que:

$$\begin{aligned}
c \in (Jac(C^*)^{n+1})^\perp &\Longleftrightarrow \langle f, c\rangle = 0, \text{ para todo } f \in Jac(C^*)^{n+1} \\
&\Longleftrightarrow \langle \sum_{i=1}^{n} f_i g_i, c\rangle = 0, \text{ para todo } f_i \in Jac(C^*)^n, g_i \in Jac(C^*) \\
&\Longleftrightarrow \sum_{i=1}^{n} \langle f_i, c_1\rangle\langle g_i, c_2\rangle = 0, \text{ para todo } f_i \in Jac(C^*)^n, g_i \in Jac(C^*) \\
&\Longleftrightarrow \Delta(c) \in (Jac(C^*)^n)^\perp \otimes C + C \otimes Jac(C^*)^\perp \\
&\stackrel{\text{(HI)}}{\Longleftrightarrow} \Delta(c) \in C_{n-1} \otimes C + C \otimes C_0 \\
&\Longleftrightarrow c \in C_n,
\end{aligned}$$

onde (HI) denota a hipótese de indução.

A definição e o resultado a seguir justificam a nomenclatura filtração coradical. A demonstração da proposição aqui apresentada é baseada em [M, Teor. 5.2.2].

Definição 2.1.6 *Seja C uma coálgebra. Uma família $\{\widetilde{C}_n\}_{n\geq 0}$ de subespaços é dita uma filtração de coálgebras de C se:*

1. $\widetilde{C}_i \subseteq \widetilde{C}_{i+1}$, *para todo* $i \geq 0$;
2. $\Delta(\widetilde{C}_n) \subseteq \sum\limits_{i=0}^{n} \widetilde{C}_i \otimes \widetilde{C}_{n-i}$, *para todo* $n \geq 0$;
3. $C = \bigcup\limits_{n\geq 0} \widetilde{C}_n$.

Proposição 2.1.7 *A filtração coradical $\{C_n\}_{n\geq 0}$ de uma coálgebra C é uma filtração de coálgebras.*

Dem.:

1. Façamos indução sobre i. Para $i = 0$:

$$c \in C_0 \Longrightarrow \Delta(c) \in C_0 \otimes C_0 \subseteq C_0 \otimes C + C \otimes C_0 \Longrightarrow c \in C_0 \wedge C_0 = C_1.$$

Agora suponha que o resultado é válido para i, então:

$$
\begin{aligned}
c \in C_i = \wedge^{i+1} C_0 = C_{i-1} \wedge C_0 \Longrightarrow \Delta(c) &\in C_{i-1} \otimes C + C \otimes C_0 \\
&\overset{\text{(HI)}}{\subseteq} C_i \otimes C + C \otimes C_0 \\
\Longrightarrow c &\in C_i \wedge C_0 = C_{i+1}.
\end{aligned}
$$

2. Note que $C_n = (Jac(C^*)^{n+1})^{\perp}$ para todo $n \geq 0$ e disto segue que C_n é subcoálgebra já que $Jac(C^*)^{n+1}$ é ideal bilateral (em C^*) para todo $n \geq 0$. Logo, já temos o resultado para $n = 0$.

Agora, se $n > 0$, da associatividade do produto wedge, também temos que:

$$C_n = C_i \wedge C_{n-i-1}, 0 \leq i \leq n-1,$$

Mas C_n é subcoálgebra, logo:

$$
\begin{aligned}
&\Delta(C_n) \subseteq (C_i \otimes C + C \otimes C_{n-i-1}) \cap (C_n \otimes C_n), 0 \leq i \leq n-1 \\
\Longrightarrow &\Delta(C_n) \subseteq \left[\bigcap_{j=0}^{n-1} (C_j \otimes C + C \otimes C_{n-j-1}) \right] \cap (C_n \otimes C_n) := S.
\end{aligned}
$$

Afirmação: $S = \sum_{i=0}^{n} C_i \otimes C_{n-i}$.

" $\supseteq$ " : Esta inclusão é imediata visto que $C_i \otimes C_{n-i} \subseteq C_n \otimes C_n$ para todo $0 \leq i \leq n$, $C_i \otimes C_{n-i} \subseteq C_j \otimes C$ quando $i \leq j \leq n-1$ e $C_i \otimes C_{n-i} \subseteq C \otimes C_{n-j-1}$ quando $0 \leq j \leq i-1$.
" $\subseteq$ " : Considere $C_{i,i+1}$ um complemento de C_i em C_{i+1} (como espaço vetorial). Dessa forma,

$$
\begin{aligned}
C_n \otimes C_n &= (C_0 \oplus C_{0,1} \oplus \cdots \oplus C_{n-1,n}) \otimes C_n \\
&= (C_0 \otimes C_n) \oplus (C_{0,1} \otimes C_n) \oplus \cdots \oplus (C_{n-1,n} \otimes C_n).
\end{aligned}
$$

Dado $z \in S$, em particular, $z \in C_n \otimes C_n$. Então:

$$z = z_0 + z_1 + \cdots + z_n \ (*),$$

onde $z_0 \in C_0 \otimes C_n, z_1 \in C_{0,1} \otimes C_n, \cdots, z_n \in C_{n-1,n} \otimes C_n$. Vamos provar que $z_i \in C_i \otimes C_{n-i}$ para todo $0 \leq i \leq n$. De fato, se $i = 0$ é óbvio. Agora, seja $1 \leq i \leq n$. De $z \in S$, temos que:

$$\begin{aligned} z &\in (C_{i-1} \otimes C + C \otimes C_{n-i}) \\ &= (C_{i-1} \otimes C) \oplus (C_{i-1,i} \otimes C_{n-i}) \oplus (C_{i,\infty} \otimes C_{n-i}) \\ &\subseteq (C_{i-1} \otimes C) \oplus (C_{i-1,i} \otimes C_{n-i}) \oplus (C_{i,\infty} \otimes C_n), \end{aligned}$$

onde $C_{i,\infty} = \bigoplus_{k=i}^{\infty} C_{k,k+1}$. Observar que aqui foi utilizado o item 3, a fim de garantir que $C_i \oplus C_{i,\infty} = C$. Notar também que:

$$(z_0 + \cdots + z_{i-1}) \in C_{i-1} \otimes C_n \subseteq C_{i-1} \otimes C.$$

Claramente, $(z_{i+1} + \cdots + z_n) \in C_{i,\infty} \otimes C_n$. Assim,

$$z_i \in (C_{i-1} \otimes C) \oplus (C_{i-1,i} \otimes C_{n-i}) \oplus (C_{i,\infty} \otimes C_n).$$

Mais ainda, de $z_i \in C_{i-1,i} \otimes C_n$, por hipótese, e $C_{n-i} \subseteq C_n$, podemos assumir que:

$$z_i \in (C_{i-1} \otimes C_n) \oplus (C_{i-1,i} \otimes C_{n-i}) \oplus (C_{i,\infty} \otimes C_n).$$

Com efeito, tome $f : C \to \Bbbk$ um funcional tal que $f(C_n) = 0$. Então:

$$0 = l_C^{-1}(id \otimes f)(z_i) = l_C^{-1}(id \otimes f)(a + b + c) = l_C^{-1}(id \otimes f)(a),$$

onde $a \in C_{i-1} \otimes C,\ b \in C_{i-1,i} \otimes C_{n-i}$ e $c \in C_{i,\infty} \otimes C_n$. Se $a \in [(C_{i-1} \otimes C) \backslash (C_{i-1} \otimes C_n)]$, sempre é possível colocar mais hipóteses sobre o funcional f de modo que $l_C^{-1}(id \otimes f)(a) \neq 0$, o que geraria uma contradição. Logo, podemos fazer a suposição acima $(**)$.

Agora, sejam $a \in C_{i-1} \otimes C_n,\ b \in C_{i-1,i} \otimes C_{n-i}$ e $c \in C_{i,\infty} \otimes C_n$ tais que $z_i = a + b + c$. Se $c \neq 0$, temos que $z_i \notin C_{i-1,i} \otimes C_n$, o que é um absurdo. E se $a \neq 0$, temos outro absurdo com a unicidade da decomposição $(*)$, já que:

$$(C_0 \otimes C_n) \oplus (C_{0,1} \otimes C_n) \oplus \cdots \oplus (C_{i-2,i-1} \otimes C_n) = C_{i-1} \otimes C_n$$

Logo, $z_i \in C_{i-1,i} \otimes C_{n-i} \subseteq C_i \otimes C_{n-i}$. Portanto,

$$S = \sum_{i=0}^{n} C_i \otimes C_{n-i} \Longrightarrow \Delta(C_n) \subseteq \sum_{i=0}^{n} C_i \otimes C_{n-i}.$$

3. Como toda coálgebra é a união de suas subcoálgebras de dimensão finita (ver [M, Teor. 5.1.1]), basta verificar que cada subcoálgebra de dimensão finita D de C está contida em C_n para algum $n \geq 0$. Para mostrar isso, será utilizado o fato de que para qualquer subcoálgebra D de C vale que:

$$D_0 = D \cap C_0,$$

fato este que será visto ao final desta demonstração. Então, seja D uma subcoálgebra de dimensão finita de C. Já vimos que $Jac(D^*) = D_0^\perp$. Assim, $(D_0^\perp)^n = 0$ para n suficientemente grande, já que o radical de Jacobson de qualquer álgebra de dimensão finita é um ideal nilpotente (ver [L, Teor. 4.12]). Logo,

$$D = 0^\perp = ((D_0^\perp)^n)^\perp = (Jac(D^*)^n)^\perp = D_{n-1} = \wedge_D^n D_0,$$

onde $\wedge_D$ denota o produto wedge na subcoálgebra D. Mas, $\wedge_D^n D_0 \subseteq \wedge_C^n D_0$. Portanto,

$$D = \wedge_D^n D_0 \subseteq \wedge_C^n D_0 \overset{D_0 = D \cap C_0}{\subseteq} \wedge_C^n C_0 = C_{n-1},$$

e temos o que queríamos.

Falta provar que:

$$D_0 = D \cap C_0,$$

onde D é subcoálgebra de C.

" $\subseteq$ " : Imediato, pois se D' é uma subcoálgebra simples de D também o é de C.

" $\supseteq$ " : Digamos que $C_0 = \bigoplus_{\alpha \in \Lambda} T_\alpha$ com T_α subcoálgebra simples de C para todo $\alpha \in \Lambda$. Seja $d \in D \cap C_0$. Em particular, $d = \sum_{i=1}^{n} t_{\alpha_i}, \alpha_i \in \Lambda$ e $t_{\alpha_i} \in T_{\alpha_i}$. Para cada $1 \leq i \leq n$, tome $f_i \in (C_0)^*$ tal que $f_i|_{T_{\alpha_i}} = \varepsilon|_{T_{\alpha_i}}$ e $f_i|_{T_\beta} = 0$, se $\beta \neq \alpha_i$.

Por um lado,

$$f_i \rightharpoonup d := \langle f_i, d_2 \rangle d_1 \in D \cap C_0,$$

para todo $i = 1, \cdots, n$, uma vez que $D \cap C_0$ é uma subcoálgebra de C. Por outro lado, para todo $i = 1, \cdots, n$:

$$f_i \rightharpoonup d = \langle f_i, d_2 \rangle d_1 = \sum_{j=1}^{n} \langle f_i, (t_{\alpha_j})_2 \rangle (t_{\alpha_j})_1 = \langle \varepsilon, (t_{\alpha_i})_2 \rangle (t_{\alpha_i})_1 = t_{\alpha_i}.$$

Logo, para todo $i = 1, \cdots, n$:

$$t_{\alpha_i} \in D \cap C_0 \Longrightarrow t_{\alpha_i} \in D \cap T_{\alpha_i} \Longrightarrow d \in \bigoplus_{\alpha \in \Lambda} (D \cap T_\alpha).$$

Assim, $D \cap C_0 \subseteq \bigoplus_{\alpha \in \Lambda} (D \cap T_\alpha) \subseteq D_0$.

$\square$

Observação 2.1.8 *O tipo de truque feito para se mostrar* $(**)$ *será utilizado mais vezes durante o trabalho. Nas demais vezes não faremos os detalhes, somente faremos a referência ao tipo de truque.*

Observe que até agora, nesta seção, só utilizamos propriedades de coálgebras. Dessa forma, é natural esperar que se H é uma álgebra de Hopf, então a filtração coradical $\{H_n\}_{n \geq 0}$ não é somente uma filtração de coálgebras. Lembremos que $\{\widetilde{H}_n\}_{n \geq 0}$ é dita uma *filtração de álgebras de Hopf*, se:

- $\{\widetilde{H}_n\}_{n \geq 0}$ é uma filtração de álgebras, ou seja:
  - $\widetilde{H}_i \subseteq \widetilde{H}_{i+1}$, para todo $i \geq 0$;
  - $\widetilde{H}_n \widetilde{H}_m \subseteq \widetilde{H}_{m+n}$, para todo $m, n \geq 0$;
  - $H = \bigcup_{n \geq 0} \widetilde{H}_n$.
- $\{\widetilde{H}_n\}_{n \geq 0}$ é uma filtração de coálgebras;
- $\mathcal{S}(\widetilde{H}_n) \subseteq \widetilde{H}_n$, para todo $n \geq 0$.

Notemos que se $\{\widetilde{H}_n\}_{n \geq 0}$ é uma filtração qualquer de álgebras de Hopf de H, então $\widetilde{H}_0$ é uma subálgebra de Hopf de H. Este fato nem sempre ocorre com o coradical de H, como mostra o próximo exemplo.

Exemplo 2.1.9 *Seja*

$$\begin{aligned} \mathcal{K} = \Bbbk\langle a, b, c, d;\ & ab = \xi ba \quad && ac = \xi ca \quad && a^4 = 1 \\ & cb = 0 = bc && b^2 = 0 = c^2 && cd = \xi dc \\ & a^2 c = b && bd = \xi db && ad = 1 = da \rangle, \end{aligned}$$

onde ξ *é uma raiz quarta primitiva da unidade e* $\Bbbk$ *é um corpo algebricamente fechado de característica* 0. $\mathcal{K}$ *é uma álgebra de Hopf de dimensão* 8 *(ver* [*BG*, *pág.* 11]*) com:*

$$\begin{aligned} \Delta(a) &= a \otimes a + b \otimes c \qquad & \Delta(b) &= a \otimes b + b \otimes d \\ \Delta(c) &= c \otimes a + d \otimes c & \Delta(d) &= c \otimes b + d \otimes d, \end{aligned}$$

e, $\varepsilon(a) = 1 = \varepsilon(d)$ *e* $\varepsilon(b) = 0 = \varepsilon(c)$*. Mais ainda, em [BG], vê-se que como coálgebra,*

$$\mathcal{K} \simeq H_4 \oplus \mathcal{M}^*(2, \Bbbk),$$

onde H_4 *é a álgebra de Sweedler. Assim, como coálgebra,*

$$\mathcal{K}_0 \simeq \Bbbk C_2 \oplus \mathcal{M}^*(2, \Bbbk),$$

onde C_2 *é o grupo cíclico de ordem* 2*. Logo* $\mathcal{K}_0$ *tem dimensão* 6 *e pelo Teorema de Nichols-Zoeller,* $\mathcal{K}_0$ *não pode ser subálgebra de Hopf de* $\mathcal{K}$*, pois* $\dim \mathcal{K}_0$ *não divide* $\dim \mathcal{K}$*.*

Assim, a fim de que a filtração coradical seja uma filtração de álgebras de Hopf, é necessário que H_0 seja uma subálgebra de Hopf de H. O interessante é que isso é justamente o suficiente.

Proposição 2.1.10 *A filtração coradical* $\{H_n\}_{n \geq 0}$ *de uma álgebra de Hopf* H *é uma filtração de álgebras de Hopf se, e somente se,* H_0 *é uma subálgebra de Hopf de* H*.*

Dem.:
($\Rightarrow$) Imediato.
($\Leftarrow$) Como já mostramos que é uma filtração de coálgebras, resta mostrar que:

1. $H_n H_m \subseteq H_{n+m}$, para todo $n, m \geq 0$;

2. $\mathcal{S}(H_n) \subseteq H_n$, para todo $n \geq 0$.

Para o item 2, basta fazer indução utilizando a fórmula $\mathcal{S}(D \wedge E) \subseteq \mathcal{S}(E) \wedge \mathcal{S}(D)$ e o fato de que $\mathcal{S}(H_0) \subseteq H_0$.

Já para o item 1, vamos utilizar indução sobre as variáveis m e n:
$n, m = 0$: Imediato, pois $H_0^2 = H_0 H_0 \subseteq H_0$.
$n = 0, (m-1) \Rightarrow m$: Por (HI), $H_0 H_{m-1} \subseteq H_{m-1}$. Então,

$$\begin{aligned} \Delta(H_0 H_m) = & \ \Delta(H_0)\Delta(H_m) \subseteq (H_0 \otimes H_0)(H_0 \otimes H + H \otimes H_{m-1}) \\ \subseteq & \ H_0^2 \otimes H + H \otimes H_0 H_{m-1} \\ \overset{\text{(HI)}}{\subseteq} & \ H_0 \otimes H + H \otimes H_{m-1}, \end{aligned}$$

o que implica $H_0 H_m \subseteq H_m$.
$m = 0, (n-1) \Rightarrow n$: Análogo ao anterior.

$n, m > 0$: Por (HI), $H_{n-1}H_r \subseteq H_{n+r-1}$ e $H_rH_{m-1} \subseteq H_{m+r-1}$, para todo $r \geq 0$. Então,

$$\begin{aligned}
\Delta(H_nH_m) = &\ \Delta(H_n)\Delta(H_m) \\
\subseteq &\ (H_0 \otimes H_n + H_n \otimes H_{n-1})(H_0 \otimes H_m + H_m \otimes H_{m-1}) \\
\subseteq &\ H_0^2 \otimes H + H \otimes H_nH_{m-1} + H \otimes H_{n-1}H_m + H \otimes H_{n-1}H_{m-1} \\
\overset{\text{(HI)}}{\subseteq} &\ H_0 \otimes H + H \otimes (H_{n+m-1} + H_{n+m-1} + H_{n+m-2}) \\
= &\ H_0 \otimes H + H \otimes H_{n+m-1},
\end{aligned}$$

o que garante $H_nH_m \subseteq H_{n+m}$. Observar que utilizamos:

$$\Delta(H_n) \subseteq H_0 \otimes H_n + H_n \otimes H_{n-1}$$

em vez de $H_0 \otimes H + H \otimes H_{n-1}$. Isto pode ser feito tendo em vista que cada H_n é uma subcoálgebra, o encaixe da filtração coradical e a Observação 2.1.8.

□

A partir deste momento, admitiremos nesta seção que H satisfaz a *propriedade de Chevalley*, isto é, que H_0 é uma subálgebra de Hopf de H.

Observação 2.1.11 *A noção da propriedade de Chevalley no contexto de álgebras de Hopf foi introduzido em* [*AEG*]. *Neste artigo, é dito que uma álgebra de Hopf H possui a propriedade de Chevalley se a categoria dos H-módulos Rep(H) a possui. Diferentemente de* [*AEG*], *em* [*CDMM, Seção 1*], *os autores referem a propriedade de Chevalley à categoria dos H-comódulos; esta é definição que adotamos e que, por sua vez, é equivalente a dizer que o coradical de H é uma subálgebra de Hopf.*

Em particular, a filtração coradical $\{H_n\}_{n\geq 0}$ é uma filtração de álgebras. Assim, podemos associar a *álgebra graduada*:

$$grH = \bigoplus_{n\geq 0} H_n/H_{n-1} = \bigoplus_{n\geq 0} H_{(n)},\ \ H_{-1} := 0.$$

Recordar que a estrutura de álgebra de grH é dada de tal forma que:

$$(x + H_{(n-1)})(y + H_{(m-1)}) = xy + H_{n+m-1},$$

e, logo, satisfaz $H_{(n)}H_{(m)} \subseteq H_{(n+m)}$. O próximo lema nos diz que, a partir do fato de a filtração coradical ser uma filtração de álgebras de Hopf, podemos dar "mais estrutura" à algebra grH.

Lema 2.1.12 *O fato de a filtração coradical ser uma filtração de álgebras de Hopf nos permite dar uma estrutura de álgebra de Hopf graduada à álgebra grH, ou seja, que além de ser uma álgebra graduada, seja uma álgebra de Hopf e satisfaça:*

1. $\Delta_{grH}(H_{(n)}) \subseteq \sum_{i=0}^{n} H_{(i)} \otimes H_{(n-i)}$, *para todo* $n \geq 0$;

2. $\varepsilon_{grH}(H_{(n)}) = 0$, *para todo* $n \geq 1$;

3. $\mathcal{S}_{grH}(H_{(n)}) \subseteq H_{(n)}$, *para todo* $n \geq 0$.

Dem.: Com efeito, para definirmos a comultiplicação, counidade e antípoda em grH basta definir em cada componente homogênea $H_{(n)}$ e estender por linearidade. Para $n = 0$, definimos:

$$\Delta_{H_{(0)}} = \Delta|_{H_0}, \varepsilon_{H_{(0)}} = \varepsilon|_{H_0} \text{ e } \mathcal{S}_{H_{(0)}} = \mathcal{S}|_{H_0}.$$

Já para $n > 0$, definimos $\varepsilon_{H_{(n)}} = 0$, e $\Delta_{H_{(n)}}, \mathcal{S}_{H_{(n)}}$ os únicos morfismos lineares tais que os respectivos diagramas comutem:

$$\begin{tikzcd} H_n \arrow[r, "\Delta|_{H_n}"] \arrow[d, "\pi_n"'] & \sum_{i=0}^{n} H_i \otimes H_{n-i} \arrow[d, "\varphi_n = \sum_{i=0}^{n} \pi_i \otimes \pi_{n-i}"] \\ H_{(n)} \arrow[r, dashed, "\Delta_{H_{(n)}}"'] & \sum_{i=0}^{n} H_{(i)} \otimes H_{(n-i)} \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} H_n \arrow[r, "\mathcal{S}|_{H_n}"] \arrow[d, "\pi_n"'] & H_n \arrow[d, "\pi_n"] \\ H_{(n)} \arrow[r, dashed, "\mathcal{S}_{H_{(n)}}"'] & H_{(n)} \end{tikzcd}$$

onde $\pi_i : H_i \to H_{(i)}$ é a projeção natural, ou seja, $\pi_i(x) = x + H_{i-1}$, para todo $x \in H_i$.

Observe que a função π_i somente está definida para H_i, entretanto, ela é facilmente estendível para H via: $H \to H/H_{i-1},\ h \mapsto h + H_{i-1}$. No que segue, utilizaremos para esta extensão a notação $\widetilde{\pi}_i$.

Note que $\varphi_n = \sum_{i=0}^{n} \pi_i \otimes \pi_{n-i}$ está bem definida. De fato, para $j = 1, \cdots, n$, defina:

$$\widetilde{\varphi}_j : \sum_{i=0}^{j} H_i \otimes H_{n-i} \longrightarrow \sum_{i=0}^{j} H_{(i)} \otimes H_{(n-i)},\ \widetilde{\varphi}_j = \sum_{i=0}^{j} \pi_i \otimes \pi_{n-i}.$$

Observe que $\widetilde{\varphi}_n = \varphi_n$. Assim, se mostrarmos por indução que $\widetilde{\varphi}_j$ está bem definida para $j = 1, \cdots, n$, segue o resultado.

De fato, para $j = 1$, seja $x \in (H_0 \otimes H_n) \cap (H_1 \otimes H_{n-1}) = H_0 \otimes H_{n-1}$ (relembremos que vale a fórmula $(A \otimes B) \cap (C \otimes D) = (A \cap C) \otimes (B \cap D)$ para A, C e B, D subespaços de um mesmo espaço vetorial, respectivamente). Então,

$$(\pi_0 \otimes \pi_n)(x) = 0 = (\pi_1 \otimes \pi_{n-1})(x),$$

o que implica que $\widetilde{\varphi}_1$ está bem definida.

Agora, para $1 < j \leq n$, seja $x \in [\sum_{i=0}^{j-1} H_i \otimes H_{n-i}] \cap [H_j \otimes H_{n-j}]$. De $x \in \sum_{i=0}^{j-1} H_i \otimes H_{n-i}$,

$$x = \sum_{i=1}^{i_0} x_{i,0} \otimes x^{i,n} + \sum_{i=1}^{i_1} x_{i,1} \otimes x^{i,n-1} + \cdots + \sum_{i=1}^{i_{j-1}} x_{i,j-1} \otimes x^{i,n-j+1},$$

com $x_{i,k} \in H_k, x^{i,n-k} \in H_{n-k}$, para todo $i = 1, \cdots, i_k$ com $0 \leq k \leq j-1$. Como x também pertence a $H_j \otimes H_{n-j}$, tem-se que $(id \otimes \pi_n)(x) = 0$. Mas, por outro lado:

$$\begin{aligned}(id \otimes \pi_n)(x) &= (id \otimes \pi_n)(\sum_{i=1}^{i_0} x_{i,0} \otimes x^{i,n} + \cdots + \sum_{i=1}^{i_{j-1}} x_{i,j-1} \otimes x^{i,n-j+1}) \\ &= \sum_{i=1}^{i_0} x_{i,0} \otimes \pi_n(x^{i,n}) + \cdots + \sum_{i=1}^{i_{j-1}} x_{i,j-1} \otimes \pi_n(x^{i,n-j+1}) = \sum_{i=1}^{i_0} x_{i,0} \otimes \pi_n(x^{i,n}).\end{aligned}$$

Assim,

$$0 = (\pi_0 \otimes id)(0) = (\pi_0 \otimes id)(\sum_{i=1}^{i_0} x_{i,0} \otimes \pi_n(x^{i,n})) = (\pi_0 \otimes \pi_n)(\sum_{i=1}^{i_0} x_{i,0} \otimes x^{i,n}).$$

Mais ainda, de forma geral temos que $(id \otimes \widetilde{\pi}_{n-k})(x) = 0$ para $0 \leq k \leq j-1$, pois $x \in H_j \otimes H_{n-j}$. E, por outro lado:

$$\begin{aligned}(id \otimes \widetilde{\pi}_{n-k})(x) &= (id \otimes \widetilde{\pi}_{n-k})(\sum_{i=1}^{i_0} x_{i,0} \otimes x^{i,n} + \cdots + \sum_{i=1}^{i_{j-1}} x_{i,j-1} \otimes x^{i,n-j+1}) \\ &= \sum_{i=1}^{i_0} x_{i,0} \otimes \widetilde{\pi}_{n-k}(x^{i,n}) + \cdots + \sum_{i=1}^{i_k} x_{i,k} \otimes \widetilde{\pi}_{n-k}(x^{i,n-k}).\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}0 = (\pi_k \otimes id)(0) &= (\pi_k \otimes id)(\sum_{i=1}^{i_0} x_{i,0} \otimes \widetilde{\pi}_{n-k}(x^{i,n}) + \cdots + \sum_{i=1}^{i_k} x_{i,k} \otimes \widetilde{\pi}_{n-k}(x^{i,n-k})) \\ &= (\pi_k \otimes id)(\sum_{i=1}^{i_k} x_{i,k} \otimes \widetilde{\pi}_{n-k}(x^{i,n-k})) = (\pi_k \otimes \pi_{n-k})(\sum_{i=1}^{i_k} x_{i,k} \otimes x^{i,n-k}).\end{aligned}$$

Resumindo,

$$(\pi_k \otimes \pi_{n-k})(\sum_{i=1}^{i_k} x_{i,k} \otimes x^{i,n-k}) = 0,$$

para todo $0 \leq k \leq j-1$, o que implica que:

$$\widetilde{\varphi}_{j-1}(x) = (\sum_{i=0}^{j-1} \pi_i \otimes \pi_{n-i})(x) = 0.$$

Mas, nitidamente, $(\pi_j \otimes \pi_{n-j})(x) = 0$, já que $x \in \sum_{i=0}^{j-1} H_i \otimes H_{n-1} \subseteq H_{j-1} \otimes H_n$. Portanto temos que o morfismo $\widetilde{\varphi}_j$ está bem definido e, consequentemente, φ_n também o está.

Agora voltando aos morfismos $\varepsilon_{H_{(n)}}, \Delta_{H_{(n)}}$ e $\mathcal{S}_{H_{(n)}}$. Note que eles preservam graduação, assim, a fim de que grH seja uma álgebra de Hopf graduada basta verificar que ela é, de fato, uma álgebra de Hopf.

1. Coassociatividade. Como definimos a comultiplicação em cada componente homogênea de grH, basta verificar a coassociatividade em cada uma delas. Para tanto, observe o seguinte diagrama:

$$\begin{tikzcd}
H_n \arrow[rrr, "\Delta|_{H_n}"] \arrow[dr, "\pi_n"] \arrow[ddddd, "\Delta|_{H_n}"'] & & & \sum_{i=0}^{n} H_i \otimes H_{n-i} \arrow[dl, "\varphi_n"'] \arrow[dd, "\Delta \otimes id"] \\
& H_{(n)} \arrow[r, "\Delta_{H_{(n)}}"] \arrow[ddd, "\Delta_{H_{(n)}}"] & \sum_{i=0}^{n} H_{(i)} \otimes H_{(n-i)} \arrow[d, "\Delta_{grH} \otimes id"] & \\
& & \sum_{i=0}^{n} (\sum_{j=0}^{i} H_{(j)} \otimes H_{(i-j)}) \otimes H_{(n-i)} \arrow[d, equal] & \sum_{i=0}^{n} (\sum_{j=0}^{i} H_j \otimes H_{i-j}) \otimes H_{n-i} \arrow[l, "\sum_{i=0}^{n} \varphi_i \otimes \pi_{n-i}"'] \arrow[d, equal] \\
& & \sum_{\substack{i,j,k \geq 0 \\ i+j+k=n}} H_{(i)} \otimes H_{(j)} \otimes H_{(k)} \arrow[d, equal] & \sum_{\substack{i,j,k \geq 0 \\ i+j+k=n}} H_i \otimes H_j \otimes H_k \arrow[l, "\sum_{\substack{i,j,k \geq 0 \\ i+j+k=n}} \pi_i \otimes \pi_j \otimes \pi_k"'] \arrow[dd, equal] \\
& \sum_{i=0}^{n} H_{(i)} \otimes H_{(n-i)} \arrow[r, "id \otimes \Delta_{grH}"] & \sum_{i=0}^{n} H_{(i)} \otimes (\sum_{j=0}^{n-i} H_{(j)} \otimes H_{(n-i-j)}) & \\
\sum_{i=0}^{n} H_i \otimes H_{n-i} \arrow[ur, "\varphi_n"] \arrow[rrr, "id \otimes \Delta"'] & & & \sum_{i=0}^{n} H_i \otimes (\sum_{j=0}^{n-i} H_j \otimes H_{n-i-j}) \arrow[ul, "\sum_{i=0}^{n} \pi_i \otimes \varphi_{n-i}"']
\end{tikzcd}$$

Como o diagrama externo comuta por H ser coálgebra e o diagrama de cima e o da esquerda comutam pela definição de $\Delta_{H_{(n)}}$, se verificarmos que o diagrama de baixo e o da direita comutam segue que o diagrama interno comuta, o que representa a coassociatividade de Δ_{grH} na componente $H_{(n)}$.

Vejamos o de baixo (o da direita é análogo). Seja $x \in \sum_{i=0}^{n} H_i \otimes H_{n-i}$. Note que podemos assumir $x = \sum_{i=0}^{n} x_i \otimes x^{n-i}$ com $x_i \in H_i$ e $x^{n-i} \in H_{n-i}$, para $i = 0, \cdots, n$. Ou seja, tomamos um termo da forma $x_i \otimes x^{n-i}$ para representar um elemento genérico de $H_i \otimes H_{n-i}$, que seria formado por somas de termos desta forma. Assim,

$$\begin{aligned}
(id \otimes \Delta_{grH})\varphi_n(x) &= (id \otimes \Delta_{grH})(\sum_{i=0}^{n} \pi_i(x_i) \otimes \pi_{n-i}(x^{n-i})) \\
&= \sum_{i=0}^{n} \pi_i(x_i) \otimes \Delta_{H_{(n-i)}} \pi_{n-i}(x^{n-i}) \\
&\overset{(*)}{=} \sum_{i=0}^{n} \pi_i(x_i) \otimes \varphi_{n-i}\Delta(x^{n-i}) \\
&= (\sum_{i=0}^{n} \pi_i \otimes \varphi_{n-i})(\sum_{i=0}^{n} x_i \otimes \Delta(x^{n-i})) \\
&= (\sum_{i=0}^{n} \pi_i \otimes \varphi_{n-i})(id \otimes \Delta)(x),
\end{aligned}$$

sendo que $(*)$ vale pela definição de $\Delta_{H_{(n-i)}}$.

2. Counidade. Seja $x \in H_n$. Então, podemos assumir, assim como no item anterior, que $\Delta(x) = \sum_{i=0}^{n} x_i \otimes x^{n-i} \in \sum_{i=0}^{n} H_i \otimes H_{n-i}$. Usando que H é coálgebra temos que:

$$\begin{aligned}
x = \sum_{i=0}^{n} \varepsilon(x_i)x^{n-i} \Longrightarrow x + H_{n-1} &= (\sum_{i=0}^{n} \varepsilon(x_i)x^{n-i}) + H_{n-1} \\
&= \sum_{i=0}^{n} \varepsilon(x_i)(x^{n-i} + H_{n-1}) \\
&= \varepsilon(x_0)x^n + H_{n-1}.
\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
r_{grH}^{-1}(\varepsilon_{grH} \otimes id)\Delta_{grH}(x + H_{n-1}) &= \sum_{i=0}^{n} \varepsilon_{grH}(x_i + H_{i-1})(x^{n-i} + H_{n-i-1}) \\
&= \varepsilon(x_0)(x^n + H_{n-1}),
\end{aligned}$$

tendo em vista a definição de ε_{grH}. Logo, vale um dos lados do diagrama de counidade e o outro é análogo.

3. Δ_{grH} morfismo de álgebras. Dados $x \in H_n$ e $y \in H_m$ temos, $\Delta(x) = \sum_{i=0}^{n} x_i \otimes x^{n-i} \in \sum_{i=0}^{n} H_i \otimes H_{n-i}$ e $\Delta(y) = \sum_{j=0}^{m} y_j \otimes y^{m-j} \in \sum_{j=0}^{m} H_j \otimes H_{m-j}$. Logo,

$$\Delta(xy) = \Delta(x)\Delta(y) = (\sum_{i=0}^{n} x_i \otimes x^{n-i})(\sum_{j=0}^{m} y_j \otimes y^{m-j})$$

$$= \sum_{\substack{0\leq i\leq n\\ 0\leq j\leq m}} \underbrace{x_i y_j}_{\in H_{i+j}} \otimes \underbrace{x^{n-i}y^{m-j}}_{\in H_{n+m-(i+j)}} \in \sum_{k=0}^{n+m} H_k \otimes H_{n+m-k}.$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned}
\Delta_{grH}((x+H_{n-1})(y+H_{m-1})) &= \Delta_{grH}(xy+H_{n+m-1}) = \Delta_{(n+m)}(xy+H_{n+m-1}) \\
&= \sum_{\substack{0\leq i\leq n\\ 0\leq j\leq m}} (x_i y_j + H_{i+j-1}) \otimes (x^{n-i}y^{m-j} + H_{n+m-(i+j+1)}) \\
&= \left[\sum_{i=0}^{n} (x_i + H_{i-1}) \otimes (x^{n-i} + H_{n-i-1})\right] \\
&\quad \left[\sum_{j=0}^{m} (y_j + H_{j-1}) \otimes (y^{m-j} + H_{m-j-1})\right] \\
&= \Delta_{grH}(x+H_{n-1})\Delta_{grH}(y+H_{m-1}).
\end{aligned}$$

4. ε_{grH} morfismo de álgebras. Sejam $x+H_{n-1} \in H_{(n)}$ e $y+H_{m-1} \in H_{(m)}$. Se $n=m=0$, o resultado vem do fato que $\varepsilon_{H_{(0)}} = \varepsilon|_{H_0}$. Se $n>0$ ou $m>0$, então $n+m>0$ e o resultado segue pois $\varepsilon_{H_{(i)}} = 0$ para $i>0$.

5. $\mathcal{S}_{grH}$ é antípoda. Assim como no caso da coassociatividade, consideremos o seguinte diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\sum_{i=0}^{n} H_i \otimes H_{n-i} \arrow[rrr, "id_H \otimes \mathcal{S}_H"] \arrow[dr, "\varphi_n"] & & & \sum_{i=0}^{n} H_i \otimes H_{n-i} \arrow[dl, "\varphi_n"'] \arrow[dd, "m_H"] \\
& \sum_{i=0}^{n} H_{(i)} \otimes H_{(n-i)} \arrow[r, "id_{grH} \otimes \mathcal{S}_{grH}"] & \sum_{i=0}^{n} H_{(i)} \otimes H_{(n-i)} \arrow[d, "m_{grH}"] & \\
H_n \arrow[uu, "\Delta|_{H_n}"] \arrow[dd, "\Delta|_{H_n}"'] \arrow[r, "\pi_n"'] \arrow[rrr, bend left, "u\varepsilon"] & H_{(n)} \arrow[u, "\Delta_{H_{(n)}}"] \arrow[d, "\Delta_{H_{(n)}}"'] \arrow[r, "u_{grH}\varepsilon_{grH}"'] & H_{(n)} & H_n \arrow[l, "\pi_n"] \\
& \sum_{i=0}^{n} H_{(i)} \otimes H_{(n-i)} \arrow[r, "\mathcal{S}_{grH} \otimes id_{grH}"'] & \sum_{i=0}^{n} H_{(i)} \otimes H_{(n-i)} \arrow[u, "m_{grH}"'] & \\
\sum_{i=0}^{n} H_i \otimes H_{n-i} \arrow[rrr, "\mathcal{S}_H \otimes id_H"'] \arrow[ur, "\varphi_n"'] & & & \sum_{i=0}^{n} H_i \otimes H_{n-i} \arrow[ul, "\varphi_n"] \arrow[uu, "m_H"']
\end{tikzcd}$$

Note que o diagrama externo comuta por H ser álgebra de Hopf e os diagramas da esquerda ($\varphi_n \Delta|_{H_n} = \Delta_{H_{(n)}} \pi_n$) e os da direita ($\pi_n m_H = m_{grH} \varphi_n$) comutam pela definição de $\Delta_{H_{(n)}}$ e m_{grH}, respectivamente.

Se verificarmos que o diagrama inferior ($\varphi_n(\mathcal{S}_H \otimes id_H) = (\mathcal{S}_{grH} \otimes id_{grH})\varphi_n$) e o superior ($\varphi_n(id_H \otimes \mathcal{S}_H) = (id_{grH} \otimes \mathcal{S}_{grH})\varphi_n$) comutam, bem como o diagrama envolvendo as unidades e counidades ($\pi_n u\varepsilon = u_{grH}\varepsilon_{grH}\pi_n$), segue que o diagrama interno comuta, o que representa a propriedade da antípoda na componente $H_{(n)}$.

Para os diagramas inferior e superior basta utilizar a definição de $\mathcal{S}_{grH}$ e o raciocínio usado na demonstração da coassociatividade. Para o outro diagrama, considere $x \in H_n$. Por um lado:

$$\varepsilon_{grH}\pi_n(x) = \begin{cases} \varepsilon(x), & n = 0 \\ 0, & n > 0 \end{cases} \Longrightarrow u_{grH}\varepsilon_{grH}\pi_n(x) = \begin{cases} \varepsilon(x)1, & n = 0 \\ 0, & n > 0. \end{cases}$$

Por outro lado,

$$\pi_n u\varepsilon(x) = \pi_n(\varepsilon(x)1) = \begin{cases} \varepsilon(x)1, & n = 0 \\ 0, & n > 0. \end{cases}$$

Portanto, temos que $grH = \bigoplus\limits_{n\geq 0} H_{(n)}$ é uma álgebra de Hopf graduada.

$\square$

Observação 2.1.13 *Em nenhum momento da prova de que grH é uma álgebra de Hopf graduada foi utilizado o fato da filtração $\{H_n\}_{n\geq 0}$ ser exatamente a filtração coradical. Somente foram utilizados fatos de que $\{H_n\}_{n\geq 0}$ é uma filtração de álgebras de Hopf. Portanto, $grH = \bigoplus\limits_{n\geq 0} \widetilde{H}_n/\widetilde{H}_{n-1} = \bigoplus\limits_{n\geq 0} \widetilde{H}_{(n)}$ é uma álgebra de Hopf graduada para qualquer filtração de álgebras de Hopf $\{\widetilde{H}_n\}_{n\geq 0}$ de H.*

Sejam $\iota : H_0 \to grH$ a inclusão natural e $\pi : grH \to H_0$ a projeção homogênea, ou seja, $\pi(\sum\limits_{i\geq 0} x_i) = x_0,\ x_i \in H_{(i)}$. Observe que π e ι são morfismos de álgebras de Hopf tais que $\pi\iota = id_{H_0}$. Pelo que vimos no capítulo anterior (assumindo que H_0 tem antípoda bijetiva), o diagrama $R = (grH)^{co\pi}$ é uma álgebra de Hopf na categoria ${}^{H_0}_{H_0}\mathcal{YD}$. Mais ainda, vale $grH \simeq R\#H_0$.

A construção acima é possível pois estamos assumindo que H_0 é subálgebra de Hopf de H. E no caso em que H_0 não é subálgebra de Hopf de H? Podemos fazer alguma construção análoga? A filtração standard, objeto de estudo do próximo capítulo, tem o intuito de responder essas questões.

2.2 Argumentos de contagem para o cálculo da filtração coradical

Pelo exposto no final da seção anterior, é fundamental sabermos calcular o coradical (e a filtração coradical) de uma álgebra de Hopf. Nesta seção provaremos alguns resultados que nos ajudam no cálculo explícito desta filtração. Para tanto, a referência [AN] é de fundamental importância. Em toda esta seção, $\Bbbk$ denota um corpo algebricamente fechado e de característica 0.

Começamos vendo uma definição alternativa do coradical de uma coálgebra. Sejam C uma coálgebra e V um C-comódulo simples à esquerda com base $\{v_1, \cdots, v_n\}$. Se $\lambda : V \to C \otimes V$ denota a coação deste comódulo, então

$$\lambda(v_i) = \sum_{j=1}^{n} e_{ij} \otimes v_j,$$

com $e_{ij} \in C$, para todo $1 \leq i, j \leq n$. De $(id \otimes \lambda)\lambda = (\Delta \otimes id)\lambda$, segue que

$$\Delta(e_{ij}) = \sum_{k=1}^{n} e_{ik} \otimes e_{kj}.$$

Mais ainda, de $(\varepsilon \otimes id)\lambda = id$ temos que $\varepsilon(e_{ij}) = \delta_{ij}$. Assim, a partir do comódulo V, produzimos uma subcoálgebra de C, que é isomorfa à coálgebra simples $\mathcal{M}^*(n, \Bbbk)$ (ver [DNR, Exerc. 3.1.2]).

Reciprocamente, dada D uma subcoálgebra simples de C, sabemos pelo Teorema de Wedderburn que $D \simeq \mathcal{M}^*(n, \Bbbk)$ como coálgebras para algum $n \geq 1$. Assim, tomando

$$V_l = \Bbbk\{e_{il} : 1 \leq i \leq n\}, 1 \leq l \leq n,$$

vemos que V_l é um C-comódulo simples à esquerda (com $\lambda = \Delta|_{V_l}$) e que todos estes comódulos são dois a dois isomorfos. Logo, dada C uma coálgebra, se considerarmos $\widehat{C}$ o conjunto das classes de isomorfismo dos C-comódulos simples à esquerda e denotarmos por V_τ (respectivamente, V_τ^*) um C-comódulo simples à esquerda (respectivamente, à direita) de dimensão d_τ correspondente a $\tau \in \widehat{C}$, então podemos ver o coradical como:

$$C_0 \simeq \bigoplus_{\tau \in \widehat{C}} C_\tau,$$

onde C_τ é a subcoálgebra simples construída acima associada ao comódulo V_τ.

Também precisamos da noção de um bicomódulo. Dada uma coálgebra C, um *C-bicomódulo* M é um C-comódulo à esquerda (via λ) que também é um C-comódulo à direita (via ρ) e satisfaz a seguinte compatibilidade:

$$(\lambda \otimes id)\rho = (id \otimes \rho)\lambda.$$

Observe que as categorias dos C-bicomódulos ${}^C\mathcal{M}^C$ e dos $C \otimes C^{cop}$-comódulos ${}^{C\otimes C^{cop}}\mathcal{M}$ são isomorfas. Assim, usando que C_0 é cosemissimples, temos que todo C_0-bicomódulo M é a soma direta de C_0-sub-bicomódulos simples e todo C_0-bicomódulo simples é da forma $V_\tau \otimes V_\mu^*$ com $\tau, \mu \in \widehat{C}$, já que $C_0 \otimes (C_0)^{cop}$ é cosemissimples.

Como estamos admitindo $\Bbbk$ algebricamente fechado, temos que toda coálgebra C tem *coradical separável*, ou seja, toda subcoálgebra simples D de C tem a álgebra associada D^* separável. Assim, por [M, Teor. 5.4.2], existe $\pi : C \to C$ projeção de coálgebras tal que $Im(\pi) = C_0$. Logo, considerando $I = \ker(\pi)$, temos que C é um C_0-bicomódulo via:

$$\lambda = (\pi \otimes id)\Delta : C \to C_0 \otimes C$$
$$\rho = (id \otimes \pi)\Delta : C \to C \otimes C_0$$

Mais ainda, se $\{C_n\}_{n\geq 0}$ é a filtração coradical de C, então I e C_n ($n \geq 0$) são sub-bicomódulos de C. De fato,

$$\lambda(I) = (\pi \otimes id)\Delta(I) \subseteq (\pi \otimes id)(I \otimes C + C \otimes I) \subseteq C_0 \otimes I.$$

Analogamente, $\rho(I) \subseteq I \otimes C_0$. Para $C_n, n \geq 0$:

$$\lambda(C_n) = (\pi \otimes id)\Delta(C_n) \subseteq (\pi \otimes id)(C_n \otimes C_n) \subseteq C_0 \otimes C_n.$$

De forma análoga, $\rho(C_n) \subseteq C_n \otimes C_0$. Também podemos definir indutivamente:

$$\begin{aligned}
&P_0 = 0;\\
&P_1 = \{x \in C : \Delta(x) = \lambda(x) + \rho(x)\};\\
&P_2 = \{x \in C : \Delta(x) - \lambda(x) - \rho(x) \in P_1 \otimes P_1\};\\
&\quad\vdots\\
&P_n = \{x \in C : \Delta(x) - \lambda(x) - \rho(x) \in \sum_{i=1}^{n-1} P_i \otimes P_{n-i}\}, n \geq 2.
\end{aligned}$$

O seguinte lema expõe a relação entre a filtração coradical e a família $\{P_n\}_{n\geq 0}$ recém construída.

Lema 2.2.1 $[AN, Lema\ 1.1]$ *Nas condições acima:*

$$P_n = C_n \cap I,$$

para todo $n \geq 0$.

Dem.: Primeiramente, mostremos por indução que $P_n \subseteq C_n$ para todo $n \geq 0$. Para $n = 0$ é imediato pois $P_0 = 0$. Para ver o caso n implicando $n+1$, note que por hipótese de indução, $P_i \subseteq C_i$ para todo $i = 0, \cdots, n$. Então,

$$\begin{aligned} x \in P_{n+1} &\Longrightarrow \Delta(x) - \underbrace{\lambda(x)}_{\in C_0 \otimes C} - \underbrace{\rho(x)}_{\in C \otimes C_0} \in \sum_{i=1}^{n} P_i \otimes P_{n+1-i} \overset{\text{(HI)}}{\subseteq} \sum_{i=1}^{n} C_i \otimes C_{n+1-i} \\ &\Longrightarrow \Delta(x) \in C_0 \otimes C + C \otimes C_0 + \sum_{i=1}^{n} C_i \otimes C_{n+1-i} \subseteq C_0 \otimes C + C \otimes C_n \\ &\Longrightarrow x \in C_{n+1}. \end{aligned}$$

Agora provemos a afirmação do lema também por indução. Para $n = 0$, mais uma vez é imediato, já que $C = I \oplus C_0$. Para ver que o caso $n-1$ implica o n, temos por hipótese de indução que $P_i = C_i \cap I$ para todo $i = 0, \cdots, n-1$. Então,
" $\subseteq$ " : Seja $x \in P_n$. Pela parte anterior, basta verificar que $x \in I$. Como $x \in P_n$, podemos admitir que temos:

$$\Delta(x) = (\pi \otimes id)\Delta(x) + (id \otimes \pi)\Delta(x) + \sum_{i=1}^{n-1} x_i \otimes y_{n-i},$$

com $x_i, y_i \in P_i, 1 \leq i \leq n-1$. Aplicando $\pi \otimes \pi$, obtemos:

$$\begin{aligned} \Delta(\pi(x)) = (\pi \otimes \pi)\Delta(x) &= (\pi^2 \otimes \pi)\Delta(x) + (\pi \otimes \pi^2)\Delta(x) + \sum_{i=1}^{n-1} \pi(x_i) \otimes \pi(y_{n-i}) \\ &= 2(\pi \otimes \pi)\Delta(x)\ (= 2\Delta(\pi(x))), \end{aligned}$$

utilizando a hipótese de indução e o fato de que $\pi^2 = \pi$. Logo,

$$\Delta(\pi(x)) = 0 \Longrightarrow \pi(x) = 0 \Longrightarrow x \in I.$$

" $\supseteq$ " : Seja $x \in C_n \cap I$. Como $x \in C_n$, podemos considerar novamente que:

$$\Delta(x) = \sum_{i=0}^{n} x_i \otimes y_{n-i},$$

com $x_i, y_i \in C_i, 0 \leq i \leq n$. Como espaço vetorial,

$$C_i = C \cap C_i = (I \oplus C_0) \cap C_i = (C_i \cap I) \oplus C_0,$$

para todo $i \geq 0$ já que $C_0 \subseteq C_i$ para todo $i \geq 0$. Assim, escrevemos

$$x_i = x_{i,0} + x_{i,+},$$

para todo $i = 0, \cdots, n$, onde $x_{i,0} \in C_0$ e $x_{i,+} \in C_i \cap I$. De forma similar, também utilizamos a mesma notação para os $y_i, i = 0, \cdots, n$. A partir desta notação, vem que:

$$\begin{aligned}
\Delta(x) - \lambda(x) - \rho(x) &= \sum_{i=0}^{n} x_i \otimes y_{n-i} - (\pi \otimes id + id \otimes \pi)(\sum_{i=0}^{n} x_i \otimes y_{n-i}) \\
&= \sum_{i=0}^{n} x_i \otimes y_{n-i} - \sum_{i=0}^{n} x_{i,0} \otimes y_{n-i} - \sum_{i=0}^{n} x_i \otimes y_{n-i,0} \\
&= \sum_{i=0}^{n} x_{i,+} \otimes y_{n-i,+} - \sum_{i=0}^{n} x_{i,0} \otimes y_{n-i,0}.
\end{aligned}$$

Desde que $x \in I$, segue que $\Delta(x) \in C \otimes I + I \otimes C$. Assim, se $x_i \in I$ tem-se que $x_{i,0} = 0$ e se $x_i \notin I$ segue que $y_{n-i} \in I$ o que implica que $y_{n-i,0} = 0$. Resumindo:

$$\sum_{i=0}^{n} x_{i,0} \otimes y_{n-i,0} = 0.$$

Como $x_{0,+} = y_{0,+} = 0$, temos

$$\begin{aligned}
\Delta(x) - \lambda(x) - \rho(x) = \sum_{i=1}^{n-1} x_{i,+} \otimes y_{n-i,+} \in & \sum_{i=1}^{n-1} (C_i \cap I) \otimes (C_{n-i} \cap I) \\
\overset{\text{(HI)}}{=} & \sum_{i=1}^{n-1} P_i \otimes P_{n-i}.
\end{aligned}$$

Portanto, $x \in P_n$.

$\square$

Observe que este lema nos diz que P_n é um C_0-sub-bicomódulo do coideal I. O próximo resultado relaciona a estrutura de P_1 com o primeiro termo da filtração coradical de C.

Lema 2.2.2 $[AN, Lema\ 1.2]$ *Nas condições acima:*

$$C_1 = \sum_{\tau,\mu \in \widehat{C}} C_\tau \wedge C_\mu.$$

Mais ainda,

$$C_\tau \wedge C_\mu = \begin{cases} C_\tau \oplus C_\mu \oplus P_1^{\tau,\mu}, & \tau \neq \mu \\ C_\tau \oplus P_1^{\tau,\tau}, & \tau = \mu \end{cases}$$

onde $P_1^{\tau,\mu}$ denota a componente isotípica de tipo $V_\tau \otimes V_\mu^*$ do bicomódulo P_1, ou seja, $P_1^{\tau,\mu}$ é a soma de todos os sub-bicomódulos de P_1 que são isomorfos a $V_\tau \otimes V_\mu^*$.

Dem.: Notar que a primeira igualdade segue como consequência da segunda já que teríamos,

$$C_1 = C_0 \oplus P_1 = (\bigoplus_{\tau \in \widehat{C}} C_\tau) \oplus (\bigoplus_{\tau,\mu \in \widehat{C}} P_1^{\tau,\mu}) = \sum_{\tau,\mu \in \widehat{C}} C_\tau \wedge C_\mu.$$

Assim, vamos nos concentrar na demonstração da segunda igualdade. Antes de tudo, vejamos que:

$$P_1 = \Delta^{-1}(C_0 \otimes I + I \otimes C_0). \tag{2.1}$$

Como π é projeção, $C = C_0 \oplus I$ como espaços vetoriais. Assim, se $\{x_i\}_{i \in I}$ e $\{y_j\}_{j \in J}$ são bases de C_0 e I, respectivamente, então, para qualquer $x \in C$,

$$\Delta(x) = \sum_{i,k \in I} a_{ik} x_i \otimes x_k + \sum_{\substack{i \in I \\ j \in J}} (b_{ij} x_i \otimes y_j + c_{ij} y_j \otimes x_i) + \sum_{j,l \in J} d_{jl} y_j \otimes y_l,$$

com $a_{ik}, b_{ij}, c_{ij}, d_{jl} \in \Bbbk$, para todo $i,k \in I, j,l \in J$. Logo, se $x \in P_1$, então,

$$\begin{aligned} 0 =& (\Delta - \lambda - \rho)(x) \\ =& \sum_{i,k \in I} a_{ik} x_i \otimes x_k + \sum_{\substack{i \in I \\ j \in J}} (b_{ij} x_i \otimes y_j + c_{ij} y_j \otimes x_i) + \sum_{j,l \in J} d_{jl} y_j \otimes y_l \\ & - (\pi \otimes id)(\sum_{i,k \in I} a_{ik} x_i \otimes x_k + \sum_{\substack{i \in I \\ j \in J}} (b_{ij} x_i \otimes y_j + c_{ij} y_j \otimes x_i) + \sum_{j,l \in J} d_{jl} y_j \otimes y_l) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&- (id \otimes \pi)(\sum_{i,k \in I} a_{ik} x_i \otimes x_k + \sum_{\substack{i \in I \\ j \in J}} (b_{ij} x_i \otimes y_j + c_{ij} y_j \otimes x_i) + \sum_{j,l \in J} d_{jl} y_j \otimes y_l) \\
= &\sum_{i,k \in I} a_{ik} x_i \otimes x_k + \sum_{\substack{i \in I \\ j \in J}} (b_{ij} x_i \otimes y_j + c_{ij} y_j \otimes x_i) + \sum_{j,l \in J} d_{jl} y_j \otimes y_l \\
&- (\sum_{i,k \in I} a_{ik} x_i \otimes x_k + \sum_{\substack{i \in I \\ j \in J}} b_{ij} x_i \otimes y_j) - (\sum_{i,k \in I} a_{ik} x_i \otimes x_k + \sum_{\substack{i \in I \\ j \in J}} c_{ij} y_j \otimes x_i) \\
= &\sum_{j,l \in J} d_{jl} y_j \otimes y_l - \sum_{i,k \in I} a_{ik} x_i \otimes x_k.
\end{aligned}
$$

Assim, $a_{ik} = d_{jl} = 0$, para todo $i, k \in I, j, l \in J$. Portanto,

$$
\Delta(x) = \sum_{\substack{i \in I \\ j \in J}} b_{ij} x_i \otimes y_j + c_{ij} y_j \otimes x_i \in C_0 \otimes I + I \otimes C_0,
$$

o que garante a inclusão " $\subseteq$ ". A outra inclusão é imediata pois se $x \in \Delta^{-1}(C_0 \otimes I + I \otimes C_0)$, então,

$$
\Delta(x) = x_1 + x_2,
$$

com $x_1 \in C_0 \otimes I$ e $x_2 \in I \otimes C_0$. Assim, $\lambda(x) = x_1$ e $\rho(x) = x_2$, o que implica que $x \in P_1$.

Vejamos também que:

$$
\begin{aligned}
P_1^{\tau,\mu} &:= \{x \in P_1 : \lambda(x) \in C_\tau \otimes P_1 \text{ e } \rho(x) \in P_1 \otimes C_\mu\} \\
&= \{x \in P_1 : \Delta(x) \in C_\tau \otimes C + C \otimes C_\mu\}. \qquad (2.2)
\end{aligned}
$$

De fato,
" $\subseteq$ " : Se $x \in P_1^{\tau,\mu}$, então $\lambda(x) \in C_\tau \otimes P_1$ e $\rho(x) \in P_1 \otimes C_\mu$. Mas, desde que $x \in P_1 = \Delta^{-1}(C_0 \otimes I + I \otimes C_0)$, podemos considerar $\Delta(x) = x_1 + x_2$ com $x_1 \in C_0 \otimes I$ e $x_2 \in I \otimes C_0$. Logo,

$$
\lambda(x) = (\pi \otimes id)(x_1 + x_2) = x_1 \in (C_\tau \otimes P_1) \cap (C_0 \otimes I) \subseteq C_\tau \otimes C.
$$

Analogamente de $\rho(x) \in P_1 \otimes C_\mu$, segue que $x_2 \in C \otimes C_\mu$ e, portanto, temos a inclusão.
" $\supseteq$ " : Seja $x \in P_1$ tal que $\Delta(x) \in C_\tau \otimes C + C \otimes C_\mu$. Desde que $x \in P_1$ temos

$$
\Delta(x) \in C_0 \otimes I + I \otimes C_0,
$$

o que implica que:

$$\Delta(x) \in (C_0 \otimes I + I \otimes C_0) \cap (C_\tau \otimes C + C \otimes C_\mu) = C_\tau \otimes I + I \otimes C_\mu.$$

Observe que esta última igualdade segue de se utilizar bases e elementos como no início desta demonstração. Continuando, temos que:

$$\lambda(x) \in (\pi \otimes id)(C_\tau \otimes I + I \otimes C_\mu) \subseteq C_\tau \otimes I$$
$$\rho(x) \in (id \otimes \pi)(C_\tau \otimes I + I \otimes C_\mu) \subseteq I \otimes C_\mu$$

o que garante a inclusão " $\supseteq$ ", já que P_1 é sub-bicomódulo de I.

Agora, voltemos à principal parte da demostração que é mostrar a segunda igualdade do lema. Seja $x \in C_\tau \wedge C_\mu$. Em particular, $x \in C_0 \wedge C_0 = C_1 = C_0 \oplus P_1$. Assim, $x = y + z$, com $y \in C_0$ e $z \in P_1$. Logo,

$$\Delta(z) = \Delta(x) - \Delta(y) \in C_\tau \otimes C + C \otimes C_\mu + C_0 \otimes C_0.$$

Desde que $z \in P_1$, utilizando-se bases e elementos e a equação (2.1), segue que

$$\Delta(z) \in (C_\tau \otimes C + C \otimes C_\mu + C_0 \otimes C_0) \cap (C_0 \otimes I + I \otimes C_0) = C_\tau \otimes I + I \otimes C_\mu.$$

Pela equação (2.2), temos que $z \in P_1^{\tau,\mu}$. Mais ainda, segue também que $y \in C_\tau \wedge C_\mu$.

Resta mostrar que $y \in C_\tau \oplus C_\mu$ (ou só C_τ, quando $\tau = \mu$). Isso é imediato, do fato de que $y \in C_0 \cap (C_\tau \wedge C_\mu)$, ou seja,

$$\Delta(y) \in (C_\tau \otimes C + C \otimes C_\mu) \cap \bigoplus_{\gamma \in \widehat{C}} (C_\gamma \otimes C_\gamma) = (C_\tau \otimes C_\tau) \oplus (C_\mu \otimes C_\mu).$$

Portanto, $y \in C_\tau \oplus C_\mu$. Se $\tau = \mu$, o resultado adaptado também vale de forma análoga. Por fim, observar que isto tudo garante que:

$$C_\tau \wedge C_\mu \subseteq \begin{cases} C_\tau \oplus C_\mu \oplus P_1^{\tau,\mu}, & \text{se } \tau \neq \mu \\ C_\tau \oplus P_1^{\tau,\tau}, & \text{se } \tau = \mu \end{cases}$$

A outra inclusão é imediata.

$\square$

De agora em diante nesta seção, assumiremos que $C = H$ é uma álgebra de Hopf de dimensão finita. Observe que, dado $\tau \in \widehat{C}$, $\mathcal{S}(C_\tau)$ é uma subcoálgebra simples de C, que denotaremos por C_{τ^d}, pois $\mathcal{S}$ é injetora e antimorfismo de coálgebras. Em outras palavras, $\mathcal{S}(C_\tau)^{cop} \simeq C_\tau$ como coálgebras.

Dado $g \in G(C)$, temos que

$$g \cdot C_\tau := \{gx : x \in C_\tau\} \text{ e } C_\tau \cdot g := \{xg : x \in C_\tau\}$$

são subcoálgebras simples de C, que serão denotadas por $C_{g\cdot\tau}$ e $C_{\tau\cdot g}$, respectivamente. De fato, é fácil ver $\varphi_g : C \to C, x \mapsto gx$, é um isomorfismo de coálgebras com inverso $\varphi_{g^{-1}}$. Logo, $C_{\tau\cdot g} \simeq C_\tau$ como coálgebras. O caso $C_{\tau\cdot g}$ é análogo.

Corolário 2.2.3 $[AN, Cor.\ 1.3]$ *Nas condições acima,*

$$\dim P_1^{\tau,\mu} = \dim P_1^{\mu^d,\tau^d} = \dim P_1^{g\cdot\tau,g\cdot\mu} = \dim P_1^{\tau\cdot g,\mu\cdot g},$$

para todo $g \in G(C)$.

Dem.: Como $\mathcal{S}$ é bijeção, obtemos que:

$$\mathcal{S}(C_\tau \wedge C_\mu) = \mathcal{S}(C_\mu) \wedge \mathcal{S}(C_\tau) = C_{\mu^d} \wedge C_{\tau^d}.$$

Assim, pelo Lema 2.2.2,

$$\begin{aligned} C_{\mu^d} \oplus C_{\tau^d} \oplus P_1^{\mu^d,\tau^d} &= C_{\mu^d} \wedge C_{\tau^d} = \mathcal{S}(C_\tau \wedge C_\mu) = \mathcal{S}(C_\tau \oplus C_\mu \oplus P_1^{\tau,\mu}) \\ &\overset{(*)}{=} \mathcal{S}(C_\tau) \oplus \mathcal{S}(C_\mu) \oplus \mathcal{S}(P_1^{\tau,\mu}) \\ &= C_{\tau^d} \oplus C_{\mu^d} \oplus \mathcal{S}(P_1^{\tau,\mu}), \end{aligned}$$

sendo que $(*)$ vale pois $\mathcal{S}$ é bijeção. Logo,

$$\dim P_1^{\mu^d,\tau^d} = \dim \mathcal{S}(P_1^{\tau,\mu}) = \dim P_1^{\tau,\mu},$$

uma vez que $\mathcal{S}$ é bijeção. Também note que $g \cdot (C_\tau \wedge C_\mu) = C_{g\cdot\tau} \wedge C_{g\cdot\mu}$. De fato, dado $x \in C_\tau \wedge C_\mu$, temos

$$\Delta(gx) = (g \otimes g)\Delta(x) \in (g \otimes g)(C_\tau \otimes C + C \otimes C_\mu) = C_{g\cdot\tau} \otimes C + C \otimes C_{g\cdot\mu},$$

o que implica que $gx \in C_{g\cdot\tau} \wedge C_{g\cdot\mu}$. Reciprocamente, dado $x \in C_{g\cdot\tau} \wedge C_{g\cdot\mu}$, pela parte anterior, $g^{-1}x \in C_\tau \otimes C_\mu$. Desta forma, $x = g(g^{-1}x) \in g \cdot (C_\tau \wedge C_\mu)$.

Novamente, utilizando o Lema 2.2.2,

$$
\begin{aligned}
C_{g\cdot\tau} \oplus C_{g\cdot\mu} \oplus P_1^{g\cdot\tau, g\cdot\mu} &= C_{g\cdot\tau} \wedge C_{g\cdot\mu} = g\cdot(C_\tau \wedge C_\mu) = g\cdot(C_\tau \oplus C_\mu \oplus P_1^{\tau,\mu}) \\
&\overset{(*)}{=} g\cdot(C_\tau) \oplus g\cdot(C_\mu) \oplus g\cdot(P_1^{\tau,\mu}) \\
&= C_{g\cdot\tau} \oplus C_{g\cdot\mu} \oplus g\cdot(P_1^{\tau,\mu}),
\end{aligned}
$$

onde $(*)$ vale pois multiplicar por g à esquerda é bijeção. Portanto, $\dim P_1^{g\cdot\tau, g\cdot\mu} = \dim P_1^{\tau,\mu}$.

A demonstração da última igualdade é análoga.

$\square$

Corolário 2.2.4 $[AN, Cor.\ 1.4]$ *Se I é uma soma direta de C_0-sub-bicomódulos de dimensão 1, ou seja, se todo C_0-sub-bicomódulo irredutível de I tem dimensão 1, então:*

$$
C_1 = C_0 + \sum_{g,h \in G(C)} P_{g,h}(C).
$$

Dem.: Observar que a inclusão " $\supseteq$ " é imediata e que pelo Lema 2.2.2 a outra inclusão vale se mostrarmos que as componentes isotípicas $P_1^{\tau,\mu}$ são geradas por elementos skew-primitivos.

Uma vez que $I = \bigoplus_{j=1}^{r} L_j$ onde L_j são C_0-sub-bicomódulos de dimensão 1 para todo $j = 1, \cdots, r$, vem que $P_1 = P_1 \cap I = \bigoplus_{j=1}^{r} (P_1 \cap L_j)$. Mas, $P_1 \cap L_j$ é igual a 0 ou igual a L_j, já que $P_1 \cap L_j$ é sub-bicomódulo de L_j. Portanto, P_1 também é uma soma de C_0-sub-bicomódulos de dimensão 1 e, analogamente, $P_1^{\tau,\mu}$ também.

Assim, $P_1^{\tau,\mu} = \bigoplus_{j=1}^{s} \Bbbk\{v_j\}$ com $\Bbbk\{v_j\}$ sub-bicomódulos. Mas, por definição, $P_1^{\tau,\mu}$ é a soma de todas as cópias do bicomódulo irredutível $V_\tau \otimes V_\mu^*$ em P_1. Logo, $V_\tau \otimes V_\mu^* \simeq \Bbbk\{v_j\}$ para todo $j = 1, \cdots, s$ e $\dim V_\tau = \dim V_\mu = 1$, ou seja, $C_\tau = \Bbbk\{g\}$ e $C_\mu = \Bbbk\{h\}$ com $g, h \in G(C)$.

Portanto, pelas equações (2.1) e (2.2), temos que $\Delta(v_j) \in \Bbbk\{g\} \otimes I + I \otimes \Bbbk\{h\}$ e, utilizando o diagrama da counidade, vem que $\Delta(v_j) = g \otimes v_j + v_j \otimes h$ o que implica $v_j \in P_{g,h}(C)$ como queríamos demonstrar.

$\square$

Considere a ação à direita $\leftharpoonup : H^* \otimes H \to H^*$ dada por $\alpha \leftharpoonup h = \langle \alpha_1, h\rangle \alpha_2$. E seja $T \in H^*$ uma *integral à esquerda (não nula) para H^**, isto é,

$$
\alpha T = \langle \alpha, 1 \rangle T,
$$

para todo $\alpha \in H^*$. Tal integral existe já que estamos admitindo que H possui dimensão finita (ver [M, Teor. 2.1.3]). Mais ainda, tal integral é única salvo escalar não nulo. Tome também $g_0 \in G(H)$ o *elemento group-like distinguido associado à integral* T, ou seja,

$$T\alpha = \langle \alpha, g_0 \rangle T,$$

para todo $\alpha \in H^*$. Tal elemento existe e sua construção pode ser vista em [M, pág. 22].

Assumiremos daqui em diante que H é não cosemissimples ou, equivalentemente, $\langle T, 1 \rangle = 0$ (ver [M, Teor. 2.4.6]). Em particular, $T^2 = T * T = 0$. Mais ainda, dado $g \in G(H)$:

$$\begin{aligned}(T \leftharpoonup g)^2 &= (\langle T_1, g \rangle T_2)^2 = \langle T_1, g \rangle \langle T_1, g \rangle (T_2)^2 = \langle (T_1)^2, g \rangle (T_2)^2 = \langle (T^2)_1, g \rangle (T^2)_2 \\ &= T^2 \leftharpoonup g = 0.\end{aligned}$$

Por outro lado, como T é integral, também temos que para todo $\alpha \in H^*, c \in H$:

$$\begin{aligned}\langle \alpha, c_1 \rangle \langle T, c_2 \rangle = \langle \alpha T, c \rangle = \langle \alpha, 1 \rangle \langle T, c \rangle &\Longrightarrow \langle \alpha, \langle T, c_2 \rangle c_1 \rangle = \langle \alpha, \langle T, c \rangle 1 \rangle \\ &\Longrightarrow \langle T, c_2 \rangle c_1 = \langle T, c \rangle 1.\end{aligned}$$

Assim, se $c \in C$, com C uma subcoálgebra simples de H diferente de $\Bbbk\{1\}$, temos:

$$\langle T, c_2 \rangle c_1 = \langle T, c \rangle 1 \in C \cap \Bbbk\{1\} = 0,$$

ou seja, $T|_C = 0$. Como $T|_{\Bbbk\{1\}} = 0$, segue que,

$$T|_{H_0} = 0 \Longrightarrow T \in H_0^{\perp} = Jac(H^*).$$

A multipicação à esquerda (ou à direita) por $g \in G(H)$ é um automorfismo de coálgebras de H, portanto, preserva H_0. Isto implica que $(T \leftharpoonup g) \in Jac(H^*)$, para todo $g \in G(H)$. De fato, dado $h \in H_0$:

$$\langle T \leftharpoonup g, h \rangle = \langle T_1, g \rangle \langle T_2, h \rangle = \langle T, \underbrace{gh}_{\in H_0} \rangle = 0.$$

Mais ainda, para todo $\alpha \in H^*$:

$$\alpha(T \leftharpoonup g) = \langle \alpha, g^{-1} \rangle (T \leftharpoonup g) \;\text{ e }\; (T \leftharpoonup g)\alpha = \langle \alpha, g^{-1} g_0 \rangle (T \leftharpoonup g). \tag{2.3}$$

Com efeito, se $h \in H$, então

$$
\begin{aligned}
\langle \alpha(T \leftharpoonup g), g^{-1}h\rangle &= \langle \alpha\langle T_1, g\rangle T_2, g^{-1}h\rangle = \langle T_1, g\rangle\langle \alpha T_2, g^{-1}h\rangle \\
&= \langle T_1, g\rangle\langle \alpha, g^{-1}h_1\rangle\langle T_2, g^{-1}h_2\rangle = \langle T, gg^{-1}h_2\rangle\langle \alpha_1, g^{-1}\rangle\langle \alpha_2, h_1\rangle \\
&= \langle \alpha_1, g^{-1}\rangle\langle \alpha_2, h_1\rangle\langle T, h_2\rangle = \langle \alpha_1, g^{-1}\rangle\langle \alpha_2 T, h\rangle \\
&\overset{(*)}{=} \langle \alpha_1, g^{-1}\rangle\langle \alpha_2, 1\rangle\langle T, h\rangle = \langle \alpha, g^{-1}\rangle\langle T, h\rangle,
\end{aligned}
$$

sendo que $(*)$ vale por T ser uma integral. Por outro lado,

$$\langle\langle \alpha, g^{-1}\rangle T \leftharpoonup g, g^{-1}h\rangle = \langle \alpha, g^{-1}\rangle\langle T_1, g\rangle\langle T_2, g^{-1}h\rangle = \langle \alpha, g^{-1}\rangle\langle T, h\rangle.$$

Logo, temos a primeira igualdade na equação (2.3) para todo $g^{-1}h$, com $h \in H$. Em particular, tomando-se $h = g\widetilde{h}$, temos o que queríamos. Para a segunda igualdade, observe que para qualquer $h \in H$,

$$
\begin{aligned}
\langle (T \leftharpoonup g)\alpha, g^{-1}h\rangle &= \langle T_1, g\rangle\langle T_2\alpha, g^{-1}h\rangle = \langle T_1, g\rangle\langle T_2, g^{-1}h_1\rangle\langle \alpha, g^{-1}h_2\rangle \\
&= \langle T, h_1\rangle\langle \alpha_1, g^{-1}\rangle\langle \alpha_2, h_2\rangle = \langle \alpha_1, g^{-1}\rangle\langle T\alpha_2, h\rangle \\
&\overset{(*)}{=} \langle \alpha_1, g^{-1}\rangle\langle \alpha_2, g_0\rangle\langle T, h\rangle = \langle \alpha, g^{-1}g_0\rangle\langle T, h\rangle,
\end{aligned}
$$

onde $(*)$ vale pois g_0 é o elemento group-like distinguido associado à integral T. Também,

$$\langle\langle \alpha, g^{-1}g_0\rangle T \leftharpoonup g, g^{-1}h\rangle = \langle \alpha, g^{-1}g_0\rangle\langle T_1, g\rangle\langle T_2, g^{-1}h\rangle = \langle \alpha, g^{-1}g_0\rangle\langle T, h\rangle.$$

Logo, segue a segunda igualdade em (2.3).

Portanto, de (2.3), vemos que $\Bbbk\{T \leftharpoonup g\}$ é um ideal bilateral de H^* para todo $g \in G(H)$. Mais ainda, como $(T \leftharpoonup g)^2 = 0$, vem que $\Bbbk\{T \leftharpoonup g\}$ é um ideal nilpotente. Portanto, $\Bbbk\{T \leftharpoonup g\} \subseteq Jac(H^*)$.

Assim, desde que $G(H)$ é linearmente independente e a aplicação $H \to H^*, h \mapsto T \leftharpoonup h$ é injetora (ver [Sc, Teor. 2.3]), temos que os ideais $\Bbbk\{T \leftharpoonup g\}$ e $\Bbbk\{T \leftharpoonup g'\}$ são distintos para $g, g' \in G(H)$ com $g \neq g'$.

A partir destas definições, podemos enunciar o seguinte lema.

Lema 2.2.5 [*AN, Lema* 1.5] *Sejam H uma álgebra de Hopf de dimensão finita não cosemissimples e I, T e $\leftharpoonup$ como acima. Se $L = (T \leftharpoonup \Bbbk G(H))^{\perp} \subseteq H$, então L é uma subcoálgebra de H que contém H_0 e existe uma decomposição em H_0-bicomódulos:*

$$H = L \oplus \bigoplus_{j=1}^{s} I_j,$$

onde $s = |G(H)|$ *e os* I_j *são* H_0*-sub-bicomódulos de* I *todos de dimensão* 1.

Dem.: Para todo $g \in G(H)$, seja $L_g = \ker(T \leftharpoonup g) \subseteq H$. Note que L_g é uma subcoálgebra de H de codimensão 1 contendo H_0. De fato, $L_g = \ker(T \leftharpoonup g) = (\Bbbk\{T \leftharpoonup g\})^{\perp}$ é uma subcoálgebra já que $\Bbbk\{T \leftharpoonup g\}$ é ideal bilateral. Além disso, contém H_0, pois $T \leftharpoonup g \in Jac(H^*) = (H_0)^{\perp}$. Que a codimensão é 1 é imediato pois $(T \leftharpoonup g) \neq 0$. Logo,

$$L = (T \leftharpoonup \Bbbk G(H))^{\perp} = \bigcap_{g \in G(H)} L_g$$

é subcoálgebra (e, portanto, H_0-sub-bicomódulo) e contém H_0. Para obter a decomposição, supomos que $G(H)$ é da forma

$$G(H) = \{1 = g_1, \cdots, g_s\}$$

e escrevemos $L_j = L_{g_j}$. Assim, pondo $L^{(j)} = \bigcap_{i=1}^{j} L_i$, vemos que $L^{(j)}$ é subcoálgebra (e, portanto, H_0-sub-bicomódulo) de H e $H_0 \subseteq L^{(j)}$ para todo $j = 1, \cdots, s$. Logo, como H_0-bicomódulos, temos que

$$L^{(j)} = L^{(j)} \cap (H_0 \oplus I) = H_0 \oplus I^{(j)},$$

onde $I^{(j)} = I \cap L^{(j)} = \ker(\pi|_{L^{(j)}})$. Isto nos dá uma cadeia descendente de H_0-sub-bicomódulos:

$$I^{(s)} \subseteq I^{(s-1)} \subseteq \cdots \subseteq I^{(1)} \subseteq I.$$

Mais ainda, vimos no parágrafo anterior ao Lema 2.2.5 que os L_j são dois a dois distintos. Assim,

$$\operatorname{codim}_{L^{(j-1)}} L^{(j)} = 1 \Longrightarrow \operatorname{codim}_{I^{(j-1)}} I^{(j)} = 1,$$

para todo $j = 1, \cdots, s$. Aqui estamos considerando $L^{(0)} = H$ e $I^{(0)} = I$. Portanto, da completa redutibilidade dos H_0-bicomódulos, existem s H_0-sub-bicomódulos I_j de dimensão 1 tais que:

$$I^{(j-1)} = I^{(j)} \oplus I_j,$$

para todo $j = 1, \cdots, s$. Disto, segue que:

$$\begin{aligned} H &= H_0 \oplus I = H_0 \oplus I^{(0)} = H_0 \oplus I^{(1)} \oplus I_1 = H_0 \oplus I^{(2)} \oplus I_2 \oplus I_1 \\ &= \cdots = \underbrace{H_0 \oplus I^{(s)}}_{L^{(s)}=L} \oplus I_s \oplus \cdots \oplus I_1 = L \oplus \bigoplus_{j=1}^{s} I_j. \end{aligned}$$

□

Como consequência do Lema 2.2.5 e do Corolário 2.2.4, obtemos o seguinte resultado.

Corolário 2.2.6 $[AN, Cor.\ 1.6]$ *Seja H uma álgebra de Hopf não cosemissimples de dimensão finita tal que* $\dim H = \dim H_0 + |G(H)|$. *Então H possui elemento skew-primitivo não trivial.*

Dem.: Com efeito, pelo Lema 2.2.5:

$$H = L \oplus \bigoplus_{j=1}^{|G(H)|} I_j,$$

com $H_0 \subseteq L$ e os I_j sub-bicomódulos unidimensionais de I. Da relação das dimensões e do fato que $H_0 \subseteq L$, segue que $L = H_0$. Logo,

$$I = \bigoplus_{j=1}^{|G(H)|} I_j.$$

Pelo Corolário 2.2.4,

$$H_1 = H_0 + \sum_{g,h \in G(H)} P_{g,h}(H).$$

Assim, se:

$$P_{g,h}(H) = \Bbbk\{g - h\}, \text{ para todo } g, h \in G(H) \Longrightarrow H_1 = H_0 \Longrightarrow H = H_0,$$

o que contradiz a hipótese de H não ser cosemissimples. Portanto, H possui algum elemento skew-primitivo não trivial.

□

Lema 2.2.7 $[AN, Lema\ 1.7]$ *Seja H uma álgebra de Hopf não cosemissimples de dimensão finita.*

1. Suponha que $P_{g,h}(H) = \Bbbk\{g - h\}$ para todo $g, h \in G(H)$. Então,

$$T \leftharpoonup \Bbbk G(H) \subseteq Jac(H^*)^2.$$

Em particular, $|G(H)| \leq \dim H - \dim H_1$.

2. Se $H = H_1$, então H possui elemento skew-primitivo não trivial. Em particular, $G(H)$ é não trivial.

Dem.:

1. Suponha, por absurdo, que

$$T \leftharpoonup \Bbbk G(H) \nsubseteq Jac(H^*)^2 = (H_1)^{\perp}.$$

Então, existem $\sum_{g \in G(H)} \lambda_g g \in \Bbbk G(H)$ e $h \in H_1$ tais que:

$$\langle T \leftharpoonup \sum_{g \in G(H)} \lambda_g g, h \rangle \neq 0.$$

Mas,

$$\langle T \leftharpoonup \sum_{g \in G(H)} \lambda_g g, h \rangle = \langle T_1, \sum_{g \in G(H)} \lambda_g g \rangle \langle T_2, h \rangle = \langle T, \sum_{g \in G(H)} \lambda_g gh \rangle,$$

o que implica que $T|_{H_1} \neq 0$, já que $\sum_{g \in G(H)} \lambda_g gh \in H_1$, pois, de $g \in G(H), h \in H_1$:

$$\begin{aligned}
\Delta(\sum_{g \in G(H)} \lambda_g gh) &= \sum_{g \in G(H)} \lambda_g \Delta(g)\Delta(h) \\
&\in \sum_{g \in G(H)} \lambda_g (g \otimes g)(H_0 \otimes H + H \otimes H_0) \\
&\subseteq \sum_{g \in G(H)} \lambda_g (H_0 \otimes H + H \otimes H_0) \subseteq H_0 \otimes H + H \otimes H_0.
\end{aligned}$$

Por outro lado, note que estamos nas hipóteses do Lema 2.2.5. Assim, utilizando-se a notação de sua demonstração, temos que:

$$I = I^{(0)} = \underbrace{I^{(1)}}_{\ker(T) \cap I} \oplus I_1.$$

Logo,

$$P_1 = H_1 \cap I \supseteq (\ker(T) \cap I \cap H_1) \oplus (I_1 \cap H_1) = (\ker(T) \cap P_1) \oplus (I_1 \cap H_1). \; (*)$$

Mais ainda, como $T|_{H_1} \neq 0, T \in (H_0)^{\perp}$ e $H = H_0 \oplus I$ (o que implica que $H_1 = H_0 \oplus (H_1 \cap I)$) , segue que $T|_{H_1 \cap I} \neq 0$. Um pouco mais ainda, como $I = I^{(1)} \oplus I_1$ e $I^{(1)} = \ker(T) \cap I$, vem que $T|_{H_1 \cap I_1} \neq 0$, o que, por sua vez, implica que $H_1 \cap I_1 \neq 0$.

Como I_1 tem dimensão 1, temos $H_1 \cap I_1 = I_1$. Voltando à expressão $(*)$, temos que I_1 é um sub-bicomódulo unidimensional de P_1. Contudo, ter um sub-bicomódulo unidimensional em P_1 nos diz que existe um elemento skew-primitivo não trivial, o que contradiz nossa hipótese inicial de que $P_{g,h}(H) = \Bbbk\{g - h\}$ para todo $g, h \in G(H)$. Portanto,

$$T \leftharpoonup \Bbbk G(H) \subseteq Jac(H^*)^2.$$

A conclusão final do item (1) vale pois, pelo Lema 2.2.5

$$\dim H = \dim(T \leftharpoonup \Bbbk G(H))^{\perp} + |G(H)|$$

e pelo item que acabamos de provar:

$$\dim H_1 = \dim(Jac(H^*)^2)^{\perp} \leq \dim(T \leftharpoonup \Bbbk G(H))^{\perp}.$$

Isto implica que

$$|G(H)| = \dim H - \dim(T \leftharpoonup \Bbbk G(H))^{\perp} \leq \dim H - \dim H_1.$$

2. Se $H = H_1$, então os sub-bicomódulos I_j dados pelo Lema 2.2.5 estão todos contidos em P_1. De fato, por construção, estes bicomódulos já estão contidos em I e, como $H_1 = H$ por hipótese, também estão em H_1. Logo, estão na interseção que é P_1. Por fim, como possuem dimensão 1, são gerados por skew-primitivos não triviais.

A conclusão final do item (2) vale pois, se $G(H)$ fosse trivial (ou seja, $G(H) = \{1\}$) então, pelo item que acabamos de ver, haveria um elemento primitivo não nulo em uma álgebra de Hopf de dimensão finita, uma clara contradição.

$\square$

Exemplo 2.2.8 *Sejam M e N inteiros maiores ou iguais a 2 tais que M divide N, e $\xi \in \Bbbk^{\times}$ uma raiz primitiva da unidade de ordem M. Consideraremos $K_{\mu}(N, \xi)$ como sendo a álgebra gerada pelos elementos x e g, e sujeita às seguintes relações:*

$$x^M = \mu(1 - g^M), \; g^N = 1 \; e \; gx = \xi xg,$$

onde $\mu = \begin{cases} 0, & M = N \\ 0 \text{ ou } 1, & M \neq N \end{cases}$

Com as seguintes estruturas

$$\begin{aligned} &\Delta(x) = 1 \otimes x + x \otimes g \qquad && \Delta(g) = g \otimes g \\ &\varepsilon(x) = 0 && \varepsilon(g) = 1 \\ &\mathcal{S}(x) = -xg^{N-1} && \mathcal{S}(g) = g^{N-1} \end{aligned}$$

$K_\mu(N,\xi)$ é uma álgebra de Hopf. De $[AS1, Teor.\ 5.5]$, segue que a dimensão de $K_\mu(N,\xi)$ é MN. Assim, $\{x^i g^j : 0 \leq i \leq M-1, 0 \leq j \leq N-1\}$ é uma base. Se $M = N$, então $K_\mu(N,\xi)$ é isomorfa à álgebra de Taft $T_{\xi^{-1}}$ via:

$$\begin{aligned} \varphi : K_\mu(N,\xi) &\longrightarrow T_{\xi^{-1}} \\ x^i g^j &\longmapsto \xi^{\frac{i(i-1)}{2}} x^i g^{-(i+j)} \end{aligned}$$

Também observe que $\Bbbk\langle g^M\rangle$ é uma subálgebra de Hopf central de $K_\mu(N,\xi)$ e que a seguinte sequência de álgebras de Hopf:

$$\Bbbk\langle g^M\rangle \xrightarrow{\iota} K_\mu(N,\xi) \xrightarrow{\pi} K_\mu(M,\xi) \simeq T_{\xi^{-1}},$$

onde ι é a inclusão natural e $\pi(x^i g^j) = x^i g^j$, satisfaz:

- ι injetiva;
- π sobrejetiva;
- $\pi\iota = u\varepsilon$;
- $\ker \pi = \Bbbk\langle g^M\rangle^+ K_\mu(N,\xi)$, onde $\Bbbk\langle g^M\rangle^+$ denota o núcleo de $\varepsilon_{\Bbbk\langle g^M\rangle}$;
- $\Bbbk\langle g^M\rangle = K_\mu(N,\xi)^{co\pi} := \{y \in K_\mu(N,\xi) : y_1 \otimes \pi(y_2) = y \otimes 1\}$.

Em outras palavras, a sequência acima é exata. Mais ainda, por [M, Lema 5.5.1] vemos que $K_\mu(N,\xi)$ é pontuada. E sua filtração coradical é dada por:

$$K_\mu(N,\xi)_n = \Bbbk\{x^i g^j : 0 \leq i \leq n, 0 \leq j \leq N-1\}, n = 0, \cdots, M-1.$$

Com efeito, vejamos isto por indução finita. Para $n = 0$, pelo que acabamos de ver, basta mostrar que $G(K_\mu(N,\xi)) = \{1, g, \cdots, g^{N-1}\}$. Seja $y = \sum\limits_{i=0}^{M-1}\sum\limits_{j=0}^{N-1} \lambda_{ij} x^i g^j \in K_\mu(N,\xi)$ tal que $y \in G(K_\mu(N,\xi))$. Então:

$$\sum_{i=0}^{M-1}\sum_{j=0}^{N-1}\lambda_{ij}(\sum_{r=0}^{i}\binom{i}{r}_{\xi}x^r g^j \otimes x^{i-r}g^{j+r}) = \Delta(y) = y \otimes y$$

$$= \sum_{i,r=0}^{M-1}\sum_{j,s=0}^{N-1}\lambda_{ij}\lambda_{rs}x^i g^j \otimes x^r g^s.$$

Note que, do lado esquerdo, não há termos da forma $x^{M-1}g^j \otimes x^{M-1}g^j$ para todo $j = 0, \cdots, N-1$. Logo, como $\{x^i g^j : 0 \leq i \leq M-1, 0 \leq j \leq N-1\}$ é uma base, temos que, para todo $j = 0, \cdots, N-1$,

$$\lambda_{M-1,j}^2 = 0 \Longrightarrow \lambda_{M-1,j} = 0,$$

para todo $j = 0, \cdots, N-1$. Ou seja, $y = \sum\limits_{i=0}^{M-2}\sum\limits_{j=0}^{N-1}\lambda_{ij}x^i g^j$.

De forma análoga com $i = M-2$ em vez de $M-1$, podemos "eliminar" os $\lambda_{M-2,j}$ e, assim, sucessivamente até que só restem os $\lambda_{0,j}$. Aí, teremos

$$\sum_{j=0}^{N-1}\lambda_{0,j}g^j \otimes g^j = \sum_{j,s=0}^{N-1}\lambda_{0,j}\lambda_{0,s}g^j \otimes g^s,$$

que resulta nas N soluções que queríamos inicialmente. Para ver o caso $n-1$ implicando o n, com $1 \leq n \leq N-1$, temos por hipótese de indução que

$$K_\mu(N,\xi)_r = \Bbbk\{x^i g^j : 0 \leq i \leq r, 0 \leq j \leq N-1\},$$

para todo $r = 0, \cdots, n-1$.
" $\supseteq$ " : imediato por hipótese de indução e:

$$\Delta(x^n g^j) = \sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}_{\xi}x^r g^j \otimes x^{n-r}g^{j+r}$$

para todo $j = 0, \cdots, N-1$.
" $\subseteq$ " : Se $n = M-1$, o resultado segue. Se $n < M-1$, basta mostrar que tomando-se $y = \sum\limits_{i=n+1}^{M-1}\sum\limits_{j=0}^{N-1}\lambda_{ij}x^i g^j \in K_\mu(N,\xi)_n$, vamos ter $y = 0$. Por um lado:

$$\Delta(y) = \sum_{i=n+1}^{M-1}\sum_{j=0}^{N-1}\lambda_{ij}(\sum_{r=0}^{i}\binom{i}{r}_{\xi}x^r g^j \otimes x^{i-r}g^{j+r}) \ (*)$$

Por outro lado,

$$\Delta(y) \in K_\mu(N,\xi)_{n-1} \otimes K_\mu(N,\xi) + K_\mu(N,\xi) \otimes K_\mu(N,\xi)_0.$$

Assim, por hipótese de indução, todos os escalares de $\Delta(y)$ que acompanham os termos de tipo $x^r g^j \otimes x^1 g^{j+r}$, com $n \leq r \leq M-2$ e $0 \leq j \leq N-1$, devem ser nulos. Mas de $(*)$, estes coeficientes são da forma:

$$\lambda_{r+1,j} \binom{r+1}{r}_\xi = \lambda_{r+1,j}\ (r+1)_\xi,$$

com $n \leq r \leq M-2, 0 \leq j \leq N-1$. Como ξ é raiz M-ésima primitiva da unidade, $(r+1)_\xi \neq 0$, para todo $n \leq r \leq M-2$. Então, $\lambda_{i,j} = 0$ para todo $n+1 \leq i \leq M-1, 0 \leq j \leq N-1$ o que implica $y = 0$.

Agora que já sabemos qual é a filtração coradical de $K_\mu(N,\xi)$, podemos associar a álgebra de Hopf graduada $grK_\mu(N,\xi)$. Não é dificil ver que

$$grK_\mu(N,\xi) \simeq K_{\mu'=0}(N,\xi),$$

já que a única relação de $K_\mu(N,\xi)$ que não é preservada na passagem à álgebra de Hopf graduada é $x^M = \mu(1-g^M)$ quando $\mu = 1$. Na graduada, esta relação se torna a mesma só que com $\mu' = 0$. Em outras palavras, $K_\mu(N,\xi)$ e $grK_\mu(N,\xi)$ "coincidem" se, e somente se, $\mu = 0$.

Tomando $\pi : grK_\mu(N,\xi) \to K_\mu(N,\xi)_0$, a projeção homogênea e $\iota : K_\mu(N,\xi)_0 \to grK_\mu(N,\xi)$ a inclusão canônica, vemos que:

$$R = grK_\mu(N,\xi)^{co\pi} = \Bbbk\{x^i g^{-i} : i = 0, \cdots, M-1\} \simeq \Bbbk[x]/(x^M).$$

Portanto, temos que,

$$grK_\mu(N,\xi) \simeq \Bbbk[x]/(x^M) \# \Bbbk C_N,$$

e quando $\mu = 0$:

$$K_{\mu=0}(N,\xi) \simeq \Bbbk[x]/(x^M) \# \Bbbk C_N.$$

A seguinte proposição relaciona álgebras de Hopf não semissimples de dimensão finita (ou, equivalentemente, não cosemissimples - ver [Sc, Teor. 3.14]) com a álgebra de Hopf $K_\mu(N,\xi)$ recém construída.

Proposição 2.2.9 $[AN, Prop.\ 1.8]$ *Seja H uma álgebra de Hopf não semissimples de dimensão finita. Suponha que H possui elemento skew-primitivo não trivial. Então H*

contém uma subálgebra de Hopf K isomorfa a $K_\mu(N,\xi)$. Em particular, se $\dim H$ *é livre de quadrados, então H não possui elemento skew-primitivo não trivial.*

Dem.: Seja $v \in H$ um elemento (g,h)-primitivo não trivial. Note que o elemento vh^{-1} é $(gh^{-1},1)$-primitivo não trivial. Logo, podemos assumir que $h=1$. Mais ainda, $g \neq 1$ já que H possui dimensão finita.

Consideremos $\Gamma = \langle g \rangle$, o grupo cíclico gerado por g. Observar que Γ atua em $P_{g,1}$ por conjugação:

$$\begin{aligned} \psi : P_{g,1} &\longrightarrow P_{g,1} \\ y &\longmapsto gyg^{-1} \end{aligned}$$

Também note que $\psi^{|\Gamma|} = id$. Logo, ψ é diagonalizável. Mais ainda, todos seus autovalores são raízes da unidade. Assim, seja x um autovetor de ψ com autovalor ξ associado. Observe que podemos admitir que $x \in P_{g,1} \backslash \Bbbk\{g-1\}$, uma vez que $\psi|_{\Bbbk\{g-1\}} = id$ (ou seja, $\Bbbk\{g-1\}$ é ψ-invariante) e que $\dim P_{g,1} \geq 2$ porque existe elemento $(g,1)$-primitivo não trivial.

Agora, tomemos $K = \Bbbk\langle x, g\rangle$ a subálgebra de H gerada por x e g. Uma vez que $g \in G(H)$ e $x \in P_{g,1}$, é fácil ver que K é subálgebra de Hopf de H satisfazendo:

$$\Delta(g) = g \otimes g, \Delta(x) = x \otimes g + 1 \otimes x \text{ e } gx = \xi x g.$$

Afirmação: $\xi \neq 1$. Com efeito, se $\xi = 1$, então K seria uma álgebra de Hopf comutativa. Logo, K^* seria uma álgebra de Hopf cocomutativa (de dimensão finita sobre $\Bbbk$ algebricamente fechado e de característica 0). Assim, pelo corolário do Teorema 3.8.2 de [C, pág. 47], existiria um grupo G tal que:

$$K^* \simeq \Bbbk G \Longrightarrow K \simeq K^{**} \simeq (\Bbbk G)^* \simeq \Bbbk^G,$$

que é cosemissimples. Portanto, K estaria contida em H_0. Mas isso é uma contradição, pois $x \notin H_0$.

Agora, sejam $M = \min\{n : \xi^n = 1\} \geq 2$ e $N = |\Gamma|$. Nitidamente, M divide N. Mais ainda, da fórmula binomial quântica, temos que:

$$\Delta(x^M) = \sum_{i=0}^{M} \binom{M}{i}_\xi x^i \otimes x^{M-i} g^i = x^M \otimes g^M + 1 \otimes x^M.$$

Também temos que:

$$g^M x^M = \xi^{M^2} x^M g^M = x^M g^M.$$

Logo, a subálgebra $\Bbbk\langle g^M, x^M\rangle$ de K gerada por g^M e x^M é comutativa e, evidentemente, uma subálgebra de Hopf de K. Por um argumento análogo ao da afirmação acima, segue que $\Bbbk\langle g^M, x^M\rangle$ é cosemissimples e, portanto, está contida em K_0. Mas K é gerada por um group-like e um skew-primitivo. Então, por [M, Lema 5.5.1], K é pontuada. Como $G(K) = \{g^i : 0 \leq i \leq N-1\}$, existem $\lambda_i \in \Bbbk, 0 \leq i \leq N-1$, tais que $x^M = \sum\limits_{i=0}^{N-1} \lambda_i g^i$. Assim:

$$\sum_{i=0}^{N-1} \lambda_i g^i \otimes g^i = \Delta(x^M) = x^M \otimes g^M + 1 \otimes x^M = \sum_{i=0}^{N-1} \lambda_i g^i \otimes g^M + \sum_{j=0}^{N-1} 1 \otimes \lambda_j g^j.$$

Note que se $M = N$, então $g^M = 1$ e fica

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{M-1} \lambda_i g^i \otimes g^i &= \sum_{i=0}^{M-1} \lambda_i g^i \otimes 1 + \sum_{j=0}^{M-1} 1 \otimes \lambda_j g^j \\ \Longrightarrow \sum_{i=1}^{M-1} \lambda_i g^i \otimes g^i &= \lambda_0 1 \otimes 1 + \sum_{i=1}^{M-1} \lambda_i g^i \otimes 1 + \sum_{j=1}^{M-1} 1 \otimes \lambda_j g^j, \end{aligned}$$

o que implica que $\lambda_i = 0$ para todo $i = 0, \cdots, M-1$. Logo, $x^M = 0$.

Já se $M < N$, chegamos que $\lambda_M = -\lambda_0$ e que os demais λ_i são iguais a 0. Mais ainda, se $\lambda_0 \neq 0$, podemos tomar $x' = \frac{1}{\sqrt[M]{\lambda_0}} x$ em vez de x no início da demonstração e tudo permanece válido. Assim, podemos admitir $\lambda_0 = 1$. Resumindo, em todos os casos temos:

$$x^M = \mu(1 - g^M),$$

com μ como na definição de $K_\mu(N, \xi)$.

Portanto, como K satisfaz todas as relações de $K_\mu(N, \xi)$, existe um morfismo natural $p : K_\mu(N, \xi) \to K$ que é sobrejetor e de álgebras de Hopf. Assim, para terminar, basta mostrar que p é injetor. Por [M, Teor. 5.3.1], basta verificar que o é em $K_\mu(N, \xi)_1$, que, por sua vez, é equivalente a mostrar que $\{g^j, xg^j : 0 \leq j \leq N-1\}$ é LI em K.

Vejamos isto. Pela escolha de N, nitidamente $\{g^j : 0 \leq j \leq N-1\}$ é LI. Mais ainda, como pudemos admitir $x \in P_{g,1} \backslash \Bbbk\{g-1\}$ e temos que $\Bbbk\{g-1\} = P_{g,1} \cap \Bbbk G(H)$, segue que $\{g^j, x : 0 \leq j \leq N-1\}$ é LI. Agora suponha que $\{g^j, xg^j : 0 \leq j \leq N-1\}$ é LD, então seja:

$$j_0 = \min\{j : F_j := \{g^i, xg^r : 0 \leq i \leq N-1, 0 \leq r \leq j\} \text{ é LD}\} \in \{1, \cdots, N-1\}.$$

Ou seja, j_0 é o menor índice para o qual o conjunto F_j se torna LD. Logo, existem $\lambda_i, \widetilde{\lambda}_j \in \Bbbk, 0 \leq i \leq N-1, 0 \leq j \leq j_0 - 1$, tais que:

$$\begin{aligned}
& & xg^{j_0} &= \sum_{i=0}^{N-1} \lambda_i g^i + \sum_{j=0}^{j_0-1} \widetilde{\lambda}_j x g^j \\
&\Longrightarrow & \Delta(xg^{j_0}) &= \sum_{i=0}^{N-1} \lambda_i g^i \otimes g^i + \sum_{j=0}^{j_0-1} \widetilde{\lambda}_j \Delta(xg^j) \\
&\Longrightarrow xg^{j_0} \otimes g^{j_0+1} + g^{j_0} \otimes xg^{j_0} & &= \sum_{i=0}^{N-1} \lambda_i g^i \otimes g^i + \sum_{j=0}^{j_0-1} \widetilde{\lambda}_j (xg^j \otimes g^{j+1} + g^j \otimes xg^j).
\end{aligned}$$

Usando a primeira equação na última, chegamos que

$$(\sum_{i=0}^{N-1} \lambda_i g^i + \sum_{j=0}^{j_0-1} \widetilde{\lambda}_j x g^j) \otimes g^{j_0+1} + g^{j_0} \otimes (\sum_{i=0}^{N-1} \lambda_i g^i + \sum_{j=0}^{j_0-1} \widetilde{\lambda}_j x g^j)$$

deve ser igual a

$$\sum_{i=0}^{N-1} \lambda_i g^i \otimes g^i + \sum_{j=0}^{j_0-1} \widetilde{\lambda}_j x g^j \otimes g^{j+1} + \sum_{j=0}^{j_0-1} \widetilde{\lambda}_j g^j \otimes x g^j.$$

Portanto, de $F_{j_0-1} = \{g^i, xg^j : 0 \leq i \leq N-1, 0 \leq j \leq j_0 - 1\}$ ser LI, temos que:

$$\sum_{j=0}^{j_0-1} \widetilde{\lambda}_j g^{j_0} \otimes xg^j = \sum_{j=0}^{j_0-1} \widetilde{\lambda}_j g^j \otimes xg^j \Longrightarrow \widetilde{\lambda}_j = 0,$$

para todo $j = 0, \cdots, j_0 - 1$. Logo,

$$xg^{j_0} = \sum_{i=0}^{N-1} \lambda_i g^i \Longrightarrow x = \sum_{i=0}^{N-1} \lambda_i g^{i-j_0} \in \Bbbk G(H).$$

Já que $x \in P_{g,1} \backslash \Bbbk\{g-1\}$, temos uma contradição. Portanto, $\{g^i, xg^i : 0 \leq i \leq N-1\}$ é LI.

A conclusão final da proposição segue diretamente do Teorema de Nichols-Zoeller.

$\square$

Para finalizar esta seção, vejamos o seguinte lema que é muito útil no momento de calcular a filtração coradical. Mas, antes disto, uma breve definição.

Seja H uma álgebra de Hopf e B uma subálgebra de Hopf de H. Então um $\Bbbk$-espaço vetorial M é dito um *(B,H)-módulo de Hopf à esquerda* se:

- M é um B-módulo (à esquerda);
- M é um H-comódulo (à esquerda, via λ);
- λ é morfismo de B-módulos (à esquerda), ou seja:

  $$\lambda(b \cdot m) = b_1 m_{-1} \otimes b_2 m_0,$$

  para todo $b \in B, m \in M$.

Lema 2.2.10 $[AN, Lema\ 2.1]$ *Seja H uma álgebra de Hopf de dimensão finita. Então $|G(H)|$ divide a dimensão de H_n e de P_n, para todo $n \geq 0$. Mais ainda, também divide a dimensão de $H_{0,d}$, para todo $d \geq 1$, onde:*

$$H_{0,d} = \bigoplus_{\substack{\tau \in \widehat{H} \\ d_\tau = d}} H_\tau.$$

Dem.: Note que todos os H_n e todos os $H_{0,d}$ são $(\Bbbk G(H), H)$-módulos de Hopf (à esquerda) através da comultiplicação de H e da multiplicação por elementos de $G(H)$. Logo, por [NZ, Teor. 7], todos estes módulos são livres como $\Bbbk G(H)$-módulos. Em outras palavras, $|G(H)| = \dim \Bbbk G(H)$ divide a dimensão deste módulos. O resultado também vale para os P_n, já que:

$$H_n = H_0 \oplus P_n,$$

para todo $n \geq 0$.

$\square$

Observação 2.2.11 *Durante minha estada em Córdoba (Argentina), foi-me proposto por G. A. García e N. Andruskiewitsch o problema de calcular a categoria ${}^{\mathcal{K}}_{\mathcal{K}}\mathcal{YD}$ com $\mathcal{K}$ a álgebra de Hopf do Exemplo 2.1.9, o que ainda é um trabalho em andamento. As técnicas desenvolvidas nesta seção são úteis para resolver este problema.*

Capítulo 3

A filtração standard

3.1 Definições e resultados

Queremos uma filtração $\{H_{[n]}\}_{n\geq 0}$ que generalize a filtração coradical $\{H_n\}_{n\geq 0}$ e tal que as considerações do final da seção 2.1 permaneçam válidas, ou seja, que essa nova filtração seja de álgebras de Hopf. É natural tomarmos $H_{[0]}$ um "parente" próximo de H_0 e os demais $H_{[n]}$ como as potências segundo o produto wedge de $H_{[0]}$. Mas que $H_{[0]}$ tomar?

Pela Proposição 2.1.10, vemos que quando H_0 é uma subálgebra de Hopf de H, a filtração coradical é uma filtração de álgebras de Hopf e pela Proposição 2.1.7 temos que a filtração coradical sempre é uma filtração de coálgebra. Assim, se assumirmos que $\mathcal{S}(H_0) \subseteq H_0$ vemos que o problema da filtração coradical reside no fato de H_0 não ser fechado por multiplicação. Logo, parece que se tomarmos $H_{[0]}$ como a subálgebra de H gerada por H_0 (isto é, a menor subálgebra de H que contém H_0), o problema estará resolvido. E isso, de fato, ocorre.

Seja H uma álgebra de Hopf. Definimos a *filtração standard* $\{H_{[n]}\}_{n\geq 0}$ de H como sendo:

- $H_{[0]}$ é o *coradical de Hopf* de H, isto é, $H_{[0]}$ é a subálgebra gerada por H_0;
- $H_{[n]} = \wedge^{n+1} H_{[0]}, n > 0$.

Note que $H_{[0]} = H_0$ se, e somente se, H_0 é uma subálgebra de Hopf de H, já que estamos admitindo que $\mathcal{S}(H_0) \subseteq H_0$. Em outras palavras, neste caso, a filtração standard generaliza a filtração coradical. Também observar que se H tem antípoda injetiva, então $\mathcal{S}(H_0) \subseteq H_0$, uma vez que já vimos na página 68 que, neste caso, $\mathcal{S}$ leva subcoálgebras simples em subcoálgebras simples.

Mais ainda, como temos a intenção de usar o produto de Radford-Majid mais adiante, vamos precisar que $\mathcal{S}|_{H_{[0]}}$ seja bijetiva e isto vale, por exemplo, se H tem antípoda bijetiva (uma justificativa para isso está no Lema 3.1.1). Portanto, a partir de agora, assumiremos que H sempre tem antípoda bijetiva.

O seguinte lema é a versão filtração standard das Proposições 2.1.7 e 2.1.10. Ele elenca as principais propriedades da mesma, que nos permitirão avançar na construção de resultados semelhantes aos obtidos para a filtração coradical no capítulo anterior, no caso em que ela é uma filtração de álgebras de Hopf.

Lema 3.1.1 *Seja $\{H_{[n]}\}_{n\geq 0}$ a filtração standard de uma álgebra de Hopf H. Então:*

1. *$H_{[0]}$ é uma subálgebra de Hopf de H e seu coradical é H_0;*
2. *$H_n \subseteq H_{[n]}$ e $\{H_{[n]}\}_{n\geq 0}$ é uma filtração de álgebra de Hopf de H;*
3. *$\mathcal{S}(H_{[n]}) = H_{[n]}$, para todo $n \geq 0$.*

Dem.:
1. Sabemos que $H_{[0]} = \bigcup_{r>0} H_0^{(r)}$, onde $H_0^{(r)} = \underbrace{H_0.H_0.\cdots.H_0}_{r \text{ vezes}}$ e também vemos que $H_0^{(r)} \subseteq H_0^{(r+1)}$, pois $1 \in H_0$. Assim, segue que $H_{[0]}$ é uma subcoálgebra de H já que para cada $r > 0$:

$$\begin{aligned}\Delta(H_0^{(r)}) = \Delta(\underbrace{H_0.\cdots.H_0}_{r \text{ vezes}}) &= \underbrace{\Delta(H_0).\cdots.\Delta(H_0)}_{r \text{ vezes}} \\ &\subseteq \underbrace{(H_0\otimes H_0).\cdots.(H_0\otimes H_0)}_{r \text{ vezes}} = H_0^{(r)}\otimes H_0^{(r)}.\end{aligned}$$

De forma similar, também temos que $\mathcal{S}(H_{[0]}) \subseteq H_{[0]}$, pois $\mathcal{S}(H_0^{(r)}) \subseteq H_0^{(r)}$, para todo $r > 0$ ($\mathcal{S}$ é antimorfismo de álgebras). Portanto, $H_{[0]}$ é subálgebra de Hopf de H.

Para ver que $(H_{[0]})_0 = H_0$ basta utilizar o argumento do item 3 da Proposição 2.1.7 e o fato que $H_0 \subseteq H_{[0]}$.

2. Da definição de filtração standard, temos, de forma análoga ao que vimos para a filtração coradical, que:

$$H_{[n]} = ((H_{[0]}^{\perp})^{n+1})^{\perp},$$

para todo $n \geq 0$. Isso implica que cada $H_{[n]}$ é uma subcoálgebra de H, visto que cada $(H_{[0]}^{\perp})^{n+1}$ é um ideal bilateral na álgebra H^*. Assim, por [S, Teor. 9.0.0(i)], segue que:

$$H_{[n]} \subseteq H_{[n+1]},$$

para todo $n \geq 0$. Mais ainda, para todo $n \geq 0$:

$$H_n = \wedge^{n+1} H_0 \subseteq \wedge^{n+1} H_{[0]} = H_{[n]} \Longrightarrow H = \bigcup_{n \geq 0} H_n \subseteq \bigcup_{n\geq 0} H_{[n]} \subseteq H$$
$$\Longrightarrow H = \bigcup_{n\geq 0} H_{[n]}.$$

Por [S, Teor. 9.1.6], $\Delta(H_{[n]}) \subseteq \sum_{i=0}^{n} H_{[i]} \otimes H_{[n-i]}$. Ou seja, a filtração standard é uma filtração de coálgebras.

Para ver que é filtração de álgebras, basta usar indução da mesma forma que no item 1 da Proposição 2.1.10. Note que este argumento funciona porque temos $H_{[0]}$ subálgebra de H, $H_{[n]}$ é subcoálgebra sempre e também temos o mesmo encaixe da filtração coradical para a filtração standard. Por fim, por indução, vemos que:

$$\mathcal{S}(H_{[n]}) = \mathcal{S}(H_{[n-1]} \wedge H_{[0]}) = \mathcal{S}(H_{[0]}) \wedge \mathcal{S}(H_{[n-1]}) \overset{(HI)}{\subseteq} H_{[0]} \wedge H_{[n-1]} = H_{[n]} \ (*).$$

3. De $\mathcal{S}$ bijetiva, verifica-se que $\mathcal{S}(H_0) = H_0$, uma vez que $\mathcal{S}^{-1}$ também é antimorfismo de coálgebras. Por sua vez, no item 1, em vez de obtermos $\mathcal{S}(H_0^{(r)}) \subseteq H_0^{(r)}$, para todo $r \geq 0$, temos a igualdade, o que garante que $\mathcal{S}(H_{[0]}) = H_{[0]}$.

Assim, na indução $(*)$ acima, em vez da inclusão na hipótese de indução podemos tomar uma igualdade, e, portanto,

$$\mathcal{S}(H_{[n]}) = H_{[n]},$$

para todo $n \geq 0$.

$\square$

Graças ao lema anterior, podemos considerar a álgebra de Hopf graduada:

$$grH = \bigoplus_{n\geq 0} H_{[n]}/H_{[n-1]} = \bigoplus_{n \geq 0} gr^n H, \ H_{[-1]} := 0,$$

associada à filtração standard. Como antes, tomando $\pi : grH \to H_{[0]}$ a projeção homogênea, temos que o diagrama $R = (grH)^{co\pi}$ é uma álgebra de Hopf em ${}^{H_{[0]}}_{H_{[0]}}\mathcal{YD}$ e:

$$grH \simeq R\#H_{[0]}.$$

Antes de prosseguirmos, analisemos um pouco este resultado. Partimos de uma álgebra de Hopf H de antípoda bijetiva, tomamos seu coradical de Hopf $H_{[0]}$ e construímos sua filtração standard. Vimos que tal filtração é de álgebras de Hopf, o que nos permitiu associar a álgebra de Hopf graduada grH. Por fim, utilizando o Teorema 1.3.4, obtivemos que H é uma *deformação* ou *lifting* do produto de Radford-Majid acima, isto é, chegamos que a álgebra de Hopf graduada grH é isomorfa à bosonização acima.

Logo, se buscamos classificar todas as álgebras de Hopf com antípoda bijetiva (em particular, as de dimensão finita) ou encontrar novos exemplos das mesmas, este resultado se revela ser um grande aliado, pois através dele já temos alguma ideia de como terá de ser a estrutura destas álgebras de Hopf.

Contudo, antes de resumirmos esse resultado na forma de um teorema, ainda é possível refiná-lo um pouco mais. Para tanto, precisamos de alguns resultados intermediários. Comecemos com a seguinte proposição que nos diz que a filtração de álgebras de Hopf natural associada à álgebra de Hopf graduada grH coincide com a filtração standard de grH.

Proposição 3.1.2 *Nas condições acima:*

$$(grH)_{[n]} = \bigoplus_{i=0}^{n} gr^i H,$$

para todo $n \geq 0$.

Dem.: Façamos por indução. Para $n = 0$, do fato da filtração natural associada a grH ser uma filtração de coálgebras, segue por [S, Prop. 11.1.1] que

$$(grH)_0 \subseteq gr^0 H = H_{[0]} \Longrightarrow (grH)_{[0]} \subseteq H_{[0]} = gr^0 H,$$

já que $H_{[0]}$ é subálgebra. Por outro lado, H_0 é uma subcoálgebra cosemissimples de grH. Logo,

$$H_0 \subseteq (grH)_0 \Longrightarrow gr^0 H = H_{[0]} \subseteq (grH)_{[0]}$$

e, portanto, vale para $n = 0$. Agora, o caso $n-1$ implicando o n :
" $\supseteq$ " : Basta ver que:

$$\begin{aligned} \Delta(gr^n H) \subseteq & \sum_{l=0}^{n} gr^l H \otimes gr^{n-l} H \subseteq gr^0 H \otimes grH + grH \otimes (\bigoplus_{i=0}^{n-1} gr^i H) \\ & \overset{\text{(HI)}}{=} (grH)_{[0]} \otimes grH + grH \otimes (grH)_{[n-1]}, \end{aligned}$$

o que implica que $gr^n H \subseteq (grH)_{[0]} \wedge (grH)_{[n-1]} = (grH)_{[n]}$, garantindo a inclusão.
" $\subseteq$ " : Observar que de $(grH)_{[0]} = gr^0 H$, vemos que $(grH)_{[0]}$ é um *subespaço graduado*,

isto é, $(grH)_{[0]} = \bigoplus_{m\geq 0}((grH)_{[0]} \cap gr^m H)$.
Afirmação 1 : O produto wedge de subespaços graduados é graduado, ou seja, dados X, Y subespaços graduados, tem-se:

$$X \wedge Y = \bigoplus_{m\geq 0}((X \wedge Y) \cap gr^m H).$$

Com efeito, note que a inclusão " $\supseteq$ " é trivial. Assim, seja $x \in X \wedge Y$. Como $X \wedge Y \subseteq grH$, então $x = \sum_{i=0}^{n} x_i$, com $x_i \in gr^i H$. Logo,

$$\begin{aligned}\Delta(x_i) \in \bigoplus_{j=0}^{i} gr^j H \otimes gr^{i-j} H \Longrightarrow \Delta(x) &\in \sum_{i=0}^{n}\bigoplus_{j=0}^{i} gr^j H \otimes gr^{i-j} H \\ &= \bigoplus_{i=0}^{n}\bigoplus_{j=0}^{i} gr^j H \otimes gr^{i-j} H.\end{aligned}$$

Mas, $x \in X \wedge Y$. Assim:

$$\begin{aligned}\Delta(x) &\in X \otimes grH + grH \otimes Y \\ &= (\bigoplus_{j\geq 0} X \cap gr^j H) \otimes \bigoplus_{j\geq 0} gr^j H + \bigoplus_{j\geq 0} gr^j H \otimes (\bigoplus_{j\geq 0} Y \cap gr^j H) \\ &= \bigoplus_{i\geq 0}\bigoplus_{j=0}^{i}[(X \cap gr^j H) \otimes gr^{i-j} H + gr^j H \otimes (Y \cap gr^{i-j} H)].\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}&\Delta(x) \in \bigoplus_{i=0}^{n}\bigoplus_{j=0}^{i}[(X \cap gr^j H) \otimes gr^{i-j} H + gr^j H \otimes (Y \cap gr^{i-j} H)] \\ \Longrightarrow\ &\Delta(x_i) \in \bigoplus_{j=0}^{i}[(X \cap gr^j H) \otimes gr^{i-j} H + gr^j H \otimes (Y \cap gr^{i-j} H)] \\ &\qquad\subseteq X \otimes grH + grH \otimes Y \\ \Longrightarrow\ &\qquad x_i \in (X \wedge Y) \cap gr^i H,\end{aligned}$$

o que garante que $X \wedge Y$ é subespaço graduado.

Logo, como o produto wedge de subespaços graduados é graduado, segue de forma indutiva que:

$$(grH)_{[n]} = \bigoplus_{m\geq 0}(gr^m H \cap (grH)_{[n]}).$$

Assim, se mostrarmos que para $m > n$ temos que $gr^m H \cap (grH)_{[n]} = 0$, segue a inclusão que falta. Sejam $m > n$ e $h \in H_{[m]} \backslash H_{[m-1]}$ ($\overline{h} \neq 0$ em $gr^m H$). De $\Delta(H_{[m]}) \subseteq \sum_{i=0}^{m} H_{[i]} \otimes H_{[m-i]}$, vem que:

$$\Delta(h) = x + y + z,$$

com $x \in \sum_{i=0}^{n-1} H_{[i]} \otimes H_{[m-i]}, y \in \sum_{i=n}^{m-1} H_{[i]} \otimes H_{[m-i]}, z \in H_{[m]} \otimes H_{[0]}$. Logo, da definição da comultiplicação em grH, temos que:

$$\Delta(\overline{h}) = \overline{x} + \overline{y} + \overline{z},$$

com $\overline{x} \in \sum_{i=0}^{n-1} gr^i H \otimes gr^{m-i} H, \overline{y} \in \sum_{i=n}^{m-1} gr^i H \otimes gr^{m-i} H, \overline{z} \in gr^m H \otimes gr^0 H.$
Afirmação 2 : $\overline{y} \neq 0$. Com efeito, tomando-se $\pi_{[i]} : H_{[i]} \rightarrow gr^i H$ a projeção natural, novamente da definição da comultiplicação em grH, segue que:

$$\begin{aligned} \overline{y} = 0 &\Longleftrightarrow y \in \ker(\sum_{i=n}^{m-1} \pi_{[i]} \otimes \pi_{[m-i]}) \\ &\overset{(*)}{\Longleftrightarrow} y \in \sum_{i=n}^{m-1} \ker(\pi_{[i]} \otimes \pi_{[m-i]}) = \sum_{i=n-1}^{m-1} H_{[i]} \otimes H_{[m-i-1]}, \end{aligned}$$

onde o passo $(*)$ vale porque a aplicação $\sum_{i=n}^{m-1} \pi_{[i]} \otimes \pi_{[m-i]}$ atua preservando as componentes homogêneas. Assim, se $\overline{y} = 0$:

$$\begin{aligned} \Delta(h) \in H_{[n-1]} \otimes H_{[m]} + H_{[m]} \otimes H_{[m-n-1]} &\Longrightarrow h \in H_{[n-1]} \wedge H_{[m-n-1]} = H_{[m-1]} \\ &\Longrightarrow \overline{h} = 0. \end{aligned}$$

Como $\overline{h} \neq 0$ temos um absurdo e consequentemente $\overline{y} \neq 0$.

Mais ainda, de $\overline{y} \neq 0$, também temos que $\overline{y} \notin (grH)_{[n-1]} \otimes grH + grH \otimes (grH)_{[0]}$, tendo em vista que por, hipótese de indução, $(grH)_{[n-1]} = \bigoplus_{i=0}^{n-1} gr^i H$ e que:

$$(\sum_{i=n}^{m-1} gr^i H \otimes gr^{m-i} H) \cap (\bigoplus_{i=0}^{n-1} gr^i H \otimes grH + grH \otimes gr^0 H) = 0.$$

Como $\overline{x}, \overline{z} \in (grH)_{[n-1]} \otimes grH + grH \otimes (grH)_{[0]}$, segue que:

$$\Delta(\overline{h}) = \overline{x} + \overline{y} + \overline{z} \notin (grH)_{[n-1]} \otimes grH + grH \otimes (grH)_{[0]} \Longrightarrow \overline{h} \notin (grH)_{[n]}.$$

Ou seja, $gr^m H \cap (grH)_{[n]} = 0$, para todo $m > n$.

$\square$

Observe que podemos obter como corolário desta proposição que:

$$(grH)_n \subseteq \bigoplus_{i=0}^{n} gr^i H,$$

para todo $n \geq 0$. Porém não temos a outra inclusão, como podemos ver através da álgebra de Hopf $\mathcal{K}$ do Exemplo 2.1.9, pois

$$6 = \dim \mathcal{K}_0 \leq \dim \mathcal{K}_{[0]} \leq \dim \mathcal{K} = 8 \overset{(*)}{\Longrightarrow} \mathcal{K}_0 \subsetneq \mathcal{K}_0 = \mathcal{K},$$

onde $(*)$ vale por causa do Teorema de Nichols-Zoeller e o fato de que $\mathcal{K}_{[0]}$ é subálgebra de Hopf de $\mathcal{K}$. Em outras palavras, grH não é *coradicalmente graduada*.

Também note que o diagrama $R = (grH)^{co\pi}$ herda uma graduação de álgebras da graduação de grH, ou seja,

$$R = \bigoplus_{n \geq 0} R^n$$

é uma álgebra graduada, onde $R^n = R \cap gr^n H$. Com efeito, como já sabemos da seção 1.4 que R é uma subálgebra de grH, só temos que mostrar que R é um subespaço graduado de grH. Seja $r \in R \subseteq grH$, então

$$r = \sum_{j=0}^{k} r_j,$$

com $r_j \in gr^j H$. Da estrutura de coálgebra de grH, podemos admitir que

$$\Delta_{grH}(r_j) = \sum_{i=0}^{j} r_{j,i} \otimes r_j^{j-i}$$

onde $r_{j,i} \in gr^i H, r_j^{j-i} \in gr^{j-i} H$. Já, de $r \in (grH)^{co\pi}$, temos que:

$$\sum_{j=0}^{k} (r_j \otimes 1) = r \otimes 1 = (id \otimes \pi)\Delta_{grH}(r) = \sum_{j=0}^{k} \sum_{i=0}^{j} r_{j,i} \otimes \pi(r_j^{j-i}) = \sum_{j=0}^{k} r_{j,j} \otimes r_j^0.$$

Assim, tomando-se as componentes homogêneas segue que para todo $j = 0, \cdots, k$:

$$r_j \otimes 1 = r_{j,j} \otimes r_j^0 \Longrightarrow r_j \in R.$$

Logo, R é um subespaço graduado.

Mais ainda, com respeito a esta graduação, R é uma *álgebra de Hopf graduada* em ${}^{H_{[0]}}_{H_{[0]}}\mathcal{YD}$, isto é:

- R é uma álgebra de Hopf em ${}^{H_{[0]}}_{H_{[0]}}\mathcal{YD}$;
- R possui uma graduação $R = \bigoplus\limits_{n \geq 0} R^n$ que é de: módulos de Yetter-Drinfel'd, álgebras e coálgebras.

Já vimos o primeiro item e que a graduação é de álgebras. Vejamos o restante. Sejam $h \in H_{[0]} = gr^0 H, r \in R^j = R \cap gr^j H$. Então

$$h \cdot r = \iota(h_1) r \mathcal{S} \iota(h_2) = h_1 r \mathcal{S}(h_2) \in gr^{0+j+0} H = gr^j H,$$

já que $\Delta_{grH}(h) \in gr^0 H \otimes gr^0 H$ e $\mathcal{S}(gr^0 H) = gr^0 H$. Também,

$$\lambda(r) = (\pi \otimes id)\Delta_{grH}(r) \in (\pi \otimes id)(\sum_{i=0}^{j} gr^i H \otimes gr^{j-i} H) = H_{[0]} \otimes gr^j H,$$

o que garante que a graduação é de módulos de Yetter-Drinfel'd. Para mostrar que é de coálgebras, primeiro notemos que, dado $r \in R^j$:

$$\begin{aligned}
\Delta^2_{grH}(r) &\in \sum_{i=0}^{j} gr^i H \otimes \Delta_{grH}(gr^{j-i} H) \\
&\subseteq \sum_{i=0}^{j} gr^i H \otimes (\sum_{k=0}^{j} gr^k H \otimes gr^{j-i-k} H) = \sum_{\substack{i,k,l \geq 0 \\ i+k+l=j}} gr^i H \otimes gr^k H \otimes gr^l H.
\end{aligned}$$

Assim, podemos admitir

$$\Delta^2_{grH}(r) = \sum_{\substack{i,k,l \geq 0 \\ i+k+l=j}} a_{i,k,l} \otimes b_{i,k,l} \otimes c_{i,k,l},$$

com $a_{i,k,l} \in gr^i H, b_{i,k,l} \in gr^k H, c_{i,k,l} \in gr^l H$. Logo,

$$\begin{aligned}
\Delta_R(r) = r_1 \iota\pi\mathcal{S}(r_2) \otimes r_3 &= \sum_{\substack{i,k,l \geq 0 \\ i+k+l=j}} a_{i,k,l} \pi\mathcal{S}(b_{i,k,l}) \otimes c_{i,k,l} \\
&= \sum_{\substack{i,l \geq 0 \\ i+l=j}} a_{i,0,l} \mathcal{S}(b_{i,0,l}) \otimes c_{i,0,l} \in \sum_{\substack{i,l \geq 0 \\ i+l=j}} gr^{i+0} H \otimes gr^l H = \sum_{i=0}^{j} gr^i H \otimes gr^{j-i} H,
\end{aligned}$$

o que implica que $\Delta_R(R^j) \subseteq \sum_{i=0}^{j} R^i \otimes R^{j-i}$, uma vez que R é subespaço graduado.

Por sua vez, como a counidade de R é a herdada de grH e, em particular, grH é uma coálgebra graduada, tem-se que $\varepsilon_R(R^j) = 0$, para todo $j > 0$. Portanto, a graduação também é de coálgebras e temos que R é uma álgebra de Hopf graduada em ${}^{H_{[0]}}_{H_{[0]}}\mathcal{YD}$.

Observe que via o isomorfismo dado pelo Teorema 1.3.4, temos que

$$R^n \# H_{[0]} \subseteq gr^{n+0}H = gr^n H,$$

para todo $n \geq 0$. Por outro lado,

$$grH = \bigoplus_{n\geq 0} gr^n H \supseteq \bigoplus_{n\geq 0} (R^n \# H_{[0]}) = (\bigoplus_{n\geq 0} R^n) \# H_{[0]} = R \# H_{[0]} = grH.$$

Logo,

$$gr^n H = R^n \# H_{[0]},$$

para todo $n \geq 0$. Para finalizar, observe que também temos:

1. $R_0 = R^0 = \Bbbk\{1\}$;

2. $R^1 \subseteq P(R)$.

De fato, para o item 1, temos que $R_0 \subseteq R^0$, já que $R = \bigoplus_{n\geq 0} R^n$ é uma coálgebra graduada e tendo em vista [S, Prop. 11.1.1]. Também é fácil ver que $R^0 = \Bbbk\{1\}$, pois:

$$x \in R^0 \Longrightarrow x \otimes 1 = x_1 \otimes \pi(x_2) = x_1 \otimes x_2 \Longrightarrow x \in \Bbbk\{1\}.$$

A outra inclusão é imediata. Assim,

$$R_0 \subseteq R^0 = \Bbbk\{1\} \ (\subseteq R_0),$$

o que implica que $R_0 = R^0 = \Bbbk\{1\}$.

Para o item 2, seja $r \in R^1$. De R coálgebra graduada, temos

$$\Delta_R(r) \in R^0 \otimes R^1 + R^1 \otimes R^0 \overset{R^0 = \Bbbk\{1\}}{\Longrightarrow} \Delta_R(r) = 1 \otimes r' + r'' \otimes 1,$$

com $r', r'' \in R^1$. Assim,

$$r = \varepsilon(r^1) r^2 = \varepsilon(1) r' + \varepsilon(r'') 1 = r'.$$

De forma análoga, $r = r''$, o que implica que $r \in P(R)$, o que conclui a demonstração dos dois itens.

Antes de continuarmos, uma coálgebra C é dita *conexa* se C_0 é unidimensional. Assim, pelo que acabamos de provar, R é conexa.

O próximo teorema de estrutura resume o que vimos nesta seção. Ele é o principal resultado da primeira parte de [AC], o artigo base desta dissertação.

Teorema 3.1.3 *Toda álgebra de Hopf de antípoda bijetiva é a deformação da bosonização de uma álgebra de Hopf gerada através de uma coálgebra cosemissimples por uma álgebra de Hopf graduada conexa na categoria dos módulos de Yetter-Drinfel'd sobre a anterior. Mais ainda, a componente homogênea de número 1 da álgebra de Hopf trançada acima está contida no conjunto de elementos primitivos da mesma.*

□

3.2 Novos rumos na classificação de álgebras de Hopf de dimensão finita

Apesar do Teorema 3.1.3 ser por si um resultado interessante em termos de estrutura, ele aparenta não ter muita utilidade. Desta forma, nesta seção, estamos interessados em lhe dar significância. Para tanto, suponha que queremos classificar todas as álgebras de Hopf de dimensão finita. A partir do teorema acima, três questões pertinentes aparecem de forma natural.

Questão 1 *Seja C uma coálgebra cosemissimples de dimensão finita e $S : C \to C$ um antimorfismo bijetivo de coálgebras. Classificar todas as álgebras de Hopf L de dimensão finita geradas (como álgebra) por C e tais que $\mathcal{S}_{|_C} = S$, onde $\mathcal{S}$ é a antípoda de L.*

Questão 2 *Dada L como na questão anterior, classificar todas as álgebras de Hopf graduadas conexas R em ${}^L_L\mathcal{YD}$ de dimensão finita.*

Questão 3 *Dadas L e R como nas questões anteriores, classificar todas as deformações ou liftings, ou seja, classificar todas as álgebras de Hopf H tais que:*

$$grH \simeq R\#L.$$

Observe que se respondêssemos a estas questões, teríamos como resultado imediato a classificação geral das álgebras de Hopf de dimensão finita.

Durante o restante desta seção, estaremos tratando do que já se conhece sobre estas questões, bem como novas indagações que surgem a partir delas. Apesar da formalidade que uma dissertação exige, esta seção tem um caráter mais informal. Assim sendo, muito do que está aqui será abordado de forma superficial. A referência base para esta parte do estudo é [AC, pág. 5-8].

Também assumiremos que todas as estruturas algébricas daqui em diante tomadas tem dimensão finita.

3.2.1 Questão 1: Álgebras de Hopf geradas por coálgebras cosemissimples

Tendo em vista os resultados que utilizaremos, temos que admitir nesta subseção que o corpo base $\Bbbk$ tem característica zero e é algebricamente fechado. Observe que esta questão também contém a classificação de todas as álgebras de Hopf semissimples (ver Teorema Larson-Radford - [Sc, Teor. 3.14]) que permanece amplamente aberta, exceto para algumas dimensões.

Antes de prosseguir, um pouco de terminologia se faz necessário. Uma base de uma coálgebra C é dita uma *matriz multiplicativa* (ou uma *matrix-like basis*) se é da forma $(e_{ij})_{1\leq i,j\leq m}$ com:

$$\Delta(e_{ij}) = \sum_{k=1}^{m} e_{ik} \otimes e_{kj} \text{ e } \varepsilon(e_{ij}) = \delta_{ij},$$

onde δ_{ij} representa o símbolo de Kronecker. Note que na álgebra de Hopf $\mathcal{K}$ do Exemplo 2.1.9, $(e_{ij})_{1\leq i,j\leq 2}$ com $e_{11} = a, e_{12} = b, e_{21} = c$ e $e_{22} = d$ é uma matriz multiplicativa.

Agora, vejamos um pouco sobre o *grupo quântico* $\mathcal{O}_q(SL_2(\Bbbk))$. Seja $q \in \Bbbk^{\times}$ não necessariamente uma raiz da unidade. Como álgebra, $\mathcal{O}_q(SL_2(\Bbbk)) = \Bbbk\langle a, b, c, d\rangle$ sujeito às seguintes relações:

$$\begin{array}{ccc} ba = q^{-2}ab & ca = q^{-2}ac & bc = cb \\ db = q^{-2}bd & dc = q^{-2}cd & ad = q^{2}bc + 1 \end{array}$$
$$ad - da = (q^{2} - q^{-2})bc$$

Já como coálgebra, definimos a comultiplicação e a counidade de modo que $(e_{11} = a, e_{12} = b, e_{21} = c, e_{22} = d)$ seja uma matriz multiplicativa. Com estas estruturas, $\mathcal{O}_q(SL_2(\Bbbk))$ se torna uma álgebra de Hopf.

A partir disto, temos condições de recordar um importante resultado devido a Ştefan, que é usado na classificação de álgebras de Hopf de dimensão pequena [Şt, N, GV].

Teorema 3.2.1.1 [*Şt, Teor.* 1.5] *Sejam H um álgebra de Hopf e C uma subcoálgebra simples $\mathcal{S}$-invariante e de dimensão 4. Se $1 < ord(\mathcal{S}|_C^2) = n < \infty$, então existe uma raiz da unidade ω e uma matriz multiplicativa $(e_{ij})_{1\leq i,j\leq 2}$ tal que $ord(\omega^2) = n$ e (e_{ij}) satisfaz todas as relações de $\mathcal{O}_{\sqrt{-\omega}}(SL_2(\Bbbk))$. Em particular, existe um morfismo de álgebras de Hopf $\mathcal{O}_{\sqrt{-\omega}}(SL_2(\Bbbk)) \to H$, o qual é sobrejetivo se C gera H como álgebra.*

$\square$

Este teorema tem uma demonstração técnica a qual pode ser vista na referência citada. O que gostaríamos de frisar é que ele garante que a álgebra de Hopf $\mathcal{K}$ do Exemplo 2.1.9 é um quociente de dimensão finita do grupo quântico $\mathcal{O}_{\sqrt{\xi}}(SL_2(\Bbbk))$.

O Teorema 3.2.1.1 desperta o interesse em classificar todos os *subgrupos quânticos* do grupo quântico SL_2, isto é, as álgebras de Hopf quocientes de $\mathcal{O}_q(SL_2(\Bbbk))$. Este problema foi considerado pela primeira vez em [P] para os grupos $SU_q(2)$ e $SU_q(3)$. A determinação de todos os subgrupos quânticos de um grupo quântico sobre uma raiz da unidade ou, em termos equivalentes, determinar todas as álgebras de Hopf quocientes de uma álgebra de coordenadas quantizadas sobre uma raiz da unidade (em $\mathbb{C}$) foi realizado em [Mü] para quocientes de dimensão finita do grupo quântico SL_n; e, em [AG], para versões quânticas de grupos simples.

Agora, voltando à questão central da subseção, vejamos a seguinte definição que nos permitirá ver a Questão 1 sobre outra perspectiva.

Definição 3.2.1.2 [*R2, Lema* 2] *Sejam C uma coálgebra e $S \in GL(C)$ um antimorfismo de coálgebras. A álgebra tensorial quociente:*

$$\mathcal{H}(S) = T(C)/\langle c_1 S(c_2) - \varepsilon(c)1, S(c_1)c_2 - \varepsilon(c)1 : c \in C\rangle$$

é uma álgebra de Hopf com comultiplicação induzida por C e antípoda induzida por S. Mais ainda, ela satisfaz a seguinte propriedade universal: se K é uma álgebra de Hopf (com antípoda $\mathcal{S}_K$) e $f : C \to K$ é um morfismo de coálgebras tal que $\mathcal{S}_K f = fS$, então existe um único morfismo de álgebras de Hopf $\tilde{f} : \mathcal{H}(S) \to K$ tal que $\tilde{f}|_C = f$.

Dado $s \in \mathbb{N}$, podemos tomar $1 < d_1 < \cdots < d_s$ e $n_1, \cdots, n_s \in \mathbb{N}$. Para cada $r = 1, \cdots, s$, também podemos tomar $F_r \in GL_{d_r}(\Bbbk)$ e considerar as seguintes coálgebras:

$$D_r = (\mathcal{M}^*(d_r, \Bbbk))^{n_r} \text{ e } C = \bigoplus_{r=1}^{s} D_r.$$

Agora, fixe $(e_{ij}^{r,k})_{1\leq i,j\leq d_r}$ uma matriz multiplicativa da k-ésima cópia de $\mathcal{M}^*(d_r,\Bbbk)$ em D_r e defina $S_r : D_r \to D_r$ dada por:

$$S_r(e_{ij}^{r,k}) = \begin{cases} e_{ji}^{r,k+1}, & 1 \leq k < n_r \\ (a_{ij}), & k = n_r \end{cases}$$

onde $A = (a_{ij})$ é dada por $A = F_r(e_{ji}^{r,1})F_r^{-1}$. Note que, para $1 \leq k < n_r$:

$$\begin{aligned} \Delta S_r(e_{ij}^{r,k}) = \Delta(e_{ji}^{r,k+1}) &= \sum_{l=1}^{d_r} e_{jl}^{r,k+1} \otimes e_{li}^{r,k+1} = (S_r \otimes S_r)(\sum_{l=1}^{d_r} e_{lj}^{r,k} \otimes e_{il}^{r,k}) \\ &= (S_r \otimes S_r)\tau\Delta(e_{ij}^{r,k}). \end{aligned}$$

Para $k = n_r$ (admitindo que $F_r = (f_{ij})$ e $F_r^{-1} = (g_{ij})$):

$$\Delta S_r(e_{ij}^{r,k}) = \Delta(F_r e_{ji}^{r,1} F_r^{-1}) = \Delta(\sum_{a,b=1}^{d_r} f_{aj} g_{ib} e_{ab}^{r,1}) = \sum_{a,b,c=1}^{d_r} f_{aj} g_{ib} e_{ac}^{r,1} \otimes e_{cb}^{r,1}.$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} (S_r \otimes S_r)\tau\Delta(e_{ij}^{r,k}) &= (S_r \otimes S_r)(\sum_{m=1}^{d_r} e_{mj}^{r,k} \otimes e_{im}^{r,k}) = \sum_{m=1}^{d_r} F_r e_{jm}^{r,1} F_r^{-1} \otimes F_r e_{mi}^{r,1} F_r^{-1} \\ &= \sum_{m,a,b,c,d=1}^{d_r} f_{aj} g_{mb} f_{cm} g_{id} e_{ab}^{r,1} \otimes e_{cd}^{r,1} \overset{(*)}{=} \sum_{a,b,c,d=1}^{d_r} \delta_{bc} f_{aj} g_{id} e_{ab}^{r,1} \otimes e_{cd}^{r,1} \\ &= \sum_{a,b,c=1}^{d_r} f_{aj} g_{ic} e_{ab}^{r,1} \otimes e_{bc}^{r,1}, \end{aligned}$$

onde o passo $(*)$ vale porque $I_{d_r} = F_r F_r^{-1}$.

Desta forma S_r é antimorfismo de coálgebras. Mais ainda, como S_r atua ora por "shift" e transposição, e ora por transposição e conjugação, é nítido que $S_r \in GL(D_r)$. Por fim, tomando $S = \bigoplus_{r=1}^{s} S_r \in GL(C)$, vemos que $\mathcal{S}$ é um antimorfismo de coálgebras, o que nos permite lhe aplicar a Definição 3.2.1.2. Denotaremos por $\mathcal{H}(F_r, n_r)_{1\leq r\leq s}$ a álgebra de Hopf resultante.

Esta construção é uma generalização da que está em [Bi]; um construção similar no contexto de C^*-álgebras de Hopf foi introduzido em [W]. Também veja [VDW, BaBi, BiN] para variações e aplicações.

Tendo em vista à Questão 1 e o fato de que a coálgebra C escolhida é cosemissimples, outra questão interessante é a seguinte.

Questão 4 *Computar as álgebras de Hopf quocientes de $\mathcal{H}(F_r, n_r)_{1\leq r\leq s}$.*

3.2.2 Questão 2: Álgebras de Hopf trançadas graduadas conexas

Nesta subseção exploramos a conexão entre a Questão 2 e as álgebras de Nichols, uma vez que estas compõem os exemplos mais relevantes de álgebras de Hopf graduadas conexas em ${}_H^H\mathcal{YD}$, onde H é uma álgebra de Hopf.

Observação 3.2.2.1 *Apesar da Questão 2 tratar de álgebras de Hopf graduadas conexas em ${}_H^H\mathcal{YD}$, com $H = L$ como na Questão 1, o que segue não necessita de H nas condições de L. Assim, trabalharemos com H uma álgebra de Hopf qualquer e somente nos restringiremos a H na forma de L quando necessário.*

Dado $V \in {}_H^H\mathcal{YD}$, dizemos que uma álgebra de Hopf graduada $R = \bigoplus_{n\geq 0} R^n$ em ${}_H^H\mathcal{YD}$ é uma *álgebra de Nichols* para V se:

- $R^0 \simeq \Bbbk$ como módulos de Yetter-Drinfel'd;
- $R^1 \simeq V$ como módulos de Yetter-Drinfel'd;
- $R^1 = P(R)$;
- R é gerada como álgebra por R^1.

Aparentemente nada garante que, fixado $V \in {}_H^H\mathcal{YD}$, existem álgebras de Nichols para V e, muito menos, que são únicas em certo sentido. Mas a próxima construção mostra que as álgebras de Nichols sempre existem e são únicas a menos de isomorfismo.

Como $V \in {}_H^H\mathcal{YD}$, segue que a álgebra tensorial $T(V) = \bigoplus_{n\geq 0} T^n(V)$ admite uma estrutura natural de módulo de Yetter-Drinfel'd via:

- $h\cdot(v^{[1]}v^{[2]}\cdots v^{[n]}) = (h_1\cdot v^{[1]})(h_2\cdot v^{[2]})\cdots(h_n\cdot v^{[n]})$ e $h\cdot 1 = \varepsilon(h)1$;
- $\lambda(v^{[1]}v^{[2]}\cdots v^{[n]}) = v_{-1}^{[1]}v_{-1}^{[2]}\cdots v_{-1}^{[n]}\otimes v_0^{[1]}v_0^{[2]}\cdots v_0^{[n]}$ e $\lambda(1) = 1\otimes 1$,

onde $v^{[1]}v^{[2]}\cdots v^{[n]} \in T^n(V)$. Com esta estutura, $T(V)$ resulta ser uma álgebra graduada em ${}_H^H\mathcal{YD}$. Mais ainda, existe um (único) morfismo de álgebras $\Delta : T(V) \to T(V)\otimes T(V)$ tal que $\Delta(v) = v\otimes 1 + 1\otimes v$, para todo $v \in V$. Por exemplo, se $x, y \in V$:

$$\Delta(xy) = xy\otimes 1 + x\otimes y + x_{-1}\cdot y\otimes x_0 + 1\otimes xy.$$

Agora, tomando-se $\varepsilon : T(V) \to \Bbbk$ com $\varepsilon(v) = 0$, para todo $v \in V$, vemos que $T(V)$ é uma biálgebra graduada em ${}^H_H\mathcal{YD}$.

Para ver a existência da antípoda, note que o coradical de $T(V)$ é $\Bbbk$ (ver [S, Prop. 11.1.1]) e utilize [M, Lema 5.2.10]. Logo, $T(V)$ é uma álgebra de Hopf graduada trançada conexa. Mais ainda, por [M, Cor. 5.3.5], todas as biálgebras trançadas quocientes de $T(V)$ são álgebras de Hopf trançadas em ${}^H_H\mathcal{YD}$. Assim sendo, consideremos $\mathfrak{S}$ a classe de todos os $I \subseteq T(V)$ tais que:

- I é um ideal homogêneo gerado por elementos de grau maior ou igual a 2;
- I também é um coideal, ou seja, $\Delta(I) \subseteq I \otimes T(V) + T(V) \otimes I$.

Note que não pedimos que os ideais I sejam submódulos de Yetter-Drinfel'd. Assim, vamos tomar $\widetilde{\mathfrak{S}}$ a subclasse de $\mathfrak{S}$ consistindo de todos os $I \in \mathfrak{S}$ que são submódulos de Yetter-Drinfel'd. Observar que os ideais:

$$I(V) = \sum_{I \in \mathfrak{S}} I \text{ e } \widetilde{I}(V) = \sum_{I \in \widetilde{\mathfrak{S}}} I$$

são os maiores elementos de $\mathfrak{S}$ e $\widetilde{\mathfrak{S}}$, respectivamente. Também ver que se $I \in \mathfrak{S}$, então $R = T(V)/I = \bigoplus_{n \geq 0} R^n$ é uma álgebra e coálgebra graduadas com $R^0 = \Bbbk$ e $V \simeq R^1 \subseteq P(R)$. Mais ainda, se $I \in \widetilde{\mathfrak{S}}$, tem-se R uma álgebra de Hopf graduada conexa em ${}^H_H\mathcal{YD}$.

Agora, vejamos o seguinte resultado que garante a existência e unicidade da álgebra de Nichols. Além disso, ele também traz algumas propriedades úteis acerca da mesma.

Teorema 3.2.2.2 [*AS2, Prop.* 2.2] *Nas condições acima, seja* $\mathfrak{B}(V) = T(V)/\widetilde{I}(V)$. *Então:*

1. $V = P(\mathfrak{B}(V))$;
2. $I(V) = \widetilde{I}(V)$;
3. *Seja* $R = \bigoplus_{n \geq 0} R^n$ *uma álgebra de Hopf graduada em* ${}^H_H\mathcal{YD}$ *tal que* $R^0 = \Bbbk\{1\}$ *e* R *é gerada como álgebra por* $V = R^1$. *Então, existe um morfismo sobrejetor de álgebras de Hopf graduadas* $R \to \mathfrak{B}(V)$ *o qual é um isomorfismo de módulos de Yetter-Drinfel'd em grau* 1;
4. *Seja* $R = \bigoplus_{n \geq 0} R^n$ *uma álgebra de Nichols para* V. *Então,* $R \simeq \mathfrak{B}(V)$ *como álgebras de Hopf trançadas em* ${}^H_H\mathcal{YD}$;

5. *Seja* $R = \bigoplus_{n\geq 0} R^n$ *uma álgebra de Hopf graduada em* ${}^H_H\mathcal{YD}$ *com* $R^0 = \Bbbk\{1\}$ *e* $R^1 = P(R) = V$. *Então,* $\mathfrak{B}(V)$ *é isomorfa à subálgebra* $\Bbbk\langle V\rangle$ *de* R *gerada por* V.

□

Voltando à Questão 2. Pelos itens 3 e 5 do teorema acima, se R é uma álgebra de Hopf graduada conexa em ${}^L_L\mathcal{YD}$ (com L como acima), então existe um subquociente canônico de R que resulta ser a álgebra de Nichols $\mathfrak{B}(V)$, onde $V = R^1$. Portanto, seria interessante resolver o seguinte problema.

Questão 5 *Classificar todas as álgebras de Nichols* $\mathfrak{B}(V)$, *com* $V \in {}^L_L\mathcal{YD}$.

3.2.3 Questão 3: Liftings ou deformações

Em [AC], o problema de *lifting* (ou deformação) não é explorado. No entanto, a seguir faremos um breve comentário deste problema indicando algumas referências.

A classificação de todas as álgebras de Hopf H tais que $grH \simeq R\#L$, com R e L como acima, é um caso particular do problema geral de detectar todos os objetos filtrados com um objeto graduado G fixado.

Esses objetos geralmente são chamados de *deformações* ou *quantizações* de G, e são controlados por uma teoria cohomológica adequada. No caso das álgebras de Hopf, eles são chamados de *liftings* [AS2] e a teoria cohomológica associada é a de [GeS1, GeS2]. Também ver [DuCY, MaW].

Referências Bibliográficas

[AC] Andruskiewitsch, N.; Cuadra, L. On the structure of (co-Frobenius) Hopf algebras. *Journal of Noncommutative Geometry*, v. 7, n. 1, pág. 83-104, 2013.

[AEG] Andruskiewitsch, N.; Etingof, P.; Gelaki, S. Triangular Hopf algebras with the Chevalley property. *Michigan Math. J.*, v. 49, n. 2, pág. 277–298, 2001.

[AG] Andruskiewitsch, N.; García, G. A. Quantum subgroups of a simple quantum group at roots of one. *Compos. Math.*, v. 145, n. 2, pág. 476-500, 2009.

[AN] Andruskiewitsch, N.; Natale, S. Counting arguments for Hopf algebras of low dimension. *Tsukuba Math J.*, v. 25, n. 1, pág. 187-201, 2001.

[AS1] Andruskiewitsch, N; Schneider, H.-J. Lifting of quantum linear spaces and pointed Hopf algebras of order p^3. *J. Algebra*, v. 209, n. 2, pág. 658-691, 1998.

[AS2] Andruskiewitsch, N.; Schneider, H.-J. Pointed Hopf algebras in "New directions in Hopf algebras". *Math. Sci. Res. Inst. Publ.*, v. 43, Cambridge Univ. Press, pág. 1-68, 2002.

[AS3] Andruskiewitsch, N.; Schneider, H.-J. Hopf algebras of order p^2 and braided Hopf algebras of order p. *J. Algebra*, v. 199, n. 2, pág. 430–454, 1998.

[Ang] Angiono, I. Álgebras de Nichols sobre grupos abelianos. Tesis de Licenciatura, Universidad Nacional de La Plata, 2007.

[BG] Beattie, M.; García, G. A. Classifying Hopf algebras of a given dimension. *Contemp. Math.*, v. 585, pág. 125-152, 2013.

[BaBi] Banica, T.; Bichon, J. Quantum groups acting on 4 points. *J. Reine Angew. Math.*, v. 626, pág. 75-114, 2009.

[Be] Bespalov, Y. Crossed modules and quantum groups in braided categories. *Appl. Categ. Structures*, v. 5, pág. 155–204, 1997.

[BeD] Bespalov, Y.; Drabant, B. Hopf (bi-)modules and crossed modules in braided monoidal categories. *J. Pure Appl. Algebra*, v. 123, pág. 105-129, 1998.

[Bi] Bichon, J. Cosovereign Hopf algebras. *J. Pure Appl. Algebra*, v. 157, pág. 121-133, 2001.

[BiN] Bichon, J.; Natale, S. Hopf algebra deformations of binary polyhedral groups. *Transform. Groups*, v. 16, n. 2, pág. 339-374, 2011.

[C] Cartier, P. A primer of Hopf algebras. *IHES*, 2006.

[CDMM] Calinescu, C., Dăscălescu, S., Masuoka, A., Menini, C. Quantum lines over non-cocommutative cosemisimple Hopf algebras. *J. Algebra*, v. 273, pág. 753–779, 2004.

[DNR] Dăscălescu, S.; Năstăsescu, C.; Raianu, Ş. Hopf Algebras: An Introduction. Monographs Textbooks in Pure Appl. Math., v. 235, *Dekker*, New York, 2001.

[DuCY] Du, Y.; Chen, X.; Ye, Y. On graded bialgebra deformations. *Algebra Colloq.*, v. 14, pág. 301-312, 2007.

[GeS1] Gerstenhaber, M.; Schack, S. D. Bialgebra cohomology, deformations, and quantum groups. *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, v. 87, pág. 478-481, 1990.

[GeS2] Gerstenhaber, M.; Schack, S. D. Algebras, bialgebras, quantum groups, and algebraic deformations, in "Deformation theory and quantum groups with applications to mathematical physics". *Contemp. Math.*, v. 134, Amer. Math. Soc., pág 51-92, 1992.

[GV] García, G. A.; Vay, C. Hopf algebras of dimension 16. *Algebr. Represent. Theory*, v. 13, pág. 383-405, 2010.

[K] Kassel, C. Quantum Groups. Graduate Texts in Mathematics, *Springer-Verlag*, v. 155, New York, 1995.

[L] Lam, T. Y. A First Course in Noncommutative Rings. *Springer*, 2nd ed., New York, 2001.

[M] Montgomery, S. Hopf Algebras and their Actions on Rings. *CMBS Reg. Conf. Ser. in Math.*, v. 82, Amer. Math. Soc., 1993.

[Mac] Mac Lane, S. Categories for the Working Mathematician. Graduate Texts in Mathematics, *Springer-Verlag*, v. 5, New York, 1971.

[Mü] Müller, E. Finite subgroups of the quantum general linear group. *Proc. London Math. Soc.*, v. 81, n. 3, pág. 190-210, 2000.

[MaW] Mastnak, M.; Witherspoon, S. Bialgebra cohomology, pointed Hopf algebras, and deformations. *J. Pure Appl. Algebra*, v. 213, pág. 1399-1417, 2009.

[N] Natale, S. Hopf algebras of dimension 12. *Algebr. Represent. Theory*, v. 5, pág. 445-455, 2002.

[NZ] Nichols, W. D.; Zoeller, M. B. A Hopf algebra freeness theorem. *American Journal of Mathematics*, v. 111, n. 2, pág. 381-385, 1989.

[P] Podleś, P. Symmetries of quantum spaces. Subgroups and quotient spaces of quantum $SU(2)$ and $SO(3)$ groups. *Comm. Math. Phys.*, v. 170, pág. 1-20, 1995.

[R1] Radford, D. E. Hopf Algebras. *World Scientific Publishing*, Singapura, 2012.

[R2] Radford, D. E. On the antipode of a cosemisimple Hopf algebra. *J. Algebra*, v. 88, pág 68-88, 1984.

[S] Sweedler, M. Hopf algebras. *Benjamin*, New York, 1969.

[Sc] Schneider, H.-J. Lectures on Hopf Algebras. *Trabajos de Matemática 31/95* (FaMAF, 1995). Disponível em http://www.famaf.unc.edu.ar/series/BMat22-31.htm.

[Şt] Ştefan, D. Hopf algebras of low dimension. *J. Algebra*, v. 211, pág. 343-361, 1999.

[VDW] Van Daele, A.; Wang, S. Universal quantum groups. *Internat. J. Math.*, v. 7, pág. 255-263, 1996.

[W] Wang, S. Quantum symmetry groups of finite spaces. *Comm. Math. Phys.*, v. 195, pág. 195–211, 1998.