

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA MARIA
CENTRO DE CIÊNCIAS NATURAIS E EXATAS
PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA**

Henrique Bevilaqua Cereser

**UM MODELO DE REDES DE MAPAS ACOPLADOS PARA
UM SISTEMA PRAGA-PREDADOR-INSETICIDA**

**Santa Maria, RS
2016**

Henrique Bevilaqua Cereser

UM MODELO DE REDES DE MAPAS ACOPLADOS PARA UM
SISTEMA PRAGA-PREDADOR-INSETICIDA

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado da Pós-Graduação em Matemática, Área de Matemática Aplicada, da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM, RS), como requisito parcial para obtenção do título de **Mestre em Matemática**.

Orientador: Prof^o Dr. Luiz Alberto Díaz Rodrigues

Santa Maria, RS
2016

Ficha catalográfica elaborada através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Central da UFSM, com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

Cereser, Henrique Bevilaqua

Um modelo de redes de mapas acoplados para um sistema praga-predador-inseticida / Henrique Bevilaqua Cereser.- 2016.

61 p.; 30 cm

Orientador: Luiz Alberto Díaz Rodrigues
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Santa Maria, Centro de Ciências Naturais e Exatas, Programa de Pós-Graduação em Matemática, RS, 2016

1. Redes de mapas acoplados 2. Manejo integrado de pragas 3. Modelo presa-predador discreto 4. Dinâmica de populações I. Rodrigues, Luiz Alberto Díaz II. Título.

©2016

Todos direitos autorais reservados a Henrique Bevilaqua Cereser. A reprodução de partes ou do todo deste trabalho só poderá ser feita mediante a citação da fonte.

Endereço: Rua Olavo Bilac, n. 291, Bairro Centro, Santa Maria, RS. CEP: 97015-440

Fone (0xx) 55 3026 6635; E-mail: henriquecereser@gmail.com

Henrique Bevilaqua Cereser

UM MODELO DE REDES DE MAPAS ACOPLADOS PARA UM
SISTEMA PRAGA-PREDADOR-INSETICIDA

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado da Pós-Graduação em Matemática, Área de Matemática Aplicada, da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM, RS), como requisito parcial para obtenção do título de **Mestre em Matemática**.

Aprovado em 24 de agosto de 2016:

Luiz Alberto Díaz Rodrigues, Dr. (UFSM)

(Presidente/Orientador)

Diomar Cristina Mistro, Dra. (UFSM)

Elisa Regina Cara, Dra. (UNIPAMPA)

Santa Maria, RS
2016

DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho à pessoa mais simples e generosa que conheci. Pai.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus, por me iluminar todos os dias e ter me abençoado com pessoas maravilhosas que fazem e fizeram parte da minha vida, e contribuíram para minha caminhada.

À Universidade Federal de Santa Maria e ao Programa de Pós-Graduação em Matemática que me ofereceram a oportunidade de estudar nesse curso de Mestrado em Matemática. Aos professores que fizeram parte de minha caminhada e que compartilharam seus saberes comigo e com os meus demais colegas. Em especial, aos professores Maurício Fronza da Silva, Juliano Damião Bittencourt de Godoi, Diomar Cristina Mistro e Luiz Alberto Díaz Rodrigues.

Agradeço ao meu orientador, professor Luiz Alberto Díaz Rodrigues, por sua coerência entre palavras e ações demonstradas ao longo do período de mestrado. Por sua dedicação, incentivo, troca de experiências, compreensão, paciência, aprendizagem e confiança. Muito obrigado professor Luiz.

Aos professores(as) Diomar Cristina Mistro, Salvador Lou Vega e Elisa Regina Cara, que participaram da banca avaliadora desse trabalho, dispuseram de tempo para a leitura e, assim, contribuíram com seus apontamentos para a melhoria deste trabalho.

A todos os meus colegas do curso de mestrado. Mas em especial aos colegas de linha de pesquisa Sílvia Barcelos Machado e Fernando Mazetto Brizola. Espero que algum dia possamos nos reencontrar para trabalharmos juntos novamente.

Agradeço a todos os meus amigos, mas em destaque aos parceiros de longa data, Adriano, Guima, Martinha, Maurício e Rache. Sei que vocês estão sempre torcendo por mim. Valeu pessoal, com certeza uma parcela deste trabalho é de autoria de vocês.

À Escola Estadual de Ensino Fundamental Marieta D'Ambrósio, aos colegas da instituição, mas em especial meus alunos que lá estudam. Para vocês tento ensinar o pouco que sei e com vocês aprendo muito a cada dia. Valeu turma!

A minha família, a quem devo tudo que tenho e tudo que sou. Às pessoas que em todos os momentos de minha vida estiveram ao meu lado, exemplos de amor, fé e coragem, muito obrigado Mãe e Bruna. Amo vocês!

A minha noiva, amiga, parceira, tesouro, benzinho, Eliziane Tainá e sua família, por sua amizade, companheirismo durante toda essa caminhada, incentivo, carinho, cumplicidade, respeito e compreensão nas horas mais difíceis. Muito obrigado minha querida.

Por último, porém não menos especiais, ao meu pai e aos meus avós, que estão sempre em meu coração e que, mesmo não estando aqui fisicamente, estão brilhando muito em outras esferas olhando por todos nós.

*Eu não sou pobre, eu sou sóbrio,
de bagagem leve. Vivo com apenas
o suficiente para que as coisas não
roubem minha liberdade.*

(José 'Pepe' Mujica)

RESUMO

UM MODELO DE REDES DE MAPAS ACOPLADOS PARA UM SISTEMA PRAGA-PREDADOR-INSETICIDA

AUTOR: Henrique Bevilaqua Cereser

ORIENTADOR: Luiz Alberto Díaz Rodrigues

Esta pesquisa está inserida na Linha de Pesquisa Biomatemática, do Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Santa Maria-RS. Configura-se como um estudo sobre um modelo discreto para um sistema praga-predador-inseticida tendo como ferramenta básica para sua formulação a Rede de Mapas Acoplados. Devido aos sérios problemas que pragas de lavoura representam para agricultura, abordou-se o Manejo Integrado de Pragas (MIP), que é um sistema de controle de pragas que busca preservar e aumentar os fatores de mortalidade natural de pragas pelo uso integrado de métodos de controle selecionados com base em parâmetros técnicos, econômicos, ecológicos e sociológicos. O objetivo deste trabalho é construir um modelo tão simples quanto possível, para estudar as consequências de diferentes estratégias de manejos de pragas. Essas estratégias são divididas em tratamentos diferentes nos quais leva-se em consideração o número de medições da população de pragas, estabelecimento de níveis de controle (NC) e diferentes medidas de controle aplicadas (inseticida e controle biológico). Para comparar e apontar qual dos tratamentos é mais eficiente, computou-se a densidade total da população de pragas sem nenhuma medida de controle e quando cada um dos tratamentos é aplicado ao longo de um determinado período de tempo. A diferença entre esses valores é convertida em um percentual de decrescimento da população de pragas. O mesmo é feito para se obter o percentual de decrescimento do número de sítios tratados. Foi possível constatar que quanto mais cedo se aplica o inseticida no sistema, mais efetivo é o tratamento. Além disso, observou-se que a presença dos predadores (controle biológico) diminui a quantidade de sítios tratados e, em alguns momentos, é menos eficiente no controle da praga.

Palavras-chave: Percentual de Decrescimento. Nível de Controle (NC). Manejo Integrado de Pragas (MIP). Rede de Mapas Acoplados.

ABSTRACT

COUPLED MAP LATTICE MODEL FOR AN PREY-PREDATOR-INSECTICIDE SYSTEM

AUTHOR: Henrique Bevilaqua Cereser

ADVISOR: Luiz Alberto Díaz Rodrigues

This research is inserted in the Biomathematics Research Group of the Programa de Pós-Graduação em Matemática of the Universidade Federal de Santa Maria-RS. It consists in the study of a discrete model for a prey-predator-insecticide system based on the Coupled Map Lattice as basic tool for its formulation. Due to the serious problems that crop pests represent to agriculture, we approached the Integrated Pest Management (IPM), which is a pest control system that seeks to preserve and enhance the natural mortality factors of pests by integrated use of control methods selected based on technical, economic, ecological and sociological parameters. The objective of this work is to build a model as simple as possible to study the effects of different pests management strategies. These strategies are divided into different treatments which take into account the number of measurements of pest population, establishing control levels (CL) and different control measures (pesticide and biological control). For comparison and to point where the treatment is more efficient to compute the total density of the pest population without any control measure and when each treatment is applied over a certain period of time. The difference between these values is converted into a decreasing percentage of the population of pests. The same is done to obtain the percentage decrease in the number of treated sites. It was found that the sooner you apply the insecticide in the system, the more effective the treatment. Furthermore, it was observed that the presence of predators (biological control) decreases the amount of treated sites and, in some instances, is less effective in controlling pest.

Keywords: Decreasing Percentage. Control Level (CL). Integrated Pest Management (IPM). Coupled Map Lattice.

LISTA DE FIGURAS

2.1	Diagrama mostrando o desenvolvimento de um programa de manejo integrado de pragas.	15
2.2	Flutuação populacional para uma determinada praga no decorrer do tempo para (a) espécies que não atingem a posição de praga; (b) pragas ocasionais e (c) pragas severas. NDE=Nível de Dano Econômico; NC=Nível de Controle; NE=Nível de Equilíbrio e \downarrow adoção de medidas de controle. . . .	16
2.3	Tomada de decisão no MIP.	17
3.1	Gráfico da função de Beverton-Holt (3.3) para $r = 1, 5$ e diferentes valores de a	20
3.2	Gráfico da função fator de crescimento $g(N_t)$ para $r = 5$ e diferentes valores de a	21
3.3	Diagrama teia de aranha da função Beverton-Holt para $r = 2$ e $b = 1, 5$. . .	22
3.4	Crescimento monotônico da solução da equação de Beverton-Holt para $r = 2$, $b = 1, 5$ e $N_0 = 0, 05$	22
3.5	Gráfico da função $h(P_t)$ para diferentes valores do parâmetro β	23
3.6	Diagrama de estabilidade em relação aos parâmetros r e b	31
3.7	Diagrama de bifurcação para o sistema (3.7) - (3.8) em relação ao parâmetro b quando $r = 2$: (a) presas; (b) predadores	31
4.1	Reticulado bidimensional.	33
4.2	Vizinhança do sítio (i, j) : (a) vizinhança de Von Neumann; (b) vizinhança de Moore.	34
4.3	Percentual de decréscimo do número de sítios tratados para o Tratamento 1.	38
4.4	Percentual de decréscimo da população total de pragas para o Tratamento 1.	39
4.5	Distribuição espacial de pragas para $\kappa = 0, 5$ e $\gamma = 0, 1$ (inseticida fraco) antes e depois da aplicação do inseticida nos tempos $t = 5$ (primeira linha), $t = 9$ (segunda linha) e $t = 17$ (terceira linha).	40

4.6	Distribuição espacial de pragas para $\kappa = 0,5$ e $\gamma = 0,95$ (inseticida forte) antes e depois da aplicação do inseticida nos tempos $t = 5$ (primeira linha), $t = 9$ (segunda linha) e $t = 17$ (terceira linha).	41
4.7	Densidade total de predadores para o Tratamento 2.	42
4.8	Percentual de decrescimento do número de sítios tratados para o Tratamento 2.	42
4.9	Percentual de decrescimento da população total de pragas para o Tratamento 2.	43
4.10	Comparação entre o Tratamento 1 e o Tratamento 2 para o inseticida fraco ($\gamma = 0,1$).	44
4.11	Comparação entre o Tratamento 1 e o Tratamento 2 para o inseticida moderado ($\gamma = 0,5$).	45
4.12	Número de sítios tratados nos níveis de controle $\kappa = 0,7$ e $\kappa = 0,8$, respectivamente, com inseticida moderado ($\gamma = 0,5$), para o Tratamento 1 (curva cinza) e Tratamento 2 (curva preta).	46
4.13	Comparação entre o Tratamento 1 e o Tratamento 2 para o inseticida forte ($\gamma = 0,95$).	46
4.14	Distribuição espacial da praga para $\gamma = 0,1$ (inseticida fraco) e $\kappa = 0,5$ nos tempos $t = 4$ (primeira linha), $t = 10$ (segunda linha) e $t = 15$ (terceira linha).	48
4.15	Número de sítios tratados no Tratamento 1 (curva contínua) e Tratamento 1 com divisão de quadrantes (curva pontilhada) para $\gamma = 0,1$ (inseticida fraco) e $\kappa = 0,5$	49
4.16	Comparação entre o Tratamento 1 (curva contínua) e o Tratamento 1 com divisão de quadrantes (curva pontilhada) para o inseticida forte ($\gamma = 0,95$).	49
4.17	Comparação entre o Tratamento 2 (curva contínua) e o Tratamento 1 com divisão de quadrantes (curva pontilhada) para o inseticida forte ($\gamma = 0,95$).	50
4.18	Percentual de decrescimento do número de sítios tratados para o Tratamento Global.	52
4.19	Percentual de decrescimento da população total de pragas para o Tratamento Global.	52
4.20	Percentual de decrescimento do número de sítios tratados com inseticida para $\kappa_p = 0,1$	53
4.21	Percentual de decrescimento da população total de pragas no Tratamento com limiares diferentes para $\kappa_p = 0,1$	54
4.22	Percentual de decrescimento nos sítios tratados com inseticida (gráficos da esquerda) e da população total de pragas (gráficos da direita) para os inseticidas fraco (primeira linha), moderado (segunda linha) e forte (terceira linha).	55

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	12
2	MANEJO INTEGRADO DE PRAGAS	14
3	UM MODELO PRESA-PREDADOR DISCRETO	19
3.1	DINÂMICA DO MODELO	19
3.2	ESTUDO QUALITATIVO DO MODELO	23
3.2.1	Soluções de equilíbrio e estabilidade	24
4	MODELO PRAGA-PREDADOR-INSETICIDA ESPACIALMENTE DISTRIBUÍDO	32
4.1	FORMULAÇÃO DO MODELO	32
4.1.1	Regra de movimentação	34
4.1.2	Equações para a dinâmica	35
4.2	SIMULAÇÕES	37
4.2.1	Tratamento 1: Somente inseticida	37
4.2.2	Tratamento 2: Inseticida e Predadores (Controle Biológico)	41
4.2.3	Tratamento 1 com divisão de quadrantes	47
4.2.4	Tratamento Global	51
4.2.5	Tratamento com limiares diferentes	53
5	CONCLUSÕES	57
	REFERÊNCIAS	60

Capítulo 1

INTRODUÇÃO

Recentemente, o conceito de controle de pragas foi alterado deixando de ser realizado através de aplicação sistemática de produtos químicos em culturas de importância agrícola, tomando-se por base calendários. Assim, a aplicação era baseada apenas no poder residual dos produtos e sem a preocupação de saber se a praga visada tinha atingido um nível que pudesse causar prejuízos à cultura. Muitas vezes, essa aplicação preestabelecida era realizada mesmo sem a praga estar presente na cultura, ou seja, de modo preventivo. Apesar dessas aplicações possuírem caráter “preventivo”, isso acarretou o uso desordenado de agrotóxicos fazendo com que surgissem problemas muito sérios, como: resistência da praga a diversos inseticidas, efeitos adversos sobre inimigos naturais das pragas, exposição do homem aos efeitos tóxicos dos produtos químicos, entre outros. (GALLO, 2002).

Em razão disto, houve a necessidade de se articular outras formas de combate às pragas por meio de estratégias que considerassem a saúde do homem, a preservação do meio ambiente e a avaliação de aspectos financeiros de maneira harmoniosa. Deste modo, surgiu um novo conceito de controle de pragas que tem por objetivo minimizar os problemas citados anteriormente: O Manejo Integrado de pragas (MIP).

Sendo assim, o objetivo deste trabalho é construir um modelo tão simples quanto possível, para estudarmos as consequências de diferentes estratégias de manejo de pragas. Essas estratégias exigem programas de monitoramento, estabelecimento de níveis de controle, força dos inseticidas, entre outros. Em particular, analisaremos: a distribuição espacial das pragas; o uso de agentes de controle biológico em consonância com o uso de inseticidas e as consequências de adotar diferentes níveis de controle (NC's) e eficiências de inseticidas.

Para isso, no Capítulo 2 abordamos o Manejo Integrado de pragas (MIP) com o intuito de relacionar o presente trabalho com o contexto biológico. Neste capítulo, dissertamos sobre o surgimento e a importância do MIP na agricultura, bem como as principais etapas que o compõe.

No Capítulo 3 utilizamos um modelo tempo-discreto para descrever como se dará

a dinâmica de um sistema presa-predador onde a presa é um inseto herbívoro (uma praga em potencial) e o predador (controle biológico) seu inimigo natural. Neste momento será apresentada a dinâmica do modelo e o estudo qualitativo do mesmo. Este último contemplará a adimensionalização, soluções de equilíbrio e estabilidade.

No Capítulo 4 consideramos a distribuição espacial do modelo através da ferramenta Rede de Mapas Acoplados. Além disso, analisamos inseticidas de diferentes eficácias e controle biológico no sistema de modos diferentes, com o intuito de apontar qual tratamento é mais eficiente. Para isso, optamos por considerar as seguintes medidas: primeiro, computamos a densidade total de pragas em todo o domínio ao longo de 100 períodos de tempo quando nenhuma medida de controle é aplicada no sistema. Dados similares são coletados quando cada um dos tratamentos é aplicado. Desse modo, a diferença relativa entre o valor obtido quando o tratamento da praga é feito e o valor obtido quando não há aplicação de nenhuma medida de controle no sistema é convertida em um percentual de decrescimento da população de pragas. Logo, quanto maior o percentual de decrescimento da população significa que mais efetivo é o tratamento em relação ao combate à praga. (WILDER; CHRISTIE; COLBERT, 1994). De modo análogo, examinamos o decrescimento do número de sítios tratados para cada tratamento.

Por último, o Capítulo Conclusões, será destinado à discussão dos resultados obtidos e também às futuras intenções de trabalho posteriores.

Capítulo 2

MANEJO INTEGRADO DE PRAGAS

Atualmente no Brasil, a agricultura representa uma posição importante na economia do país. Segundo dados do IBGE (2016), a sexta estimativa do ano de 2016 para a safra nacional de cereais, leguminosas e oleaginosas totalizou 191,8 milhões de toneladas, 8,4% inferior à obtida em 2015 (209,4 milhões de toneladas). Em termos absolutos são 17,6 milhões de toneladas a menos em relação à produção obtida na safra anterior.

Nesse contexto, uma parcela dessas perdas anuais de produtividade é devida a atuação de pragas nas lavouras. O conceito de inseto-praga é de caráter essencialmente econômico. De acordo com Nakano, Neto e Zucchi (1981, p.5),

Em agricultura, o conceito de praga está diretamente relacionado com os efeitos econômicos produzidos pelos insetos. Como um único inseto jamais poderá produzir um dano que compense a sua eliminação da cultura, ele, isoladamente, não seria uma praga.

O termo praga é dado no sentido numérico onde uma determinada população do inseto se evidencia com seus estragos, afetando a produção. Isso quer dizer que o fato de serem observados danos nas diferentes partes vegetais, não significa, necessariamente, que a produção foi ou será afetada.

Historicamente, para combater esse problema, o sistema convencional de controle de pragas vem sendo utilizado. Neste sistema, geralmente utiliza-se o método químico como medida de controle quando o organismo está presente, independentemente de outros fatores. O uso desse sistema além de não promover o controle adequado das pragas, eleva o custo de produção, polui o meio ambiente e ocasiona problemas à saúde do agricultor e do consumidor devido à exposição ao veneno. (PICANÇO, 2010).

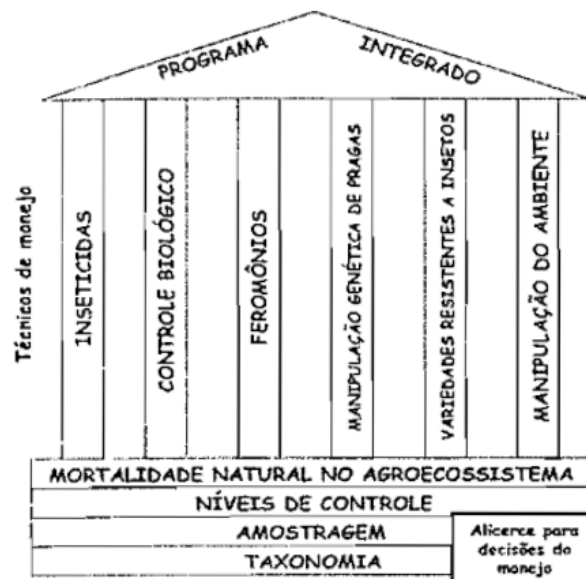
Diante desses aspectos negativos como prejuízos econômicos e ameaça à saúde humana, surge uma alternativa: o Manejo Integrado de Pragas. Segundo Picanço (2010, p.1), o Manejo Integrado de Pragas (MIP) “é um sistema de controle de pragas que procura preservar e aumentar os fatores de mortalidade natural das pragas pelo uso integrado de métodos de controle selecionados com base em parâmetros técnicos, econômicos,

ecológicos e sociológicos”. Dentre esses métodos de controle podemos citar o uso estratégico de inseticidas, o controle biológico (predadores), substâncias repelentes, entre outras medidas, com o objetivo principal de controlar as pragas, sem causar danos ao meio ambiente e à saúde humana. Assim, “pode-se dizer que o manejo foi uma resposta da comunidade científica ao uso incorreto de produtos químicos”. (GALLO et al., 2002, p.327).

Segundo Gallo (2002), o conceito de MIP é recente e muito abrangente, combinando tecnologia em várias áreas (entomologia, fitotecnia, fisiologia vegetal, matemática, economia, ciência da computação, etc.), constituindo, assim, um pacote tecnológico dinâmico que propõe uma estrutura objetiva para as tomadas de decisões concernentes ao emprego de novos métodos de controle.

Outra definição de MIP é apresentada por Kogan (1998): é um sistema de apoio à tomada de decisão para a seleção e uso de estratégias de controle de pragas, de modo isolado ou harmônico, em uma estratégia de manejo com base na análise custo/benefício que leva em conta os interesses dos impactos sobre os produtores, a sociedade e o meio ambiente. A Figura 2.1 representa os diferentes métodos de controle para manter as pragas em baixos níveis de população de maneira que não ocorra prejuízo na produção. Essas técnicas representam os pilares do MIP.

Figura 2.1: Diagrama mostrando o desenvolvimento de um programa de manejo integrado de pragas.



Fonte: (GALLO et al., 2002, p. 328)

Nesse contexto, para a implementação do MIP é necessário (GALLO, 2002):

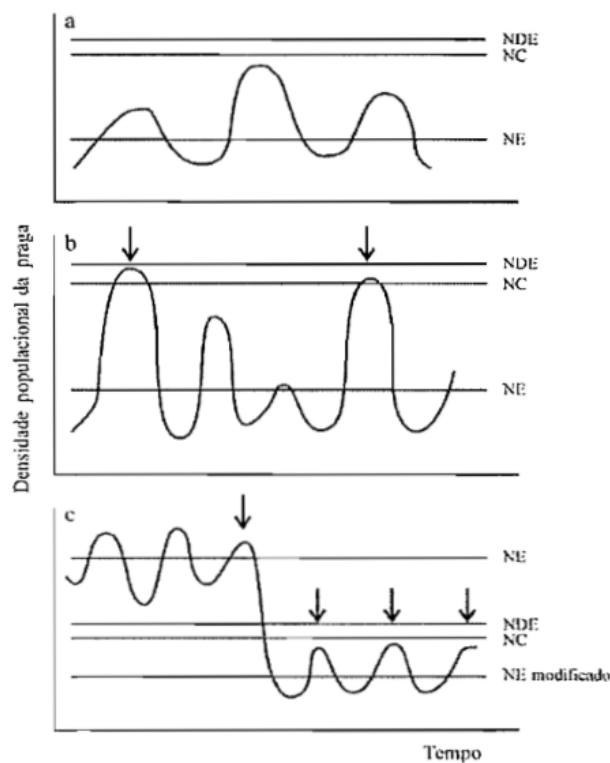
- (1) Reconhecer as pragas mais importantes;

- (2) Avaliar os inimigos naturais (controle biológico);
- (3) Determinar os níveis de dano econômico e de controle;
- (4) Avaliar a população;
- (5) Avaliar os métodos mais adequados a serem implementados.

Em relação a etapa (2), DeBach (1968, p. 34) salienta que, controle biológico pode ser considerado “[...] a ação de parasitas, predadores ou patógenos para manter a densidade de população de outro organismo a uma média menor do que existiria em sua ausência”, constatando, assim, a mortalidade natural no ecossistema.

Para entender melhor o item (3), é necessário conhecer alguns conceitos como o Nível de Dano Econômico (NDE) e o Nível de Controle (NC). Para Nakano, Neto e Zucchi (1981), o NDE são os prejuízos refletidos na produção de uma lavoura quando qualquer população de uma praga causa dano maior que o custo de controle. Por outro lado, o NC consiste no limiar populacional onde medidas devem ser tomadas para evitar que a população alcance um NDE e, conseqüentemente, provoque prejuízos.

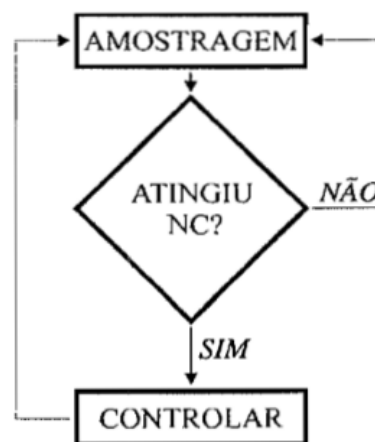
Figura 2.2: Flutuação populacional para uma determinada praga no decorrer do tempo para (a) espécies que não atingem a posição de praga; (b) pragas ocasionais e (c) pragas severas. NDE=Nível de Dano Econômico; NC=Nível de Controle; NE=Nível de Equilíbrio e ↓ adoção de medidas de controle.



A Figura 2.2 mostra que o Nível de Controle (NC) consiste em um limiar de população de pragas mais baixo que o Nível de Dano Econômico (NDE) fazendo com que o custo de adoção de medidas de controle seja inferior a menor densidade da população de pragas capaz de gerar prejuízo econômico.

Por conseguinte, a avaliação da população estabelece a amostragem feita para decidir se uma praga deve ou não ser controlada. A Figura 2.3 elucida que, se a amostragem atingiu o NC, então medidas de controle devem ser aplicadas, caso contrário, volta-se a realizar a amostragem posteriormente.

Figura 2.3: Tomada de decisão no MIP.



Fonte: (GALLO et al., 2002, p. 331)

A última etapa do MIP consiste na avaliação dos métodos mais adequados a serem implementados. Para isso, é importante conhecer a cultura em questão, bem como as características da praga que está atrelada a ela, exigindo assim, a consonância de diferentes áreas de atuação, que por outro lado, requer muitos recursos humanos e econômicos para se chegar ao objetivo proposto. Em razão disto, a adoção do MIP tem sido lenta em todo o mundo, ou apenas considera um dos itens do manejo, ao invés de um conjunto deles, quando ocorre. Em outros casos, o MIP é direcionado apenas para pragas, ficando em segundo plano patógenos e ervas daninhas.

Desse modo, chega-se ao paradoxo do agricultor e empresário: persistir no uso do método tradicional de aplicação de inseticida, que é uma tecnologia mais simples e requer menos responsabilidade nas decisões, ou migrar para o MIP, que necessita de mais técnica, mais detalhamento nas observações e conhecimento biológico? A resposta para esta pergunta evidencia a resistência do agricultor em adotar o manejo. Em países subdesenvolvidos, como o Brasil, a aceitação do MIP é dificultada por diversos motivos, desde o baixo nível cultural do agricultor ao problema da tradição, que não admite o fato de substituir o que vinha sendo feito por gerações futuras. Assim, cabe salientar que para

a implantação de um programa como o MIP é necessário um grande serviço de extensão de transferência de tecnologia ao usuário, para deste modo, alcançar o retorno econômico esperado. (GALLO et al., 2002; KOGAN, 1998).

Sendo assim, o MIP não pretende levar a população de pragas à extinção, mas busca diminuí-la a níveis aceitáveis, próximos de um Nível de Controle (NC). Em outras palavras,

A manutenção da praga em níveis abaixo do NC é vantajoso ecologicamente por permitir a sobrevivência de inimigos naturais e economicamente porque restringe os gastos com medidas de controle extremas, aumentando os lucros e diminuindo a poluição. (NAKANO; NETO; ZUCCHI, 1981, p.9).

Gallo (2002) ressalta ainda que, no Brasil, houve uma grande conscientização em relação à necessidade de conhecer as pragas, seus inimigos naturais e seu NC através de amostragens, para assim realizar as aplicações nos lugares mais adequados. Em outras palavras, o MIP ocasionou uma redução no uso de inseticidas.

Entretanto, também é importante ressaltar que os produtos químicos ainda são necessários para muitas culturas. O que o MIP busca é a integração de métodos alternativos com produtos químicos, desde que realizada de maneira harmoniosa. Sendo assim, devem ser cada vez mais incentivados os produtos químicos de última geração, principalmente os de menor agressão ao ser humano, aos inimigos naturais e ao meio ambiente. (Gallo, 2002).

Capítulo 3

UM MODELO

PRESA-PREDADOR DISCRETO

Modelos que consideram o tempo como uma variável discreta são apropriados quando pensamos o fenômeno em termos de etapas discretas de tempo (VRIES et al., 2006). Em dinâmica de populações de insetos, que apresentam fases bem definidas no seu ciclo de vida, é razoável considerar o tempo como uma variável discreta.

Neste capítulo, utilizamos um modelo tempo-discreto para descrever a dinâmica de um sistema presa-predador, no qual a presa é um inseto herbívoro (uma praga em potencial) e o predador seu inimigo natural. As seções 3.1 e 3.2 a seguir versarão sobre a dinâmica e o estudo qualitativo do modelo, respectivamente.

3.1 DINÂMICA DO MODELO

Vamos considerar que a população de presas apresenta crescimento dependente da densidade e que os predadores dependem exclusivamente desta espécie de presas para sobreviver. Assim, a dinâmica presa-predador será governada pelas seguintes equações:

$$N_{t+1} = \frac{rN_t}{(1 + aN_t)(1 + \beta P_t)}, \quad (3.1)$$

$$P_{t+1} = \delta N_t \left(1 - \frac{1}{1 + \beta P_t}\right) = \frac{\delta N_t P_t}{(1 + \beta P_t)}, \quad (3.2)$$

onde r, a, β e δ são parâmetros positivos que terão seus significados elucidados mais adiante.

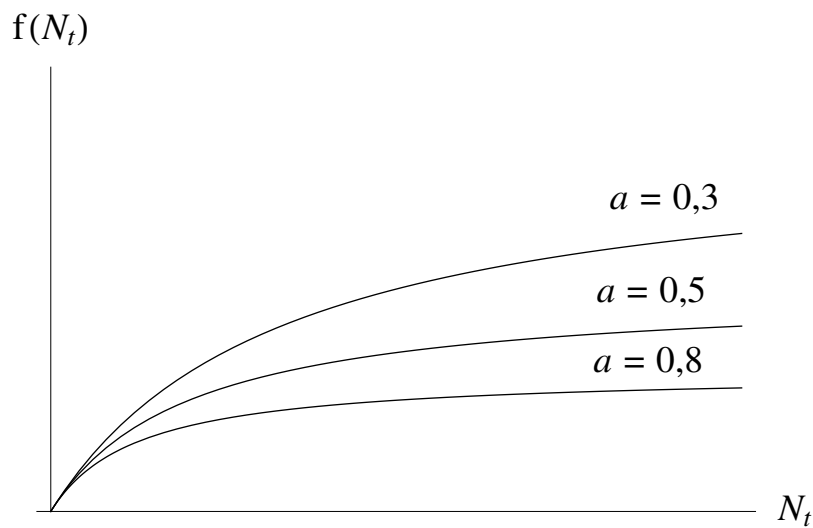
Observe que, na ausência dos predadores, o crescimento da população de presas é regido pela função de Beverton-Holt:

$$N_{t+1} = f(N_t) = \frac{rN_t}{1 + aN_t}. \quad (3.3)$$

Esta função descreve que o tamanho da população de pragas cresce monotonicamente, mas com uma taxa de crescimento cada vez menor. Um aumento da densidade, ou tamanho da população, leva a uma diminuição da taxa de crescimento, mas não reduz a população inteira.

A Figura 3.1 exibe o comportamento da função $f(N_t)$ quando fixamos o parâmetro r e variamos o parâmetro a . Quanto maior o valor de a menor será o crescimento da população. O parâmetro a pode ser entendido como a força da competição intra-específica enquanto r é o fator específico de crescimento.

Figura 3.1: Gráfico da função de Beverton-Holt (3.3) para $r = 1,5$ e diferentes valores de a .



Fonte: do autor, gerada no *Mathematica* 10.0.

Outra maneira de analisarmos a função $f(N_t)$ é escrevê-la na forma:

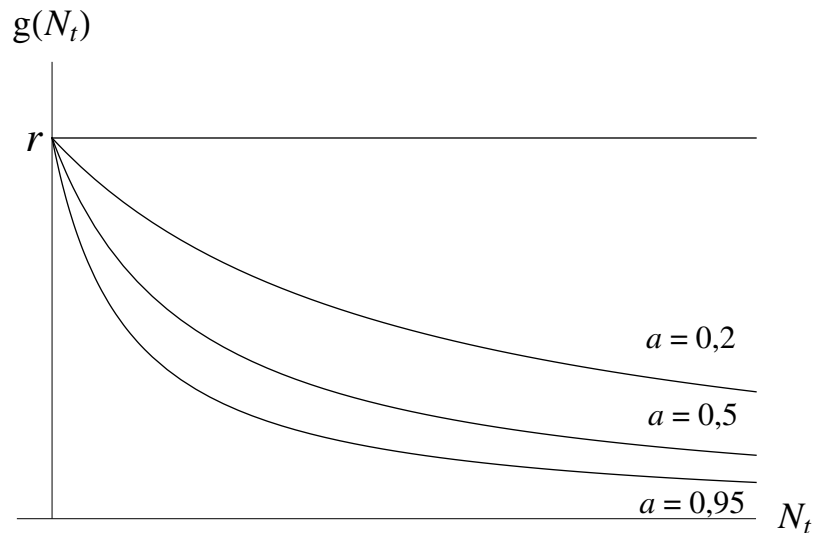
$$f(N_t) = g(N_t) \cdot N_t = \frac{r}{1 + aN_t} \cdot N_t, \quad (3.4)$$

onde a função $g(N_t) = \frac{r}{1 + aN_t}$ é o fator de crescimento dependente da densidade da população de presas. Na Figura 3.2, ilustramos o gráfico da função $g(N_t)$ para diferentes valores do parâmetro a .

Quanto maior o valor do parâmetro a , fixado r , mais rapidamente decai o fator de crescimento da população e, conseqüentemente, menor será o tamanho da população de presas.

No estudo de equações a diferenças não lineares, tal como a equação de Beverton-Holt (Eq. 3.3), as soluções de equilíbrio desempenham um papel muito importante. Tais soluções são constantes no tempo, $N_{t+1} = N_t = \bar{N}$, para todo t . Assim, para a equação (3.3), temos

Figura 3.2: Gráfico da função fator de crescimento $g(N_t)$ para $r = 5$ e diferentes valores de a .



Fonte: do autor, gerada no *Mathematica* 10.0.

$$\bar{N} = \frac{r\bar{N}}{1 + a\bar{N}}. \quad (3.5)$$

Resolvendo para \bar{N} , obtemos o equilíbrio trivial $\bar{N}_0 = 0$ e o equilíbrio não trivial dado por $\bar{N}_1 = \frac{r-1}{a}$, o qual tem sentido biológico somente para $r > 1$.

Uma análise de estabilidade linear (ver, por exemplo, KOT, 2001) permite concluir que o equilíbrio trivial é sempre instável e o equilíbrio de persistência \bar{N}_1 é sempre estável. O diagrama teia de aranha da Figura 3.3 ilustra o comportamento qualitativo do modelo: toda solução com população inicial $0 < N_0 < \bar{N}_1$ cresce monotonicamente aproximando-se do equilíbrio \bar{N}_1 .

Inicialmente a população cresce de maneira aproximadamente exponencial e à medida que a população se aproxima da capacidade suporte o crescimento vai diminuindo. A Figura 3.4 mostra uma solução típica da equação de Beverton-Holt. Por outro lado, se $N_0 > \bar{N}_1$, a população decresce aproximando-se de \bar{N}_1 .

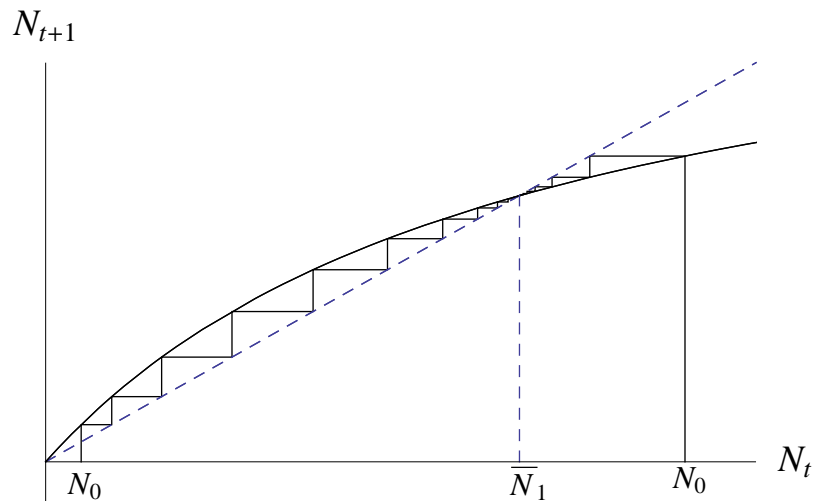
Observamos que o comportamento das soluções é análogo ao comportamento das soluções do modelo logístico contínuo. (KOT, 2001; VRIES et al., 2006).

Voltando à equação (3.1), vamos analisar agora a função

$$h(P_t) = \frac{1}{1 + \beta P_t}. \quad (3.6)$$

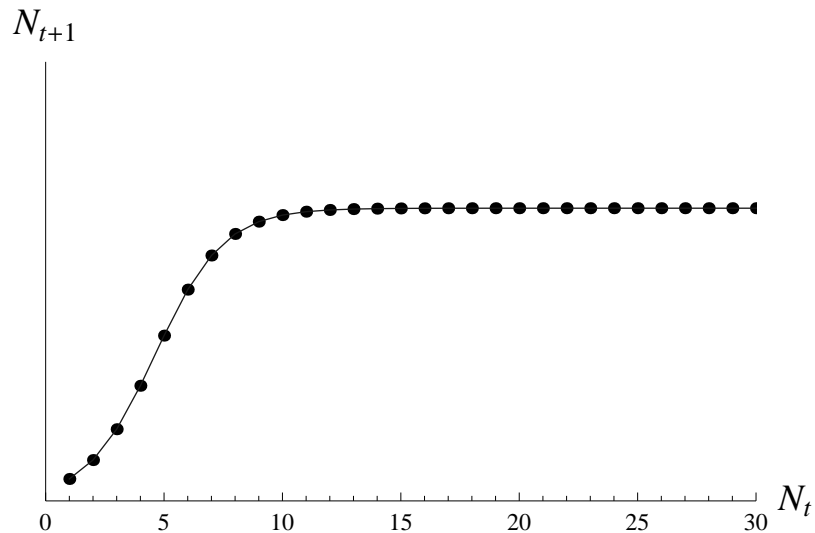
Essa função pode ser interpretada como a fração de presas que escapa da predação. A função $h(P_t)$ é decrescente com P_t . Assim, quanto maior for o parâmetro β , mais rápido é o decaimento da função (Figura 3.5); β indica a eficiência do predador. A fração predada

Figura 3.3: Diagrama teia de aranha da função Beverton-Holt para $r = 2$ e $b = 1,5$.



Fonte: do autor, gerada no *Mathematica* 10.0.

Figura 3.4: Crescimento monotônico da solução da equação de Beverton-Holt para $r = 2$, $b = 1,5$ e $N_0 = 0,05$.



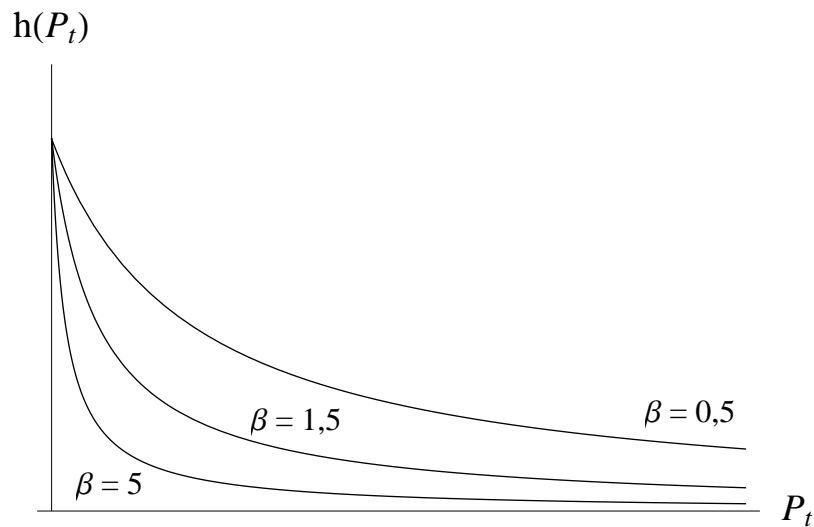
Fonte: do autor, gerada no *Mathematica* 10.0.

$1 - h(P_t)$ contribui para o crescimento da população de predadores (eq. 3.2).

Com a atenção voltada agora para a equação (3.2), vemos que, na ausência das presas, a população de predadores vai à extinção. Ou seja, se $N_t = 0$ concluímos que $P_{t+1} = 0$. O parâmetro δ pode ser visto como o fator de conversão de presas em predadores. Em outras palavras, δ indica a quantia de presas consumidas para gerar a futura geração de predadores.

Na seção seguinte será exibido o estudo qualitativo do modelo. Este contemplará a adimensionalização usada, o cálculo das soluções de equilíbrio, bem como a estabilidade

Figura 3.5: Gráfico da função $h(P_t)$ para diferentes valores do parâmetro β .



Fonte: do autor, gerada no *Mathematica* 10.0.

das mesmas.

3.2 ESTUDO QUALITATIVO DO MODELO

Antes do estudo qualitativo do modelo é de extrema importância expressá-lo em termos adimensionais. Quando adimensionalizamos um modelo estamos reduzindo o número de parâmetros do mesmo a grupos adimensionais que determinam com efetividade a sua dinâmica. A medida de uma variável adimensional se mantém a mesma em qualquer grupo de unidades adotado e este valor tem um significado intrínseco que não depende da subjetividade da escolha de unidades para o grupo de medidas.

Sendo assim, consideremos a dinâmica presa predador governada pelo seguinte sistema:

$$N_{t+1} = \frac{rN_t}{(1 + aN_t)(1 + \beta P_t)},$$

$$P_{t+1} = \frac{\delta N_t P_t}{(1 + \beta P_t)}.$$

Introduzindo as variáveis $n_t = \frac{a}{r-1}N_t$ e $p_t = \beta P_t$, obtemos o novo sistema adimensional dado por

$$n_{t+1} = \frac{rn_t}{[1 + (r - 1)n_t](1 + p_t)}, \quad (3.7)$$

$$p_{t+1} = \frac{bn_t p_t}{(1 + p_t)}, \quad (3.8)$$

onde $b = \delta \left(\frac{r - 1}{a} \right)$. Aqui, vamos assumir $r > 1$ para que o sistema faça sentido biológico. Caso contrário, estaríamos atribuindo densidades negativas para a população de predadores.

Observe, também, que reduzimos o número de parâmetros do modelo pela metade. Além de facilitar as contas nas próximas seções deste trabalho, esta redução no número de parâmetros fará com que o novo parâmetro b nos forneça o comportamento efetivo da dinâmica do modelo.

3.2.1 Soluções de equilíbrio e estabilidade

De acordo com Edelstein-Keshet (1988), o conceito de solução de equilíbrio está relacionado com a ausência de mudança em um sistema. Um fato importante que é decorrente de muitos problemas biológicos é se, de fato, existem soluções constantes que exibem esta ausência de mudança de um sistema.

Edelstein-Keshet (1988, p.41) salienta ainda que,

Em alguns casos as soluções de equilíbrio são de interesse essencial, como por exemplo, grande parte dos organismos vivos funcionam bem em faixas muito estreitas de temperatura, acidez ou salinidade. Por outro lado, soluções de equilíbrio também podem parecer de interesse secundário, desta vez em problemas concernentes a eventos dinâmicos como crescimento, propagação ou reprodução de uma população. Mesmo assim, é muito importante analisarmos com cuidado as soluções de equilíbrio pois estas podem nos ajudar a compreender melhor o comportamento de um sistema.

Dentro do contexto, vamos assumir que as duas variáveis independentes x_t e y_t estão relacionadas com o sistema de equações

$$x_{t+1} = f(x_t, y_t), \quad (3.9)$$

$$y_{t+1} = g(x_t, y_t), \quad (3.10)$$

onde f e g são funções não lineares. Os valores das soluções de equilíbrio \bar{x} e \bar{y} devem obedecer as relações

$$x_{t+1} = x_t = \bar{x},$$

$$y_{t+1} = y_t = \bar{y},$$

de modo que não ocorram mudanças da geração t para a geração $t + 1$. Das equações (3.9) e (3.10) segue que \bar{x} e \bar{y} devem satisfazer

$$\bar{x} = f(\bar{x}, \bar{y}), \quad (3.11)$$

$$\bar{y} = g(\bar{x}, \bar{y}). \quad (3.12)$$

Agora, vamos analisar a estabilidade dessas soluções estudando o comportamento de pequenas perturbações em torno do equilíbrio. Ou seja, dada uma solução (x_t, y_t) próxima de (\bar{x}, \bar{y}) , ela se afastará ou se aproximará de (\bar{x}, \bar{y}) ? Consideramos, então, pequenas perturbações x'_t e y'_t de \bar{x} e \bar{y} , respectivamente, de modo que

$$x_t = \bar{x} + x'_t, \quad (3.13)$$

$$y_t = \bar{y} + y'_t. \quad (3.14)$$

Substituindo as soluções perturbadas no sistema (3.9)-(3.10), obtemos

$$\bar{x} + x'_{t+1} = f(\bar{x} + x'_t, \bar{y} + y'_t), \quad (3.15)$$

$$\bar{y} + y'_{t+1} = g(\bar{x} + x'_t, \bar{y} + y'_t), \quad (3.16)$$

ou ainda,

$$x'_{t+1} = f(\bar{x} + x'_t, \bar{y} + y'_t) - \bar{x}, \quad (3.17)$$

$$y'_{t+1} = g(\bar{x} + x'_t, \bar{y} + y'_t) - \bar{y}. \quad (3.18)$$

Como f e g são funções não lineares e x'_t e y'_t são pequenos, desenvolvemos f e g em série de Taylor em torno de (\bar{x}, \bar{y}) . Isto é, vamos aproximar $f(\bar{x} + x'_t, \bar{y} + y'_t)$ e $g(\bar{x} + x'_t, \bar{y} + y'_t)$ pelas expressões

$$f(\bar{x} + x'_t, \bar{y} + y'_t) = f(\bar{x}, \bar{y}) + \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{\bar{x}, \bar{y}} x'_t + \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{\bar{x}, \bar{y}} y'_t + \underbrace{O((x'_t)^2) + O((y'_t)^2)}_{\text{termos muito pequenos}}, \quad (3.19)$$

$$g(\bar{x} + x'_t, \bar{y} + y'_t) = g(\bar{x}, \bar{y}) + \left. \frac{\partial g}{\partial x} \right|_{\bar{x}, \bar{y}} x'_t + \left. \frac{\partial g}{\partial y} \right|_{\bar{x}, \bar{y}} y'_t + \underbrace{O((x'_t)^2) + O((y'_t)^2)}_{\text{termos muito pequenos}}. \quad (3.20)$$

O fato de x'_t e y'_t serem pequenos nos permite negligenciar os termos $O((x'_t)^2)$ e $O((y'_t)^2)$,

pelo menos próximo à solução de equilíbrio. Desse modo, substituindo os termos lineares de (3.19) e (3.20) no sistema (3.17)-(3.18) obtemos o seguinte sistema linear para as perturbações x'_t e y'_t :

$$x'_{t+1} = a_{11}x'_t + a_{12}y'_t, \quad (3.21)$$

$$y'_{t+1} = a_{21}x'_t + a_{22}y'_t, \quad (3.22)$$

onde

$$\begin{aligned} a_{11} &= \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{\bar{x}, \bar{y}}, & a_{12} &= \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{\bar{x}, \bar{y}}, \\ a_{21} &= \left. \frac{\partial g}{\partial x} \right|_{\bar{x}, \bar{y}}, & a_{22} &= \left. \frac{\partial g}{\partial y} \right|_{\bar{x}, \bar{y}}. \end{aligned}$$

A matriz composta por esses quatro coeficientes, ou seja,

$$J = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},$$

é chamada matriz *Jacobiana* do sistema de equações (3.9) e (3.10).

O problema é reduzido a um sistema linear de equações a diferenças para as perturbações x'_t e y'_t . Sendo assim, vamos determinar a estabilidade de (\bar{x}, \bar{y}) analisando:

- (i) O polinômio característico das equações (3.21) e (3.22) dado por $\det(J - \lambda I) = 0$. O resultado sempre será a equação quadrática $\lambda^2 - \beta\lambda + \gamma = 0$, onde $\beta = a_{11} + a_{22}$ é o traço e $\gamma = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ o determinante da matriz *Jacobiana*.
- (ii) Se as raízes deste polinômio (os autovalores) são menores do que 1 em módulo.

Caso a resposta para (ii) seja afirmativa, podemos concluir que a solução de equilíbrio é estável, ou seja, as pequenas perturbações irão decair. Por outro lado, nem sempre é necessário calcular explicitamente os autovalores com a intenção de determinar suas magnitudes. É suficiente testar se as seguintes condições são satisfeitas (EDELSTEIN-KESHET, 1988):

$$|\beta| < 1 + \gamma < 2 \rightarrow \begin{cases} \text{ambas as raízes } |\lambda_i| < 1 \\ \text{solução de equilíbrio } (\bar{x}, \bar{y}) \text{ é estável.} \end{cases}$$

Voltando ao sistema

$$n_{t+1} = f(n_t, p_t) = \frac{rn_t}{[1 + (r - 1)n_t](1 + p_t)}, \quad (3.23)$$

$$p_{t+1} = g(n_t, p_t) = \frac{bn_t p_t}{(1 + p_t)}, \quad (3.24)$$

vamos determinar suas soluções de equilíbrio, bem como para quais valores dos parâmetros envolvidos tais soluções são estáveis ou não. Para isso, consideremos a solução de equilíbrio (\bar{n}, \bar{p}) obedecendo as seguintes relações:

$$n_{t+1} = n_t = \bar{n}, \quad (3.25)$$

$$p_{t+1} = p_t = \bar{p}. \quad (3.26)$$

Substituindo (3.26) em (3.24) obtemos

$$\bar{p} = \frac{b\bar{n}\bar{p}}{1 + \bar{p}} \implies 1 + \bar{p} = b\bar{n} \implies \bar{p} = b\bar{n} - 1. \quad (3.27)$$

Do mesmo modo, substituindo (3.25) em (3.23) obtemos

$$\begin{aligned} \bar{n} &= \frac{r\bar{n}}{[1 + (r - 1)\bar{n}](1 + \bar{p})} \implies \bar{n}[1 + (r - 1)\bar{n}](1 + \bar{p}) = r\bar{n} \implies \\ &\bar{n}\{[1 + (r - 1)\bar{n}] \underbrace{(1 + \bar{p})}_{b\bar{n}} - r\} = 0 \implies \bar{n}[b\bar{n} + b\bar{n}^2(r - 1) - r] = 0 \implies \\ &b(r - 1)\bar{n}^2 + b\bar{n} - r = 0 \implies \bar{n} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 + 4r(r - 1)b}}{2b(r - 1)}. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Finalmente, de (3.27) e (3.28) concluímos que as soluções de equilíbrio do nosso sistema são:

- $(\bar{n}_1, \bar{p}_1) = (0, 0),$
- $(\bar{n}_2, \bar{p}_2) = (1, 0),$
- $(\bar{n}_3, \bar{p}_3) = \left(\frac{-b + \sqrt{b^2 + 4r(r - 1)b}}{2b(r - 1)}, \frac{-b + \sqrt{b^2 + 4r(r - 1)b}}{2(r - 1)} - 1 \right)$

com $r > 1$ como condição de existência da solução (\bar{n}_3, \bar{p}_3) . Observe que estamos excluindo a solução

$$(\bar{n}^*, \bar{p}^*) = \left(\frac{-b - \sqrt{b^2 + 4r(r - 1)b}}{2b(r - 1)}, \frac{-b - \sqrt{b^2 + 4r(r - 1)b}}{2(r - 1)} - 1 \right)$$

pois esta não possui sentido biológico, ou seja, sendo $r < 1$ estaríamos assumindo valores negativos para as populações.

Por conseguinte, vamos investigar a estabilidade de cada solução de equilíbrio encontrada acima. Para tanto, calculemos a matriz Jacobiana do sistema (3.23) e (3.24), isto é,

$$J = \begin{pmatrix} \frac{r}{[1 + (r - 1)\bar{n}](1 + \bar{p})} & -\frac{r\bar{n}}{[1 + (r - 1)\bar{n}](1 + \bar{p})^2} \\ \frac{b\bar{p}}{1 + \bar{p}} & \frac{b\bar{n}}{(1 + \bar{p})^2} \end{pmatrix}.$$

$$\text{Em } (\bar{n}_1, \bar{p}_1) = (0, 0),$$

$$J = \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Observe que $\beta = r$ e $\gamma = 0$. Da condição de estabilidade (ii), como r é o autovalor não nulo da matriz, devemos ter $|r| < 1$ para que a solução seja estável. Como $r > 1$, concluímos que a solução de equilíbrio trivial $(\bar{n}_1, \bar{p}_1) = (0, 0)$ é instável.

$$\text{Já em } (\bar{n}_2, \bar{p}_2) = (1, 0),$$

$$J = \begin{pmatrix} \frac{1}{r} & -1 \\ 0 & b \end{pmatrix}.$$

Aqui, $\beta = \frac{1}{r} + b$ e $\gamma = \frac{b}{r}$. Para que (\bar{n}_2, \bar{p}_2) seja estável devemos ter $\left| \frac{1}{r} + b \right| < 1 + \frac{b}{r} < 2$, isto é,

$$1 + \frac{b}{r} < 2 \implies \frac{b}{r} < 1 \implies b < r, \quad (3.29)$$

$$\begin{aligned} -1 - \frac{b}{r} < \frac{1}{r} + b &\implies -b - r - 1 - br < 0 \implies \underbrace{(r + 1)}_{>0}(-b - 1) < 0 \implies \\ &\implies b > -1, \end{aligned} \quad (3.30)$$

$$\frac{1}{r} + b < \frac{b}{r} + 1 \implies 1 + br - b - r < 0 \implies (b - 1)\underbrace{(r - 1)}_{>0} < 0 \implies b < 1 \quad (3.31)$$

Como $r > 1$ e $b > 0$, de (3.29), (3.30) e (3.31) concluímos que a solução de extinção dos predadores e permanência das pragas $(\bar{n}_2, \bar{p}_2) = (1, 0)$ é estável somente para os valores $r > 1$ e $0 < b < 1$.

Por fim, para a solução de equilíbrio de coexistência das espécies (\bar{n}_3, \bar{p}_3) , vamos estabelecer algumas relações que irão nos ajudar a definir para que valores dos parâmetros envolvidos tal solução é estável. Primeiramente, observe que

$$\begin{aligned}
b^2 = b^2 &\implies b^2 < b^2 + 4r(r-1)b \implies b < \sqrt{b^2 + 4r(r-1)b} \\
&\implies -b + \sqrt{b^2 + 4r(r-1)b} > 0 \implies \frac{-b + \sqrt{b^2 + 4r(r-1)b}}{2b(r-1)} > 0 \implies \bar{n}_3 > 0,
\end{aligned}$$

para $r > 1$ e $b > 0$.

Agora, observe que as relações $1 + \bar{p} = \bar{n}b$ e $[1 + (r-1)\bar{n}] = \frac{r}{\bar{n}b}$, obtidas de (3.27) e (3.28), nos permitem escrever a matriz Jacobiana, para a solução (\bar{n}_3, \bar{p}_3) , da seguinte maneira:

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\bar{n}_3 b}{r} & -\frac{1}{b} \\ \frac{\bar{p}_3}{\bar{n}_3} & \frac{1}{\bar{n}_3 b} \end{pmatrix},$$

com $\bar{n}_3 > 0$, como demonstramos acima. Assim, $\beta = \frac{\bar{n}_3 b}{r} + \frac{1}{\bar{n}_3 b}$ e $\gamma = \frac{1}{r} + \frac{\bar{p}_3}{\bar{n}_3 b}$. Para (\bar{n}_3, \bar{p}_3) ser estável, devemos ter $|\beta| < 1 + \gamma < 2$, ou seja,

$$1 + \gamma < 2 \implies \gamma < 1 \implies \frac{1}{r} + \frac{\bar{p}_3}{\bar{n}_3 b} < 1 \implies \frac{\bar{p}_3}{\bar{n}_3 b} < \underbrace{1 - \frac{1}{r}}_{< 1} \implies \frac{\bar{p}_3}{\bar{n}_3 b} < 1 \implies$$

$$-b + \sqrt{b^2 + 4r(r-1)b} - 2(r-1) < -b + \sqrt{b^2 + 4r(r-1)b} \implies -2(r-1) < 0, \quad (3.32)$$

que é sempre verdadeiro pois $r > 1$.

Além disso,

$$\begin{aligned}
-1 - \gamma < \beta &\implies -1 - \frac{1}{r} - \frac{\bar{p}_3}{\bar{n}_3 b} < \frac{\bar{n}_3 b}{r} + \frac{1}{\bar{n}_3 b} \implies \frac{-\bar{n}_3 b r - \bar{n}_3 b - \bar{p}_3 r}{\bar{n}_3 b r} < \frac{\bar{n}_3^2 b^2 + r}{\bar{n}_3 b r} \\
&\implies \bar{n}_3^2 b^2 + \bar{n}_3 b r + \bar{n}_3 b + \bar{p}_3 r + r > 0 \implies \bar{n}_3^2 b^2 + \bar{n}_3 b(r+1) + r \underbrace{(\bar{p}_3 + 1)}_{\bar{n}_3 b} > 0 \\
&\implies \bar{n}_3^2 b^2 + \bar{n}_3 b(r+1) + r \bar{n}_3 b > 0 \implies \bar{n}_3 b(\bar{n}_3 b + r + 1 + r) > 0 \\
&\implies \bar{n}_3 b + 2r + 1 > 0, \tag{3.33}
\end{aligned}$$

que também sempre é verdadeiro uma vez que $\bar{n}_3 > 0$, $b > 0$ e $r > 1$. Finalmente, de maneira análoga a (3.33), obtemos

$$\begin{aligned}
\beta < \gamma + 1 &\implies \bar{n}_3 b - 2r - 1 < 0 \implies \bar{n}_3 b < 2r + 1 \\
&\implies \frac{-b + \sqrt{b^2 + 4r(r-1)b}}{2(r-1)} < 2r + 1.
\end{aligned} \tag{3.34}$$

Se impusermos a condição $b > 1$, conseguimos garantir a estabilidade da solução de equilíbrio (\bar{n}_3, \bar{p}_3) , pois

$$\begin{aligned}
b > 1 \implies \frac{1}{b} < 1 &\implies \frac{-b + \sqrt{b^2 + 4r(r-1)b}}{b} < -b + \sqrt{b^2 + 4r(r-1)b} \\
&\implies \frac{-b + \sqrt{b^2 + 4r(r-1)b}}{2b(r-1)} < \frac{-b + \sqrt{b^2 + 4r(r-1)b}}{2(r-1)} \\
&\implies \bar{n}_3 < \frac{-b + \sqrt{b^2 + 4r(r-1)b}}{2(r-1)}.
\end{aligned} \tag{3.35}$$

De (3.34) e (3.35) concluimos que

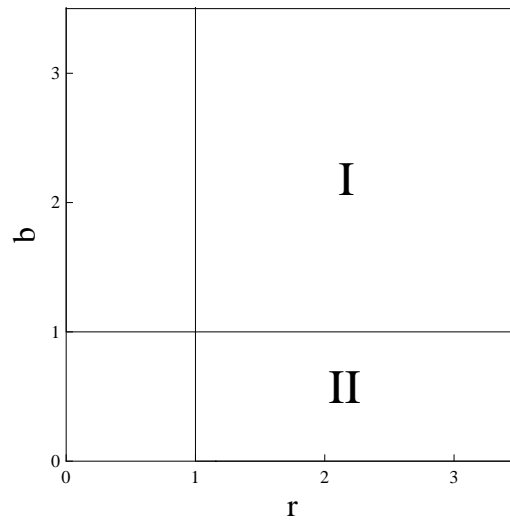
$$0 < \bar{n}_3 < \frac{-b + \sqrt{b^2 + 4r(r-1)b}}{2(r-1)} < 2(r-1) \implies 0 < 2(r-1), \tag{3.36}$$

o que é sempre verdadeiro pois $r > 1$. Portanto, de (3.32), (3.33) e (3.36) garantimos a estabilidade da solução de equilíbrio de coexistência das espécies (\bar{n}_3, \bar{p}_3) para os valores $r > 1$ e $b > 1$. Observe que o fato de $\bar{n}_3 > 0$ é imprescindível para podermos manipular as desigualdades do critério de estabilidade da solução de equilíbrio de coexistência.

A Figura 3.6 representa o diagrama de estabilidade das soluções de equilíbrio do sistema. A região I, $r > 1$ e $b > 1$, representa os valores de r e b para os quais a solução (\bar{n}_3, \bar{p}_3) é estável, enquanto que a região II, $r > 1$ e $b < 1$, exibe os valores dos parâmetros onde a solução (\bar{n}_2, \bar{p}_2) é estável. Observe que a estabilidade da solução de equilíbrio $(\bar{n}_1, \bar{p}_1) = (0, 0)$ não está representada no diagrama pois esta é sempre instável uma vez que assumimos $r > 1$.

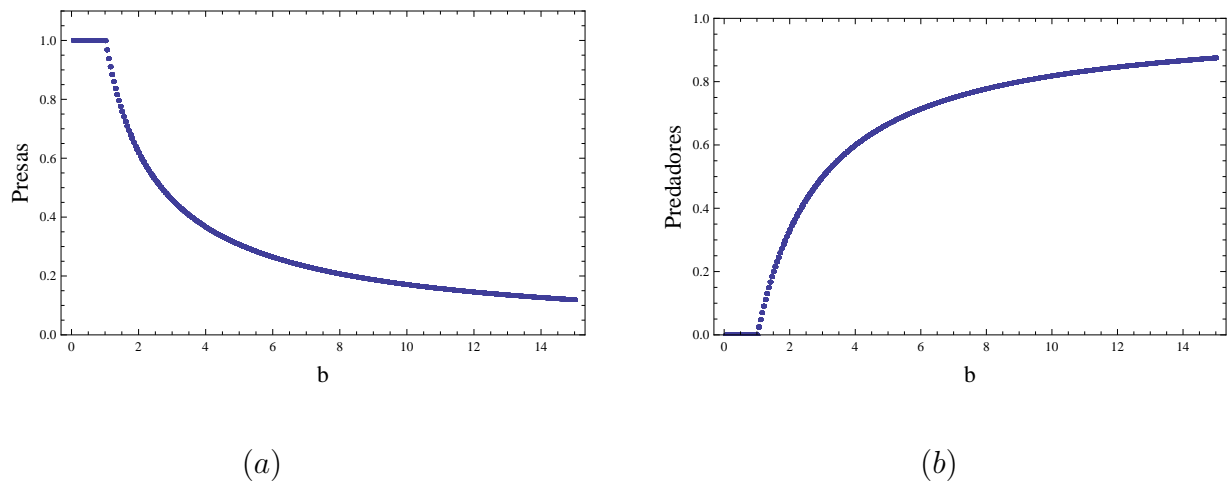
Os efeitos da variação do parâmetro b nas propriedades de existência e estabilidade do sistema (3.7) - (3.8) são representados pelo diagrama de bifurcação, bem como a Figura 3.7. O eixo horizontal representa o valor do parâmetro b e o eixo vertical a magnitude do estado de equilíbrio das presas (a) e dos predadores (b) quando $r = 2$. Nos pontos de bifurcação, isto é, em $b = 1$, em ambos os gráficos ((a) e (b)), o ponto de equilíbrio de persistência das presas e extinção dos predadores $(\bar{n}_2, \bar{p}_2) = (1, 0)$, perde a estabilidade enquanto que o ponto de equilíbrio de coexistência das espécies (\bar{n}_3, \bar{p}_3) se torna existente. Nota-se que, no equilíbrio de coexistência, os predadores crescem com b ao passo que as

Figura 3.6: Diagrama de estabilidade em relação aos parâmetros r e b .



Fonte: do autor, gerada no *Mathematica* 10.0.

Figura 3.7: Diagrama de bifurcação para o sistema (3.7) - (3.8) em relação ao parâmetro b quando $r = 2$: (a) presas; (b) predadores



Fonte: do autor, gerada no *Mathematica* 10.0.

presas decrescem com b .

No próximo capítulo, apresentaremos um modelo que permite incorporar a movimentação espacial dos insetos à dinâmica presa - predador estudada. Diversas estratégias de Manejo Integrado de Pragas serão analisadas através de simulações numéricas.

Capítulo 4

MODELO

PRAGA-PREDADOR-INSETICIDA ESPACIALMENTE DISTRIBUÍDO

Neste capítulo formulamos um modelo espacialmente distribuído para analisar diferentes estratégias de Manejo Integrado de Pragas que incluem o controle biológico pelo predador e a aplicação de um inseticida. Na seção 4.1, apresentamos um modelo de redes de mapas acoplados que será utilizado nas simulações dos diferentes tratamentos propostos. Descrevemos também as medidas aplicadas no controle. Finalmente, em 4.2, analisamos algumas estratégias de tratamento via simulações.

4.1 FORMULAÇÃO DO MODELO

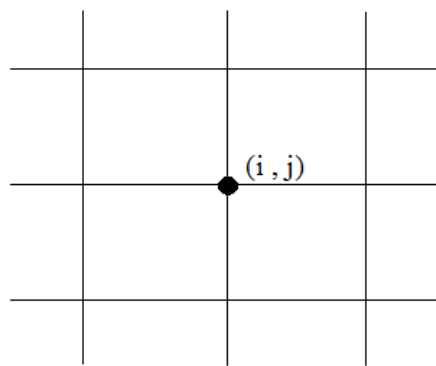
De acordo com a história de vida e com o comportamento de movimentação das espécies, diversas abordagens de modelos podem ser adotadas. Tais características determinam quais são os tipos de variáveis independentes - contínuas ou discretas - e, com isso, a estrutura do modelo.

Rodrigues e Mistro (2007) salientam que quando os indivíduos de uma população apresentam gerações discretas, ou seja, se reproduzem em períodos de tempo bem definidos, como algumas espécies de insetos, por exemplo, modelos de tempo discretos são mais adequados do que modelos de tempo contínuo. Além disso, se o espaço, sob o prisma de uma escala conveniente de observação, possui características marcadamente discretas, tais como pomares, onde cada árvore pode ser vista como um sítio, então, é mais apropriado descrevermos o modelo de acordo com uma rede de mapas acoplados.

Rede de mapas acoplados deve ser entendida como um modelo onde o espaço e o tempo são representados por variáveis discretas ao passo que as variáveis de estado são descritas por densidades contínuas. Além de representar uma poderosa ferramenta

para analisar padrões espaciais, estes modelos compõem-se de um reticulado de equações a diferenças acopladas. Sendo assim, o habitat é considerado como um domínio bidimensional dividido em “patches” ou sítios, arrançados em um reticulado, e indicados por $i, j = 1, 2, \dots, n$ (Figura 4.1), onde $n \times n$ é a dimensão do reticulado. Estes sítios representam lugares físicos do espaço onde se encontram as populações que queremos estudar. Por exemplo, presas e predadores em uma plantação, como veremos mais adiante (RODRIGUES; MISTRO, 2007).

Figura 4.1: Reticulado bidimensional.



Fonte: do autor, gerada no *Paint*.

A dinâmica do modelo será constituída de dois estágios diferentes: o estágio de dispersão e o estágio de reação. No estágio de dispersão, de cada geração, uma fração de indivíduos de uma espécie deixa seu sítio de origem enquanto a fração restante permanece no seu sítio original para reproduzir-se. Matematicamente, temos

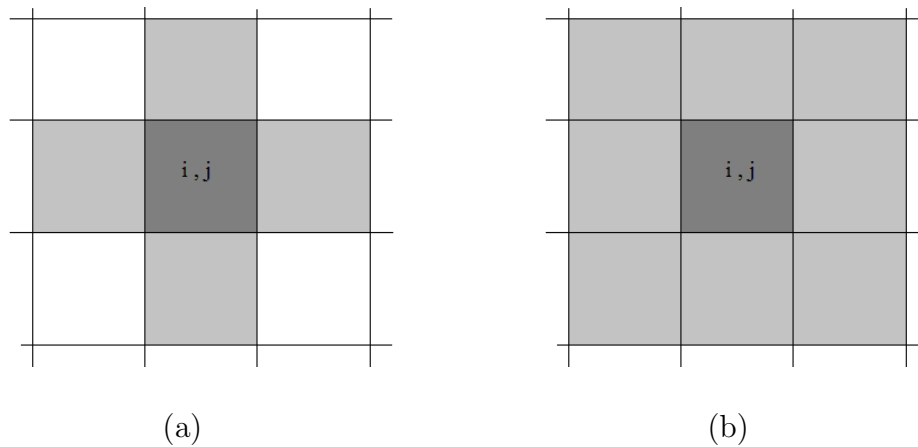
$$X'_{i,j} = X_{i,j} - \sum_{r,s \in V_{i,j}} D_{r,s} + \sum_{r,s \in V_{i,j}} E_{r,s},$$

onde $X'_{i,j}$ é a quantidade de indivíduos no sítio (i, j) depois da dispersão, $X_{i,j}$ é a quantidade de indivíduos no sítio (i, j) antes da dispersão, D o número de indivíduos que deixa o sítio (i, j) , E o número de indivíduos que migra para o sítio (i, j) e $V_{i,j}$ a vizinhança do sítio (i, j) . A vizinhança de cada sítio pode ser definida de diferentes maneiras de acordo com o comportamento de dispersão da espécie considerada. Por exemplo, a vizinhança de Von Neumann contempla os quatro vizinhos mais próximos, enquanto a vizinhança de Moore considera os oito vizinhos mais próximos, conforme a Figura 4.2.

Para aqueles indivíduos nos sítios localizados na fronteira do habitat, as chamadas condições de fronteira definem uma regra de movimentação específica. Dentre as condições de fronteira mais importantes podemos citar:

- a) Fronteira reflexiva: os indivíduos não ultrapassam a fronteira. Esse tipo de condição

Figura 4.2: Vizinhança do sítio (i, j) : (a) vizinhança de Von Neumann; (b) vizinhança de Moore.



Fonte: do autor, gerada no *Paint*.

pode ser aplicado quando os indivíduos se encontram em uma região favorável, por exemplo;

- b) Fronteira absorvente: os indivíduos podem atravessar as fronteiras. Exemplifica o caso em que os indivíduos se encontram em um habitat que se tornou desfavorável ou espécies que não possuem percepção acurada da qualidade do ambiente;
- c) Fronteira periódica ou cíclica: cada uma das extremidades do reticulado é ligada ao seu oposto, como ocorre em um toro. Desse modo, indivíduos movendo-se para o norte da primeira linha reaparecerão na última linha. (RODRIGUES et al., 2013).

Por outro lado, durante o estágio de reação ocorre a dinâmica vital das espécies. Em cada sítio, as interações entre as espécies bem como a reprodução ocorrem de acordo com um sistema de equações a diferenças da forma $X_{i,j,t+1} = F(X'_{i,j})$.

4.1.1 Regra de movimentação

Em muitas situações, partículas e seres vivos, durante sua movimentação, descrevem trajetórias individuais que podem ser consideradas como aleatórias. Por exemplo, partículas de pó no ar, movimentam-se sob a influência dos choques com as moléculas do meio; insetos herbívoros utilizam o movimento aleatório como uma estratégia para encontrar alimento. Esse movimento aleatório dos indivíduos caracteriza um fluxo difusivo em uma escala macroscópica.

Desse modo, o objetivo agora é descrever a movimentação da população como um todo, isto é, estabelecer uma regra que descreva o movimento aleatório e independente dos indivíduos. Para isso, consideramos que a movimentação para cada um dos sítios vizinhos aconteça com a mesma probabilidade. Como consequência disso, haverá um fluxo líquido

de indivíduos dos sítios com altas densidades para outros com menores densidades. Na prática, em um sítio com alta densidade de indivíduos, por meio do movimento aleatório, em média mais indivíduos sairão desse sítio do que permanecerão nele.

Consideramos, então, que as presas e os predadores se movimentam aleatoriamente no reticulado. Isto é, a cada intervalo de tempo, os indivíduos dispersam-se igualmente para os quatro sítios vizinhos mais próximos (vizinhança de Von Neumann, Figura 4.2 (a)), de modo que uma fração μ dos indivíduos deixa sua posição de origem, enquanto a fração restante $(1 - \mu)$ permanece no seu sítio original.

Portanto, o estágio de dispersão será regido pelas seguintes equações, em cada sítio:

$$N'_{x,y,t} = (1 - \mu_N)N_{x,y,t} + \sum_{z,w \in V_{x,y}} \frac{\mu_N}{4} N_{z,w,t},$$

$$P'_{x,y,t} = (1 - \mu_P)P_{x,y,t} + \sum_{z,w \in V_{x,y}} \frac{\mu_P}{4} P_{z,w,t}.$$

Aqui, $N_{x,y,t}$ e $P_{x,y,t}$ são as populações de presas e predadores, respectivamente, antes da dispersão no sítio (x, y) , no instante t ; $N'_{x,y,t}$ e $P'_{x,y,t}$ são as densidades após a movimentação e $V_{x,y} = \{(x - 1, y), (x + 1, y), (x, y - 1), (x, y + 1)\}$ é o conjunto dos quatro sítios mais próximos do sítio (x, y) . Lembrando que μ_N e μ_P são as frações de presas e predadores, nessa mesma ordem, que abandonam seu sítio de origem para colonizar igualmente os quatro sítios vizinhos mais próximos. μ_N e μ_P também podem ser entendidos como os coeficientes de difusão das presas e dos predadores, respectivamente (RODRIGUES; MISTRO, 2007).

Vamos supor também que os recursos das pragas são abundantes. Com esta hipótese assumida, não iremos introduzir em nosso modelo uma equação para as plantas, uma vez que estamos presumindo uma vasta quantidade de plantas e o consumo destas pelas pragas não é suficiente para afetar a quantidade total de plantas do sistema. Na sequência, será exibido o modo de aplicação do inseticida e predadores no sistema.

4.1.2 Equações para a dinâmica

Nos capítulos anteriores, viu-se que, no Manejo Integrado de Pragas (MIP), um organismo somente é considerado praga quando causa danos econômicos à produção. Deste modo, para fins de nomenclatura e adequação do modelo ao contexto biológico, consideremos os indivíduos da população de presas, até agora estudados, como pragas.

Assim, dando continuidade ao elenco de hipóteses do modelo, suponhamos agora que, quando a densidade de pragas atinge o NC (Nível de Controle), medidas de controle serão aplicadas. Para cada tempo t , a população de pragas é medida em cada sítio do domínio. Caso a densidade de pragas atinja ou exceda o nível de controle $NC = \kappa$, então o

sítio é tratado espalhando-se inseticida ou liberando-se mais predadores. O inseticida pode ter diferentes eficiências e matar uma fração γ das pragas. Desse modo, as respectivas equações para as pragas e para os predadores são:

$$n_{x,y,t+1} = \frac{(1 - \gamma_{x,y,t})rn'_{x,y,t}}{[1 + (r - 1)n'_{x,y,t}](1 + p'_{x,y,t})}, \quad (4.1)$$

$$p_{x,y,t+1} = \frac{bn'_{x,y,t} p'_{x,y,t}}{(1 + p'_{x,y,t})} + \bar{p}_{x,y,t}, \quad (4.2)$$

onde

$$\gamma_{x,y,t} = \begin{cases} \gamma, & n_{x,y,t} \geq \kappa \\ 0, & n_{x,y,t} < \kappa \end{cases}$$

e

$$\bar{p}_{x,y,t} = \begin{cases} \bar{p}, & n_{x,y,t} \geq \kappa \\ 0, & n_{x,y,t} < \kappa. \end{cases}$$

$\gamma = 0$, significa que o pesticida é ineficiente, isto é, não mata nenhuma praga e a equação (4.1) retorna à original. Caso contrário, se $\gamma = 1$, então o inseticida é “perfeito”, ou seja, mata todas as pragas. Quando $\kappa = 0$ não existe tolerância de praga no sistema, ou seja, independente da densidade da população de pragas será espalhado inseticida no sistema.

Finalizando as hipóteses do modelo, observe que o termo $(1 - \gamma)$ na equação (4.1) mostra que a densidade de presas diminui à medida que γ aumenta ($0 \leq \gamma \leq 1$). Como foi dito acima, se $\gamma = 1$ (inseticida “perfeito”) então a população de pragas vai à extinção. Caso $\gamma = 0$, então o inseticida não mostra eficiência. Logo, γ representa a intensidade com que o inseticida atua matando as pragas do sistema. Segundo, a ausência do termo $1 - \gamma$ na equação (4.2) esclarece-nos que o inseticida é seletivo. Isto quer dizer que quando liberado no sítio que precisa de tratamento ($n_{x,y,t} \geq \kappa$), o inseticida afeta somente a população das pragas, matando-a como vimos anteriormente. Noutras palavras, a população de predadores não é afetada quando o inseticida é espalhado.

Resumidamente, as hipóteses do modelo são:

- pragas e predadores se movimentam por difusão simples;
- os recursos das pragas são abundantes;
- a população de pragas apresenta crescimento dependente da densidade;
- os predadores dependem exclusivamente da espécie das pragas;
- quando a densidade de pragas atinge ou excede κ , medidas de controle são aplicadas;
- a espécie das pragas decai quando entra em contato com o inseticida;

- o inseticida é seletivo.

Na próxima seção serão feitas algumas simulações numéricas do modelo desenvolvidas no “*software*” Mathematica. Para isso, diferentes estratégias de controle das pragas serão exibidas com o nome de Tratamentos. Esses Tratamentos distinguirão um do outro pela forma de medição da população de pragas e aplicação de inseticida no sistema.

4.2 SIMULAÇÕES

As simulações que serão apresentadas nesta seção foram desenvolvidas em um reticulado de $\Omega = 30 \times 30$ com os seguintes parâmetros fixados: $r = 2, 5$, $b = 1, 9$, $\mu_N = 0, 1$ e $\mu_P = 0, 9$. As pragas foram liberadas aleatoriamente em aproximadamente 10% dos sítios do domínio como distribuição inicial. Além disso, consideramos condições absorventes na fronteira do habitat, ou seja, os indivíduos que se movimentam para fora do domínio são perdidos. Podemos interpretar esta condição considerando que certos indivíduos de uma população deixam a região onde estão quando esta se torna desfavorável.

Sendo assim, analisaremos os efeitos de diferentes estratégias de tratamento das pragas combinando diferentes valores do nível de controle κ com diferentes valores da força do inseticida γ e da liberação artificial de predadores (controle biológico) no sistema.

4.2.1 Tratamento 1: Somente inseticida

Para cada tempo t , a densidade de pragas é medida em cada sítio do domínio. Se essa densidade de pragas atingir ou exceder o nível de controle κ , então o sítio é tratado espalhando inseticida capaz de matar uma fração γ de pragas.

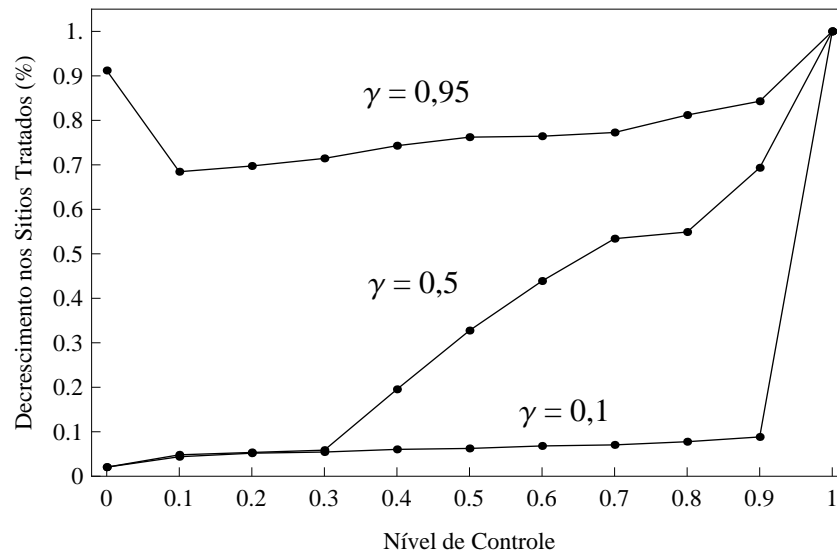
A Figura 4.3 mostra o percentual de decréscimo do número de sítios tratados, S_d , ao longo de 100 períodos de tempo

$$S_d = \frac{90000 - \sum_{t=1}^{100} \bar{S}_t}{90000}, \quad (4.3)$$

onde \bar{S}_t é o número de sítios tratados na geração t (WILDER; CHRISTIE; COLBERT, 1994). Esta razão exibe a fração do número de sítios que não foram tratados no domínio no período de 100 gerações. Construímos uma curva usando os resultados obtidos para dez valores do nível de controle κ e três diferentes tipos de inseticidas.

Assim, podemos observar que os inseticidas mais fracos requerem mais sítios para serem tratados do que os inseticidas mais fortes. Podemos observar, também, que, para baixos níveis de controle, os inseticidas fraco e moderado apresentam o mesmo percentual de decréscimo nos sítios tratados. Além disso, à medida que o nível de controle se aproxima de um, o número de sítios tratados se aproxima de zero. Ou seja, o percentual

Figura 4.3: Percentual de decrescimento do número de sítios tratados para o Tratamento 1.



Fonte: do autor, gerada no *Mathematica* 10.0.

de decrescimento se aproxima de um, independentemente da força do inseticida, uma vez que $\kappa = 1$ significa que a densidade máxima de herbívoros é tolerada.

Por outro lado, a Figura 4.4 ilustra o percentual de decrescimento da população de pragas ao longo de 100 gerações. Este percentual é dado pela seguinte razão:

$$n_d = \frac{\sum_{t=1}^{100} \sum_{i,j \in \Omega} \bar{n}_{i,j}^t - \sum_{t=1}^{100} \sum_{i,j \in \Omega} n_{i,j}^t}{\sum_{t=1}^{100} \sum_{i,j \in \Omega} \bar{n}_{i,j}^t}, \quad (4.4)$$

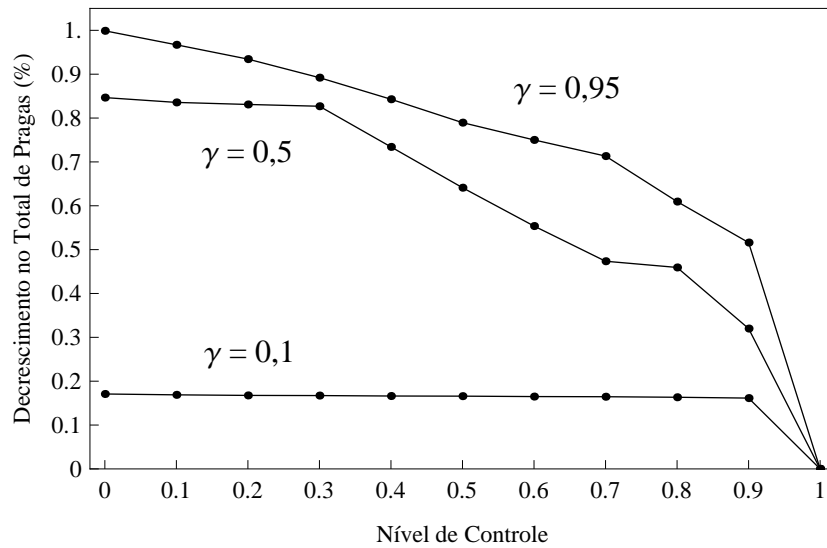
onde $\bar{n}_{i,j}^t$ é a densidade de pragas quando não é aplicado inseticida no sistema (WILDER; CHRISTIE; COLBERT, 1994).

Podemos observar, neste caso, que os inseticidas forte e moderado promovem altas reduções na população total de pragas. Outro fato importante é que, quanto mais cedo o inseticida é aplicado no sistema, maior é o seu sucesso na redução da população total de pragas. É visível também o fato de que quando o nível de controle se aproxima de um, o percentual de decrescimento da população total de pragas se aproxima de zero, isto é, o NC se aproxima do equilíbrio da praga e portanto não há aplicação de inseticida. O inseticida fraco promove baixa mortalidade na população de pragas, mantendo praticamente constante o percentual de decrescimento da população independentemente do nível de controle.

Uma outra maneira de analisarmos os resultados deste trabalho é através da distribuição espacial.

A Figura 4.5 exibe a distribuição espacial de pragas no reticulado, antes e depois

Figura 4.4: Percentual de decrescimento da população total de pragas para o Tratamento 1.



Fonte: do autor, gerada no *Mathematica* 10.0.

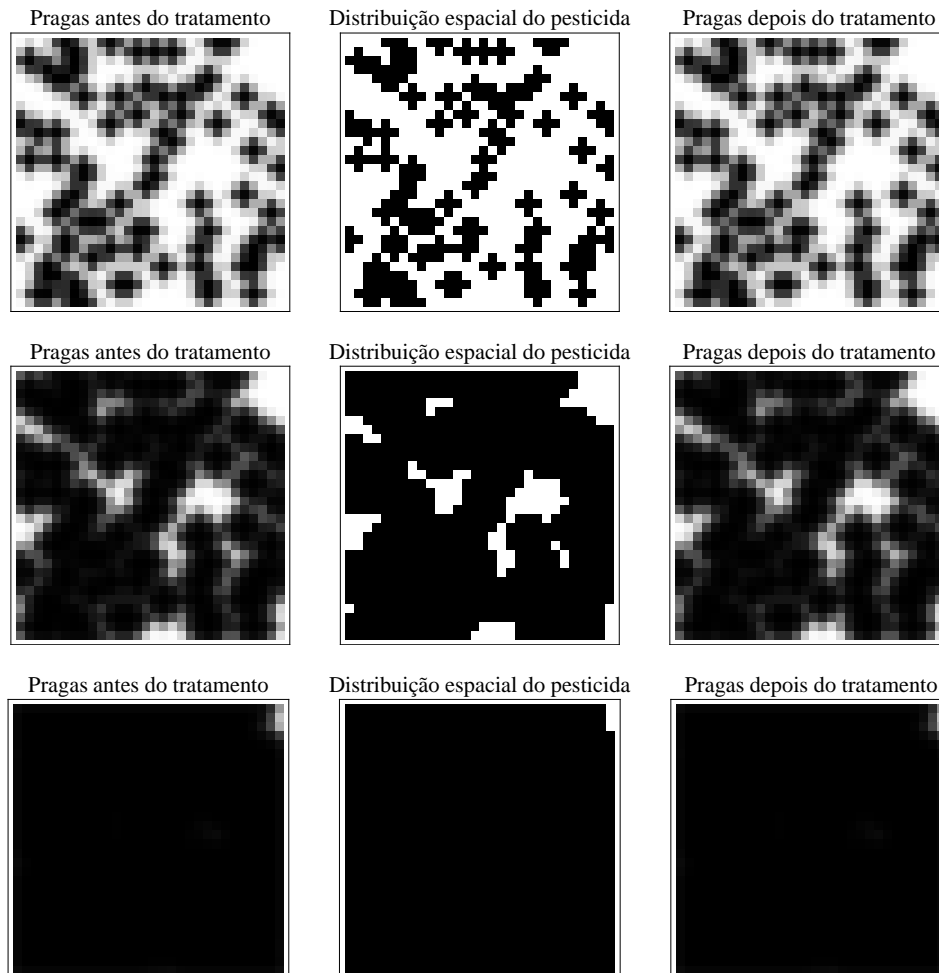
da aplicação do inseticida, para o nível de controle $\kappa = 0,5$ e força do inseticida $\gamma = 0,1$ (inseticida fraco) nos tempos $t = 5$ (primeira linha), $t = 9$ (segunda linha) e $t = 17$ (terceira linha). A coluna da esquerda mostra a distribuição espacial das pragas antes do inseticida ser aplicado, a coluna do meio elucidada a distribuição espacial do inseticida no sistema, ou seja, os sítios onde o mesmo é espalhado, e a coluna da direita ilustra a distribuição espacial de pragas após a aplicação. Quanto à escala de cores, devemos entender que as regiões em que a densidade de praga é alta, são representadas pela cor preta e, em contrapartida, as regiões com menores densidades serão exibidas pelos tons de cinza enquanto que a cor branca indica ausência de indivíduos.

Podemos reafirmar, então, que o inseticida fraco promove baixa mortalidade na população das pragas e apresenta pouco efeito no sistema, pois as colunas da esquerda (antes do tratamento) e da direita (depois do tratamento) apresentam, praticamente, as mesmas escalas de cores, ou seja, os mesmos totais de população. Além disso, é possível perceber que na etapa de tempo $t = 17$ quase todos os sítios do domínio já foram tratados (terceira linha, coluna do meio), confirmando os baixos percentuais de decréscimo de sítios tratados fornecidos pela Figura 4.3.

Já, a Figura 4.6 nos mostra a distribuição espacial de pragas para o nível de controle $\kappa = 0,5$ e força do inseticida $\gamma = 0,95$ (inseticida forte) nas etapas de tempo $t = 5$ (primeira linha), $t = 9$ (segunda linha) e $t = 17$ (terceira linha).

Aqui, é perceptível que o inseticida forte promove uma redução na população de pragas, pois a coluna da direita (pragas depois do tratamento) apresenta tons mais claros que a coluna da esquerda (pragas antes do tratamento). Isso significa que menos indivíduos da população de pragas estão presentes após o tratamento. Este resultado está

Figura 4.5: Distribuição espacial de pragas para $\kappa = 0,5$ e $\gamma = 0,1$ (inseticida fraco) antes e depois da aplicação do inseticida nos tempos $t = 5$ (primeira linha), $t = 9$ (segunda linha) e $t = 17$ (terceira linha).



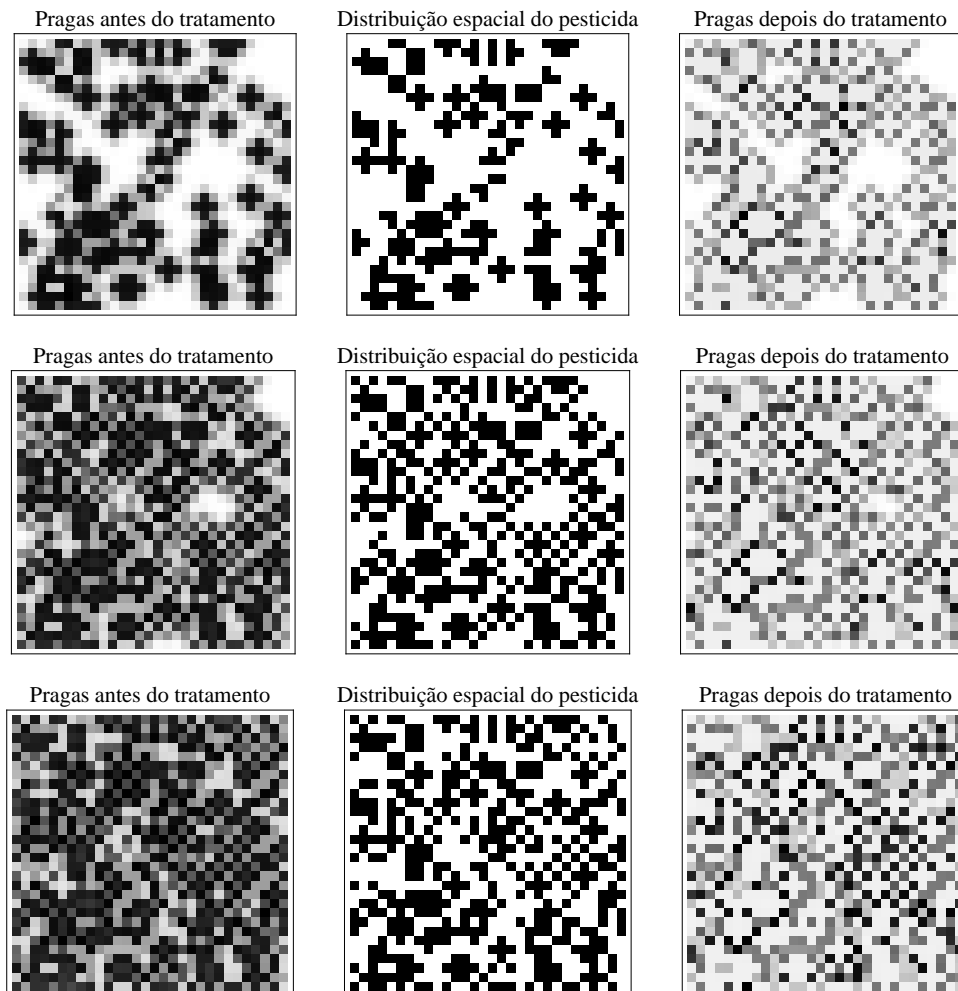
Fonte: do autor, gerada no *Mathematica* 10.0.

em consonância com a Figura 4.4 a qual apresenta altos percentuais de decrescimento na população de pragas.

Também é importante salientar, ainda em relação à Figura 4.6, que existe uma redução no número de sítios tratados. Observando a coluna do meio, vemos que existem sítios onde o inseticida não foi espalhado (sítios em branco), o que está de acordo com a Figura 4.3 que mostra altos percentuais de decrescimento no número de sítios tratados para o inseticida forte.

Portanto, o Tratamento 1 (somente inseticida) mostra-se mais eficaz para o inseticida mais forte ($\gamma = 0,95$), tanto em relação à densidade da população de pragas quanto ao número de sítios tratados. Observando que, quanto mais cedo é aplicado o inseticida no sistema, isto é, quanto menor κ , maior é a redução da população de pragas. Em contrapartida, para inseticida fraco e médio, o número de sítios tratados é maior, ou seja,

Figura 4.6: Distribuição espacial de pragas para $\kappa = 0,5$ e $\gamma = 0,95$ (inseticida forte) antes e depois da aplicação do inseticida nos tempos $t = 5$ (primeira linha), $t = 9$ (segunda linha) e $t = 17$ (terceira linha).



Fonte: do autor, gerada no *Mathematica* 10.0.

mais inseticida será aplicado no sistema para, o que pode ser indesejável para a saúde humana.

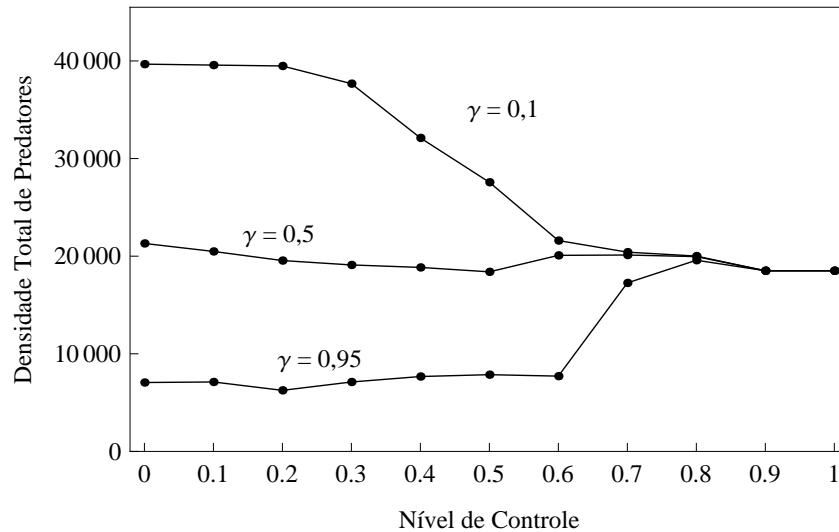
4.2.2 Tratamento 2: Inseticida e Predadores (Controle Biológico)

Agora, em cada tempo t , a densidade de pragas também é medida em cada sítio do domínio. Caso essa densidade de pragas exceda o κ (nível de controle), então o sítio é tratado espalhando inseticida capaz de matar uma fração γ de pragas e, além disso, predadores são liberados neste sítio onde o NC foi excedido.

A Figura 4.7 exibe a densidade total de predadores para os três tipos de inseticida à medida que o nível de controle aumenta. Podemos observar que, quanto mais fraco

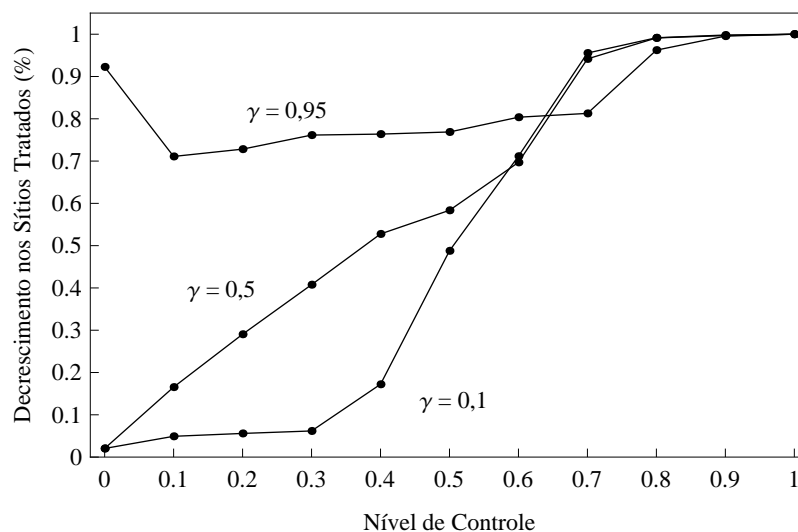
é o inseticida, maior é a população de predadores. Este fato pode ser justificado pela dependência dos predadores em relação às pragas. Como o inseticida fraco é menos eficiente no combate às pragas, estas crescem com maior intensidade no sistema, favorecendo, assim, a população de predadores. Em outras palavras, quanto maior o número de pragas, maior o número de predadores.

Figura 4.7: Densidade total de predadores para o Tratamento 2.



Fonte: do autor, gerada no *Mathematica* 10.0.

Figura 4.8: Percentual de decrescimento do número de sítios tratados para o Tratamento 2.

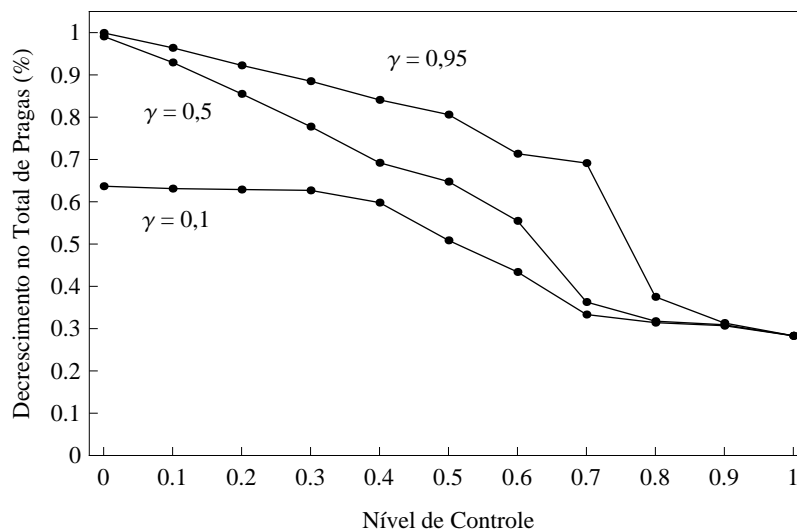


Fonte: do autor, gerada no *Mathematica* 10.0.

Por outro lado, a Figura 4.8 elucidada o percentual de decrescimento do número de sítios tratados. Podemos notar que, bem como o Tratamento 1, inseticidas mais fracos

requerem que mais sítios sejam tratados do que os inseticidas mais fortes. Isso porque inseticidas mais brandos combatem com menos vigor a praga, permitindo que esta cresça com mais intensidade, alcançando, assim, o NC mais rapidamente. Este gráfico também mostra que, do mesmo modo que no Tratamento 1, à medida que o nível de controle se aproxima de um, o número de sítios tratados se aproxima de zero, ou seja, o percentual de decrescimento se aproxima de um, independentemente da força do inseticida porque são aceitas maiores densidades de praga.

Figura 4.9: Percentual de decrescimento da população total de pragas para o Tratamento 2.



Fonte: do autor, gerada no *Mathematica* 10.0.

Finalmente, a Figura 4.9 ilustra o percentual de decrescimento da população total de pragas no sistema. Temos um comportamento semelhante ao Tratamento 1. Nota-se, neste caso, que os inseticidas fraco e moderado promovem altas reduções na população total de pragas e que, quanto mais cedo o inseticida é aplicado no sistema, maior é sua eficiência na redução da população total de pragas. O que difere do Tratamento 1, aqui, é que quando o nível de controle se aproxima de um, o percentual de decrescimento da população total de pragas se aproxima de 0,3, ou seja, apesar de não estar mais sendo espalhado inseticida no sistema, a população de pragas apresenta uma redução de 30% devido à predação exercida pelo agente biológico que ainda habita os sítios do sistema.

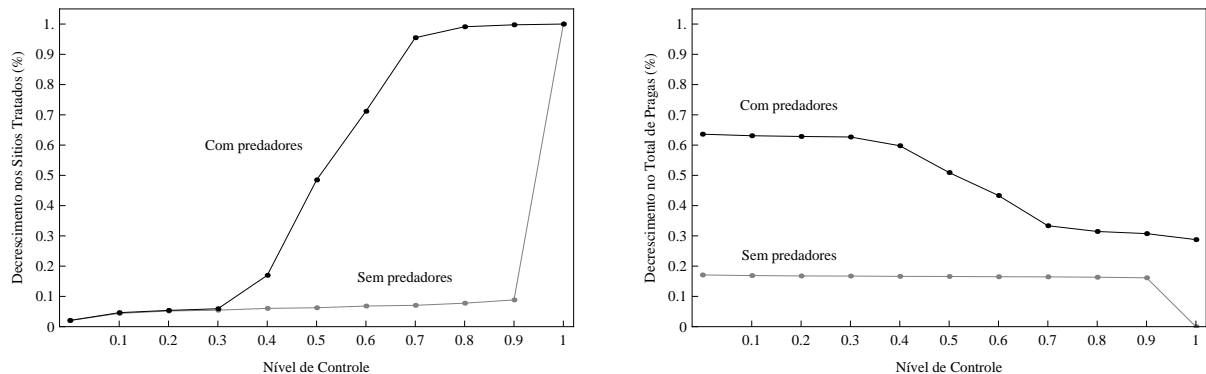
Deste modo, concluímos que o Tratamento 1 (somente inseticida) e o Tratamento 2 (inseticida e controle biológico) possuem características semelhantes: ambos requerem mais sítios tratados para inseticidas mais fracos e; os dois tratamentos proporcionam altas reduções na população de pragas quando o inseticida é forte. Assim, com o intuito de diferenciá-los e deixar nítida a eficiência de um tratamento em relação ao outro é que se faz necessário o seguinte tópico.

Comparação entre o Tratamento 1 e o Tratamento 2

Neste momento, serão apresentados alguns gráficos com o objetivo de comparar os dois tratamentos através do percentual de decrescimento do número de sítios tratados e do percentual de decrescimento da população total de pragas, ambos em relação aos níveis de controle.

A Figura 4.10 a seguir compara o Tratamento 1 e o Tratamento 2 em relação ao decrescimento no número de sítios tratados (gráfico da esquerda) e ao decrescimento no total de pragas (gráfico da direita), quando o inseticida fraco ($\gamma = 0,1$) está sendo aplicado no sistema.

Figura 4.10: Comparação entre o Tratamento 1 e o Tratamento 2 para o inseticida fraco ($\gamma = 0,1$).



Fonte: do autor, gerada no *Mathematica* 10.0.

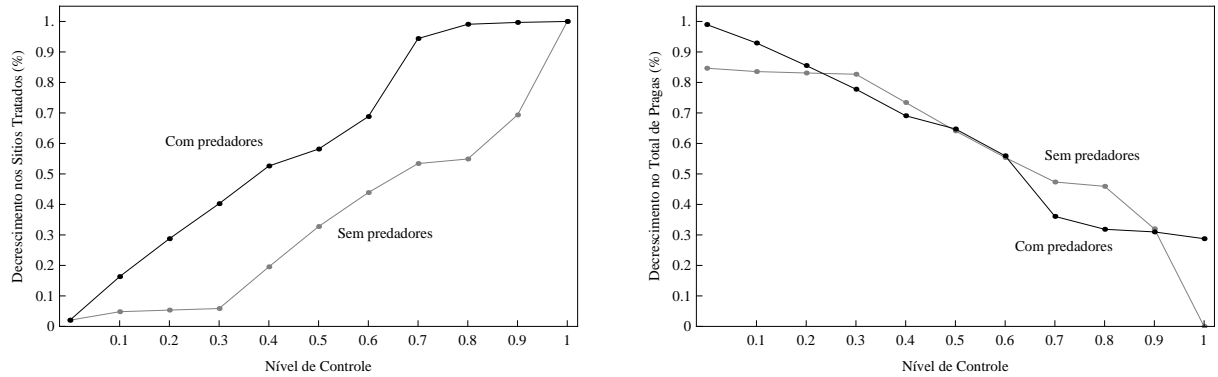
Existe uma diminuição relevante no total de pragas do Tratamento 2 em comparação com o Tratamento 1. Note que, a curva do Tratamento 2 (com predadores) permanece sempre acima da curva do Tratamento 1 (sem predadores). Isso significa que o decrescimento no total de pragas é sempre maior para o Tratamento 2 independente do nível de controle estabelecido. Desse modo, os predadores (controle biológico) possuem influência positiva no combate às pragas quando liberados no sistema.

No entanto, para baixos níveis de controle, não há redução no número de sítios tratados de um tratamento para o outro pois muitos sítios apresentam densidades de pragas maior que o NC. As curvas dos dois tratamentos, com e sem predadores, coincidem para os níveis de controle 0,1, 0,2 e 0,3. Isso quer dizer que, apesar da presença dos predadores no sistema, a quantidade de inseticida aplicada ainda permanece a mesma. A partir do nível de controle 0,3, é notória a influência dos predadores no sistema, pois fica evidente um maior decréscimo no número de sítios tratados ao passo que o nível de controle se torna cada vez maior.

Dando sequência, a Figura 4.11 também relaciona o Tratamento 1 e o Tratamento 2 em relação ao decrescimento no número de sítios tratados (gráfico da esquerda) e ao

decréscimo no total de pragas (gráfico da direita), mas, agora, quando o inseticida é moderado ($\gamma = 0,5$).

Figura 4.11: Comparação entre o Tratamento 1 e o Tratamento 2 para o inseticida moderado ($\gamma = 0,5$).



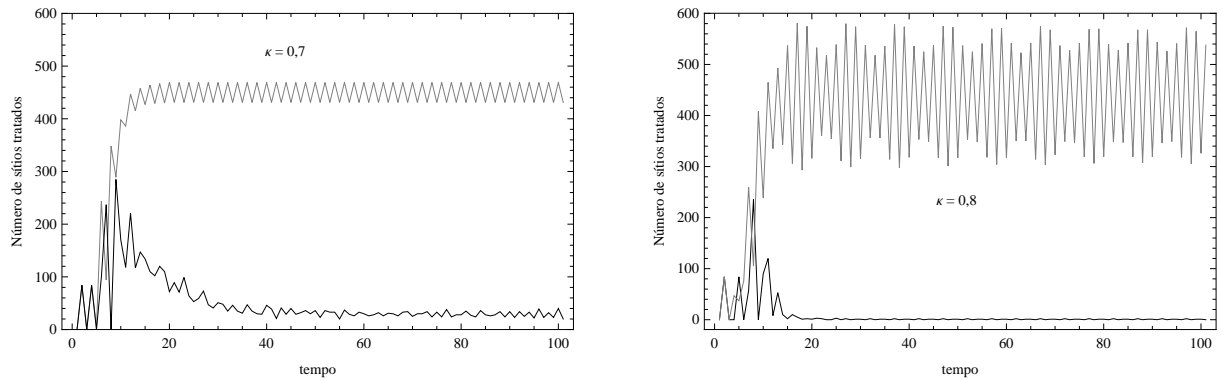
Fonte: do autor, gerada no *Mathematica* 10.0.

É notório que a presença dos predadores no sistema diminui a quantidade de sítios tratados. Basta olharmos para o gráfico da esquerda e observarmos a curva do Tratamento 2 (com predadores) acima da curva do Tratamento 1 (sem predadores), independentemente do nível de controle. Deste modo, os predadores fazem com que menos inseticida seja espalhado no sistema. Em alusão ao decréscimo no total de pragas, vemos que o Tratamento 2 possibilita uma melhora no controle da praga para baixos níveis de controle. Agora note que, para $0,3 \leq \kappa \leq 0,4$ e $0,7 \leq \kappa \leq 0,8$, o decréscimo do total de pragas é maior no Tratamento 1 do que no Tratamento 2. Como é possível, um tratamento que possui menos medidas de controle ser mais eficiente do que outro que tem mais medidas de controle? Dois processos diferentes fazem com que isso ocorra. Para $0,3 \leq \kappa \leq 0,4$ observamos no Tratamento 1 que a população de praga excede κ em todas as gerações em todos os sítios. Assim, o inseticida é aplicado em todas as gerações. Por outro lado, no Tratamento 2, as pragas não excedem κ em todos os sítios. Assim, nos sítios em que não foi aplicado inseticida em uma determinada geração, a população de pragas excede κ na geração seguinte que faz com que a redução de pragas seja menor no Tratamento 2.

A densidade de equilíbrio de pragas na presença de predadores é $n^* \cong 0,66$. Assim, para $0,7 \leq \kappa \leq 0,8$, não são aplicadas as medidas de controle pois $n^* < \kappa$. Desse modo, o sistema segue a dinâmica natural hospedeiro-parasitóide a qual promove menor decréscimo de pragas do que inseticida. A grande vantagem nesses dois casos é a redução do número de sítios tratados e portanto o custo de controle (Figura 4.12).

Por último, a Figura 4.13 compara o Tratamento 1 e o Tratamento 2 em relação ao decréscimo no número de sítios tratados (gráfico da esquerda) e ao decréscimo no total de pragas (gráfico da direita) quando o inseticida é forte ($\gamma = 0,95$). No gráfico

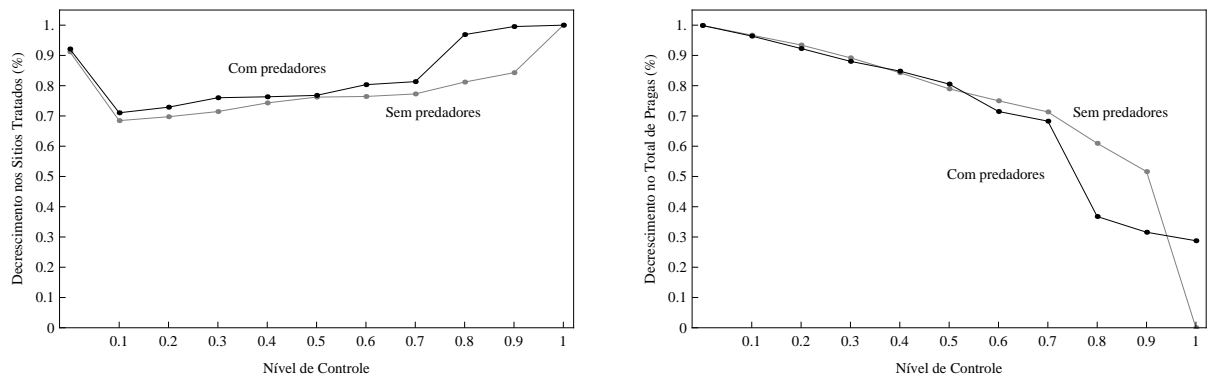
Figura 4.12: Número de sítios tratados nos níveis de controle $\kappa = 0,7$ e $\kappa = 0,8$, respectivamente, com inseticida moderado ($\gamma = 0,5$), para o Tratamento 1 (curva cinza) e Tratamento 2 (curva preta).



Fonte: do autor, gerada no *Mathematica* 10.0.

da esquerda temos uma pequena redução no número de sítios tratados quando o predador está no sistema pois a curva preta está acima da curva cinza, independentemente do NC. No outro, vemos que o Tratamento 2 (com predadores) quase não difere do Tratamento 1 (sem predadores) exceto para altos níveis de controle. Aqui, também observamos o mesmo fenômeno que no caso anterior, pelo mesmo motivo, quando o inseticida era moderado ($\gamma = 0,5$).

Figura 4.13: Comparação entre o Tratamento 1 e o Tratamento 2 para o inseticida forte ($\gamma = 0,95$).



Fonte: do autor, gerada no *Mathematica* 10.0.

Portanto, concluímos que, em relação ao número de sítios tratados, o Tratamento 2 (com predadores) é sempre mais positivo que o Tratamento 1 (sem predadores) no sentido de que, menos sítios estão sendo tratados e, assim, menos inseticida está sendo espalhado no sistema. Mas, quando se trata de combate à praga, a presença do predador no sistema é posta em cheque em alguns momentos. Para altos níveis de controle, o Tratamento 2, que possui duas medidas de controle, é menos eficiente que o Tratamento 1, tanto para

o inseticida forte quanto para o moderado. Um resultado que foge da nossa intuição ao passo que, quanto mais medidas de controle fossem aplicadas, mais sucesso teria-se na redução da praga. Assim, uma boa estratégia seria usar o Tratamento 2 escolhendo baixos níveis de controle com o inseticida moderado. Desse modo, teria-se mais redução no total da praga e menos inseticida aplicado no ecossistema.

Estes tratamentos exigem monitoramento em todos os sítios o que, na prática, pode ser inviável devido aos custos. Sendo assim, nas próximas subseções os Tratamentos 1 e 2 serão apresentados com algumas modificações nas medições da população de pragas por todo domínio. Este será dividido em quadrantes e menos medições de população da praga serão feitas para cada período de tempo t .

4.2.3 Tratamento 1 com divisão de quadrantes

O tratamento 1 com divisão de quadrantes consiste na divisão do domínio em quatro quadrantes sendo que as medições são feitas no centro de cada quadrante, em cada etapa de tempo t . Caso a densidade de pragas exceda o NC, somente o quadrante é tratado com o espalhamento do inseticida.

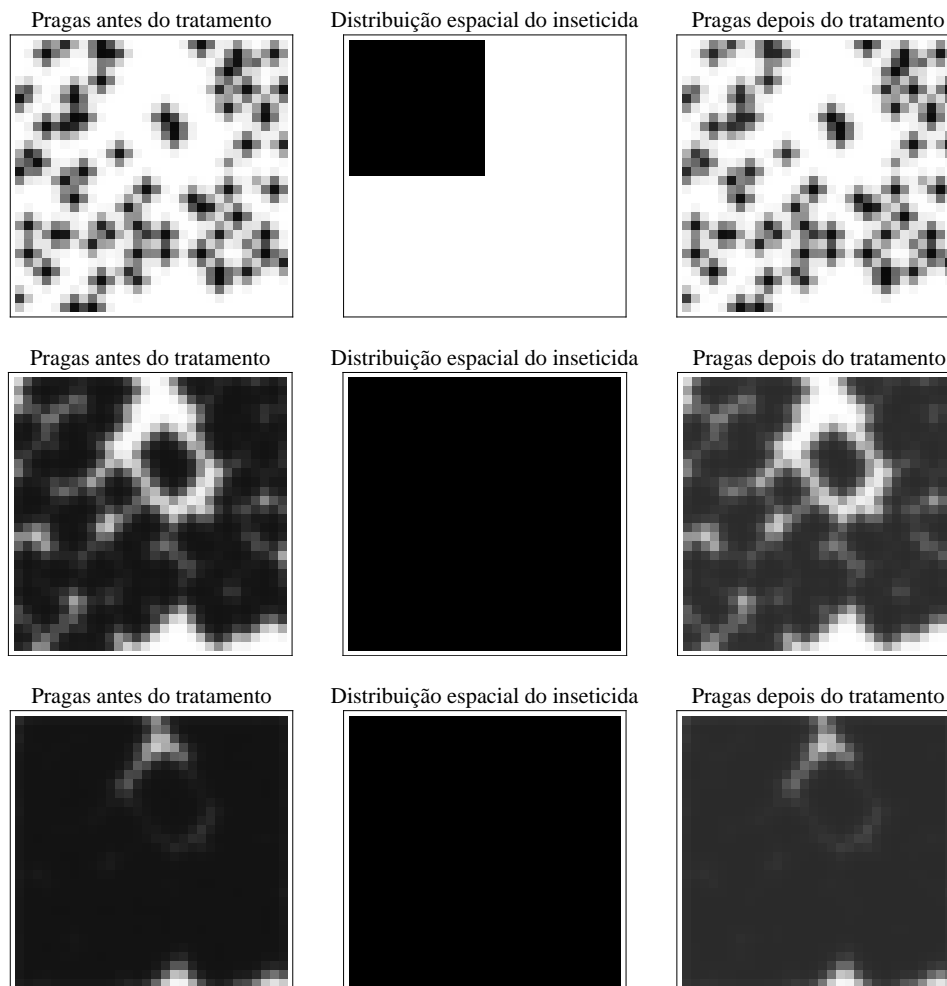
Este tratamento mostrou a mesma eficiência que o Tratamento 1 para os inseticidas fraco e moderado, ou seja, a divisão em quadrantes não ocasionou mudança nos decréscimos de sítios tratados e no total de pragas. As curvas obtidas são equivalentes às das Figuras 4.3 e 4.4 para $\gamma = 0,1$ e $\gamma = 0,5$. Isto ocorre em razão da baixa eficiência dos inseticidas em consonância com a dinâmica vital da praga que permitem o crescimento monotônico da praga até atingir os níveis de controle. A Figura 4.14 mostra a distribuição espacial da praga antes e depois do tratamento.

Nota-se que quando $t = 4$ apenas o primeiro quadrante do domínio é tratado, isto é, somente a medição feita no centro do primeiro quadrante alcançou o nível de controle estipulado e, por isso, o mesmo foi tratado. Quando $t = 10$ e $t = 15$ as medições no centro de cada quadrante atingem o nível de controle e, então, os quatro quadrantes são tratados.

Outra característica importante referente à Figura 4.14 é o crescimento monotônico da população de pragas. Percebe-se que à medida que o tempo passa, a população de pragas se desenvolve cada vez mais por todo o domínio de maneira que essa distribuição se torne homogênea. Esse comportamento das pragas contribui para que o tratamento com divisão de quadrantes não difira do Tratamento 1. Comparando as Figuras 4.5 e 4.14 nota-se a semelhança na distribuição espacial do inseticida quando t aumenta. Todos os sítios do domínio foram tratados a partir de determinado tempo t . A Figura 4.15 comprova este fato mostrando que, a partir de $t = 15$, todos os sítios do domínio foram tratados, em ambos tratamentos, o que faz um tratamento muito similar ao outro.

Diferentemente dos inseticidas fraco ($\gamma = 0,1$) e moderado ($\gamma = 0,5$), para o

Figura 4.14: Distribuição espacial da praga para $\gamma = 0,1$ (inseticida fraco) e $\kappa = 0,5$ nos tempos $t = 4$ (primeira linha), $t = 10$ (segunda linha) e $t = 15$ (terceira linha).

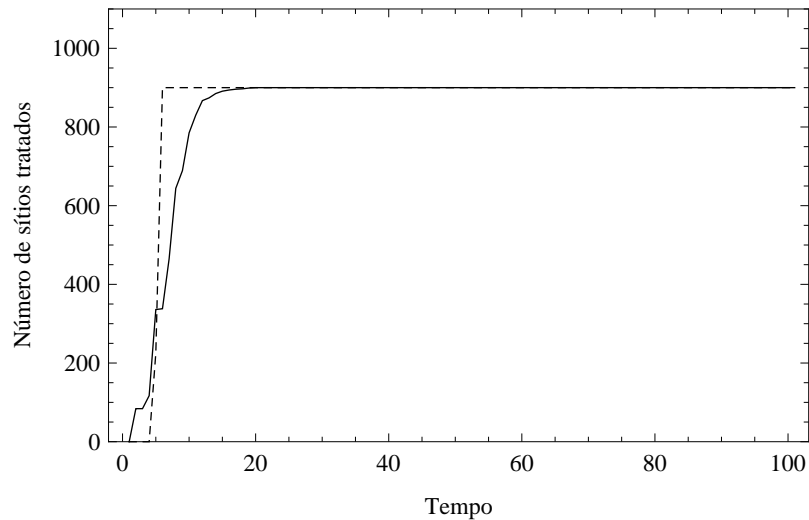


Fonte: do autor, gerada no *Mathematica* 10.0.

inseticida forte ($\gamma = 0,95$), o Tratamento 1 com divisão de quadrantes apresenta uma pequena vantagem sobre o Tratamento 1 em relação ao número de sítios tratados e ao total de pragas. Observa-se na Figura 4.16 que a curva pontilhada é sempre maior ou igual que a curva contínua, independente do NC. Isso significa que menos inseticida está sendo aplicado no sistema, o que pode ser um aspecto positivo se levarmos em consideração todos os benefícios desta redução. Em alusão ao decréscimo no total de pragas, o Tratamento 1 com divisão de quadrantes é mais eficiente no combate da mesma para NC's intermediários e altos, pois a curva pontilhada supera a contínua a partir de $\kappa = 0,3$.

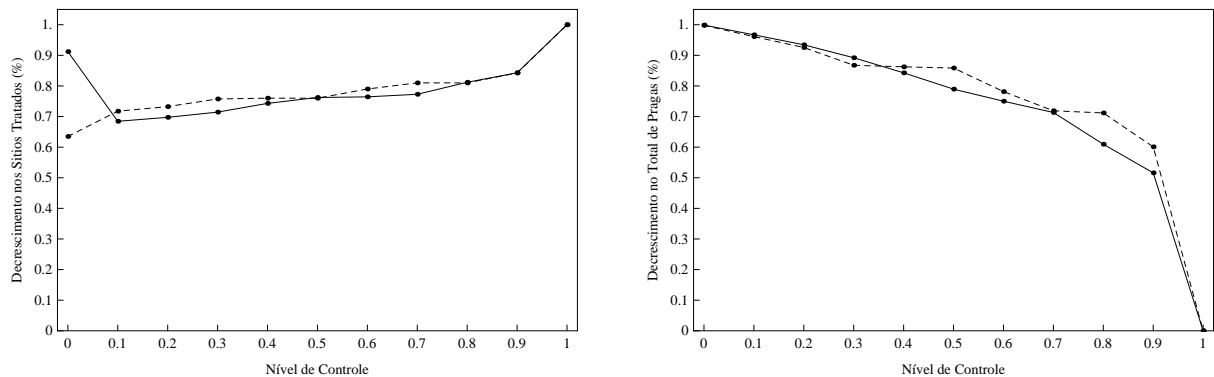
Assim, considerando as medições de população de pragas um processo dispendioso, do ponto de vista econômico, conclui-se que dividir o domínio em quadrantes é mais adequado que o Tratamento 1 independentemente do inseticida utilizado. Em outras palavras, apesar dos tratamentos apresentarem, quase que, a mesma eficiência para

Figura 4.15: Número de sítios tratados no Tratamento 1 (curva contínua) e Tratamento 1 com divisão de quadrantes (curva pontilhada) para $\gamma = 0,1$ (inseticida fraco) e $\kappa = 0,5$.



Fonte: do autor, gerada no *Mathematica* 10.0.

Figura 4.16: Comparação entre o Tratamento 1 (curva contínua) e o Tratamento 1 com divisão de quadrantes (curva pontilhada) para o inseticida forte ($\gamma = 0,95$).



Fonte: do autor, gerada no *Mathematica* 10.0.

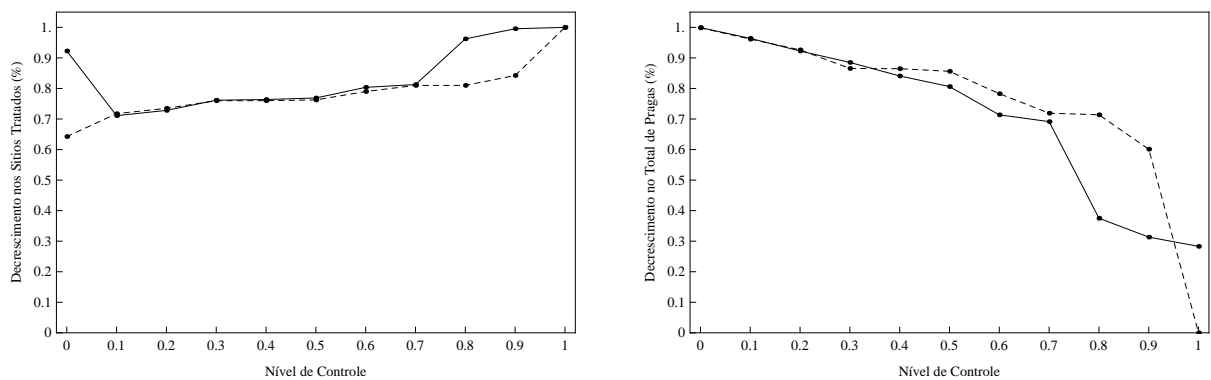
inseticidas fraco e moderado, no tratamento 1 com divisão de quadrantes, a densidade é medida em apenas 4 sítios do domínio em cada tempo t , enquanto que no Tratamento 1, para cada tempo t , todos os sítios são medidos, gerando mais gastos para a “produção”. Além disso, dividir o domínio em quadrantes para realizar as medições está mais de acordo com a realidade econômica em que está inserido nosso sistema.

Em comparação ao Tratamento 2, a divisão do domínio em quadrantes mostra mais eficiência no controle da praga e mais inseticida aplicado no sistema. Mas aqui, serão comparadas somente as curvas de decrescimento para o inseticida forte ($\gamma = 0,95$). Caso fossem comparadas as curvas dos outros inseticidas recairíamos na comparação dos

Tratamentos 1 e 2, ao passo que a divisão em quadrantes se mostrou semelhante ao Tratamento 1 para tais inseticidas.

Através da Figura 4.17 fica explícita a melhor eficiência do Tratamento 1 com divisão de quadrantes em relação ao Tratamento 2 no que se refere ao total de pragas. Percebe-se a curva pontilhada acima da contínua quando $\kappa > 0,3$. Isso significa que há um maior decréscimo na população de pragas para o inseticida forte confirmando a maior eficiência da divisão do domínio em quadrantes.

Figura 4.17: Comparação entre o Tratamento 2 (curva contínua) e o Tratamento 1 com divisão de quadrantes (curva pontilhada) para o inseticida forte ($\gamma = 0,95$).



Fonte: do autor, gerada no *Mathematica* 10.0.

Em contrapartida, para o mesmo inseticida, o Tratamento 1 com divisão de quadrantes apresenta uma pequena desvantagem sobre o tratamento 2 em relação ao número de sítios tratados. Observa-se que a curva pontilhada está abaixo da curva contínua para altos NC's. Isso significa que há um maior decréscimo nos sítios tratados, ou seja, menos inseticida está sendo aplicado no sistema no tratamento 2.

Outra característica importante que fica evidente aqui, ainda em relação à Figura 4.17, é a maior eficiência no combate à praga do Tratamento 1 com divisão de quadrantes, embora este possua menos medidas de controle (somente inseticida). Esse fenômeno ocorre pelo mesmo motivo que na seção anterior onde o número de sítios tratados é o fator determinante. Isto é, existe uma maior diferença na quantidade de sítios tratados de um tratamento para outro. O Tratamento 2, apesar das duas medidas de controle, inseticida e predadores, trata uma quantia de sítios menor que o Tratamento 1 com divisão de quadrantes para $\kappa = 0,8$ e $\kappa = 0,9$. Isso faz com que a população de pragas se desenvolva em mais sítios sem a presença de inseticida e predadores diminuindo a eficiência no combate das pragas e justificando, assim, a maior diferença entre as curvas pontilhada e contínua, no gráfico da direita, para estes mesmos NC's.

Portanto, considerando novamente as medições da população de pragas um processo dispendioso, do ponto de vista econômico, conclui-se que o Tratamento 1 com divisão

de quadrantes é mais adequado que o Tratamento 2 independentemente do inseticida utilizado. Isso se deve, outra vez, ao menor número de medições da população de pragas feitas para cada período de tempo t . Além disso, quando o inseticida é forte ($\gamma = 0,95$), o Tratamento 1 com divisão de quadrantes é mais eficiente no combate à praga. Ainda, vê-se, mais uma vez, que o controle biológico (predadores) desempenha um papel fundamental no sistema, pois diminui o número de sítios tratados, ou seja, a quantidade de inseticida espalhado no sistema.

Por conseguinte, com o objetivo de diminuir ainda mais as medições feitas no domínio, este será visto como se fosse um sítio só. Esta estratégia de combate a população de pragas será denominada Tratamento Global.

4.2.4 Tratamento Global

Aqui, para cada período de tempo t , a medição da população de pragas é feita apenas no centro domínio. Caso essa medida exceda o NC então todo o domínio é tratado espalhando-se inseticida. Este tratamento é denominado Tratamento Global por considerar, para efeito de monitoramento, todo o domínio como um sítio só.

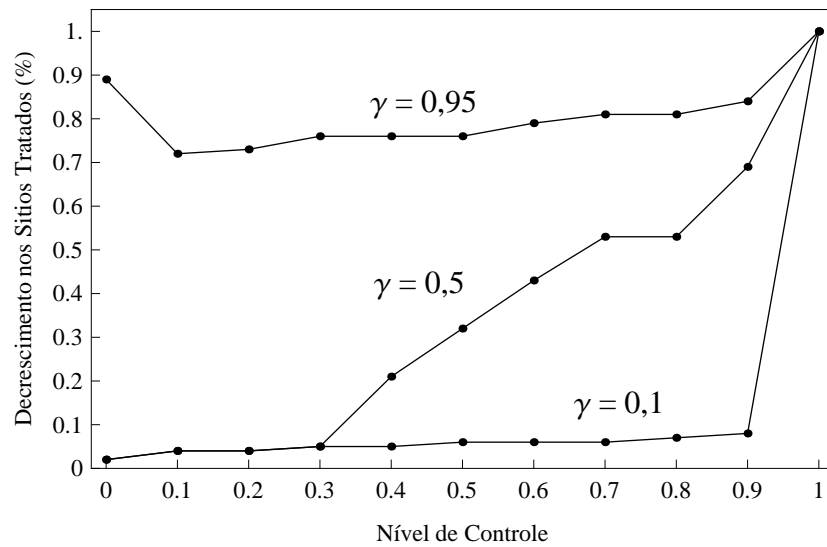
As Figuras 4.18 e 4.19 elucidam o percentual de decrescimento do número de sítios tratados e da população total de pragas, respectivamente. Verifica-se que existe uma semelhança entre o Tratamento Global, o Tratamento 1 e, não obstante, o Tratamento 1 com divisão de quadrantes. Basta comparar a Figura 4.18 com a Figura 4.3 e a Figura 4.19 com a Figura 4.4. Constata-se os mesmos percentuais de decrescimento no número de sítios tratados e da população total de pragas. Isso significa que os Tratamentos 1 e Global são equivalentes, logo, as mesmas conclusões obtidas para o Tratamento 1 valem para o Tratamento Global.

Mas o mais importante aqui, é ressaltar a diferença da quantidade de medições da população de pragas realizadas de um tratamento para outro. Em outras palavras, no Tratamento 1, para cada período de tempo t , são feitas medições da população de praga em todos os sítios do domínio, enquanto que, no Tratamento Global somente é realizada uma medição no sítio central do mesmo. Desse modo, considerando novamente as medições da população de pragas um procedimento que requer mais investimento econômico, o Tratamento Global é mais vantajoso que o Tratamento 1, pelo fato de precisar de menos medições a cada tempo para ser realizado.

Além disso, considerando o período de tempo t como sendo uma geração da praga, o Tratamento Global estaria mais de acordo com a realidade biológica das medições. Ou seja, seria feita aproximadamente apenas uma medição por mês para deliberar o espalhamento do inseticida no sistema. Enquanto que no Tratamento 1, teriam que ser feitas 900 medições por geração, o que pode ser inviável de se realizar.

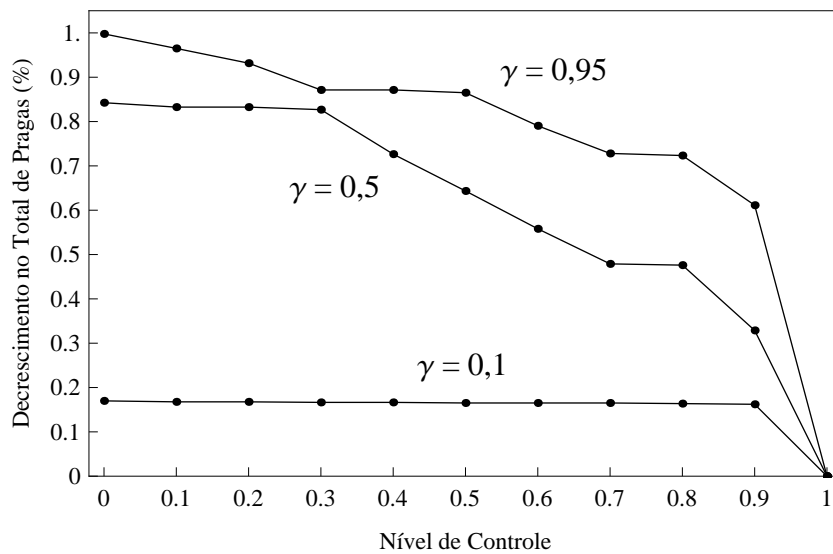
Portanto, com o objetivo de apontar qual tratamento é mais eficiente no combate

Figura 4.18: Percentual de decrescimento do número de sítios tratados para o Tratamento Global.



Fonte: do autor, gerada no *Mathematica* 10.0.

Figura 4.19: Percentual de decrescimento da população total de pragas para o Tratamento Global.



Fonte: do autor, gerada no *Mathematica* 10.0.

à praga, apresentar-se-ão as subseções seguintes. Estas exibirão dois tipos de NC onde se decidirá pelo espalhamento de inseticida ou aplicação de predadores no sistema.

4.2.5 Tratamento com limiares diferentes

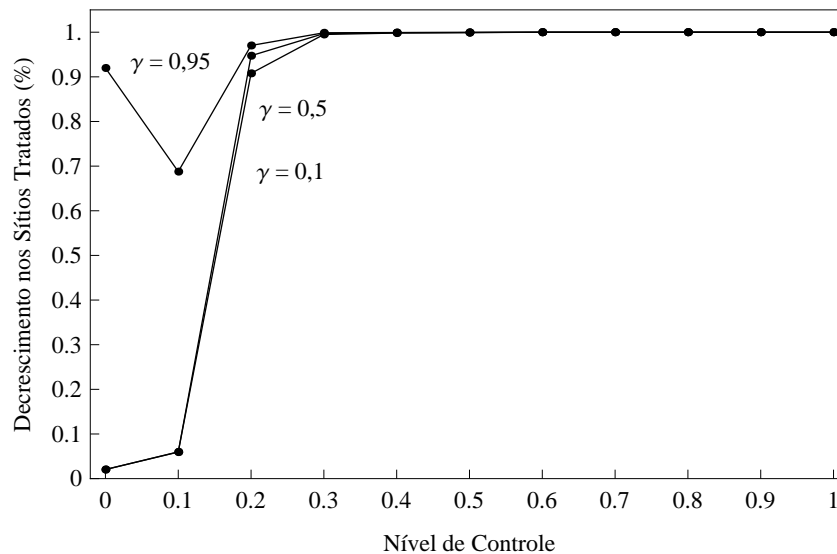
Este tratamento consiste na escolha de dois limiares diferentes para o espalhamento de inseticida e predadores no sistema. Um deles é fixo, $\kappa_p < \kappa$, e consiste em uma densidade mais baixa da população de pragas que, ao ser alcançada, somente predadores são espalhados no sistema. Vamos analisar o resultado para diferentes valores do limiar κ para aplicação de inseticida, como já foi feito nas seções anteriores.

Assim, para cada período de tempo t , a medição da população de pragas é feita em todos os sítios do domínio. Caso a densidade exceda o limiar $\kappa_p = 0, 1$, então predadores são espalhados naquele sítio. Se a densidade alcançar κ , então inseticida é espalhado no sítio.

Além disso, consideramos o tratamento com limiares diferentes com uma modificação: o parâmetro b , que representa a taxa de crescimento da população de predadores, agora assume o valor $b = 10$. Isso representa uma eficiência maior do predador em conter o crescimento da população de pragas.

Através da Figura 4.20 nota-se que para baixos níveis de controle κ , quanto mais forte é o inseticida maiores são o decrescimento nos sítios tratados e no total de pragas. Também, a Figura 4.21 elucida que quanto mais cedo aplicam-se as medidas de controle no sistema, mais efetivo é o tratamento no controle da praga. Resultado similar ao do Tratamento 2.

Figura 4.20: Percentual de decrescimento do número de sítios tratados com inseticida para $\kappa_p = 0, 1$.

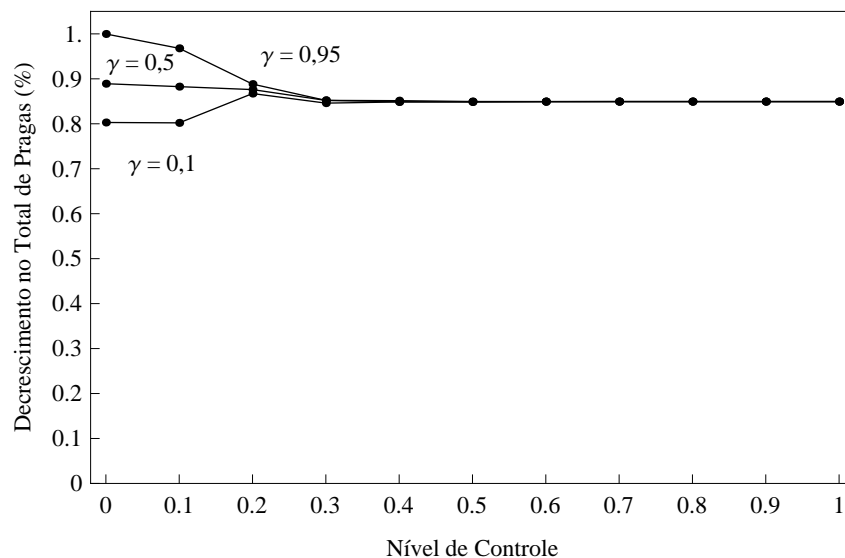


Fonte: do autor, gerada no *Mathematica* 10.0.

Mas, quando o nível de controle atinge valores intermediários e altos, nota-se que inseticidas diferentes também conduzem o sistema a níveis de decrescimento iguais, tanto

para os sítios tratados quanto para a população total de pragas. Quando $\kappa > 0,2$, não há mais aplicação de veneno no sistema pois o percentual de decrescimento nos sítios tratados alcança 1. Isso significa que a população de pragas está sendo controlada apenas pela população de predadores. Por este motivo, a força dos inseticidas não faz diferença no sistema. Sendo assim, a população total de pragas permanece constante quando o $\kappa > 0,2$. Isso quer dizer que somente os predadores controlam a praga em quase 90% do seu total. Do mesmo modo que o tratamento anterior, do ponto de vista biológico, essa característica é um ponto positivo no sentido de que menos inseticida está sendo aplicado no sistema.

Figura 4.21: Percentual de decrescimento da população total de pragas no Tratamento com limiares diferentes para $\kappa_p = 0,1$.



Fonte: do autor, gerada no *Mathematica* 10.0.

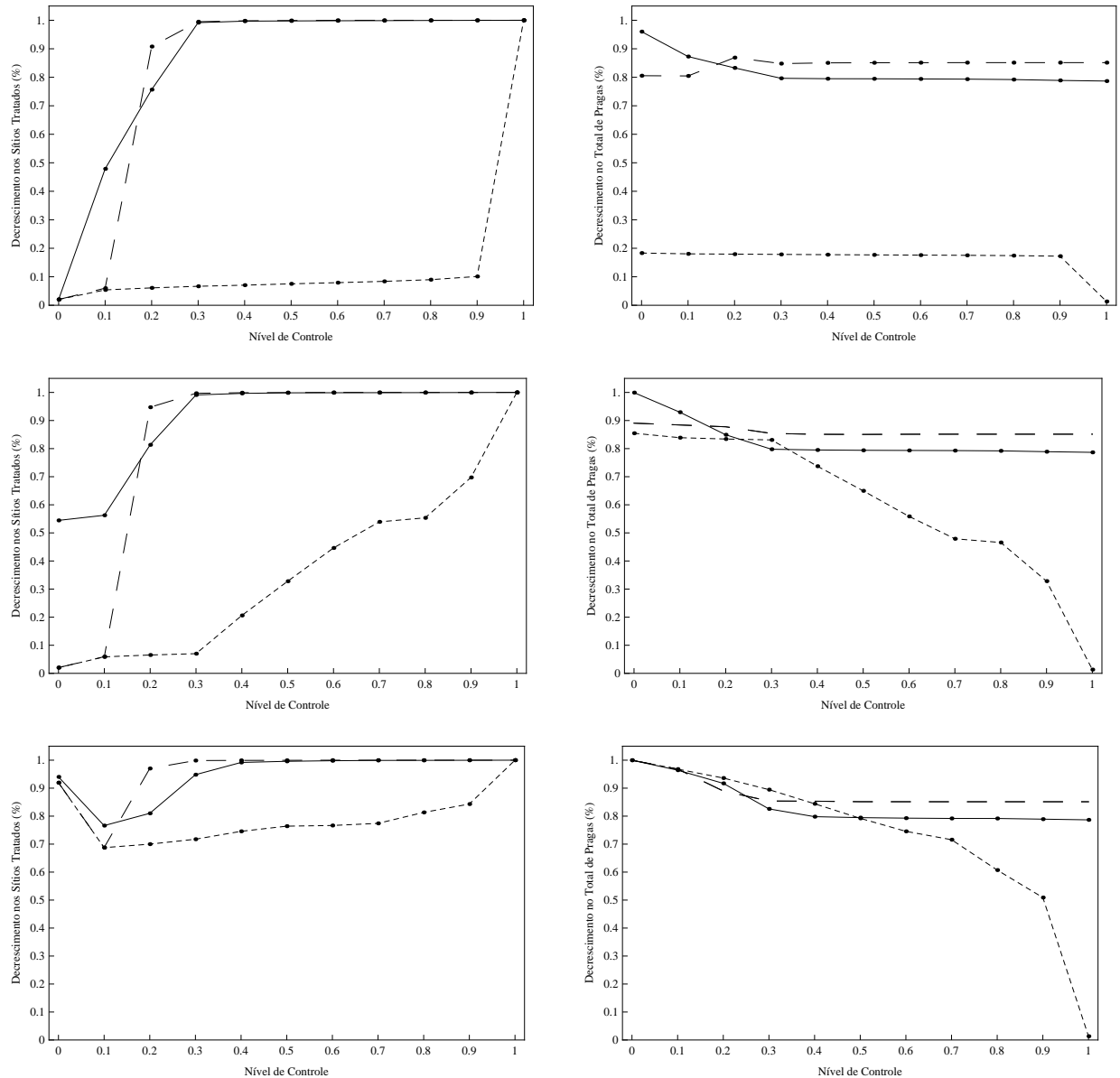
A seguir será exibida a comparação entre os Tratamentos 1, 2 e com limiares diferentes. Para que tal comparação seja mais razoável, consideraremos a mesma alteração no parâmetro b de 1,9 para 10.

Comparação entre o Tratamento 1, 2 e com limiares diferentes.

A Figura 4.22 esboça o percentual de decrescimento de sítios tratados com inseticida (gráficos da esquerda) e no total de pragas (gráficos da direita) para os inseticidas fraco (gráficos da primeira linha), moderado (gráficos da segunda linha) e forte (gráficos da terceira linha) em tratamentos diferentes. A curva pontilhada representa o Tratamento 1, a contínua o Tratamento 2 e a tracejada o Tratamento com limiares diferentes. Nota-se que o Tratamento 2 e o Tratamento com limiares diferentes exigem menos inseticida a ser aplicado no sistema do que o Tratamento 1. Isso se deve aos altos percentuais de

decrecimento de sítios tratados das curvas contínua e tracejada, independentemente do inseticida utilizado.

Figura 4.22: Percentual de decrecimento nos sítios tratados com inseticida (gráficos da esquerda) e da população total de pragas (gráficos da direita) para os inseticidas fraco (primeira linha), moderado (segunda linha) e forte (terceira linha).



Fonte: do autor, gerada no *Mathematica* 10.0.

Exceto para baixos limiares, não há mais aplicação de veneno no sistema para os tratamentos 2 e com limiares diferentes pois as curvas (contínua e tracejada) atingem o valor 1. Assim, os Tratamentos 2 e com limiares diferentes são mais favoráveis ao ecossistema e à saúde humana.

Em referência ao total de pragas, o Tratamento com limiares diferentes é mais

vantajoso que os demais. Exceto para limiares baixos, a curva tracejada (tratamento com limiares diferentes) sempre se apresenta acima das outras. Isso quer dizer que o percentual de decréscimo na população de pragas é maior que com os outros tratamentos. Estas altas quedas na população de pragas se devem à maior aplicação de predadores no sistema e da maior eficiência com que estes atacam a praga com a mudança do parâmetro b de 1,9 para 10. Como existem dois limiares, o mais baixo, κ_p , é mais rapidamente alcançado pela praga e, assim, mais predadores são espalhados nestes sítios com o limiar excedido. Além disso, este controle da praga está sendo feito apenas com predadores, o que favorece o ecossistema uma vez que os predadores não a prejudicam.

Portanto, o Tratamento com limiares diferentes é uma boa alternativa para o controle da praga pois promove grande redução na população total sem a aplicação excessiva de inseticida. A seguir serão apresentadas as conclusões da pesquisa bem como as intenções de trabalhos futuros.

Capítulo 5

CONCLUSÕES

Compreendendo os estudos realizados ao longo deste trabalho, entende-se esse momento da redação como de conclusão da presente pesquisa. Buscando atender os objetivos propostos, elaboramos um modelo de equações a diferenças para descrever um sistema praga-predador-inseticida espacialmente distribuído. No Capítulo 2, anteriormente à formulação do modelo, abordamos o Manejo Integrado de Pragas versando sobre seus conceitos e suas principais características.

No Capítulo 3, buscamos descrever a dinâmica do modelo bem como o seu estudo analítico qualitativo. Inicialmente, analisamos os parâmetros envolvidos atribuindo a estes sentido biológico. No estudo, adimensionalizamos e calculamos as soluções de equilíbrio, bem como, a estabilidade de cada solução. Para determinar a estabilidade das soluções de equilíbrio (\bar{n}_1, \bar{p}_1) (extinção de ambas as espécies), (\bar{n}_2, \bar{p}_2) (extinção do predador) e (\bar{n}_3, \bar{p}_3) (coexistência das espécies), utilizamos o critério de estabilidade para um sistema de duas equações a diferenças não lineares. Por último, apresentamos diagramas de bifurcação para mostrar o comportamento dessas soluções com relação ao parâmetro b .

No Capítulo 4, propomos incluir a distribuição espacial dos indivíduos por meio de uma Rede de Mapas Acoplados. Em seguida, exibimos como ocorre a aplicação de inseticida e/ou predadores (controle biológico) no sistema. Completando este capítulo, apresentamos algumas simulações feitas discriminando tipos diferentes de tratamento: Tratamento 1, somente inseticida; Tratamento 2, inseticida e predadores (controle biológico); Tratamento 1 com divisão do domínio em quadrantes; Tratamento Global, considera o domínio como sendo um sítio só; e Tratamento com limiares diferentes.

Constatamos que o Tratamento 1 (somente inseticida) mostra-se mais eficaz para o inseticida mais forte ($\gamma = 0,95$), tanto em relação à densidade da população de pragas quanto ao número de sítios tratados. Evidenciamos que, quanto mais cedo é aplicado o inseticida no sistema, isto é, quanto menor o NC, maior é a redução da população de pragas. Em contrapartida, o número de sítios tratados é maior, ou seja, mais inseticida será aplicado no sistema, o que pode prejudicar a saúde humana, por exemplo.

Mostramos também, que o Tratamento 1 (somente inseticida) e o Tratamento 2

(inseticida e controle biológico) possuem características semelhantes: os dois tratamentos requerem mais sítios tratados para inseticidas mais fracos e ambos proporcionam altas reduções na população de pragas quando o inseticida é forte. Contudo, quando comparados, concluímos que em relação ao número de sítios tratados, o Tratamento 2 (com predadores) é sempre mais positivo que o Tratamento 1 (sem predadores) no sentido de que, menos sítios estão sendo tratados e, assim, menos inseticida está sendo espalhado no sistema. Em outras palavras, podemos afirmar que a implementação do MIP é favorável ao ecossistema e à saúde humana.

Por outro lado, quando se trata de combate à praga, a presença do predador no sistema é discutida em alguns momentos. Para altos níveis de controle, o Tratamento 2, que possui duas medidas de controle, é menos eficiente que o Tratamento 1, tanto para o inseticida forte quanto para o moderado. Novamente, é um resultado que foge da nossa intuição uma vez que, quanto mais medidas de controle fossem aplicadas, mais sucesso teríamos na redução da praga. Desse modo, uma boa estratégia seria usar o Tratamento 2 escolhendo baixos níveis de controle em consonância com o inseticida moderado. Assim, o MIP oferece mais redução no total da praga e um inseticida menos agressivo à saúde humana.

Alterando as medições da população de pragas para cada etapa de tempo t , obtivemos pequenas diferenças entre as eficiências dos Tratamento 1, Tratamento 1 com divisão de quadrantes e Tratamento Global, tanto em relação ao número de sítios tratados quanto à população total de pragas. Concluímos que esse fato se deve à dinâmica vital da praga que cresce de maneira monotônica, se distribuindo homoganeamente por todo o domínio. Mas o resultado mais importante se baseia na quantidade de medições da população de pragas realizadas de um tratamento para outro. Em outras palavras, no Tratamento 1, para cada etapa de tempo t , são feitas medições da população de praga em todos os sítios do domínio enquanto que no Tratamento 1 com divisão de quadrantes e no Tratamento Global somente são realizadas quatro e uma medições, respectivamente. Sendo assim, considerando, como já foi dito anteriormente, as medições da população de pragas um procedimento que requer mais investimento econômico, o Tratamento Global é mais vantajoso que o Tratamento 1 e o Tratamento 1 com divisão de quadrantes, pelo fato de precisar de menos medições a cada período de tempo para ser realizado. Além disso, considerando os períodos de tempo t como sendo gerações, o Tratamento Global estaria mais de acordo com a realidade biológica das medições.

Finalmente, estabelecemos dois limiares de população de praga e formulamos um novo tratamento com duas tomadas de decisão. O Tratamento com limiares diferentes resultou em menos aplicação de inseticida no sistema do que no Tratamento 1. Constatamos altos percentuais de decréscimo de sítios tratados independentemente do inseticida utilizado. Exceto para baixos limiares, não houve mais aplicação de veneno no sistema. Em referência ao total de pragas, o Tratamento com limiares diferentes se mostrou mais

eficiente que os demais. Exceto para limiares baixos, o decréscimo na população de pragas é maior que o dos outros tratamentos. Estas altas quedas na população de pragas se deram em razão da maior aplicação de predadores no sistema e da maior eficiência com que estes atacam a praga com a mudança do parâmetro b de 1,9 para 10. Como existem dois limiares, o mais baixo é mais rapidamente alcançado pela praga e, assim, mais predadores foram espalhados nestes sítios com o limiar excedido. Além disso, este controle da praga foi feito apenas pela população de predadores, o que favorece a planta uma vez que os predadores não a prejudicam.

Deste modo, o MIP aplicado através do Tratamento com limiares diferentes, novamente apresentou-se como uma boa alternativa de manejo da praga, desta vez promovendo grande redução na população total sem a aplicação excessiva de inseticida, enaltecendo mais uma vez a importância do controle biológico (predadores) no sistema.

Portanto, apesar de estarmos concluindo esta pesquisa de mestrado e obtermos resultados relevantes até o momento, futuramente pretende-se ampliar este trabalho. Para isso, projeta-se abordar a dinâmica vital das pragas de acordo com outra função. Também almeja-se incluir outras técnicas de controle de pragas, além do controle biológico, e outras formas de medição da população.

REFERÊNCIAS

CARA, E.R. **Modelos Matemáticos para o Controle da Praga Grapholita molesta em Culturas de Pessegueiros**. 2016, 163 f. Tese (Doutorado em Matemática Aplicada) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, RS, 2016.

DEBACH, P. **Control biológico de las plagas de insectos y malas hierbas**. Tradução de Carlos Manuel Castaños. México: Compañía Editorial Continental S.A., 1968.

EDELSTEIN-KESHET, L. **Mathematical Models in Biology**. Randon House, New York, 1988.

FRANCO, S. M. **Um modelo discreto para interações planta-herbívoro-predador nos acervos das coleções de teses e coletânea da Biblioteca Central da Universidade Federal de Santa Maria/RS**. 2015. 57 p. Dissertação (Mestrado em Matemática Aplicada) – Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria, 2015.

GALLO, D. et al. **Entomologia agrícola**. Piracicaba: FEALQ, 2002.

INSTITUTO BRASILEIRO DE GEOGRAFIA E ESTATÍSTICA. **Produção Agrícola 2016**. Rio de Janeiro, 2016. Disponível em: [ftp://ftp.ibge.gov.br/Producao_Agricola/Levantamento_Sistematico_da_Producao_Agricola_\[mensal\]/Comentarios/lspa_201606comentarios.pdf](ftp://ftp.ibge.gov.br/Producao_Agricola/Levantamento_Sistematico_da_Producao_Agricola_[mensal]/Comentarios/lspa_201606comentarios.pdf) . Acesso em: 18 jul. 2016.

KOGAN, M. **Integrated Pest Management: Historical Perspectives and Contemporary Developments**. Annual Review of Entomology, n. 43, p. 243-270. 1998.

KOT, M. **Elements of Mathematical Ecology**. Cambridge: Cambridge University Press, 2001.

MURRAY, J. D. **Matemathical Biology**. 3.ed. Berlin: Springer- Verlang, 2003.

NAKANO, O.; NETO, S, S.; ZUCCHI, R.A. **Entomologia Econômica**. São Paulo: Monsanto EDITORA Gráfica Ltda, 1981.

PICANÇO, M.C. **Manejo Integrado de Pragas:** apostila. Viçosa: Departamento de Biologia Animal, 2010.133p.

RODRIGUES, Luiz Alberto D.; MISTRO, Diomar C. Minicurso – Modelos Discretos Espacialmente Distribuídos em Dinâmica Populacional. In: XVI CONGRESSO LATINO-AMERICANO DE BIOMATEMÁTICA, 2007, Campinas/SP. Anais... Campinas/SP: Universidade Estadual de Campinas, 2007. p. 02 – 37.

RODRIGUES, L. A. D. et al. **Spatio temporal dynamics of an insect population in response to chemical substances.** Ecological Complexity, n.16, p.51-58, 2013.

VRIES, G. de. et al. **A Course in Mathematical Biology:** Quantitative Modeling with Mathematical and Computational Methods. Philadelphia: Siam, 2006.

WILDER, J. W.; CHRISTIE, I.; COLBERT, J. J. **Modelling of two-dimensional spatial effects on the spread of forest pests and their management.** USA: Ecological Modelling, n. 82, p. 287 – 298, 31 may. 1994.